UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

CARLINHO AUGUSTINHO HORN

A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

CHAPECÓ
2018

CARLINHO AUGUSTINHO HORN

A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges.

CHAPECÓ
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, km 02
CEP: 89801-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

PROGRAD/DBIB - Divisão de Bibliotecas

Horn, Carlinho Augustinho
A aprendizagem de matemática em atividade de modelagem/ Carlinho Augustinho Horn. -- 2018.
130 f.:il.

Orientador: Pedro Augusto Pereira Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação em Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Chapecó, SC, 2018.

1. Modelagem matemática. 2. Aprendizagem matemática. 3. Sequências didáticas. I. Borges, Pedro Augusto Pereira, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

CARLINHO AUGUSTINHO HORN

A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges.

Aprovado em: 28 / 02 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Orientador - UFFS

Prof. Dr. Everaldo Silveira - UFSC

Prof. Dr. Nilce Fátima Scheffer – UFFS

Chapecó/SC, fevereiro de 2018

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida, pela saúde e pela oportunidade de viver um momento tão importante como este, podendo compartilhar com as pessoas que a gente ama.

À minha família, pela atenção, paciência, orações e incentivo, em especial nas horas de maiores dificuldades.

Aos professores, especialmente ao meu Orientador Professor Dr. Pedro Augusto Pereira Borges, pelas importantes contribuições no trabalho.

Aos meus colegas, pela força e companheirismo, em especial aos amigos Patric Machado de Meneses e Tancredo Heriberto Tonello.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

Este trabalho visa analisar o uso de modelagem matemática como estratégia de ensino de matemática nas escolas de Educação Básica. Diante de algumas expectativas, buscamos fazer um estudo a partir de uma perspectiva teórica e prática, a fim de responder a questão central para consecução desta pesquisa: Como ocorre a aprendizagem de conceitos matemáticos em atividades de modelagem, associadas a outras atividades de ensino? Propõe-se uma situação-problema que faz uso de modelagem matemática, definindo uma sequência didática que é associada a outras sequências didáticas que usam diferentes metodologias de ensino. O projeto foi desenvolvido no 8º ano do Ensino Fundamental, da Escola de Educação Básica Catharina Seger, município de Palma Sola, SC, turma de treze alunos. Seis estudantes formaram um grupo para resolver o problema de modelagem em período extraclasse. As demais sequências foram trabalhadas durante as aulas de matemática da turma em período paralelo ao desenvolvimento da atividade de modelagem. A investigação proposta aos alunos é a determinação da quantidade máxima de peixes a serem produzidos em um açude, tendo como foco matemático, o cálculo do volume de água desse açude. Outras duas sequências foram elaboradas e aplicadas na turma, tendo características de complementariedade do estudo da modelagem, objetivando a sistematização do conhecimento matemático. Observou-se que a modelagem é forte promotora do interesse e significação da matemática, porém, seu caráter de aplicação, restringe os conteúdos abordados àqueles utilizados na modelagem e não proporciona a discussão da verdade das proposições. Devido a essas limitações, o uso da modelagem associada a outras técnicas de ensino mostra-se como uma estratégia metodológica que combina contextualização, exigências curriculares escolares e aspectos dedutivos da matemática.

Palavras-chaves: Modelagem matemática. Aprendizagem matemática. Sequências didáticas.

ABSTRACT

This work aims to analyze the use of mathematical modeling as a strategy for mathematics teaching in Basic Education schools. Faced with some expectations, we seek to make a study from a theoretical and practical perspective, in order to answer the central question to achieve this research: How does the learning of mathematical concepts in modeling activities associated with other teaching activities occur? It proposes a problem situation that makes use of mathematical modeling, defining a didactic sequence that is associated with other didactic sequences that use different teaching methodologies. The project was developed in the 8th year of elementary education, at the Catharina Seger School of Basic Education, municipality of Palma Sola, SC, a class of thirteen students. Six students formed a group to solve the modeling problem in an extraclass period. The remaining sequences were worked during class math classes in parallel to the development of the modeling activity. The research proposed for the students is the determination of the maximum quantity of fish to be produced in a pond, having as mathematical focus, the calculation of the volume of water of this dam. Two other sequences were elaborated and applied in the class, having complementarity characteristics of the modeling study, aiming at the systematization of mathematical knowledge. It was observed that modeling is a strong promoter of the interest and significance of mathematics, but its applicability restricts the content addressed to those used in modeling and does not provide a discussion of the truth of propositions. Due to these limitations, the use of modeling associated with other teaching techniques is shown as a methodological strategy that combines contextualization, school curricular requirements and deductive aspects of mathematics.

Keywords: Mathematical modeling. Mathematical learning. Didactic sequences.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

l: litro

kl: quilolitro

m: metro

cm: centímetro

cm^2: centímetro quadrado

cm^3: centímetro cúbico

dm^3: decímetro cúbico

E1: Encontro 1 – primeiro encontro na atividade de modelagem

T1: Primeira atividade de aplicação na turma

PP: Professor/pesquisador

LISTA DE SIGLAS

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

PPP – Projeto Político Pedagógico

PENOA – Programa Estadual de Novas Oportunidades de Aprendizagem

AEE – Atendimento Educacional Especializado

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A escola brasileira atual – como espaço de formação cultural, intelectual e técnica –, especialmente a Educação Básica, passa por uma crise de credibilidade. Crise esta, que a grande mídia tem parcela significativa de responsabilidade e papel fundamental na formação. Isso porque, por um lado, compreende a escola apenas como preparação de mão de obra qualificada para o mercado de trabalho, por outro, estabelece critérios quantitativos de avaliação bem distantes da nossa realidade educacional, as mais das vezes, tomando como parâmetro índices internacionais, de países que se encontram em outro estágio de desenvolvimento social, econômico e cultural. Entre outras variáveis desse diagnóstico, é notória a necessidade de novas iniciativas de ensino com o intuito de melhorar o desempenho da escola e seu respaldo social.

Diante desse panorama, sentindo na pele os desafios enfrentados na Educação como professores de Educação Básica, ensejamos melhorar nossa prática e vislumbrar dias melhores no campo educacional e consequentemente uma sociedade mais igualitária, que vise o progresso como evolução social e não como poderio capitalista.

Refletir sobre a própria prática é dever de todo Educador. Dessa reflexão, acredita-se que sempre surgem ideias de mudanças, que geram bons resultados na formação cidadã, dividindo o compromisso com seus pares. Nesse sentido, nosso empenho pelo melhoramento da prática educacional, individual e coletiva, na Escola de Educação Básica Catharina Seger, no município de Palma Sola, SC, tem se destacado na busca por formação continuada e acadêmica, seminários, grupos de estudo (um exemplo é PNEM[1]), participação ativa no Conselho de Classe e busca de parcerias com os segmentos da comunidade escolar e com a sociedade em geral. Incessante, o novo desafio que ora apresentamos, trata-se de uma pesquisa sobre a própria prática, no ensino de matemática, para alunos do Ensino Fundamental fazendo uso de diferentes metodologias.

Vivemos em uma sociedade em que observamos um grande progresso científico e tecnológico, estudado e desenvolvido por poucos, enquanto a grande massa da população é composta de utentes, submissos, deficientes de conhecimento científico, vulneráveis a exploração e com reduzida capacidade de desenvolvimento intelectual. E, diante desta realidade, recaem alguns questionamentos à atuação da escola, e aqui em especial, ao

[1] Pacto Nacional de Fortalecimento do Ensino Médio. O estudo de um grupo de professores da escola, culminou em três textos inclusos no livro: Professores de Ensino Médio em Formação: saberes e experiências, 2015, Sec. Regional Dionísio Cerqueira, SC, pp. 25-45.

ensino da matemática. A matemática escolar vem contribuindo para que tipo de formação? Aquela que torna o aluno passivo, obediente às regras, alienado, repetidor de exemplos? Ou, aquela que instiga o aluno à busca do saber, contribuindo para o seu entendimento da realidade física e social, que ensina este a interagir com a *sociedade aprendente*[2] em que vive?

Não basta exigir que os indivíduos frequentem a escola e de forma metódica transmitir informações a eles, precisamos de uma escola mais atraente que permita que o educando desenvolva a capacidade de pensar, estabeleça relações e torne-se um agente ativo no processo sócio-histórico, visando seu futuro e o futuro da sociedade em que vive.

Conforme Libâneo (1998, p. 12), "[...] a escola precisa articular sua capacidade de receber e interpretar informação como a de produzi-la, a partir do aluno como sujeito do seu próprio conhecimento".

Diante disso, Libâneo (1998), afirma que na relação professor/aluno:

> [...] o professor medeia a relação ativa do aluno com a matéria, inclusive com os conteúdos próprios de sua disciplina, mas considerando os conhecimentos, a experiência e os significados que os alunos trazem à sala de aula, seu potencial cognitivo, suas capacidades e interesses, seus procedimentos de pensar, seu modo de trabalhar. Ao mesmo tempo, o professor ajuda no questionamento dessas experiências e significados, provê condições e meios cognitivos para sua modificação por parte dos alunos e orienta-os, intencionalmente, para objetivos educativos (LIBÂNEO, 1998, p. 13).

Infelizmente, em pleno século XXI, apesar de tantas novas orientações e mecanismos, ainda vemos professores usando o modelo tradicional do ensino, da mera transmissão do conhecimento, atrelados a um livro didático, muitas vezes, com textos e atividades totalmente descontextualizadas. Referindo-se ao ensino de matemática, mais especificamente, sabemos que ainda se aplica muito o método do "siga o modelo", que transforma a aula numa rotina, conceito-exercício-prova. Nesse modelo, a aula está literalmente prevista e deve ocorrer de tal forma: não se inova, não se discute, só se cumpre. Além de não trazer significado para o aluno, acaba gerando repúdio em relação a disciplina, pois não lhe promove expectativas.

---

[2]"A sociedade atual passa por revoluções diversas, incluindo-se os meios de informação, midiáticos e tecnológicos. Todos os dias somos invadidos com novas informações e novas maneiras de absorver e aprender, influenciando diretamente em todos as esferas da vida, desde o pensar, o agir, o ensinar e o aprender. Num momento em que a capacidade de aprender é cada vez mais importante nas interações que estabelecemos e que o conhecimento se torna um recurso social determinante, a escola torna-se ainda mais relevante ao propiciar oportunidades para que os alunos descubram a capacidade que o conhecimento tem de transformar a realidade e resolver problemas e criar outras alternativas possíveis. Essa é a sociedade aprendente". Por *Luciana Barros de Almeida*. Disponível em: <http://direcionalescolas.com.br/2016/08/15/psicopedagogia-por-uma-sociedade-aprendente/>Acesso em: 19 jan. 2018.

Para Freire (1996), trata-se de uma educação “bancária” onde as relações professor-aluno são fundamentalmente narradoras, dissertadoras. Segundo ele, tem-se desta forma:

> Narração de conteúdos que, por isto mesmo, tendem a petrificar-se ou a fazer-se algo quase morto, sejam valores ou dimensões concretas da realidade. Narração ou dissertação que implica um sujeito o narrador – e objetos pacientes, ouvintes – os educandos. [...] Falar da realidade como algo parado, estático, compartimentado e bem-comportado, quando não falar ou dissertar sobre algo completamente alheio à experiência existencial dos educandos vem sendo, realmente, a suprema inquietação desta educação. A sua irrefreada ânsia. Nela, o educador aparece como seu indiscutível agente, como o seu real sujeito, cuja tarefa indeclinável é “encher” os educandos dos conteúdos de sua narração. Conteúdos que são retalhos da realidade [e] desconectados da totalidade em que se engendram e em cuja visão ganhariam significação. A palavra, nestas dissertações, se esvazia da dimensão concreta que devia ter ou se transforma em palavra oca, em verbosidade alienada e alienante. Daí que seja mais som que significação e, assim, melhor seria não dizê-la. (FREIRE, 1996, p. 57)

Sabemos que o aprendizado da matemática (foco deste trabalho) está associado ao domínio de conceitos e linguagens, portanto, não se trata de abolir as aulas expositivas, nem mesmo abandonar o hábito de exercitar, na resolução de atividade, mas sim de envolver o educando, de modo a valorizar o conhecimento por ele já adquirido (seja do senso comum ou científico), dar significado e fazer com que esse sinta-se parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, interagindo com os colegas, professor e conteúdo, estabelecendo conexões que despertem a criatividade e interesse.

Para Nogaro e Scheffer (2007):

> O professor pode auxiliar e muito o aluno na sua aprendizagem, pode contribuir para que ele desenvolva suas diferentes potencialidades e habilidades, aprender a construir e reconstruir a cultura, aprender a pensar, aprender a refletir. (NOGARO I.; SCHEFFER; NOGARO A., 2007, p. 7).

Visando cativar os educandos ao aprender científico e social, tornando-os indivíduos capazes de criarem suas próprias conexões para o crescimento intelectual, de modo a não serem marginalizados pela sociedade, Saviani (2008) aponta para a escola, uma pedagogia revolucionária:

> Uma pedagogia revolucionária centra-se, pois, na igualdade essencial entre os homens. Entende, porém, a igualdade em termos reais e não apenas formais. Busca converter-se, articulando-se com as forças emergentes da sociedade, em instrumento a serviço da instauração de uma sociedade igualitária. Para isso, a pedagogia revolucionária, longe de secundarizar os conhecimentos descuidando de sua transmissão, considera a difusão de conteúdos, vivos e atualizados, uma das tarefas primordiais do processo educativo em geral e da escola em particular. (SAVIANI, 2008, p. 53).

A disciplina de matemática, por sua vez, é vista por muitos como um obstáculo, como o grande motivo da repetência e da evasão escolar, conforme Rosa (2010, p. 48): "Todos os alunos integrantes da pesquisa, estudantes de ambos os sexos, relataram que as dificuldades encontradas na disciplina de matemática foram responsáveis pela sua desistência escolar, [...]". Também na mesma linha, encontra-se na Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (2002) que:

> [...] a Matemática é apontada por professores e alunos como a disciplina mais difícil de ser aprendida. Atribui-se a ela uma grande parte da responsabilidade pelo fracasso escolar de jovens e adultos. O baixo desempenho em Matemática no Ensino Fundamental traduz-se em elevadas taxas de retenção, tornando-se um dos filtros sociais que selecionam os que terão ou não oportunidade de avançar na educação básica. Os que abandonam a escola o fazem por diversos fatores de ordem social e econômica, mas também por se sentirem excluídos da dinâmica de ensino e aprendizagem. Nesse processo de exclusão, o insucesso na aprendizagem matemática tem tido papel destacado e determina a frequente atitude de distanciamento, temor e rejeição em relação a essa disciplina, que parece aos alunos inacessível e sem sentido. (BRASIL, 2002, p. 13)

Diante destas exposições somos chamados a refletir em torno da nossa prática, de forma a propor metodologias matemáticas que buscam reverter esta realidade, que façam com que professor e aluno sejam corresponsáveis no processo de ensino e aprendizagem e, consequentemente, agentes ativos no processo de desenvolvimento intelectual dos indivíduos e da sociedade.

Na perspectiva de mudança do panorama negativo que nos deparamos, propomos nesta pesquisa, analisar o aprendizado a partir de uma atividade com modelagem matemática, associada a outras atividades, considerando que através destas, estamos promovendo maior dinamismo e estimulando o interesse dos educandos a fim de proporcionar a busca e a apropriação do saber matemático através de construções, reconstruções e validação de modelos.

Nesta proposta metodológica o professor assume o papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, consciente que para tanto, conforme menciona a Proposta Curricular (2002, v.3, p. 16), "[...] o professor deve conceber a matemática como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos, e não como um saber que trata de verdades infalíveis e imutáveis."

Usar a arquitetura da própria escola, de uma obra em construção, uma lavoura, um açude, um silo, um depósito de água, etc. efetuando medições e estimativas, explorando as conexões da matemática e dos significados sócio-econômicos aí presentes, parece-nos uma estratégia interessante, que pode trazer grande aprendizado, tanto de fora para dentro, como de dentro para fora da sala de aula, com contribuições significativas no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Borges e Nehring (2008), atividades de modelagem cumprem satisfatoriamente a função de contextualização e significação do conhecimento, porém necessitam de atividades complementares, com uso de diferentes estratégias, para o aprendizado dos conceitos, propriedades e desenvolvimento de habilidades com a linguagem matemática. Isso nos leva a uma reflexão que direciona o problema de investigação deste trabalho: Como ocorre a aprendizagem de conceitos matemáticos em atividades de modelagem, associadas a outras atividades de ensino?

Mais especificamente, queremos através desta pesquisa:

- Discutir o uso da Modelagem no ensino da Matemática como alternativa metodológica;
- Analisar as ações e procedimentos dos alunos durante o processo de aprendizagem de conceitos, propriedades e linguagens da matemática em atividade de modelagem;
- Identificar relações de complementaridade entre a modelagem e outros métodos de ensino.

Este trabalho está composto por seis capítulos. Inicialmente, no Capítulo 1, discutimos algumas concepções da Modelagem Matemática e a inserção dessa como estratégia para o ensino da matemática nas escolas. No Capítulo 2, faz-se referência a concepção sócio-interacionista de Vygotsky como base para a aprendizagem interativa no desenvolvimento das atividades de modelagem, bem como das atividades paralelas. No Capítulo 3, apresentamos a metodologia de pesquisa, com a caracterização do ambiente escolar e dos sujeitos envolvidos, assim como do tipo de pesquisa, técnica de coleta e análise dos dados. Ainda nessa secção, apresentamos uma visão geral das sequências didáticas propostas, compostas por atividades de modelagem e outras atividades de aprendizagem de matemática. As aplicações das sequências didáticas são descritas e analisadas no Capítulo 4, na forma de relatos das discussões, decisões e ações, bem como a análise, com base em um quadro de categorias, das manifestações registradas acerca da aprendizagem com a modelagem e as demais atividades. Por fim, nas considerações finais, é apresentado um resumo das conclusões relativas ao problema proposto.

2 MODELAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A aprendizagem de matemática depende muito do interesse individual e da importância que cada indivíduo dá a ela. Na escola, o interesse e importância podem partir do próprio professor, para assim influenciar o aluno. Conforme Bassanezi (2002, p. 16): “os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer”.

Ainda que as concepções divirjam em alguns aspectos, na Modelagem Matemática, o ponto de partida é, normalmente, um tema externo à Matemática, de modo geral associado à realidade, que após recortado e problematizado, passa a ser investigado, estudado.

Burak entende modelagem matemática como um “conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões” (BURAK, 1992, p. 62).

Barbosa, se referindo a Modelagem Matemática, assume que a “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. (BARBOSA, 2001, p. 6). Para ele, a indagação e a investigação são inseparáveis, de modo que “a indagação conduz à investigação, sendo essa a busca, seleção, organização e manipulação de informações”. Defende que, “a modelagem se orienta prioritariamente por situações da realidade e não por situações fictícias (semi-realidades)”. (BARBOSA *apud* KLÜBER; BURAK, 2008, p. 29-30).

Para Barbosa a modelagem pode ser classificada em três níveis/casos, de acordo com a forma que é conduzida, sendo que no nível 1, o professor apresenta o problema e os dados que possibilitam sua solução e os alunos, juntamente com o professor resolvem o problema, não necessitando sair da sala de aula para isso; no nível 2 o professor apresenta o problema e os próprios alunos coletam os dados quantitativos e qualitativos e solucionam o problema (com participação do professor mediando o processo). Já no nível 3, a partir de um tema gerador, o problema é discutido e elaborado juntamente professor e alunos e juntos coletam os dados e solucionam o problema. Para o autor, “a medida que se vai percorrendo do nível 1 para o nível 3, aumenta-se ao grau de abertura e espera-se que os alunos assumam paulatinamente a condução das atividades”. (BARBOSA, 2001, p. 6).

Em relação aos níveis apresentados por Barbosa não associa-se o grau de dificuldade da atividade de modelagem, pois tanto um problema simples, quanto um de alto grau de dificuldade podem ser enquadrados em qualquer um dos três níveis.

Conforme Bassanezi (2002):

> A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão. (BASSANEZI, 2002, p. 17).

Nesta perspectiva, considera-se a modelagem matemática como uma alternativa metodológica que facilita a compreensão e a aplicação da matemática, auxiliando no processo de ensino e aprendizagem, além de ser um método científico que prepara a vida cidadã.

Para Bassanezi (2002, p. 20), "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" trata-se de Modelo Matemático. Para ele, "a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa [...] além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas". (idem, p. 20).

Destaca ainda Bassanezi (2002) que:

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. [...] Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo da sociedade em que vive. (BASSANEZI, 2002, p. 38).

Conforme Almeida e Silva (2015, p. 209) "[...] Atividades de modelagem têm como aporte maior a realização de investigações em sala de aula, as quais têm o problema como ponto de partida, [...]. Para as autoras, "a Modelagem Matemática viabiliza uma leitura, ou até mesmo uma interpretação de fenômenos da realidade, muitas vezes identificados fora do ambiente escolar, com o apoio da matemática". (ALMEIDA; SILVA, 2015, p. 210). Para as autoras a modelagem matemática possibilita buscar "uma resposta para um problema cuja origem não está, de modo geral, na própria matemática. A essa resposta está associado um modelo matemático". (idem, p. 211). Neste navegar pela matemática para resolver situações-problemas de diferentes origens, as autoras caracterizam a matematização, considerando esta como sendo uma das ações essenciais na Modelagem Matemática para a solução da situação-problema inicialmente levantada. (ibidem, p. 216).

Os autores referenciados acima (além de Ubiratan D'Ambrósio, Marcelo Borba, João Frederico da Costa A. Meyer e Jussara de Loiola Araújo e todo o GT 10 da SBEM) influenciaram, influenciam e tem incentivado gerações de professores a usar a modelagem na escola. No entanto, a prática da aprendizagem de Matemática com modelagem ainda é um tema pouco explorado nas pesquisas. Destoando dessa tendência, em Biembengut e Hein (2002) encontra-se uma atitude assumida e clara de ensinar matemática. Para eles, a modelagem é "[...] um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele desconhece [...]" (BIEMBENGUT; HEIN, p. 18) e recomendam que a escolha dos temas "[...] deve estar em sintonia com o conhecimento e a expectativa dos alunos, e preparar, previamente, a condução do processo de tal forma que desenvolva, no mínimo, o conteúdo programático." (idem p. 19). É evidente a proposição de atividades paralelas à modelagem, com o intuito de ensinar tópicos ainda desconhecidos aos alunos, mas úteis para modelar, além da proposição de exemplos e exercícios, onde dar-se-á o efetivo aprendizado dos conceitos matemáticos, voltando-se devidamente instrumentados com os conhecimentos aprendidos, à modelagem. (ibidem, p. 21).

Para Borges e Nehring (2008), a Modelagem Matemática ajuda muito a dar significados aos conteúdos escolares, engajando a Matemática à formação cidadã, pois oportuniza trabalhar os conteúdos matemáticos em situações reais, qualificando as ações dos indivíduos na realidade. Porém, para eles, como único recurso didático, a modelagem parece apresentar dificuldades para ensinar determinados conteúdos, necessitando de atividades complementares paralelas, pois, concordando com Borges (2003):

> A prática da modelagem no ensino (Borges, 2003) mostra claramente que uma sequência de modelos leva à repetição de alguns conteúdos e à negligência de outros. [...] os conteúdos associados a proporções repetem-se demasiadamente, enquanto que os de álgebra e operações com números irracionais praticamente não aparecem nos modelos [...]. (BORGES; NEHRING, 2008, p. 133).

Estas situações mencionadas por Borges e Nehring (2008), quanto aos conteúdos não trabalhados com a modelagem, soam como dificuldades no uso dessa prática e ressaltam preocupações muito presentes nas escolas formais (organizadas em séries ou ciclos de ensino). Os autores apresentam isso como um problema para estas escolas, pois estas possuem um currículo predefinido.

> A *totalidade do conhecimento matemático* em relação aos conteúdos mínimos de cada série é definida pelas orientações dos professores e dos órgãos de gerenciamento da educação (escolas, secretarias e coordenadorias) para cada nível de escolaridade. Do ponto de vista da socialização do conhecimento, a totalidade é um dos objetivos da educação formal, pois a formação do aluno ficaria prejudicada se uma das operações com números racionais, a divisão, por exemplo, não lhe fosse ensinada, mesmo que essa operação não seja comum em aplicações. (BORGES; NEHRING, 2008, p.137-138).

Para suprimir as dificuldades apresentadas em relação ao ensino com modelagem, levando em conta a totalidade e a socialização do conhecimento matemático, e, considerando os muitos aspectos positivos da modelagem, já discutidos neste trabalho, Borges e Nehring (2008), sugerem que a modelagem precisa vir associada a outras atividades de ensino para que possa efetivar uma *aprendizagem significativa*[3], caracterizando assim uma espécie de *Engenharia Didática,* composta por diferentes *Situações Didáticas*, pensadas e elaboradas com objetivos específicos do que se quer ensinar.

2.1 A ENGENHARIA DIDÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Engenharia Didática refere-se a uma metodologia de pesquisa e teoria educacional, que segundo Pommer (2013) foi fundamentada a partir das discussões oriundas do IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática), na França, ao final da década de 1960, decorrente de uma vertente conhecida como Didática da Matemática. A Engenharia Didática teve como protagonista Guy Brousseau, que após análise e validações de ações desenvolvidas pelas pesquisas em Didática da Matemática, na década de 1980, propôs um estudo das condições nas quais são constituídos os conhecimentos, frisando que o controle de tais condições permitiriam a reprodução e otimização dos processos de aquisição do conhecimento escolar. Sua proposição culminou no desenvolvimento da teoria das Situações Didáticas, que foi consentida pelos pesquisadores da época e proposta para o ensino de matemática.

Segundo Pommer (2013):

> Brousseau (1996a) considerava que as situações didáticas deveriam se situar na proposta construtivista e contemplar os processos adaptativos e de equilibração delineados na obra de Piaget. Porém, Brousseau (1996a) considera que Piaget não observou a particularidade da aprendizagem de cada conhecimento matemático ao considerar a estrutura formal e a função da lógica como fundamentais, ideias defendidas por alguns matemáticos formalistas da Matemática Moderna.

[3] “O conceito de aprendizagem significativa de Ausubel (1976), portanto, está fortemente vinculado à atribuição de um sentido lógico dos conceitos matemáticos aos significados internos ou externos à Matemática. Ou seja, a aprendizagem só é significativa quando o aluno atribui um sentido lógico, coerente dentro de um contexto para um símbolo, conceito ou variável”. (BORGES; NEHRING, 2008, p. 137).

> Para superar tais impedimentos, Brousseau (1996a) propôs uma retomada do contexto de origem dos saberes e a importância do valor funcional das etapas que o saber percorre para ser elaborado, o que equivale a resgatar a gênese epistemológico-cultural do saber. (POMMER, 2013, p. 11)

Brouseau (1996a), segundo Gálvez (1996) *aput* Pommer (2013, p. 11) "[...] coloca que é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definidos culturalmente nos programas escolares".

Brousseau (1996a,b), segundo Pommer (2013, p. 11) define que "as situações didáticas são uma gênese artificial análoga àquela que originou o conhecimento, de modo que a aprendizagem dos sujeitos agentes (os alunos) ocorre por adaptação, assimilação e equilibração, [...]", e, para tanto, há de se elaborar sequências didáticas que estipulam etapas que encaminham o processo de selecionar, antecipar, executar e controlar as estratégias que se aplicam à resolução do problema.

Consideramos uma sequência didática como sendo o conjunto de atividades (situações didáticas) que são concebidas e organizadas em etapas de forma que cada etapa está interligada à outra com objetivos específicos de ensinar determinado conteúdo, tendo papel fundamental no contexto da Engenharia Didática.

Para Brousseau (1996a), segundo Pommer (2013, p. 13): "O modelo de pesquisa da Engenharia Didática requer do pesquisador/professor a participação e análise das situações didáticas. Um elemento essencial da situação didática é sua intencionalidade de ser construída para a aprendizagem do aluno".

Artigue (1996) refere-se a Engenharia Didática concebendo o trabalho do pesquisador similar ao de um engenheiro subdividindo os componentes em sala de aula, com o uso das sequências didáticas.

Na prática da Engenharia Didática, entendemos que o papel fundamental do professor é o de instigar o aluno ao aprendizado, criando/analisando situações didáticas (com intencionalidade do que se pretende ensinar), de forma a contextualizar e descontextualizar o saber (promovendo generalizações), seguidas de novas situações de desiquilíbrio, a fim de provocar para que o aluno avance em seus conhecimentos. Diferentemente do que normalmente ocorre, onde é comum "[...] a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder". (BROUSSEAU *apud* POMMER, 2013, p. 14).

Para BORGES e NEHRING (2008), com a Engenharia Didática, parte-se do empírico conduzindo-se ao científico, considerando "o aluno com sua capacidade cognitiva, os interesses pessoais, a criatividade e um conjunto de influências sociais e políticas manifestadas nos conteúdos e procedimentos escolares que conectam escola e sociedade". (BORGES; NEHRING, 2008, p. 134).

2.2 MODELAGEM, ENGENHARIA DIDÁTICA E ENSINO DE MATEMÁTICA

Associando atividades de modelagem com outras atividades de ensino, em forma de sequências didáticas, com aplicações de várias situações didáticas, entendemos estar constituindo o que chamamos de Engenharia Didática. Com isso, parece-nos possível suprir as preocupações/necessidades de comtemplar a aprendizagem significativa e a totalidade do conhecimento matemático, como propõem Borges e Nehring (2008), cabendo ao professor, o grande desafio de criar as sequências didáticas que ao serem trabalhadas, associadas à modelagem (também considerada uma sequência didática) se complementam.

Esta ideia vai ao encontro ao que diz Barbosa (2001), falando de currículo na educação matemática: "[...] Julgamos que a educação matemática deve envolver todas as instâncias implicadas no conhecimento matemático. Modelagem é uma delas. É necessária, mas não suficiente". (BARBOSA, 2001, p. 5).

Conforme Boges (2017), em atividade de modelagem a fragmentação do conteúdo se torna evidente e natural, pois não há sistematização do conhecimento, mas aplica-se partes dos conceitos matemáticos, somente o que interessa para a solução do problema. "Limitar o aprendizado a essas partes é uma posição excessivamente pragmática, de só aprender o que é útil imediatamente, além de negar o acesso ao conhecimento estruturado, o qual tem potencialmente aplicações em outras situações". (BORGES, 2017, p. 9).

Diz Borges e Nehring (2008):

> [...] se a modelagem for complementada com sequências didáticas adequadamente planejadas, pode se constituir em um processo de ensino eficiente (no sentido de ensinar matemática) e abrangente (no sentido de trabalhar aspectos da realidade na escola, contribuindo efetivamente para a formação do cidadão). (BORGES; NEHRING, 2008, p. 145).

Diante de toda essa discussão em torno das metodologias de ensino da matemática, nosso pensar volta-se para a grande responsabilidade dos educadores, para com a formação de indivíduos, aptos para interagir socialmente, de modo a participar da transformação da realidade em que vivem. Devemos ser realistas de que nem tudo está perdido e nem a modelagem trata-se de uma proposta pedagógica "salvadora", como também menciona Barcelos (2017, p. 22), mas que é possível e necessário avaliar as metodologias de ensino da matemática que estão sendo aplicadas, visando uma aprendizagem concreta e significativa, tanto para o ambiente científico, quanto para o social.

Em se tratando de obstáculos ao uso da modelagem no ensino da matemática, também concordamos com Barcelos (2017), de que estes podem estar ligados ao despreparo dos professores e dos próprios alunos, que estão acostumados no modelo tradicional de ensino, com resultados previsíveis, sem a necessidade de muita criatividade (tanto do professor, quanto do aluno). Conforme Franchi (1993, *apud* Barcelos, 2017, p. 23) "o uso da modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos às aulas". Com um ritmo possivelmente mais lento e situações imprevisível, além da dificuldade de envolvimento de todos os alunos, outro obstáculo pode estar ligado às preocupações dos professores com o cumprimento do currículo, associado ao tempo escolar da escola formal.

Silveira e Caldeira (2012, p. 1038), discutem vários obstáculos que professores apresentam justificando a não adoção da Modelagem no ensino de matemática. Citam Bassanezi (2002) caracterizando estes como "institucionais, para os estudantes e para os professores".

Podem ser entendidos como obstáculos institucionais quando referem-se ao não apoio/incentivo da instituição, características da infraestrutura, metas avaliativas externas à escola, organização e cumprimento do currículo preestabelecido, entre outros. Para os estudantes os obstáculos estão associados a saída do posto cômodo de ouvintes, para uma postura atuante, protagonista, além do envolvimento extraclasse, muitas vezes necessário na modelagem. Já, "a preocupação em cumprir o conteúdo tem se apresentado como uma grande dificuldade encontrada pelos professores ao aplicarem a Modelagem nas suas práticas". (SILVEIRA; CALDEIRA, 2012, p. 1038). Ainda, segundo os autores, os professores acham difícil o uso da Modelagem, pois esta gasta muito tempo, muda a sequência lógica dos conteúdos, além de apresentar um ar de desconfiança quanto a efetividade da construção do conhecimento. Destacam Barbosa (1999) também constando que:

> os professores valorizam muito o cumprimento do programa, em virtude de seguirem um determinado cronograma adotado pelos livros didáticos, inclusive por estarem submetidos a alguma pressão por parte dos administradores das escolas, tais como supervisores e diretores ou pais. No caso das escolas particulares, a preocupação com o sucesso dos alunos no vestibular, que é ainda maior do que nas escolas públicas, aumenta a pressão. (SILVEIRA; CALDEIRA, 2012, p. 1038-1039).

Entretanto, entendemos que, de fato, são muitas as situações que se apresentam como dificuldades quanto ao uso da Modelagem, mas a falta de conhecimento do processo de Modelagem por parte dos professores aumenta o medo em relação ao uso dessa prática. O receio de não saber direito o que fazer, acaba fazendo com que o professor deixe de praticar, e consequentemente não se desfia a mudar, mesmo sabendo que sua prática não está apresentando bons resultados. Precisamos nos desafiar, pois concordamos com Brousseau[4] (2009), quando em entrevista à revista *nova escola* diz: "Nenhum professor pode garantir que todos os seus alunos vão aprender e compreender Matemática. O que ele pode e deve garantir são as condições didáticas necessárias para que os estudantes aprendam". (BROUSSEAU, 2009, p. 2).

[4] Guy Brousseau é um educador matemático francês. Em 2003 recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento da Teoria das situações didáticas.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA E O SÓCIO-INTERACIONISMO

Na sociedade contemporânea é indiscutível a grande importância do saber matemático, seja por sua grande aplicabilidade, seja pelo potencial na formação de cidadãos críticos e interativos.

Documentos oficias voltados à Educação destacam a Matemática como ciência indispensável em todos campos sociais. Conforme os PCNs[5] (2000):

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. (BRASIL, 2000, p. 9)

Ainda os PCNs (2000, p. 40), destacam a importância da Matemática para formação do cidadão, citando à dependência de outras áreas em relação às competências em Matemática, considerando que “a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional”.

A Proposta Curricular de Santa Catarina (2014, p. 163), ao defender a importância da Matemática na vida de todo ser humano, destaca que “os conceitos matemáticos não são prerrogativas de pessoas com dotes especiais, mas, sim, possibilidade de todos”. Diante disso, entendemos que todo ser humano tem o direito e a responsabilidade de saber desta ciência no mínimo o suficiente para que possa exercer plenamente sua cidadania. Para tanto, precisa-se encontrar meios que tornem esta ciência mais acessível, rompendo paradigmas (“matemática é difícil”, “é para poucos”, ...) e promovendo um ensino matemático mais democrático.

A recente BNCC (2017)[6] tratando do Ensino Fundamental nos aponta que:

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.

---

[5] Parâmetros Curriculares Nacionais – Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 21 jan. 2018.
[6] Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em 20 jan. 2018.

> No Ensino Fundamental, essa área, [...] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, [...]. (BRASIL, 2017, p. 263).

Destaca também a BNCC (2017, p. 264) que é compromisso do Ensino Fundamental "o desenvolvimento do *letramento matemático*[7], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, [...] utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas". Neste sentido, para que esse compromisso possa ser cumprido, o mesmo documento apresenta na sequência que:

> Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2017, p. 264, grifos originais)

Diante do exposto, observamos fortes indicativos documentais defendendo o uso da modelagem como ferramenta metodológica no ensino da Matemática. Indicativos estes, que buscam destacar a contribuição desta prática para o aprendizado matemático significativo, e que promova um ensino democrático. Nesse sentido, cabe uma grande responsabilidade ao professor, a de assumir o papel de agente interativo, que compartilha significados, motiva e propõe possíveis caminhos a serem seguidos, fortalece as relações interpessoais, cooperando para a construção do conhecimento. Conceber o professor como mediador, não significa que ele tenha menos responsabilidade pelo conhecimento científico, pelo contrário, exige dele um conhecimento e dinamismo ainda maior, transcendendo a área da Matemática.

Observando aspectos da modelagem, notamos que nela o conceito espontâneo vem à tona com certa facilidade, pois as situações-problemas, normalmente estão vinculadas a algo já

---

[7] Conforme definição do PISA 2012: "Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar, e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias". Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf>. Acesso em: 20 de jan. 2018.

vivenciado pelo aluno em seu dia a dia, em casa ou na sociedade e, com isso, muitos conhecimentos do senso comum são compartilhados. Outro fato que estimula o conhecimento espontâneo é o próprio o ambiente da modelagem que propicia mais espaço para as manifestações dos alunos do que a aula do tipo teoria-exercício. Nesse aspecto é importante frisar que o professor deve ficar atento para que possa validar, ou não, o conhecimento trazido pelo aluno, justificando com conhecimento científico.

Como afirma MOYSÉS (1997):

> Esse processo de relacionar o conceito espontâneo que o aluno traz com o conceito científico que se quer que ele aprenda exige de quem ensina uma compreensão dos diferentes significados que os conceitos – tanto os espontâneos quanto os científicos – têm para o aluno. Exige, também, que o docente perceba quais são os seus contextos, quais são os sentidos nos quais eles estão sendo empregados. (MOYSÉS, 1997, p. 38).

Vygotsky, segundo Moysés (1997, p. 35) considerou os conceitos espontâneos “como sendo aqueles que a criança aprende no seu dia-a-dia, nascendo do contato que ela possa ter tido com determinados objetos, fatos, fenômenos, etc. dos quais ela não tem sequer consciência”. Já em relação aos conceitos científicos “como sendo aqueles sistematizados e transmitidos intencionalmente [...]”. (idem, p. 35).

O ensino com modelagem pressupõe ações por parte dos alunos, de pesquisa, troca de ideias, diálogo e construção coletiva de procedimentos e conhecimentos. Assim, o sócio-interacionismo de Vygotsky, com as definições de atividade, mediação, linguagem, zona de desenvolvimento proximal e formação de conceitos (MENDONÇA; MILLER, 2010; VYGOTSKY, 1996 e 1998) é uma das bases teóricas para o planejamento das atividades, observação das ações e análise dos dados observados em nossa investigação.

Na concepção de Vygotsky, conforme Moysés (1997), há dois tipos de atividades associadas à vida humana. A reprodutiva e a criativa. Conforme a autora:

> “Partindo do confronto de atividade reprodutiva e atividade criativa (a que também denomina “combinatória”), chama a atenção pelo fato de ser a primeira fundamental para a vida cotidiana do homem. O cérebro armazena e reproduz suas experiências anteriores. Utilizando-as, ele é capaz de se adaptar ao mundo à sua volta, sem que seja necessário despender grande esforço. No entanto, essa não lhe é útil quando se trata de lidar com algo novo, inusitado. Nessa hora, é preciso lançar mão da combinação criativa de elementos já armazenados no cérebro, de forma a se adaptar à nova situação. Surge, assim, a atividade criativa”. (MOYSÉS, 1997, p. 42)

De acordo com o exposto, entende-se que a atividade reprodutiva ocorre mecanicamente, não dependendo de associações elaboradas, bastando repetir o que já foi feito ou mostrado (já armazenado no cérebro), formando um processo contínuo, até mesmo rotineiro. Por outro lado, a atividade criativa surge quando novas situações são enfrentadas. Situações que exigem da imaginação, a fim de fazer combinações, que permitem adaptações ao processo antes contínuo e imprimem novos caminhos a esse processo, e, consequentemente, aumentam o potencial de criatividade. Conforme Moysés (1997, p.43), em resumo pode-se dizer que "a atividade criativa da imaginação depende primeiramente de quão rica e variada é a experiência prévia que a pessoa armazenou no seu cérebro. E mais: ela é uma função vitalmente necessária".

Ao associarmos os conteúdos escolares ao desenvolvimento das funções cognitivas superiores, sabemos que alguns conteúdos apresentam maior facilidade que outros, variando de acordo com o grau de complexidade de se fazer a ponte do concreto para o abstrato ou da facilidade na significação para o aluno. Destaca-se também a influência direta no desenvolvimento das funções cognitivas superiores, os métodos usados no processo. Métodos que instigam o pensar, a criação de hipóteses, a imaginação, inclusive indo sempre mais além, certamente apresentam melhores resultados. Assim, entende-se que, para que haja o pleno desenvolvimento das funções psíquicas do aluno, é preciso partir do sensorial (essencialmente necessário) e ultrapassá-lo, "levando o aluno para patamares mais elevados, mais abstratos e gerais". (MOYSÉS, 1997, p. 45). E, nesse processo de internalização, o professor precisa aparecer como um mediador, com linguagem adequada de modo a explorar a criatividade do aluno, para que consiga passar de seu pensamento figurativo-concreto ao pensamento lógico-conceitual. Ao mesmo tempo em que o aluno internaliza um conhecimento é instigado a atingir patamares ainda mais elevados, como prevê a teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky.

Fino (2001) ao comentar a teoria da *Zona de Desenvolvimento Proximal* (ZDP) de Vygotsky (1978), diz:

> Um aspecto particularmente importante da teoria de Vygotsky é a ideia da existência de uma área potencial de desenvolvimento cognitivo, definida como a distância que medeia entre o nível actual de desenvolvimento da criança, determinado pela sua capacidade actual de resolver problemas individualmente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através de resoluções de problemas sob orientação de adultos ou em colaboração com pares mais capazes. (FINO, 2001, p. 277).

No entendimento da ZDP de Vygotsky, "o aprendiz, o instrutor e o conteúdo interagem com o problema para o qual se procura uma resolução". (FINO, 2001, p. 278). Neste sentido, vemos plena coerência entre a ZDP com a ideia de utilizar sequências didáticas para introduzir conceitos e desenvolver habilidades, com linguagem necessária para o desenvolvimento dos modelos, configurando o todo que podemos denominar Engenharia Didática. Assim, as sequências didáticas constituem as intervenções que promovem as interações entre o aprendiz, o instrutor e o conteúdo, agindo no *nível atual de desenvolvimento* e levando o aluno a desenvolver o *nível potencial de desenvolvimento*, caracterizando a ZDP defendida por Vygotsky. Nesta perspectiva, ao professor implica proporcionar ao aluno apoio e recursos para que o nível de conhecimento a ser atingido seja o maior possível, ou seja, que o aluno atue no limite do seu potencial.

Para Moysés (1997, p. 34), "criando zonas de desenvolvimento proximal, o professor estaria forçando o aparecimento de funções ainda não completamente desenvolvidas". O que no nosso entender geraria novas expectativas de aprendizagens.

Ao planejar uma sequência didática, o professor deve ter claro o conteúdo que deseja ensinar e quais as expectativas de aprendizagem ele deseja alcançar com a turma no período por ele determinado. Estas expectativas devem ser baseadas na formação intelectual, faixa etária e sociabilidade do aluno, com o grupo de interação e com o conhecimento propriamente dito, explorando suas potencialidades a fim de possibilitar o desenvolvimento de novas competências e habilidades, que possam estabelecer conexões interdisciplinares, contextualizações e generalizações, ampliando seu nível de conhecimento e provocando novas expectativas, tanto para o professor, quanto para o aluno. Numa sequência didática, portanto, é importante que nas tarefas sejam respeitadas as dificuldades que os alunos irão encontrar para resolvê-las, tornando possível a superação destas, mantendo o ânimo para novos desafios.

Para Alro e Skovsmose (2006) *apud* Neto e Golveia (2015, p. 161) "ao conhecer e avaliar suas perspectivas, alunos e professores podem dar um passo para superar o absolutismo burocrático", tornando a sala de aula um espaço aberto a novos padrões de comunicação, de modo que o aluno deixe de ver como tarefa principal do professor o ato de corrigir erros, e passe a observá-lo como um articulador de atividades de aproximação. "A aproximação que constitui-se na busca de uma perspectiva satisfatória" (idem, p. 161). Visto que:

> atividades de aproximação indicam um aspecto fundamental da aprendizagem, a qual pode ser entendida como ação. A ação aqui é entendida em dois sentidos, a primeira é o envolvimento da pessoa (intencionalidade) e a segunda é a abertura (situação com alternativas). Desta forma, a aprendizagem como ação "pressupõe tanto uma situação em aberto quanto o envolvimento" por parte dos alunos. (ALRO; SKOVSMOSE, 2006 *apud* NETO; GOLVEIA, 2015, p. 161).

No processo de ensino e aprendizagem, Arlo e Skcovsmose (2006) destacam o potencial do diálogo. Diálogo este, não como uma simples conversa, e sim um diálogo emancipatório (Freire), que possa estabelecer relações interpessoais (Rogers), diálogo com qualidades. “Qualidades de comunicação influenciam qualidades de aprendizagem”. (ALRO; SKOVSMOSE, 2006 *apud* NETO; GOLVEIA, 2015, p. 164). Ainda neste sentido, os autores afirmam:

> [...] o diálogo que acontece em sala no sentido colocado (realizar uma investigação, correr riscos, promover a igualdade) são pontos importantes para o desenvolvimento da democracia na sala de aula, e como esta é vista como uma microssociedade, o que acontece ai pode se espalhar para toda a sociedade. (ALRO; SKOVSMOSE, 2006 *apud* NETO; GOLVEIA, 2015, p. 165).

Visando o processo democrático de aprendizagem discutido a partir da base teórica apresentada – que considera as concepções de *diálogo, linguagem e construção social dos conceitos,* de Vygotsky, associadas à ideia de *diálogo e aprendizagem* em atividades de cooperação desenvolvidas em Alro e Skovsmose (2006), e que discute a Modelagem como alternativa metodológica para o ensino da matemática – pretendemos analisar uma atividade de cooperação desenvolvida a partir de sequências didáticas no ensino da matemática. Sequências estas compostas de modelagem e atividades sistemáticas de ensino.

4 METODOLOGIA

A pesquisa consiste em um experimento pedagógico, realizado no segundo semestre de 2017, em que o objeto de investigação é a aprendizagem matemática de alunos da turma do 8º (oitavo) ano do Ensino Fundamental da Escola de Educação Básica Catharina Seger, do Distrito de Cerro Azul, Município da Palma Sola, SC, e, o pesquisador é o professor de Matemática da turma.

4.1 A ESCOLA, A TURMA E OS ALUNOS

Destacamos inicialmente alguns aspectos que são relevantes e merecem esclarecimentos em relação ao contexto onde objeto e pesquisador estão inseridos.

A Escola de Educação Básica Catharina Seger é uma escola estadual com sua sede no Distrito de Cerro Azul, interior do Município de Palma Sola, no Extremo Oeste de Santa Catarina. O Distrito está a uma distância de 13 km da cidade, com acesso por estrada de chão. Trata-se de um povoado que possui em torno de 60 moradores, na maioria agricultores. Destes, mais de 50% são aposentados e não possuem filhos menores.

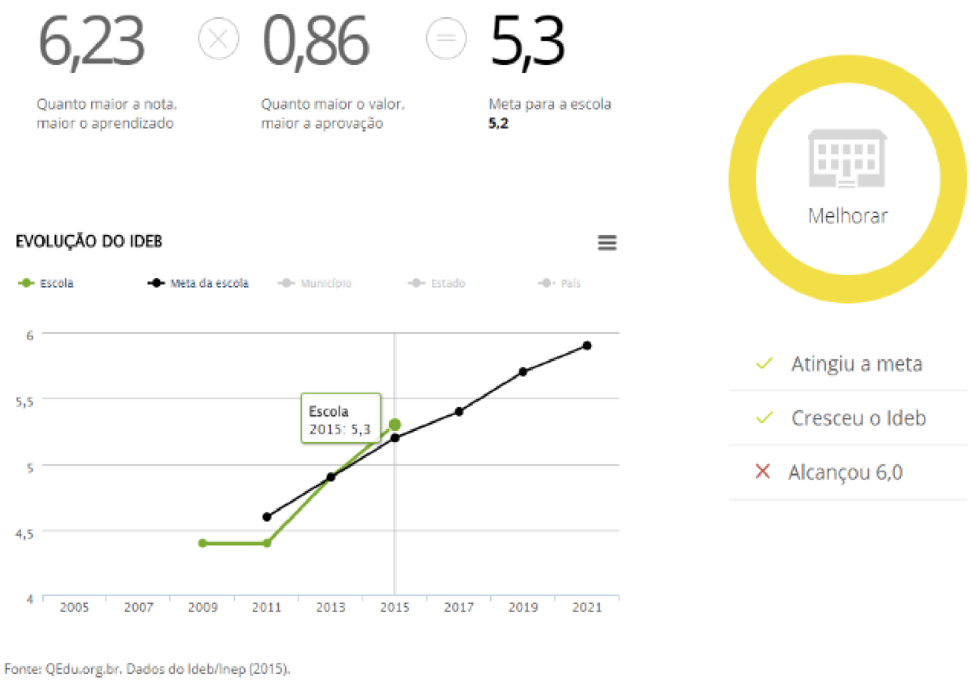
A escola funciona em dois turnos (matutino e vespertino). Oferece Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano e Ensino Médio. Também oferece Atendimento Educacional Especializado (AEE[8]) e o Programa Estadual de Novas Oportunidades de Aprendizagem (PENOA[9]). A escola atende ao todo em torno de 130 alunos (cerca de 80% agricultores), e destes, menos de 20 são moradores na comunidade sede da escola, sendo que os demais são oriundos de outras 16 comunidades do interior, dependendo do transporte escolar diariamente. A escola possui 7 salas de aula (sendo uma específica para o AEE), biblioteca, sala de informática e demais compartimentos básicos. A maioria dos professores que atuaram na escola nos últimos anos, possuem curso de pós-graduação em nível de Especialização, porém, apenas em torno de 1/3 (um terço) dos atuais professores, atuam a mais de três anos consecutivos na escola, segundo dados do PPP (Projeto Político Pedagógico).

Apesar das dificuldades de acesso e grande fluxo de profissionais, a escola vem evoluindo no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), sendo que no último

[8] No AEE são atendidos quatro alunos com necessidades especiais. Estes comparecem no contra turno duas vezes por semana.
[9] O PENOA é oferecido no contra turno, dois períodos por semana, com aulas de português e matemática (em igual proporção), para os alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem. Nos “dias de PENOA” os alunos almoçam na escola.

divulgado (2015) atingiu 5,3 pontos, ultrapassando a meta prevista que era de 5,2, conforme pode-se observar na Figura 1.

Figura 1 – IDEB 2015 da EEB Catharina Seger



Fonte: http://www.qedu.org.br

Nos dados da Figura 1 pode-se notar que a escola teve, no referido ano, um alto índice de reprovação. Isso caracteriza a grande disparidade no nível de conhecimento e interesse dos alunos desta escola, pois apesar disso a nota relativa ao aprendizado permite manter o índice em elevação. Essa disparidade é uma preocupação que vem sendo demostrada e amplamente discutida na escola durante os Conselhos de Classe nos últimos anos.

Tratando especificamente da turma do 8º ano, destacamos: a turma estudava no período vespertino durante a pesquisa e era composta de 13 alunos, sendo 5 do sexo feminino e 8 do masculino, com idades entre 13 e 15 anos. Destes, 11 filhos de pequenos agricultores, 1 filho de professor e 1 de comerciante. Trata-se de uma turma bastante heterogênea em nível de conhecimento, com vários alunos apresentando grandes dificuldades de aprendizagem. Dos 13 alunos, 3 estavam repetindo o 8º ano e dos outros 10, 5 frequentaram o PENOA, pelos menos um semestre de 2017. Segundo o Conselho de Classe, a turma apresenta uma grande defasagem em relação ao nível de conhecimento *versus* faixa etária, sendo a turma mais “desnivelada” da escola. Apresenta grandes problemas no desenvolvimento de habilidades, inclusive sérios problemas de coordenação motora, como domínio de bola, andar sobre linha, noção de espaço, constatados e levantados em Conselho de Classe, pelos professores de Educação Física e Artes. Porém, entre os alunos da turma, alguns se destacam, apresentando um grande potencial de desenvolvimento. Trata-se de um diferencial extremo na mesma turma, segundo os professores.

A escolha desta turma para a pesquisa foi associada a vários motivos. Destacamos três deles:

- a própria heterogeneidade motivou a proposição de um trabalho de interação e cooperação, possíveis em atividades de modelagem;
- a aproximação entre o conteúdo programado para a turma, a situação de modelagem e as demais sequências didáticas propostas na pesquisa;
- a titularidade do professor pesquisador, como professor regente da turma.

A escolha da turma também está intimamente ligada ao propósito da pesquisa de analisar uma proposta pedagógica, que conforme Tripp (2005) pode ser caracterizada como pesquisa-ação educacional. Para ele, "A pesquisa-ação educacional é principalmente uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos [...]". (TRIPP, 2005, p. 445).

Devido a necessidade de encontros extraclasse para o desenvolvimento da pesquisa, a dificuldade de acesso da escola acabou impedindo a realização da pesquisa com toda a turma, tendo por amostra apenas um grupo de seis alunos. Para formar o grupo participante, levou-se em conta a espontaneidade e a possibilidade de comparecimento em horário extraclasse, com disponibilidade de transporte e alimentação, a fim de não prejudicar o comparecimento dos participantes no turno normal de aula. Para tanto houve assinatura de Termo de Consentimento (Anexo A). Assim, o grupo formado ficou composto de quatro meninos e duas meninas. Para fins de registros e análises dos diálogos e ações por eles realizados, os alunos foram identificados como A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6, garantindo o sigilo quanto suas identidades. Porém, para melhor compreensão dos resultados analisados, optou-se por uma caracterização básica dos alunos participantes, apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Caracterização dos alunos participantes da pesquisa

Aluno	**Distância da casa à escola**	**Desempenho escolar**	**Participação em atividades extraclasse/2017**
A_1	500 m	Baixo – em especial em matemática, apesar do grande esforço	PENOA
A_2	9000 m	Regular – com razoável destaque em matemática	Programa *OBMEP na Escola*[10]
A_3	100 m	Ótimo – medalhista na OBMEP[11] e outras Olimpíadas de Matemática, bem como de Astronomia	Programa OBMEP na Escola e PIC[12] (à distância)
A_4	500 m	Bom – destacando-se em matemática	Programa OBMEP na Escola
A_5	300 m	Regular – com pouca dedicação	PENOA
A_6	200 m	Baixo – demonstra pouco interesse, repetente	Nenhuma

Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 ASPECTOS GERAIS DA PESQUISA

4.2.1 Período

A pesquisa foi realizada durante um período de 8 semanas do 3º e 4º bimestre/2017, usando-se para isso aulas de matemática desse período e 10 encontros extraclasse. Nesse período, foram realizadas 32 horas-aula (45 min cada) em sala, contando com a participação de todos os alunos da turma, porém destas, apenas 18 horas-aulas fizeram efetivamente parte da pesquisa, pois as sequências paralelas foram aplicadas a partir da 3ª semana e a última semana houve apenas o encontro extraclasse. Cada encontro extraclasse contou com média de 3,3 horas-aula, totalizando 33 horas-aula. No planejamento inicial, tínhamos previsto 8 encontros extraclasse (um a cada semana) com no máximo 3 horas-aula cada, totalizando 24 horas-aula, porém o andamento da pesquisa acabou exigindo ampliação do tempo de cada encontro, além da inclusão de dois encontros extras. Um destes ocorreu na 6ª semana e o outro na 7ª semana. As aulas em sala ocorreram nas segundas e terças-feiras e os encontros nas quartas ou quintas-feiras.

[10] Programa oferecido, pela organização da OBMEP, aos professores de Matemática das escolas públicas e alunos de Licenciatura em Matemática (“preparadores habilitados”), para a formação de turma com alunos voluntários (de suas escolas ou escolas vizinhas) que possuem afinidade com a disciplina, com intuito de estudo específico em matemática. Consiste em encontros presencias quinzenais com o professor bolsista, além de estudos no Porta da Matemática, acompanhados e orientados pelo mesmo.
[11] Olimpíada Brasileira de Escolas Públicas.
[12] Programa de Iniciação Científica da OBMEP.

4.2.2 Caracterização da pesquisa

Na pesquisa, os alunos do grupo (amostra) foram o foco de observação. Suas ações e resultados foram relatados e analisados a fim de analisar a aprendizagem matemática que ocorre na aplicabilidade de metodologias associadas, usando atividades de modelagem e outras atividades paralelas, organizadas em forma de sequências didáticas, como sugerem Borges e Nehring (2008), sendo uma espécie de Engenharia Didática. Para tanto, foram elaboradas três sequências didáticas. Dessas, uma se destaca, por se tratar de uma situação de modelagem com investigação, desenvolvida simultaneamente com as demais, de forma paralela, em encontros extraclasse, ou seja, enquanto se desenvolvia a situação de modelagem, descrita a seguir como S_1, com o grupo de alunos da pesquisa, as demais (S_2 e S_3) foram desenvolvidas nas aulas com toda a turma.

Tomamos um certo cuidado para que os conteúdos abordados em S_2 e S_3 (trabalhados na sala) não antecipassem conteúdos necessários para a modelagem, de modo que essa mantivesse o espírito investigativo característico da pesquisa. Por outro lado, por vezes, conteúdos não tão usuais, vistos em sala, foram considerados úteis na modelagem. A ideia central era que conteúdos e atividades vistos na sala fossem complementares aos da modelagem, conforme o planejamento da pesquisa.

Na situação de modelagem (S_1), foi apresentado um problema ao grupo, que após discussão gerou o encaminhamento de alguns procedimentos. Devido a essa forma de propor a modelagem, dizemos que ela é do tipo 2, na classificação de Barbosa (2001), pois o problema e alguns dados são fornecidos pelo professor, sendo que os alunos analisam e coletam os demais dados e partem para a investigação na busca de solução do problema. Adotou-se, nesta investigação, uma abordagem *empírico-analítica*[13], por ter as ações dos alunos no processo de aprendizagem de matemática em atividades de modelagem, como objeto de observação e análise. Assume-se a dualidade das funções professor e pesquisador em uma técnica de *observação participante*[14], visto que pretende-se interagir com os alunos, no sentido de

[13] Que usa o método empírico-analítico: O processo realizado pelo método empírico-analítico é em primeiro lugar a definição de um problema. Posteriormente estabelece uma hipótese de trabalho que serve de base para a investigação. Através de diferentes experimentos são analisados os resultados e colocados em conexão com esta hipótese. O método empírico-analítico é valorizado por seu rigor e por sua objetividade de maneira que é baseado em dados a serem contrastados. Disponível em: <http://queconceito.com.br/método-empirico-analitico>. Acessado em: 16 jan. 2018.

[14] A **observação participante** é uma técnica de investigação social em que o observador partilha, na medida em que as circunstâncias o permitam, as atividades, as ocasiões, os interesses e os afetos de um grupo de pessoas ou de uma comunidade (Anguera, Metodologia de la observación en las Ciencias Humanas, 1985). Disponível em: <https://www.infopedia.pt/$observacao-participante> Acessado em: 16 jan. 2018.

promover aprendizagem de conceitos matemáticos, mediante atividades predeterminadas (com objetivos específicos e expectativa de desenvolvimento de habilidades e domínio simbólico e conceitual) e não predeterminadas (com os mesmos objetivos das anteriores, porém com outros mais gerais, tais como o desenvolvimento da criatividade, iniciativa e autonomia), ao mesmo tempo em que é realizada a investigação sobre modelagem e aprendizagem. Para Martins (1996), a observação participante tem como propriedade:

> [...] estabelecer uma adequada participação dos pesquisadores dentro dos grupos observados de modo a reduzir a estranheza recíproca. Os pesquisadores são levados a compartilhar os papéis e os hábitos dos grupos observados para estarem em condição de observar fatos, situações e comportamentos que não ocorreriam ou que seriam alterados na presença de estranhos. (MARTINS, 1996, p. 270).

Na presente investigação, pelo fato de o professor pesquisador ser o titular das aulas de matemática, conhecer bem os alunos envolvidos e seus núcleos familiares, a metodologia da observação participante tornou-se uma prática muito tranquila, devido a confiança mútua entre os participantes.

As observações durante o processo de execução levaram em conta as ações coletivas e individuais dos alunos, as atitudes, o desenvolvimento das habilidades de modelar, o domínio da linguagem matemática e dos conceitos assimilados. Como registros das manifestações foram utilizados o diário de bordo, fotografias, relatos escritos, bem como exercícios, provas e testes. A análise dos dados seguiu a metodologia de *Análise do Conteúdo*[15], porém não inclui a verificação de quantidade nem qualidade de conceitos matemáticos aprendidos. Interessa-nos identificar oportunidades de aprendizagem e como os alunos tentaram se apropriar do conhecimento. Entendemos que a verificação da aprendizagem, demandaria de mais etapas didáticas, com testes de aprendizagem e aplicação de novas atividades específicas para solução de dúvidas, desenvolvimento de prática com a linguagem e correção de interpretações equivocadas. As categorias de observação e análise consideram as ações individuais e coletivas que podem levar ao envolvimento, desenvolvimento e a aprendizagem de conceitos, propriedades, habilidades de linguagem ou de aplicações, detalhadas a seguir.

---

[15] A análise de conteúdo constitui uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum. (MORAES, 1999, p. 8).

4.2.3 Categorias de observação e análise

Partiu-se do pressuposto que a aprendizagem de Matemática ocorra, de modo geral, em ações coletivas ou individuais e que nessas, as estruturas matemáticas sejam identificadas, discutidas, testadas e aplicadas, utilizando diferentes linguagens, tanto nas atividades de modelagem como nas atividades paralelas. Assim, dois grupos de categorias foram propostos:

Quanto ao agente das ações de aprendizagem:

I - Ações coletivas: Interações entre os sujeitos (alunos/alunos; alunos/professor) tais como escolhas de procedimentos, acordos do grupo, lideranças e dependências, diálogos, discussão de exercícios, significados, colaborações, ajuda mútua, intrigas...

II - Ações individuais: Estudo em casa (temas, trabalhos, pesquisas...), estudo em sala (exercícios, problemas, relatos...), testes e provas.

Quanto ao tipo de atividade didática:

A - Aprendizagem com modelagem relativa às categorias I e II

a) Aprendizagem de conceitos,
b) Aprendizagem das propriedades,
c) Domínio da linguagem matemática e
d) Aplicação em situações novas.

B - Aprendizagem com outros métodos relativa às categorias I e II

a) Aprendizagem de conceitos,
b) Aprendizagem das propriedades,
c) Domínio da linguagem matemática e
d) Aplicação em situações novas.

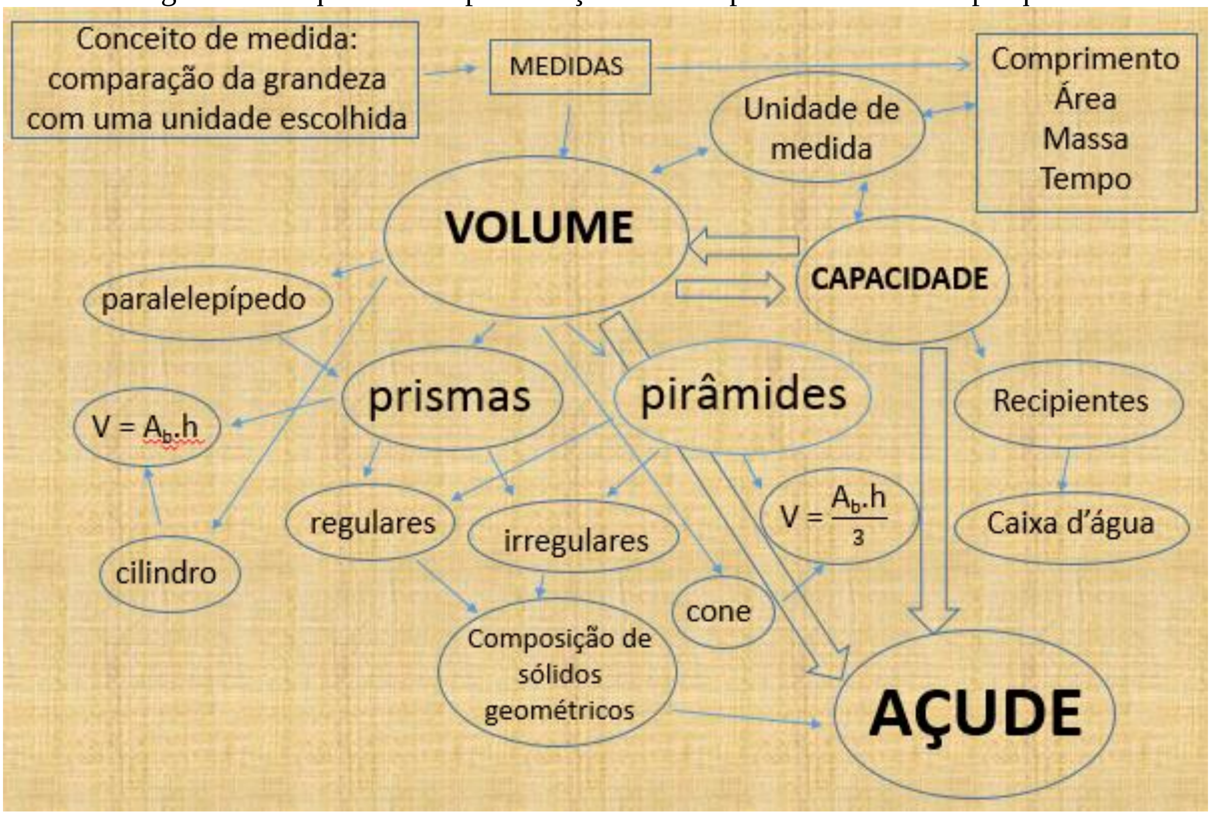
Pretende-se com essas categorias observar e discutir as ações e os tipos de atividades que geraram aprendizagem, e com isso, discutir o potencial de ensino de Matemática da modelagem e das outras atividades.

4.2.4 Sequências Didáticas

As sequências didáticas foram elaboradas antes do início da pesquisa com o intuito de garantir a abrangência dos conteúdos matemáticos pensados a partir da *totalidade do* *conhecimento matemático*, defendidos por Borges e Nehring. Vale destacar que durante a pesquisa tais sequências sofreram algumas alterações, conforme os rumos que foram tomados e a necessidade de novas abordagens.

Para o planejamento e a elaboração das sequências didáticas trabalhadas em sala de aula, bem como para a resolução da situação-problema modelada utilizou-se o conceito de campo conceitual, sintetizado no esquema representado na Figura 2.

Figura 2 - Esquema de representação dos campos conceituais da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A sequência S_1 (item 4.2.4.1) diz respeito a situação de modelagem que corresponde a medição do volume de água de um açude localizado nas proximidades da escola (na propriedade do professor pesquisador), de modo que o problema é apresentado e contextualizado com os alunos e estes planejam e coletam os dados para a resolução, que é feita e analisada pela grupo, juntamente com o professor pesquisador. O roteiro descrito em S_1 não foi apresentado aos alunos, apenas estudado e elaborado pelo professor pesquisador para servir de guia se houvesse necessidade de intervenção direta no trabalho de investigação.

A sequência S_2 apresenta conceitos que diferenciam as grandezas e suas respectivas unidades, enfatizando medidas de comprimento, área, volume e capacidade.

A sequência S_3 trata-se do estudo de sólidos geométricos com ênfase para prismas e pirâmides, já que são conteúdos com foco especial na sequência S_1, necessários para a solução do problema de modelagem. Porém no cronograma, esta sequência aparece, propositalmente, em etapa posterior ao aparecimento deste estudo na modelagem. Os cálculos de volumes, em especial de pirâmides, vêm como novidade aos alunos através desta sequência, inclusive avançando no currículo, indo além do programa anual inicialmente determinado para a turma.

4.2.4.1 Atividade de Modelagem: Calcular a quantidade máxima de peixe recomendada para o açude (S_1)

Antes de descrever esta sequência didática, apresentando um possível roteiro de como proceder para resolver o problema proposto, é conveniente ressaltar a importância desta atividade para alunos de uma região – Extremo Oeste de Santa Catarina – onde a principal fonte de renda é oriunda da agricultura e pecuária, e, a piscicultura vem se projetando como alternativa complementar na renda dos pequenos agricultores.

O desenvolvimento da piscicultura, na região, vem ocorrendo em açudes, porém de forma bastante tímida e rudimentar, carecendo de estudos, técnicas e investimentos.

Sabemos que o sucesso na produção de peixes depende da quantidade de animais em relação à quantidade de água do açude, da qualidade da água e do manejo, variando de acordo com a espécie (ver Apêndice D).

Trazendo a situação para a escola, em especial ao ensino da matemática, queremos aproveitar este ensejo para observar como ocorre a aprendizagem de conceitos matemáticos em atividades de modelagem, associadas a outras atividades de ensino.

Como atividade de modelagem usaremos este contexto, com o propósito de calcular a quantidade de água de um açude real, para posteriormente estimar a quantidade de peixe recomendada para tal reservatório.

Para contextualizar o experimento didático, foi proposto inicialmente o problema associado à modelagem: Qual é a quantidade máxima de peixes possível de ser criada em um açude (em particular, neste açude)?

Do senso comum sabemos que a maioria dos açudes tem a superfície superior em forma de polígono irregular, ou ainda, com contorno curvo e normalmente com profundidade não uniforme, tornando o cálculo do volume de água existente neste depósito bastante trabalhoso.

Apresentamos a seguir possíveis passos/atividades pré-elaborados que denotam inicialmente a sequência S_1. Esses passos (como já dito) não foram apresentados aos alunos para não direcionar procedimentos, prevalecendo suas próprias decisões:

- Aproximar a superfície do açude a um polígono, fixando os vértices deste com uso de estacas;
- Estender um barbante através das estacas;
- Externo a este polígono definir um retângulo com uso de barbante, estacas e instrumentos de medição;
- Demarcar nos lados deste retângulo, distâncias de metro a metro (pode ser com fita colorida);
- Usar estas demarcações e formar um sistema de eixos ortogonais, definindo a origem, podendo esta, ser um dos vértices do retângulo;
- Definir e registrar pontos na superfície do açude, medindo a profundidade do açude nos referidos pontos, usando coordenadas (x,y,z), sendo z associado à profundidade respectiva. Dessa forma registra-se $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$;
- Medir as profundidades com uso de pequeno bote; avaliando a necessidade de mais ou menos medições de acordo com a variação destas profundidades. Por exemplo: se a profundidade varia pouco (discutir precisão) então podemos fazer menos medidas, por outro lado havendo maior variação fazem-se mais medidas, a fim de diminuir a margem de erro;
- Registrar coordenadas dos vértices do polígono formado pela superfície;
- Desenhar esboço em papel quadriculado (milimetrado);
- Dividir a superfície em polígonos menores, conforme coordenadas, levando-se em conta as profundidades medidas;
- Formar "sólidos geométricos"[16] e encontrar formas alternativas de calcular o volume destes (podendo usar decomposição em prismas e pirâmides, conforme o caso);
- Validar ou invalidar métodos de cálculos usando submersão de objetos semelhantes, por exemplo;
- Organizar tabela de resultados;
- Definir o volume total.

[16] Refere-se a figura geométrica formada pela coluna de água a partir das coordenadas de quatro pontos medidos no açude.

4.2.4.2 Medidas e grandezas (S_2)

- Comprimento (unidades);
- Área (unidades; áreas de polígonos e círculo);
- Volume (unidades; volume de um cubo);
- Tabela de transformação de unidades (comprimento, área, volume, capacidade);
- Capacidade X volume (relações entre: kl, l e ml com m³, dm³ e cm³).

4.2.4.3 Os sólidos geométricos (S_3)

- Definição: o que chamamos de sólido geométrico? Quais as características?
- Poliedros: elementos, nomenclatura, classificação;
- Prisma: elementos, características das faces, nomenclatura, área da superfície, volume;
- Pirâmide: elementos, características das faces, nomenclatura, área da base, volume;
- Cilindro reto: elementos, área da base, área lateral, área total e volume;
- Cone: elementos, área da base e volume;
- Esfera: elementos, área superficial e volume.

4.3 PLANEJAMENTO DAS AÇÕES/ATIVIDADES

Para melhor orientar as ações a serem realizadas, montou-se o Quadro 2, com um cronograma de a atividades. Como pode-se notar, a sequência S_2 não entra nas ações em sala imediatamente após o início da pesquisa, e sim, a partir da terceira semana, pois como já foi dito, estas apresentam caráter intencional de complementariedade, com intuito de sistematização do saber matemático. Ressalta-se que este quadro, sintetiza o planejamento inicial, que sofreu devidas adequações durante o desenvolvimento da pesquisa, conforme pode-se constatar mais adiante quando da descrição e análise das ações. Observa-se também que a coluna relativa aos conteúdos abordados em sala foi predefinida, visando a sistematização, enquanto que a de conteúdos abordados na modelagem, trata-se de objeto de investigação.

Quadro 2 – Planejamento das ações durante a pesquisa

Período (semana)	Ações na sala	Conteúdos abordados em sala	Ações na modelagem	Conteúdos abordados na modelagem
1ª	-	-	Apresentação do problema a investigar; visita ao local de investigação; definição de estratégias e procedimentos.	?
2ª	-	-	Demarcação do espaço e medições: profundidades, ...	?
3ª	Aulas expositivas: Início da sequência S_2 com uso do livro didático.	Grandezas e medidas; unidades de medidas;	Conclusão das medições; estratégias de abordagem a partir dos dados.	?
4ª	Aulas expositivas: continuação da sequência S_2 com uso do livro didático; exercícios.	Área de triângulo: fórmula clássica e fórmula de Herão; área de quadriláteros;	Construções de maquetes, cálculos e medidas.	?
5ª	Aulas expositivas: continuação da sequência S_2 com uso do livro didático; exercícios; exercícios, correções e avaliação.	Elementos do círculo; área do círculo; volume de um cubo; tabelas de transformação.	Aprofundamento de discussões; decomposições e cálculos de volumes de casos particulares.	?
6ª	Aulas expositivas: início da sequência S_3 com material montado e impresso a partir de figuras da internet.	Sólidos Geométricos: Poliedros e não poliedros: características, classificação, área da base, lateral e total de um prisma; volume de um prisma; área da base e volume de uma pirâmide; áreas da base, lateral e total de um cilindro	Generalização do método de cálculo.	?

		volume de um cilindro;		
7ª	Aulas expositivas: conclusão de S_3, com lista de atividades impressa e avaliação.	Volume de um cone; volume e área total de uma esfera.	Cálculo do volume total.	?
8ª	-	-	Avaliação da atividade de investigação e conclusões.	?

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Esse capítulo tem como foco relatar as sequências didáticas e verificar como ocorre a aprendizagem de conceitos matemáticos em atividades de modelagem, associadas a outras atividades de ensino.

A pesquisa realizou-se através da aplicação de três sequências didáticas, sendo uma delas (S_1) uma investigação envolvendo uma situação de modelagem. Como já descrito anteriormente, essa sequência se desenvolveu de forma paralela às demais sequências e envolveu inicialmente seis alunos em encontros extraclasse, enquanto as outras duas foram aplicadas para toda a turma do 8º ano, ou seja, aos 13 alunos. A diferença principal está associadas às metodologias aplicadas, pois, enquanto S_1 faz uso de uma investigação, que na classificação de Barbosa (2001) trata-se de uma modelagem do tipo 2, às demais usam metodologias diversas – usuais no dia a dia escolar –, como aula expositiva, exercícios, investigações de problemas correlatos/semelhantes aos da modelagem (porém mais elementares). S_2 e S_3 foram consideradas complementares, pois o intuito era ensinar com elas, conceitos possivelmente não abordados na modelagem, visando a totalidade do conhecimento matemático, objetivada pela educação formal, defendida por Borges e Nehring (2008) e consentida pelo professor pesquisador.

Nas descrições, usaremos a expressão “encontro”, ou simplesmente “E” seguida de um número de 1 à 10, para indicar cada período em que o grupo da pesquisa esteve reunido a trabalho da situação de modelagem (em ordem cronológica). A expressão “T” seguida de um número de 1 a 5, indica os períodos da pesquisa quando das aplicações das sequências 2 e 3 na turma (totalizando as 18 horas-aula). Como na 1ª e 2ª semana não houve aplicação da pesquisa na sala (concentrando apenas nos encontros extraclasse), e na 6ª e 7ª semana houve dois encontros extraclasse, conforme mostra o Quadro 3, trataremos cada código como uma etapa. Assim, por exemplo, temos como 1ª etapa, o primeiro encontro da modelagem (E1), 2ª etapa corresponde a E2, enquanto a 3ª etapa refere-se a primeira aplicação na turma (T1), e assim por diante, totalizando 15 etapas, que nos relatos se encontram em ordem cronológica.

Quadro 3 – Códigos e ordem cronológica da pesquisa

Semana	Aulas na Turma	Encontro na modelagem
1ª	-	E1
2ª	-	E2
3ª	T1	E3
4ª	T2	E4
5ª	T3	E5
6ª	T4	E6 e E7
7ª	T5	E8 e E9
8ª	-	E10

Fonte: Elaborado pelo autor

Os relatos dos encontros de modelagem e das aplicações na turma, tem como base as anotações do diário de bordo. Após cada relato, apresentamos um quadro analítico referente aquela etapa, destacando as observações de aprendizagem, conteúdos aprendidos, bem como enquadramento das categorias de observações e comentários.

Durante os relatos, A_1, A_2, A_3, ... são usados para indicar os seis alunos do grupo e a expressão "PP" para indicar o professor/pesquisador, durante suas intervenções, de modo que na leitura, tais expressões substituem o nome do indivíduo. Falas diretas são apresentadas "entre aspas".

5.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS DURANTE A PESQUISA

1ª Etapa: Encontro 1 (E1) – 1ª semana

No primeiro encontro apresentou-se para o grupo de estudo, usando uma sala de aula e projetor multimídia, os objetivos da pesquisa e como ela será feita, a situação-problema a ser modelada, as condições de trabalho e prazos. Após este estágio inicial, visitamos o local de coleta de dados (açude a ser modelado).

Na primeira visita ao açude, já com base no problema, surgiram as primeiras discussões no grupo, levantando inclusive as primeiras estimativas do volume de água, surgindo um diálogo ou seja: o aluno A_2 estimou uns 30.000 litros; A_6 disse que dá mais, uns 80.000 litros; A_3 achou entre 60.000 e 80.000 litros; já A_4 disse: "sei lá! Vamos medir pra ver".

Durante estas falas iniciais o aluno A_2 achou que seria fácil, que bastaria medir a profundidade em alguns pontos ao redor do açude, fazer a média dessas medidas e multiplicar pela área da lâmina d'água para obter o volume. De posse de uma ripa o aluno A_6 circulou o açude avaliando a variação de profundidade próximo às margens. Com isso o grupo já percebeu que o cálculo a partir da média com estas medidas era inviável, que poderia apresentar um erro muito grande. Dessa conversa surgiu uma discussão de quanto seria um erro aceitável. 3.000 litros? Mais? Menos? Sem raciocinar, num primeiro momento o aluno A_2 achou muito alto o erro de 3.000 litros, mas em seguida, avaliando algumas estimativas do volume total, concordou que um erro de 3.000 litros seria aceitável, sendo complementado por A_3 que este erro representaria em torno de 5% do todo se tivesse 60.000 litros.

Diante das conclusões de que teriam que efetuar medidas mais para o centro do açude, os alunos A_2 e A_6 sugeriam que entrariam na água e marcariam a fundura riscando na ripa. Intervindo na discussão PP sugeriu que não entrassem, e que para facilitar poderiam usar uma fita métrica fixa em uma ripa, porém as medidas seriam feitas em um outro encontro. A sugestão foi aceita pelo grupo, sendo que o aluno A_4 prontificou-se em trazer um vara de bambu para fixar a fita métrica. Neste instante observou-se a necessidade de novas intervenções que foram feitas por PP: “como medir? Quantas medidas? Como registrar as medidas?”.

Para medir, novamente acharam que bastaria entrar na água com a fita e verificar a *fundura*[17], mas em relação a quantidade e os registros não ficou acordado num primeiro momento, necessitando de maior reflexão.

Diante das discussões, sem que houvesse uma decisão, PP interfere novamente colocando que para o deslocamento na água usaríamos um bote, feito com duas câmaras de pneu e uma chapa de compensado, que se encontrava montado (os alunos demonstraram-se surpresos, porém satisfeitos com a ideia). Quanto a quantidade e a organização das medidas o PP levanta a hipótese “que tal um plano cartesiano?”. De imediato o aluno A_3 associou que poderíamos quadricular a superfície da água, definir as coordenadas e a partir delas medir a profundidade, depois calcular o volume por partes. Achando oportuno, PP introduz o conceito de um sistema de três eixos ortogonais. Na taipa do açude fizemos essa interessante discussão que direcionou os passos para a coleta de dados.

Antes de encerrar o encontro, já na sombra, a partir do diálogo e anotações apontamos algumas decisões e compromissos para o próximo encontro, ou seja:

- Com um barbante faremos um retângulo na taipa do açude, em torno de 1m (um metro) acima do nível da água para facilitar a circulação por debaixo do barbante;
- Dois lados do retângulo servirão como eixos X e Y, sendo o eixo Z, imaginário na vertical perpendicular à origem de X e Y;

[17] O termo fundura é muito usado em nossa região para expressar o mesmo que profundidade, por isso resolvemos adotá-lo.

- As medidas das profundidades serão feitas em cada ponto que define os vértices de quadrados de 1m de lado, sempre que neste ponto tenha água;
- Para facilitar a coleta dos dados será demarcado a cada metro, nos barbantes que definem os lados do retângulo, com um pequeno fio colorido;
- Nas demarcações (metro a metro) serão estendidos e amarrados barbantes, formando linhas paralelas a um dos eixos, sendo que as transversais serão feitas no momento das medições, deslocando um outro barbante, perpendicularmente àqueles amarrados;
- A régua será feita com uma fita métrica de costureira fixada no bambu com fita de empacotamento;
- O PP e o aluno A_3 ficam responsáveis por providenciar estacas para amarrar o barbante, pregos e martelo, bem como o barbante, enquanto o aluno A_4 trará o bambu.

Quadro 4 - Análise da 1ª Etapa: Encontro 1 (E1) – 1ª semana

Observações de aprendizagens	O que foi aprendido?	Categorias	Comentários
Noção de grandeza de volume e seu aperfeiçoamento	- superação da estimativa pela medida.	I – A – c.	- mesmo que as respostas sejam individuais (estimativas), a discussão é coletiva, portanto sujeitas às opiniões dos colegas, que discordaram entre si, sobre atividade de modelagem. A iniciativa de estimar um valor pode ter origem no conhecimento popular (capacidade de baldes, tanques, copos, garrafas...). O aperfeiçoamento desse conhecimento é uma tarefa da escola e que apareceu na própria discussão, quando um aluno propôs a medição, ou seja, superar o chute espontâneo por uma argumentação que envolve medições.
Unidades de medida	- relação $1\ dm^3 = 1\ l$ (volume – capacidade).	I – A – c, I – B – a.	- os alunos utilizaram o litro como unidade de volume, novamente por aplicação de conhecimento popular. A modelagem propiciou a discussão, mas a exploração do conceito poderia ter sido realizada por atividades paralelas.
Medida da profundidade do açude nas bordas	- superação da estimativa pela medida: medida do volume do prisma.	I –A – c,	- a iniciativa foi individual, mas a avaliação da estimativa foi coletiva, com o argumento de que não basta medir nas bordas. Ainda sem conhecimento novo a ser aprendido:

		I – A – d.	aplicação de conhecimentos velhos (volume). Não há uma negação da hipótese do aluno, mas um consenso de que são necessárias novas medidas; - surge a ideia de “como calcular o volume”: multiplicar a área da superfície(“poligonal”) pela média das profundidades.
Sistematização da informação e novos conceitos	- sistema de três eixos; - procedimentos para obtenção das medidas; - volume total = soma do volume das partes.	I – B – a, I – A – d.	- através da intervenção de PP, a introdução de novos conceitos (Sistema Cartesiano 3D). - diálogo democrático, para decidir procedimentos, visando a solução do problema. - tomada de decisão: a soma das partes nos dá ao todo;

Fonte: Elaborado pelo autor

2ª Etapa: Encontro 2 (E2) – 2ª semana

Antes mesmo de iniciarmos o diálogo, A_1 disse que comentou com o pai e este havia dito que era fácil, pois é “só medir nas “veradas” e no meio, depois fazer a conta”. A fala gerou questionamentos e discordâncias, pois não define nem os locais a serem medidos, nem a quantidade de medidas.

Após reunir o material passou-se a definir os locais para a fixação das estacas para os vértices do retângulo (Sistema Cartesiano). Para agilizar o trabalho a equipe (apesar da ausência do aluno A_6) se dividiu em duas. De posse do barbante e a fita colorida, os alunos A_1 e A_5 procuraram uma sombra e amarraram pequenos pedaços de fita colorida, demarcando cada metro do barbante, enquanto A_2, A_3 e A_4 ficaram para fixar as estacas que definiram os vértices do retângulo, conforme havia sido combinado no encontro anterior.

Depois de várias discussões e planejamento, os alunos definiram dois vértices adjacentes, cujo lado que os liga seria considerado o eixo Y. Fixaram três estacas em um deles e com martelo e pregos prenderam travessas dando rigidez para a estrutura. Em seguida, com uso de trena e calculadora (do celular) o aluno A_3, demonstrando certo domínio do Teorema de Pitágoras, instigou aos demais para usarem o teorema, afim de definir o ângulo reto (Fig. 3). Assim, A_3 coordenou esta atividade mostrando e explicando aos demais, pedindo que alguém anotasse os resultados, por não haver memória na calculadora.

Após concluídos os cálculos e marcações, fizeram uso de um esquadro para conferir o ângulo. Na sequência, estando A_1 e A_5 de volta ao grupo, PP solicita para que fosse repetido o procedimento de medida e cálculo para que todos interagissem, buscando entender tal princípio.

Figura 3 – Foto: Definição do ângulo reto

Fonte: Registro do autor

Agora, já com o barbante demarcado passaram a estendê-lo, usando como referência o ângulo reto do triângulo, estendendo o barbante nos prolongamentos dos catetos. Surgiu uma dúvida quanto ao nível dos barbantes, se interfere ou não na definição dos ângulos, bem como nas medições. Concluíram que o retângulo que servirá como base do plano cartesiano deve ficar no nível, até porque a ideia é medir a fundura a partir do barbante. Para isso buscou-se um nível (instrumento usado em construção) para fazer a verificação. Enquanto o instrumento foi localizado e trazido por A_3, o aluno A_4 constatou que poderíamos usar a própria água do açude para nivelar, bastando manter o barbante sempre à mesma altura da superfície da água. Momento em que PP sugere para que efetuasse tal procedimento a fim de auxiliar e conferir o que estava sendo demarcado. Com ajuda de dois colegas, estenderam um barbante atravessando o açude e mediram próximo às margens, confirmando o nivelamento. Como um dos ângulos retos já estava demarcado, discutiu-se como seria definido os demais, obviamente também retos. A primeira ideia foi de medir um outro ângulo, quando PP questiona: “qualquer um?”. Em uma resposta imediata, A_3 respondeu que sim, mas após alguns minutos de diálogo, ficou evidente que dois ângulos retos quaisquer não bastam para garantir os quatro retos, porém concluiu-se, que poderiam ser usadas as propriedades dos paralelogramos: lados opostos iguais, resultam ângulos opostos iguais ("como um já tá definido medindo 90º, os demais também vão medir 90º", disse A_3). Como houve consenso, escolheram o local dos dois ângulos adjacentes àquele já defino, mediram com o barbante o comprimento dos lados e passaram a aplicar a propriedade. Ainda para conferir (estendendo um barbante sobre o açude) usaram a propriedade específica do retângulo: diagonais iguais. "Se os quatro ângulos são retos as diagonais são iguais", disse A_4.

Definido os quatro vértices passaram a estender o fio, fixando-o nos vértices. Quando os quatro lados estavam prontos, com os fios esticados, o aluno A_4, enquanto circulava às margens, possivelmente conferindo algo, constatou um problema. Ele acusou que havia tido um erro na demarcação do barbante, pois a distância entre as fitas coloridas era mais de um metro. Constatou-se que o barbante usado, ao ser esticado, aumentou de comprimento e então as demarcações não ficaram corretas. Então, não vendo outra saída, optou-se pela substituição dos atuais barbantes por uma fina corda, destas de varais, que não estenderia tanto, em especial em dois lados opostos, onde seriam fixados os barbantes transversais para efetuar as medições, já que estes precisariam ficar mais esticados. Atividade esta que ficou para o próximo encontro. Porém antes de encerrarmos o encontro, preparamos a vara métrica, conforme Figura 4.

Figura 4 – Foto da vara métrica

Fonte: Registros do autor

Quadro 5 - Análise da 2ª Etapa: Encontro 2 (E2) – 2ª semana

Observações de aprendizagens	O que foi aprendido?	Categorias	Comentários
Marcação do Plano Cartesiano: os dois primeiros vértices do retângulo	- implantação do ângulo reto utilizando o Teorema de Pitágoras.	I – A – b, I – A – d, II – A – a, II – B – c.	- utilização de medidas de um triângulo pitagórico para marcar um ângulo reto no terreno. Uso de conhecimentos escolares (de um aluno) para resolver um problema prático (aplicação). Linguagem natural oral e representações reais (com materiais); - a iniciativa de socialização de conhecimento promove a aprendizagem significativa, além de propiciar o aperfeiçoamento da linguagem.
Determinação dos outros ângulos retos	- propriedade do paralelogramo: ângulos opostos iguais; - propriedade das diagonais do retângulo; - noção de retas paralelas e perpendiculares.	I – A – b, II – B – a, II – B – b.	- uso de propriedade matemática conhecida para colocar o quadrilátero em esquadro. Linguagem natural oral e representações reais; - discussão com retomada de conceitos e propriedades (paralelogramo, ângulos opostos, retângulo...).

Fonte: Elaborado pelo autor

3ª Etapa: 1ª Aplicação em sala (T1) – 3ª semana

Ao iniciar esta etapa, adaptamos o conteúdo da sequência S_2, incluindo nela o estudo do Teorema de Pitágoras, que não estava no planejamento inicial. A decisão foi devido ao surgimento da aplicação prática deste conteúdo no encontro de modelagem. Fizemos uma demonstração básica do teorema e em sequência registros e alguns exercícios sobre o tema (Anexo B). Entre falas destacamos: A_4: “se dobra uma terna, então vale a relação”; A_3: “sempre que vale a relação, o triângulo é retângulo?”

O próximo passo foi dar início a programação da sequência S_2, conforme planejada na pesquisa: conceituação de grandezas e unidades de medidas; medidas de comprimento; perímetro; identificação e apresentação de exemplos.

Quadro 6 – Análise da 3ª Etapa: 1ª Aplicação em sala (T1) – 3ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Retomada do Teorema de Pitágoras	- demonstração do Teorema de Pitágoras.	I – B – b, II – B – d.	- atividade coletiva (aula expositiva). Professor promove o diálogo e faz demonstração, independente da modelagem, visando a consistência lógica de uma proposição, usando materiais concretos; - uso de linguagem matemática.
Exercícios	Habilidades algébricas com a expressão do Teorema de Pitágoras.	II – B – b II – B – c.	- atividades individuais para desenvolver habilidades algébricas.
A_4: "se dobra uma terna, então vale a relação"; A_3: "sempre que vale a relação, o triângulo é retângulo?"	Triângulos pitagóricos: propriedades.	I – B – b I – B – c.	- socialização de conclusões tiradas a partir da exploração da definição de triângulo pitagórico, independentes da modelagem.

Fonte: Elaborado pelo autor

4ª Etapa: Encontro 3 (E3) – 3ª semana

Iniciamos este encontro com 5 alunos, já com confirmação de desistência do aluno A_6, sem apresentação de justificativa.

O primeiro passo foi substituir o barbante pela corda em três lados do retângulo, considerando que no quarto lado não haveria necessidade, visto que este serviria apenas para definir o paralelismo entre as linhas, bastando garantir distâncias demarcadas de metro a metro (processo este que foi revisado pelo grupo). Com a corda esticada os alunos passaram a demarcá-la com fita colorida, amarrando um pequeno pedaço a cada metro. Resolvido o problema, estendeu-se os barbantes de metro a metro, paralelos ao eixo Y fixando-os nas cordas.

Agora, usando um fio móvel (assegurado nas extremidades), paralelo ao eixo X, (usando as demarcações definidas de metro a metro) passou-se a efetuar as medidas das profundidades em cada ponto de cruzamento dos fios (vértices dos quadrados de 1m de lado). Inicialmente o aluno A_2 foi no bote, que passou a ser orientado (puxado) por dois dos alunos, com monitoria e fiscalização do professor, usando-se para isso duas cordas fixas nas extremidades do bote.

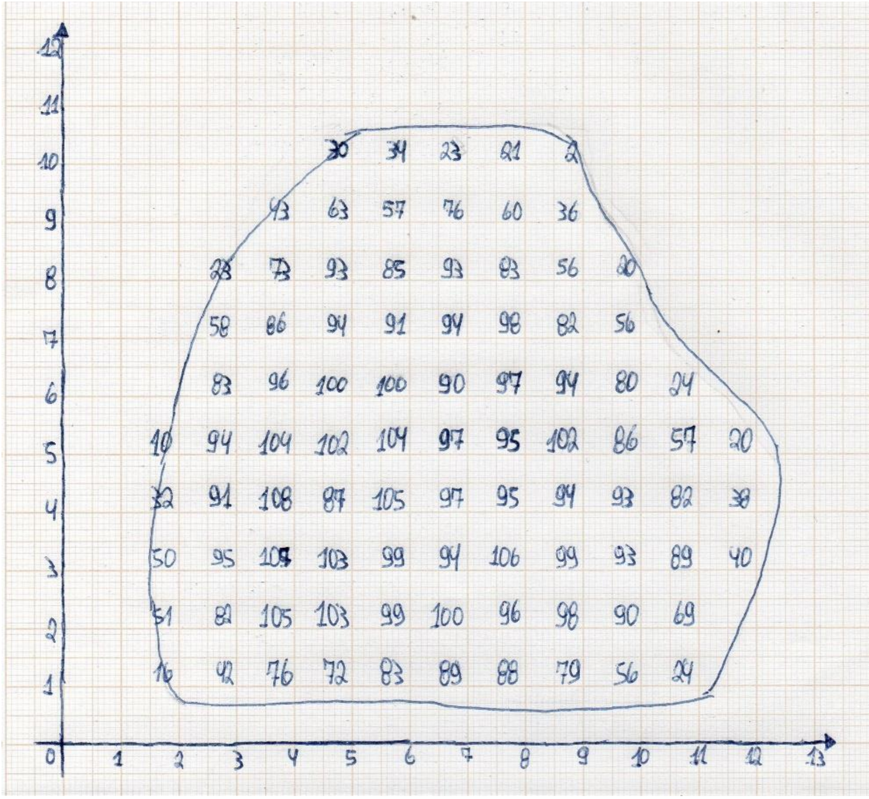
Após alguns experimentos e análises, o grupo decidiu medir (usando a vara métrica) a partir da superfície da água, considerando que seria mais prático. Para tanto A_2 com a vara na vertical, localizava o ponto de cruzamento dos fios e conferia a medida, conforme Figura 5.

Figura 5 – Foto da coleta dos dados

Fonte: Registros do autor

Para registrar os dados ficou responsável o aluno A_3 (já indicado no encontro anterior) que utilizou um papel quadriculado, traçou um plano cartesiano. Apresentou o papel para o grupo e disse: "decidi marcar as funduras direto em cima do ponto, no vértice de cada quadrado. Acho que é o jeito mais fácil. Vocês têm que me dizer as coordenadas" A_2 pergunta: "em metro ou centímetro?" A_3 responde: "tanto faz, só falem alto". Sentou-se em uma sombra e registrou os dados um a um em centímetros, posicionando os números nos seus respectivos vértices, conforme Figura 6. Durante as medições houve troca de funções, pois A_3 e A_4 também demostraram interesse de ocupar a função de A_2, no bote.

Figura 6 – Foto do registro dos dados



Fonte: Arquivos do grupo. Registros feitos pelo aluno A_3

Quadro 7 – Análise da 4ª Etapa: Encontro 3 (E3) – 3ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Medidas das profundidades	- definir linguagens e procedimentos a serem utilizados;	I – A – c, I – A – d,	- ações coletivas colaborativas de modelagem, com funções diferentes de cada aluno, com aplicações de plano cartesiano;
Registros dos dados	- definir técnica de registro de dados. - adaptar saber já interiorizado às novas situações.	II – A – c, II – A – d, II – B – d.	- criação de um tipo de representação dos dados (profundidades/“funduras”); - o uso de linguagem conceitual (“ponto, vértice, coordenadas...”)

Fonte: Elaborado pelo autor

5ª Etapa: 2ª Aplicação em sala (T2) – 4ª semana

Durante as aulas desta semana foram trabalhados conteúdos relativos a S_2 (com inclusão do estudo do círculo), através de aulas expositivas com discussões, conceituações, demonstrações de fórmulas e exercícios. Os conteúdos trabalhados foram: cálculos de áreas de polígonos regulares e irregulares; elementos e área do círculo; volume de um cubo.

O conteúdo não era totalmente novo e alguns alunos já possuíam um bom domínio do assunto. Porém outros, apesar de terem noção dos conceitos, apresentaram dificuldades nos procedimentos do cálculo. As aulas transcorreram em um ritmo normal, com algumas discussões interessantes nas demonstrações (entre elas a da presença do triângulo como referência, ...). Um ponto que gerou curiosidade e deu um certo destaque foi a fórmula de Herão, pela aplicabilidade em qualquer triângulo a partir de seus lados. Para abordá-la PP levantou uma situação: “agora consideramos uma horta com formato triangular, com lados medindo 8m, 6m e 10m, qual a área de terra?”. Quase imediatamente, A_3 verbaliza a resposta “é um triângulo retângulo, o 10 é a hipotenusa, então o 6 e o 8, um é base e outro altura, logo a área é 6 vezes 8, dividido por 2, o que vale 24”. PP: “verdade. Ficou muito fácil, vamos considerar outra situação, agora as medidas são: 6, 10 e 12m”. Após alguns minutos alguém da turma constatou que tinha uma outra fórmula no livro (referindo-se a fórmula de Herão) a qual passou a ser analisada e testada, a partir de medidas conhecidas (ternas pitagóricas) e desenhos de triângulos feitos no caderno, comparando com a fórmula básica (base x altura / 2). A fórmula foi registrada no caderno e alguns exercícios foram resolvidos com aplicação desta (Ver Anexo C e Anexo D). Entre as falas diretas destacamos: “essa é boa, não precisa se preocupar com ângulos”, “mas se sabe a altura, a outra é mais fácil”. Em relação aos demais polígonos, deduzimos as fórmulas e resolvemos atividade. Muitas atividades foram resolvidas em grupos, sendo que cada grupo tinha pelo menos um dos alunos da pesquisa. Algumas atividades são mostradas no Anexo E.

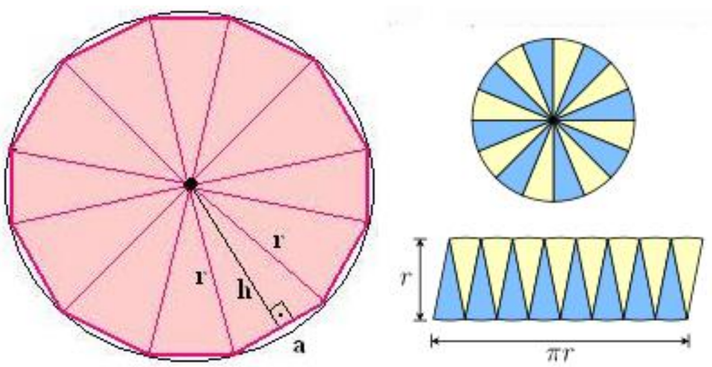
No estudo do círculo chamou a atenção o reconhecimento do valor do pi (π) e suas aproximações e perceber que esse número irracional tinha presença efetiva no círculo. Outro fato interessante, que gerou discussão e curiosidade, foi a demonstração da fórmula para a área do círculo. “Que tal cortar em pedaços?” (sugere alguém da turma). Aos poucos os passos foram conduzidos pelo professor, provocando discussões. Primeiramente partindo da ideia de “n” triângulos congruentes (com n→ ∞), teremos altura tendendo ao raio e a base “a” tendendo a zero (Fig. 7 (a)). Com isso discute-se a ideia de limites e obtém-se a equação (1):

temos: $$\mathrm{Ac} = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} \ ,$$

como $$n \cdot a = C = 2\pi \cdot r,$$

então: $$Ac = \frac{2\pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi r^2 \tag{1}$$

Figura 7 – Ilustrações auxiliares para a fórmula da área do círculo



a) b)

Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br e https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rea

Uma segunda maneira foi também apresentada e discutida. Nesta, dividindo o círculo em setores iguais, imaginando infinitos setores, “triângulos” (em número par), podemos ter a área do círculo correspondente a área do paralelogramo representado na Figura 7(b). Neste, a base corresponde à metade do comprimento da circunferência e a altura equivale ao raio. Assim obtemos a equação (2) que é equivalente a (1):

$$Ac = base \ \cdot altura = \frac{2\pi \cdot r}{2} \cdot r = \ \pi \cdot r^2 \qquad (2)$$

Quadro 8 - Análise da 5ª Etapa: 2ª Aplicação em sala (T2) – 4ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Atividade S_2	- caracterizar e classificar polígonos; - deduzir e aplicar fórmulas de cálculo da área de polígonos.	I – B – a, I – B – b, I – B – c, II – B – b, II – B – c, II – B – d.	- aulas expositivas com uso de material concreto (figuras em madeira). Diálogo com dedução e aplicação de fórmulas; - quadriláteros de lados iguais têm diagonais perpendiculares; - atividades coletivas e individuais demonstrando habilidade de cálculo, independentes da modelagem.
A_4: “essa é boa, não precisa se preocupar com ângulos”; A_3: “mas se sabe a altura, a outra é mais fácil”	- aplicar fórmula de Herão para área de triângulo.	I – B – c, II – B – a.	- questão colocada no grupo, sem demonstração, mas com objetivo de utilização em modelagem e familiarização com a linguagem e termos matemáticos (semi-perímetro...).

Decomposição de qualquer polígono em triângulos	- área do polígono = soma das áreas dos triângulos (conservação da área).	II – B – b, II – B – c, II – B – d.	- atividades que ensinam conteúdos que serão úteis para o problema modelado.
Estudo do círculo: seus elementos e cálculo da área	- aproximação do valor do π; - elementos de um círculo; - deduzir e aplicar fórmula da área do círculo.	I – B – a, I – B – c, II – B – a, II – B – b, II – B – c, II – B – d.	- atividade dialogada com a classe, com condução pelo professor; registro em linguagem matemática (desenho, símbolos, expressões e equações). Linguagem oral (em especial de dois alunos) o diálogo é fortalecido com expectativa de novas aprendizagens. O nível de abstração com a ideia de limite ora tendendo a zero, ora ao infinito foi fundamental na generalização; - atividade de exercícios para execução individual; revisão, adaptação de linguagem e aplicações.

Fonte: Elaborado pelo autor

6ª Etapa – Encontro 4 (E4) – 4ª semana

Após concluir as medidas, ocupamos uma sala de aula e iniciamos uma discussão de como trabalhar com os dados coletados, a fim de resolver o problema.

O aluno A_3 sugeriu a construção de uma maquete do açude, com medidas proporcionais, depois enchê-la de água e a partir desta quantidade descobrir a real quantidade existente no açude. Imaginamos a maquete, discutimos possíveis dimensões, formato e material que seriam usados para confeccioná-la. Vendo que as ideias indicavam para um rumo muito trabalhoso e de grande complexidade, interferindo PP levanta uma dúvida: “imaginem um grande açude, com proporções bem maiores que este, será que seria viável fazer uma maquete de todo o açude, para calcular o volume de água? Haveria material e habilidades para isso? Acredito que maquete é uma boa ideia, dá noção do que estamos modelando, mas fazer uma maquete do açude inteiro parece ser muito trabalhoso”.

A partir desta intervenção passamos a discutir que teríamos que encontrar uma forma que poderia ser aplicada na prática, de forma não muito complexa e que nós faríamos um estudo dos possíveis erros que resultariam desta prática, podendo validá-la com as devidas ressalvas. “Que tal fazer só de uma parte, fazer maquete só de um pedaço?” sugere A_3. Da discussão decide-se em fazer um recorte, tomando como referência algumas das medidas, analisando colunas de água com base quadrada (quadrado de 1 metro de lado) e a partir daí fazer maquetes, medidas de volume e cálculos.

Com a ideia formalizada, passamos a confeccionar maquetes, usando canudinhos e cola quente. Confeccionamos supostas colunas (em forma esquelética), partindo de uma face quadrada (relativa a superfície da água – dados coletados) e apelidamos estas estruturas de *prismóides*[18], devido ao formato estranho, próximo de um prisma, porém com uma ou mais faces (fundo do açude) não paralelas à superfície, podendo inclusive não serem planas, conforme Figura 8.

Figura 8 – Foto de confecção de prismóide

Fonte: Registro do autor

Após a confecção de três prismóides, com características diferentes, observamos que eles poderiam ser decompostos em diferentes poliedros (se considerarmos todas as faces planas), conforme definiu o aluno A_3. Assim teremos prismas e pirâmides.

Analisando atentamente, observamos que a partir da base quadrada, até o comprimento da menor *aresta vertical*[19] (para os três prismóides), temos a formação de um prisma quadrangular reto, cujo volume é fácil de calcular ("basta fazer a área da superfície *vezes* a menor aresta", disse A_3). Porém, a partir dali, considerando as diferenças de comprimentos das arestas, observamos uma composição de pirâmides (com bases trapezoidais e/ou triangulares) dependendo das características do prismóide, podendo ainda, em um dos casos, em que as

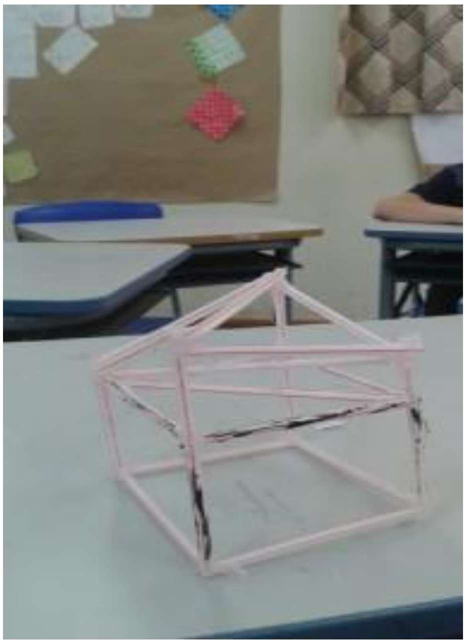
[18] Optamos chamar de prismóide qualquer coluna de água (sólido geométrico) formada a partir de algum polígono da superfície com arestas verticais paralelas no sentido do fundo do açude. Esta opção tem o objetivo de simplificar expressões.

[19] Cada profundida registrada na coleta de dados corresponde a uma aresta vertical. Para simplificar expressões, a partir deste momento quando usarmos a expressão aresta, não acompanhada por alguma especificação, deve-se entender como aresta vertical ou profundidade (valendo também para o plural).

arestas vizinhas são iguais duas a duas, considerar apenas um prisma de base triangular. Para este caso, em particular, vimos que poderíamos considerar a figura completa como prisma de base trapezoidal.

Para facilitar a análise de cada figura, separamos os três prismóides confeccionados, em três casos, ou seja: 1º caso: arestas diferentes com maiores vizinhas; 2º caso: arestas diferentes com maiores opostas; 3º caso: arestas vizinhas iguais duas a duas. Além disso, colamos algumas arestas transversais que ajudaram na visualização, conforme pode-se observar na Figura 9, relativa ao 2º caso.

Figura 9 – Foto do prismóide do 2º caso



Fonte: Registro do autor

Depois de caracterizar os três casos, passamos a avaliar cada um separadamente. Discutimos os procedimentos que adotaríamos para calcular e verificar na prática a veracidade dos valores. Como poderíamos medir a capacidade de cada prismóide?

Após discussões no grupo, decidiu-se que transformaríamos as maquetes em recipientes, contornando-as com plástico e assim poderíamos enchê-las de água e medir suas capacidades. Ficou acordado que o aluno A_3 traria plástico (do tipo “filme de PVC”[20]) no próximo encontro para tal procedimento.

Antes de finalizarmos o encontro avaliamos a maquete do 1º caso, concluímos que, sua decomposição, resultava em um prisma de base quadrada, ou retangular (conforme o

[20] Plástico usado na cozinha para proteger alimentos.

posicionamento) e duas pirâmides com base trapezoidal. “Quanto ao prisma ok, mas como definir o volume das pirâmides?”, “isso nunca estudamos!”, enfatiza o aluno A_3. Diante disso ficou estabelecido que encerraríamos o encontro e ficaria uma pesquisa como atividade de casa: como calcula-se o volume de uma pirâmide?

Quadro 9 – Análise da 6ª Etapa – Encontro 4 (E4) – 4ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Procedimentos técnicos para a solução do problema de investigação	- superar a ansiedade da resposta rápida; - caracterizar e projetar objetos e imagens; - avaliar casos particulares.	I – A – c, I – A – d, II – B – d.	- pensar em colunas de água e fazer estudos de casos particulares; - diálogo com decisão de construção de maquetes. Os prismóides.
Maquetes sugeridas pelo A_3	- Escala, volumes de sólidos com medidas proporcionais.	I – A – c, I – A – d.	- Proposição de um aluno para o grupo, portanto, atividade coletiva com desenvolvimento de linguagem matemática. Discussão da hipótese. Atividade matemática sobre o problema de modelagem, tipicamente de aplicação de conceitos já conhecidos, em linguagem natural.
Cálculo do volume de água por decomposição desse em prismóides	- decomposição do sólido complexos e sólidos simples; - Volume de prismas; - Volume de sólidos irregulares;	I – A – a, I – A – b, I – A – d.	- Intervenção de PP e discussão coletiva dos procedimentos, em atividade de modelagem. Aplicação de conceitos de prismas e conservação do volume. - cálculo de volume, ainda sem linguagem matemática, mesmo que com argumentação oral. A construção de maquetes ainda está no plano da linguagem concreta, mas permitiu a visualização do sólido e inspirou um cálculo aproximado do volume.
Avaliação do volume medindo a quantidade de água	- relação capacidade x volume	I – A – d.	- Trabalho coletivo de proposições e argumentações, com dúvida sobre o resultado via cálculo, ainda não escrito em linguagem matemática: comprovação empírica.
“isso nunca estudamos”. Volume da pirâmide	- volume da pirâmide	I – B – a, I – B – b.	- volume de pirâmide é algo novo e sugere pesquisa, portanto ação externa à modelagem.

Fonte: Elaborado pelo autor

7ª Etapa – 3ª Aplicação em sala (T3) – 5ª semana

Nesta semana foram concluídos os conteúdos e atividades da sequência S_2, além de resoluções e correções de exercícios, bem como efetuada avaliação. Foram abordados os conteúdos relativos à tabela de transformação de unidades (comprimento, área, volume, capacidade) e Capacidade X Volume (relações entre: kl, l e ml com m³, dm³ e cm³).

Estes conteúdos foram abordados de forma bastante tradicional (conceito – técnica – exercício), com intuito de fazer comparações entre os conceitos e unidades estabelecer técnicas práticas de transformações, usando tabela de múltiplos e submúltiplos.

Quadro 10 - Análise da 7ª Etapa – 3ª Aplicação em sala (T3) – 5ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Identificação de grandezas e medidas e Sistemas Internacional de medidas	- relação entre as grandezas e suas respectivas unidades; - abreviações de unidades de medidas; - transformações de unidades: múltiplos e submúltiplos.	I – B – a, II – B – a, II – B – b, II – B – c, II – B – d.	- desenvolvimento de técnicas que possibilitam maior agilidade nas aplicações; - resolução de exercícios.

Fonte: Elaborado pelo autor

8ª Etapa – Encontro 5 (E5) – 5ª semana

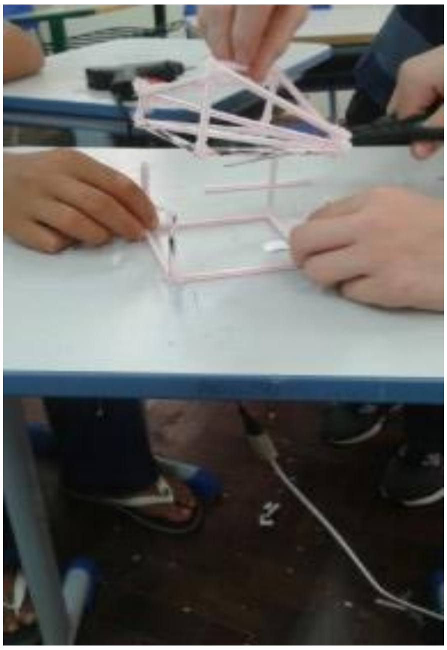
Iniciamos o encontro socializando a atividade de casa onde os alunos A_3 e A_4 disseram ter pesquisado na internet e discutido, concluindo que o volume de uma pirâmide é determinado pelo produto de um terço da área da base com a altura da pirâmide. Ansiosos estes já partiram para as medições. Usando uma régua mediram e anotaram as medidas de cada prismóide. Assim que liberaram a primeira maquete, os outros alunos já passaram o plástico ao redor, reforçando com fita de empacotamento, transformando a maquete em um recipiente e furaram em uma das superfícies para colocar a água, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Foto da maquete (recipiente)

Fonte: Registros do autor

Para a maquete do 3º caso repetiu-se procedimento feito com a maquete do 1º caso. Já para a do 2º caso, que foi feito em tamanho maior, os alunos acataram a sugestão do PP e cortaram a parte que corresponde ao prisma para facilitar na interpretação da figura que sobrou e a posterior transformação desta em recipiente, conforme Figura 11.

Figura 11- Foto do prismóide: 2º caso



Fonte: Registros do autor

Agora, para medir a capacidade de cada recipiente (estrutura) o aluno A_3, que mora próximo da escola, prontificou-se a ir em casa buscar um medidor usado na cozinha (copo graduado). Assim, o grupo conferiu a capacidade destes recipientes, conforme mostra a Figura 12, registrou os valores e passou a avaliar as dimensões que estavam anotadas, a fim de efetuar os cálculos.

Figura 12 – Foto medindo capacidades

Fonte: Registros do autor

Antes de começarem os cálculos o aluno A_3 demonstrou não estar muito convencido com a fórmula do volume da pirâmide, que eles haviam apresentado e perguntou: “por que dividir a área da base por três?” Diante da indagação, optamos então por uma pesquisa para sanar a dúvida. Em um livro didático de Matemática do Ensino Médio, encontramos uma demonstração da tal fórmula. (Apêndice A).

Como no livro constava que um prisma poderia ser dividido em três pirâmides de mesmo volume, e, na sala onde estávamos havia uma pequena caixa de papelão, oportunizando uma rápida experiência sobre o assunto, solicitamos um estilete, junto a secretaria da escola, e tentamos recortar a caixa (prisma retangular reto) de modo a formar três pirâmides de mesmo volume. Não houve muito sucesso neste recorte, sendo observado que haveria mais praticidade se o prisma fosse de base triangular, proposta que ficou para ser estudada e retomada no próximo encontro. Porém, diante da explicação apresentada no livro didático, depois de alguns debates, já com tempo esgotado, todos ficaram convencidos do motivo da divisão por três, ficando os cálculos para o próximo encontro.

Quadro 11 - Análise da 8ª Etapa – Encontro 5 (E5) – 5ª semana

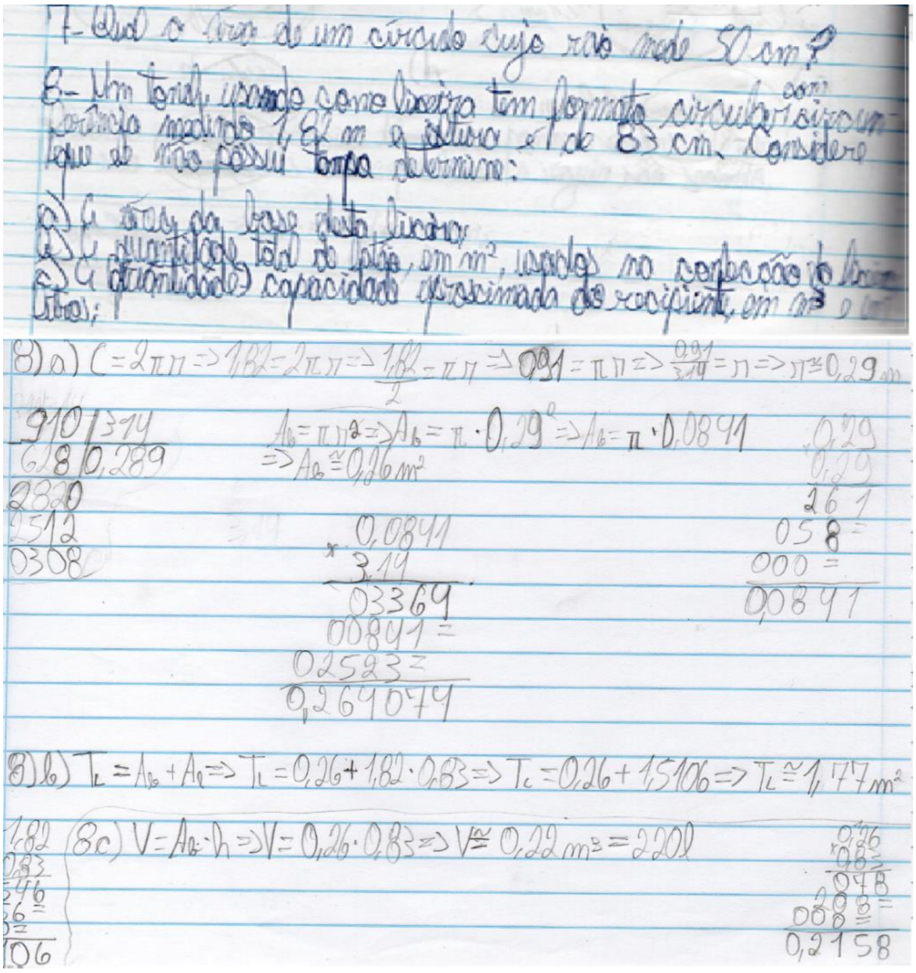
Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Medida da capacidade real de cada "prismóide" (recipiente)	- técnica de medida da capacidade; - registro de medida: ml, l, cm³ e dm³.	I –A – d, I – A – c.	- atividade coletiva e prática, tipicamente de aplicação e laboratório; - atividade coletiva associada ao problema de modelagem e com uso de linguagem matemática.
Cálculo do volume de poliedros	- volume de prisma; - dedução da fórmula do volume da pirâmide.	I – A – a, I – A – d, II – B – a.	- discussão e aplicação de fórmulas; - atividade de dois alunos que buscaram independentemente a demonstração. Presença efetiva do professor como mediador.

Fonte: Elaborado pelo autor

9ª Etapa – 4ª Aplicação em sala (T4) – 6ª semana

Nas aulas desta semana iniciamos um estudo sobre sólidos geométricos (S_3). Após alguns questionamentos introdutórios, apresentamos um material impresso com figuras de diversos sólidos geométricos, bem como algumas conceituações. Este material foi montado pelo PP a partir da internet, em pesquisa Google: "imagens de sólidos geométricos" (Ver Apêndice B e Apêndice C). A partir das figuras, foi solicitado a cada aluno da turma para que listasse os nomes de cada figura que conhecia. Posteriormente, passou-se a socializar as respostas, através de diálogo, identificando as características das representações geométricas, justificando as nomenclaturas. Discutiu-se conceitos de convexidade, bem como a caracterização de poliedros regulares. A partir de cada sólido (com visualização das figuras) passa a definir seus elementos (aresta da base, aresta lateral, altura...). Nas aulas desta etapa, ainda vimos como calcular as áreas da base, volumes de prismas e cilindros, e a partir de então, retomando assuntos anteriores, aplicados a novas situações, resolveu-se em grupos, uma lista de exercícios envolvendo área da base, área lateral, área total, volume de prisma e de cilindro. A maioria dos exercícios foi elaborada pelo professor, porém alguns o professor lançava o tema e os alunos ajudavam elaborar os problemas. É o caso da questão número 8, conforme Figura 13. Tal objeto foi trazido da área coberta para a sala e os alunos efetuaram as medidas e auxiliaram na elaboração do problema. Já quando eles próprios (individualmente) tinham que criar problemas a partir de um tema, observou-se bastante dificuldades. Outras atividades (recortes dos registros de alunos da classe) constam no Anexo F. Muitas das atividades foram discutidas e resolvidas em grupos.

Figura 13 – Questões referentes a S_3



Fonte: Caderno de aluno

Quadro 12 – Análise da 9ª Etapa – 4ª Aplicação em sala (T4) – 6ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Estudo sobre sólidos geométricos (S_3)	- se poliedro, se convexo, se regular...); - elementos característicos (vértices, arestas da base, arestas laterais, apótemas, altura).	I – B – a, II – B – a, II – B – b, II – B – c.	- A classificação dos objetos foi dialogada e coletiva, independente da modelagem e envolveu conceitos. - os exercícios foram resolvidos individualmente, com o objetivo de desenvolver a linguagem e capacidade de resolver problemas escritos de cada um;

Resolução de exercícios (prismas e cilindros)	- calcular área da base, área lateral, área total e volume de prismas e cilindros; - Elaborar problemas.	I – A – a, I – B – a, II – B – b, II – B – d.	- contextualizações e socializações; - resolução de exercícios em parceria; - habilidades individuais de cálculos; - criatividade na elaboração de problemas.

Fonte: Elaborado pelo autor

10ª Etapa – Encontro 6 (E6) – 6ª semana

Iniciamos este encontro retomando a demonstração prática da fórmula do volume da pirâmide. O PP apresenta um prisma de base triangular, montado a partir de uma caixa de papelão. O prisma foi cortado de tal forma a formar três pirâmides de mesmo volume (Fig. 14). Desmontando e montando o prisma várias vezes, ficamos todos convencidos de que de fato ele estava dividido em três pirâmides de mesmo volume, pois tratava-se de sólidos com bases iguais e alturas iguais, justificando-se, assim, a divisão por três apresentada na fórmula do volume da pirâmide.

Figura 14 – Volume de pirâmide: pesquisa e prática

Fonte: Registros do autor

Aprofundando a discussão sobre volume de pirâmides, questionou-se se a fórmula poderia ser generalizada para pirâmides com bases não triangulares. Após algumas análises, observamos juntos que, se o polígono **ρ**, que define a base de um prisma de altura ***h***, tem ***n*** lados, então este prisma pode ser decomposto em ***n-2*** prismas triangulares de mesma altura (*h*), cuja a terça parte da soma de seus volumes corresponde ao volume da pirâmide de altura ***h***, que tem como base o polígono **ρ**. Ou ainda, de forma mais direta, podemos observar que todo o polígono **ρ**, com *n* lados, pode ser decomposto ***n-2*** triângulos e, sendo **ρ** a base da pirâmide de altura *h*, esta pode ser decomposta em ***n-2*** pirâmides triangulares (tetraedros) com mesma altura *h*. Assim, temos que o volume total da pirâmide de base **ρ,** corresponde a soma dos volumes dos tetraedros formados, conforme equação (3).

$$V_\rho = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots \Rightarrow V_\rho = \frac{A_1 \cdot h}{3} + \frac{A_2 \cdot h}{3} + \frac{A_3 \cdot h}{3} + \cdots \tag{3}$$

Colocando *h* em evidência obtém-se:

$$V_\rho = \left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_1}{3} + \frac{A_1}{3}\right) \cdot h = \frac{(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots) \cdot h}{3} \tag{4}$$

e como
$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = A_\rho, \tag{5}$$

temos que:
$$V_\rho = \frac{A_\rho}{3} \cdot h \tag{6}$$

Com isso, assumimos que para qualquer pirâmide, temos seu volume definido pelo produto de um terço da área da sua base pela sua altura (Equação (6)).

Dúvidas sanadas, usando as medidas das estruturas, feitas no encontro anterior, os alunos passaram a calcular os respectivos volumes para posteriormente comparar com aqueles medidos na prática.

Para calcular as áreas das bases, os alunos lembraram dos cálculos feitos em sala sobre áreas de polígonos (S_2). Para as bases retangulares usaram: $A = b \cdot h$; para os trapézios usaram: $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$; já para a base triangular usaram: $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

No 1º caso (lados maiores vizinhos), cuja capacidade medida foi de 225ml, que corresponde a 225cm³, para efetuar os cálculos dividiram em três poliedros, sendo um prisma de base quadrada e duas pirâmides trapezoidais, conforme já constatado anteriormente. Neste caso o cálculo gerou um valor de 218,75cm³ (ver Anexo G) e, portanto, a diferença em relação a medida foi muito pequena, de aproximadamente 2,8% para menos.

No 2º caso, que trata de duas pirâmides trapezoidais, um tetraedro e um prisma, após calculados os volumes, observou-se que o volume das três pirâmides somadas (sem juntar o prisma) apresenta um erro de aproximadamente 7,4% para menos, sendo o valor da medida de

365cm³, enquanto a conta foi de 338,3cm³. Porém, comparando os volumes totais, o erro foi de, aproximadamente 3%.

No 3º caso o cálculo tornou-se muito simples, pois tratou-se de um prisma quadrangular e um prisma triangular, ou simplesmente um prisma trapezoidal. Por impulso os alunos dividiram em dois prismas chegando ao volume de 134,85cm³, sendo praticamente nula a diferença entre o cálculo e a medida.

Voltando ao 2º caso, como o formato do fundo é imprevisível, alguém levantou a possibilidade de não haver o tetraedro na composição do tal prismóide, então este teria características diferentes. Ao calcularmos este caso específico, a partir de outra maquete (Fig. 15), constatamos uma diferença de em torno 7% a menos do volume medido. A partir desta discussão, como este formato é muito improvável, optou-se por ignorar este caso, podendo-se considerar um erro entre todos os casos, de até 5%.

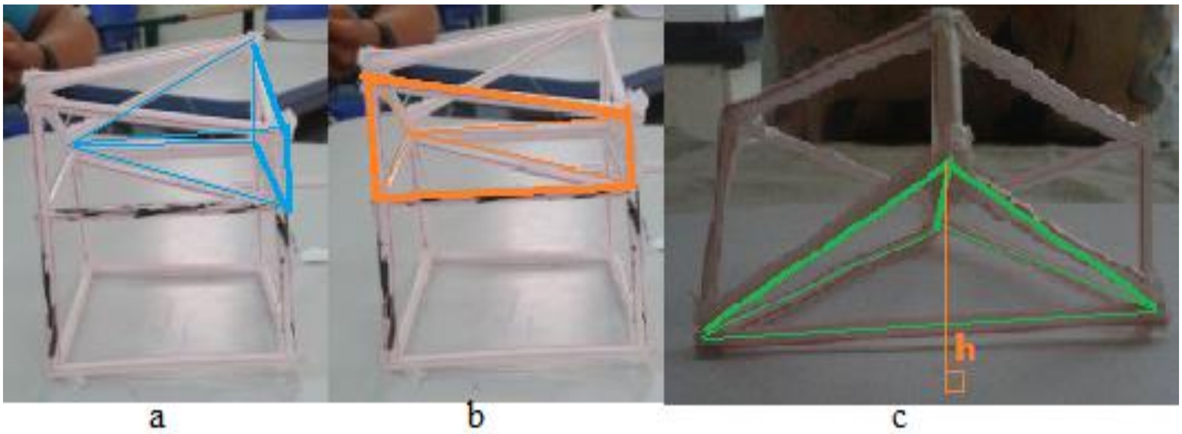
Figura 15 – Foto maquete 2 do 2º caso

Fonte: Registros do autor

Um próximo passo no estudo surgiu da preocupação de usar valores reais. Para tanto foi necessário que o PP fizesse algumas intervenções: "como medir as arestas das pirâmides e prismas formados dentro da água? Teremos que calcular os volumes de todos os prismóides para obtermos o volume total? Os prismóides terão outros formatos, ou todos terão as características daqueles que analisamos?"

Passamos a analisar a primeira pergunta de como saber as medidas necessárias para os cálculos dos volumes, a partir dos dados coletados, considerando a base quadrada de 100cm de lado (quadrado formado por quatro pontos vizinhos). Após um tempo de análise e reflexão (sempre visualizando as maquetes), os alunos concluíram que nos casos das pirâmides com bases trapezoidais, bastava subtrair das três maiores arestas verticais, a medida da menor e assim teriam as bases dos trapézios, conforme podemos ver nos detalhes da Figura 16(a) e 16(b), sendo que as alturas dos trapézios e das pirâmides é sempre 100cm (definidas pelas distância das abscissas e ordenadas), que corresponde à medida da aresta da base do prisma quadrangular.

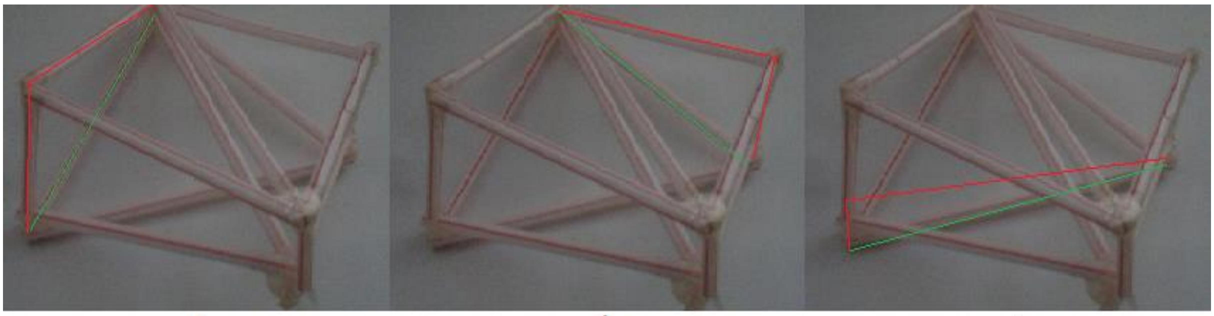
Figura 16 – Foto maquetes com partes realçados – 2º caso



Fonte: Registros do autor
Nota: Realces feitos pelo autor para facilitar a visualização das três pirâmides mencionadas no texto

A situação ficou mais complexa para a terceira pirâmide, relativa ao 2º caso que trata-se de um tetraedro conforme destaque na Figura 16(c). O aluno A_3 observou que poderia ser aplicada a fórmula de Herão no cálculo da área da base (trabalhada em sala recentemente em S_2). "Ah os lados saem por Pitágoras" (conclui A_4). Observou-se que uma destas arestas da base corresponde à hipotenusa quando um dos catetos mede 100cm e o outro mede a diferença entre a maior e a menor aresta vertical (profundidades), conforme Figura 17(a), a outra corresponde à hipotenusa quando um dos catetos é 100cm e o outro é a diferença entre a segunda maior aresta vertical e a menor (Fig. 17(b)), e, por fim, a terceira aresta do triângulo corresponde à hipotenusa quando um dos catetos é a diagonal do quadrado de lado 100cm e o outro é a diferença entre as duas maiores arestas verticais (Fig. 17(c)).

Figura 17 – Foto com triângulos retângulos destacados



a b c

Fonte: Registros do autor

Nota: Realces feitos pelo autor para facilitar a visualização dos triângulos mencionados no texto

“E como determinar a altura dessa pirâmide?” (A_2 falando do tetraedro da Figura 16(c)). “De fato, a maquete não permite a visualização, não é imediata” conclui PP. Porém, com o tempo esgotado, decidimos marcar novo encontro (ainda na mesma semana) para resolver a situação, ficando como atividade de casa que cada fizesse um estudo do caso.

Quadro 13 – Análise da 10ª Etapa – Encontro 6 (E6) – 6ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Interpretação e dedução da fórmula do volume de pirâmides	- justificar a fórmula do volume da pirâmide.	I – B – a, I – B – b, I – B – c.	- atividade coletiva com acompanhamento/direcionamento do PP, de natureza essencialmente matemática (demonstração), envolvendo conceitos, propriedades e linguagem matemática simbólica escrita; - generalização, a partir do debate e retomada de conteúdo já estudado (todo polígono de *n* lados pode ser decomposto em *n-2* triângulos).
Medidas de arestas. Atenção nas medidas e habilidades de cálculo	- medir arestas necessárias e calcular volume (ou capacidade).	I – A – c, II – B – c, II – B – d.	- atividade prática coletiva, relacionada à modelagem e as questões de precisão de medida.
Procedimentos finais para determinar o volume do açude	- classificação dos sólidos; - atribuição de fórmulas para o volume de cada sólido.	I – A – b, I – A – c, I – A – d.	- atividade coletiva vinculada ao objetivo da modelagem, usando linguagem matemática e alto grau de organização.

Fonte: Elaborado pelo autor

11ª Etapa – Encontro 7 (E7) – 6ª semana

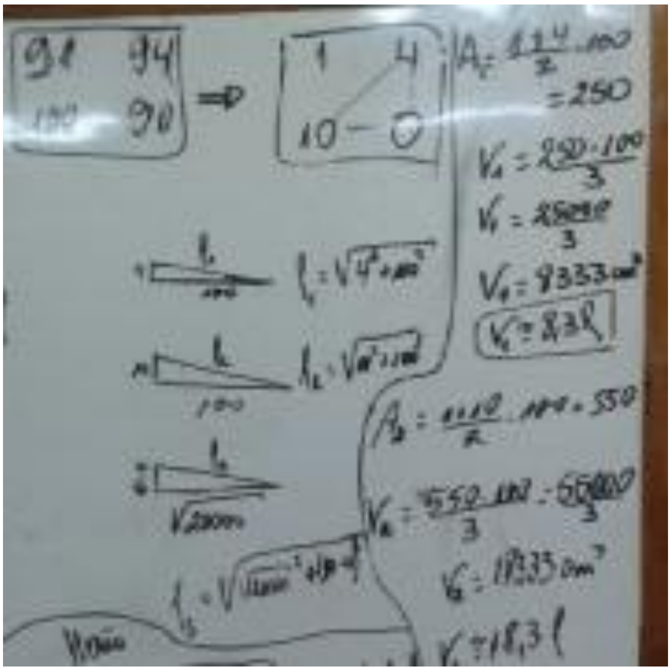
Ao iniciar este encontro, PP sugere um caso particular para analisar e calcular, usando valores reais de um determinado prismóide com as características daquele que estávamos analisando por último (2º caso) no encontro anterior. Os alunos escolheram uma quadra: 91, 94, 100 e 90.

Como havíamos discutido no encontro anterior, este caso forma um prisma e três pirâmides. Para o volume do prisma, basta multiplicar a menor aresta por 10.000cm² (que corresponde a área da base). No caso:

$$V = 90 \cdot 10.000 = 900.000 \Rightarrow V = 900.000cm^3 \equiv 900l$$

Por outro lado, para as pirâmides com base trapezoidal e altura de 100cm os volumes foram calculados no quadro, em conjunto, dando os valores aproximados de 8,3ℓ e 18,3ℓ, conforme coluna da direita, na Figura 18.

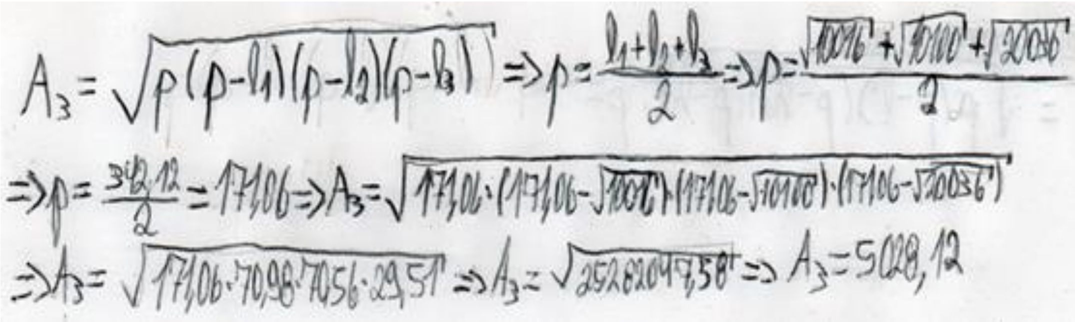
Figura 18 – Foto de cálculos desenvolvidos no quadro (volume de pirâmide trapezoidal)



Fonte:Resgistros do autor

A terceira pirâmide, que tem a base triangular (tetraedro), traz o complicativo da altura, pendência a ser resolvida. Para a área da base, usamos Pitágoras inicialmente para encontrar as arestas e Herão para a área, conforme discutido no encontro anterior (Fig. 18 e 19). Com uso de calculadora, os resultados saíram com certa facilidade, sendo que o aluno A_3 desenvolveu no quadro com o auxílio e fiscalização dos colegas.

Figura 19 – Foto de cálculos – área do triângulo (Herão)

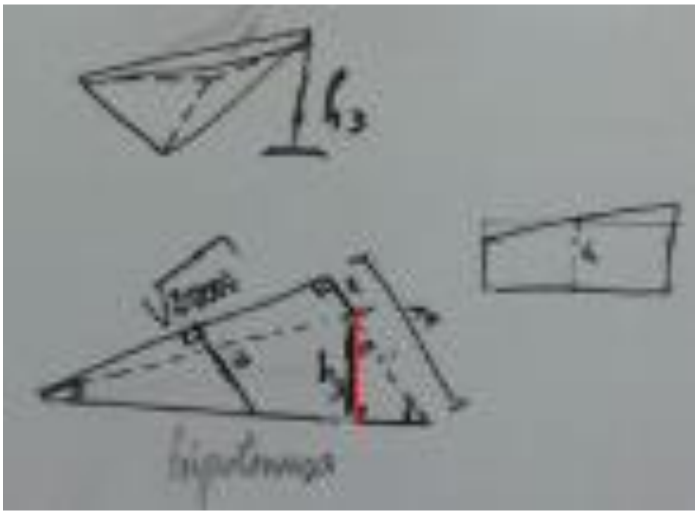


Fonte: Resgistros do autor

Focando no problema da altura, como havia sido proposto um estudo em casa do tal problema, o aluno A_3 apresentou uma possível saída a partir da semelhança de triângulos.

Chamando de h_3 (destaque na Figura 20) a altura do tetraedro, A_3 buscou mostrar na lousa, através do esboço, o que havia observado.

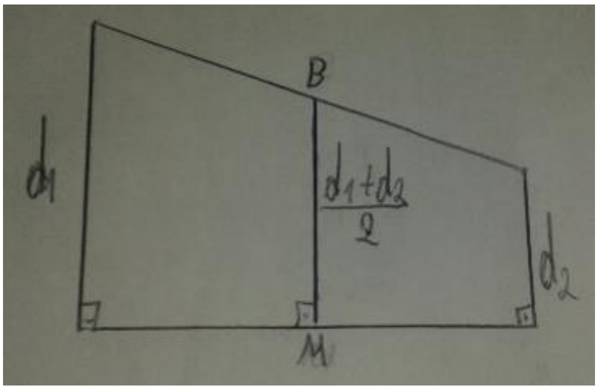
Figura 20 – Foto de esboço feito no quadro



Fonte: Resgistros do autor

Colocando a maquete sobre a mesa, A_3 mostrou inicialmente a existência de um trapézio retângulo com bases definidas a partir das duas diferenças das maiores arestas verticais com a menor (que passaremos chamá-las de d_1 e d_2), e que tem como lados não paralelos a diagonal do quadrado de lado 100cm (formando ângulos retos com d_1 e d_2) e o segmento de reta que está contido na base da pirâmide, ligando as outras extremidades de d_1 e d_2. Observou que paralelo à d_1 e d_2, o segmento $\overline{MB}$, (que chamou inicialmente de h, quando esboçou seu raciocínio na Figura 20) que liga o ponto médio (M) da diagonal do quadrado ao ponto médio (B) da hipotenusa do triângulo ACI (ver Figura 22) corresponde à média aritmética de d_1 e d_2, conforme Figura 21. Para isso, A_3 usou inclusive, argumentos do teorema da base média, que tem estudado em curso externo.

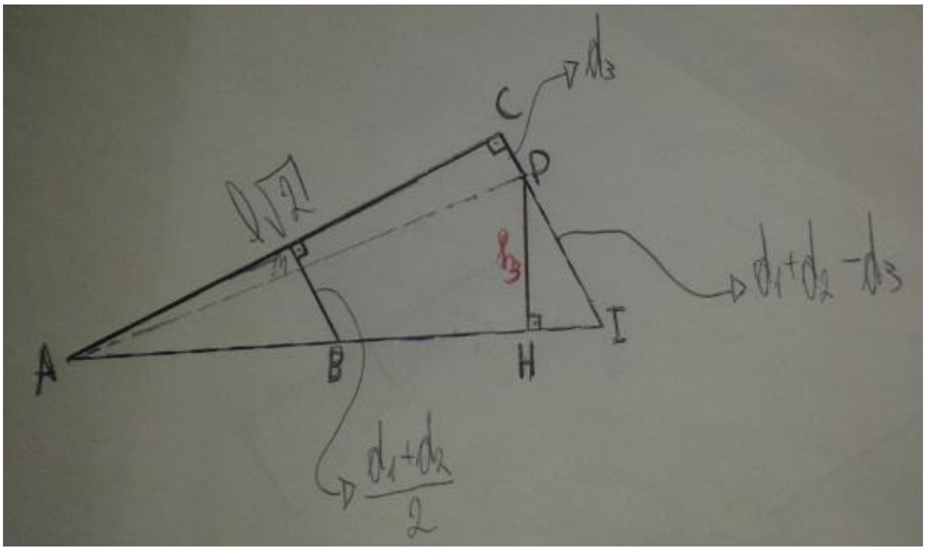
Figura 21 – Desenho desenvolvido para análise da base média



Fonte: Arquivos do grupo da modelagem

Na sequência, o aluno A_3, usando semelhança de triângulos, numa linguagem mais simples, mas que fica fácil de acompanhar pela Figura 22, evidencia que AMB~ACI, pois $\overline{MB} \parallel \overline{CI}$. Assim, $\overline{CI} = 2 \cdot \overline{MB} = d_1 + d_2$, pois $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$. Porém, $\overline{CI}$ contém P que é uma das extremidade de d_3, sendo d_3 a diferença entre a segunda menor e a menor aresta do prismóide. Por fim, temos que h_3 é dado por $\overline{PH}$ no triângulo PHI. O aluno A_3 conclui que o triângulo PHI é semelhante a AMB, pelo caso AAA, pois tem-se que $P\hat{I}H \equiv A\hat{B}M$, porque $\overline{PI} \parallel \overline{MB}$ e ambos os triângulos possuem ângulo reto. Assim, como $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$ são conhecidos, determina-se $\overline{AB}$ por Pitágoras e posteriormente por proporção (ou Tales) encontra-se h_3.

Figura 22 – Desenho desenvolvido para análise da semelhança dos triângulos



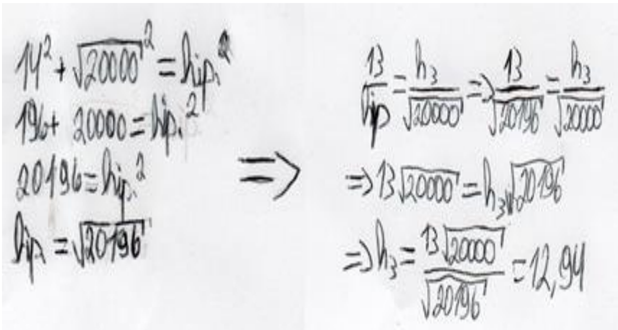
Fonte: Arquivos do grupo da modelagem

Atento as explicações de A_3, o aluno A_4 observa que torna-se mais prático usar outra relação de semelhança. "Mas dá pra ver também que esse triângulo menor, que tem o h_3 é semelhante ao grandão. Olhem o ângulo de baixo, ali bem da direita, ele vale pros dois e como os dois triângulos tem também um ângulo reto, então eles são semelhantes. Daí eu acho que é mais fácil", afirma A_4 (referindo-se a Figura 20). Ele evidencia que AIC~PIH, pois $\hat{I}$ é o mesmo para os dois triângulos e ambos possuem ângulo reto (ver Figura 22). Assim, como $\overline{AC}$ e $\overline{CI}$ são conhecidos ($l\sqrt{2}$ e $d_1 + d_2$, respectivamente), por Pitágoras determina-se $\overline{AI}$, e, por proporção, encontra-se $\overline{PH} = h_3$ e estabelece-se a relação:

$$\frac{\overline{PI}}{\overline{AI}} = \frac{h_3}{\overline{AC}} \Rightarrow h_3 = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{PI}}{\overline{AI}} \tag{7}$$

Com a interpretação e o acordo de todos, continuaram os cálculos, aplicando-se a Equação (7) para determinar o valor de h_3, conforme pode-se ver na Figura 23.

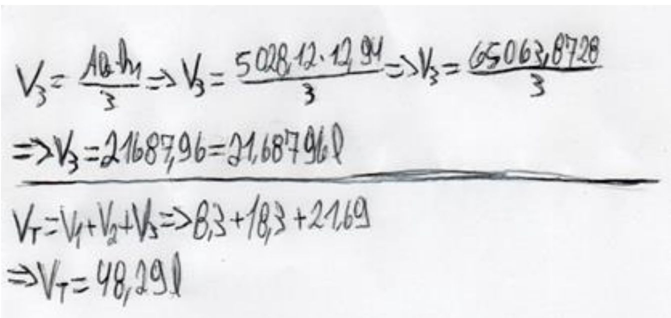
Figura 23 – Foto do cálculo – Valor de h_3



Fonte: Registros do autor

Após determinar o valor de h_3 concluíram o cálculo do volume, na lousa, convertendo o valor total em litros, chegando a 48,29 litros, conforme Figura 24.

Figura 24 – Foto do cálculo – Valor do volume do tetraedro



Fonte: Registros do autor

Ao finalizarmos o encontro, somamos este volume ao do prisma inicial, totalizando para esta coluna de água (prismóide), um volume aproximado de $948.290 cm^3$ ou 948,29ℓ (a opção de usar litro como unidade de medida, está associada à comparações com caixa de água, por exemplo). Ficou combinado que, para facilitar o trabalho, no próximo encontro usaremos planilha eletrônica, na sala informatizada, a fim de manipularmos os dados coletados e calcular o volume de todos os prismóides.

Quadro 14 – Análise da 11ª Etapa – Encontro 7 (E7) – 6ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Estudo de caso particular com valores reais	- identificar arestas e determinar seus valores; - aplicar fórmulas de área e volume; - usar semelhança de triângulos;	I –A – c, I – B – a, I – B – b, II – B – a, II – B – c, II – B – d.	- aula dialogada. Atividade colaborativa encaminhada pelo professor, a partir de caso particular da modelagem; - observação atenta para identificação de elementos e aplicação de fórmulas; - aplicação de conceitos e propriedades (base média, proporção...) com elaboração e análise criteriosa de esboços; - aperfeiçoamento de linguagem simbólica e escrita matemática a partir do diálogo.
Uso de calculadora	- usar as funções de memória e função inversa na calculadora científica.	II – B – d,	- operações facilitadas com uso de calculadora. Necessidade para o “desenrolar” dos procedimentos.

Fonte: Elaborado pelo autor

12ª Etapa – 5ª Atividade em sala T5 – 7ª semana

Nesta atividade foi concluída a S_3 com o estudo da pirâmide, do cone e da esfera. Aproveitou-se a discussão e a análise feita na atividade de modelagem, com uso do prisma de papelão dividido em três pirâmides de mesmo volume (material montado naquela ocasião) e expomos a dedução da fórmula de forma dialogada, contando com a efetiva participação do grupo da modelagem. Quanto ao cone e a esfera, houve apenas a conceituação e exemplificações, caracterizou-se o cone com uso do lixeiro da sala (no caso, tronco de cone), já para a caracterização da esfera usou-se uma bola de basquete (da escola), comparando inclusive com uma bola de pingue-pongue de um aluno da classe. Resolvemos atividades relativas e concluímos esta sequência aplicando avaliações, com trabalhos em grupos e individuais. No Anexo H destacamos algumas questões aplicadas.

Quadro 15 – Análise da 12ª Etapa – 5ª Atividade em sala T5 – 7ª semana

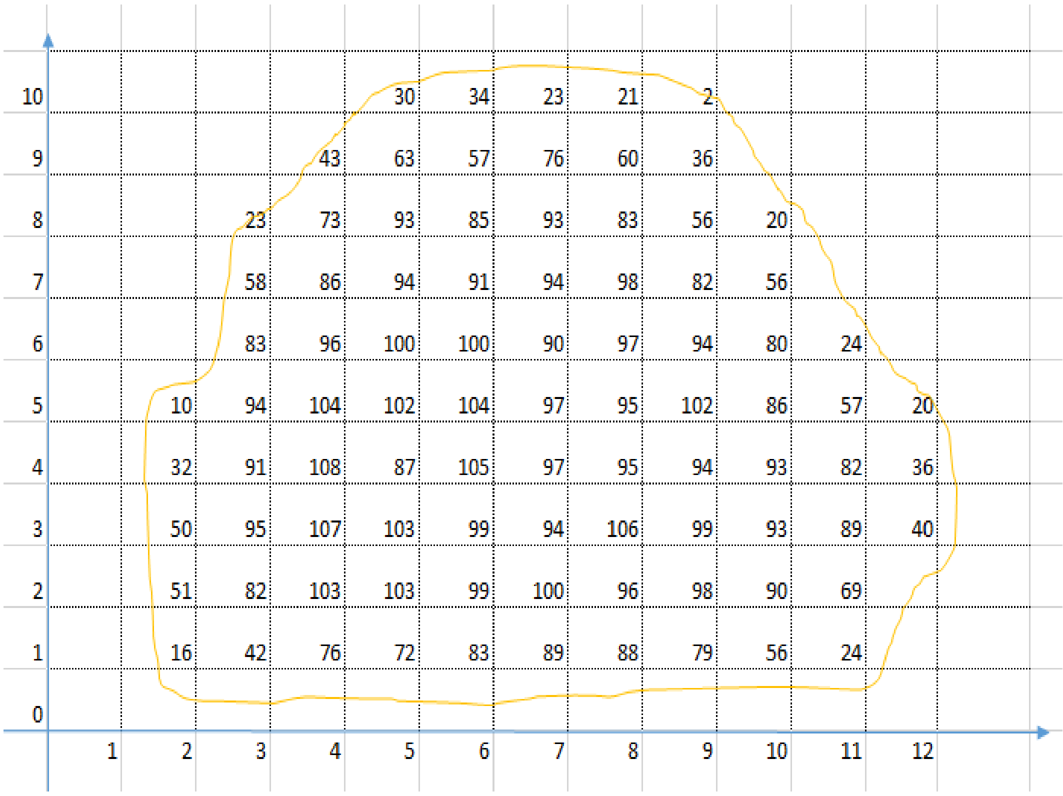
Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Retomada do estudo dos sólidos geométricos: pirâmide, cone e esfera	- volume da pirâmide; - volume do cone; - volume da esfera;	I – A – a, I – A – b, II – B – a, II – B – c, II – B – d.	- aula expositiva dialogada, direcionada pelo PP, partindo da ideia e material usado na modelagem, estendendo para outras aplicações; - resolução de exercícios individuais e coletivos; - contextualizações e generalizações.
Exercícios e avaliações	- aplicações dos conceitos.	II – B – d.	- interpretações e resoluções de atividades.

Fonte: Elaborado pelo autor

13ª Etapa – Encontro 8 (E8) – 7ª semana

Conforme havíamos combinado no encontro anterior, ocupamos a sala informatizada a fim de trabalharmos em planilha eletrônica para efetuar os cálculos. Divididos inicialmente os alunos em duas duplas, dupla A, formada pelos alunos A_1 e A_3 e dupla B, pelos alunos A_2 e A_4, pois neste dia, além do aluno A_6, que já havia desistido desde o segundo encontro, faltou também A_5 (alegando problemas de saúde na família), restando apenas quatro alunos no grupo. Na primeira atividade os alunos foram orientados pelo PP para digitarem em planilha eletrônica os dados coletados (a partir de uma cópia do plano cartesiano por eles elaborado na coleta de dados). Ficou definindo que o vértice inferior direito de cada célula corresponde a um ponto, sendo a profundidade de cada ponto digitada na respectiva célula. Ao digitar os dados, o aluno A_2 chamou a atenção do grupo para o desenho que se formava: “olha conforme a gente vai digitando parece que vai se desenhando o açude”. Após os dados digitados solicitei para que os alunos usassem as ferramentas de desenho e contornassem o conjunto de dados como se estivessem, de fato, desenhando o açude. O que ficou caracterizado na Figura 25.

Figura 25 – Dados digitados em planilha eletrônica



Fonte: Print de uma das planilha de dados

A atividade anterior foi planejada pelo professor com o intuito de familiarizar os alunos com as máquinas, pois destes, apenas A_3 possui computador em casa, sendo ele o mais experiente. O próximo passo foi lançar o desafio. PP pergunta: “e agora, vamos calcular usando os procedimentos que vimos nos encontros passados? “Pode ser” afirmou o aluno A_4. “Mas só sabemos três casos!” retrucou A_3, “e os outros, vão ser iguais?” (complementa A_3). “Acho que não, porque tem tudo que é tipo de medida!”, afirmou A_2.

A partir dessa discussão decidiu-se analisar todos os casos diferentes existentes no conjunto de dados, lembrando que *três casos*[21] já foram analisados.

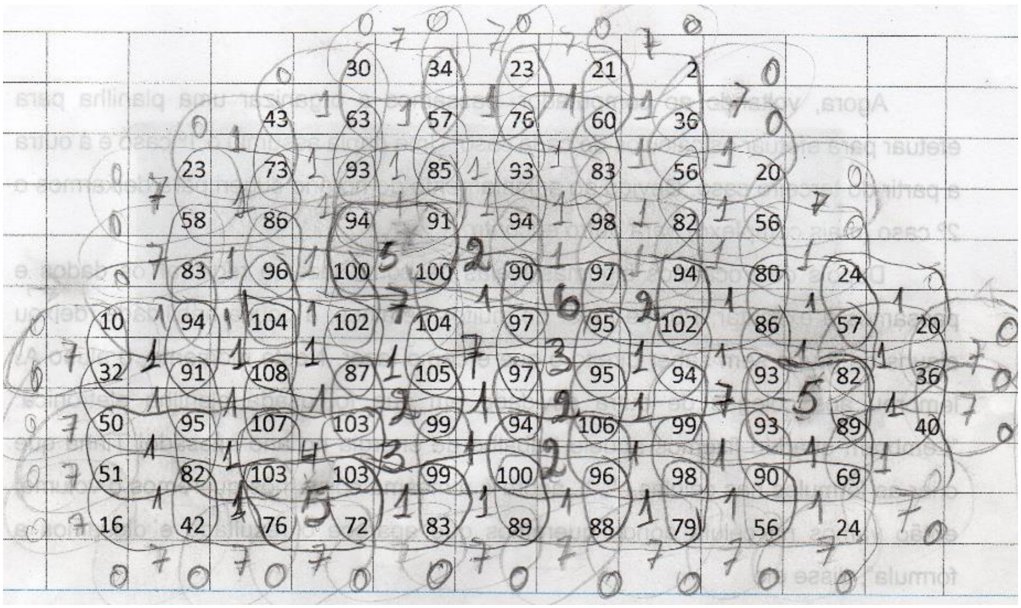
Avaliamos inicialmente a quadra formada pelos pontos (2,1,**16**), (3,1,**42**), (2,2,**51**) e (3,2,**82**) e observamos que está enquadrada no 1º caso, já analisado, ou seja, trata-se de arestas maiores vizinhas, e, portanto, teremos a formação de um prisma reto de base quadrada (100cm x 100cm x 16cm) e de duas pirâmides cujas bases são trapézios, ambas com altura de 100cm. Quanto aos trapézios da base, notamos que estes têm em comum um dos lados paralelos (B), dado pela diferença da maior aresta vertical para a menor ($82cm - 16cm = 66cm$), e também possuem alturas iguais (100cm). Para o outro lado paralelo, de cada trapézio, temos as

[21] 1º caso: arestas diferentes sendo maiores vizinhas; 2º caso: arestas diferentes com maiores opostas; 3º caso: arestas vizinhas iguais duas a duas.

diferenças entre as respectivas arestas com a menor aresta ($b_1 = 42cm - 16cm = 26cm$ e $b_2 = 51cm - 16cm = 35cm$), como foi visto no E6.

Ao analisarmos uma quadra seguinte observamos que novamente tratava-se do mesmo caso. Então resolvemos identificar quais casos diferentes aparecem no conjunto de dados e depois analisar os procedimentos de cálculos, resultando no que mostra a Figura 26, cujos números de 1 a 7 representam os respectivos casos que estão especificados no Quadro 16.

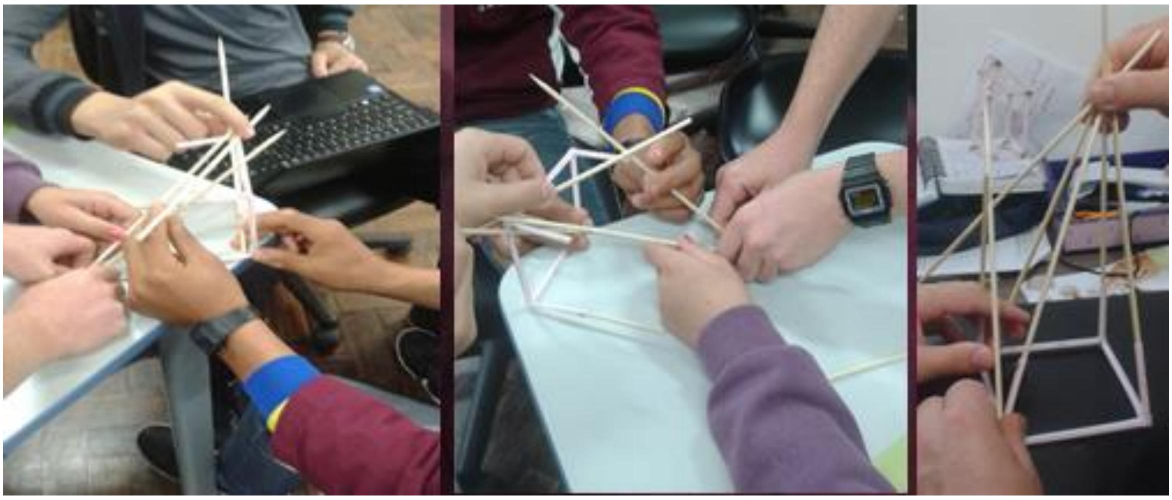
Figura 26 – Anotações prévias dos casos possíveis



Fonte: Arquivos do grupo da modelagem

Depois de analisar os números, conforme visto na Figura 26, foram identificados mais quatro novos casos, dando um total de sete casos. Com os casos registrados, o foco passou a ser as decomposições e procedimentos de cálculos para se chegar ao volume de cada caso e consequentemente o volume total, a partir da soma. Diante disso analisamos todos os casos, um a um, usando arestas móveis (espetinhos de churrasco) para visualizar a formação dos poliedros menores, conforme a Figura 27.

Figura 27 – Decomposição em poliedros conhecidos



Fonte: Registros do autor

Quadro 16 – Casos identificados e suas respectivas decomposições

CASO	CARACTERÍSTICAS DAS ARESTAS (Identificação adotada)	DECOMPOSIÇÃO EM POLIEDROS MENORES*
1º	Diferentes: maiores vizinhas	Um prisma quadrangular e duas pirâmides trapezoidais
2º	Diferentes: maiores opostas	Um prisma quadrangular, duas pirâmides trapezoidais e um tetraedro
3º	Iguais: duas a duas	Um prisma trapezoidal ou um prisma quadrangular e um prisma triangular
4º	Iguais: três menores	Um prisma quadrangular e uma pirâmide quadrangular
5º	Iguais: duas maiores vizinhas	Um prisma quadrangular, uma pirâmide trapezoidal e uma retangular
6º	Iguais: duas maiores opostas	Um prisma quadrangular e duas pirâmides trapezoidais idênticas
7º	Iguais: duas menores vizinhas	Um prisma quadrangular uma pirâmide quadrangular e um tetraedro
* O prisma quadrangular estará em todas as decomposições, exceto se, pelo menos uma das arestas for igual a zero (z = 0).		

Fonte: Elaborado pelo autor

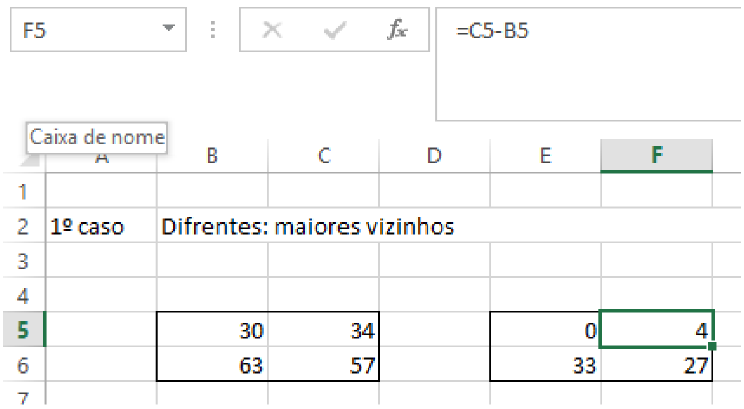
Agora, voltando ao computador, passamos a organizar uma planilha para efetuar os cálculos de cada caso. A dupla A assumiu o 1º caso (que apresentava maior frequência) e a outra a partir do terceiro caso. Devido ao adiantamento do horário optamos deixar o 2º caso (visto com mais complexo) para outro encontro.

Depois de trocarmos algumas ideias e passamos a executar. Porém, por se tratar de muitos detalhes, a pouca habilidade, deixou alguns do grupo sem saber direito o que e como fazer. Neste momento, o aluno A_3 lembrou aos colegas de outra atividade em que foi usada planilha eletrônica. “Lembram quando fizemos aquele trabalho de energia no ano passado! Tinha que criar as fórmulas nas células...”, “...agora é a mesma coisa, nós queremos o volume, então vamos em célula, onde queremos que aparece o resultado e digitamos a fórmula”, disse ele.

Para facilitar a organização sugerimos usar uma célula para cada um dos poliedros da decomposição e outra para a soma (V_1, V_2, ... e V_t), colocando em cada uma sua respectiva fórmula e posteriormente digitar o resultado em outra independente. Assim torna-se possível ir trocando os valores das quadras nas células de base. Por decisão do grupo, apesar dos valores das arestas serem apresentadas em cm, gerando o volume em cm^3, esse resultado seria convertido, já na fórmula, para ser apresentado em litros, como se está habituado. Por alguns minutos o grupo ficou só na sala. Tempo em que, o aluno A_3 tomou a iniciativa e criou um comando nas células vizinhas da quadra base para tornar mais simples as demais fórmulas, indicando o procedimento ao outro grupo. Quando foi questionado explicou: “já que temos sempre um prisma de base quadrada de 100cm por 100cm, com altura igual ao comprimento da menor aresta, então podemos diminuir antes o comprimento da menor, depois é só fazer uma conta a parte”. “...só que tem que pôr sempre a menor aresta na primeira célula”.

A Figura 28 mostra com clareza este procedimento inicial adotado.

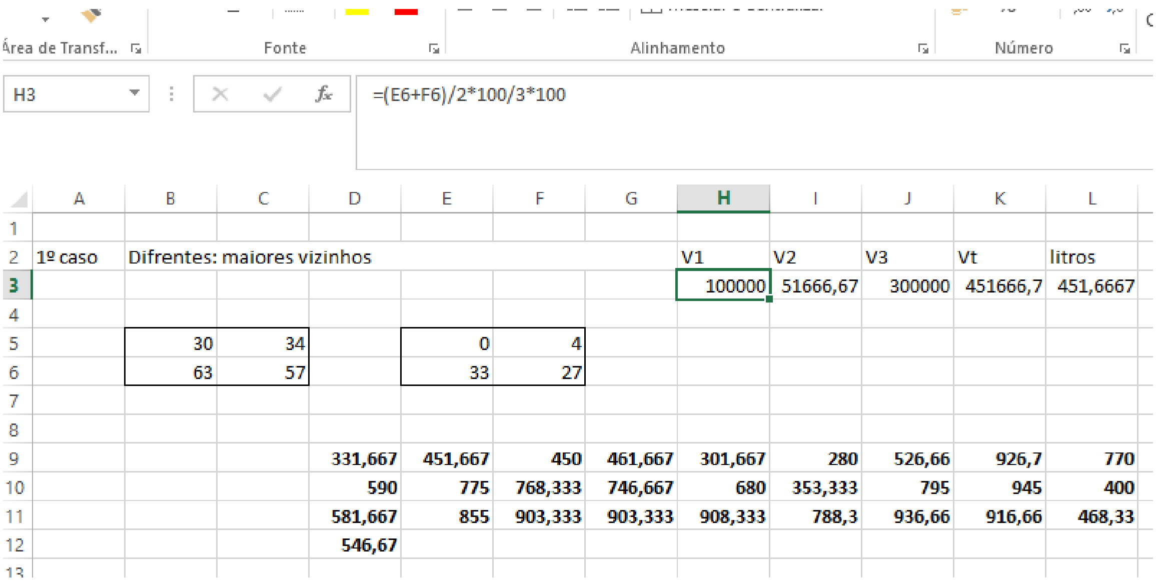
Figura 28 – Recorte da planilha referente ao 1º caso



Fonte: Print de planilha da dupla A

As Figura 29 e 30 ilustram a continuidade das atividades de ambos as duplas destacando em cada uma delas uma das fórmulas utilizadas.

Figura 29 – Recorte da planilha referente ao 1º caso – passo 2

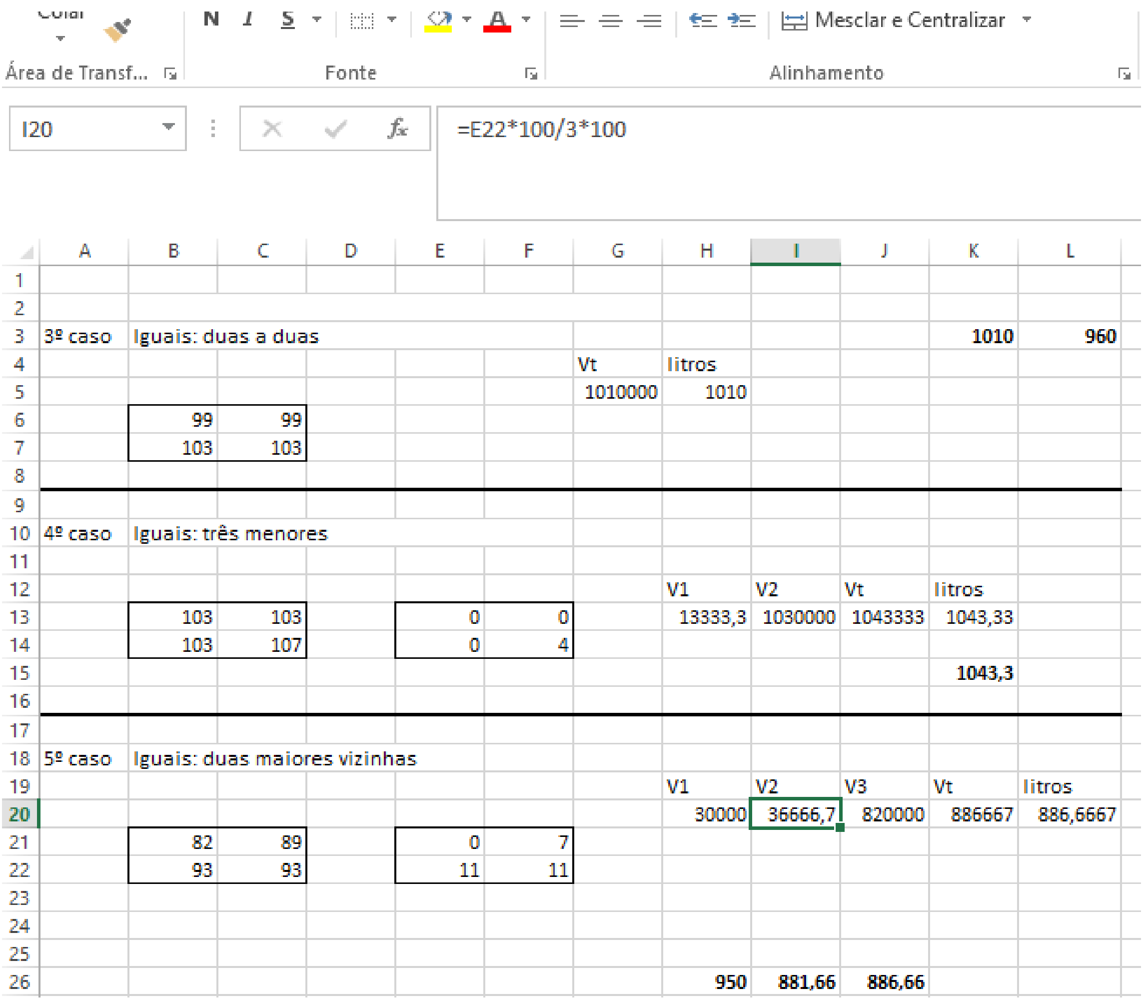


H3 =(E6+F6)/2*100/3*100

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	1º caso	Difrentes: maiores vizinhos						V1	V2	V3	Vt	litros
3								100000	51666,67	300000	451666,7	451,6667
4												
5		30	34		0	4						
6		63	57		33	27						
7												
8												
9				331,667	451,667	450	461,667	301,667	280	526,66	926,7	770
10				590	775	768,333	746,667	680	353,333	795	945	400
11				581,667	855	903,333	903,333	908,333	788,3	936,66	916,66	468,33
12				546,67								

Fonte: Print de planilha da dupla A

Figura 30 – Recorte da planilha referente do 3º ao 5º caso



I20 =E22*100/3*100

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3	3º caso	Iguais: duas a duas									1010	960
4							Vt	litros				
5							1010000	1010				
6		99	99									
7		103	103									
8												
9												
10	4º caso	Iguais: três menores										
11												
12								V1	V2	Vt	litros	
13		103	103		0	0		13333,3	1030000	1043333	1043,33	
14		103	107		0	4						
15											1043,3	
16												
17												
18	5º caso	Iguais: duas maiores vizinhas										
19								V1	V2	V3	Vt	litros
20								30000	36666,7	820000	886667	886,6667
21		82	89		0	7						
22		93	93		11	11						
23												
24												
25												
26								950	881,66	886,66		

Fonte: Print de planilha da dupla B

Com o tempo do encontro praticamente esgotado os alunos a salvaram o que estava feito e passamos uma breve discussão, avaliando os procedimentos que estávamos adotando, levantando outras maneiras que poderiam ser usadas para fazer o cálculo, inclusive enfatizando a inviabilidade prática do procedimento adotado até então, apesar de acreditarmos que os resultados podem chegar muito próximos dos reais.

A partir da reflexão surgiu novamente a ideia da média como forma mais prática. “Dava pra fazer a média de cada prismóide” disse A_2. Para mediar uma discussão PP questiona sobre o uso da ideia do pai de A_1, de medir em alguns pontos, fazer a média e multiplicar pela área da superfície. “Essa eu acho que não”, disse A_3, “vai que pega só as medidas menores, ao redor, por exemplo, acho que seria melhor, então, fazer a média de todos os pontos e multiplicar pela área”. PP pergunta: “e como calcular a área, se o açude não é polígono, nem círculo?”. “Fixa alguns pontos e faz de conta que é um polígono, aproxima” sugeriu A_4. “É, daí divide em triângulos e usa Herão para calcular a área de cada triângulo e depois soma todos”, diz A_3. “Só que o problema é achar os lados, vai dá um trabalhão, mas dá para fazer por Pitágoras” complementa A_3. Neste momento, surpreendendo a todos, A_4 pergunta: “pera aí! professor!?, mas não dá pra usar a fórmula da distância entre os pontos para achar os lados?”. A pergunta gerou uma espécie de espanto no grupo, pois ninguém sabia, no momento, que fórmula era essa. “Lembram do curso da Obmep, lá foi visto, ...aquela fórmula comprida, não lembro direito”, disse A_4. “Verdade, mas não lembro mais como é!”, respondeu A_3.

Tendo que encerrar o encontro, com horário já ultrapassado, sugerimos ao aluno A_4 que analisasse o caso da fórmula da distância e que fizesse alguns cálculos usando-a, a partir dos dados reais (fornecidos na cópia). Ao aluno A_3 foi indicado que refizesse as fórmulas dos casos já vistos, apresentando em uma única planilha e, se possível, fizesse mais alguns dos cálculos iniciados, encontrando as quadras correspondentes em cada caso, e ainda, na medida do possível, tentasse também fazer os três casos que faltaram (2º, 6º e 7º), buscando adiantar os trabalhos do próximo encontro, que ficou marcado como mais um extra (dois dias depois), devido ao atraso nas atividades em relação ao cronograma geral.

Quadro 17 – Análise da 13ª Etapa – Encontro 8 (E8) – 7ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Uso da planilha eletrônica	- digitar em planilha; - montar fórmula;	I – B – c,	- Atividade coletiva porque os alunos trocaram informações sobre o funcionamento da planilha, porém sem modelagem, mesmo que o objetivo seja utilizar no problema modelado.

	- cálculo do volume dos prismas com a planilha.	II – A – c. II – A – d.	Aprendizagem de linguagem da planilha; - Atividade individualizada, com linguagem matemática e computacional, de aplicação de conhecimento aprendidos anteriormente.
Volume dos “prismóides”: classificação e cálculo	- volume de prismóides: uma sequência de fórmulas para cada tipo.	I – A – b, I – A – d, II – B – b.	- discussão no grupo sobre a classificação, em trabalho de modelagem, porém com abstrações: a discussão é na área da Matemática, mesmo que para resolver o problema de volume de água.
Proposta de média de profundidades, Aluno A_2	- Volume aproximado de sólidos irregulares	I – A – d.	- proposta para o coletivo sobre um método de volume do prisma; aplicação de conceitos.
Área do lago: “Fixa alguns pontos e faz de conta que é um polígono, aproxima” Triangulações com cálculo de distância entre dois pontos	- Área aproximada de superfícies irregulares - distância entre dois pontos no Plano Cartesiano.	I – A – d. I – B – d I – B – d	- proposta para o coletivo sobre um método de área de polígono; aplicação de conceitos; - a ideia do “faz de conta” é uma abstração do real, quando é proposta uma figura conhecida simples para modelar outra mais complexa; - aplicação de conhecimento aprendido em outra oportunidade (OBMEP) em problema já convertido para a linguagem matemática (Plano Cartesiano).

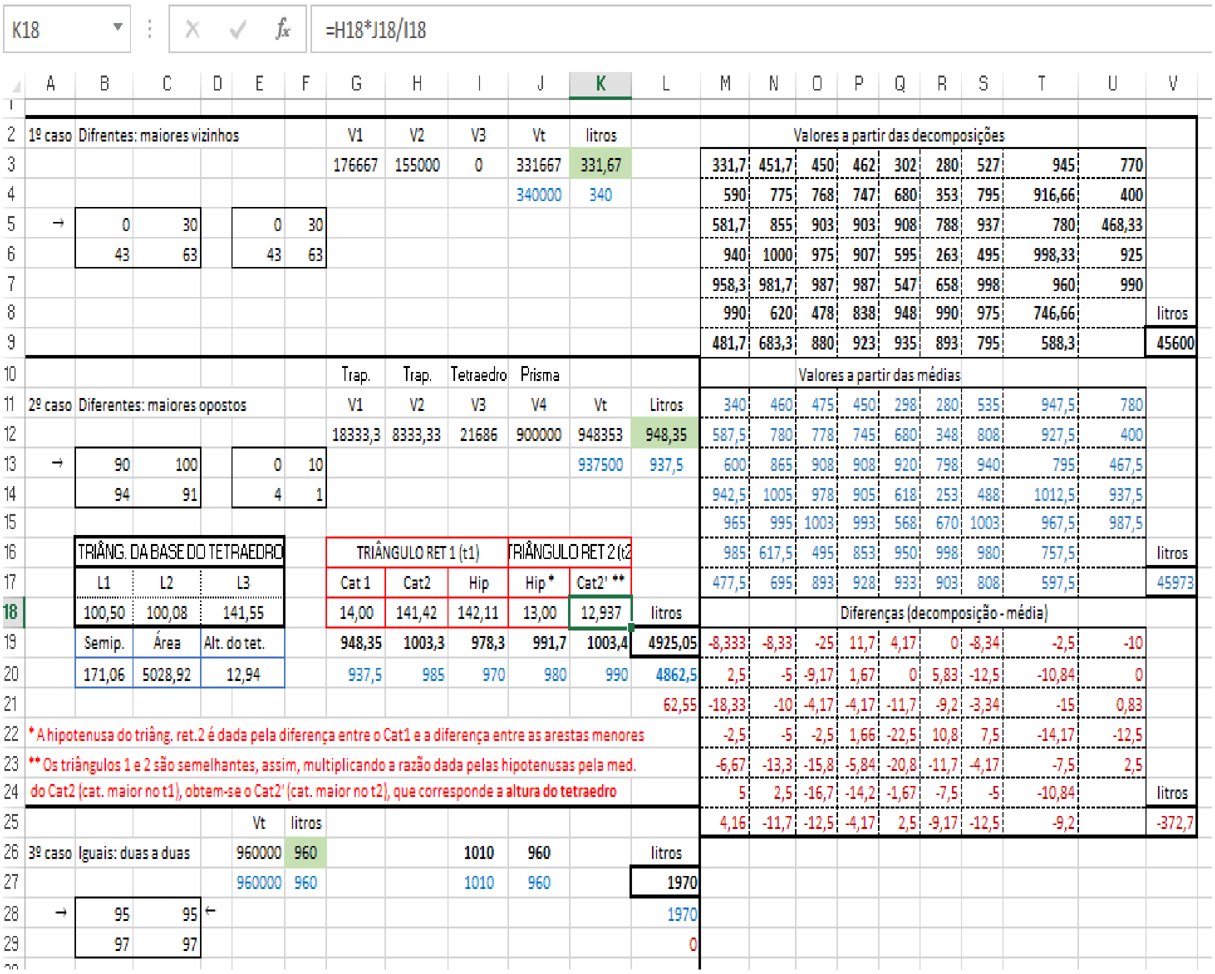
Fonte: Elaborado pelo autor

14ª Etapa – Encontro 9 (E9) – 7ª semana

Iniciamos este encontro novamente com apenas quatro alunos, os mesmos do encontro anterior. Na retomada das atividades, socializamos o que A_3 havia conseguido fazer em casa com as dicas sugeridas. Disponibilizamos um projetor, para que ele expusesse o que havia feito, atividade esta, que após uma organização com melhor identificação das células, pode ser vista na Figura 31.

Durante sua explicação, o aluno mostrou que mudou algumas coisas em relação do que tinha sido feito no encontro anterior, começando pela identificação de algumas células com flechas. No 1º, 2º, 5º e 6º caso coloquei uma flecha que é só para indicar que naquela célula deve ir o menor valor e as demais seguem no sentido horário conforme elas aparecem no quadro de dados, enquanto que nos outros casos coloquei mais flechinhas, conforme a identificação da figura. Por exemplo, no 3º caso tem duas flechas indicando que as duas menores devem ser na primeira linha. Se não obedecer esta ordem não dá certo, por causa que as fórmulas são criadas conforme a figura”, disse A3.

Figura 31 – Planilha de exposição de todos os valores enquadrados do 1º ao 3º caso



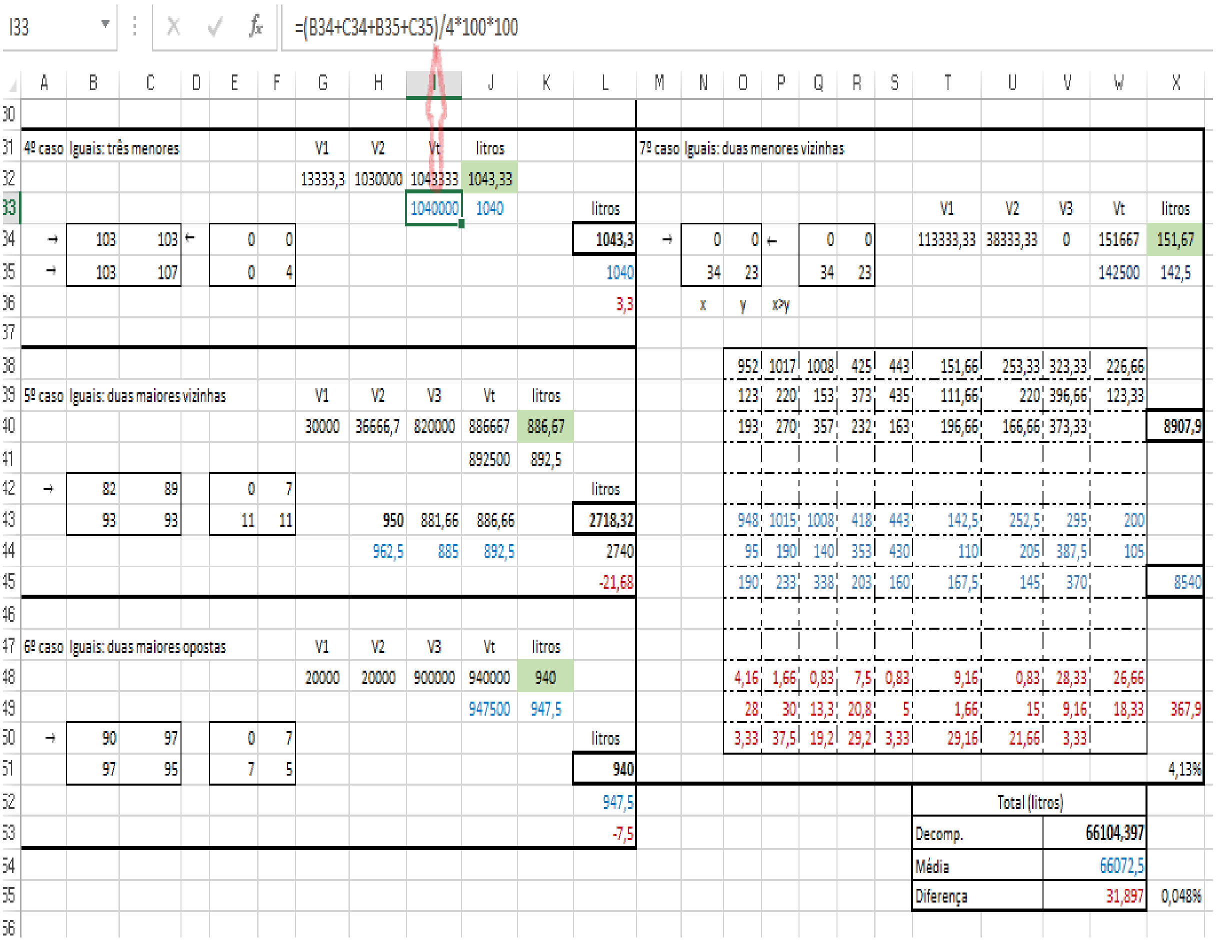
K18 =H18*J18/I18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1																						
2	1º caso	Difrentes: maiores vizinhos					V1	V2	V3	Vt	litros		Valores a partir das decomposições									
3							176667	155000	0	331667	331,67		331,7	451,7	450	462	302	280	527	945	770	
4										340000	340		590	775	768	747	680	353	795	916,66	400	
5	→	0	30		0	30							581,7	855	903	903	908	788	937	780	468,33	
6		43	63		43	63							940	1000	975	907	595	263	495	998,33	925	
7													958,3	981,7	987	987	547	658	998	960	990	
8													990	620	478	838	948	990	975	746,66		litros
9													481,7	683,3	880	923	935	893	795	588,3		45600
10							Trap.	Trap.	Tetraedro	Prisma			Valores a partir das médias									
11	2º caso	Diferentes: maiores opostos					V1	V2	V3	V4	Vt	Litros	340	460	475	450	298	280	535	947,5	780	
12							18333,3	8333,33	21686	900000	948353	948,35	587,5	780	778	745	680	348	808	927,5	400	
13	→	90	100		0	10					937500	937,5	600	865	908	908	920	798	940	795	467,5	
14		94	91		4	1							942,5	1005	978	905	618	253	488	1012,5	937,5	
15													965	995	1003	993	568	670	1003	967,5	987,5	
16		TRIÂNG. DA BASE DO TETRAEDRO					TRIÂNGULO RET 1 (t1)			TRIÂNGULO RET 2 (t2			985	617,5	495	853	950	998	980	757,5		litros
17		L1	L2	L3			Cat 1	Cat2	Hip	Hip *	Cat2' **		477,5	695	893	928	933	903	808	597,5		45973
18		100,50	100,08	141,55			14,00	141,42	142,11	13,00	12,937	litros	Diferenças (decomposição - média)									
19		Semip.	Área	Alt. do tet.			948,35	1003,3	978,3	991,7	1003,4	4925,05	-8,333	-8,33	-25	11,7	4,17	0	-8,34	-2,5	-10	
20		171,06	5028,92	12,94			937,5	985	970	980	990	4862,5	2,5	-5	-9,17	1,67	0	5,83	-12,5	-10,84	0	
21												62,55	-18,33	-10	-4,17	-4,17	-11,7	-9,2	-3,34	-15	0,83	
22	* A hipotenusa do triâng. ret.2 é dada pela diferença entre o Cat1 e a diferença entre as arestas menores												-2,5	-5	-2,5	1,66	-22,5	10,8	7,5	-14,17	-12,5	
23	** Os triângulos 1 e 2 são semelhantes, assim, multiplicando a razão dada pelas hipotenusas pela med.												-6,67	-13,3	-15,8	-5,84	-20,8	-11,7	-4,17	-7,5	2,5	
24	do Cat2 (cat. maior no t1), obtem-se o Cat2' (cat. maior no t2), que corresponde a altura do tetraedro												5	2,5	-16,7	-14,2	-1,67	-7,5	-5	-10,84		litros
25					Vt	litros							4,16	-11,7	-12,5	-4,17	2,5	-9,17	-12,5	-9,2		-372,7
26	3º caso	Iguais: duas a duas			960000	960			1010	960		litros										
27					960000	960			1010	960		1970										
28	→	95	95	←								1970										
29		97	97									0										

Fonte: Print de planilha feita em casa e apresentada por A3

Como tínhamos conversado, no encontro passado, sobre a média das medidas como uma outra possibilidade de cálculo, a partir disso, A3 criou em uma célula abaixo do volume total, uma fórmula que calcula o volume a partir da média das quatro profundidades (como pode-se ver no detalhe da Figura 32) e registrou na lista ao lado os dois valores determinados para cada prismóide. Assim, o que está em “preto” é referente aos cálculos das decomposições, em “azul” refere-se aos valores correspondentes a média e, em marrom, as respectivas diferenças em ambas as figuras.

Figura 32 – Planilha de exposição de todos os valores enquadrados do 4º ao 7º caso



Fonte: Print de planilha feita em casa e apresentada por A_3

Aproveitamos este momento e mostramos aos alunos como fazer a soma dos totais, deixando registrados também estes valores, como podem ser vistos destacados em preto, azul e marrom no canto inferior direito da Figura 32.

Analisando os resultados junto aos alunos, quando comparamos os valores totais observamos uma diferença muito pequena. Levantou-se porém uma desconfiança se os procedimentos adotados foram de fato tão precisos, se os resultados estariam de fato corretos. Foi quando A_3 comentou sobre um fato que ele havia observado em casa quando substituía os valores nas suas respectivas fórmulas. Ele observou que alguns números (quadras) dão o mesmo resultado independente das fórmulas aplicadas.

Para avaliarmos a suspeita levantada, criamos outra planilha e usando as funções cópia-cola, transferimos as fórmulas para esta planilha e passamos a substituir valores da mesma quadra nos sete casos diferentes. Seguindo a sugestão de A_3, substituímos inicialmente a quadra 95, 95, 97, 97, constatando que, de fato, os resultados não coincidem em apenas duas situações (4º e 6º), enquanto nas outras cinco os valores são equivalentes.

Diante desta situação, voltamos a discutir as decomposições que tínhamos definido. Pela análise feita na definição dos casos, a quadra em questão pertence ao 3º caso (iguais duas a duas) e havíamos interpretado como um prisma quadrangular e um triangular ou apenas um trapezoidal. Neste caso não há dúvida, restando analisar o porquê de coincidir as respostas nos outros casos.

Começando no 1º caso, observamos que a decomposição, lá definida, trata-se de um prima quadrangular e duas pirâmides trapezoidais, comparando com o terceiro caso notamos que, de fato, há uma equivalência, pois os prismas quadrangulares são iguais e o prisma triangular do 3º caso pode ser decomposto em duas pirâmides triangulares (tetraedros) e as fórmulas que definem as áreas das bases (triângulos e trapézios) se equivalem neste caso. Notamos que o triângulo retângulo (que ali se forma) corresponde um trapézio considerando uma das bases como zero, ou seja: $\frac{(B+b)}{2} \cdot h = \frac{B \cdot h}{2}$ para b = 0. Assim, esta correspondência foi aceita com certa facilidade. Diante deste diálogo, chegamos a uma conclusão conjunta que todo triângulo retângulo é um trapézio reto com b = 0, ou seja, a altura e a base são as mesmas, tanto para o triângulo, quanto para o trapézio. Podendo-se ainda estabelecer esta correspondência de forma geral, de que todo o triângulo corresponde a um trapézio com uma das bases igual a zero.

Quando passamos a comparar os resultados com o 2º caso (também coincidindo), um fato chamou a atenção do grupo, pois como pode-se observar, na Figura 33, para esta quadra não há a formação do tetraedro característico do 2º caso, pois temos sua altura valendo zero (célula em destaque). Então, observamos que novamente temos a formação do prisma quadrangular e das duas pirâmides triangulares (ou trapezoidais com b=0), cuja a soma dos volumes coincide ao volume do prisma do 3º caso que está sendo comparado.

Figura 33 – Recorte de planilha estudada - detalhe do 2º caso

D20 | =K18

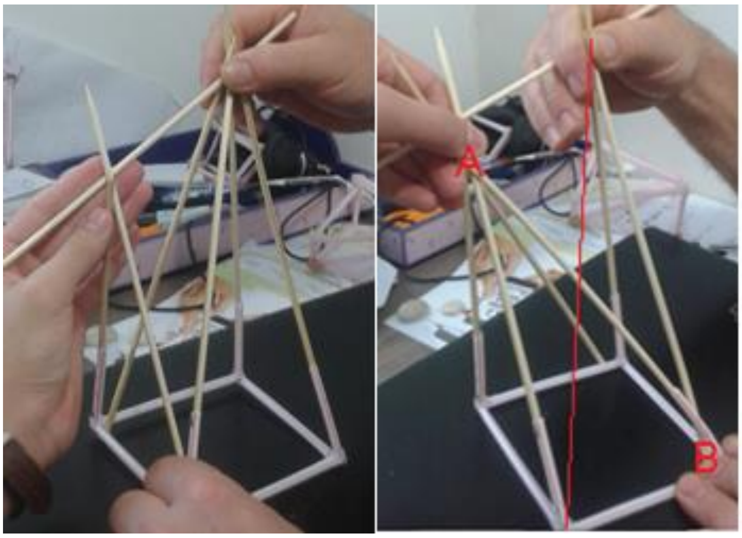
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
11	2º caso	Diferentes: maiores opostos					V1	V2	V3	V4	Vt	Litros
12							3333,33	6666,667	0	950000	960000	960,00
13	→	95	95		0	0					960000	960
14		97	97		2	2						
15												
16		TRIÂNG. DA BASE DO TETRAEDRO					TRIÂNGULO RET 1 (t1)			TRIÂNGULO RET 2 (t2)		
17		L1	L2	L3			Cat 1	Cat2	Hip	Hip *	Cat2' **	
18		100,00	100,02	141,44			2,00	141,42	141,44	0,00	0,000	litros
19		Semip.	Área	Alt. do tet.			**948,35**	**1003,3**	**978,3**	**991,7**	**1003,4**	**4925,05**
20		170,73	5001,00	0,00			937,5	985	970	980	990	**4862,5**
21												62,55
22	* A hipotenusa do triâng. ret.2 é dada pela diferença entre o Cat1 e a diferença entre as arestas menores											
23	** Os triângulos 1 e 2 são semelhantes, assim, multiplicando a razão dada pelas hipotenusas pela med.											
24	do Cat2 (cat. maior no t1), obtem-se o Cat2' (cat. maior no t2), que corresponde a **altura do tetraedro**											

Fonte: Print da planilha discutida no grupo

Agora, comparando a igualdade de resultado do 3º com o 5º caso (iguais: duas maiores vizinhas), ainda para a mesma quadra, evidenciamos que tínhamos definido para o 5º caso a formação de um prisma quadrangular, uma pirâmide trapezoidal e uma pirâmide de base retangular. Notamos, no entanto, que a área de um retângulo de altura h e base b é igual a de um trapézio de altura h com bases iguais, ou seja, $\frac{(B+b)}{2} \cdot h = \frac{2b \cdot h}{2} = b \cdot h$, para todo B=b. Assim, concluímos que os resultados iguais fazem todo o sentido, neste caso. Porém, nossa nova análise revelou que o 5º caso, na verdade, encaixa-se no 2º, pois as arestas vizinhas não precisam ser diferentes para gerar os poliedros que compõem o 2º caso (prisma quadrangular, duas pirâmides trapezoidais e um tetraedro).

Extinto o 5º caso passamos para a avalição dos resultados iguais entre o 3º e o 7º caso para a quadra em questão. Para o 7º caso (iguais: duas menores vizinhas) tínhamos definido a formação do prisma quadrangular e duas pirâmides, sendo uma de base quadrada e uma de base triangular, cuja a soma dos volumes correspondem ao volume do prisma do 3º caso. Porém, nesta análise, constatamos que a decomposição para o 7º caso é válida apenas quando a altura da pirâmide quadrangular é a maior diferença entre as profundidades, e não para todos os casos, como havíamos considerado. Isso pode ser visualizado na Figura 34(a) e 34(b).

Figura 34 – Foto do estudo da decomposição de um prismóide



a b

Fonte: Registros do autor

Como podemos observar na Figura 34(a), quando duas arestas têm mesma medida, depois do prisma quadrangular, teremos uma pirâmide quadrangular e uma triangular se considerarmos a maior diferença das profundidades como altura da pirâmide quadrangular. Por outro lado, como vemos na Figura 34(b), se considerarmos a altura da pirâmide quadrangular, a menor diferença, teremos um espaço entre a linha traçada em vermelho e a aresta AB, o que caracteriza a formação de um novo poliedro.

Avaliando os volumes totais, observamos que todas as quadras que tínhamos associado ao 7º caso podem ser enquadradas nos casos 1º ou 2º, bastando cuidar a ordem de exposição dos valores, pois esta ordem define decomposições diferentes ou seja, com ou sem o tetraedro característico do 2º caso, porém com os volumes totais equivalentes (desconsiderando arredondamentos). Isso pode ser observado no exemplo da Figura 35.

Figura 35 – Recorte da planilha estudada – 1º e 2º caso

1º caso: Diagonal princ. maior ou igual a diag. secundária	V1	V2	V3	Vt	litros
	106666,67	56666,667	0	163333,3	163,33
				160000	160,00

→				
	0	0	0	0
	30	34	30	34

	Trap.	Trap.	Tetraedro	Prisma		
2º caso: Diagonal princ. menor ou igual a diag. secundária	V1	V2	V3	V4	Vt	Litros
	106666,67	50000	6846,38	0	163513,05	163,51
					160000	160,00

→				
	0	34	0	34
	0	30	0	30

TRIÂNG. DA BASE DO TETRAEDRO		
L1	L2	L3
105,62	100,00	145,45
Semip.	Área	Alt. do tet.
175,54	5281,10	3,89

TRIÂNGULO RET 1 (t1)			TRIÂNGULO RET 2 (t2)	
Cat 1	Cat2	Hip	Hip *	Cat2' **
34,00	141,42	145,45	4,00	3,89

Fonte: Print da planilha estudada

Diante destas observações, decidimos pela extinção do 7º caso, transportando as respectivas quadras para o 1º e 2º casos.

A partir desta retomada em relação às decomposições de cada caso, constatamos que a decomposição que definimos para o 2º caso só não é válida para as quadras em que a soma da menor aresta vertical (profundidade) com a sua oposta (do vértice oposto do quadrado que define a base do prismóide) é maior que a soma das outras duas. Para este caso específico, validamos os cálculos do 1º caso, passando a chamá-lo de: ***1º caso: diagonal principal maior ou igual a diagonal secundária***[22]. Já o 2º caso passamos a chamar de: ***2º caso: diagonal principal menor ou igual a diagonal secundária***, detalhado no Quadro 18.

[22] Chamamos de diagonal principal aquela formada pela menor aresta com sua oposta na diagonal e diagonal secundária aquela relativa as outras arestas. Na planilha a disposição é correspondente ao caso de matrizes, por isso tal identificação.

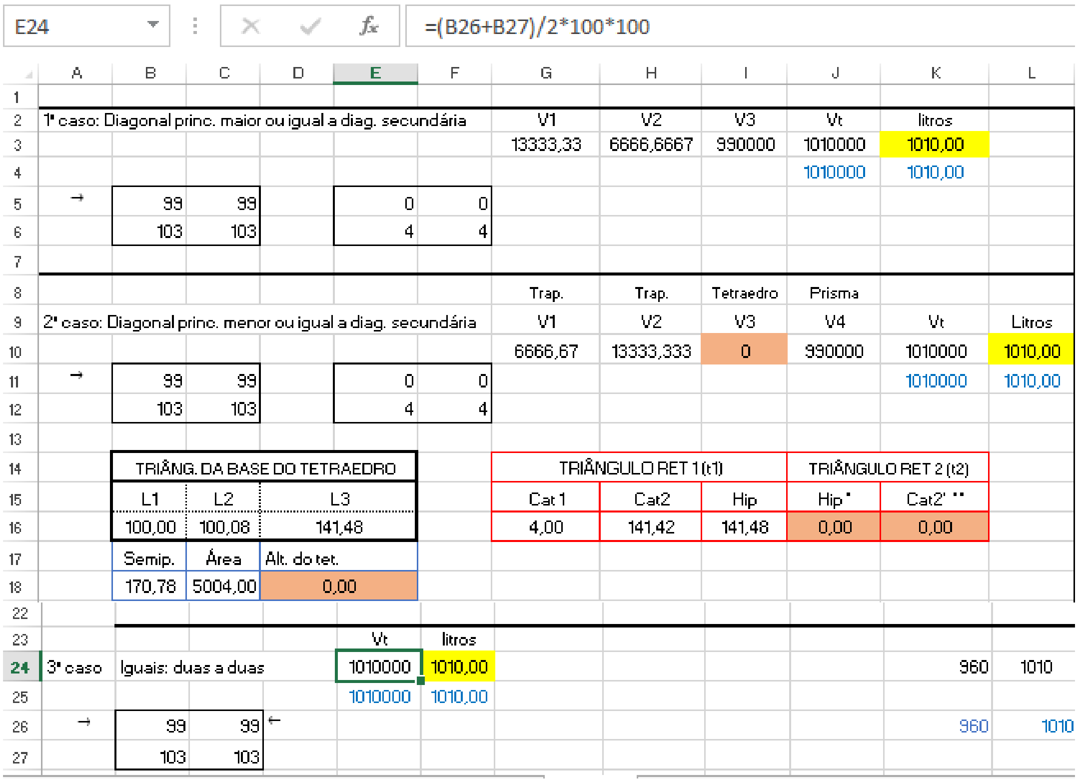
Fechando esta análise decidimos pela manutenção dos casos 3º e 4º, pois estes permitem uma interpretação mais simples das decomposições. Porém validamos que o volume de um prismóide que se enquadra no 3º caso (iguais duas a duas) pode ser calculado, tanto pelo 1º, quanto pelo 2º caso (bastando inserir um dos menores valores na 1ª célula, seguindo em sentido horário), não valendo a recíproca (Fig. 36). E o volume daquele que se enquadra no 4º caso (três menores iguais) também pode ser calculado tanto pelo 1º, quanto pelo 2º caso, sendo os valores dispostos corretamente (também não valendo a recíproca), conforme Figura 37.

Quadro 18 – Nova configuração para as decomposições dos prismóides

CASO	CARACTERÍSTICAS DAS ARESTAS (Identificação adotada)	DECOMPOSIÇÃO EM POLIEDROS MENORES*
1º	Diagonal principal maior ou igual a diagonal secundária	Um prisma quadrangular e duas pirâmides trapezoidais
2º	Diagonal principal menor ou igual a diagonal secundária	Um prisma quadrangular, duas pirâmides trapezoidais e um tetraedro
3º	Iguais: duas a duas	Um prisma trapezoidal ou um prisma quadrangular e um prisma triangular
4º	Iguais: três menores	Um prisma quadrangular e uma pirâmide quadrangular
* O prisma quadrangular aparece em todas as decomposições, exceto se, pelo menos uma das aresta for igual a zero, e, se duas arestas forem iguais a zero, terá apenas uma pirâmide trapezoidal, sendo que a outra passará ter base triangular.		

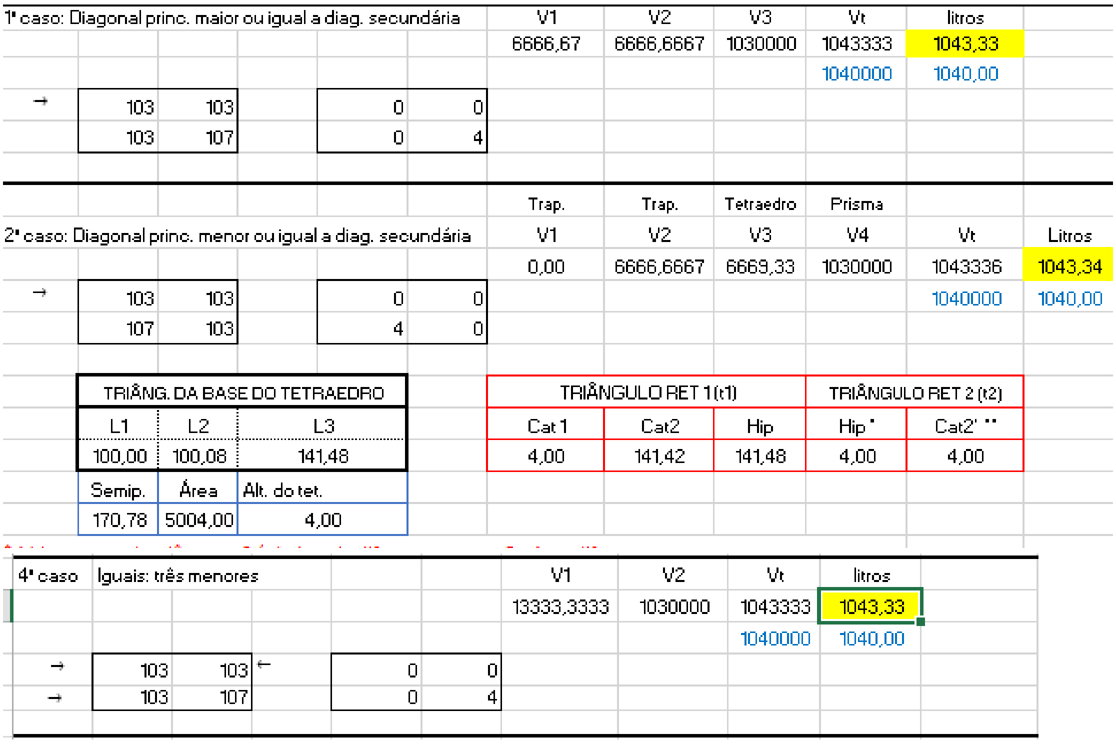
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 36 – Recorte da planilha estudada: comparando 1º, 2º e 3º caso



Fonte: Print da planilha estudada no grupo

Figura 37 – Recorte da planilha estudada: comparando 1º, 2º e 4º caso



Fonte: Print da planilha estudada no grupo

Por fim, para aprofundar a discussão, e também por curiosidade, analisarmos os dados da Figura 38. Percebemos que nesta, a sequência de operações gera alguns valores negativos para as medidas no 2º caso. Este fato ocorre porque os dados estão dispostos em ordem não adequada (note que a soma da diagonal principal é maior que a soma da secundária). Desta forma o tetraedro estaria se formando abaixo do plano horizontal que contém sua base, gerando uma altura negativa. Por outro lado, se considerarmos a não existência deste tetraedro, ou seja, seu volume nulo, entendendo que seu volume está incluso no volume das outras pirâmides, observamos que as pirâmides formadas são, de fato, equivalentes àquelas formadas no 1º caso.

Figura 38 – Recorte da planilha estudada – detalhe especial no 2º caso

1º caso: Diagonal princ. maior ou igual a diag. secundária						V1	V2	V3	Vt	litros	
						6666,67	6666,667	1030000	1043333	1043,33	
									1040000	1040,00	
→	103	103		0	0						
	103	107		0	4						
						Trap.	Trap.	Tetraedro	Prisma		
2º caso: Diagonal princ. menor ou igual a diag. secundária						V1	V2	V3	V4	Vt	Litros
						6666,67	6666,667	-6666,7	1030000	1036666,7	1036,67
→	103	103		0	0					1040000	1040,00
	103	107		0	4						
	TRIÂNG. DA BASE DO TETRAEDRO					TRIÂNGULO RET 1 (t1)			TRIÂNGULO RET 2 (t2)		
	L1	L2	L3			Cat 1	Cat2	Hip	Hip *	Cat2' **	
	100,00	100,00	141,42			0,00	141,42	141,42	-4,00	-4,00	
	Semip.	Área	Alt. do tet.								
	170,71	5000,00	-4,00								
* A hipotenusa do triâng. ret.2 é dada pela diferença entre o Cat1 e a diferença entre as arestas menores											
** Os triângulos 1 e 2 são semelhantes, assim, multiplicando a razão dada pelas hipotenusas pela med.											
do Cat2 (cat. maior no t1), obtem-se o Cat2' (cat. maior no t2), que corresponde a **altura do tetraedro**											
				Vt	litros						
3º caso	Iguais: duas a duas			1030000	1030,00					960	1010
				1040000	1040,00						
→	103	103	←							960	1010
	103	107									
4º caso	Iguais: três menores					V1	V2	Vt	litros		
						13333,333	1030000	1043333	1043,33		1043,33
								1040000	1040,00		
→	103	103	←	0	0						1040
→	103	107		0	4						

Fonte: Print da planilha estudada no grupo

Tendo que encerrar o encontro em função do adiantamento do horário, o aluno A_3 responsabilizou-se em refazer a planilha, levando em conta as conclusões deste encontro, ficando a análise final com encerramento da pesquisa para o próximo encontro.

Quadro 19 – Análise da 14ª Etapa – Encontro 9 (E9) – 7ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Exposição de A_3: Sobre métodos de cálculo de volume Sobre a comparação dos métodos Discussão sobre resultados iguais com decomposições diferentes para o mesmo prismóide	- fórmulas para volume de prismóides. - métodos de decomposição do prismóide e método das médias das alturas. - demonstrações matemáticas: análise de casos particulares.	I – A – d, II – B – c, II – B – d. II – B – c. II – B – c, II – B – d.	- apresentação para o grupo de solução do problema de modelagem; - desenvolvimento matemático e computacional próprio de A_3; - organização de dados com o resultado final da modelagem. - idem anterior. - idem anterior, porém com desenvolvimentos de demonstrações em linguagem matemática e argumentação com materiais concretos.
Todo o triângulo corresponde a um trapézio com uma das bases igual a zero	-generalização de proposições; - transformações de figuras planas.	I – B – c, I – B – d.	- análise conjunta a partir de coincidência numérica.
Reclassificação dos prismóides e revisão de métodos	- equivalência volumétrica; - reestruturação de métodos de modelagem	I – B – c, I – B – d, II – B – d	- generalizações de modelos. Decisão coletiva; - ação individual de aperfeiçoamento do modelo: ciclo de modelagem (refinamento do modelo)

Fonte: Elaborado pelo autor

15ª Etapa – Encontro 10 – 8ª semana

Novamente reunidos para o último encontro, buscamos nos concentrar na análise final da pesquisa e uma avaliação do processo.

Passamos de imediato a discutir a atividade desenvolvida em casa pelo aluno A_3 que contou com a ajuda do professor pesquisador.

A_3 apresentou, a planilha (com uso de projetor) dizendo que apenas digitou todas as quadras de números na nova planilha já organizada e encaminhada pelo professor. A planilha foi revista pelo grupo, e logo em sequência efetuamos a soma dos valores parciais de cada caso e constatamos os resultados apresentados na Figura 39. A diferença entre os valores da decomposição em relação a média foi considerada bastante pequena (965,10 litros), representando menos de 1,5%, o que nos leva a crer que a média, na forma que foi efetuada é uma boa estratégia de cálculo, já que acreditamos que a decomposição criteriosa que fizemos traz uma grande aproximação do valor real do volume de água presente no dia em que os dados foram coletados.

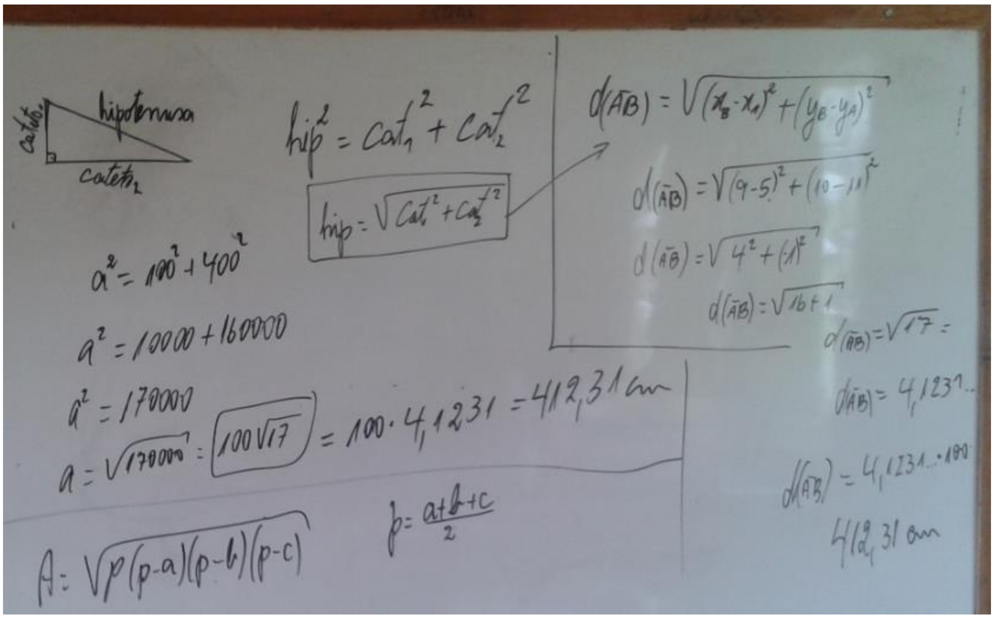
Figura 39 – Resultados comparativos entre decomposição e média

	DECOMPOSIÇÃO	MÉDIA	DIFERENÇA	% em rel. a média
TOTAIS	**66829,60**	65864,50	965,10	1,47%

Fonte: Print da planilha estudada no grupo

Na sequência, passamos a analisar outras formas de calcular o volume. Pensamos inicialmente em fazer uma média geral de todas as profundidades. Porém, para obtermos o volume, precisaríamos também da área superficial do açude. Então, retomando a discussão do encontro 8, lembramos da necessidade de aproximar a superfície do açude a um polígono e posteriormente dividi-lo em triângulos para calcular a área. O aluno A_4 disse ter calculado algumas distâncias, conforme o professor havia solicitado (Anexo I), porém disse que vai ser trabalhoso, pois vai dar muitas contas e ainda tem que aplicar a fórmula de Herão em cada triângulo. Como havíamos discutido sendo um possível procedimento de análise (em função do tempo), adiantamos o processo de cálculos e apresentamos, bastando complementar com algumas informações e fazer a devida análise. Primeiramente verificamos se havia concordância com o polígono pré-definido, levando-se em conta a planilha de dados. Posteriormente, com a finalidade de promover a socialização do proposto por A_4 (fórmula da distância entre dois pontos) fizemos um exemplo no quadro e discutimos a relação entre o Teorema de Pitágoras e a tal fórmula da distância entre pontos no plano, conforme pode-se constatar na Figura 40. O cálculo apresentado refere-se ao lado que está destacado (em amarelo) no polígono da Figura 41.

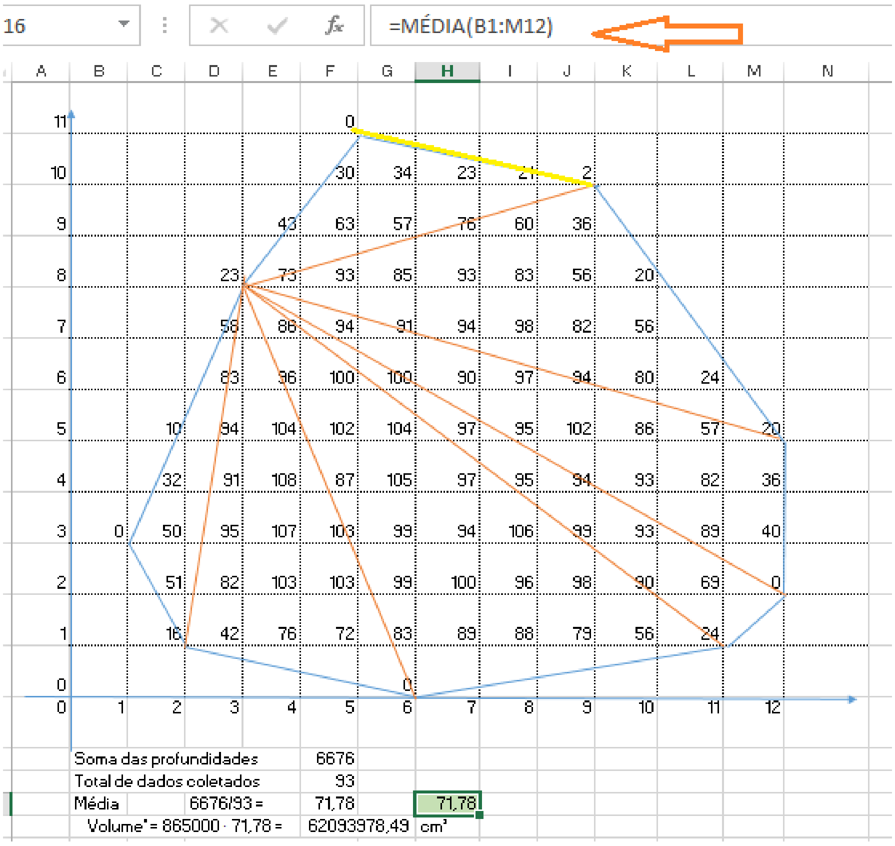
Figura 40 – Foto de atividade desenvolvida no quadro



Fonte: Registros do autor

Dando sequência, observamos que o procedimento de cálculo que se apresenta na coluna da direita na Figura 40 deve ser feito para cada um dos segmentos que formam os lados dos triângulos e depois aplica-se a fórmula de Herão para cada triângulo, sendo a soma correspondente a área aproximada, que multiplicada pela média das profundidades resulta no provável volume. “Mas para fazer a média temos que somar tudo e depois dividir pela quantidade de números, né?”, falou o aluno A_2. “Mas dá para fazer no computador, usando a função soma, é só arrastar”, complementa A_3. Como alguns destes procedimentos já estavam feitos, a fim de adiantamento (principalmente as fórmulas), conferimos e complementamos, com acompanhamento de todos, principalmente para que observem a facilidade encontrada com uso das ferramentas da planilha. Para calcular a média, mostramos que pode ser efetuada a soma e posteriormente dividir pela quantidade de números, mas que é ainda mais prático usar a função média, que o cálculo desta é dado imediatamente, como pode ser visto no detalhe da Figura 41. Para isso basta solicitar a função “média” e selecionar os números que se deseja calcular (=média(“números”)).

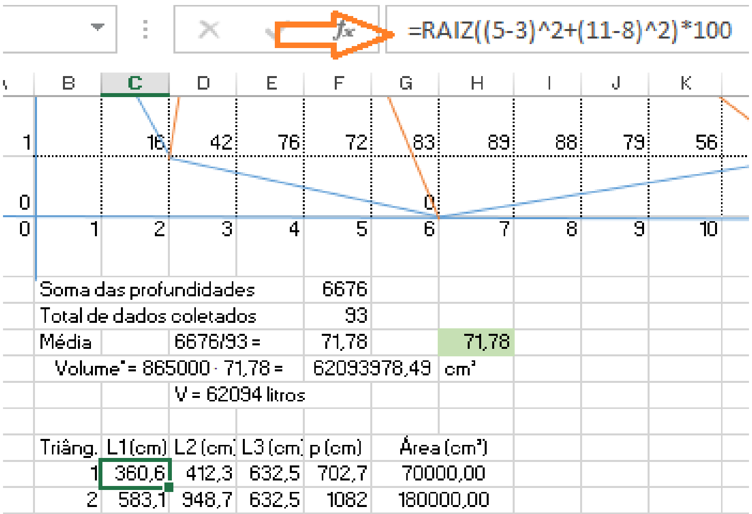
Figura 41 – Recorte da planilha com figura do açude ressaltando alguns aspectos



Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

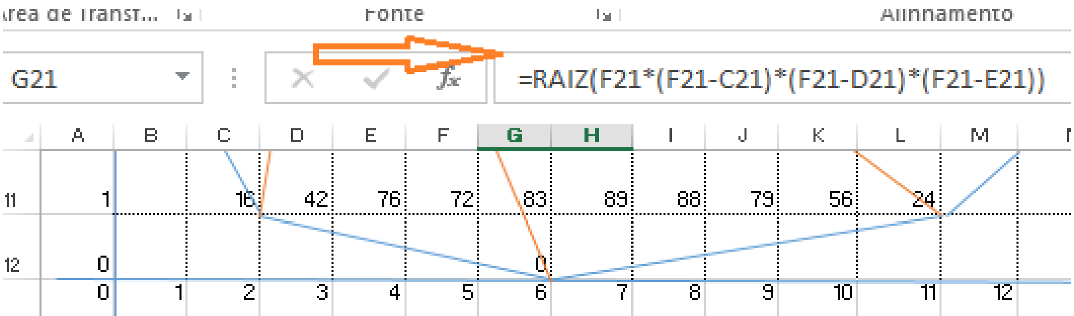
Para definir a área de cada triângulo, usamos primeiramente a fórmula da distância ou Pitágoras (Fig. 42) para encontrar os lados dos triângulos e posteriormente Herão (Fig. 43) para determinar a área.

Figura 42 – Recorte da planilha para destacar a fórmula da distância



Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

Figura 43 – Recorte da planilha para destacar fórmula de Herão



	Triâng.	L1 (cm)	L2 (cm)	L3 (cm)	p (cm)	Área (cm²)
14	Soma das profundidades				6676	
15	Total de dados coletados				93	
16	Média		6676/93 =		71,78	71,78
17	Volume* = 865000 · 71,78 =				62093978,49	cm³
18			V = 62094 litros			
21	1	360,6	412,3	632,5	702,7	70000,00
22	2	583,1	948,7	632,5	1082	180000,00
23	3	300	948,7	1082	1165	135000,00
24	4	141,4	1063	1082	1143	75000,00
25	5	509,9	1063	854,4	1214	215000,00
26	6	412,3	707,1	854,4	986,9	145000,00
27	7	223,6	707,1	538,5	734,6	45000,00
28	Área Total					865000,00

Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

Por fim, definimos o volume através do produto da área total pela média das profundidades, constatando uma diferença maior entre os resultados, quando comparado com os cálculos adotados anteriormente. Na discussão, acordamos que isso pode ter ocorrido devido ao cálculo da área, pois o polígono da superfície pode admitir formatos e valores de áreas diferentes. Estes resultados estão expressos na Figura 44.

Figura 44 – Recorte da planilha destacando resultados

	V(l)	Dif. em rel. a méd.	Dif. em rel. a dec.
Volume*	62094	-5,72%	-7,09%
Volume**	65864,5	0,00%	-1,44%
Volume***	**66830**	1,47%	0,00%

Volume*** - volume* = 4735,6 litros

* Volume calculado a partir do produto da área superficial (polígono estimado) pela média das profundidades ("medião" dos dados coletados);

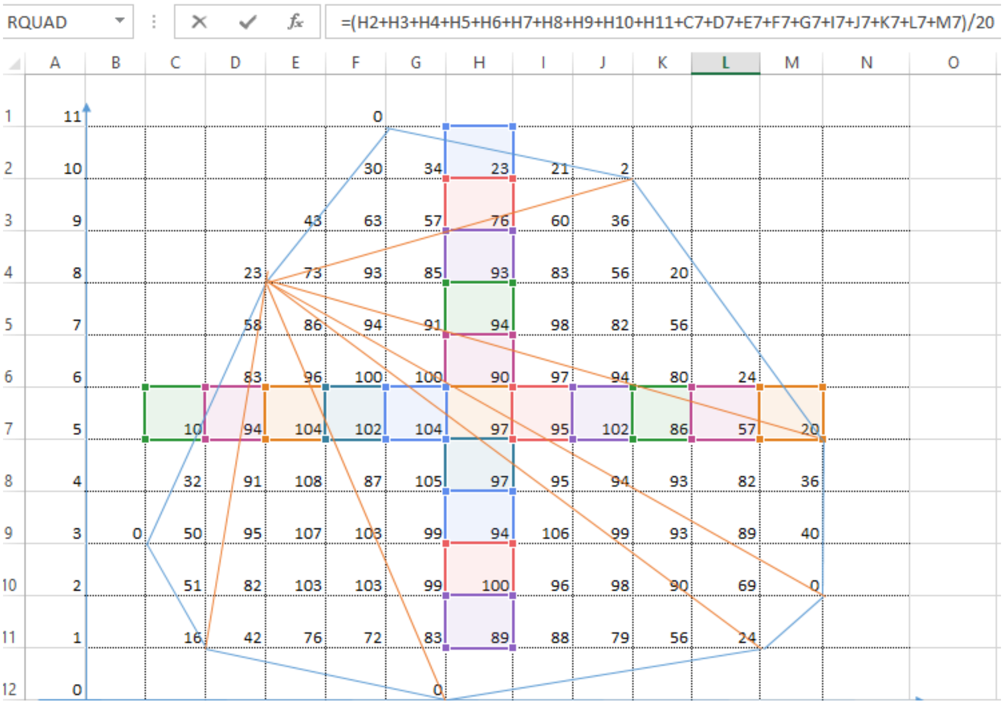
** Volume calculado a partir da soma dos volumes de todos os prismóide, considerando-os prismas com base de 1m² e altura correspondente a média das quatro arestas verticias que os cmpõem.

*** Volume calculado a partir da soma dos volumes de todos os prismóides, levando-se em conta as decomposições em prismas e pirâmides.

Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

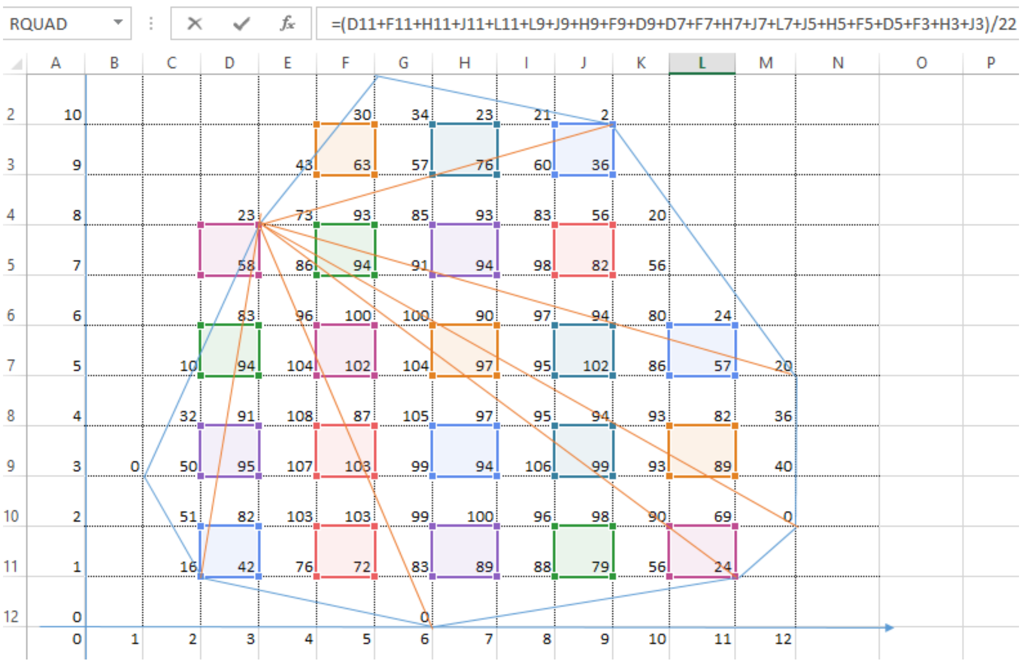
Além do cálculo do volume a partir da média geral (“medião”), fizemos também alguns cálculos a partir de outras médias, usando partes dos valores coletados, como destaca-se nas Figuras 45 e 46.

Figura 45 – Dados da “Média cruzada” com 20 dados



Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

Figura 46 – Dados da “Média 1” com 22 dados



Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

Os resultados destas duas amostras, bem como de outras duas que constam nos Anexos J e K, estão expressos na Figura 47, ou seja, “Média cruzada com 20 dados” refere-se a amostra da Figura 45 e “Média 1 com 22 dados: 2 em 2m” refere-se a amostra da Figura 46.

Figura 47 – Comparativo de resultados

Considerando parte dos dados		Volume	Dif. em rel. a méd.	Dif. em rel. a dec.
Média cruzada com 20 dados	81,35	70367,75	6,84%	5,29%
Média 1 com 22 dados: 2 em 2m	79,14	68452,95	3,93%	2,43%
Média 2 com 22 dados 2 em 2m	73,36	63459,55	-3,65%	-5,04%
Média com 8 dados	65,13	56333,13	-14,47%	-15,71%

Fonte: Print de planilha trabalhada no grupo

A partir desta experiência constatamos que quanto maior a quantidade de dados coletados, melhor será o resultado e concluímos que na prática pode-se calcular o volume usando a média das profundidades e a área aproximada da superfície, porém quanto mais preciso queremos que seja o resultado, maior deve ser a precisão na coleta destes dados, mais dados devemos coletar, sempre respeitando critérios definidos a partir do contato direto com a situação a ser modelada.

Finalizando nosso trabalho com o grupo, fizemos uma breve análise do Apêndice D que refece-se ao produção de peixes da espécie tilápias e sugerimos mais pesquisas para quem tem interesse no assunto da criação. Na sequência encaminhamos uma avaliação por escrito, do trabalho realizado, conforme consta no Anexo L.

Quadro 20 – Análise da 15ª Etapa – Encontro 10 – 8ª semana

Observações de aprendizagens	**O que foi aprendido?**	**Categorias**	**Comentários**
Discussão de novas formas de abordagem da situação	- distância entre dois pontos; - calcular média na planilha; - aplicação da fórmula de Herão	I –A – d, I – B – a, I – B –b, II – B – a, II – B – d.	- atividades individuais e coletivas com aplicação de fórmulas (consideradas complexas para tal nível de escolaridade), com destaque para a atenção e nível de discussão.
Comparação de métodos de cálculo do volume do açude	- questionar resultados; - avaliar possibilidades;	I – A – d, I – B – d, II – A – d.	- atividades individuais e coletivas de aplicação de conhecimentos já dominados; - análise de resultados de modelagem por comparação com outros métodos

	- volumes aproximados		mais simples (do ponto de vista matemático), porém com sentido lógico e aceitáveis como aproximação.

Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS ENVOLVENDO MODELAGEM

Visando responder “como ocorre a aprendizagem de conceitos matemáticos em atividades de modelagem, associadas a outras atividades de ensino”, criamos o Quadro 21 a partir dos quadros de análise apresentados anteriormente (após cada relato), com o intuito de compilar as respostas por categorias de observação e análise. Não se trata de evidenciar valores numéricos precisos, algo fechado, até porque estas categorias foram observadas a partir de atitudes e comentários, que por natureza humana, estão imbuídos de subjetividade. Além do que a própria análise é subjetiva, pois atitudes e comentários tem interpretações relativas. Por outro lado, a frequência de tais categorias buscam auxiliar, de modo geral, a argumentação e defesa dos resultados da pesquisa.

Lembramos que as categorias I e II, referem-se aos agentes das ações de aprendizagem, ações coletivas ou individuais, respectivamente. As categorias A e B, referem-se ao tipo de atividade didática, com modelagem ou com outros métodos de ensino, respectivamente. Já as subdivisões referem-se: a) aprendizagem de conceitos; b) aprendizagem das propriedades; c) domínio da linguagem matemática e c) aplicação em situações novas.

Quadro 21 – Frequências observadas por categorias de análise

Categorias	A				Sub-total	B				Sub-total	TOTAL
	a	b	c	d		a	b	c	d		
I	4	6	10	17	37	11	7	8	6	32	69
II	1	0	2	3	6	9	8	13	17	47	53
TOTAL	5	6	12	20	43	20	15	21	23	79	122

Fonte: Elaborado pelo autor

Para melhor direcionamento de nossa análise, retomamos os procedimentos da pesquisa, lembrando que esta, fora conduzida a partir da aplicação de três sequências didáticas, sendo uma situação de modelagem (S_1), trabalhada apenas com o grupo de pesquisa, e as demais (S_2

e S_3), abordando conteúdos previamente programados, visando a sistematização do conhecimento matemático, com uso de diferentes metodologias, trabalhadas com toda a turma, da qual o grupo faz parte. Portanto, as sequências S_2 e S_3, não apresentaram, necessariamente, caráter de dependência em relação à situação de modelagem, nem mesmo a modelagem apresentou dependência direta das demais sequências, até porque, se S_1 fosse pré-requisito para as outras, ou vice-versa, quando trabalhadas com grupos diferentes (grupo da modelagem e turma) deixariam uma lacuna que atrapalharia o processo de ensino e aprendizagem de matemática para os alunos não participantes da pesquisa. Sendo assim, nossa análise toma rumo nas expectativas de aprendizagem, típicas da situação de modelagem, e na complementariedade apresentada nas diferentes aplicações e generalizações que são oriundas, em especial, das sequências S_2 e S_3, por isso ditas complementares.

A situação de modelagem, com seu aspecto investigativo, caracterizada como abordagem empírico-analítica, foi utilizada nesta pesquisa, como "pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria de matemática" (Bassanezi, 2002, p. 38), além, de servir como referência para o professor/pesquisador observar como ocorre tal aprendizado quando esta metodologia é associada com outras, corriqueiras do ambiente escolar.

Na pesquisa, durante a execução das sequências didáticas programadas, relatadas em cada etapa, pode-se observar que o professor (assumindo o papel de observador atuante) modifica a programação e faz adequações metodológicas conforme as necessidades, sempre visando prover melhores condições de aprendizagem.

Tendo em vista as frequências apresentadas no Quadro 21, valores totais, podemos inicialmente observar que quanto aos agentes de aprendizagem há um leve predomínio do aprendizado coletivo (I) em relação ao individual (II). Como pode ser visto, esse predomínio se concretiza devido a supremacia desta categoria nas atividades de modelagem (A). Entendemos que isso ficou evidenciado pelo diálogo, característica marcante das atividades de modelagem. Por se tratar de uma investigação realizada em grupo, a aprendizagem (nas quatro subdivisões observadas) tendeu a acontecer de forma coletiva. As características do diálogo presenciado nesta atividade, como é possível observar nos relatos descritos, são do tipo que segundo Alro e Skovsmose, *apud* Neto e Golveia (2015, p. 165), tratam como pontos importantes para o desenvolvimento da democracia na sala de aula ("realizar uma investigação, correr riscos, promover a igualdade") e que a partir da sala "pode se espalhar para toda a sociedade". Por outro lado, nota-se que nas atividades relacionadas a categoria B (independentes da modelagem) destaca-se a aprendizagem individual (II). Nesse aspecto, entendemos que há uma tendência metodológica de explicações individuais, associadas ao interesse específico de cada aluno, bem como um diferencial em relação às resoluções de exercícios (em sala e em casa) que permitem interpretações e generalizações individualizadas e específicas.

Ao analisarmos as frequências da categoria A no Quadro 21, observamos que a subdivisão d (aplicação em situações novas) se sobressai em relação as demais. Nesse tipo de atividade a linguagem matemática aparece moderadamente e são poucas as atividades de efetiva aprendizagem de conceitos e propriedades. Embora a frequência de aprendizagem de conceitos e propriedades (A-a e A-b) tenha sido baixa no ato de modelar, ficou evidenciado (conforme os relatos) que os encontros de modelagem promoveram abordagens específicas, com uso de metodologias variadas, que levaram a sistematização do saber, vindo a contribuir na sequência das atividades e na efetivação dos modelos, levando-nos a defender que a modelagem necessita de abordagens paralelas, que estabeleçam outras conexões para a efetivação das generalizações.

Outro ponto observado na modelagem é que o ato da abstração ocorre quando os alunos expressam o problema real na forma de linguagem, geralmente oral, quando simulam a situação esboçando as ideias (como pode-se ver nos relatos – figuras e depoimentos), momento em que há o deslocamento para a categoria B, tanto de forma coletiva, quanto individualmente, oportunizando aplicações de conhecimentos já interiorizados e promovendo novas aprendizagens. Um fato característico que chamou nossa atenção, ocorreu na 2ª etapa, quando um aluno toma a iniciativa de usar uma terna pitagórica para determinar um ângulo reto para o vértice do retângulo. Esta aplicação parece-nos um caso isolado, pois precisaria usar Pitágoras para resolver tal situação? E mais, será que esta mesma situação de modelagem aplicada a outro grupo traria tal conteúdo em pauta?

No exemplo discutido no parágrafo anterior percebemos que a socialização do conteúdo (Teorema de Pitágoras) foi muito importante para todo o grupo. Por um lado, oportunizou uma aplicação e contribuiu para o domínio de linguagem (categoria A) para quem já conhecia, por outro, serviu como iniciativa para a uma abordagem mais precisa em sala de aula (deslocando para a categoria B), oportunizando a aprendizagem de propriedades, domínio de linguagem e generalizações, tanto coletivas, quanto individuais. Embora não estivesse programada inicialmente, a abordagem tornou-se indispensável para as novas situações surgidas nas etapas seguintes da atividade de modelagem (investigação). Neste caso evidencia-se a importância da modelagem contribuindo para a significação que posteriormente encaminha para a generalização do conhecimento científico. Ainda neste aspecto, parece-nos notável maior facilidade na assimilação do conteúdo para aqueles que vivenciaram a situação da modelagem, enfatizando, ao nosso ver, o que frisa a BNCC, no sentido de que é preciso “garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas". (BRASIL, 2017, p. 263).

Se observarmos os quadros de análise, feitos após os relatos de cada etapa associada à modelagem, veremos que em vários deles, aparecem códigos relativos a categoria B, pois evidenciamos nesses encontros a presença de conteúdos/conhecimentos que requerem um olhar diferenciado (fora da modelagem) para que a assimilação possa acontecer. Percebe-se aí um deslocamento da atenção do problema a modelar em duas direções: 1) do conhecimento matemático necessário para a sua solução e 2) da sistematização do saber, que abre caminhos para novas aplicações. No primeiro caso evidencia-se uma necessidade para o ato de modelar, enquanto no segundo, destaca-se a intencionalidade do professor do que se quer ensinar, formalizando o que Vygotsky, (*apud* Moysés, 1997, p. 35) trata de conhecimentos científicos – "aqueles sistematizados e transmitidos intencionalmente". Tais situações muito presentes nesta pesquisa, ajudam a justificar o fato da frequência ser consideravelmente maior na categoria B em relação a categoria A (Quadro 21), mesmo com número de horas-aula maior nos encontros de modelagem. Exemplos desse fato podem ser vistos já na 1ª etapa da pesquisa (Quadro 4) em dois momentos: quando se define a equivalência volumétrica de $1dm^3$ = 1litro, e na sequência, onde o sistema de três eixos é proposto a partir de uma intervenção do professor. Constata-se em ambos os casos a presença de metodologias complementares (categoria B), pois implanta-se conhecimento sistematizado que independe da modelagem, mas que passam a ser úteis para ela.

Voltando a nos referenciar ao Quadro 21, vemos que a categoria II-B apresenta frequência relativamente maior que as demais. Com isso podemos constatar que atividades que caracterizam a sistematização matemática, com uso de outras metodologias (fora da modelagem) a aprendizagem matemática ocorre de forma mais individualizada. Isso é compreensível, pois normalmente nestes casos, após a conceituação coletiva (como pode-se ver é a subdivisão predominante na categoria B (I-a)), costuma-se encaminhar para a resolução de exercícios, que auxiliam, principalmente, no aperfeiçoamento da linguagem matemática e na aplicação em situações novas, fortalecendo o aprendizado individual. Porém, a subdivisão B-d, aparece muitas vezes nas atividades de modelagem, principalmente quando o conhecimento individual (de conceitos e propriedades), oriundo de outras procedimentos metodológicos, passa a ser adaptado a uma situação nova, no caso, a própria investigação em andamento. É o caso, por exemplo, que observamos na 4ª etapa da pesquisa, onde o uso de linguagem oriunda da sala de aula (pra não dizer do livro didático) aparece, ao nosso ver, como excelente estratégia de organização (“plano cartesiano”, “coordenadas”, “vértice”, ...), semelhante ao que diz a BNCC:

> [...] Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, 2017, p. 263).

Na perspectiva da assimilação de conceitos e propriedades, bem como desenvolvimento da linguagem matemática e técnicas operacionais, as ações sensoriais têm papel importante, pois o contato físico com os objetos em estudo, permite ao aluno um diálogo consigo mesmo e com o grupo, em relação ao que está observando. É nesta hora que ele percebe o que já domina e o que necessita de maior estudo. As aulas expositivas ganham crédito maior, quando nelas fazem-se uso de material concreto (figuras em madeira, piso, teto, janelas...) para introdução/familiarização do conteúdo. Porém, para promover o desenvolvimento de funções psíquicas, as ações sensoriais precisam ser superadas, a fim de chegar às abstrações e generalizações, que levam o aluno a patamares mais elevados do conhecimento (Vygotsky, segundo Moysés (1997)).

Durante as aplicações das sequências S_2 e S_3 foram efetuadas várias generalizações que auxiliaram tanto na solução da situação de modelagem, como promoveram a sistematização do conhecimento matemático, proporcionando o desenvolvimento de competências e habilidades para visualizar aplicações deste a novas situações. Isso pode ser constatado, por exemplo no diálogo entre dois alunos que discutem o uso da fórmula de Herão e a fórmula básica da área de triângulos (A_4: “essa é boa, não precisa se preocupar com os ângulos”; A_3: “mas se sabe a altura, a outra é mais fácil”). No diálogo, observa-se que os alunos mostram certo domínio de conhecimento, com potencial para aplicações em diferentes situações, a ponto de observar, a existência de certa fragilidade na obtenção de elementos fundamentais para o cálculo (no caso base e altura dos triângulos), provavelmente imaginando situações fora do papel, onde as ferramentas simples (transferidor, esquadros...) não são suficientes. Por outro há o entendimento de que por vezes é vantagem ir pelo mais prático.

Outra situação de destaque foi a dedução da área do círculo, pois nos polígonos uma saída era observar a existência de triângulos. Já no círculo, o fato inicial de não enxergar possíveis triângulos sugere certo suspense, gerando novas expectativas, mas após breve mediação do professor, voltou-se novamente para triângulos (já interiorizado), quando da imaginação de infinitos triângulos com altura tendendo ao raio do círculo e a base tendendo a zero, um novo estágio do conhecimento vem à tona. Do conceito inicial de triângulos, os alunos observaram que cada setor do círculo, com base infinitamente pequena, pode ser visto como um triângulo cuja altura corresponde ao raio e, por fim, concluíram que a soma das áreas desses triângulos resulta na área do círculo. Portanto, parte-se de um conhecimento já interiorizado (área de triângulo), agrega-se a ele novos conceitos (setores transformam-se em triângulos sendo que a soma das bases corresponde ao comprimento da circunferência), atingindo um nível avançado de conhecimento (área do círculo), tal como é descrita a aprendizagem pela teoria de ZDP (Vygotsky).

Constatamos que na modelagem, como ferramenta de aprendizagem matemática, o papel do professor como mediador é fundamental, além de indicar um caminho (quando a situação foge do alcance dos alunos e estes não acham saídas), ele deve fazer questionamentos dos significados e prover meios cognitivos, que intencionalmente encaminham para os objetivos educativos, evitando respostas imediatas como a simples aplicação de uma fórmula, quando no conteúdo o processo é que traz o maior aprendizado. Reafirmamos Bassanezi (2002, p. 38) "[...] o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado". Neste sentido, durante a pesquisa, pelo menos dois casos chamaram nossa atenção: 1) quando da dedução da fórmula do volume da pirâmide (10ª etapa – iniciativa de um aluno: "por que dividir a área da base por três?") e 2) quando da determinação da altura do tetraedro, que necessitou de diálogo intenso ("emancipatório") para se chegar a uma generalização necessária, pois tratava-se de uma situação inicialmente sem saída. Ambos os casos, foram oriundos da situação de modelagem, necessitando de abordagens sistemáticas com uso de outras metodologias (com aulas expositivas, pesquisa em livros didáticos, conjecturas, exercícios e deduções) para que a efetivação do saber fosse concretizada. Nestes casos evidencia-se a categoria B presente em encontros de modelagem. No primeiro, não como necessidade para resolver o problema de modelagem, já no segundo, como estratégia de solução.

Ainda referindo-se aos casos anteriores, agora em especial ao primeiro, dois questionamentos são pertinentes: a) sabemos que apenas aplicando a fórmula do volume, já estaria resolvido o problema imediato da modelagem (afinal, quer se saber o volume), mas qual seria o aprendizado? e b) a dedução da fórmula, teve mesmo significado para ambos os grupos (grupo de modelagem e turma)?

Antes de discutir tais indagações, é importante observar que o assunto "volume de pirâmide" na turma, resulta a partir de uma sequência de passos e atividades conforme mostra a 9ª etapa e posteriormente a 12ª etapa (etapas realizadas com a turma). Diante das indagações, associadas aos fatos apresentados, destacamos a importância da teoria e a prática estarem juntas, uma complementando a outra, e que é papel do professor fazer as mediações necessárias para tornar a aprendizagem significativa para o aluno. De fato, concordamos com o que afirma Vertuan; Borssoi e Almeida (2013, p. 70-71), “o professor é um importante agente na interação já que dentre os diferentes sujeitos é ele quem já internalizou significados socialmente compartilhados referentes à temática em questão”.

Retomando agora o segundo caso, quando da determinação da altura do tetraedro, observamos que a modelagem traz em pauta, nesta etapa, com aplicabilidade indispensável, conceitos científicos, já interiorizados (base média, razão de semelhança, Teorema de Tales), abordados em outras situações, com conceituações e exercícios em sala de aula, necessitando agora de conexões específicas adaptadas para esta situação.

Em nossa visão, os casos discutidos acima evidenciam novamente a importância de metodologias associadas, que despertem a criatividade investigativa e também propõem resolução de exercícios com aplicação de conceitos, entre outras atividades. Não se trata de considerar uma metodologia melhor que a outra, mas sim de admitir as grandes contribuições com ares de complementariedade, que favorecem no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Por fim, há de se destacar ainda que nessa visão de metodologias associadas, normalmente surgem ferramentas de ensino e aprendizagem que promovem interesse e dinamismo. Nesta pesquisa a calculadora e a planilha eletrônica apresentaram um papel fundamental. Em nossa visão, a planilha eletrônica foi um excelente recurso, que além de diminuir a morosidade da atividade, disseminou a ideia de ferramenta útil para resolver situações problemas, servindo como incentivo ao enfrentamento de dificuldades que possam surgir em outras situações. Naturalmente observou-se a geração de novas expectativas de aprendizagem e socialização de conhecimento. A excelente discussão, encaminhando para conclusões fundamentais no grupo, certamente oportunizou grande aprendizado, tanto da matemática conceitual (operações, equações...) quanto do uso da informática nas mais diversas situações, inclusive, neste caso, auxiliando no apontamento de equivalências e erros.

A partir de observações sistemáticas com equivalências numéricas na planilha eletrônica, a retomada de conceitos com novas reflexões, nas duas últimas etapas da pesquisas, foi, sem sombra de dúvidas, mais um grande aprendizado oportunizado, que abre espaços para vermos a matemática, não como algo infalível ou com caminho absoluto e sim aberta, e muitas vezes questionável, culminando, inclusive com o que menciona a Proposta Curricular (2002, v.3, p. 16), “[...] o professor deve conceber a matemática como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos, e não como um saber que trata de verdades infalíveis e imutáveis". Neste aspecto, na modelagem encontra-se um espaço privilegiado, haja vista que suas fases são caracterizadas pela construção e validação dos modelos criados, permitindo uma reflexão, que reforçada pelo diálogo, encaminha a uma revisão com reformulação ou aperfeiçoamento de modelos quando necessário.

Fechando nossa análise frisamos que, durante a pesquisa, como foi relatado, muitas foram as oportunidades de aprendizagem, seja através do diálogo promovendo a interação, trazendo o conhecimento popular que passa a ser aperfeiçoado pelo científico, seja através das superações de dificuldades promovidas a partir da criatividade, pesquisa e mediação que estabeleceram conexões de saberes e levaram os envolvidos a patamares mais elevados do conhecimento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da perspectiva teórica e prática adotada neste trabalho, buscou-se subsídios para analisar como ocorre a aprendizagem de matemática com modelagem, associada a outras formas de ensino de matemática. Adotamos na pesquisa a técnica da observação atuante, aplicando três sequências didáticas associadas, para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Uma das sequências tratou-se de uma abordagem *empírico-analítica*, modelagem, que culminou no cálculo do volume de água de um açude, enquanto as demais, buscaram complementar conteúdos superficialmente abordados (ou não abordados) na modelagem, usando outras metodologias, com aulas expositivas, pesquisas, deduções de fórmulas e exercícios, que conforme Borges e Nehring (2008), são fundamentais para generalizações, visando a *totalidade do conhecimento matemático.* Alguns dos conteúdos trabalhados nessas sequências foram úteis na resolução do problema da modelagem.

Nossa pesquisa não inclui a verificação de quantidade nem qualidade de conceitos matemáticos aprendidos. Portanto, não estamos interessados em verificar, por exemplo, se os alunos entenderam a demonstração da fórmula do volume da pirâmide ou se eles sabem aplicá-la em outras situações. Interessa-nos identificar oportunidades de aprendizagem e como os alunos tentaram se apropriar do conhecimento. Entendemos que a verificação da aprendizagem, demandaria de mais etapas didáticas, com testes de aprendizagem e aplicação de novas atividades específicas para solução de dúvidas, desenvolvimento de prática com a linguagem e correção de interpretações equivocadas.

De acordo com os relatos e a análise realizada no capítulo anterior, com o uso das categorias de observação e análise, destacamos que a modelagem apresentou um grande potencial de interação, visto que, durante o processo de investigação da situação-problema, os alunos sentiram-se a vontade para dialogar, e, ao mesmo tempo, mostraram muito empenho e responsabilidade na resolução do problema. Foram vários os momentos de diálogo, com importantes reflexões e discussões em torno da situação a ser modelada, inclusive com uma excelente abertura para o uso de diferentes recursos ferramentais de aprendizagem. Porém, tomando a modelagem como metodologia única no ensino, na perspectiva de encontrar um modelo para a situação proposta, apresenta um risco de não haver as generalizações que concretizam o saber matemático, pois esta teria como meta a solução de um caso isolado.

No sentido da coletividade, nossa análise indica muitos fatores positivos da modelagem promovendo a socialização, contextualização e significação do conhecimento matemático, mas considera de suma importância a mediação do professor, ora questionando significados e resultados, ora fazendo citações de conceitos e propriedades, além fazer indicações de estudo em outras fontes.

Considerando as atividades de ensino de matemática, fora da modelagem, concluímos que estas, possuem características com predomínio individual de aprendizagem, oportunizando ao aluno interiorizar conceitos e propriedades, com aperfeiçoamento da linguagem matemática, oral e escrita (muitas vezes originadas no diálogo da modelagem), a partir de uma reflexão mais pessoal (na resolução de atividades e na pesquisa individual), que possibilita a formalização de um pensamento extensivo às generalizações, visualizando novas aplicações.

Portanto, concluímos que a modelagem é forte promotora de interesse e significação no ensino da matemática, porém, seu caráter de aplicação, restringe os conteúdos abordados àqueles utilizados na modelagem e não proporciona a discussão da verdade das proposições. Para tanto, há a necessidade de intervenções que sejam salutares, com abordagens diferenciadas (questionamentos, aulas expositivas, pesquisa e resolução de exercícios) que propiciam maiores oportunidades de aprendizagem e visem as generalizações almejadas. Devido a essas limitações, o uso da modelagem associada a outras técnicas de ensino mostra-se como uma estratégia metodológica que combina contextualização, exigências curriculares escolares e aspectos dedutivos da matemática.

Por fim, caracterizando uma espécie de Engenharia Didática, conforme defendem Borges e Nehring (2008), com aplicações de sequências didáticas complementares, envolvendo modelagem, ocorre ao mesmo tempo, a significação do saber e a promoção da totalidade do conhecimento matemático, identificadas nas muitas e diversificadas formas de diálogo, pesquisas e interações oportunizadas por esta associação. Destaca-se a presença ativa do professor nesse processo, como mediador e corresponsável. Conforme Brousseau (2009, p. 2), "nenhum professor pode garantir que todos os seus alunos vão aprender e compreender Matemática. O que ele pode e deve garantir são as condições didáticas necessárias para que os estudantes aprendam".

Ressaltamos que este trabalho abre caminho para uma reflexão mais profunda, que possa quantificar e qualificar a aprendizagem que ocorre a partir dessa prática metodológica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A matematização em atividades de Modelagem Matemática. **Alexandria** (UFSC), v. 8, p. 207-227, 2015.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. (Org). **Didática das matemáticas**. Lisboa: instituto Piaget, pp. 193-218, 1996.

BARBOSA, J. C. (2001). Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL. DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf >. Acesso em: 13 jan. 2018.

BARCELOS, Sérgio Renato. ***Software*** **Modellus e Modelagem Matemática:** relacionando conceitos matemáticos com fenômenos da física. 2017. 122 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Fronteira Sul, Curso de pós-graduação Profissional em Matemática (PROFMAT) – Chapecó, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150890065>. Acesso em: 14 jan. 2018.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Ed. Contexto. 2002.

BIEMBEMGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2002.

BORGES, P. A. P. e NEHRING, C. M. Modelagem matemática e sequências didáticas: uma relação de complementaridade. **Bolema**. Rio Claro, Ano 21, n.30, pp. 131-147, 2008.

BORGES, P. A. P. Aprendizagem de Matemática em atividades de Modelagem na Educação Básica. In: X CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **UEM.** Maringá, 2017.

BROUSSEAU, G. A cultura matemática é um instrumento para a cidadania. **Revista Nova Escola.** São Paulo. Dez. 2009. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/545/guy-brousseau-a-cultura-matematica-e-um-instrumento-para-a-cidadania>. Acessado em: 13 jan. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos:** segundo segmento de ensino fundamental: 5ª a 8ª série: Matemática, Ciências, Arte e Educação Física. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília. MEC/SEF/COEJA, 2002, v.3, 240 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)** – Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnologias. MEC/SEB, 2000, 58 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 20 jan. 2018.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. 1992. 460 f. Tese (Doutorado Educacional). Faculdade de Educação. Universidade de Campinas – Unicamp. Campinas, 1992.

FINO, C. N. Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. In: **Revista Portuguesa de Educação**, v. 14, n. 2, pp. 273-291, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2001.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido.** São Paulo: Paz e Terra. 1996.

KLÜBER T. E.; BURAK D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas**. Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

LIBÂNEO J. C. **Adeus professor, adeus professora?:** Novas exigências educacionais e profissão docente. 1998. Disponível em: http://musicaetic.com.br/acervo/Leitura-AdeusProfessorAdeusProfessora(LIBANEO).pdf. Acesso em: 14 jan. 2018.

MORAES, Roque. Análise de conteúdo. **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MARTINS, L. M. Implicações pedagógicas da escola de Vigotski: algumas considerações. In: MENDONÇA, S.G.L. e MILLER, S. **Vigotski e a escola atual: fundamentos teóricos e implicações pedagógicas**. Araraquara, SP: Junqueira&Marin; Marília, SP: Cultura Acadêmica, 2010.

MARTINS, J. B. Observação participante: uma abordagem metodológica para a psicologia escolar. **Semina: Ci. Sociais/Humanas**, Londrina, v. 17, n. 3, pp. 266-273, set. 1996.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NETO, S. C. G.; GOLVEIA, C. T. G. Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática: um olhar sobre a Obra de Alrø e Skovsmose. **Revista Educa,** Porto Velho, RO, v. 2, n. 3, pp. 159-166, 2015.

NOGARO I.; SCHEFFER N. M.; NOGARO A. **Ser professor na sociedade aprendente.** Disponível em: <www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/910.doc.>. Acesso em: 14 jan. 2018.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013. 72 p. ils.: Tabs.

ROSA, Roseli Scuinsani da. **Matemática, Evasão escolar e Educação de Jovens e Adultos:** que relação é essa?. 2010. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, **c**urso de pós-graduação da Faculdade de Educação – Passo Fundo, 2010.

Disponível em: <https://secure.upf.br/pdf/2010RoseliScuinsaniDaRosa.pdf.>. Acesso em: 08 jan. 2018.

SANTA CATARINA. Governo do Estado. **Proposta Curricular de Santa Catarina:** Formação Integral na Educação Básica. Secretaria de Estado da Educação - sed. 192 p. 2014.

SAVIANE, D. **Escola e Democracia** - Ed. Comemorativa. Campinas, SP: Autores Associados, 2008. - (Coleção educação contemporânea).

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, pp. 1021-1047, ago. 2012.

SOUZA J. R. **Novo olhar Matemática.** (Componente Curricular – Ensino Médio – Matemática, v. 3). 2ª ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber Matemática.** (Componente Curricular – Ensino Fundamental – Matemática, (8)). 3ª ed. São Paulo: FTD, 2015.

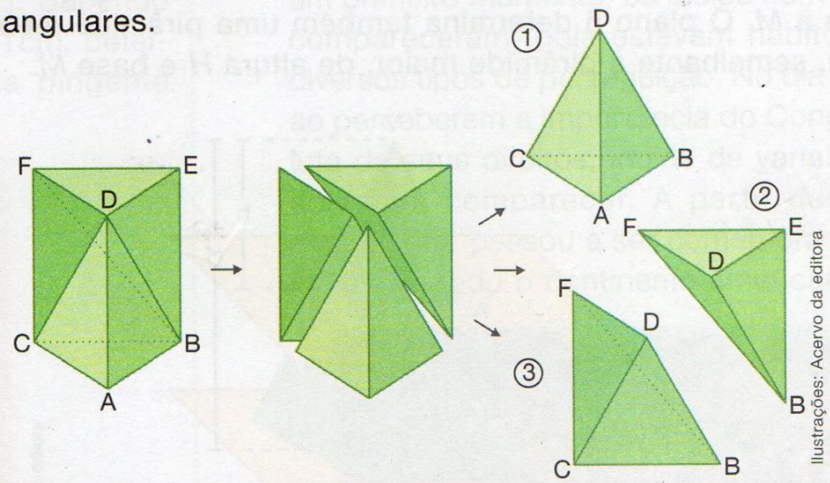
TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, pp. 443-466, set./dez. 2005.

VERTUAN, R. E.; BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. O Papel da Mediação e da Intencionalidade em Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 7, p. 63-80, 2013.

APÊNDICE A

Volume de uma pirâmide qualquer

Obtemos o volume de uma pirâmide relacionando prismas e pirâmides. Para isso, consideramos um prisma de base triangular e o decompomos em três pirâmides triangulares.



Podemos notar que as pirâmides **1** e **2** possuem bases congruentes $(\Delta ABC \equiv \Delta DEF)$ e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides **1** e **2** possuem o mesmo volume.

Note também que as bases das pirâmides **2** e **3** também são congruentes $(\Delta BEF \equiv \Delta BFC)$ e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto D ao paralelogramo BEFC. Assim, as pirâmides **2** e **3** possuem o mesmo volume.

Portanto, as pirâmides **1**, **2** e **3** possuem o mesmo volume, isto é: $V_1 = V_2 = V_3$

Como $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$ e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

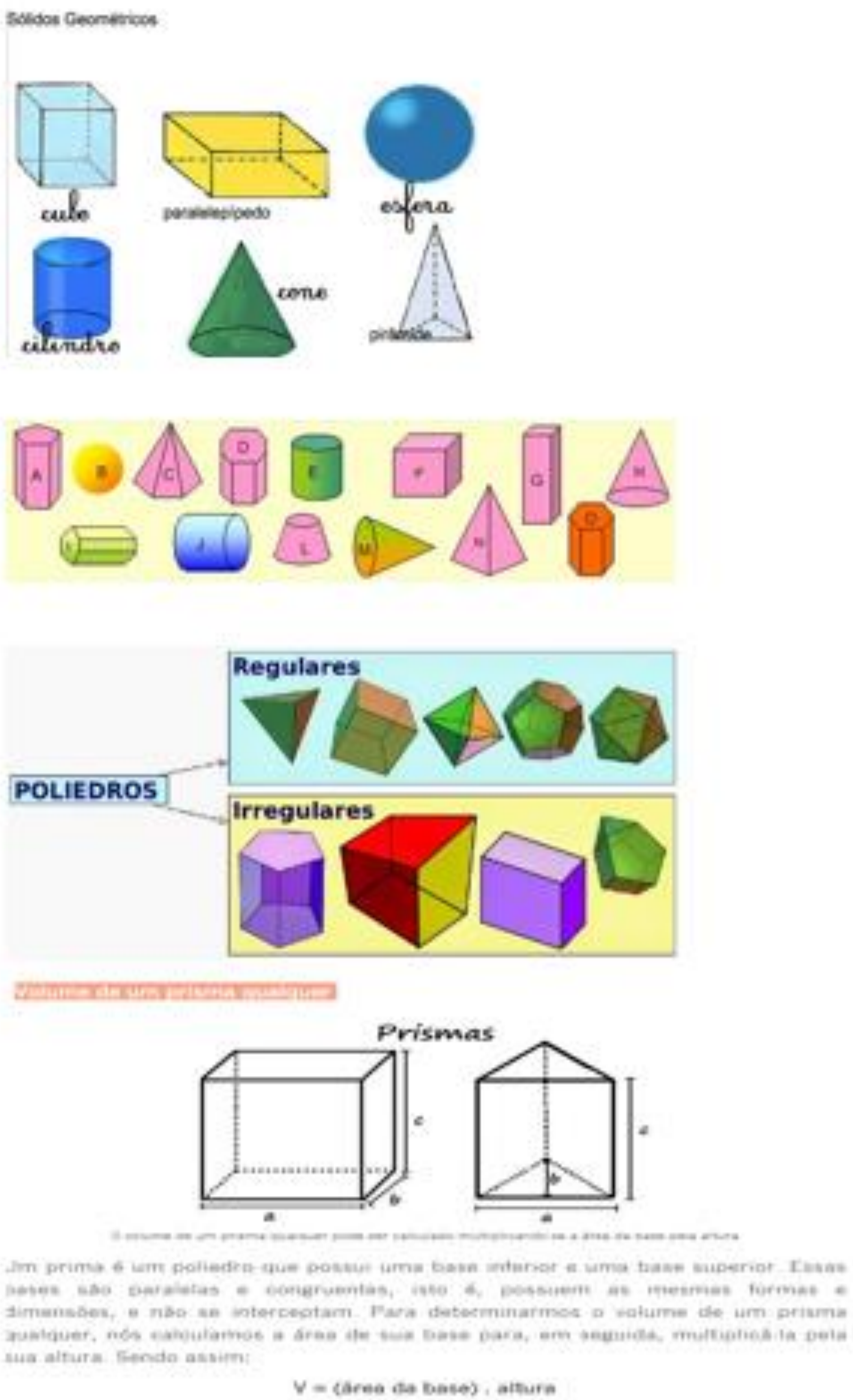
$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Estudamos anteriormente que o volume do prisma é dado por $V_{prisma} = A_b \cdot h$. Assim:

$$V = \frac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

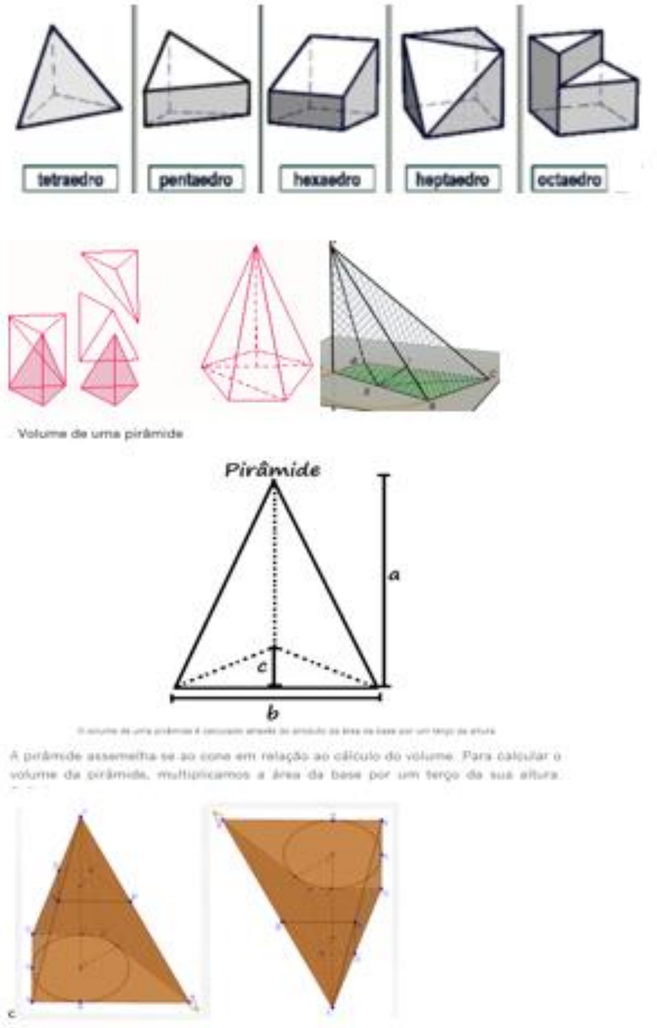
Fonte: Livro didático – E.M. v. 3 (SOUZA, 2013)

APÊNDICE B



Fonte: Elaborado pelo autor a partir imagem da internet

APÊNDICE C



Fonte: Elaborado pelo autor a partir imagem da internet

APÊNCICE D

Criação de tilápias - dimensionamento dos tanques

O dimensionamento dos tanques é uma etapa que deve ser feita com critérios, pois trabalhar com um número além do necessário eleva o custo de implantação da piscicultura e ocupa maior área

O dimensionamento, isto é, a determinação do número de tanques que será necessário, bem como a capacidade de cada um deles, na criação de tilápias, deverão ser estabelecidos em função do volume de produção de peixes que se deseja obter. Essa é uma etapa que deve ser feita com critérios, pois, trabalhar com um número de tanques além do necessário elevará o custo de implantação da *piscicultura*, além de ocupar maior área do terreno, sem necessidade. E, por outro lado, se o número de tanques for inferior ao necessário, não será possível produzir a quantidade de *peixes* desejada.

Tanques de terra: dimensionamento

Os *tanques de terra*, utilizados na fase de recria, deverão possuir formato retangular para facilitar a captura dos peixes com rede. A fase de recria dura aproximadamente dois meses e, depois deste tempo, os filhotes serão transferidos para os tanques-rede de engorda, onde permanecerão por mais quatro meses, em média. Portanto, o período de recria será igual a meio período de engorda. Assim, um tanque de recria terá capacidade para atender a dois tanques de engorda.

Tanques-rede: dimensionamento

Já os *tanques-rede*, utilizados na fase de engorda, deverão possuir 2 m de cada lado e 1,20 m de profundidade.

Tanques de terra: determinação do número de tanques

Para determinar o número necessário de tanques de recria e de engorda será preciso saber a capacidade de suporte da represa, a qual refere-se à quantidade máxima de tanques-rede que poderá ser instalada dentro de uma represa. A capacidade de suporte de uma represa é determinada dividindo-se a sua área alagada (inundada) pela quantidade média, em quilos, de peixes que será retirada de cada tanque-rede.

Tanques de terra: dimensionamento dos tanques-rede

Em um tanque-rede com dimensões de 2 x 2 x 1,2 m (volume útil = 4 m^3), ou seja, com volume útil de 4 m^3, poderão ser mantidas, em média, 1.500 tilápias. Isso significa dizer que, durante a fase de engorda, em cada metro cúbico de tanque-rede, poderão ser mantidas 375 tilápias (1.500 tilápias por TR / 4 m^3 de TR = 375 tilápias/ m^3). No final da fase de engorda, cada tilápia estará pesando, em média, 400 g (0,4 kg). Assim, de cada tanque-rede serão retirados 600 kg de peixe (1.500 tilápias/TR x 0,4 kg/tilápia = 600 kg), ou seja, em cada m^3 de tanque-rede serão produzidos 150 kg de tilápias (375 tilápias/ m^3 x 0,4 kg/tilápias = 150 kg de tilápias/ m^3 de TR).

Fonte: https://www.cpt.com.br/cursos-criacaodepeixes/artigos/criacao-de-tilapias-dimensionamento-dos-tanques

ANEXO A – Termo de Assentimento

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) para participar da execução do projeto de pesquisa intitulado **"A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM"** que está sendo realizada na EEB Catharina Seger – Distrito Cerro Azul, Palma Sola – sob a responsabilidade do pesquisador Prof. **Mestrando Carlinho Augustinho Horn, que tem como Orientador Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges da Universidade Federal Fronteira Sul, Campus de Chapecó, SC.**

Esta pesquisa é o trabalho de conclusão de Mestrado do professor responsável e culminará em sua dissertação.

Nesta pesquisa nós estamos buscando **desenvolver atividades de Matemática relacionadas com os conteúdos matemáticos da Educação Básica utilizando uma proposta de Modelagem Matemática.**

A proposta visa trabalhar com um grupo de seis alunos, durante aproximadamente oito semanas, com um encontro semanal no contra turno, com duração aproximada de duas horas, agendado pelo professor.

Durante sua participação, juntamente com seu grupo de estudos, buscarão resolver um problema associado com a criação de peixes, mais precisamente, precisarão medir e calcular a quantidade de água contida em um açude real. Para tanto, precisarão usar conhecimentos matemáticos, levantando hipóteses, fazendo desenhos, construindo maquetes e tirando conclusões que visam resolver o problema proposto. Cada etapa das atividades será orientada e registrada pelo professor.

Os resultados da pesquisa serão publicados, porém sua identidade será preservada. *Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada a pesquisa.*

A pesquisa pretende trazer benefícios para a **prática da Matemática nas escolas, ampliar os conhecimentos individuais de cada participante do grupo, bem como desenvolver espírito de equipe e colaboração**, dentre outros objetivos provenientes do processo de execução da proposta.

Você não é obrigado a participar da pesquisa se não desejar, mesmo que seu responsável legal tenha consentido na sua participação.

Uma via original deste Termo de Esclarecimento ficará com você e sua fam.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com a direção da escola ou com o **Prof. Carlinho Augustinho Horn - Tel. (49) 99959 9253**.

Eu, ________________________________, portador(a) do documento de Identidade ____________________, responsável pelo aluno ______________________, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo e autorizo a participação do aluno na pesquisa. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações a respeito da execução de tal atividade.

____

Pai/ Mãe/ Responsável

***Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo* voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.**

Palma Sola, 30 de agosto de 2017.

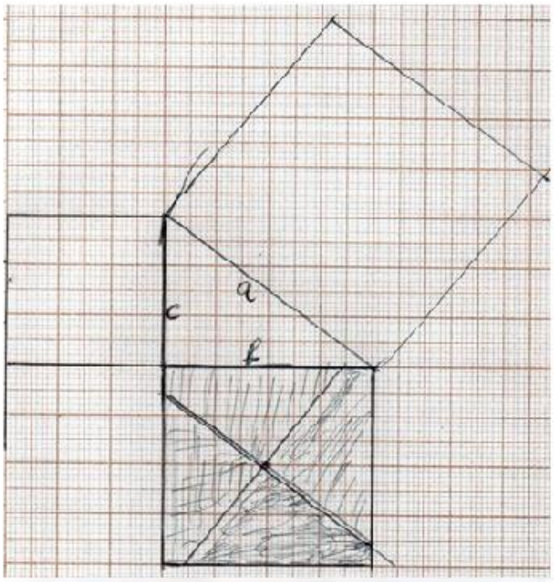
____

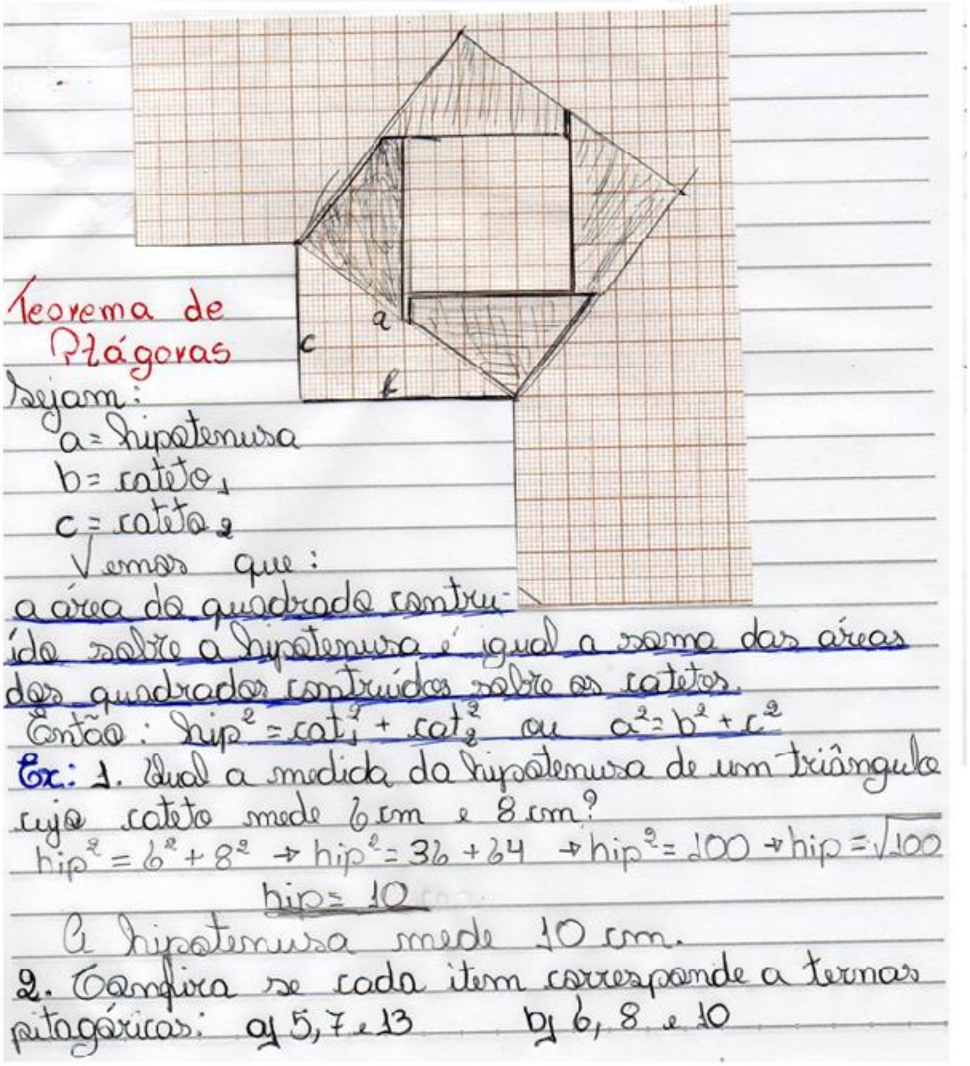
Aluno

____

Professor Pesquisador – Carlinho Augustinho Horn

ANEXO B – Exercícios e anotações feitos durante aplicação de S_2




Teorema de Pitágoras

Sejam:

a = hipotenusa

b = cateto 1

c = cateto 2

Vemos que:

a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Então: $hip^2 = cat_1^2 + cat_2^2$ ou $a^2 = b^2 + c^2$

Ex: 1. Qual a medida da hipotenusa de um triângulo cujo cateto mede 6 cm e 8 cm?

$hip^2 = 6^2 + 8^2 \to hip^2 = 36 + 64 \to hip^2 = 100 \to hip = \sqrt{100}$

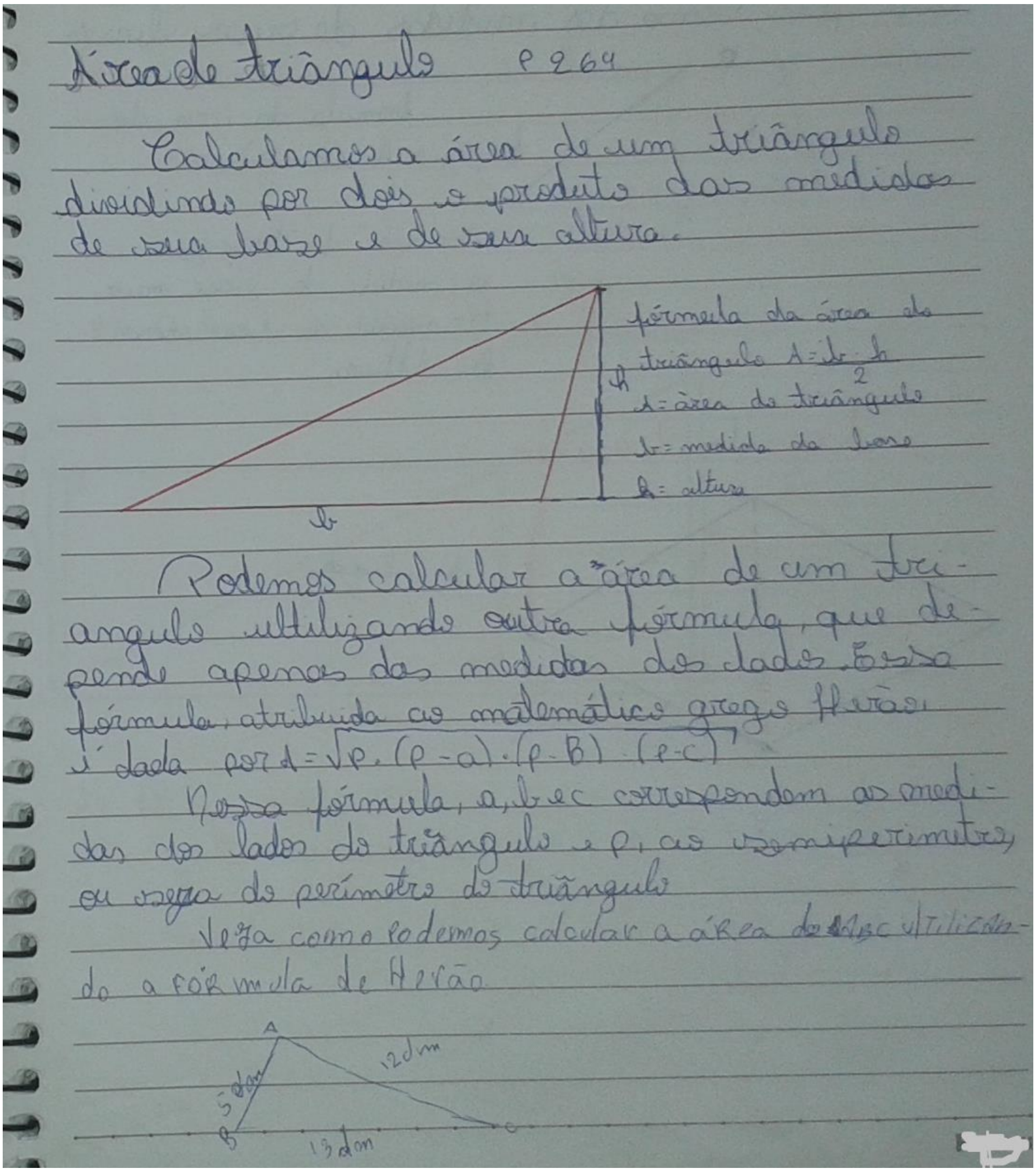
$hip = 10$

A hipotenusa mede 10 cm.

2. Confira se cada item corresponde a ternas pitagóricas: a) 5, 7 e 13 b) 6, 8 e 10

Fonte: Registro no caderno de um aluno da classe

ANEXO C – Fórmula de Herão transferida para caderno de aluno durante aplicação de S_2



Área do triângulo p 264

Calculamos a área de um triângulo dividindo por dois o produto das medidas de sua base e de sua altura.

fórmula da área do triângulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$

A = área do triângulo

b = medida da base

h = altura

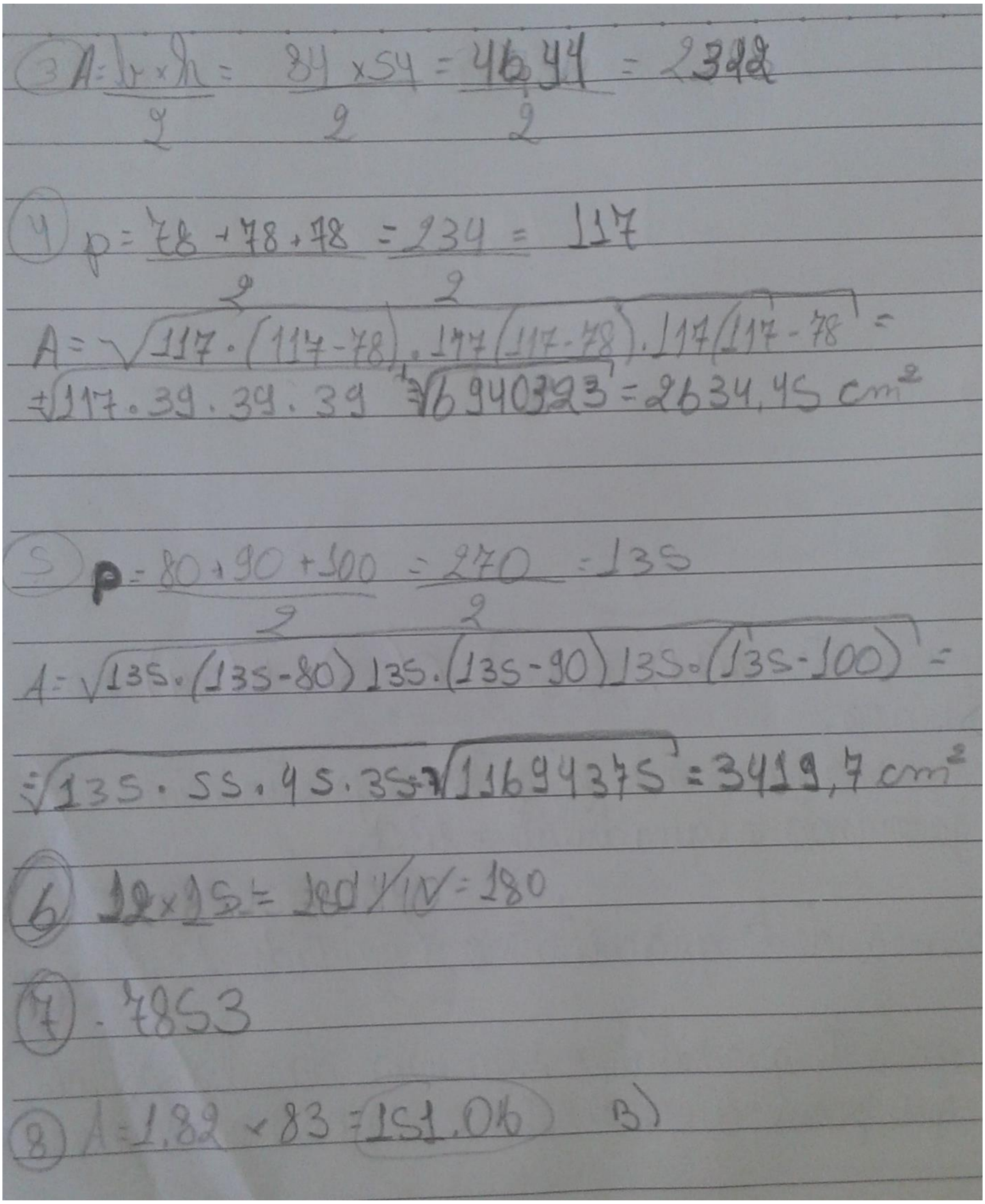
Podemos calcular a área de um triângulo ultilizando outra fórmula, que depende apenas das medidas dos lados. Essa fórmula, atribuida ao matemático grego Herão, é dada por $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-B) \cdot (p-c)}$

Nessa fórmula, a, b e c correspondem as medidas dos lados do triângulo e p, ao semiperimetro, ou seja do perímetro do triângulo

Veja como podemos calcular a área do ABC utilizando a fórmula de Herão

Fonte: Registros no caderno de um aluno da classe

ANEXO D – Foto de solução de exercícios resolvidos pela turma durante aplicação de S_2



3) $A = \frac{b \times h}{2} = \frac{84 \times 54}{2} = \frac{4644}{2} = 2322$

4) $p = \frac{78 + 78 + 78}{2} = \frac{234}{2} = 117$

$A = \sqrt{117 \cdot (117-78) \cdot 117(117-78) \cdot 117(117-78)} =$

$= \sqrt{117 \cdot 39 \cdot 39 \cdot 39} = \sqrt{6940323} = 2634,45\ cm^2$

5) $p = \frac{80 + 90 + 100}{2} = \frac{270}{2} = 135$

$A = \sqrt{135 \cdot (135-80)\ 135 \cdot (135-90)\ 135 \cdot (135-100)} =$

$= \sqrt{135 \cdot 55 \cdot 45 \cdot 35} = \sqrt{11694375} = 3419,7\ cm^2$

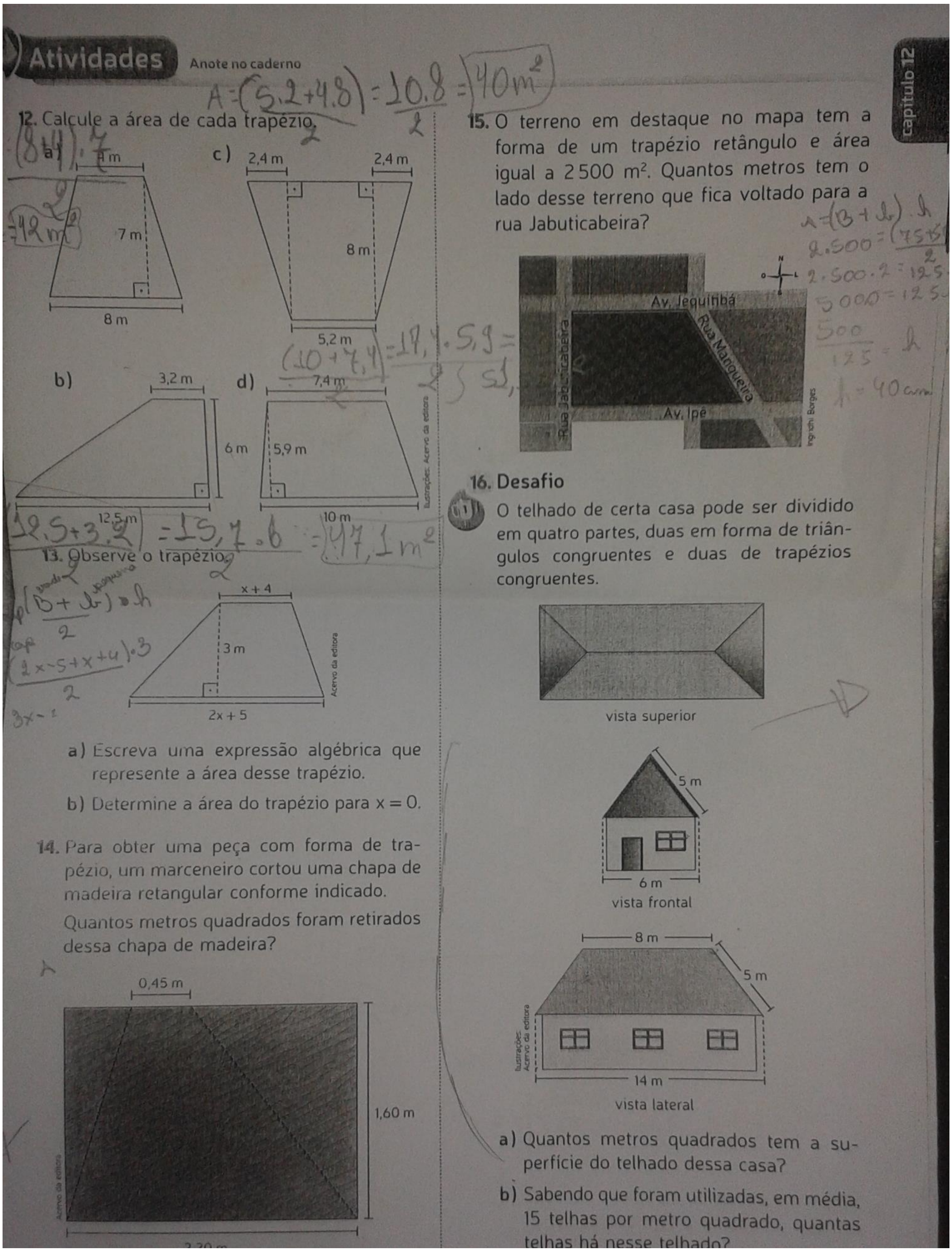
6) $12 \times 15 = 180 / 1 = 180$

7) 7853

8) $A = 1,82 \times 83 = 151,06$ B)

Fonte: Registros no caderno de um aluno

ANEXO E – Exercícios discutidos e resolvidos pela turma durante aplicação de S_2



Atividades Anote no caderno

capítulo 12

12. Calcule a área de cada trapézio.

a) 4 m; 7 m; 8 m

b) 3,2 m; 6 m; 12,5 m

c) 2,4 m; 2,4 m; 8 m; 5,2 m

d) 7,4 m; 5,9 m; 10 m

13. Observe o trapézio.

x + 4; 3 m; 2x + 5

a) Escreva uma expressão algébrica que represente a área desse trapézio.

b) Determine a área do trapézio para x = 0.

14. Para obter uma peça com forma de trapézio, um marceneiro cortou uma chapa de madeira retangular conforme indicado. Quantos metros quadrados foram retirados dessa chapa de madeira?

0,45 m; 1,60 m

15. O terreno em destaque no mapa tem a forma de um trapézio retângulo e área igual a 2 500 m². Quantos metros tem o lado desse terreno que fica voltado para a rua Jabuticabeira?

Av. Jequitibá; Rua Mangueira; Av. Ipê; Rua Jabuticabeira

16. Desafio

O telhado de certa casa pode ser dividido em quatro partes, duas em forma de triângulos congruentes e duas de trapézios congruentes.

vista superior

5 m; 6 m; vista frontal

8 m; 5 m; 14 m; vista lateral

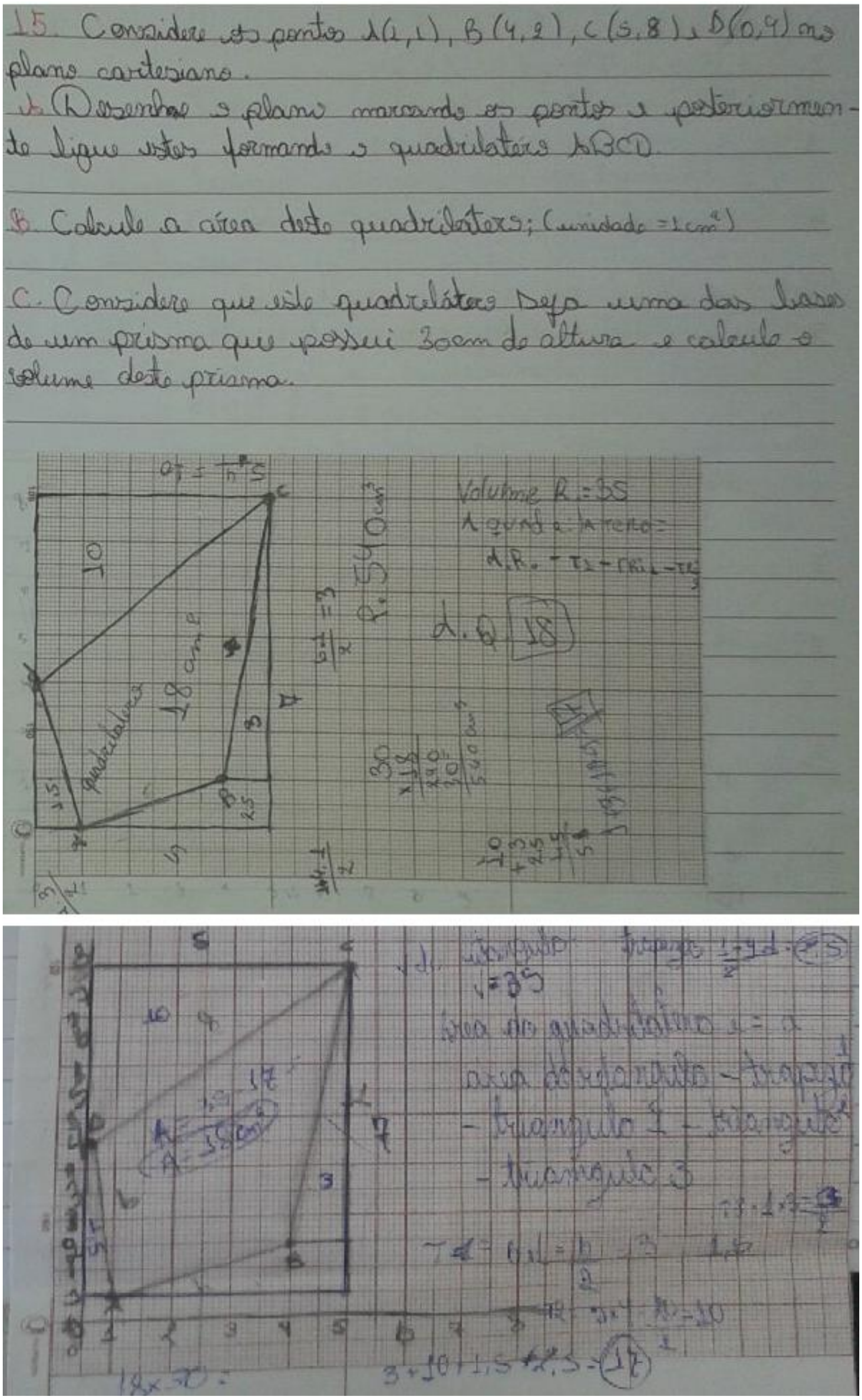
a) Quantos metros quadrados tem a superfície do telhado dessa casa?

b) Sabendo que foram utilizadas, em média, 15 telhas por metro quadrado, quantas telhas há nesse telhado?

Fonte: Material de um aluno da classe

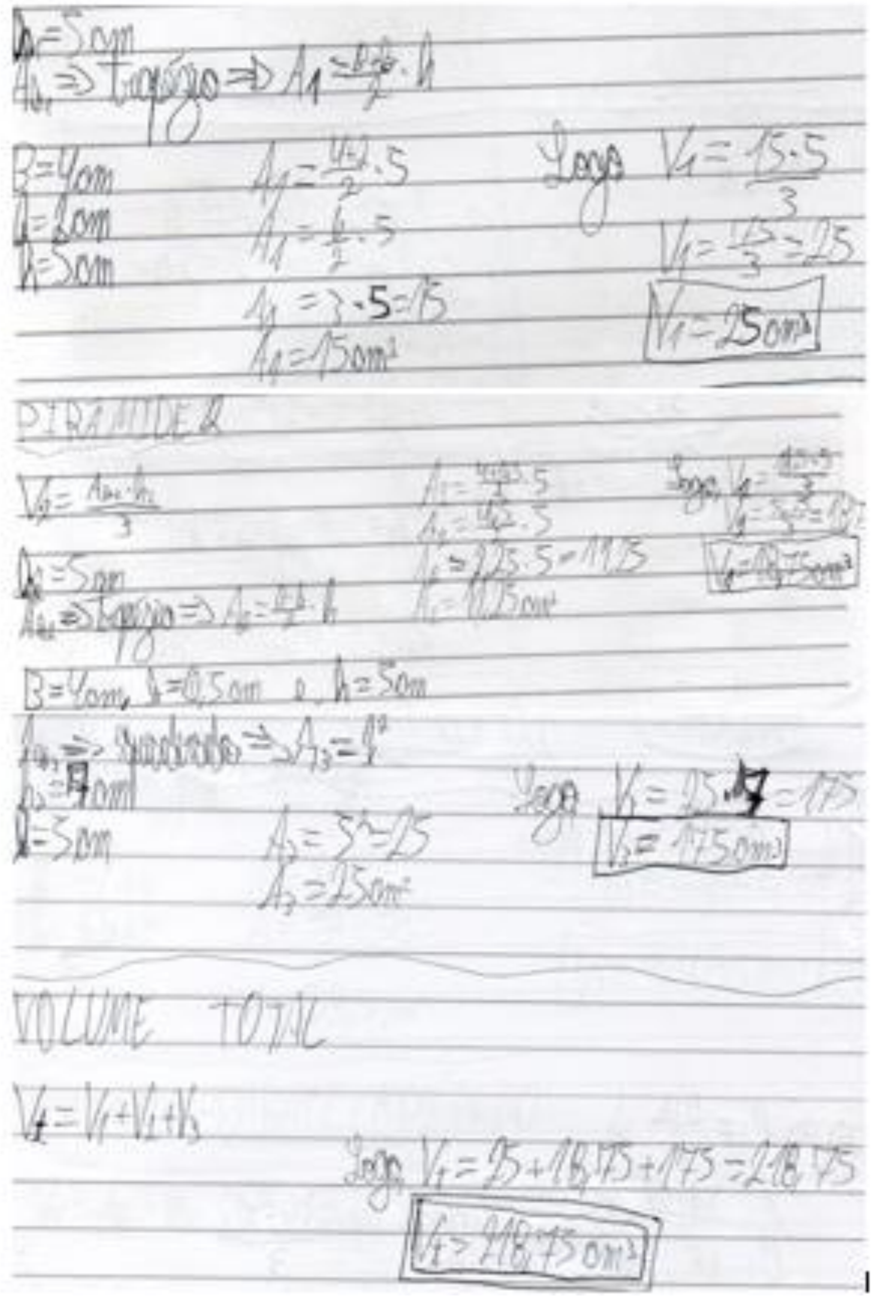
Nota: As atividades foram extraídas do livro didático da turma – Vontade de saber - Matemática (SOUZA, 2015)

ANEXO F – Exercícios elaborados e resolvidos com turma durante aplicação de S_3



Fonte: Recorte de cadernos de alunos
Nota: As duas respostas são apenas para ilustrar diferenças na organização.

ANEXO G – Cálculo capacidade do “prismóide” – 1º caso



$h = 5cm$

$A_{b1} \Rightarrow$ trapézio $\Rightarrow A_1 = \frac{B+b}{2} \cdot h$

$B = 4cm$

$b = 2cm$

$h = 5cm$

$A_1 = \frac{4+2}{2} \cdot 5$

$A_1 = \frac{6}{2} \cdot 5$

$A_1 = 3 \cdot 5 = 15$

$A_1 = 15cm^2$

Logo $V_1 = \frac{15 \cdot 5}{3}$

$V_1 = \frac{75}{3} = 25$

$\boxed{V_1 = 25cm^3}$

PIRÂMIDE 2

$V_2 = \frac{A_{b2} \cdot h_2}{3}$

$h = 5cm$

$A_{b2} \Rightarrow$ trapézio $\Rightarrow A_2 = \frac{B+b}{2} \cdot h$

$B = 4cm$, $b = 0,5cm$ e $h = 5cm$

$A_2 = \frac{4+0,5}{2} \cdot 5$

$A_2 = \frac{4,5}{2} \cdot 5$

$A_2 = 2,25 \cdot 5 = 11,25$

$A_2 = 11,25cm^2$

Logo $V_2 = \frac{11,25 \cdot 5}{3}$

$V_2 = \frac{56,25}{3} = 18,75$

$\boxed{V_2 = 18,75cm^3}$

$A_{b3} \Rightarrow$ quadrado $\Rightarrow A_3 = l^2$

$h_3 = 7cm$

$l = 5cm$

$A_3 = 5^2 = 25$

$A_3 = 25cm^2$

Logo $V_3 = 25 \cdot 7 = 175$

$\boxed{V_3 = 175cm^3}$

VOLUME TOTAL

$V_T = V_1 + V_2 + V_3$

Logo $V_T = 25 + 18,75 + 175 = 218,75$

$\boxed{V_T = 218,75cm^3}$

Fonte: Caderno de registros dos alunos da modelagem

ANEXO H – Algumas questões da avaliação

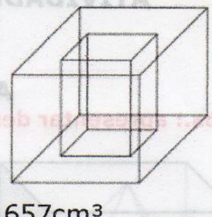
3) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 10m de comprimento, 4 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, quantos minutos serão necessários para se encher completamente esse reservatório?

$V = 10m \cdot 4m \cdot 1{,}2m$

$V = 48m^3 = 48000\,l$

$t = \frac{48000}{2} = 24000s = \frac{24000}{60} = \boxed{400 min}$

5) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 10cm e a do cubo menor, que é interno, mede 7cm.
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:



a)( ) 1000cm³ b)( ) 49cm³ c)( )343cm³ d)(X) 657cm³

$V_{cubo} = a^3$

$V_x = V_1 - V_2$

$V_1 = 10^3 = 10.10.10 = 1000$

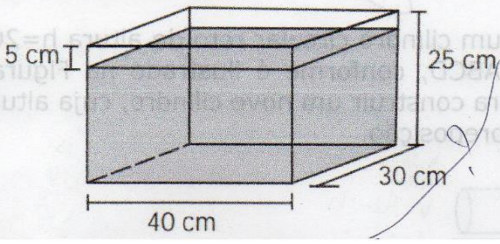
$V_2 = 7^3 = 7.7.7 = 343\,cm$

$V_x = 1000 - 343$

$V_x = 657\,cm^3$

$49 \cdot 7 = 343$ $1000 - 343 = 0657$

6) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



$Ab: 40cm \cdot 30cm$

$Ab: 1200\,cm^2$

$V: 2400\,cm^3$

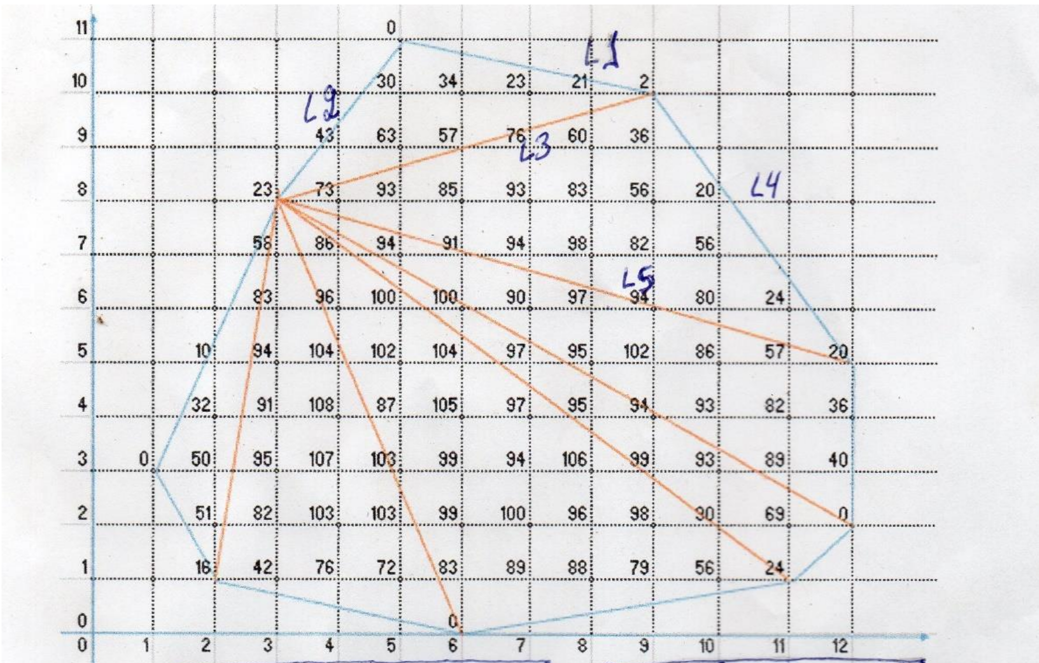
$V: Ab.h$

$2400 = 1200.h$

$\frac{2400}{1200} = h = 2cm$

Fonte: Recortes de avaliações aplicadas aos alunos

ANEXO I – Cálculo dos lados dos triângulos a partir da fórmula da distância entre pontos



$L1 = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \Rightarrow \sqrt{(9-5)^2 + (10-11)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{4^2 + (-1)^2} \Rightarrow \sqrt{16+1} \Rightarrow \sqrt{17} = 4.12\ m$

$L2 = \sqrt{(5-3)^2 + (11-8)^2} \Rightarrow \sqrt{2^2 + 3^2} \Rightarrow \sqrt{4+9}$

$\Rightarrow \sqrt{13} = 3{,}61\ m$

$L3 = \sqrt{(9-3)^2 + (10-8)^2} \Rightarrow \sqrt{6^2 + 2^2} \Rightarrow \sqrt{36+4} \Rightarrow \sqrt{40} = 6.32\ m$

$A1 = \sqrt{p \cdot (p - L1) \cdot (p - L2) \cdot (p - L3)}$

$\Rightarrow \sqrt{7{,}03 \cdot (7{,}03 - 4.12)(7{,}03 - 3.61)(7{,}03 - 6.32)}$

$\Rightarrow \sqrt{7{,}03 \cdot 2{,}91 \cdot 3{,}42 \cdot 0{,}71} \Rightarrow \sqrt{49{,}67} = 7{,}04\ m^2$

$L4 = \sqrt{(12-9)^2 + (5-10)^2} \Rightarrow \sqrt{3^2 + (-5)^2} \Rightarrow \sqrt{9+25}$

$\Rightarrow \sqrt{34} = 5.83\ m$

$L5 \Rightarrow \sqrt{(12-3)^2 + (5-8)^2} \Rightarrow \sqrt{9^2 + (-3)^2} \Rightarrow \sqrt{81+9}$

$\Rightarrow \sqrt{90} = 9{,}49\ m$

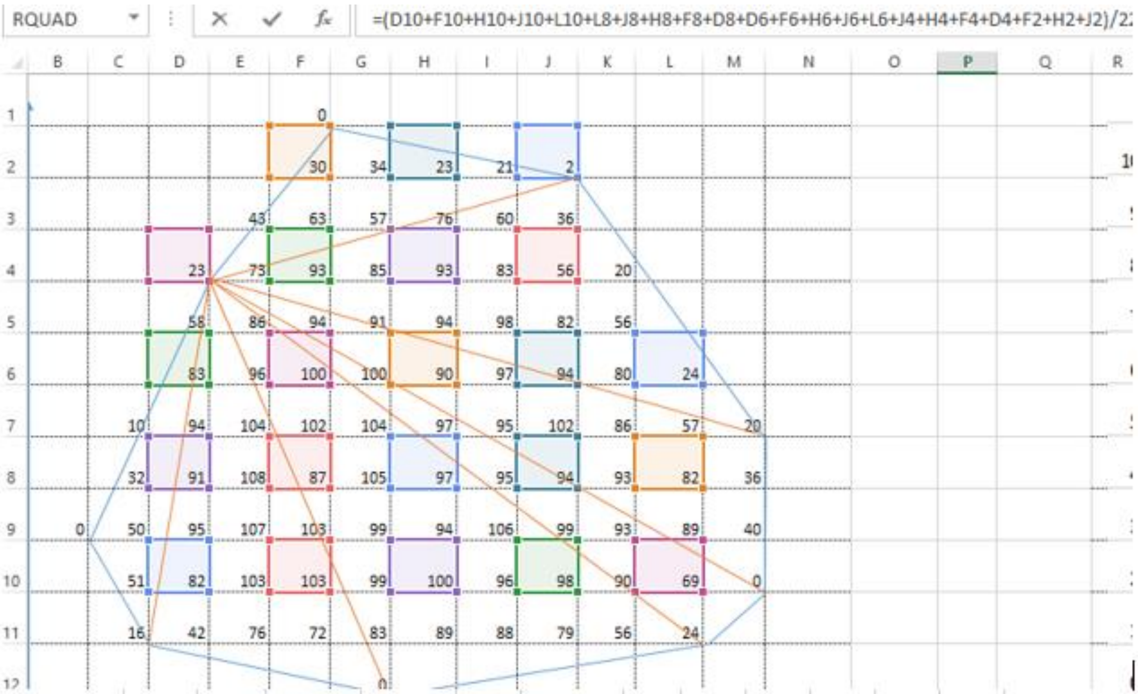
$A2 = \sqrt{p \cdot (p - L3) \cdot (p - L4) \cdot (p - L5)}$

$\Rightarrow \sqrt{10{,}82 (10{,}82 - 6{,}32) \cdot (10{,}82 - 5{,}83) \cdot (10{,}82 - 9{,}49)}$

$\Rightarrow \sqrt{10{,}82 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}99 \cdot 1{,}33} \Rightarrow \sqrt{323{,}14} = 17{,}97\ m^2$

Fonte: Atividade de casa do aluno A_4 – referente à modelagem

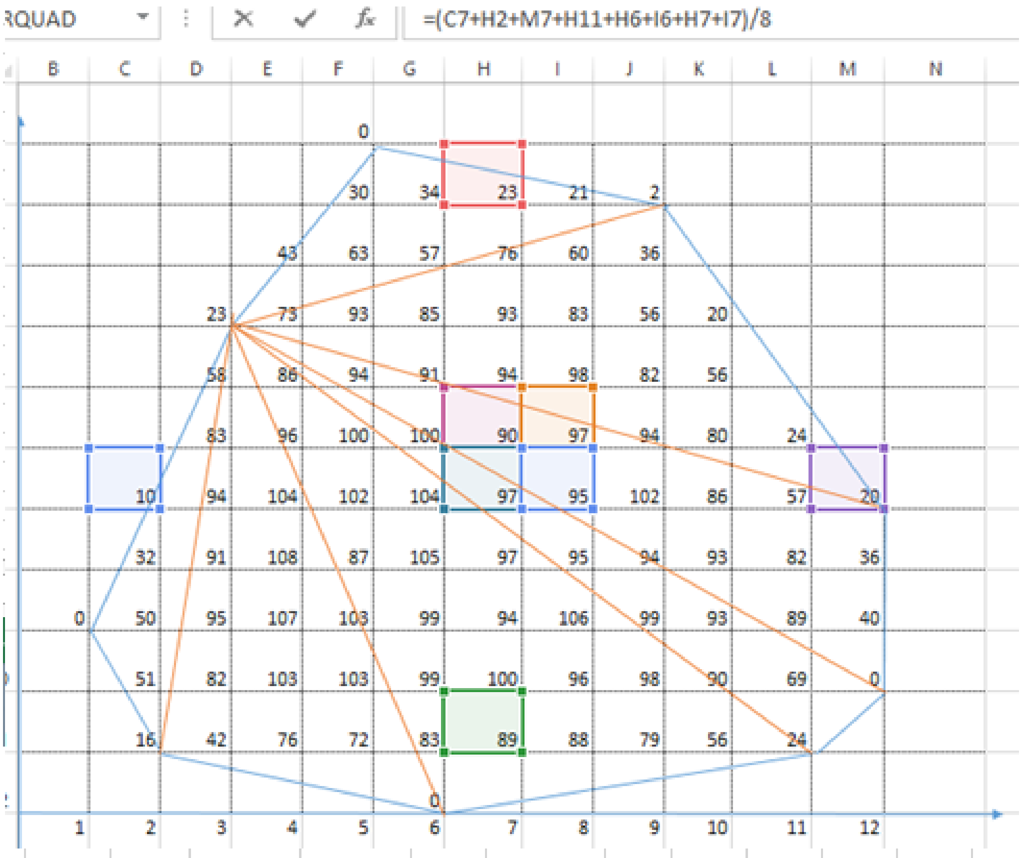
ANEXO J – Dados e resultado referente a "Média 2"



Considerando parte dos dados		Volume	Dif. em rel. a méd.	Dif. em rel. a dec.
Média cruzada com 20 dados	81,35	70367,75	6,84%	5,29%
Média 1 com 22 dados: 2 em 2m	79,14	68452,95	3,93%	2,43%
Média 2 com 22 dados 2 em 2m	73,36	63459,55	-3,65%	-5,04%
Média com 8 dados	65,13	56333,13	-14,47%	-15,71%

Fonte: Print da planilha estudada no grupo

ANEXO K – Dados e resultado para definição da Média 2



Considerando parte dos dados		Volume	Dif. em rel. a méd	Dif. em rel. a cec.
Média cruzada com 20 dados	81,35	70367,75	6,84%	5,29%
Média 1 com 22 dados: 2 em 2m	79,14	68452,95	3,93%	2,43%
Média 2 com 22 dados 2 em 2m	73,36	63459,55	-3,65%	-5,04%
Média com 8 dados	65,13	56333,13	-14,47%	-15,71%

Fonte: Print da planilha estudada no grupo

ANEXO L – Recorte da avaliação qualitativa da situação de modelagem

Questionário avaliativo

1. Destaque pontos positivos e negativos do trabalho desenvolvido realizado:

Positivos: Aprendi coisas novas, fomos na informática, planilha eletronica.

2. Destaque alguns conteúdos que você já conhecia e que achou importante na resolução do problema:

Teorema de Pitágoras, formula de Herão, formula da distância, plano cartesiano, medida do ângulo reto, semelhança de triângulo etc.

3. Destaque alguns conteúdos novos que você viu, que foram úteis na resolução do problema:

Volume da Pirâmide, conceitos geométricos, volume de prisma e semelhança de triângulos.

4. O que você aprendeu na sala de aula, durante as aulas de matemática, foi útil no trabalho?

Formula de Herão, congruência e semelhanças de triangulo.

5. Quanto ao aprendizado: Você considera que a realização deste trabalho foi relevante para seu aprendizado (aprendeu bastante com ele)? Por que?

Sim; porquê usamos novos conteudos, a aplicação de formulas, na planilha eletronica;

6. Dê algumas sugestões para que as aulas de matemática sejam bastante produtivas.

A ampliação do estudo de formulas;

Fonte: Arquivos do autor

Nota: Questionário aplicado ao grupo da modelagem no encerramento do trabalho apenas para análise do autor