UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS DE CHAPECÓ

PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

TANCREDO HERIBERTO TONELLO

ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMATICA

CHAPECÓ
2017

TANCREDO HERIBERTO TONELLO

ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMATICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges.

CHAPECÓ
2017

PROGRAD/DBIB - Divisão de Bibliotecas

Tonello, Tancredo Heriberto
Argumentação em atividades de modelagem matemática/ Tancredo Heriberto Tonello. -- 2017.
72 f.

Orientador: Pedro Augusto Pereira Borges. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação em Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Chapecó, SC, 2017.

1. Argumentação. 2. Modelagem. 3. Matemática. I. Borges, Pedro Augusto Pereira, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

TANCREDO HERIBERTO TONELLO

ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMATICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul, para obtenção do título de Mestre em Matemática, defendido em banca examinadora em 19/12/2017.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

Aprovado em: 19 / 12 / 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges - UFFS

Roque Strieder

Prof. Dr. Roque Strieder - UNOESC

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS

Prof. Dra. Nilce Fátima Svheffer - UFFS

Chapecó/SC, mês de dezembro de 2017

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me presentear a oportunidade de conhecimento.

Ao orientador professor Dr. Pedro Augusto Pereira Borges, pela confiança, total apoio e contribuição na realização do trabalho.

A todos os professores do curso.

A toda minha família, em especial esposa e filhos.

A todos meus colegas de turma, em especial meus amigos Patric Machado de Menezes e Carlinho Augustinho Horn.

RESUMO

A modelagem na educação matemática vem se desenvolvendo significativamente nos últimos quarenta anos. Mesmo assim ainda não chegou significativamente nas escolas, provavelmente por limitações na formação em modelagem dos educadores, pelo pouco tempo para preparação de aulas, ou pela carência de estudos que mostrem o tipo de conhecimento ensinado e como ela contribui efetivamente para a aprendizagem da Matemática. O presente trabalho pretende contribuir nesse sentido, investigando os tipos de argumentações que estão presentes nas atividades de ensino de Matemática com modelagem na Escola Básica. Foram criados dois tipos de atividades: as de instrução matemática e as de modelagem, com a finalidade de revisar conteúdos e resolver problemas reais, respectivamente. A aplicação ocorreu em uma turma do segundo ano do Ensino Médio. Um quadro com categorias de linguagem e argumentações foi desenvolvido e utilizado para analisar as manifestações dos alunos em avaliações ou anotadas em diário de bordo. Observou-se que os tipos de linguagens e argumentações dependem da forma de condução das atividades didáticas, que no processo de modelagem os tipos de argumentação mais frequentes são aqueles baseados em referências (experiências anteriores, pessoas e livros) e que os argumentos dedutivos e de generalização tendem a compor a etapa final do processo de argumentação.

Palavras chave: Argumentação; modelagem matemática; ajuste de curvas.

ABSTRACT

Modeling in mathematics education has been developing significantly over the last forty years. Even so, it has not yet arrived significantly in schools, probably due to limitations in the modeling training of educators, the lack of time for class preparation, or the lack of studies that show the type of knowledge taught and how it contributes effectively to the learning of Mathematics. The present work intends to contribute in this sense, investigating the types of arguments that are present in the teaching activities of Mathematics with modeling in the Basic School. Two types of activities were created: mathematical instruction and modeling, in order to review contents and solve real problems, respectively. The application occurred in a second year high school class. A framework with language and argumentative categories was developed and used to analyze students' statements in assessments or annotated in logbooks. It was observed that the types of languages and arguments depend on the way of conducting didactic activities, that in the modeling process the most frequent types of argumentation are those based on references (previous experiences, people and books) and that the deductive and generalization tend to compose the final stage of the argumentation process.

Keywords: Argumentation; mathematical modeling; curve adjustment.

SUMARIO

1. INTRODUÇÃO 7

2. PESQUISAS RELACIONADAS À ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA.................9

3. ARGUMENTAÇÃO, ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA..11

3.1 O conhecimento matemático e o currículo escolar 11

3.2 Sobre as formas de argumentação no ensino de Matemática...............................16

3.3 O equilíbrio entre criação, intuição, sentido do conhecimento e a argumentação matemática na escola...18

4. METODOLOGIA DA PESQUISA...20

4.1 Elaboração de atividades de ensino...20

4.2 Coleta de dados e categorias de análise 22

5. A ARGUMENTAÇÃO NAS ATIVIDADES DE ENSINO 26

5.1 Relato geral da aplicação das atividades em classe...26

5.2 Linguagens e argumentação nas atividades de ensino 29

5.2 Análise e interpretação dos tipos de linguagem e argumentações 35

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS...41

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 43

ANEXO A - ATIVIDADES DE ENSINO 46

ANEXO B - DIÁRIO DE BORDO 65

1. INTRODUÇÃO

Durante milênios a humanidade utiliza a matemática aplicando-a em tarefas como construção, agrimensura, finanças, entre outras tantas atividades necessárias para a estabilidade de uma sociedade. Em todas essas áreas, quase sempre passam despercebidas, justificativas, provas, demonstrações e argumentação matemática, parte esta da matemática que tem fundamental importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a comprovação de enunciados.

Na educação básica, a importância atribuída ao ensino da lógica das proposições e demonstrações é bem menor do que ao ensino de processos de execução de algoritmos. O status de verdade de alguma proposição é dado pelos livros, pelo professor ou de forma intuitiva, não havendo preocupação com a argumentação matemática na escolha das atividades de ensino. No entanto, parte-se do pressuposto de que existem maneiras de conduzir o ensino, de modo que os alunos sejam incentivados a expressarem argumentos matemáticos de várias formas, sejam por justificativas próprias, baseando-se em experiências vivenciadas ou apoiando-se em exemplificação do professor e materiais concretos.

A modelagem na educação matemática vem se desenvolvendo significativamente nos últimos quarenta anos, como pode-se observar pela multiplicação de eventos específicos, com destaque para CNMEM (Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática), pela quantidade de dissertações de mestrado e teses de doutorado e de artigos em periódicos nacionais publicados sobre o tema. Mesmo assim, a modelagem ainda não chegou significativamente nas escolas, provavelmente porque muitos educadores têm dificuldades para justificar a utilização da matemática ensinada, tem pouco tempo para preparação de aulas, tem formação precária em modelagem e ainda, existem poucas publicações de materiais voltados para o ensino básico, tais como relato de experiências.

A argumentação no ensino da matemática atualmente, vem sendo pesquisada sob vários aspectos: Aguilar Junior e Nasser (2014) analisam como o professor desenvolve e avalia a habilidade de argumentação e prova em Matemática; Carvalho e Ripoll (2013) relacionam o raciocínio dedutivo e o desenvolvimento do pensamento matemático; a obra de Saddo Almouloud (apenas para citar alguns artigos: Nunes e Almouloud (2013), Almouloud, Silva e Fusco (2012)) é particularmente significativa, porque acrescenta discussão teórica sobre o que são argumentos, provas e demonstrações no ensino e na formação de professores.

A matemática, pode ser entendida como uma linguagem, uma vez que tem símbolos e significados, os quais, devidamente associados, expressam ideias, raciocínios, pensamentos.

Tem uma utilização específica e não genérica como a linguagem natural: expressar definições e propriedades dos números, conjuntos, figuras, quantidades, variáveis, enfim, ideias matemáticas.

Na matemática dedutiva, o foco é a estrutura, a lógica e a linguagem do próprio conhecimento matemático. A argumentação para convencer os outros sobre a verdade das proposições recebe atenção especial, e persiste até hoje dessa forma, enquanto que o objetivo da modelagem não é treinar alunos em linguagem matemática, mas sim, usá-la para descrever e com isso intervir sobre o real, tarefa não só de matemáticos, mas de qualquer usuário dela.

A modelagem é também um processo de investigação que usa a linguagem matemática como instrumento para expressar ideias. Nesse sentido, se aproxima das matemáticas aplicadas. Ou seja, ao usar um conceito, fórmula ou algoritmo, o modelador não está preocupado com a consistência, mas supõe que a estrutura usada seja verdadeira. A propriedade mais explorada da modelagem é a contextualização do conhecimento matemático. De fato, a pergunta "para que serve a Matemática?" fica bem respondida depois da realização de algumas atividades. No entanto, a aprendizagem e a caracterização do tipo de matemática aprendida não têm merecido a mesma atenção. Nesse sentido, pretende-se neste trabalho pesquisar a possibilidade de associar os aspectos pragmático - desenvolvido pela modelagem - e o argumentativo - desenvolvido no ensino clássico escolar - do conhecimento matemático em atividades de Educação Matemática da Escola Básica.

No Capítulo 2 faz-se uma revisão bibliográfica de trabalhos que enfatizam a argumentação no ensino de matemática, mesmo sem referência à modelagem. No Capítulo 3 são expostos posicionamentos sobre a natureza do conhecimento matemático, discutidas algumas propriedades da modelagem no ensino de matemática, como conhecimento aplicado, e analisa-se a possibilidade de um equilíbrio entre contextualização e argumentação matemática. No Capítulo 4 são apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa, descritas as atividades de ensino, os métodos de coleta e análise dos dados. No Capítulo 5 é apresentada a análise das atividades de acordo com as categorias propostas. Observou-se que: os tipos de linguagens utilizados pelos alunos dependem da forma de condução das atividades pelo professor; os tipos de argumentação que mais se destacaram nas atividades de ensino de modelagem matemáticas foram aqueles que facilitam o diálogo entre os alunos; a argumentação ocorre em diferentes situações, em diferentes disciplinas, na modelagem matemática e não somente nas atividades de matemática; os tipos de argumentação com menor frequência foram os que apresentam maiores dificuldades técnicas: as generalizações e a argumentação lógico-matemática.

2. PESQUISAS RELACIONADAS À ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

A argumentação no ensino de matemática tem merecido a atenção de alguns pesquisadores no Brasil. A pesquisa de Aguilar Junior e Nasser (2014) analisa as respostas de professores das redes pública e privada do Ensino Básico sobre às questões: Como o professor desenvolve em seus alunos a habilidade de argumentação e prova em Matemática? Como o professor avalia os tipos de argumentação apresentados pelos alunos? Constataram que os professores não estavam preparados para o ensino de provas e argumentação matemática e que existe uma preferência dos professores por argumentos e provas, que se aproximam do modelo acadêmico de prova matemática, tendo em vista o contato mais tecnicista com este tema e a pouca vivência do mesmo em sala de aula.

Para Carvalho e Ripoll (2013) o raciocínio dedutivo é essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático. Os autores buscam respostas para o seguinte questionamento: Como familiarizar gradativamente os alunos da Escola Básica e neles desenvolver os métodos requeridos e praticados pela ciência matemática? Nesse sentido, estabelecem alguns métodos/atividades para desenvolver a habilidade de demonstrações, como quando o professor, enquanto discute as propriedades das operações de adição de números naturais, procura desenvolver a abstração e o pensamento matemático dos alunos, sem se afastar da linguagem inerente a este nível de escolaridade. Essa e outras atividades que buscavam o mesmo objetivo despertaram, em alguns alunos, o hábito de tentar justificar matematicamente os resultados trabalhados em sala de aula.

As várias formas de argumentação matemática nem sempre estão visíveis em atividades aplicadas aos discentes. Nunes e Almouloud (2013) desenvolveram um estudo com alunos do quinto ano do ensino fundamental, baseando-se nas reflexões teóricas de Toulmin (2006), que organiza as validações em uma estrutura que possibilita uma apreciação minuciosa do processo argumentativo. As atividades permitiram aos alunos produzir e testar suas conjecturas em conjunto com as ações e a mediação do pesquisador. A prática da argumentação favorece a aquisição de competência argumentativa, auxiliando os discentes, entre outras coisas, a desenvolver a linguagem matemática e compreender os assuntos estudados.

Em Almouloud, Silva e Fusco (2012) são levantadas algumas questões teóricas sobre argumentação e demonstração a fim de compreender melhor o raciocínio de professores em formação continuada. Apresentam um estudo de caso, em que os professores, no estudo de provas e demonstrações em geometria, têm dificuldade em levantar as informações dadas no enunciado de uma proposição matemática e no reconhecimento de elementos cruciais, como hipótese e tese, que são fundamentais para a demonstração. As dificuldades apontadas no trabalho realizado com jovens estudantes aproximam-se muito das dos professores envolvidos no projeto, uma vez que eles possuem uma formação precária em matemática.

Os livros didáticos poderiam apresentar recursos para o desenvolvimento da argumentação, como apoio ao planejamento dos docentes. Silva e Santos (2014) verificam essa possibilidade, ao fazer uma análise da parte inicial do conteúdo de geometria (ponto, reta e plano) do livro didático A Conquista da Matemática, 6° Ano, Giovanni Jr. e Castrucci (2009). Eles examinam o uso da argumentação matemática proposta no livro em sala de aula, como uma transposição didática da argumentação corrente no fazer da matemática formal, com base na classificação dos tipos de argumentação de Toulmin (2006).

O trabalho de Scheffer (2012) apresenta dados de pesquisa realizada com estudantes e professores de Ensino Fundamental e Médio, a respeito da valorização da argumentação nas aulas de matemática, a partir da interpretação de gráficos de funções na Calculadora Gráfica TI-83 e no software Winplot. Apresentam-se reflexões teóricas a respeito da linguagem e suas formas de representação, da produção de argumentação em torno de situações interpretativas de matemática, concentrando-se basicamente na análise da argumentação presente nas narrativas e nas linguagens verbal, não-verbal e escrita de professores de matemática de Ensino Médio.

Os trabalhos acima descritos enfatizam a existência, a intensidade ou a precariedade da argumentação em atividades desenvolvidas com professores e alunos da escola básica e, de alguma forma, a associam à aprendizagem da matemática, ou do desenvolvimento do modo de pensar dedutivo matemático. Não foram encontrados trabalhos que associassem movimentos de indução e dedução, criação e organização do conhecimento nas práticas pedagógicas.

3. ARGUMENTAÇÃO, ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA

Nesta seção, inicialmente são expostos posicionamentos sobre a natureza do conhecimento matemático com o objetivo de definir o tipo de matemática que se pretende ensinar na escola básica. Decorrente desses posicionamentos, são apresentadas algumas propriedades da modelagem no ensino de matemática, como conhecimento aplicado, e a argumentação matemática, como componentes de uma proposta curricular que combina significados, argumentação e consistência da matemática escolar.

3.1 O conhecimento matemático e o currículo escolar

As definições de linguagem, tais como "qualquer meio sistemático de comunicar ideias ou sentimentos através de signos convencionais, sonoros, gráficos, gestuais etc."; ou "qualquer sistema de símbolos ou sinais ou objetos instituídos como signos; código" [1] ou "Expressão do pensamento pela palavra, pela escrita ou por meio de sinais (Dicionário Aurélio *on line*)[2], associam àquela palavra os termos 'signos' (ou sistema de símbolos) e 'expressão do pensamento' (ou comunicação de ideias). A matemática, portanto, pode ser entendida como uma linguagem, uma vez que tem símbolos e significados, os quais, devidamente associados, expressam ideias, raciocínios, enfim, pensamentos. Particularmente, a linguagem matemática tem uma utilização específica e não genérica como a linguagem natural: expressar definições e propriedades dos números, conjuntos, figuras, quantidades, variáveis, enfim, ideias matemáticas, onde os símbolos especiais constituem "...um acréscimo numeroso e exuberante aos símbolos das linguagens naturais" (DAVIS e HERSCH, 1985, p. 153) com o objetivo de precisão: "As exigências de precisão pedem que o significado de cada símbolo ou de cada cadeia de símbolo esteja completamente definido e sem ambiguidades." (Idem, p. 155). No entanto, a padronização de toda essa riqueza simbólica, não parece ser uma tarefa fácil.

> No fim do século dezenove, foram instituídos vários comitês com a finalidade de padronizar os símbolos. Obtiveram somente um sucesso limitado. Parecia que os símbolos matemáticos partilham, juntamente com as linguagens naturais, um

---

[1] Ambas as definições foram extraídas do Dicionário Google, disponível em ://www.google.com.br/search?q=linguagem&oq=linguagem&aqs=chrome..69i57j69i60j69i61j69i60j0l2.1965j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8.

[2] Disponível em https://dicionariodoaurelio.com/

> crescimento orgânico e mudanças que não podem ser controladas pelos ukases de um comitê. (DAVIS e HERSCH, 1985, p. 155).

A associação da quantidade de ovelhas a pequenos traços em rochas e a atribuição de algum símbolo mais elaborado para agrupamentos de unidades (dezenas, centenas, ...) são representações numéricas. Particularmente, cada cultura desenvolveu seus próprios agrupamentos e respectivos símbolos, evidente nos sistemas de numeração de diferentes culturas, como mesopotâmios, egípcios, hindus, índios americanos, Europa da época do império romano e da idade média. Como ocorre nas linguagens ativas, os símbolos e os significados se transformam com uso ao longo do tempo. A matemática desenvolve-se ampliando o campo de símbolos, criando-se novos conceitos e propriedades destes.

O conhecimento matemático tem sido apresentado nos livros didáticos de forma ordenada, geralmente seguindo o modelo: definições e conceitos, propriedades, exercícios. Tal apresentação dá uma ideia de que os conceitos foram criados do nada e suas propriedades enunciadas e demonstradas de imediato. Os registros de matemática antiga, tais como os papiros egípcios, enfatizam a descrição de problemas reais (ou ilustrativos de situações reais) e soluções, na qual percebe-se o conhecimento de propriedades matemáticas e não suas demonstrações. Esse grau de verdade era suficiente para utilizá-las em aplicações. Ou seja, a criação das proposições teve origem em observações concretas, em medições, em experimentos, em testes particulares, cujos resultados permitem a abstração, a indução e finalmente a formulação em linguagem matemática. A organização do conhecimento matemático na sua forma dedutiva ocorre posteriormente à criação indutiva de muitas proposições, muitas vezes motivadas por problemas aplicados. Como afirma Davis e Hersh, "Embora os aspectos dedutivos da aritmética fossem claros para os matemáticos antigos, tais aspectos não eram enfatizados nem no ensino nem na criação de matemática nova, até 1800." (DAVIS e HERSH, 1985, p.32).

Para além da expressão de ideias, a matemática se impôs como um corpo de conhecimentos organizados de forma coerente, com o objetivo de argumentar logicamente sobre a verdade de qualquer afirmação. Como refere-se Machado, "...partindo de premissas verdadeiras, um argumento válido nunca conduz a uma conclusão falsa; é isso que garante a confiabilidade nos resultados da ciência" (MACHADO, 2008, p.24). A preocupação com a argumentação lógica, com os símbolos e o rigor se estabeleceu definitivamente, na época do império grego, como um movimento de organização ou sistematização da matemática existente. Tal movimento foi fundamental para a formação do pensamento dedutivo e com ele, a organização sequencial e consistência do conhecimento matemático, dando um caráter de verdade lógica a cada proposição:

> Uma frase que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, não podendo ser as duas simultaneamente, é uma proposição. (...) Uma proposição é uma sentença declarativa, da qual pode-se dizer sem dúvida: é verdadeira ou então é falsa. (MACHADO, 2008, p.20).

Na matemática dedutiva, o foco é deslocado das aplicações do conhecimento, para a estrutura, a lógica e a linguagem do próprio conhecimento matemático. A argumentação para convencer os outros sobre a verdade das proposições recebe atenção especial, e persiste até hoje, como afirma Nilson Machado:

> Expressar-se adequadamente, argumentar de modo correto, cuidar da forma de argumentação para parecer convincente e persuadir os outros à ação, que eram metas do Trivium, permanecem sendo objetivos fundamentais na formação do cidadão, ainda hoje, em qualquer lugar do mundo. (MACHADO, 2008 p. 13)

O argumento é um encadeamento de premissas que levam a uma conclusão (MACHADO, 2008, p.16). Argumentar é construir esse encadeamento. Na matemática dedutiva, no entanto, em nome da precisão da linguagem, nem todos os tipos de argumentações são aceitos. Evidências empíricas e verificações particulares, não são aceitas. Os objetos matemáticos são definidos de forma abstrata, ou seja, mesmo que sejam semelhantes a objetos físicos, não são esses objetos, mas uma idealização. Uma reta traçada no papel, ou um fio esticado não são retas matemáticas. Os objetos reais têm defeitos, imperfeições, massa, enquanto que os matemáticos são perfeitos, ideais, sem massa e completamente abstratos. "Existe uma descrição verbal de uma reta, idealizada, embelezada: "aquilo que jaz em linha reta consigo mesma" (Euclides: Definição 4), ou a curva para a qual qualquer parte é a menor distância entre dois quaisquer de seus pontos" (DAVIS e HERSH, 1985, p.157). Apenas argumentações com símbolos matemáticos - sem significados físicos - e as regras da lógica formal são aceitos na tarefa de mostrar a verdade de uma nova proposição, apenas com base em outras já demonstradas (teoremas) e/ou em proposições cuja verdade seja evidente e incontestável (os axiomas). Esse movimento é de característica essencialmente dedutivista e não está associado, necessariamente, à tarefa de criação, mas de demonstração da veracidade de propriedades. Assim, movimentos de indução e dedução se alternam na história da matemática. Os gregos sistematizaram cerca de 6000 anos de parte da matemática antiga, principalmente a geometria, enquanto que a aritmética e álgebra só receberam tal tratamento no final do século XIX. Esses movimentos caracterizam a Matemática da atualidade, aparentemente polarizada nos dias de hoje, como Matemática Pura e Aplicada e são complementares, na medida que o conhecimento aplicado precisa de fundamentação lógica e ao mesmo tempo gera novos conhecimentos a partir da solução de problemas reais, incrementando o corpo de conhecimentos a serem sistematizados.

Dessa breve revisão histórica, podemos evidenciar que:

(i) A Matemática tal como se apresenta hoje, é um conhecimento *estruturado logicamente* (argumentação com símbolos específicos e lógica formal), em *constante construção* e *aplicável à solução de problemas reais*.

(ii) A criação do conhecimento matemático, ao menos inicialmente, não é formal, mas contemplativo, experimental e intuitivo;

(iii) A formalização é uma maneira específica de dar caráter de verdade e sistematização ao conhecimento.

Essas concepções acerca do conhecimento matemático têm desdobramentos na elaboração do currículo escolar, mais precisamente, no tipo de Matemática a ser ensinado na escola. Para o movimento da Matemática Moderna dos anos 50 do século XX, o ensino tradicional baseado na memorização de demonstrações de teoremas e execução de algoritmos, estava superado porque ensinava uma matemática antiga, de antes do século XVII. A proposta daquele movimento era uma matemática de conteúdos novos, baseada essencialmente no ensino da lógica e em uma nova linguagem, pois acreditavam que se os alunos entendessem a lógica do conhecimento, estaria garantida uma aprendizagem consistente e moderna (KLINE, 1976, p. 34, 35). Morris Kline no seu livro O Fracasso da Matemática Moderna, critica fortemente o movimento modernista por apresentar "...a matéria como auto-suficiente. Presumivelmente pode apresentar-se em si própria para desenvolver e oferecer valores quando estudados nela e para si própria" (p. 97), e pelo excesso de rigor na linguagem:

> Em conformidade com seu objetivo de assegurar precisão, os textos modernos definem cuidadosamente todo conceito que se usa. A consequência é uma imensa quantidade de terminologia. Assim, vamos encontrar definições para ângulo, triângulo, polígono, numeral, equação, frase aberta, (...) e muitos outros termos. (KLINE, 1976, p. 88).

E ainda

> Muito da nova terminologia é inteiramente desnecessário. (...) Certa terminologia substitui outra mais antiga mas sem nenhuma vantagem particular.(...) A compreensão que os estudantes adquiriram através da experiência é suficientemente boa; geralmente não se necessita de definições formais. Os estudantes sabem o que é triângulo e não têm que ser ensinados que ele consiste na união de três pontos não colineares e a linha de segmentos que os unem. (KLINE, 1976, p. 90).

O matemático e educador germânico Christian Felix Klein (1849–1925) também pregava a necessidade de modernizar o currículo da matemática escolar, acrescentando conceitos desenvolvidos recentemente. Nessa linha, o chamado Projeto Klein, inspirado nas ideias daquele educador, tem como objetivo "... relacionar uma visão ampla da área da Matemática com conteúdos e suas abordagens no ensino médio e na graduação universitária" e pretende

> ... produzir recursos para prover continuamente aos professores de Matemática, a estrutura, a profundidade, a conexão, a vitalidade, a aplicabilidade, a beleza e os valores da disciplina, de modo que sejam eles capazes de tanto satisfazer seu próprio gosto pela área como de transmitir a maravilha da disciplina a seus estudantes. (Projeto Klein, 2017)

As ideias de Felix Klein, têm se efetivado na prática, na forma de oficinas e textos sobre temas diversos de Matemática, conhecidos como Artigos Klein, (Salvador, Baldin e Bisognin, 2011) com a finalidade de instrumentar a ação pedagógica dos professores da Educação Básica. No entanto, a linguagem matemática carregada de símbolos e os temas pouco conhecidos pelos professores, tais como fractais, imagens digitais, topologia, etc, tem dificultado a adoção como material didático.

No ideário de Felix Klein e do movimento da Matemática Moderna, percebe-se a posição de que o ensino de Matemática da Escola Básica deve objetivar, ou no mínimo comprometer-se, com a formação de matemáticos. Ações semelhantes podem ser encontradas no material da OBEMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática), na medida que incentiva a competição, a seleção dos melhores com respectiva premiação através de bolsas. Tais posições são questionáveis, visto que o percentual de cidadãos que abraçarão a carreira do magistério ou de profissionais da Matemática superior é menor do que 1% da população escolar. Nesse sentido, a crítica de Morris Klein à Matemática Moderna se faz pertinente:

> Muito poucos são os estudantes, que se destinam ao colégio, que se especializarão em matemática. Mesmo aqueles que pensam tornar-se matemáticos devem ser aconselhados a não especializarem-se até que conheçam muito mais o que as várias matérias têm a oferecer. Por conseguinte, a educação para todos esses estudantes deve ser ampla, ao invés de profunda. (...) não deve haver tentativa para treinar profissionais em matemática e pouca preocupação com o que o estudo futuro da matemática possa exigir. (KLEIN, 1976, p. 176)

Apesar dessas críticas, as concepções modernistas têm méritos em propor maior profundidade (no sentido lógico) relacionada à compreensão/aprendizagem, a conexão entre escola e a universidade, a beleza e a aplicabilidade da matemática. O material disponível no Brasil sobre modelagem matemática no ensino constitui-se em um enorme acervo, com simbologia e linguagem matemática compreensível pelos professores e alunos. A obra de Rodney Bassanezi, um dos fundadores da modelagem no Brasil, não se limita a sua produção bibliográfica (BASSANEZI, 2002 e 2015, além de outros), mas se estende a cursos de especialização e orientação de vários educadores matemáticos atuantes no Brasil. Outros pesquisadores como João Frederico da Costa Meyer, Maria Salete Biembengut, Lourdes W.

Almeida e Joney Barbosa têm contribuído significativamente para a produção de modelos, pesquisa da modelagem em sala de aula e divulgação da utilização da modelagem como estratégia para o ensino da matemática, baseados no potencial desse método de pesquisa, para ler o real e significar o conhecimento científico. A modelagem é uma matematização do real (fenômenos reais), portanto usa linguagem matemática, porém não de forma fechada e voltada apenas para a própria matemática. A usa para expressar as partes da realidade escolhidas para descrever. Dessa forma, o objetivo da modelagem não é treinar alunos em linguagem matemática, mas sim, usá-la para descrever o real, tarefa não só de matemáticos, mas de qualquer usuário dela, como engenheiros, economistas, biólogos, contabilistas, técnicos, etc.

A modelagem é também um processo de investigação que usa a linguagem matemática como instrumento para expressar ideias. Nesse sentido, se aproxima das matemáticas aplicadas, com a dos povos antigos (pré-gregos). Ou seja, ao usar um conceito, fórmula ou algoritmo, o modelador não está preocupado com a consistência, mas supõe que a estrutura usada seja verdadeira. A sistematização dessa matemática aplicada, com classificações e demonstrações, pode ser uma tarefa posterior à modelagem, a qual dará credibilidade ao conhecimento matemático.

3.2 Sobre as formas de argumentação no ensino de Matemática

A importância da argumentação decorre da necessidade de nos relacionarmos como pessoas que interagem entre si. Na vida cotidiana, nos diálogos, nos discursos, no trabalho, precisamos justificar nossas posições, compará-las e defendê-las diante dos outros. O fazemos pela linguagem falada, mas mesmo assim, temos que embasar cada afirmação com dados ou outras opiniões que corroborem nossas ideias. Nessas interações sociais a linguagem adquire importância fundamental, para que as ideias sejam bem descritas e nossos interlocutores possam apreciá-las. É através dessas interações que formamos nossas opiniões sobre a realidade. No ensino da matemática escolar, a argumentação tem a mesma função de comunicação, no sentido de expressar ideias e convencer os outros sobre a consistências das mesmas. Nesse sentido, podemos pensar em etapas de aprimoramento da linguagem matemática na escola, de maneira semelhante ao caminho que a humanidade percorreu. Em um extremo está a linguagem natural e no outro a linguagem matemática formal. Uma argumentação pode iniciar em linguagem natural, ser incrementada com símbolos específicos, sofrer alterações que tornam o argumento mais claro, até ser escrita formalmente. Para Saddo Almouloud, essa transformação da argumentação é possível:

> Em relação aos termos argumentação, prova e demonstração, as discussões possibilitaram que eles chegassem ao consenso de que a argumentação é uma etapa anterior à demonstração, com idas e vindas, erros e acertos, e que, posteriormente, ao organizar as informações pertinentes em uma seqüência, obtém-se a demonstração. (ALMOULOUD, 2012, p. 11).

De modo semelhante Balacheff (1988, p.4) identifica os seguintes níveis de prova entre as provas pragmáticas e as provas conceituais:

- Empirismo ingênuo: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.

- Experimento Crucial: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar.

- Exemplo Genérico: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos.

- Experimento de pensamento: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

Para Almouloud (2012) a argumentação é o encadeamento lógico dos argumentos matemáticos e tem o objetivo de convencer qualquer leitor da veracidade da proposição matemática em questão. Essa concepção está diretamente relacionada com a argumentação matemática no que se trata de testar enunciados, conjecturas, interpretação lógica ou até mesmo formular alguma generalização.

No processo de ensino e aprendizagem, que prioriza a compreensão dos conceitos matemáticos, é de se esperar que os alunos usem ideias válidas para justificar ou provar suas opiniões, discutir suas ideias com o grupo e com o professor, afim de elaborar argumentos convincentes. Mesmo que a demonstração em matemática seja uma das competências indicadas nos PCN da Escola Básica, ainda não possui, no Brasil, um número de pesquisas suficiente para a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos (ALMOULOUD, 2012).

Para Ana Boavida em aulas em que é valorizado o raciocínio, a explicação e a justificação são aspectos chave da atividade dos alunos e, assim, “uma ênfase no raciocínio, em todos os níveis da educação matemática, atrai a atenção para a argumentação e justificação” (Yackel & Hanna, 2003, p. 228). (BOAVIDA, 2005).

Os alunos em geral, não percebem a importância das explicações, justificativas, argumentações, provas e demonstrações, talvez porque não têm maturidade, necessidade ou curiosidade de investigar a consistência das proposições que usam para resolver problemas ou aplicações de matemática. Duval relaciona argumentação, aprendizagem e conscientização da necessidade de argumentar: "... a aprendizagem da demonstração consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. A tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural...".(DUVAL *apud* ALMOULOUD, 2012, p. 5).

De que maneira poderíamos escolher atividades que instiguem o aluno a produzir argumentos matemáticos? Ana Boavida propõe que "os professores intencionalmente, procuram criar nas suas aulas situações de ensino e aprendizagem orientadas para o envolvimento dos alunos em atividades de argumentação matemática." (BOAVIDA, 2005, p.12). Para essa pesquisadora, a argumentação matemática se apresenta durante as aulas de diferentes maneiras, dependendo de cada cultura e nível social, o professor tem a tarefa de instigar/promover/mobilizar o educando através de atividades sejam lúdicas, práticas ou de matemática conceitual, usar elementos e intervir com justificativas para as hipóteses mencionadas, usando um processo de raciocínio que depende da cultura do aluno e lógica em favor de demonstrar/chegar a prova da hipótese. Boavida ainda faz um elenco de razões para a prática da argumentação na escola:

> A importância actualmente atribuída ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, decorre da sinergia de vários argumentos de que destaco: (a) a valorização do raciocínio matemático que não põe a ênfase no rigor e (b) a recomendação de que os alunos aprendam Matemática com compreensão, (c) o valor atribuído às linguagens (d) a aproximação da comunicação na aula de Matemática da existente na comunidade dos matemáticos, (e) dificuldades encontradas na aprendizagem da prova e a procura de caminhos que facilitem esta aprendizagem e (f) a relevância da escola proporcionar a todos os alunos condições necessárias para desenvolverem certas competências transversais, entre as quais está a competência argumentativa.(BOAVIDA, 2005, p.7).

3.3 O equilíbrio entre criação, intuição, sentido do conhecimento e a argumentação matemática na escola

Se a opção de metodologia de ensino é do tipo diretiva, na qual o professor passa o conhecimento pronto e o ao aluno cabe a tarefa de memória e repetição, então a matemática deve ser ensinada já na sua forma estruturada. Ensinar, nesse caso, significa repetir o que está pronto, sem possibilidade de criação. Trata-se de ensino do tipo definição/propriedades/exercício - mesmo com demonstrações - sem espaço para a observação, análise, significação, enfim, sem qualquer movimento de atividade de investigação, como requerem, tanto os modernistas, quanto os modeladores. Porém, se a opção é de construir o conhecimento, ou seja, permitir – ou estimular – o aluno a elaborar suas ideias matemáticas, obrigatoriamente é necessário considerar a evolução da linguagem. As primeiras observações são expressas em linguagem natural, assim como os diálogos argumentativos entre os alunos. O reconhecimento dos dados, as delimitações da parcela do real a modelar, são manifestadas em linguagem natural, desenhos e esquemas. A matematização ou a modelagem - transposição do real em linguagem matemática – é um processo repleto de símbolos e linguagem matemática. Nesse estágio, a preocupação do modelador está na expressão do real, na qual a linguagem é uma ferramenta confiável. Em regra, somente depois de validado o modelo é que preocupações com a consistência das estruturas matemáticas utilizadas, serão consideradas. Mesmo que essa confiança da matemática pareça um arriscado ato de fé, essa é a maneira como usuários da matemática a utilizam. Dúvidas sobre a validade de alguma proposição podem surgir durante a modelagem ou a resolução de um problema qualquer, e nem sempre são superadas com demonstrações formais, mas com argumentações físicas ou estudo de casos particulares.

Do ponto de vista do ensino, seria prudente considerar que a formação matemática do aluno, precisa considerar tanto os movimentos de criação/indução, permeados de argumentação em diferentes linguagens, como os de formalização, os quais teriam a função de organizar o conhecimento matemático, dando-lhe consistência e redação em linguagem apropriada. Dessa forma, desenvolve-se a capacidade de investigação na resolução de problemas, na modelagem do real e em tempos distintos, a capacidade de estruturação do conhecimento em proposições argumentadas logicamente e escritas em linguagem matemática.

A modelagem por si só, envolve conteúdos isolados, requeridos pelas exigências pragmáticas da resolução de uma situação específica, mas pode tornar-se uma boa oportunidade de significação, prática de conteúdo, uso de tecnologias, resolução de problemas e desenvolvimento da criatividade. Tudo isso dá sentido ao conhecimento escolar porque o aproxima das coisas do mundo dos alunos, dos homens e da vida comum. Com isso, prepara-se o usuário da matemática, o cidadão comum, o engenheiro, o contador. Por outro lado, são conhecimentos esparsos, que precisam de uma organização para que, uma vez dominados, possam ser utilizados em outras aplicações. A tarefa de organização do conhecimento escolar é semelhante aos movimentos históricos dos gregos e da matemática do fim do século XIX, na medida que volta o foco da análise para o interior da própria matemática. Com isso prepara-se o matemático.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

O objeto de análise dessa pesquisa são os elementos de argumentação presentes nas atividades de ensino e de aprendizagem. Trata-se de uma tarefa de identificação, análise e classificação desses elementos. Para identificá-los foi necessário acompanhar uma atividade didática, observando procedimentos, coletando registros escritos e manifestações orais, para posterior análise. Assim, a presente pesquisa pode ser caracterizada como *descritiva* – porque descreve as ações de alunos e professor em uma atividade de ensino - e *analítica* – porque analisa essas ações separando-as em categorias e classificando-as. As atividades de ensino, os métodos de coleta e análise dos dados são descritos nesse capítulo.

4.1 Elaboração de atividades de ensino

As atividades de ensino são eventos didáticos, nos quais os conceitos e propriedades matemáticos são discutidos e construídos pelos alunos e pelo professor, mediados pelo material didático. As intervenções do professor podem ocorrer através de ações diretas (aula expositiva, proposição de exercícios, desafios, ...) ou de textos de livros didáticos ou apostilas. Neste trabalho, foram propostos dois tipos de atividades de ensino, executados concomitantemente: os *problemas de modelagem* e as *atividades de ensino de Matemática*.

Os problemas de modelagem foram propostos na forma de perguntas diretas sobre a determinação de coeficientes de funções. Mesmo sendo o tipo mais diretivo de modelagem – classificada em Barbosa (2001) como do Tipo 1, no qual o professor dá os dados e o problema, cabendo aos alunos apenas a escolha da estratégia de solução – a intenção pedagógica era contextualizar o conteúdo, para que os alunos percebessem a utilidade da Matemática para descrever situações reais. Observe-se que o objetivo do presente trabalho não é o desenvolvimento da modelagem em si, mas a observação dos tipos de argumentação em atividades de ensino de matemática. Assim, a modelagem é uma situação de ensino onde as proposições são usadas, onde os alunos discutem pontos de vistas, enfim, onde ocorrem argumentações. O primeiro problema de modelagem é sobre o resgate de carbono da atmosfera através de plantações de árvores e o segundo é sobre o crescimento e decomposição de um pé de alface.

As atividades de ensino de Matemática foram propostas na forma de atividades escritas, com o objetivo de retomar ou complementar os conceitos matemáticos de função quadrática e função exponencial. O enfoque recaiu sobre a associação dos efeitos da variação dos coeficientes nos gráficos das funções. A proposição de modelagem paralelamente com atividades de ensino de conteúdos específicos é uma tentativa de que essas atividades contribuam umas com as outras. Ou seja, por um lado a modelagem dá significados aos símbolos e variáveis matemáticos e por outro, a aprendizagem das funções e a determinação de seus parâmetros dá instrumentos para resolver o problema de modelagem proposto.

I – FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função quadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, tal como é conhecida pelos alunos de nível médio da educação básica.

ATIVIDADE I.1 – Resgate de carbono da atmosfera

Discutir uma maneira de resgatar carbono da atmosfera, elaborar um problema para a modelagem matemática.

ATIVIDADE I.2 – Significado gráfico do coeficiente C

Esboçar gráficos e perceber o que ocorre com desenho quando se atribui valores diferentes para o coeficiente C, a intersecção com o eixo de ordenadas.

ATIVIDADE I.3 – Significado gráfico do coeficiente A

Esboçar gráficos e perceber o que ocorre com desenho quando se atribui valores diferentes para o coeficiente A, a abertura e a concavidade da parábola.

ATIVIDADE I.4 – Significado gráfico das raízes (uma raiz real)

Verificar um único ponto de intersecção seja uma parábola côncava para baixo ou para cima.

ATIVIDADE I.5 – Significado gráfico das raízes (duas raízes reais)

Verificar graficamente quando ocorrem duas raízes e seus significados tipo: Quanto ao lançamento de um projetil...

ATIVIDADE I.6 – Gráficos e coeficientes

Interpretação do esboços de gráficos quando tocados valores dos coeficientes.

ATIVIDADE I.7 – Função quadrática que passa por 3 pontos

Determinar os coeficientes da função quadrática conhecendo 3 de seus pontos.

ATIVIDADE I.8 – Aplicações elementares

Exemplos envolvendo aplicação de funções quadráticas.

II – AJUSTE PARABÓLICO

ATIVIDADE II.1 - (Parábola simétrica em relação ao eixo Y)

Exercícios: utilização de sistemas lineares.

ATIVIDADE II.2 - (Caso geral)

Exercícios: utilização de sistemas lineares.

ATIVIDADE II.3 - (Ajustes aproximado sub-ótimo)

Exercícios: utilização de sistemas lineares não quadrados, quatro equações e três incógnitas.

ATIVIDADE II.4 – Ajuste Linear

Ajuste linear: utilização de matrizes (atividade apenas apresentada para os estudantes).

III – FUNÇÃO EXPONENCIAL

ATIVIDADE III.1 - Ajuste de curva do crescimento/decrescimento da massa de alface

Verificar os dados do experimento e qual o gráfico, a função que melhor define esses pontos.

ATIVIDADE III.2 – função logística

Comparada parte crescente do experimento com a função logística, (não foi entrado em detalhes sobre a função logística com os alunos, por se tratar de nível médio).

ATIVIDADE III.3 - Ajuste de curvas exponenciais

A determinação da função procurada, dadas massa inicial e massa final das alfaces.

4.2 Coleta de dados e categorias de análise

As categorias de análise foram desenvolvidas com base na fundamentação teórica do Capítulo 3, principalmente com as ideias de Almouloud *et al* (2011), Almouloud (2012) e Balacheff (1988, p.4), mas também com base nos dados coletados e na intuição do pesquisador. Duas grandes categorias gerais foram propostas: Os tipos de linguagem (letras A, B, C, D e E) e os tipos de argumentação (números I, II, ..., VII), como descreve-se com alguns exemplos, a seguir.

Categorias de linguagem:

A) Linguagem oral ou gestual.

B) Linguagem apoiada em material concreto: material didático, objetos físicos, ...
C) Linguagem gráfica: uso de desenhos, figuras, esquemas e fluxogramas.
D) Linguagem textual: palavras, frases, parágrafos e raciocínios escritos.
E) Linguagem técnica: dados em tabelas ou gráficos; funções; matrizes; ...símbolos e estruturas matemáticas.

Categorias de argumentação:

I – Sem argumentação: manifestação sem preocupações com justificativa ou consistência. São afirmações categóricas, com pretensões de certeza, mas sem argumentação. "...aí usa o método da substituição que dá certo..."; "...agora aplica Bhaskara..."; "Se o A é negativo, a barriga da parábola é para baixo!"
Esse tipo de manifestação revela a existência de um conhecimento cristalizado na memória do aluno, que passa a utilizá-lo sem preocupação com a consistência matemática e até com os limites ou restrições do uso daquele conhecimento.

II – Argumentações referenciadas: manifestações sem justificativa lógica, porém reforçadas com citação de pessoas (colega, professor, ou a garantia do próprio manifestante), fonte bibliográfica (livro), fonte da mídia ou da própria experiência de vida, enfim, alguém ou algo que dê crédito à proposição: "o padre falou..."; "o professor falou"; "meu pai me disse..."; "porque está no livro...".

III – Argumentação de base lógica ou experiencial: são afirmações justificadas por algum princípio de conservação, ou experiência de vida. Por exemplo: "a quantidade de água em um balde inicialmente vazio é a diferença entre a água que entra e a que sai"; "as árvores um dia morrerão".

IV - Argumentação por comparações: comparações com algo que tenha estrutura semelhante. "Se para os números vale a propriedade comutativa, então vale também para as matrizes"; "O C é o valor do y em que a parábola corta o eixo Y, assim como o b da reta"; "uma árvore tem um ciclo de vida, como nós!".

V - Argumentação por generalizações (resultados particulares): justificação com exemplos de números, desenhos, no sentido de generalizar a validade de uma proposição...

"se funciona para esse caso, deve funcionar para outros..."; "o sinal do A indica a concavidade da parábola: se A > 0 é para cima, se A< 0, é para baixo! (...depois de testar essa proposição para várias funções em uma planilha eletrônica)".

VI – Argumentação com contraexemplos: é a negação de uma proposição apresentando um caso particular em que essa não é válida. "o produto de matrizes não é comutativo, pois para

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, A · B é diferente de B · A.

VII – Argumentação lógica: utilização de cadeias de proposições já demonstradas, ou definições para justificar uma nova proposição.

"As raízes de uma função $y = f(x)$ são os valores de x, tal que $y=f(x)=0$. Assim, a raiz de $y = ax + b$ é $x = -b/a$, pois fazendo $y=0$,

$0 = ax + b$.

Usando os princípios aditivo (adicionando –b em ambos os lados da equação) e multiplicativo (multiplicando por $1/a$ em ambos os lados) das equações, temos

$x=-b/a$."

As manifestações podem ter componentes dessas duas grandes categorias. Ou seja, para que alguma argumentação seja manifestada, é necessário o emprego de algum tipo de linguagem. Assim, o enunciado oral de uma proposição sem argumentação é uma manifestação é classificada como A.I; a explicação e visualização com papel recortado de que a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde ao ângulo raso, é B.III; essa mesma explicação, se feita apenas oralmente, é A.III; ou se for empregado o teorema dos ângulos correspondentes entre retas paralelas interceptadas por uma transversal, e mostrado que os ângulos internos poder ser colocados sobre a mesma reta, tem-se uma argumentação E.VII.

Os dados foram coletados na forma de respostas orais ou escritas, das questões propostas pelo professor ou pelos alunos, sugestões ou execução de procedimentos para a resolução dos problemas propostos, anotadas devidamente no Diário de Bordo (ANEXO B) imediatamente após as aulas.

A análise iniciou com uma leitura flutuante do material coletado, seguida de uma leitura minuciosa e classificação das manifestações dos alunos (unidades de registro do tipo tema, entendido esse como asserções sobre determinado assunto, na forma de palavras, expressões, frases, etc. (FRANCO, 2012, p.44)) com base nas referidas categorias. Na medida que os dados eram conhecidos, as próprias categorias foram sendo aperfeiçoadas, até atingir o formato apresentado acima.

5. A ARGUMENTAÇÃO NAS ATIVIDADES DE ENSINO

Nesta seção, as aplicações das atividades em classe foram descritas com relação ao número de encontros, carga horária, procedimentos pedagógicos e aspectos gerais, inicialmente, seguida da identificação e análise das linguagens e tipos de argumentação identificadas nas atividades de ensino das funções quadrática e exponencial, aplicadas em classe.

5.1 Relato geral da aplicação das atividades em classe

As atividades foram aplicadas pelo autor deste trabalho, em uma turma com 12 alunos, sendo 5 meninas e 7 meninos, gentilmente cedida pelo professor regente, do 2º ano do Ensino Médio da cidade de Caçador em Santa Catarina, no primeiro semestre de 2017. Foram experiênciados 6 encontros em sala de aula, totalizando 12 horas/aulas, conforme detalhamento apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Relação de encontros, atividades e conteúdos

Encon-tro	**H/A**	**Conteúdos desenvolvidos/Atividades**	**Técnicas Didáticas**
1	2	Revisão de pré-requisitos Conceitos de funções. Tipos de funções. Plano cartesiano.	Aula dialogada: relatos de conhecimentos dos alunos a respeito de funções.
2	2	Revisão pré-requisitos Equações de 1º e 2º grau. Tabela para auxílio no esboço de gráficos.	Aula dialogada: Exemplos de resolução de equações de 1º e 2º grau, esboço de gráficos.
3	2	Funções quadráticas: - Determinação dos coeficientes de $y = Ax^2 + Bx + C$ - Relação entre número de variáveis e incógnitas; - Resolução de sistemas lineares quadrados - Vértice da parábola ATIVIDADE – I	Aula dialogada: proposição de problemas pelo professor e encaminhamento das soluções juntamente com os alunos.
4	2	O problema: Por quanto tempo uma araucária absorve gás carbônico da atmosfera. -Analise de tabela e gráfico do experimento. -Resolução de sistemas lineares.	Aula dialogada e exposta com projetor: Interpretação dos dados a busca de

		-Gráfico. -Determinação da função quadrática. ATIVIDADE - II	solução para o problema.
5	1	Teste da função: -Método dos mínimos quadrados	Aula dialogada e exposta no quadro, cálculos dos alunos juntamente com professor.
6	3	Funções Exponencial e Logística: Tempo de exposição da alface nas bancas de comércios. -Analise de tabela, gráfico do experimento. -Resolução de sistema -logaritmos -Funções exponencial e logística ATIVIDADE - III	Aula dialogada e exposta com projetor: Interpretação dos dados a busca de solução para o problema, alunos juntamente com professor.

Pré-requisitos/revisão

Inicialmente, foi trabalhada uma parte introdutória sobre a definição de Função e Plano Cartesiano, com o objetivo de revisar conceitos e habilidades considerados necessários para a resolução dos problemas de modelagem. Os alunos executaram as primeiras atividades através de leitura do material do ANEXO A, com exercícios e exemplos desenvolvidos pelo professor. Foram enfatizados métodos para esboçar o gráfico e determinar os parâmetros de funções quadráticas, na forma $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, conhecendo algumas informações, tais como: três pontos quaisquer, duas raízes e o vértice, duas raízes o valor de C e a concavidade A, duas raízes e o ponto de intersecção com Y.

Sistemas lineares

O conteúdo de sistemas lineares quadrados foi revisado com atividades a respeito da existência e cálculo da solução de sistemas de três equações e três incógnitas. Os alunos mostraram-se empolgados com o assunto, pois já conheciam os sistemas de ordem 2, usavam as operações elementares para escalonar e estavam iniciando o estudo de sistemas de ordem 3. Os alunos perceberam, quando viram a tabela dos dados referentes ao sequestro de carbono, que o sistema iria apresentar quatro ou mais equações e três incógnitas. Ficaram assustados, disseram que não sabiam resolver aquele tipo de sistema. A intervenção do professor, avisando que seriam trabalhados sistemas de ordem três, deixou-os mais tranquilos.

Modelagem I - araucárias

Ao apresentar os dados da pesquisa de Tomaselli, todos os alunos ficaram atentos para saber que métodos seriam usados para determinar a idade de corte das araucárias, o que tinha acontecido naquela pesquisa e para que iria servir a matemática. Foram esclarecidos que na matemática, quando aplicada à prática, os números obtidos não são inteiros como nos livros didáticos, e para realizar os cálculos seria necessário o uso de equipamentos eletrônicos como calculadoras e computadores.

Com apoio do professor, os alunos construíram um sistema linear, supondo que uma função quadrática passasse em três pontos no plano. Como um dos pontos era de interseção com o eixo Y, o sistema ficou reduzido a ordem dois, cujos métodos de solução já eram dominados pelos alunos. Foram alertados sobre a precisão (quatro casas decimais) e a necessidade do uso de calculadoras. Para casos mais gerais (três pontos quaisquer), foi usado o método do escalonamento

Como o Método dos Três Pontos é sub-ótimo, foi necessário verificar qual escolha corresponderia ao melhor ajuste. Ou seja, dentre cada função que passa por três, de todos os pontos, qual delas ficaria mais próxima dos pontos do experimento. Uma boa conversa com os alunos, foi sobre a importância de saber se o ajuste é bom, se podemos obter outra função melhor ainda, ou se existe uma função melhor do que qualquer outra.

Foram escolhidas duas funções quadráticas dentre aquelas que os alunos haviam calculado os coeficientes, para que calculassem a soma das diferenças (no sentido dos mínimos quadrados), afim de verificar qual delas seria a mais apropriada para o ajuste. Analisando as respostas, a turma concluiu que a função B neste caso, seria a mais aceitável, pois apresentou a soma das diferenças menor.

Função Exponencial e Logística

Ao propor o modelo exponencial para o experimento com alfaces, os alunos já estavam esperando fazer mais um ajuste, por comparação com as atividades anteriores. Foram apresentadas algumas funções exponenciais e respectivos gráficos no quadro, como revisão, já que os alunos viram esse conteúdo recentemente.

A função logística foi apresentada à classe com a Atividade III.2, como uma função que envolve a função exponencial e por modelar problemas de crescimento de seres vivos. Não foram dados mais detalhes dessa função, como a sua dedução, concavidade, etc, pois esses são assuntos demasiadamente complexos para o Ensino Médio. No entanto, a determinação do coeficiente *r*, dados a massa máxima e a inicial, constitui-se em um bom exercício para a aplicação das propriedades de exponenciais e logaritmos.

Modelagem 2 – alface

Os dados do experimento sobre a variação da massa de alface em função do tempo, foram apresentados com projeção: fase de crescimento e fase de decomposição. Esclarecimentos sobre funções por sentenças foram necessários. Os alunos lembravam de algumas operações com logaritmos, mas não tinham o costume de utilizar logaritmo natural e a base **e** para exponencial. Exemplos foram desenvolvidos para explicar que as operações eram as mesmas, que a única diferença é a troca de base de dez pelo número **e** e que tudo isso está em suas calculadoras também.

Considerando as revisões sobre as funções já trabalhadas, foi proposta a questão: que função, ou funções poderiam descrever o comportamento de crescimento e decrescimento da massa de alface?

Os alunos observaram que entre as funções estudadas (retas, parábolas e exponenciais) nenhuma era apropriada para descrever a fase de crescimento, a qual apresenta algo parecido com a letra S, se deformada. Também foi observado que a massa de alface não cresce infinitamente com o tempo, ou seja, existe uma massa máxima (corte do pé de alface), a partir da qual, inicia o processo de decomposição. Com base na Atividade III.2, foram utilizados os conhecimentos sobre a função logística.

Os alunos propuseram uma função exponencial para o ajuste da fase decrescente e o implantaram utilizando o Método dos Dois Pontos, também um método sub-ótimo. Diferentemente do ajuste parabólico, nesse caso o sistema obtido é não linear e a solução foi obtida pelo Método da Substituição, mediante a escolha de dois pontos considerados representativos da coleção total de pontos. Os alunos foram questionados sobre a qualidade do ajuste em relação à escolha dos dois pontos. Novamente se estabeleceu a discussão de cálculo do erro do ajuste e novamente foi utilizada a ideia dos mínimos quadrados. Em equipes, os alunos fizeram escolhas de pontos diferentes, efetuassem os cálculos e compararam os resultados. Todos conseguiram encontrar as funções procuradas.

5.2 Linguagens e argumentação nas atividades de ensino

Os tipos de argumentações presentes nas atividades sobre funções quadráticas foram identificados nos registros do Diário de Bordo e avaliações e transcritos para as Tabelas 5.2 e

5.3: Na primeira coluna foram registradas as questões ou as atividades propostas; na segunda, as manifestações dos alunos foram escritas na forma resumida (em escrita normal) ou em citações diretas (em itálico); na terceira, a identificação e enquadramento das manifestações nas categorias de análise de linguagem e argumentação, de acordo com a seção 4.2; e na quinta coluna, foram anotados os comentários que justificam tal enquadramento.

Tabela 5.2 – Linguagens e argumentações presentes nas atividades de funções quadráticas

Questão/ Atividade	**Manifestação**	**Cate-gorias**	**Comentários**
Como retirar gás carbônico da atmosfera?	**Hipótese 1 (alunos)**: A massa de gás carbônico a ser retirado da atmosfera depende da área a ser reflorestada, ou seja, quanto mais reflorestar mais gás carbônico vai ser retirado da atmosfera.	**A.I**	A hipótese de proporcionalidade parece natural, correta e facilmente aceita, sem justificativa ou dados que a comprovem.
A absorção de carbono é constante em toda a vida da árvore?	**Hipótese 2 (alunos)**: Uma a árvore fica plantada por uns 20 ou 30 anos, depois morre e se decompõe. Quando se decompõe devolve o gás carbônico para a atmosfera. (anotação em diário de bordo)	**A.III**	A hipótese 2 complementa a hipótese 1, acrescentando a devolução do carbono no ciclo vital da árvore. Mesmo sem dados, a hipótese faz sentido e dá uma ideia de um possível modelo matemático para a retenção do carbono.
O professor fornece os dados da pesquisa de TOMASELLI (2005) sobre o sequestro de carbono conforme a idade das araucárias e pede para que esbocem um gráfico.	Os alunos perceberam que apesar de os pontos estarem todos desorganizados, seria mais convincente a interpretação da existência de um ponto máximo de absorção de gás carbônico e então a araucária começaria a devolver esse gás quando iniciasse sua decomposição.	**E.III**	Os dados reforçam a hipótese 2, com crescimento e decrescimento da massa.
Que função expressa a tendência desses dados?	A tendência geral pontos foi associada com uma função quadrática e foi iniciada a procura por essa função.	**E.I**	O conhecimento da forma das funções quadráticas permitiu associá-la à forma da distribuição dos pontos. É uma associação simples, sem demonstração.
Que coeficientes	Os alunos associaram de	**E.I**	Reconhecimento dos conteúdos

têm essa função? Uma parábola poderia passar por todos os pontos? Proposta: escolher uma parábola que passe “bem perto” de “quase todos” os pontos. Como resolver o sistema?	imediato que os dados eram como os “x e y” das funções. - Tentativa gráfica e observação que a função teria mais de um ponto de máximo/mínimo. - Perceberam que poderiam escolher uma parábola que passasse por 3 pontos, substituir (x,y) desses pontos na função de 2º grau e calcular o valor dos coeficientes, como um sistema. - O problema foi facilitado com $t = 0$. Com isso o sistema ficou de ordem dois e a solução foi obtida por substituição ou adição.	 **C.VI** **E.II** **E.II**	estudados previamente na situação problema. Argumentação gráfica com contraexemplo. A hipótese dos 3 pontos fez sentido com os conteúdos estudados anteriormente. Conhecimento pragmático. Uso de conhecimentos prévios, sem argumentação. Conhecimento pragmático.
Pode existir mais parábolas?	- Perceberam que outros 3 pontos poderiam ser escolhidos, cujas parábolas poderiam ser também representativas.	**E.VI e A.VI**	O gráfico permitiu a escolha visual de outros 3 pontos, mas a argumentação ainda é oral. A existência de outra curva é um contraexemplo ao encaminhamento anterior. O gráfico não foi suficiente para a escolha da melhor terna de pontos...ainda oral.
Como medir o erro?	- Todas as parábolas apresentam um erro (não passam exatamente sobre todos os pontos) - O erro é a distância vertical entre o ponto experimental e o ponto correspondente da função ajustada. - erro para um ponto = $\hat{y} - y$	**E.III e A.III** **A.III** **E.VII**	Constatação gráfica da ideia de “erro no ajuste” Expressão em linguagem natural do “erro no ajuste” em cada ponto Expressão em linguagem matemática do “erro no ajuste” em um ponto

	- erro total ao quadrado $= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$ - cálculo do erro total em planilha eletrônica	**E.VII** **E.VII**	Expressão em linguagem matemática do "erro total " Conhecimento aplicado escrito em linguagem computacional
A escolha da função ótima: - Teste com funções que não passam por pontos dados, mas representam razoavelmente o conjunto de pontos.(em planilha eletrônica) Método dos Mínimos Quadrados (professor)	 - constatação de que outras funções poderiam ser propostas, inclusive com menor erro total. Informação do professor sobre o MMQ $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$	 **E.VI** **E.II**	 Uso de linguagem oral, matemática e computacional para criar exemplos de retas com melhor desempenho do que aquelas que passam por 3 pontos dados. Uso de algoritmo sem demonstração, ou resultado de planilha eletrônica
Determinação do ponto ideal para corte das araucárias: tempo em anos? Como calcular?	Depois de obtido o ajuste, a função quadrática, e o gráfico desta função estar esboçado, ficou para os alunos o dever de determinar a idade de colheita das araucárias. Comentaram que seria o ponto mais alto da curva. Comentaram também que nem todas as árvores iriam estar prontas no mesmo tempo, pois o solo não tem a mesma fertilidade em todos os pontos, e também em algum local podem existir pedras no solo, o que impede o desenvolvimento das raízes. Recorreram a material didático e ao professor para certificarem-se que	**C.V** **A.III** **B.II**	Uso do desenho para interpretar a melhor idade para cortar as araucárias. Comparação com experiências vivenciadas no cotidiano. Linguagem e confirmação da ideia apoiadas em material didático.

	seriam coordenadas do vértice.		

Tabela 5.3 – Linguagens e argumentações presentes nas atividades de funções exponenciais

Questão/ Atividade	**Manifestação**	**Categorias**	**Comentários**
Quanto tempo um pé de alface demora para atingir tamanho suficiente para fins comerciais? E por quanto tempo ele permanecerá adequado para comércio exposto nas bancas?	*Difícil de saber professor! Depende de como ela é cultivada! Pode crescer rápido ou mais devagar!* *Acho que 30 ou 40 dias! Ouvi falar que pode-se colher alfaces com apenas 30 dias!* *Vamos descobrir outra função professor*!	**A.I** **A.II**	Apenas comentários, diálogos durante a aula. Argumento apoiado em conversas ou alguma mídia.
Apresentação dos dados do experimento.	Esboçaram o gráfico no plano cartesiano e identificaram os eixos como tempo e massa. Depois do desenho pronto, falaram:(**Hipótese**) Mais uma função quadrática!	**E.I** **A.II**	Linguagem escrita, desenhos, sem argumentação. Argumento apresentados com manifestação de colegas.
Vamos pensar em duas etapas. Uma enquanto a alface cresce, e outra após colheita.	Falaram: Daí é logística e exponencial professor!	**B.II** **C.III**	Apoiaram-se nas aulas de pré-requisitos que havíamos tratado de tai funções.
Qual função melhor representa a parte crescente?	É mais parecido com o "s" da logística, e a outra parte se parece com desenho de exponencial.	**C.II**	Argumento apoiado em desenhos e materiais didáticos e reforçado com manifesto de colegas e professor.
E essas funções como podem ser? Crescentes ou decrescentes?	Primeiro a alface vai crescer e depois decrescer/apodrecer!	**A.III**	Baseado em observação do comportamento natural da planta.
Apresentação da função logística Crescimento/	A função logística decresce também? - sinal do coeficiente *r*	**A.IV** **E.V**	Comparação com conhecimentos prévios de funções (**Atividade não realizada**)

decrescimento Qual função vai representar a aparte crescente? Cálculo do coeficiente *r*	- $m_o > K$ ou $m_o < K$ *Mais uma função quadrática.* *Ma. Logística.* *P. Por que?* *O desenho é mais parecido.* *Com sistemas professor?* (indução do professor, apresentando m_o e K para calcular *r)*	 **A.IV** **C.V** **A.IV** **E.VII**	Argumentação com resultados particulares dos valores dos coeficientes, obtidos no computador Argumento baseado em comparações (algo já estudado). Argumento baseado em aparência gráfica Argumento baseado em comparações (algo já estudado). Diálogo em linguagem técnica, usando propriedades de logaritmos e equações
A exponencial com base **e**.	Compararam com operações de atividades que envolviam função exponencial.	**B.IV**	Uso de ideias desenvolvidas em outras atividades.
Resolução do sistema.	Comentaram: é só substituir **y** no lugar de *f(t),* e logaritmo de potência é o mesmo para *ln...* Usaram dois pontos para obter os coeficientes.	**B.III** **D.I**	Linguagem escrita e argumento com base experiencial. Resolução de cálculos sem presença de argumentos.
Por que o gráfico da função exponencial se aproxima, mas não corta o eixo x?	É explorar e fazer uma comparação que a massa da alface quando está se decompondo nunca vai ser igual a zero (pode virar pó)	**B.II** **B.III**	Linguagem apoiada em eventos concretos, e justificativas baseadas no experimento.
Quanto tempo a alface vai estar disponível nas bancas? Considerando massas mínima e máxima respectivamente 200g e 300 g para comércio.	Levantar hipóteses de quantos dias? Envolver alunos em métodos de descobrir esse tempo de exposição em bancas de estabelecimentos comerciais, instigar a importância da matemática quando aplicada em situações cotidianas. Será que esta é uma boa	 **D.II**	Linguagem textual, cálculos e explicações. Argumentação com raciocínio lógico baseada em seus relatos ou do professor reforçadas pelo próprio aluno.

	função para representar massa das alfaces? Questões como essa levam o aluno a produzir argumentos para justificas suas respostas.		

5.2 Análise e interpretação dos tipos de linguagem e argumentações

As Tabela 5. 2 e 5.3 apresentam a frequência com que as categorias de linguagem e argumentação apareceram nas manifestações observadas. O objetivo da compilação não é de obter resultados numéricos precisos, visto que a análise das falas é bastante subjetiva, mas identificar de modo geral tais frequências. Assim, foi possível identificar as categorias nas manifestações dos alunos e do professor. Os comentários das frequências serão apresentados com o acompanhamento dos códigos em letras (A,B,C,D e E) para as linguagens e com os números em romano (I,II,III,IV,V,VI e VII) para os tipos de argumentações, de acordo com o quadro de categorias, detalhado no seção 4.2. As manifestações dos alunos (sem identificação), foram transcritas em itálico e poderão ser encontradas nas Tabelas 5.2 e 5.3 e/ou no diário de bordo (Anexo B).

Tabela 5.4 – Frequência das categorias de linguagem e argumentação

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	SOMA
A	2	2	5	3	-	1	-	13
B	-	3	2	1	-	-	-	6
C	-	1	1	-	2	1	-	5
D	1	1	-	-	-	-	-	2
E	3	3	2	-	1	2	4	15
SOMA	6	10	10	4	3	4	4	41

As aulas foram conduzidas na forma de exposição dialogada, com base em atividades propostas pelo professor. Evidentemente, outras formas didáticas poderiam ser utilizadas, tais como: leitura e execução das atividades da apostila, trabalhos em grupo, apresentação de resultados das atividades na forma de plenário, etc. A opção efetivada pelo professor, deu-se em função das limitações de tempo disponível (apenas 12 encontros), limitações bem presentes no cotidiano escolar. Essa opção levou ao predomínio do uso da linguagem oral, gestual (A) nas discussões, seguida e apoiada pelo registro escrito no quadro e copiado nos cadernos, dos dados, procedimentos e resultados das questões propostas (E), como evidencia a frequência registrada na Tabela 5.4.

O uso de linguagem de desenhos e esquemas (C) foi mínimo, mas poderia ser usada para descrever o ciclo de carbono ou etapas da produção e comercialização da alface. A linguagem textual (D) também foi pouco usada, devido à ausência de atividades que exigissem o registro textual de opiniões, conclusões e relatórios.

O processo de modelagem pode ser entendido como uma sequência de ideias expressas em diferentes linguagens, como registrado na Figura 5.1, em relação à modelagem da retenção do carbono pelas araucárias[3]. Nessas atividades, a linguagem oral (A) foi eficiente para o entendimento dos problemas a serem modelados e é através dela que os assuntos são introduzidos, discutidos e argumentados inicialmente. As ideias iniciais que os alunos traziam sobre os temas, foram transformando-se pela comunicação em linguagem oral. Essa etapa é importante no processo de ensino, justamente porque é a fase de superação de ideias antigas (cultura doméstica, natural, senso comum) por ideias novas, produto da interação social com colegas, professores e novas informações (cultura da ciência). A linguagem oral apoiada com linguagem técnica, na forma de tabelas de dados (E1)[4] permitiu direcionar as manifestações, saindo de noções de senso comum, tais como: *quanto mais reflorestar mais gás carbônico vai ser retirado da atmosfera*, para a evidência empírica dos dados da pesquisa de Tomaselli (2005). A leitura de dados em tabela (E1 e E3) requer alguma habilidade específica, característica da linguagem matemática. Não basta ler a coluna da massa de carbono. Deve-se entender que a cada massa, corresponde um valor do tempo, portanto deve-se ler as duas colunas, concomitantemente. Lê-se a evolução da massa para cada instante de tempo. Ou seja, é a ideia de função: uma variável em função da outra (E3). A transposição dos dados da tabela para o gráfico (E2), requer o conhecimento de plano cartesiano e oferece uma visualização geométrica dos dados da tabela, na qual se percebe claramente a relação não linear entre massa e tempo. Novamente a linguagem técnica é utilizada com ganhos na interpretação do fenômeno discutido. Ainda nessa fase, os símbolos matemáticos se restringem a tabela e gráfico. Ao propor uma função que represente a tendência dos pontos (E3), eleva-se o grau de abstração para os símbolos algébricos. Observa-se que a noção de crescimento/decrescimento de uma variável em relação à outra, evidente nas tabelas e gráfico, não é evidente ao se escrever a expressão de uma função, distanciando mais ainda o fenômeno da expressão

[3] Esquema semelhante poderia ser elaborado para a modelagem da alface, não apresentado aqui por repetir as mesmas informações sobre linguagem e argumentação.
[4] A numeração de 1 a 5 na linguagem técnica E, é apenas para mostrar que diferentes linguagens matemáticas foram usadas: tabelas, gráficos, funções, matrizes e sistemas.

matemática desse. Na determinação dos parâmetros, ao construir sistemas e resolvê-los, há um descolamento do significado real, concentrando a atenção nos algoritmos de solução (E4), com operações estritamente matemáticas – operações elementares dos sistemas lineares. A linguagem gráfica retorna para apoiar a discussão da escolha da curva que melhor ajusta a dispersão de pontos (E5), assim como volta a linguagem oral (A) para mostrar a solução do problema de modelagem proposto.

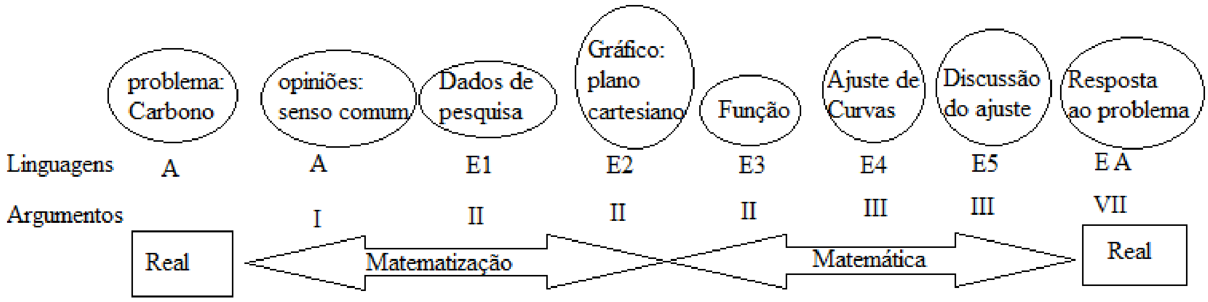


Figura 5.1 – Linguagens e argumentação nos processos de modelagem

O predomínio da linguagem oral no início e final da modelagem, mostrado na Figura 1, reflete-se na frequência indicada dessa linguagem na Tabela 5.4. Enquanto que na fase de matematização (processo de conversão de elementos da realidade em linguagem matemática) e de matemática (execução de algoritmos e operações matemáticas) predominam a linguagem matemática e algum tipo de argumentação informal (EII e EIII). Isso pode ser perceptível intuitivamente na prática das atividades de modelagem na escola, mas nesse trabalho, ficou evidente nas observações das atividades, como mostram as frequências da Tabela 5.4.

O tipo de linguagem matemática utilizado pelos alunos durante a modelagem, pode-se dizer, é restrito à apresentação das estruturas matemáticas (constantes, variáveis, funções, sistemas) e aos objetivos operatórios (calcular valores coeficientes de funções, analisar gráficos, resolver sistemas,...) que são importantes para o problema de modelagem. Não foram encontrados textos (D) com frases e símbolos que descrevessem uma argumentação matemática (VII), no sentido de verificação da verdade de proposição, nos registros dos alunos, mas apenas anotações de fases de algoritmos. Esse tipo de registro é característico do pragmatismo da resolução de problemas (I e II), na qual a precisão e o detalhamento são relegados a um segundo plano de necessidade. Nessa etapa, o modelador tem em mente resolver o problema e não justificar a verdade das proposições matemáticas que usa, mesmo que isso tenha o risco de erros. Com relação às atividades aplicadas, deve-se considerar evidentemente, que não foram solicitadas justificativas e demonstrações, pois foram conduzidas visando a instrumentação para a modelagem, adquirindo um status de informação útil e não de investigação matemática. Talvez em outras condições de tempo, as atividades de revisão e ensino de conteúdos fossem ministradas usando técnicas mais de investigação matemática.

Uma abordagem empirista-tecnicista[5] da pesquisa em educação matemática poderia limitar a análise de atividades e materiais de ensino somente às aplicações em sala de aula. Tal procedimento teria a qualidade de ser real, porém, cada aplicação seria apenas uma das possibilidades. Outras salas de aula, outros alunos, outros professores e outros encaminhamentos de modelagem poderiam levar a novas possibilidades. Assim, como em Skovsmose (2015) p. 72, admitimos a hipótese de descrever, não somente "o que é" (como uma pesquisa descritiva), mas "o que não é, mas poderia ser". Nesse sentido, algumas questões que poderiam ter sido investigadas (e podem ser em outras aplicações das atividades propostas neste trabalho) com diferentes linguagens e tipos de argumentações, são apresentadas, apenas como exemplo dentre tantas outras, na Tabela 5.5.

Com condições de tempo mais favoráveis do que a experiência apresentada nesse trabalho, as atividades poderiam ter sido encaminhadas de forma que os próprios alunos fizessem as investigações, devidamente orientados pelo professor, discutindo entre si (A), escrevendo suas conclusões na forma de texto (D) e linguagem matemática (E), como descrito nas colunas 3 e 4 da Tabela 5.5. Dessa constatação, percebe-se que o tipo de linguagem utilizada pelos alunos depende do procedimento didático utilizado.

Tabela 5.5 – Exemplos de questões passíveis de investigação matemática

Atividade	Questão	Procedimentos	Linguagem/argumentação
I.2	Qual é a influência do coeficiente *C* no gráfico de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$	- Fazer gráficos da função em uma planilha eletrônica, variando somente *C* - Observar e discutir em grupo	- **A, C** e **D** para responder a questão; **C.V**. - **E.VII** para explicar porque a intersecção de $f(x)$ com o eixo *Y* é em $(0,C)$.
I.3	Relação entre A de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ e a concavidade da parábola	- Fazer gráficos da função em uma planilha eletrônica,	- **A, C** e **D** para responder a questão; - Verificação de casos

[5] Entende-se por tecnicista a pesquisa "...para a qual a melhoria do ensino de matemática se dá pela descoberta, desenvolvimento e fornecimento ao sistema de ensino de novos métodos ou técnicas de ensino – e cientificamente pelo modelo de investigação da agricultura – método experimental que tem como princípio "experimentar para melhorar produtos através de tratamentos manipulativos" – acompanhados de uma abordagem quantitativista ou computacionista de supervalorização das técnicas estatísticas" (FIORENTINI e LORENZATO, 2009, p. 25).

		variando somente A - Observar e discutir em grupo	particulares; **C.V** - Demonstração por derivadas (para o Ensino Superior) **E.VII**
I.4	Raízes $x = \pm a$ em $f(x) = (x \pm a)^2$	- Fazer gráficos da função em uma planilha eletrônica - Revisar o conceito de raiz de função	- **A, C** e **D** para responder a questão; **C.V** - Verificação de casos particulares; **E.V** **- E.VII** para demonstrar
III.2	A função logística pode ser decrescente? Porque a capacidade suporte é K?	- Fazer gráficos da função em uma planilha eletrônica, variando: - o sinal de r, - $m_o > K$ ou $m_o < K$ - fazer $t \rightarrow \infty$	- **A, C** e **D** para responder a questão; - Argumentação com exemplo e constra-exemplo: **VI** - **E.VII** para demonstrar

Em um procedimento pedagógico que coloque o aluno na posição de investigador, o material inicial de investigação (o que o aluno usa para responder as questões) é a representação gráfica (sejam desenhos manuais ou planilhas eletrônicas), em uma atitude de observação de fatos e análise de regularidades, semelhante as observações empíricas de um biólogo sobre evento natural (colunas 3 e 4 da Tabela 5.5). A argumentação, nesse caso, seria pela evidência de resultados particulares (C.V). A criação das proposições matemáticas ocorre em níveis de abstração um tanto informais, como a aparência do gráfico, a visualização da posição da função, o efeito da variação do parâmetro, etc. Evidentemente, é uma análise de casos particulares que pode levar a generalizações equivocadas, mas também, depois de bastante testadas, podem adquirir um considerável grau de verdade.

As questões associadas à explicação dos porquês é que geram investigação matemática e exigem linguagem e argumentações específicas (E.VII), como mostram as últimas observações de cada quadro da quarta coluna, em todas as atividades apresentadas na Tabela 5.5. Esse tipo de questão (os porquês) transcende a evidência de casos particulares e direciona a investigação à generalização, através de uma demonstração lógica. A organização dessas demonstrações é uma ação de sistematização do conhecimento matemático trabalhado, devidamente construído logicamente no ambiente escolar.

A consideração de argumentações não formais como suporte para aumentar a “crença” da proposição (II,III,IV e V), principalmente aquelas desenvolvidas pela intervenção dos professores, colegas, livros ou materiais concretos, podem ser práticas para a resolução de problemas, mas também podem vir a se constituírem em obstáculo epistemológico[6], para aqueles alunos que optarem pela carreira de matemática. Esse obstáculo é inevitável, visto que a formalização desejada pelo Projeto Klein tem muitas limitações na Escola Básica. No entanto, pode ser atenuado, se a ideia de investigação matemática com diferentes formas de argumentação e com crescente sofisticação de linguagem e operações lógicas, for uma escolha didática dos professores, com ganhos significativos de aprendizagem de matemática.

[6] Gaston Bachelard refere-se aos obstáculos epistemológicos como noções equivocadas sobre o conhecimento científico, que dificultam sua compreensão na escola.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia de aplicação em classe e registro das manifestações permitiu identificar os tipos de linguagem e argumentações presentes nas atividades de ensino e modelagem, graças aos registros em diário de bordo e avaliações escritas. A leitura desse material visando o enquadramento nas categorias de análise, mesmo com toda subjetividade inerente, viabilizou respostas de uma situação real ao problema proposto. Porém, ao analisar o real, percebemos que novas possibilidades de utilização das atividades foram consideradas, levando a suposição de que outras linguagens e argumentações são possíveis. Dizer o “como poderia ter sido”, não tem a evidência empírica de provar “com o que foi” – como requer a ciência positivista - mas é um registro, na direção “do que possa vir a ser”.

Os tipos de linguagens utilizados pelos alunos dependem da forma de condução das atividades: Se o professor dá uma aula expositiva/dialogada prevalecerá a linguagem oral/gestual (A); se forem dadas leituras/execução de atividades orientadas, com cobrança de respostas escritas, as linguagens tendem a ser oral/gestual (A) na comunicação entre os alunos e escrita/gráfica/textual (C,D) ou matemática (E) nas respostas; ainda se as atividades tiverem materiais concretos, as linguagens poderão ser oral ou escrita (B), para expressar as discussões e conclusões dos experimentos. Foi importante reconhecer nesse trabalho que:

(i) A linguagem oral está presente em todas as etapas, tanto de modelagem como de matemática, mesmo que de forma diferente, porém exercendo sua função de comunicação natural entre as pessoas. Partindo do pressuposto que onde há diálogo sobre Matemática, pode haver aprendizagem, pode-se induzir que as atividades de modelagem e o estudo da matemática para modelar, são ambientes de aprendizagem coletivos e transcendem (ou complementam, mas não necessariamente substituem) o modelo clássico do estudante solitário;

(ii) Existe uma sequência de tipos de linguagens desde a colocação do problema até sua resposta, a qual inicia com a linguagem oral, passa por linguagens técnicas, na forma de tabelas e gráficos, até os modelos algébricos e os algoritmos matemáticos. Essa transformação nas representações dos objetos estudados é a essência da modelagem, a qual entendemos, é de extrema importância para a formação científica das novas gerações.

Os tipos de argumentação que mais se destacaram nas atividades de ensino de modelagem matemáticas são aqueles que facilitam o diálogo, os acordos entre os alunos. Trata-se dos tipos de argumentação (ou da falta deles) presentes nas categorias I, II, III e VI.

Nestes os alunos conseguem se expressar da sua maneira e fazem justificativas baseando-se nos seus conhecimentos prévios e entendimentos. A argumentação ocorre em diferentes situações (convivência social, debates políticos, ...), em diferentes disciplinas, na modelagem matemática e não somente nas atividades de matemática. A busca da consistência dos argumentos para o convencimento do outro é um rico procedimento pedagógico, que conduz ao conhecimento científico. Os tipos de argumentação com menor frequência foram os que apresentam maiores dificuldades técnicas: as generalizações (V) e a argumentação lógico-matemática (VII). Esse resultado faz sentido, visto que a modelagem (e mesmo as atividades de ensino propostas) prioriza a resolução do problema e não a investigação da verdade das proposições utilizadas. Assim, como mostrado nos exemplos da Tabela 5.5, a investigação matemática, dedutiva e generalizadora (VII), é a etapa final do processo de argumentação. Não se pode cobrar que toda proposição seja demonstrada formalmente no ensino Médio nem no superior. A determinação do grau de verdade de uma proposição é escolhida pelo usuário da matemática. Na escola, os usuários da matemática são os alunos, cidadãos que não necessariamente serão matemáticos, como se refere Klein (1976, p. 176). Assim, o equilíbrio entre matemática pura e aplicada na escola, pode ser obtido, escolhendo tipos de argumentações adequados para as expectativas da comunidade escolar.

A linha de investigação proposta nesse trabalho é promissora como pesquisa em Educação Matemática. Trabalhos futuros poderão analisar a relação entre argumentação e aprendizagem em atividades de matemática na Escola Básica, para esclarecer se a sofisticação de linguagem e técnicas argumentativas, realmente conduzem a uma aprendizagem efetiva ou distanciam os alunos da matemática.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILAR JUNIOR, C.; NASSER L. Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, p. 1012-1031, 2014.

ALMEIDA, L.W., SILVA, K. P. e VERTUAN, R.E. **Modelagem matemática na educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F.; FUSCO, SILVA, C. A. Provar e demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 1, p. 22-41, 2012.

ALMOULOUD, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. **Educar em Revista** (Impresso), v. 1, p. 191-2010, 2011.

BACHELARD, G. A Formação do Espírito Científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALACHEFF, N. (1988) *Une étude des processs de prevue en mathématiques chez des eleves de college*. 1998. 591 f. Tese (Doutorado em Ciências e Didática das Matemáticas) – Université Joseph Fourier, Grenoble.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R.C. **Introdução ao Cálculo e aplicações**. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M.S. e HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2002.

BOAVIDA, Ana M. Roque. A argumentação em matemática. (Investigando o trabalho de duas professoras no contexto de colaboração) 2005, 975f. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa Departamento de Educação, Lisboa, 2005.

BORGES, P.A.P. e NEHRING, C.M. Matemática e Seqüências Didáticas: uma relação de complementaridade. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 30, p. 131-147, 2008.

CALDEIRA, A. D. (2004). Modelagem matemática na formação do professor de matemática: desafios e possibilidades. In: ANPED SUL. *Anais*... Curitiba: UFPR. 1CD-ROM.

CARVALHO S. A. e RIPOLL C. C. RELATO DE EXPERIÊNCIA O pensamento matemático na Escola Básica. **Zetetiké –** FE/Unicamp, vol 21, n.40, p. 149-161, jul/dez 2013.

DAVIS, P. J e HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

DUVAL, R. **Sémiosis e pensée humaine : régistres sémiotiques et apprentissage intellectuel**. Per Lang S.A., 1995.

FIORENTINI, D. e LORENZATTO, S. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FRANCO, M.L.P.B. **Análise de conteúdo**. Brasília: Liber Livro Editora, 2008.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

MACHADO, N. J. **Lógica e linguagem cotidiana – verdade, coerência, comunicação e argumentação**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NUNES José M. Viana ; ALMOULOUD, S. A. . O modelo de Toulmin e a análise da prática da argumentação em matemática. **Educação Matemática Pesquisa (Online)**, v. 15, p. 488-512, 2013.

NUNES José M. Viana; ALMOULOUD, S. A. . THE PRACTICE OF ARGUMENTATION AS A METHOD OF TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS. International Journal for Research in Mathematics Education, v. 5, p. 12-35, 2015.

NUNES, J. M. V. e ALMOULOUD, S. A. Argumentação no ensino da matemática: perspectiva metodológica. REMATEC. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura** (UFRN), v. 13, p. 143, 2013.

Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa. Acesso em: 23 outubro, 2017, 22:52, https://klein.sbm.org.br/objetivos

SALVADOR, J.A. ; BALDIN, Y. Y. e BISOGNIN, E. In: Anais do Congresso Nacional de matemática aplicada e Computacional do Sudoeste, p. 472-475, 2011.

SCHEFFER, N. F. A argumentação em matemática na interação com tecnologias. **Ciencia`natura UFSM.** 34(1), p. 23-38, 2102.

SILVA, V. R.; SANTOS, R. P. O. Uma Investigação Sobre a Argumentação no Livro "A Conquista da Matemática" Relativa as Ideias Intuitivas da Geometria. Caminhos da Educação Matemática em Revista/On line, v. 2, p.17 – 33, 2014.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas, SP: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D´AMBROSIO, B.S. e LOPES, C.E. (orgs.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015. p. 63-90.

TOMASELLI, Amador. DETERMINAÇÃO DE BIOMASSA E CARBONO EM POVOAMENTOS DE Araucaria angustifolia (Bert.) O. Ktze EM CAÇADOR, SANTA

CATARINA. 2005, 151f. Engenharia Ambiental. Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, 2005.

TOULMIN, S. E. **Os Usos do Argumento**. Trad. Reinaldo Guarany e Marcelo Brandão Cipolla. 2 Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

ANEXO A - ATIVIDADE DE ENSINO

I – FUNÇÃO QUADRÁTICA
ATIVIDADE I.1 – Resgate de carbono da atmosfera
ATIVIDADE I.2 – Significado gráfico do coeficiente C
ATIVIDADE I.3 – Significado gráfico do coeficiente A
ATIVIDADE I.4 – Significado gráfico das raízes (uma raiz real)
ATIVIDADE I.5 – Significado gráfico das raízes (duas raízes reais)
ATIVIDADE I.6 – Gráficos e coeficientes
ATIVIDADE I.7 – Função quadrática que passa por 3 pontos
ATIVIDADE I.8 – Aplicações elementares

II – AJUSTE PARABÓLICO
ATIVIDADE II.1 - Parábola simétrica em relação ao eixo Y
ATIVIDADE II.2 - Caso geral
ATIVIDADE II.3 - Ajustes aproximado sub-ótimo
ATIVIDADE II.4 – Ajuste Linear

III – FUNÇÃO EXPONENCIAL
ATIVIDADE III.1 - Ajuste de curva do crescimento/decrescimento da massa de alface
ATIVIDADE III.2 – Função Logística
ATIVIDADE III.3 - Ajuste de curvas exponenciais

I – FUNÇÃO QUADRÁTICA

ATIVIDADE I.1 – Resgate de carbono da atmosfera

Conteúdo: Função quadrática

Problema: Qual a função matemática que melhor representa a quantidade de carbono resgatada da atmosfera por árvores da espécie *Araucária angustifólia*?

Objetivos.

1. Perceber a influência dos coeficientes da função quadrática na parábola.

2. Interpretar a importância prática dos pontos de máximo, mínimo e raízes da função.

3. Associar gráficos às funções adequadas, por tentativas.

4. Desenvolver um método para obter a função que melhor represente um conjunto de dados.

A preocupação com aquecimento global e a Matemática.

O aquecimento global, provocado principalmente pela grande emissão de gases poluentes na atmosfera do planeta, vem preocupando toda a sociedade. O gás carbônico proveniente da queima de combustíveis fósseis é o principal responsável pelo aumento do efeito estufa.

Mas como poderíamos retirar da atmosfera o gás carbônico?

Eis uma solução. Absorver o gás com reflorestamentos e quando as árvores absorverem o máximo de gás é possível, utilizar sua madeira para construções, aprisionando assim o carbono.

Mas qual o ponto ideal para o corte de uma árvore? Qual deve ser a idade para abater uma árvore, de modo que ela tenha absorvido o máximo de gás carbônico durante sua vida?

Para resolver esse problema, deve-se levar em consideração, que uma árvore absorve gás carbônico enquanto cresce e amadurece, e armazena carbono em seu material lenhoso, chegando a um ponto máximo de absorção. Ao envelhecer e após a morte, no processo de decomposição, a árvore passa a devolver o carbono estocado em seu material lenhoso para o ambiente.

Com base nessa hipótese e pela disposição gráfica dos valores do teor de carbono mostrados na Fig. 1, pode-se propor uma função quadrática como modelo matemático.

A análise a seguir, utiliza dados da pesquisa de Tomaselli (2005), sobre a espécie *Araucária angustifólia* na cidade de Caçador, Santa Catarina.

Tabela 1: Teor médio de carbono em *Araucária angustifólia.*

Idade (anos)	Teor médio de Carbono (kg/m^3)
19	227,6
20	253,9
23	272,3
28	290,6
32	284,1
34	300,7

Fonte: Adaptação do autor, com base em Tomaselli (2005).

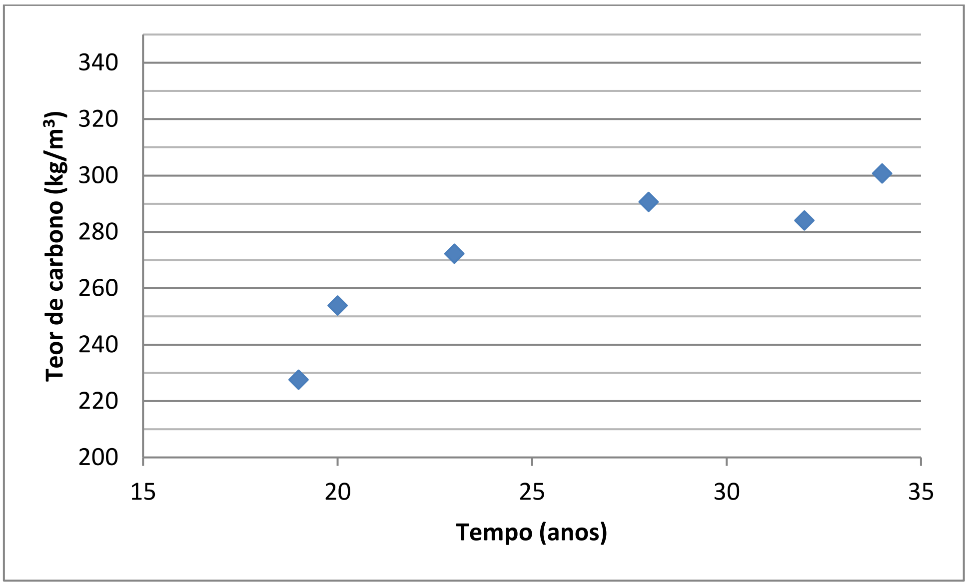


Figura 1 – Teor médio de carbono em *Araucária angustifólia.*

ATIVIDADE I.2 – Significado gráfico do coeficiente C

A função quadrática, ou função polinomial do 2º grau é uma função *f* de $\Re \rightarrow \Re$ dada por uma lei da forma

$f(x) = Ax^2 + Bx + C,$

onde *A*, *B* e *C* são números reais e $A \neq 0$.

Dada as funções quadráticas

(I) $f(x) = x^2 + C$, e

(II) $f(x) = x^2 + x + C$,

a) Dê valores diferentes para *C* e faça os gráficos das parábolas

b) Compare os gráficos e escreva sobre o efeito da variação do *C* sobre a posição da parábola no gráfico.

c) O que pode-se afirmar sobre a posição da parábola quando $C = 0$.

ATIVIDADE I.3 – Significado gráfico do coeficiente A

Dada a função quadrática $f(x) = Ax^2$,

a) Dê valores diferentes para *A* e faça os gráficos das parábolas

b) Compare os gráficos e escreva sobre o efeito da variação do A sobre a posição da parábola no gráfico.

ATIVIDADE I.4 – Significado gráfico das raízes (uma raiz real)

Dada a função quadrática $f(x) = (x \pm a)^2$,

a) Dê valores diferentes para a e faça os gráficos das parábolas

b) Compare os gráficos e escreva sobre o significado de a sobre posição da parábola no gráfico.

ATIVIDADE I.5 – Significado gráfico das raízes (duas raízes reais)

Dada a função quadrática $f(x) = (x + x_1) \cdot (x + x_2)$

a) Mostre que para a função dada, $A = 1; B = x_1 + x_2$ e $C = x_1 \cdot x_2$

b) Dê valores diferentes para x_1 e x_2 e faça os gráficos das parábolas

c) Compare os gráficos e escreva sobre o significado de x_1 *e* x_2 na posição da parábola no gráfico.

ATIVIDADE I.6 – Gráficos e coeficientes

Análise da posição no gráfico de funções quadráticas conforme a variação dos coeficientes.

1. **Função do tipo** $f(x) = Ax^2$

a) Faça um esboço das parábolas do tipo $f(x) = Ax^2$, para os seguintes valores de A:
0,01 ; 0,1 ; 0,5; 1 ; 2; 5; 10; 20 e
- 0,1 ; -1, -5 , -10

b) Verifique o que ocorre na posição da parábola quando o A varia de um valor próximo de zero até 10.

c) O que ocorre com a parábola quando A tende para infinito?

d) O que ocorre com a parábola quando A tende a zero?

e) O que ocorre com a parábola quando A é negativo?

2. Função do tipo $f(x) = Ax^2 + C$

a) Faça um esboço das parábolas do tipo $f(x) = Ax^2 + C$, para os seguintes valores de A e C:

$A = 1$ e $C = 1$; $A = -1$ e $C = 1$; $A = 2$ e $C = -5$; $A = -2$ e $C = -5$; $A = 0{,}5$ e $C = -3$

b) Os gráficos das parábolas tipo $f(x) = Ax^2 + C$ (ou seja, com $B = 0$) têm alguma característica particular ?

c) Explique as posições da parábola em função dos valores de A e C.

3. Função do tipo $f(x) = Ax^2 + Bx$

a) Retome as conclusões da letra (c) da Atividade I.1

b) Coloque x em evidência em $f(x) = Ax^2 + Bx$ e relacione com as conclusões da Atividade I.4.

c) O que se pode afirmar sobre as raízes das funções quadráticas cuja forma é

$f(x) = Ax^2 + Bx$?

4. Função do tipo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

a) Mostre que as raízes da $f(x)$ acima são obtidas pela Fórmula de Bhaskara

b) Determine as raízes das funções dadas e esboce os gráficos das funções, com base nos significados gráficos dos coeficientes, trabalhados nas atividades anteriores:

$$f(x) = x^2 + 8x + 10\,.$$

$$f(x) = x^2 + 8x - 10\,.$$

$$f(x) = x^2 - 8x - 10\,.$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x + 10\,.$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x - 10\,.$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 8x + 10\,.$$

ATIVIDADE I.7 – Função quadrática que passa por 3 pontos

Considere que uma função quadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ passa pelos pontos $P_1 = (x_1,y_1)$, $P_2 = (x_2,y_2)$ e $P_3 = (x_3,y_3)$.

Para determinar os coeficientes A, B e C substituímos as coordenadas dos três pontos em $f(x)$. Com isso, obtemos um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os coeficientes A, B e C.

$$\begin{cases} y_1 = C + Bx_1 + Ax_1^2 \\ y_2 = C + Bx_2 + Ax_2^2 \\ y_3 = C + Bx_3 + Ax_3^2 \end{cases}$$

A solução desse sistema pode ser obtida pelos Métodos de Substituição e de Craemer.

Exemplo: $\begin{cases} 0 = C + B\cdot 1 + A\cdot 1^2 \\ -28 = C + B\cdot(-3) + A\cdot(-3)^2 \\ 19 = C + B\cdot 4 + A\cdot 4^2 \end{cases}$, Solução: $\{A = -2, B = 3, C = -1\}$

EXERCÍCIOS

1) Sabendo que o gráfico de uma função quadrática intersecta o eixo de abscissas nos pontos (-3,0) e (2,0). Determinar a função.
2) Escrever as funções na forma fatorada:
   a. $f(x) = 6x^2 + 7x - 5$
   b. $g(x) = x^2 - 2$
   c. $f(t) = t^2 - 4t + 13$
   d. $h(x) = 3x^2 + 8x$
   e. $f(x) = 13 - x^2$
   f. $g(x) = -x^2 - 14x - 45$
3) Determinar a função quadrática em que o coeficiente **a** = -1/2 e seu gráfico intersecta o eixo **x** nos pontos (0,0) e (32,0).
4) Determinar a função quadrática que passa pelos pontos:
   a. (-1,2); (0,3) e (1,2)
   b. (-1,15); (0,13) e (1,15)
   c. (2,-7); (1,-2) e (-3,-22)
   d. (-2,-12; (6,4) e (1,3/2)

ATIVIDADE I.8 – Aplicações elementares

1. Curva de uma mangueira: pendurar uma mangueira pelo centro; colocar dois pesos idênticos nas extremidades e determinar pontos na curva.

2. Em um experimento de cultivo de beterraba foram obtidos os dados da tabela para (*x*) número de mudas/m^2 e (*P*) produtividade (kg/m^2).

x, nº de mudas/m^2 *(unid)*	20	50
P, produtividade (kg/ m^2)	0,8	0,6

É razoável considerar que para nenhuma muda plantada ($x=0$) a produtividade é nula ($P=0$).

Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre *P* e *x*.

3. **Queda livre** (Fonte: BORGES, P.A.P. Apostila de Matemática instrumental. (no prelo) UFFS, 2015.

O movimento vertical de uma pedra, tanto de subida como de descida, desconsiderando a presença do ar, pode ser modelado por uma função quadrática.

$$y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (6.1)$$

onde $y(t)$ é a posição no eixo *Y* vertical, apontando para cima (*m*),

y_o é a posição inicial (*m*),

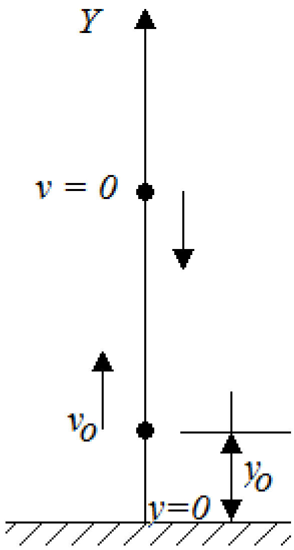
v_o é a velocidade inicial (m/s),

g é a aceleração da gravidade (m/s^2) e

t é o tempo (*s*).

A velocidade da pedra em cada instante, é dada por uma função de 1º grau:

$$v(t) = v_o - gt \qquad (6.2)$$



Consideremos que $y = 0$ corresponde ao nível do chão. Se uma pedra é jogada para cima por uma pessoa em pé, a posição de saída é y_o e como a pedra está recebendo um impulso, a velocidade inicial é v_o, diferente de zero, e com sinal positivo, pois o deslocamento é para cima, sentido positivo do eixo *Y*. A aceleração da gravidade *g* é constante para pequenas variações de altitude. A Eq. (6.1) dá as posições da pedra para cada instante de tempo.

a) Considere $y_o = 1\ m$; $v_o = +5\ m/s$ e $g = 10\ m/s^2$ e faça um gráfico de $y(t)$.
b) Determine a altura máxima que a pedra alcançará e o tempo correspondente a esta posição, usando o que você conhece sobre vértice de parábolas.
c) A velocidade da pedra na posição de altura máxima é zero. Use a Eq. (6.2) para calcular o tempo que a pedra levará para atingir a altura máxima. Compare o resultado com o item (b).
d) Analise o sinal da velocidade em função do tempo.
e) Calcule o tempo que a pedra levará para atingir o chão.
f) Calcule a velocidade da pedra ao atingir o chão.

4. Os arcos parabólicos são utilizados em construções, principalmente em portas, janelas, pontes e aquedutos. Consegue-se maior resistência em estruturas na forma de arcos, para grandes vãos, do que com vigas retas.

Encontre uma janela ou porta cuja forma seja parabólica, meça as coordenadas de três pontos e determine a função que passa nesses pontos.

II – AJUSTE PARABÓLICO

A produção de dados de variáveis é comum em trabalhos científicos experimentais, assim como a organização destes em um gráfico cartesiano. É caso da Tabela 1, com dados sobre a idade das árvores e o teor médio de carbono. Nesses casos, temos interesse em determinar os parâmetros de uma função que descreva a tendência de crescimento/decrescimento de uma variável em relação à outra. Esse procedimento é chamado Ajuste de Curvas.

Se a curva escolhida for um polinômio de segundo grau, chamamos: Ajuste Parabólico ou de segundo grau.

ATIVIDADE II.1 - (Parábola simétrica em relação ao eixo Y)

Considere os três pontos (-1,1); (1,3) e (0,2):

a) Existe uma parábola que passa exatamente nesses três pontos?
b) Determine os coeficientes.

ATIVIDADE II.2 - (Caso geral)

Considere os três pontos (-1,1); (1,3) e (2,1):

a) Existe uma parábola que passa exatamente nesses três pontos?
b) Determine os coeficientes.

ATIVIDADE II.3 - (Ajustes aproximado sub-ótimo)

Considere os quatro pontos (-1,1); (1,3); (2,0) e (3,1):

a) Existe uma parábola que passa exatamente nesses quatro pontos?
b) Trace o esboço de uma função quadrática que passe *o mais próximo possível* dos quatro pontos.

Observe que nesse caso, temos quatro pontos. Como o sistema linear obtido não é quadrado, não podemos aplicar o Método de Craemer, pois não existe determinante de matriz não quadrada. Vamos propor um método cujo resultado não é o melhor (existem resultados melhores), mas mesmo assim, a parábola obtida descreve aproximadamente a tendência dos pontos dados.

Método dos 3 pontos representativos

1º) Passo: Faça um gráfico cartesiano dos pontos dados;

2º) Passo: Escolha 3 pontos entre os vários pontos dados, de tal forma que a parábola resultante descreva razoavelmente a tendência da coleção de pontos;

3º) Passo: Substitua as coordenadas desses três pontos na função $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, como fizemos na Atividade I.7.

4º) Passo: Resolva o sistema linear Usando a Regra de Craemer. A solução do sistema são os coeficientes *A, B* e *C*.

c) Aplique o Métodos dos 3 pontos representativos nos pontos do item (a) dessa atividade;

d) Se você escolhesse outros 3 pontos obteria o mesmo valor para os coeficientes *A, B* e *C* ?

e) Como pode-se afirmar que um ajuste é melhor do que o outro?

f) Uma forma de avaliar *quanto* uma função ajustada passa dos pontos dados é calcular as diferenças

$$D_i = (Y_i - y_i)^2 \text{ para } i = 1,2,3,...n \text{ pontos.}$$

onde Y_i são as ordenadas dos pontos dados e y_i as ordenadas dos pontos calculados com a parábola ajustada.

ATIVIDADE II.4 – Ajuste Linear

Quando já interpretado o tipo da função para representar o modelo, em que neste caso a função quadrática do tipo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, com $A, B \text{ e } C \in \Re$ e $A \neq 0$, é necessário determinar os coeficientes ***A***, ***B*** e ***C*** dessa função resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 361a+19b+c=227,6 \\ 400a+20b+c=253,9 \\ 529a+23b+c=272,3 \\ 784a+28b+c=290,6 \\ 1024+32b+c=284,1 \\ 1156a+34b+c=300,7 \end{cases}$$

O sistema escrito em forma de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 361 & 19 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 529 & 23 & 1 \\ 784 & 28 & 1 \\ 1024 & 32 & 1 \\ 1156 & 34 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227,6 \\ 253,9 \\ 272,3 \\ 290,6 \\ 284,1 \\ 300,7 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema sobredeterminado (não existe solução), será usado um ajuste linear, para que o numero de equações seja igual ao numero de incógnitas, bastando multiplicar pela matriz transposta a matriz dos coeficientes pela esquerda em ambos os membros do sistema apresentado na forma de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 361 & 400 & 529 & 784 & 1024 & 1156 \\ 19 & 20 & 23 & 28 & 32 & 34 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 361 & 19 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 529 & 23 & 1 \\ 784 & 28 & 1 \\ 1024 & 32 & 1 \\ 1156 & 34 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 361 & 400 & 529 & 784 & 1024 & 1156 \\ 19 & 20 & 23 & 28 & 32 & 34 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 227,6 \\ 253,9 \\ 272,3 \\ 290,6 \\ 284,1 \\ 300,7 \end{bmatrix}$$

Obtendo assim um sistema linear com três equações e três incógnitas.

Na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 3569730 & 121050 & 4254 \\ 121050 & 4254 & 156 \\ 4254 & 156 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1194128,3 \\ 43117,1 \\ 1629,2 \end{bmatrix}$$

Na forma usual de sistemas.

$$\begin{cases} 3569730a+121050b+4254c=1194128,3 \\ 121050a+4254b+156c=43117,1 \\ 4254a+156b+6c=1629,2 \end{cases}$$

Para resolver o sistema na forma matricial, basta multiplicar a matriz inversa da matriz dos coeficientes pela esquerda em ambos os membros da igualdade.

$$\begin{bmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3569730 & 121050 & 4254 \\ 121050 & 4254 & 156 \\ 4254 & 156 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1194128{,}3 \\ 43117{,}1 \\ 1629{,}2 \end{bmatrix}$$

Lembrando que a matriz inversa $\mathbf{M}^{-1}$ de uma dada matriz **M** é aquela cujo produto $\mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{M} = \mathbf{Id}$ matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3569730 & 121050 & 4254 \\ 121050 & 4254 & 156 \\ 4254 & 156 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3569730k + 121050l + 4254m & 121050k + 4254l + 156m & 4254k + 456l + 6m \\ 3569730n + 121050o + 4254p & 121050n + 4254o + 156p & 4254n + 456o + 6p \\ 3569730q + 121050r + 4254s & 121050q + 4254r + 156r & 4254q + 456r + 6s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando igualdade de matrizes, segue:

$$\begin{cases} 3569730k + 121050l + 4254m = 1 \\ 121050k + 4254l + 156m = 0 \\ 4254k + 456l + 6m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3569730n + 121050o + 4254p = 0 \\ 121050n + 4254o + 156p = 1 \\ 4254n + 456o + 6p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3569730q + 121050r + 4254s = 0 \\ 121050q + 4254r + 156r = 0 \\ 4254q + 456r + 6s = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas organizados de forma à obter a matriz inversa, logo:

$$\begin{bmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}000393954588 & -0{,}020784089010 & 0{,}261072511520 \\ -0{,}020784089010 & 1{,}101568655541 & -13{,}904865936066 \\ 0{,}261072511520 & -13{,}904865936066 & 176{,}592770336492 \end{bmatrix}$$

Usando a matriz inversa, (multiplicando pela direita em ambos os membros) para resolver o sistema, segue:

$$\begin{bmatrix} 0{,}000393954588 & -0{,}020784089010 & 0{,}261072511520 \\ -0{,}020784089010 & 1{,}101568655541 & -13{,}904865936066 \\ 0{,}261072511520 & -13{,}904865936066 & 176{,}592770336492 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3569730 & 121050 & 4254 \\ 121050 & 4254 & 156 \\ 4254 & 156 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}000393954588 & -0{,}020784089010 & 0{,}261072511520 \\ -0{,}020784089010 & 1{,}101568655541 & -13{,}904865936066 \\ 0{,}261072511520 & -13{,}904865936066 & 176{,}592770336492 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1194128{,}3 \\ 43117{,}1 \\ 1629{,}2 \end{bmatrix}$$

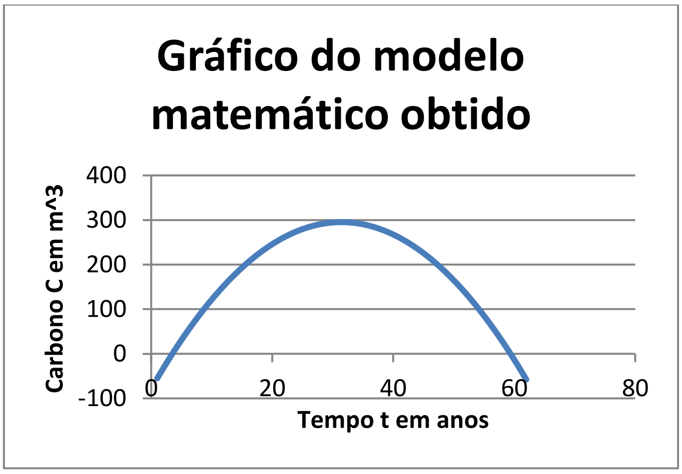
Quando efetuado o produto entre as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,37799 \\ 23,76942 \\ -78,4793 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,37799 \\ 23,76942 \\ -78,4793 \end{bmatrix}$$

Logo a solução fica, $a = -0,37799$, $b = 23,76942$ e $c = -78,4793$. E a função quadrática $C(t) = at^2 + bt + c$, com $t \in \Re^+$, em que $C(t)$ é a quantidade de carbono sequestrado por araucárias da atmosfera em função do tempo em anos, e a seguinte, $C(t) = -0,37799t^2 + 23,76942t - 78,4793$.

O gráfico desta função para $t \in \Re^+$.



Para avaliar se a função ajustada passa próximo aos pontos, pode-se usar o coeficiente de determinação, dado pela equação (4.1).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \hat{m}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \bar{m})^2} \quad (4.1).$$

Onde m_i são as massas dos dados experimentais para os i = 1,2,3,...n pontos

$\hat{m}_i$ são as massas calculadas pelas funções ajustadas

$\bar{m}$ é a média das massas dos dados experimentais.

III – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Conteúdo: Função exponencial.

Problema: Qual a função que melhor representa o ganho e a perda de massa de alfaces para fins comerciais em função dos dias?

Objetivos.

1. Conhecer a função logística.
2. Perceber a influência dos coeficientes nos gráficos das funções exponenciais e logística.
3. Verificar as tendências das curvas e o/os intervalo/os que podem favorecer a comercialização.
4. Assimilar gráficos às funções adequadas, usando tentativas, gráficos aproximados.
5. Determinar a função que melhor represente os dados coletados (ajuste exponencial).

Variação da massa da alface

“A alface (*Lactuca sativa,* Linné) é uma hortaliça muito usada para alimentação no Brasil, da Família: Compostas, grupo Lactuceas. Dentre os vários tipos, destaca-se a alface crespa, com folhas soltas, largas, crespas e cor verde-amarelada e a lisa. A alface é calmante, sonífero, refrigerante, emoliente e laxativa. Sua substância leitosa, é muito usada em cosméticos, para rejuvenescer a pele. De baixo teor calórico, esta hortaliça é ideal para os dias de verão e seu teor de fibras é ótimo para o funcionamento intestinal. Cem gramas de alface fornecem 15 calorias. Princípios ativos: Vitaminas A e C, fósforo e ferro”.(adaptado HERRMANN *et al*., 2016).

Nesse trabalho, na produção de alfaces para fins comerciais, levou-se em consideração que:

- 300 gramas seja o máximo da massa apropriada para que a cultivar seja apresentada nas bancas de mercados e

- que a alface permanece própria para comércio com perda de até 20% da massa máxima.

- “A colheita deve ser feita no momento em que a planta atinge o seu desenvolvimento máximo, quando apresenta cabeças firmes, bem formadas, folhas tenras e sem sinal de florescimento. Geralmente, isto ocorre 75 a 90 dias após o semeio”. (HERRMANN *et al.*, 2016).

A partir dessas considerações, pergunta-se:

1. Com quantos dias após o plantio a alface pode ser colhida?
2. Se colhida com peso máximo, até quantos dias a alface pode ser comercializada?

A procura do modelo matemático que representa o experimento

A Tabela 1 apresenta os dados do experimento realizado pelo próprio autor. Foram compradas mudas com idade e aproximadamente 20 dias após a semeadura (30 mudas de alface crespa), plantadas em horta (de casa) adubo orgânico (cama de aves aproximadamente 16 kg, adubo químico 2-20-20 aproximadamente 1 kg em 2,5 m^2). As mudas foram plantadas dia 19 de abril de 2016, a primeira medição foi realizada dia 31 de maio de 2016, ou seja, 42 dias depois do plantio das mudas.

Os dados referem-se à medida da massa de um pé de alface enquanto estes estavam crescendo, ou seja, era “cortada” uma nova planta a cada dia de realizar a medição. E para as medidas da redução da massa da alface após colheita, foram utilizadas três plantas, e registrada a média com arredondamento das medidas de suas massas.

Tabela 1: Dados do experimento.

Dia	Idade das plantas (dias)	Massa (gramas)
31/mai	62	78
14/jun	77	110
21/jun	84	240
25/jun	89	180
28/jun	92	129
05/jul	99	88

Fonte: o autor.

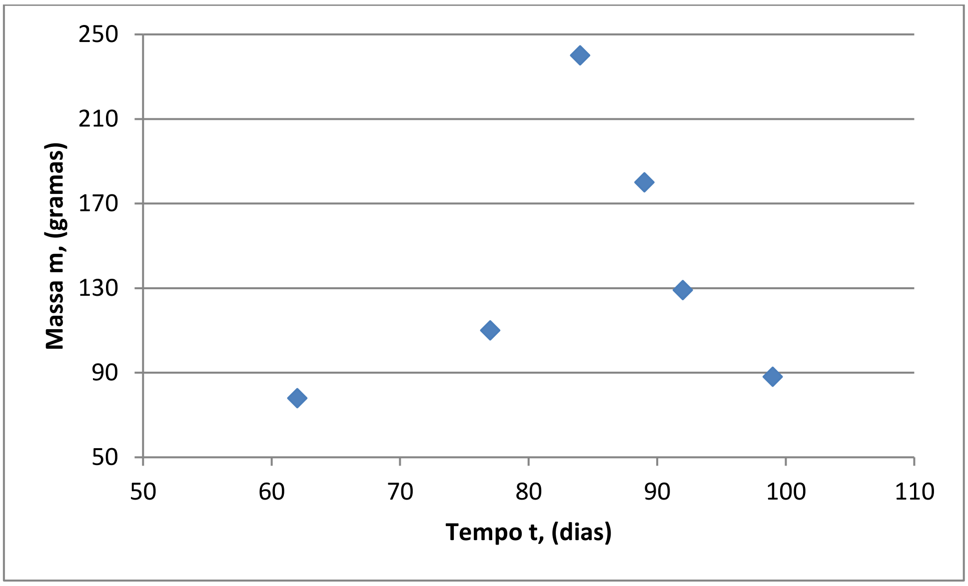


Figura 1: Variação da massa de um pé de alface.

Analisando a distribuição de pontos da Figura 1 pode-se considerar uma função por sentenças: A primeira parte descreve o crescimento até o número de dias favoráveis para a colheita e a outra o decrescimento a partir da colheita.

ATIVIDADE III.1 - Ajuste de curva do crescimento/decrescimento da massa de alface

1. Escolha uma função que descreva, da melhor maneira possível, a fase de crescimento da alface. Se julgar necessário, faça o teste com mais de um tipo de função. Nesse caso, compare os resultados.
2. Determine os parâmetros das funções escolhidas.

ATIVIDADE III.2 – Função Logística

Considere que a Eq. (1) é um modelo que relaciona massa e tempo, para a primeira fase da Fig. 1.

$$m(t) = \frac{m_o K}{m_o + (K - m_o)e^{-rt}} \qquad (1)$$

A massa inicial m_o é a massa das mudas quando plantadas. Consideremos $m_o = 5\ g$. O parâmetro K é o maior valor da massa da alface, quando o pé está na fase adulta, praticamente florescendo. Converse com seus colegas sobre um valor máximo para K . Por exemplo, $K = 300\ g$.

1. Com base nas considerações acima, calcule o valor de r para cada t da Tab. 1, da primeira fase.
2. Faça a média dos valores de r encontrados: k_m.
3. Faça um modelo do crescimento da alface usando a Eq. (1) com o k_m .
4. Compare esse ajuste com o ajuste da Atividade 1.

ATIVIDADE III.3 - Ajuste de curvas exponenciais

1. Escolha uma função que descreva, da melhor maneira possível, a fase de deterioração da alface. Se julgar necessário, faça o teste com mais de um tipo de função. Nesse caso, compare os resultados.
2. Determine os parâmetros das funções escolhidas.
3. Usando os resultados das atividades anteriores, determine em quanto tempo (*Tempo útil*) um pé de alface pode resistir, considerando que a perda em massa seja de 20% da massa existente no momento da chegada no mercado.

A primeira fase do modelo da alface pode ser descrita com o modelo de Verhulst ou a curva logística. Esse modelo foi estudado por Verhulst em 1834 para analisar o crescimento das populações da França e da Belgica e consiste em supor que a taxa de crescimento de uma população é proporcional a população presente a cada tempo, porém com a constante de proporcionalidade expressa por uma função linear.

$\frac{dm}{dt}$ é a taxa de variação da massa em função do tempo, que no caso foi chamada de γ que por vez é proporcional a massa *m*.

$\frac{dm}{dt} = \gamma m$, na logística a taxa de crescimento decresce linearmente $\gamma = r - am$ segue que $\frac{dm}{dt} = (r - am)m$

Como $a = \frac{r}{k}$ sendo *K* a capacidade suporte de crescimento (ponto de colheita) e r a taxa de crescimento natural, segue que:

$$\frac{dm}{dt} = (r - am)m = (r - \frac{r}{k}m)m = r(1 - \frac{m}{k})m .$$

Podendo ser escrito $\frac{dm}{(1-\frac{m}{k})m} = (\frac{1}{m} + \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{m}{k}})dm = rdt$ e calculando a integral em ambos os membros $\int (\frac{1}{m} + \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{m}{k}})dm = \int rdt$ obtém-se:

$\ln|m| - \ln\left|1 - \frac{m}{k}\right| = tr + c$ e aplicando exponencial $\frac{m}{1-\frac{m}{k}} = e^{tr} \cdot e^{c}$ com e^{c} constante.

Para $m(0) = m_0$ é possível obter e^{c} ficando $e^{c} = \frac{m_0}{1-\frac{m_0}{k}}$ e a função logística fica $m(t) = \frac{m_0 k}{m_0 + (k - m_0)e^{-rt}}$.

Para a capacidade suporte K = 300 gramas, a taxa de crescimento natural r e o coeficiente m_0 foram respectivamente calculados evidenciando-os na equação logística tendo $r_i = \frac{1}{t_i}\ln\left|\frac{m_i(300 - m_0)}{m_0(300 - m_i)}\right|$ e $m_0 = 0{,}5g$ utilizando o método do coeficiente médio $r_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n}$ para i = 1, 2, 3, ... n, onde n é o número de dados experimentais. A função m(t) para o modelo fica $m(t) = \frac{168{,}5961}{0{,}561987 + 299{,}438 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}}$

A analise da parte da figura que representa a perda de massa da alface após a colheita, nota-se a comparação com uma função exponencial decrescente em que a taxa de variação (redução) da massa é proporcional a massa inicial $\frac{dm}{dt} = \gamma m$, que pode ser escrita na forma $\frac{dm}{m} = \gamma dt$ e calculando a integral em ambos os membros obtém-se $\ln|m| = \gamma t + c$ equivale a $m = e^{\gamma t} \cdot e^{c}$ com e^{c} constante e o método de dois pontos m(84) e m(92) para obter γ, e obter a constante e^{c}, $m(t) = 162598{,}45 \cdot e^{-0{,}0776t}$.

Sendo assim a função (modelo matemático) procurada fica definida por sentenças

$$m(t)=\begin{cases} m(t)=\dfrac{168{,}5961}{0{,}561987+299{,}438\cdot e^{-0{,}1t}}, 0<t\leq 90 \\ m(t)=162598{,}45\cdot e^{-0{,}0776t}, 90<t \end{cases}$$

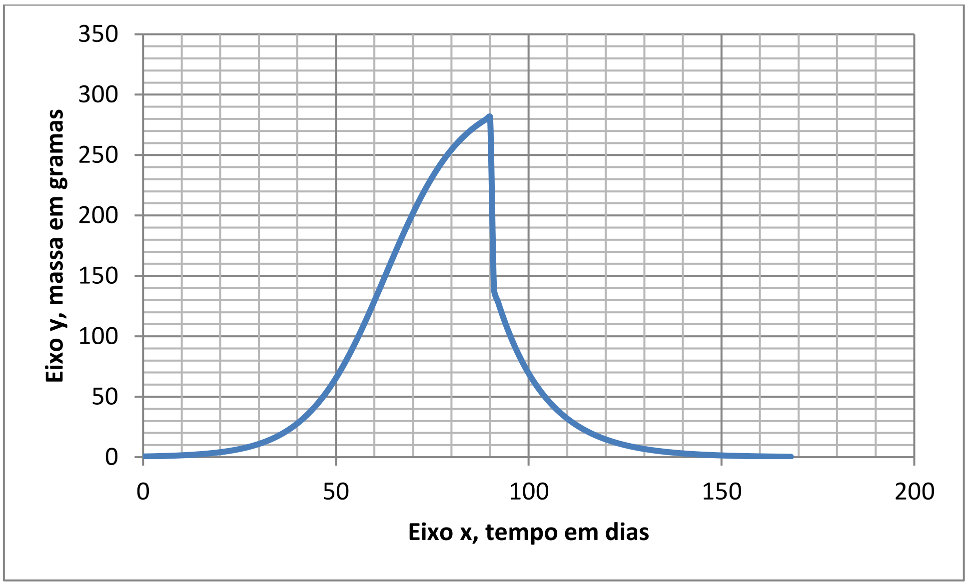


Figura 2: Grafico da função por sentenças obtida para representar ganho e perda de massa da alface em função do tempo.

Referências Bibliográficas

HERRMANN, José Carlos; KINETZ, Silvia Regina Rodrigues; ELSNER Tatiana Cristina Elsner. Alface. Disponivel em <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/alface/>. Acesso em: julho de 2016.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. Equações diferenciais aplicadas (3ª edição). Rio de Janeiro : IMPA, 2012.

ANEXO B – DIÁRIO DE BORDO

Relatório quadrática atividades

Encontro 3, com duas aulas.

p. conhecem função quadrática?

Alguns alunos responderam que não, não conheciam, e quando falei função do segundo grau. Dai eles responderam que sim conheciam e me questionaram se era parábola?

Respondi: lembram das funções que apresentei anteriormente pra vocês.

Al. Sim lembramos

p. então aquelas que apresentam gráfico em forma de reta nos tínhamos chamado de função linear.

Um aluno me interrompeu: Ma. E as funções do segundo grau o desenho é parábola.

P. ok, está certo, função do segundo grau ou função quadrática.

P. Vocês lembram o que são coeficientes de uma função?

Al. São os ”xis quadrado”. São os números das letras.

P. Coeficientes são os números que estão antes das letras, multiplicando cada uma delas.

Al. Ro. E o número sozinho? Al. Ma. Também é coeficiente.

P. Porque? Al. Ma. Ou não.

P. observe os expoentes o maior é x^2 depois tem x^1. Fui interrompido e o Al. Ma. Se tocou que o termo independente multiplicava x^0.

Em seguida usei o quadro e apresentei uma função quadrática clássica $f(x) = x^2-5x+6$ e com três pontos, as raízes (2,0), (3,0) e o ponto (0.6), esbocei o gráfico. Apaguei a função previamente escrita e questionei.

P. Seria possível determinar a função conhecendo esses pontos?

Al. Como assim professor? P. a função $f(x) = ax^2+bx+c$?

Al. Acho que não. Os sinais são todos +.

P. os sinais não são problema, o importante é saber se podemos determinar os coeficientes a, b e c, usando os pontos conhecidos no gráfico.

Al. Ro. Acho que sim professor por que os pontos apresentam o valor de y.

P. certo, e dai o que devemos fazer?

Al. Não sabemos. P. mesmo? Al. Ma. E Ro. Vai ser sistema? P. provavelmente.

P. Mas como? Al. Ma. Se o f(x) puder ser y acho que da de escrever como sistema. P. Certo.

Em seguida usei o quadro e organizei o sistema, comentei a respeito de soluções e que tínhamos três equações e três incógnitas. Os alunos mostraram-se contentes de saber trabalhar com sistemas. Eles já haviam trabalhado com resolução de sistemas. Trabalhei junto com eles na resolução.

Depois de resolvido eu acrescentei mais um ponto, as coordenadas do vértice.

P. E com mais este ponto será possível determinar a função?

Al. Ma. Jar. Acho que sim. P. Tentem organizar o sistema.

Os alunos perceberam que o sistema iria apresentar quatro equações, e ficaram assustados com aquele sistema, disseram que não sabiam resolver aquele tipo de sistema. Acabei intervindo e comentei que tal sistema não tem solução.

Al. A professor... ele tem mais equações do que letra.

P. Nesses casos quando apresentar mais que três pontos, devemos escolher apenas três.

Al. Dai vai ser possivel. P. Sim. Al. Ro. Mas qual três?

P.?

P. o que acham?

Al. As soluções vão ser diferentes. P. certo.

A partir de então mostrei no projetor um trecho do ajuste linear, e mostrei que existem meios de deixar um sistema possível determinado. Comentei que não iriamos usar este método por falta de tempo.

Encontro 4, duas aulas

O modelo

P. Como retirar gás carbônico da atmosfera?

Al. Ma. Reflorestamento.

P. Deixar uma árvore plantada até quando. Al. Pra sempre. P. e quando ela morrer? O que acham que vai acontecer com o carbono de seu material lenhoso no momento de sua decomposição?

Al. A decomposição vai devolver gás carbônico pra atmosfera.

P. Então a árvore, uma araucária por exemplo vai absorver carbono pra sempre?

Al. Não Al. Jar. Não eu acho que ate 12 ou 13 anos.

P. Como saber a idade certa? Al. Só cortar. 18, 20 ou 30 anos, dependendo do tamanho.

Quando comecei apresentar os dados da pesquisa de Tomaselli, todos os alunos ficaram atentos para saber que métodos eu usaria para determinar a idade de corte das araucárias, o que tinha acontecido naquela pesquisa e pra que iria servir a matemática. Esclareci que a matemática quando aplica a prática os números obtidos não são inteiros como nos livros didáticos, e para realizar os cálculos seria necessário o uso de equipamentos eletrônicos como calculadoras e computadores.

Depois desses diálogos apresentei a tabela contendo os dados da pesquisa.

P. Façam o desenho do gráfico desses pontos?

Al. Tipo gráfico x por y. P. sim, cuidado com o nome dos eixos.

Al . A professor um eixo vai o tempo e o outro vai a massa de carbono.

Depois de os alunos terem marcado os pontos no plano tempo por massa, eu fiz o seguinte questionário.

P. Esse gráfico se parece com gráfico de alguma função que já conhecemos?

Al. Nenhuma que conhecemos.

Forcei um pouco e fale vamos tentar lembrar do gráfico de algumas funções tipo função linear é uma reta, a exponencial é curva e a quadrática é curva também, conforme eu falava ao mesmo tempo fazia alguns esboços no quadro.

P. E então pessoal vai parecer com alguma dessas?

Al. Ro. Talvez uma reta professor!

Então aproveitei o momento e explique que se adotássemos a função ~~a função~~ linear em que o gráfico é uma reta, estaríamos afirmando que a absorção de carbono aconteceria infinitamente, o que na realidade não acontece já que as árvores morrem.

Aproveitei o momento e comentei: a araucária vai crescer e enquanto ~~isso~~ absorver gás carbônico da atmosfera para formar o seu material lenhoso, esse crescimento acontece mais depressa no começo, em certa idade cresce mais devagar até atingir o máximo de seu tamanho e material lenhoso, depois vai começar o processo reverso e essa araucária começa a devolver gás carbônico para a atmosfera.

P. qual função será?

Al. Já que vai crescer e decrescer, uma parábola professor. P. parece que sim, seria a curva mais aceitável.

Beleza, a função mais apropriada é a quadrática em que o desenho do gráfico é uma parábola, vamos melhorar um pouco em relação à concavidade da parábola.

P. seria côncava para baixo ou para cima?

Al. Virada pra baixo.

P. por que? Al. Sim vai subir o máximo e depois apodrecer.

Ótimo, e agora precisamos determinar os coeficientes a, b e c dessa função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Isso eu escrevi no quadro e fiz a pergunta.

P. como podemos determinar esses a, b e c?

Al. Ma. Com três pontos e sistema.

Fiquei surpreso com a resposta mesmo que nas aulas anteriores já aviamos feito algo parecido.

Ajudei a organizar um sistema de ordem 3 com qualquer dos três pontos no quadro, relembrei alguns métodos mais fáceis de se aplicar, naquele caso o escalonamento iria reduzir imediatamente o sistema para um de ordem 2, os alunos já tinham conhecimento de resolução de sistemas.

Fixei 2 pontos e deixei que eles escolhessem o terceiro.

P. Encontrem os coeficientes a,b e c da função quadrática?

Os alunos já tinham um pouco de conhecimento a respeito disso mas comentaram.

Fizeram os cálculos usando escalonamento, com calculadoras pedi para que fizessem arredondamentos com 2, 3 ou 4 decimais conforme achassem melhor, e comentei que com mais decimais melhor.

Percebi que trabalhavam com entusiasmo e vontade de descobrir tal função, comparavam resultados com colegas e discutiam o sinal dos coeficientes encontrados.

Al. Ma. Mas o a tem que ser negativo, o meu deu. E os outros professor?

P. os outros não sei, mas o a de fato sim deve ser negativo.

Al. Mas vamos ter funções diferentes. P. certo se escolheram pontos diferentes.

Aproveitei o momento para questionar a respeito de qual delas seria a melhor função. Alguns alunos responderam:

Al. não sei, a com mais decimais, a que tem o desenho mais parecido com aquele dos pontos.

Comentei que usaríamos um método para verificar qual seria a melhor dentre aquelas funções, falei que iriamos ver com números qual gráfico iria ficar mais próximo dos pontos do experimento.

Encontro 5 uma aula

Teste da função

Antes de iniciar a aula tive uma conversa com os alunos sobre a importância de saber se o ajuste é bom ou se podemos obter outra função melhor ou seja com desenho mais próximo dos pontos do experimento.

Metodo: Media dos $(M_i - m_i)^2$ onde os M_i são as ordenadas dos pontos do experimento e m_i são pontos obtidos com a função do ajuste.

P. Se escolher-mos pontos diferentes para o ajuste, vamos obter funções diferentes?

Al. Acho que sim. Ma. Sim. Roldi. Sim por que são pontos diferentes, números diferentes.

P. Podem existir alguns pontos que nos dão uma melhor função?

Que seja mais próxima dos pontos do experimento real?

Ma. Sim talvez alguns pontos vão dar um desenho mais perto do que outro.

P. vamos verificar então para as funções obtidas.

Escolhi duas funções diferentes dentre aquelas que os alunos aviam calculado e explique para que os alunos fizessem os cálculos afim de verificar qual delas era a mais apropriada para a situação.

Jar. Vai dar valores negativos professor!

P. será. O que acontece dentro disso $(\ )^2$?

Jar. A ... sim, sempre positivo, por que é dois o expoente.

P. Será que só quando 2 fica positivo?

Ma. Quando a potencia é par.

P. quando finalizar os cálculos o que vamos analisar para saber qual função ajustada é melhor?

Ma. Não entendi.

P. Vamos ter duas medias. Como devemos comparar isso para saber qual função é melhor?

Ma. Saber qual fica mais perto dos dados. P. sim

Jar. Aquela que tiver a menor

P. Menor? O que?

Jar. Menor resultado, mais perto.

P. sim é isso a menor media implica em melhor ajuste.

Fiz a conclusão com os alunos explicando que apesar da diferença ser pequena para o teste aplicado com a função A e a função B, ainda a função B neste caso seria a mais aceitável.

Diário de bordo- logística e exponencial atividade 3

Encontro 6 tres aulas.

Antes de iniciar a aula fiz algumas perguntas para saber o que os alunos já sabiam e o que era necessário reforçar, fazer uma melhor abordagem.

P. Conhecem função exponencial? E seu gráfico?

Al. Não. Um pouco. Ma. Tem expoente.

P. e função logística?

Al. Nuca vimos.

Neste momento os alunos já estavam esperando que fossemos fazer mais um ajuste, visto que na aula anterior eu havia comentado sobre o experimento com alfaces.

Eu já esperava essa resposta pois eu também nunca tinha ouvido sequer falar dessa função. Então resolvi lembra-los um pouco mais da função exponencial.

Escrevi no quadro algumas funções exponenciais e gráficos.

P. Por que este gráfico passa por (0,1)?

Al. Não sabemos.

P. Pensem só x=0?

Al. Sim todo número elevado a potência zero é 1.

Os alunos viram essas funções exponenciais e seus gráficos, percebi que já recordavam um pouco do assunto. Então comecei falar da função logística, mas não dei muita ênfase para este assunto, não estou falando que não seja importante, mas eu não tenho muito conhecimento sobrea função logística e também esta não faz parte dos conteúdos previstos para o ensino básico.

Esbocei no quadro como é o gráfico da função logística. Fiquei surpreso com uma pergunta.

Al. Ma. A função logística decresce também?

P. Nunca vi. Mas creio que quando o expoente de **e** mudar o sinal, ou seja, negativo/positivo, ela se comportará diferente.

Apresentei com projeção os dados do experimento sobre massa de alfaces em função do tempo, crescimento e decomposição.

Quando os alunos viram os pontos do experimento, falaram: Mais uma função quadrática.

P. vamos pensar um pouco mais, talvez se nos analisar a parta em que a alface cresce, e depois uma nova análise para os pontos que representam a decomposição das alfaces.

Al. Daí é logística e exponencial professor!

Provavelmente responderam isso por que já tinham visto essas duas funções.

P. Tudo bem vamos analisar. Mas qual função vai representar a aparte crescente?

Ma. Logística.

P. Por que?

Ma. O desenho é mais parecido.

P. e a outra parte?

Al. Exponencial.

P. que tipo de função exponencial.

Al. Como que tipo?

P. crescente, decrescente?

Jar. Parece decrescente.

P. ótimo parece bom, agora vamos calcular.

Neste momento falei que se tratava sim de uma função por sentenças função logística como se chamava cada uma das variáveis e sua funcionalidade e função exponencial decrescente. Agora vamos calcular os coeficientes.

Al. Com sistemas professor?

P. sim, mas quantos pontos são necessários?

Al. Difícil.

P. Um detalhe para a função logística da parte crescente a capacidade suporte K usaremos 300

Al. Porquê?

P. 300 gramas é um tamanho bem aceitável para as bancas dos supermercados, se passar deste tamanho a alface começa a ficar impropria para comercio.

P. observem que são duas variáveis para a gente encontrar, então, quantos pontos no mínimo vocês acham necessários para a gente encontrar essas variáveis com sistema?

Ma. Duas variáveis... então dois pontos professor?

P. sim

P. de sorte que os alunos lembravam de algumas operações com logaritmos, mas não tinham o costume de utilizar logaritmo natural e a base **e** para exponencial. Tive que explicar que as operações eram as mesmas a única diferença é que a base não seria dez mas sim o número **e** e que tudo isso está em suas calculadoras também. Estabeleci também a massa inicial para a logística e também para a exponencial, os cálculos ficaram mais rápidos em virtude do pouco tempo que eu ainda tinha para trabalhar com os alunos.

P. Escolham um ponto e efetuem os cálculos.

Al. Como professor>

P. comecem escrevendo assim o valor de y no lugar de f(t) e o valor de x no lugar de t.

Rol. Sim é assim ...

P. os alunos estavam conseguindo resolver, também estavam empolgados.

Al. E agora... P. Ficaram com dúvida sobre ln de uma potência. Falei pra lembrar de log base dez.

Ma. É aquele que passa fazendo vezes?

P.sim.

Em seguida os alunos partiram para resolução da parte decrescente a procura do ajuste exponencial, perguntei para que eles usassem pontos diferentes e efetuassem os cálculos em equipes. Todos conseguiram encontrar as funções procuradas.

Poderia continuar explorando esses assuntos como fazer os gráficos, verificar qual dos ajustes é melhor, discutir sobre funções por sentenças, trabalhar no laboratório de informática...