UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
***CAMPUS* CHAPECÓ**
CURSO DE MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS E SUAS APLICAÇÕES

FERNANDO AUGUSTO BRANCHER

CHAPECÓ
2018

FERNANDO AUGUSTO BRANCHER

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conculsão do Curso de graduação apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul.
Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

CHAPECÓ
2018

Brancher, Fernando Augusto

Um Estudo sobre Sequências e Séries Numéricas e suas aplicações / por Fernando Augusto Brancher. – 2018.

60 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Vitor José Petry

Monografia (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Matemática, Curso de Matemática, Chapecó, SC, 2018.

1. Sequências Numéricas. 2. Séries Numéricas. 3. Séries de Potências. 4. Séries de Fourier. I. Petry, Vitor José. II. Título.

FERNANDO AUGUSTO BRANCHER

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso de gradução apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

Aprovado em: 04 \ 07 \ 2018

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Vitor José Petry - UFFS

Prof. Dr. Milton Kist - UFFS

Rosane Rossato Binotto

Prof. Dra. Rosane Rossato Binotto - UFFS

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a minha família, minha mãe Lori, meu pai Genir e minha irmã Scheyla, que durante todo esse processo sempre me apoiaram e acreditaram em meu potencial, que em momentos difíceis além de continuarem ao meu lado souberam entender e por mais de uma vez abriram mão de seus compromissos afim colaborar com minha jornada. Em especial agradeço a oportunidade que meus pais me propiciaram de poder me dedicar exclusivamente aos estudos durante a maior parte do curso, oportunidade que muitos colegas não tiveram e sem dúvidas teve impacto em suas trajetórias e, a minha irmã pelo exemplo de persistência em sua vida que me continuar e acreditar nesse sonho.

A todo o corpo docente e técnico da Universidade Federal da Fronteira, que direta ou indiretamente participaram desse trajeto, em especial a todos os professores do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da UFFS, *campus* Chapecó, que são grandes exemplos de profissionais que levarei para todo minha vida e aos professores da banca pelas sugestões dadas, que sem dúvidas contribuíram para enriquecer este trabalho. Agradeço em especial aos orientadores de projetos do qual fiz parte, principalmente ao Professor Dr. Vitor José Petry, que após três anos de trabalho em conjunto em projetos de Iniciação Científica também foi meu orientador deste trabalho e me ensinou muito mais que teoremas, demonstrações e cálculo, mas também se tornou um grande exemplo e modelo de profissional que um dia hei de ser.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos meus amigos e colegas que embarcaram nessa aventura de fazer parte da primeira turma de Licenciatura em Matemática da UFFS, onde aprendemos e erramos (diversas vezes), porém sempre juntos. E não poderia deixar de mencionar meus colegas mais próximos, Angélica Heineck, Eliziane Comachio e Daniel Bruxel, que se tornaram grandes amigos durante essa etapa e fizeram muito mais que emprestar listas de exercícios, tirar dúvidas de disciplinas, ajudar em artigos e ser companhia durante viagens a eventos, eles me fizeram aproveitar cada momento dessa caminhada, seja para uma pizza ou começar academia juntos, fosse para um mate ou sair num barzinho a noite e até mesmo para uma noite de conversa ou estudos. Essa graduação não teria sido tão enriquecedora e animada se não fosse vocês. Obrigado meus caros!

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo fazer um estudo sobre as sequências e séries de números reais. Neste estudo foram abordadas as principais definições, teoremas e resultados acerca destes temas, além de serem apresentados alguns exemplos e aplicações para as sequências e séries numéricas. Outro foco deste trabalho foi uma breve abordagem das séries de potências e séries de Fourier, explanando seus comportamentos e convergência. Por fim, foram apresentados algumas aplicações destes temas, a fim de justificar seu estudo e importância, tanta na Matemática como em outras áreas.

Palavras-chave: Sequências Numéricas. Séries Numéricas. Séries de Potências. Séries de Fourier. Sequências Numéricas, Séries Numéricas, Séries de Potências, Séries de Fourier.

ABSTRACT

The present paper had as objective to make a study on the sequences and series of real numbers. In this study the main definitions, theorems and results on these themes were discussed, as well as some examples of their applications for sequences and numerical series. Another focus of this paper was a brief approach to the power series and Fourier series, explaining their behavior and convergence. Finally, some applications of these themes were presented, in order to justify their study and importance, as in Mathematics as in other areas.

Keywords: Numerical Sequences, Numerical Series, Power Series, Fourier Series.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos foram os povos que utilizaram as sequências e séries numéricas. Um dos primeiros foi o povo egípcio, onde hoje tem-se conhecimento de um papiro egípcio de 1650 a.C. que seria a transcrição feita por um escriba de um trabalho ainda mais antigo. Este já apresentava um problema que hoje conhecemos como a soma de uma progressão geométrica, ou seja, uma série geométrica. Na Mesopotâmia surgiram tábuas babilônicas, onde também haviam descritas progressões geométricas. Em uma delas a progressão $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$, é somada de uma forma que se encontre a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$.

O próprio Euclides, em seu 9º volume, dos 13 famosos "Os Elementos", já apresentava uma fórmula para soma dos números de uma progressão geométrica. Em 1202, Leonardo de Pisa, escreveu Liber Abacci. Nesta obra um dos problemas encontrado e mais conhecido é o dos pares de coelhos: "Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida". Deste problema surgiu a sequência numérica, conhecida como a sequência de Fibonacci, que indica o número de pares ao final de cada mês: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Ao longo da história esses temas foram se desenvolvendo cada vez mais, especialmente quando o debate sobre o contínuo e o infinito entraram em cena na Matemática. E à medida que o desenvolvimento do cálculo foi tomando forma, o progresso no entendimento de séries infinitas teve um papel no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Outros nomes importantes que contribuíram nesse campo foram Newton, Leibniz, Taylor, Euler, Lagrange.

O estudo e conhecimento de sequências e séries é importante, tendo em vista também suas diversas aplicações na Matemática, por exemplo, Euler desenvolveu novos métodos para resolver equações diferenciais usando séries de potências, Carl Runge criou um método de resolução baseado em sequências para solucionar numericamente equações diferenciais junto com Martin W. Kutta .

A proposta metodológica do trabalho foi baseada em uma revisão bibliográfica acerca das definições, características, teoremas e resultados referentes a sequências, séries numéricas. A partir da bibliografia, foram apresentadas as principais definições, teoremas e suas demonstrações, como também alguns exemplos de aplicação dos resultados. Além de abordar as Séries de Potências e Séries de Fourier buscou-se apresentar brevemente algumas aplicações destes conteúdos, com o intuito de justificar seus estudos e importância.

As referências base para este estudo foram as obras de LIMA (2016) (Curso de Análise: Volume 1, 2016), MATOS (2017) (Séries e Equações Diferenciais, 2001), GUIDORIZZI (2012) (Um Curso de Cálculo: Volume 4, 2012) e AVILA (1999) (Introdução à Análise Matemática, 1999).

O principal objetivo deste trabalho se baseia em um estudo de revisão acerca das propriedades de sequências e séries, de alguns resultados importantes bem como compreender sua convergência e seus critérios de análise. A partir deste, os objetivos específicos deste trabalho foram:

- Compreender as definições de sequências e séries;;
- Estudar as suas classificações e propriedades;
- Enunciar e demonstrar alguns teoremas essenciais de sequências e séries;
- Estudar as Séries de Potências;
- Estudar séries de Fourier;
- Apresentar aplicações destes conceitos na área da Matemática;

O interesse inicial pelo tema surgiu nas aulas de Análise Real em que participei no Curso de Verão da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) no início de 2017. As aulas de sequências e séries me chamaram muita atenção e passei a me interessar cada vez mais pelo assunto. Como durante a graduação não foi um conteúdo muito aprofundado, escolhi esse tema com o intuito de conhecer mais sobre sequências e séries. O conhecimento destes conteúdos também é importante devido às suas aplicações na Matemática, como por exemplo: resolução de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais por expansão de séries.

Com isso, o trabalho foi disposto em sete capítulos: o primeiro capítulo se refere a introdução do trabalho, onde são apresentados o tema, uma breve contextualização, os objetivos do trabalho, a metodologia utilizada e uma breve justificativa; o segundo capítulo trata das sequências de números reais, apresentando as definições essenciais, os principais resultados acerca do limite e convergência das sequências, algumas propriedades e informações referentes as sequências de Cauchy; já o terceiro capítulo aborda as série numéricas, também abordando as definições pertinentes de série e sua convergência, bem como métodos para análise da convergência de séries; o quarto e o quinto capítulo abordam as séries de potências e séries de Fourier, respectivamente, bem como considerações importantes referentes a cada uma destas classes de séries; o penúltimo capítulo apresenta algumas aplicações dos temas abordados do segundo ao quinto capítulo e, por fim, no último capítulo são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições, teoremas e resultados importantes sobre sequências de números reais. O capítulo está dividido em quatro seções: a primeira aborda os conceitos iniciais sobre sequências, como sua definição e interpretação geométrica; a segunda seção apresenta definições sobre limitação e monotonia de uma sequência; a terceira seção trata de questões sobre o limite e convergência de sequências, apresentando alguns resultados importantes e, por fim, a última seção busca explorar um pouco sobre as sequências de Cauchy, o que são e resultados importantes sobre a mesma.

2.1 CONCEITOS INICIAIS

Definição 1 (*Sequência*)**.** Uma **sequência** de números reais

$$a_1, a_2, a_3, .., a_k, ..$$

é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural *n*, um número real $f(n) = a_n$.

Notação: O valor da sequência (a_n) em um número natural $k \in \mathbb{N}$ é chamado de *k*-ésimo termo da sequência e é denotado por a_k. Refere-se ao termo geral de uma sequência (a_n) da forma a_n.

Interpretação Geométrica

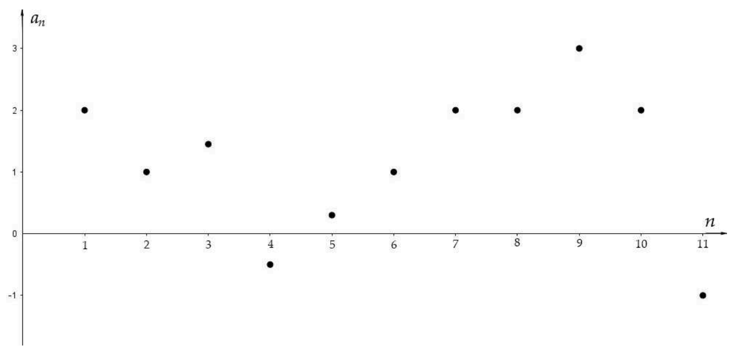


Figura 2.1 – Interpretação Geométrica de uma Sequência.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 1. Exemplos de sequências:

(i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, é uma sequência cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$, é uma sequência cujo termo geral $b_n = 2n$

(iii) $-1, 1 - 1, 1, -1, \ldots$, é uma sequência cujo termo geral é $c_n = (-1)^n$

(iv) $\pi, \pi, \pi, \pi, \ldots$, é uma sequência cujo termo geral é constante, ou seja, $d_n = \pi$

Definição 2 (*Subsequência*)**.** Dada uma sequência $a = (a_n)$, as restrições da função *a*: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a subconjuntos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < ....\}$ de $\mathbb{N}$ são denominadas **subsequências** de a.

2.2 LIMITAÇÃO E MONOTONIA

Definição 3 (*Sequências Limitadas*)**.** Dizemos que uma sequência $(a_n) \in \mathbb{R}$ é

1. *limitada superiormente* quando existir um número $C \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leqslant C$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
2. *limitada inferiormente* quando existir um número $C \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geqslant C$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
3. *limitada* quando existir $C > 0$ tal que $|a_n| \leqslant C$, ou seja, $-C \leqslant a_n \leqslant C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4 (*Sequências Monótonas*)**.** Dizemos que uma sequência $(a_n) \in \mathbb{R}$ é monótona, se satisfaz pelo menos uma das condições abaixo:

1. *crescente* quando $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_k < ...$, ou seja, $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
2. *decrescente* quando $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_k > ...$, ou seja, $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
3. *não decrescente* quando $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_k \leqslant ...$, ou seja, $a_n \leqslant a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
4. *não crescente* quando $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ... \geqslant a_k \geqslant ...$, ou seja, $a_n \geqslant a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: Uma sequência $(a_n) \in \mathbb{R}$ é dita *constante*, se for limitada e satisfazer as condições 3 e 4 da Definição 4.

Exemplo 2. A sequência (a_n) onde $a_n = a^n$ e $a > 1$, temos $\{a, , a^2, a^3, \ldots, a^k, \ldots\}$ é uma sequência limitada inferiormente por a.

Mostremos o fato acima por indução.

Para $n = 1$ temos $a^1 = a$ e $a^1 \geqslant a$.

Suponha que para n é válido $a^n \geqslant a$. Mostremos que então para $n+1$ também vale. De fato, $a^{n+1} = a^n \cdot a > a \cdot a = a^2 > a$.
Com isso $a^{n+1} > a$ e, consequentemente $a^{n+1} \geqslant a$, portanto a sequência (a_n) é limitada inferiormente por a.

Além disso, essa sequência é crescente, pois $a > 1 \Rightarrow a^n > 0$ e, assim:
$a^{n+1} = a^n \cdot a > a^n \cdot 1 = a^n$. Logo $a^{n+1} > a, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por fim, a sequência (a_n) não é limitada superiormente.

Se (a_n) for limitada superiormente, então existe $K > 0$ tal que $K \geqslant n \,\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Como $a > 1$, existe $l \in \mathbb{R}, l > 0$ tal que $a = 1 + l$. Assim,

$(1+l)^n \leqslant K$, pela Desigualdade de Bernouli sabe-se que $1 + nl \leqslant (1+l)^n$, ou seja, $1 + nl \leqslant K \Rightarrow n \leqslant \dfrac{K-1}{l} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, o que é um absurdo. Daí, (a_n) não é limitada superiormente.

2.3 LIMITE E CONVERGÊNCIA

Definição 5 (*Limite de uma sequência*)**.** Seja L um número real, dizemos que L é **limite** de uma sequência (a_n) quando, para qualquer número real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos a_n com $n > n_0$ satisfazem a condição $|a_n - L| < \epsilon$. Escrevemos então, lim $a_n = L$.

Observações:

a) Das propriedades do módulo temos que

$$|a_n - L| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < a_n - L < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$;

b) Podemos dizer também que L é limite de uma sequência quando dado $\epsilon > 0$, para n *suficientemente grande* (*n. s. g.*) a condição $|a_n - L| < \epsilon$ é satisfeita.

Notação:

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim a_n = L \Leftrightarrow a_n \to L.$$

Interpretação Geométrica

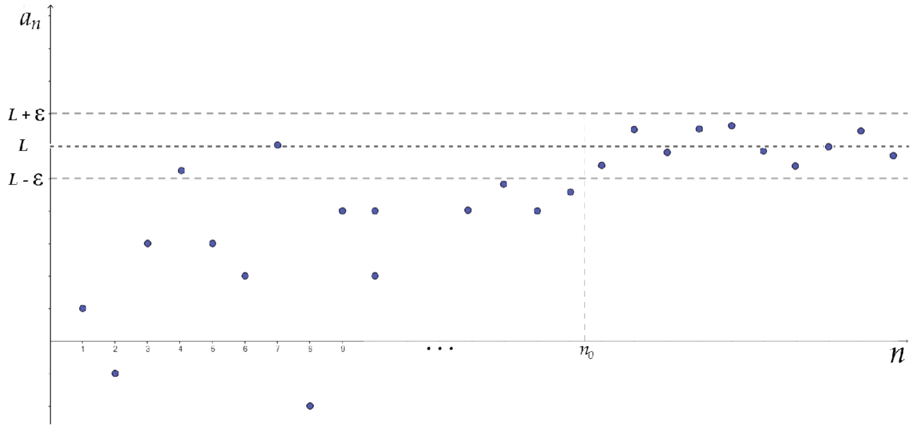


Figura 2.2 – Interpretação Geométrica do Limite uma Sequência.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 1 (*Unicidade do Limite*)**.** Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência, e $L, M \in \mathbb{R}$, tais que lim $a_n = L$ e lim $a_n = M$. Então $L = M$.

Demonstração. Suponha $L \neq M$ e, sem perda de generalidade, $L > M$. Neste caso temos $L - M > 0$ e $\dfrac{L-M}{2} > 0$.
Tomemos $\epsilon = \dfrac{L-M}{2}$. Como lim $a_n = L$, pela definição 5 acima, temos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{L-M}{2} \tag{2.1}$$

Analogamente, como lim $a_n = M$, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_2 \Rightarrow |a_n - M| < \frac{L-M}{2} \tag{2.2}$$

Ainda, é válido que $n_1 + n_2 + 1 = n_0 > n_1, n_2$, ou seja (2.1) e (2.2) valem para para a_{n_0}, e pela definição de limite

$$|a_{n_0} - L| < \frac{L-M}{2} \text{ e } |a_{n_0} - M| < \frac{L-M}{2}.$$

Daí, $L - \dfrac{L-M}{2} < a_{n_0}$ e $a_{n_0} < \dfrac{L-M}{2} + M$, porém $L - \dfrac{L-M}{2} = \dfrac{L-M}{2} + M$ e com isso temos que $a_{n_0} < a_{n_0}$, o que é um absurdo.

Portanto, $L = M$ e vale o teorema 1. □

Definição 6 (*Convergência de uma sequência.*)**.** Dada uma sequência (a_n), se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que lim $a_n = L$, então dizemos que (a_n) é *convergente*. Caso contrário, dizemos que a sequência (a_n) é *divergente*.

Exemplo 3. Dadas as sequências $(a_n) = k$, com $k \in \mathbb{R}$ e $(b_n) = \dfrac{1}{n}$ onde $n \in \mathbb{N}$, mostremos que (a_n) converge para k e (b_n) converge para 0, ou seja:

$$i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = k$$

$$ii)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

i) De fato, $\lim a_n = k$, pois $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ tal que para
$n > n_0 \Rightarrow |a_n - k| = |k - k| = 0 < \epsilon$.
ii) Mostremos que $\lim b_n = 0$:
Dado $\epsilon > 0$ então $\dfrac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$. Pela propriedade arquimediana dos reais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$.
Assim, se $n > n_0$ então $n > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \epsilon$, com isso $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$.

Teorema 2. Seja (a_n) uma sequência convergente onde, lim a_n = L, e a_{n_k} uma subsequência qualquer de termo geral a_n, então lim a_{n_k} = L.

Demonstração. Como lim a_n = L, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$

E ainda, como a_{n_k} é subsequência de a_n, o conjunto $\mathbb{N}' = \{n_k, n_{k+1}, ...\} \subset \mathbb{N}$ é infinito.

Com isso, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$.

Logo, se $k > k_0$, então $n_k > n_{k_0} > n_0$ e daí $|x_{n_k} - L| < \epsilon$.

Portanto, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. □

Colorário 1. Se uma sequência (a_n) admite duas subsequência (a_{n_k}) e (a_{n_l}) tais que
lim $a_{n_k} = L \neq M =$ lim a_{n_l}, então (a_n) diverge.

Demonstração. Suponha por absurdo que (a_n) seja convergente, então existe $L \in \mathbb{R}$ tal que lim $a_n = L$. Pelo teorema 2, se (a_{n_k}) e (a_{n_l}) são subsequências de de (a_n), então lim $a_{n_k} = L$ e lim $a_{n_l} = L$, o que contraria nossa hipótese. Logo (a_n) diverge. □

Exemplo 4. A sequência $a_n = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, ...\}$ diverge pois, $a_{2n} = \{0, 0, 0, 0, ..\} \to 0$ e $a_{2n-1} = \{1, 1, 1, 1, ...\} \to 1$.

Teorema 3. Todo sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente, $L \in \mathbb{R}$ e $\epsilon = 1$ (é válido pois $1 > 0$), então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < 1$. Aplicando as propriedades de módulo temos,

$$-1 < a_n - L < 1$$

$$-1 + L < a_n < 1 + L$$

$$L - 1 < a_n < L + 1$$

Com isso, o conjunto $A = \{a_n, n > n_0\} \subset (L - 1, L + 1)$, ou seja, A é limitado.

Considere ainda o conjunto $B = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_0}\}$, em que a é o menor e b é o maior elemento de B, logo, $B \subset [a, b]$. E daí, $A \bigcup B = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. □

Observação: Basta analisar o exemplo 4 para notar que a recíproca do teorema acima não é valida, pois a sequência $a_n = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, ...\}$ é limitada, porém não convergente.

Teorema 4 (*Teorema do Sanduíche*)**.** Seja (a_n), (b_n) e (c_n) sequências tais que, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ e lim $a_n = L =$ lim c_n, então lim $b_n = L$.

Demonstração. Como lim $a_n = L =$ lim c_n, dado $\epsilon > 0$, existe n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$
$$\forall n > n_2 \Rightarrow |c_n - L| < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, então $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n > n_0$ temos

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \text{ e } L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

pela hipótese $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$,

$$L - \epsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < L + \epsilon,$$

logo

$$L - \epsilon < b_n < L + \epsilon \Rightarrow |b_n - L| < \epsilon,$$

que é valido $\forall n_0 > n$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$.

Portanto, (b_n) converge e lim $b_n = L$. □

Teorema 5. Toda sequência limitada e monótona é convergente.

Demonstração. Suponha que (a_n) uma sequência limitada e crescente. Como a sequência é limitada, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| < M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pelo Axioma da Completude (que é válido em $\mathbb{R}$), existe $L \in \mathbb{R}$, tal que L é o menor limitante superior. Assim dado $\epsilon > 0, \ L - \epsilon$ não é um limitante superior de (a_n), pois L é o menor limitante superior. Com isso,

$$a_{n_0} > L - \epsilon \text{ para algum } n_0 \text{ natural}$$

Como a sequência é crescente, $a_n \geqslant a_{n_0} \,\forall\, n > n_0$

Então se $n > n_0$ temos $a_n > L - \epsilon$, e assim $\epsilon > L - a_n \geqslant 0$, pois $a_n \leqslant L \,\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ainda, como $-\epsilon < 0$ temos

$$-\epsilon < 0 \leqslant L - a_n < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < L - a_n < \epsilon \Rightarrow |L - a_n| < \epsilon$$

Logo, a sequência (a_n) converge.

Analogamente, a demonstração é válida para (a_n) decrescente (usando o maior limitante inferior). □

Exemplo 5. Observe a aplicação do teorema anterior na análise de convergência das sequências abaixo:

1. A sequência $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ é convergente.

   Primeiro, é fácil ver que a sequência acima é limitada inferiormente, pois $2^n > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$, consequentemente $\frac{1}{2^n} > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   Além disso, é uma sequência monótona decrescente. Sabemos que $1 < 2$, multiplicando em ambos os lados da desigualdade por 2^n temos $2^n < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$, ou seja, $a_{n+1} < a_n$.

   Ou seja, como $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ é limitada inferiormente e monótona, então a sequência converge.

2. Seja $0 < a < 1$, a sequência (a^n) é convergente.

   Essa sequência trata-se da generalização do caso acima, onde a era igual a $\frac{1}{2}$. A verificação de que a^n com $0 < a < 1$ é análoga ao item anterior.

Colorário 2. Se uma sequência monótona (a_n) possui subsequência convergente, então (a_n) é convergente.

Teorema 6 (*Bolzano-Weierstrass*)**.** Toda sequência (a_n) limitada possui subsequência convergente.

Demonstração. Para mostrarmos esse teorema, basta encontrar uma subsequência de (a_n) que seja monótona.

Inicialmente, definimos x_n termo *destacado* quando $x_n \geqslant x_p$ para todo $p > n$. Assim, o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; x_n \text{ é destacado}\}$ pode ser finito ou infinito.

Seja D infinito, então teremos $D = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\} \subset \mathbb{N}$, e a subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{D}} \subset (x_n)$ é da forma $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ onde $x_{n_1} \geqslant x_{n_2} \geqslant \ldots x_{n_k} \geqslant$. Com isso essa subsequência além de limitada é não crescente, logo monótona, pelo teorema (5) a subsequência converge.

Agora seja D um conjunto finito, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n$, para todo $n \in D$. Consequentemente x_{n_1} não é destacado, ou seja, existe $n_2 > n_1$, tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Ainda como $n_2 > n_1,\ n_2 \notin D$ e assim x_{n_2} não é destacado. Logo, existe $n_3 > n_2$, tal que $x_{n_2} < x_{n_3}$. Continuando esse processo, temos uma subsequência $(x_{n_k}) \in (x_n)$ que é crescente. Com isso, (x_{n_k}) é limitada e monótona, novamente pelo teorema (5) segue que (x_{n_k}) é convergente. $\square$

Teorema 7. Sejam lim $a_n = 0$ e (b_n) uma sequência limitada, então lim $(a_n b_n) = 0$.

Demonstração. Como (b_n) é uma sequência limitada, pela definição 3, existe $C > 0$ tal que

$$|b_n| \leqslant C, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Seja $\epsilon > 0$ então $\dfrac{\epsilon}{C} > 0$. Pela hipótese temos que lim $a_n = 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{C} \tag{2.4}$$

Logo de 2.3 e 2.4

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leqslant |a_n| C < \frac{\epsilon}{C} C = \epsilon.$$

Portanto, lim $a_n b_n = 0$ $\square$

Exemplo 6. A sequência (a_n) de termo geral $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge para 0, ou seja, $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

Podemos reescrever e calcular o limite acima da seguinte forma:

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$$

Como $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ e $(-1)^n$ é uma sequência limitada, com $(-1)^n \subset [-1,1],\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Utilizando o teorema acima podemos concluir que

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

O mesmo acontece com a sequência (b_n) de termo geral $b_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$, pois ela pode ser reescrita da forma $\dfrac{1}{n} \cdot \operatorname{sen} n$, onde já sabemos que $\dfrac{1}{n}$ converge a 0 e que $\operatorname{sen} n$ é limitada. Ou seja, a sequência (b_n) converge a 0.

2.3.1 Propriedade dos Limites

Teorema 8 (*Propriedades Aritméticas dos Limites*)**.** Sejam (a_n) e (b_n) sequências, e $c, L;\ M \in \mathbb{R}$, tais que lim $a_n = L$ e lim $b_n = M$, então:

1. lim $(a_n + b_n) = L + M$
2. lim $(a_n - b_n) = L - M$
3. lim $(c \cdot a_n) = cL$
4. lim $(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$
5. lim $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$, desde que $b_n \neq 0$ e $M \neq 0$

Demonstração. 1. Pela hipótese, dado $\epsilon_1 > 0$ existe

$n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon_1$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_2 \Rightarrow |b_n - M| < \epsilon_1$

Seja $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2}$ então $\epsilon > 0$ e ainda, seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ então, $\forall n > n_0$ temos

$|a_n - L| < \epsilon$ e $|b_n - M| < \epsilon$

Com isso,

$|a_n + b_n - (L + M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)| \leqslant |a_n - L| + |b_n - M| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

Logo lim $(a_n + b_n) = L + M$

2. A demonstração é análoga ao item 1.

3. Dado $\epsilon > 0$, $\dfrac{\epsilon}{|c|} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$

$|a_n - L| < \dfrac{\epsilon}{|c|}$

Consideremos agora

$|ca_n - cL)| = |c(a_n - L)| = |c||a_n - L| < |c| \cdot \dfrac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$

Com isso, lim $(c \cdot a_n) = cL$.

4. Observe que $|a_nb_n - LM| = |a_nb_n - b_nL + b_nL - LM| = |b_n(a_n - L) + L(b_n - M)| \leqslant |b_n(a_n - L)| + |L(b_n - M)| = |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M|$

   Como lim $b_n = M$, pelo teorema 3, existe $K > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $b_n \leqslant K\ \forall n \in \mathbb{N}$

   Ainda, dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \dfrac{\epsilon}{2K}$ e existe $n_2 \in \mathbb{N}$ $|b_n - M| < \dfrac{\epsilon}{2|a|}$, seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, $\forall n > n_0$ $|a_n - L| < \dfrac{\epsilon}{2K}$ e $|b_n - M| < \dfrac{\epsilon}{2|L|}$, logo

   $|a_nb_n - LM| \leqslant |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| < K \cdot \dfrac{\epsilon}{2K} + |L| \cdot \dfrac{\epsilon}{2|L|} = \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

   Portanto, lim $(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$.

5. Seja $b_n \neq 0$ e $M \neq 0$, consideremos inicialmente $K > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{|b_n|} \leqslant K$

   $|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{L}{M}| = |\dfrac{a_nM - Lb_n}{b_nM}| = |\dfrac{a_nM - Lb_n + LM - LM}{b_nM}| = |\dfrac{a_nM - LM}{b_nM} - \dfrac{b_nL - LM}{b_nM}| = |\dfrac{a_n - L}{b_n} - \dfrac{L(b_n - M)}{b_nM}| = |\dfrac{a_n - L}{b_n} - \dfrac{L}{M}\dfrac{b_n - M}{b_n}| \leqslant \dfrac{1}{|b_n|}\left(|a_n - L| + |\dfrac{L}{M}||b_n - M|\right) < K\left(|a_n - L| + |\dfrac{L}{M}||b_n - M|\right)$

   Seja $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2K}$, e $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon}{2K|\dfrac{L}{M}|}$ com $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon_1$ e existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_2 \Rightarrow |b_n - M| < \epsilon_2$, considere $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ então $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon_1$ e $|b_n - M| < \epsilon_2$, com isso

   $K\left(|a_n - L| + |\dfrac{L}{M}||b_n - M|\right) < K\left(\epsilon_1 + |\dfrac{L}{M}|\epsilon_2\right) = K\left(\dfrac{\epsilon}{2K} + |\dfrac{L}{M}|\dfrac{\epsilon}{2K|\dfrac{L}{M}|}\right) = \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

$\square$

2.3.2 Limites Infinitos

Definição 7 (*Limites Infinitos*)**.** Dada uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{R}$, dizemos que a sequência diverge e tende a $+\infty$ quando para qualquer $K > 0 \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > K$, e escrevemos lim $a_n = +\infty$. Analogamente, dizemos que a sequência diverge e tende a $-\infty$ quando para qualquer $K < 0 \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n < K$, neste caso, escrevemos lim $a_n = -\infty$

Teorema 9 (*Propriedades dos Limites Infinitos*)**.** Considere as (a_n) e (b_n) sequências de números reais. São válidas as seguintes afirmações:

a) Se lim $a_n = +\infty$ e b_n é limitada inferiormente, então lim $(a_n + b_n) = +\infty$;

b) Se lim $a_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $b_n > c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então lim $(a_n b_n) = +\infty$;

c) Se $a_n > c > 0$ e $b_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e lim $b_n = 0$, então lim $\dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$;

d) Se (a_n) é limitada e lim $b_n = +\infty$, então lim $\dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em ELON (2016).

2.4 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Definição 8 (*Sequências de Cauchy*)**.** Seja (a_n) uma sequências de números reais, (a_n) é Sequência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ então $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 10. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja $\lim a_n = L$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall m > n_0 \Rightarrow |a_m - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como $m, n > n_0, \Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a_m + L - L| = |(a_n - L) + (L - a_m)|$, e pela desigualdade triangular temos

$$|(a_n - L) + (L - a_m)| \leqslant |a_n - L| + |L - a_m| = |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Daí, $|a_n - a_m| < \epsilon$, ou seja, toda sequência convergente é de Cauchy. □

Teorema 11. Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.

Demonstração. Mostremos inicialmente que (a_n) sequência de Cauchy é limitada.
Tomemos $\epsilon = 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$$

Em particular

$$n > n_0 \Rightarrow |a_{n_0} - a_n| < 1.$$

Ou seja,

$$\forall n > n_0 \Rightarrow a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1). \tag{2.5}$$

Para $n \leqslant n_0$, consideremos o conjunto $A = \{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_{n_0}|\}$, como é finito podemos determinar M tal que $M = max\{A\}$, e com isso

$$\forall n \leqslant n_0 \Rightarrow |a_n| \leqslant M. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6), $\forall n \in \mathbb{N}$, a sequência de Cauchy (a_n) é limitada.

Como a sequência de Cauchy (a_n) é limitada, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 6), possui subsequência convergente.

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Existe ainda $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Portanto, para $n > n_0$

$$|x_n - a| = |x_n - a + x_{n_1} - x_{n_1}| = |(x_n - x_{n_1}) + (x_{n_1} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Ou seja, $|x_n - a| < \epsilon$.

Com isso, $\lim x_n = a$. E daí, a sequência de Cauchy (a_n) converge.

$\square$

3 SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

Esse capítulo busca apresentar uma introdução aos estudo de séries de números reais. Buscou-se explorar as principais definições e resultados que tangem esse tema. Com isso, este capítulo foi divido em quatro seções: a primeira aborda os conceitos inciais, como a definição de série de números reais e as considerações essenciais de quando se fala em convergência de séries, a segunda seção apresenta alguns tipos de séries que possuem padrões e nos permitem analisar melhor seus comportamentos a partir destes padrões bem como o critério da comparação, já a terceira seção apresenta o que são séries absolutamente convergentes e resultados interessantes destas séries e, por fim, a última seção trata dos testes da razão e da raiz que nos permitem analisar a convergência de uma grande escala de séries.

3.1 DEFINIÇÃO DE SÉRIE E CONVERGÊNCIA

A soma dos termos de uma sequência (a_n) é chamada de série com termo geral a_n. Em geral, é denotada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definição 9 (*Série de Números reais*). Dada uma sequência (a_n) em $\mathbb{R}$, formamos uma nova sequência (s_n), chamada de sequência das somas parciais, construída da forma:

$$\begin{gathered} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ . \\ . \\ . \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ . \\ . \\ . \end{gathered}$$

Definição 10 (*Série Convergente*). Se a sequência (s_n) das somas parciais de (a_n) converge, dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Neste caso, a soma da série é dada por

$$s = \lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Observação: Se (s_n) diverge, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita divergente.

Exemplo 7. (Série Geométrica) Se $0 < a < 1$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \lim[1 + a + a^2 + \ldots + a^n] = \frac{1}{1-a}$$

Vide a subseção 3.2.1 (pag. 26) para saber mais.

Exemplo 8. Se $b \in \mathbb{R}$ e $a \in (-1, 1)$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} ba^n = \lim[ba + ba^2 + ba^3 + ... + ba^n] = \lim b \cdot a^n = \lim b \cdot \lim a^n = b \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} ba^n$ é convergente.

Exemplo 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$$

Como $\left(\frac{1}{8}\right) \in \mathbb{R}$ e $\left(\frac{1}{8}\right) \in (-1, 1)$, é válido o resultado do item anterior, e com isso.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

E com isso, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ é convergente.

Exemplo 10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

Se analisarmos as somas parciais dessa série teremos:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$\ldots$

Ou seja, $(S_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots$, como (S_n) diverge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ é divergente.

3.1.1 Propriedades Aritméticas de Séries

Teorema 12 (*Propriedades*)**.** Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração. 1. Por hipótese, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\,(a_1 + a_2 + ... + a_n + ...) = \lim s_n = s$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\,(b_1 + b_2 + ... + b_n + ...) = \lim t_n = t.$$

Ainda, por definição

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim\,[(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n)] \\ &= \lim\,[(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)] \\ &= \lim\,(s_n + t_n)\end{aligned}$$

e pelas propriedades de limites de sequência

$$\lim\,(s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = s + t.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t$, segue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge.

2. Pela definição de série temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim\,(\lambda a_1 + \lambda a_2 + ... + \lambda a_n) = \lim\,[\lambda(a_1 + a_2 + ... + a_n)] = \lim \lambda s_n$$

e pelas propriedades de limite de sequências, vale

$$\lim \lambda s_n = \lambda \lim s_n = \lambda \cdot s.$$

Segue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot s$, portanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge.

3. Decorre de (1) que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t$, como $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

4. Decorre de (2) que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot s$, como $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot s = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

Teorema 13. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então lim $a_n = 0$

Demonstração. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = lim s_n, onde $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Seja $s_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$, podemos escrever a_n da forma

$$a_n = s_n - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$$
$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

Com isto, lim a_n = lim $(s_n - s_{n-1})$, pelas propriedades de limites de sequências

$$\lim\,(s_n - s_{n-1}) = \lim\, s_n \text{ - } \lim\, s_{n-1}$$

Como, lim $s_{n-1} = s$, temos

$$\lim\, s_n \text{ - } \lim\, s_{n-1} = s - s = 0$$

Logo, lim $a_n = 0$ □

Observações:

1. De acordo com o teorema acima, pela sua contra-positiva podemos concluir que se $\lim a_n \neq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2. Se $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, então a sequência $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ é não descrescente, pois $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$.

   Deste modo, (s_n) converge se, e somente se, (s_n) é limitada superiormente, ou seja

$$(s_n) \text{ converge} \Longleftrightarrow \text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant L, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Seja, $a_n \geqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(a_{n_k}) \subset (a_n)$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ também converge.

3.2 ALGUNS TIPOS DE SÉRIES E O CRITÉRIO DA COMPARAÇÃO

3.2.1 Série Geométrica

É conhecida como série geométrica a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n. \tag{3.1}$$

Seja s_n a soma dos n termos da série (3.1) acima, então

$$\lim s_n = \lim(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n).$$

Analisando os diferentes casos para $|a|$ temos:

Se $|a| \geqslant 1$, podemos utilizar a relação $|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$, e daí

- para $|a| = 1$ temos $|a_{n+1}| = 1^{n+1} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

- para $|a| > 1$ temos $|s_{n+1} - s_n| = |a|^{n+1}$, como $|a| > 1$, a diferença $|s_{n+1} - s_n|$ não irá se aproximar de zero, mas sim $|s_{n+1} - s_n| = |a|^{n+1}$ quando $n \to \infty$ e portanto vai divergir.

Agora, para $|a| < 1$.

Novamente, podemos considerar a soma dos termos da série (3.1), então $s_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$, multiplicando por a em ambos os lados dessa igualdade temos $a \cdot s_n = a(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) \ \Rightarrow a(s_n) = a + a^2 + \ldots + a^{n+1}$. Subtraindo $a(s_n)$ de s_n obtemos

$$s_n - a \cdot s_n = (1 + a + a^2 + \ldots + a^n) - (a + a^2 + \ldots + a^n + a^{n+1}) = 1 - a^{n+1}$$

Com isso,

$$s_n - a \cdot s_n = 1 - a^{n+1}$$

$$s_n(1 - a) = 1 - a^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{(1 - a)}$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Se $|a| < 1$, sabemos que $\lim a^n = 0 \Rightarrow \lim a^{n+1} = 0$, portanto

$$\frac{\lim_{n\to\infty} 1 - a^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1 - a} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-0}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Por fim, se $|a| < 1$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

3.2.2 Série Harmônica

A série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Demonstração. Suponhamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ convirja, logo existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...\frac{1}{n}) = \lim s_n = s.$

Pela observação anterior, as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ também convergem, pois $(a_{n_k}) = \frac{1}{2n} \subset (a_n) = \frac{1}{n}$ e $(a_{n_l}) = \frac{1}{2n-1} \subset (a_n) = \frac{1}{n}$ e ainda, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\frac{1}{2n} > 0$ e $\frac{1}{2n-1} > 0$.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos denotar

$$t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n}$$
$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}$$

e existem $t, u \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \lim t_n = t \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \lim u_n = u$$

Note que $s_n = t_n + u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deste modo

$$s = t + u. \tag{3.2}$$

Ainda

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot s = \frac{s}{2}. \tag{3.3}$$

De (3.2) segue que $u = s - t$ e de (3.3) que $t = \frac{s}{2}$, então $u = s - \frac{s}{2} \Rightarrow u = \frac{s}{2}$ e com isso $u = t$.

Por fim, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$u_n - t_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Portanto, $0 = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} = u - t \geqslant \frac{1}{2}$, o que é um absurdo.

Daí, segue que a série harmônica diverge. □

3.2.3 Critério da Comparação

Teorema 14 (*Critério da Comparação*)**.** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries que satisfazem $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge;
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também diverge.

Demonstração.

1. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n \leqslant L$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é limitada.

   Pela hipótese $a_n \leqslant b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, daí, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \leqslant b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n \leqslant L$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é limitada e de termos positivos, portanto convergente.

2. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então lim $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$ não existe e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é não limitada superiormente. Ainda, como $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a_n, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ não é limitada superiomente também e portante diverge.

□

Exemplo 11.

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ converge.

   Sabemos que $\frac{1}{n} \leqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$ isso implica que $\frac{1}{n}e^{-n} \leqslant 1e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   Como $0 < \left(\frac{1}{e}\right) < 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ se trata de uma série geométrica convergente. Ainda, como vimos acima, $\frac{e^{-n}}{n} \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$ e então pelo Critério da Comparação, isso implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ também converge.

2. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

   Temos que $n \leqslant n^2 \; \forall \, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} \leqslant n$. Ainda, $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$.

   Agora, como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, pelo Critério da Comparação podemos concluir que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ também diverge.

3.3 SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Definição 11 (*Série Absolutamente Convergente*)**.** Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente quando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 15. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demonstração. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, pela definição (11) temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Notemos que

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|. \tag{3.4}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, $2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ também converge. Pelo item 2. do Teorema do Critério da Comparação (Teorema 14) e por (3.4), a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ também converge.

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + |a_n|) - |a_n|] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

Disto e por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serem convergentes, segue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, já que a soma de duas séries convergentes, é convergente. □

Teorema 16. Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ for limitada, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

3.4 TESTES DE CONVERGÊNCIA

3.4.1 Critério da Razão

Teorema 17 (*Teste de D'Alembert - Critério da Razão*)**.** Sejam $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant L = \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, então:

1. Se $0 \leqslant L < 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente;
2. Se $L > 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;
3. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Demonstração. 1. Temos que $L < 1$, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $L < c < 1$.

Como $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ = L, então $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c$, assim para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (*n.s.g.*) $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c$.

Note que $c = c \cdot 1 = c \cdot \dfrac{c^n}{c^n} = \dfrac{c^{n+1}}{c^n}$.

Assim, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \dfrac{c^{n+1}}{c^n} \Rightarrow \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \dfrac{c^{n+1}}{c^n}$, como $a_n \neq 0$, $0 \leqslant \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \dfrac{c^{n+1}}{c^n} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{|a_{n+1}|}{c^{n+1}} < \dfrac{|a_n|}{c^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com isto, $\left(\dfrac{|a_n|}{c^n}\right)$ é limitada inferiormente, pois $|a_n| > 0$ e $c^n > 0$ e assim $\dfrac{|a_n|}{c^n} > 0$, além disso, é não crescente. Portanto $\left(\dfrac{|a_n|}{c^n}\right)$ é convergente e consequentemente limitada.

Por fim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^n$ é uma série geométrica e convergente, pois $0 < c < 1$. Pelo teorma (16), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

2. Seja $L > 1$, então existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $1 < c < L$.

Como $L = \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ então lim lim $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > c$ e $\forall\, n.s.g \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > c$, com isso

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c \;\Rightarrow\; |a_{n+1}| > c|a_n|$$

ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}| > c|a_n| \;\forall\, n > n_0$. Logo

$$|a_n| \geqslant |a_{n_0+1}| > 0 \;\forall n \geqslant n_0. \tag{3.5}$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\lim a_n = 0$, consequentemente $\lim |a_n| = 0$ e por (3.5) temos

$$0 = \lim |a_n| \geqslant \lim |a_{n_0+1}| = |a_{n_0+1}| > 0$$

o que é um absurdo. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim \left| \frac{n}{n+1} \right| = \lim \left| \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right|$$

$$= \frac{\lim 1}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

Mas além disso a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e tem limite igual a

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right|$$

$$= \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \lim \frac{n}{n+1} \cdot \lim \frac{n}{n+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ou seja, temos duas série cujo $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, porém uma converge e outra diverge, ou seja, se $L = 1$, nada podemos afirmar quanto a convergência da série.

$\square$

Exemplo 12. Avaliando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ no que se refere a convergência temos

$$\lim \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim \left| \frac{2}{n+1} \right| = \lim \frac{2}{n+1} = 2 \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge.

3.4.2 Critério da Raíz

Teorema 18 (*Teste de Cauchy - Critério da Raiz*)**.** Seja $0 \leqslant L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, então:

1. Se $L < 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

2. Se $L > 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;

3. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Demonstração. 1. Se $L < 1$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $L < c < 1$, como $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < c$.

Segue que $\forall\ n.s.g$ teremos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$.

Com isso, $0 \leqslant |a_n| < c^n\ \forall\ n.s.g.$

Por isso e por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^n$ ser convergente (pois $0 < c < 1$ e assim $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^n$ é uma série geométrica convergente), segue pelo Critério da Comparação que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

2. Como $L > 1$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $L > c > 1$, se $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > c$.

Novamente segue que $\forall\ n.s.g$ teremos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$.

Extraindo raiz de n em ambos os lados da desigualdade temos $|a_n| > c^n$. Como $c > 1 \Rightarrow c^n > 1$.

Suponhamos agora que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então pelo teorema (13) teremos $\lim |a_n| = 0$ e teríamos a seguinte relação $|a_n| > c^n > 1$, aplicando o limite na desigualdade teríamos $\lim |a_n| > \lim c^n > \lim 1 \Rightarrow 0 > \lim c^n > 1$, o que é um absurdo pois a relação $0 > 1$ não é verdadeira.

Logo, temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3. Sabemos que a série *(i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e que a série *(ii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Calculando $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ das séries acima temos

Em *(i)*:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Em *(ii)*:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Novamente, temos duas série cujo $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, porém uma converge e outra diverge, ou seja, se $L = 1$, nada podemos afirmar quanto a convergência da série.

$\square$

Exemplo 13. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ converge.

Usando o teste da raiz acima temos:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left| \frac{\log n}{n} \right|^n} = \lim \frac{\log n}{n} = 0.$$

Como $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ então podemos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ é convergente.

4 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesse capítulo será abordado um tipo específico de séries, as séries de potências. O capítulo apresenta a definição de série de potências, alguns exemplos e discute sobre a convergência das séries de potências, onde também são enunciados e demonstrados resultados que nos proporcionam calcular o intervalo de convergência destas séries.

4.1 DEFINIÇÃO

Definição 12 (*Séries de Potências*)**.** Chamamos de **séries de potências**, as séries cujos termos contêm potências de uma variável x. São séries de potências as séries do tipo

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \tag{4.1}$$

podemos representá-las simbolicamente por

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \ . \tag{4.2}$$

Observações:

1. Convenciona-se $(x-a)^0 = 1$, quando $x = a$;
2. O conjunto de valores x para quais uma série de potências converge é chamado de intervalo de convergência;
3. Em 4.1 $c_n = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a série se torna uma série geométrica de razão $(x-a)$, logo esta converge se $|x-a| < 1|x-a| < 1$;
4. Em 4.1, o número real a é chamado de *centro* da série e os números reais c_n são chamados de *coeficientes* da série;
5. No caso em que o centro é $a = 0$, a série resultante será

$$c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \ldots + c_n \cdot x^n + \ldots$$

Em geral, quando se estuda ou trabalha com séries de potências, dois questionamentos são recorrentes:

1. Para que valores reais de x a série de potências converge?

2. Se f é a função representada pela série 4.1, qual a relação entre f e os coeficientes c_n da série?

É fácil ver que a série de potências 4.1 é convergente quando $x = a$, pois neste caso a soma da série é igual a c_0. Com isso, o conjunto dos valores de x tais que a série seja convergente é não vazio, e assim para tal x a série representa um valor real. Dessa forma, a série 4.1 define uma função f cujo valor em x é dado por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

cujo domínio será justamente o conjunto dos valores de x para quais a série converge. Uma série de potências se assemelha muito a um polinômio, as diferenças estão que a série de potências possui infinitos termos e a função que ela representa é aproximada em cada x de seu domínio pelos polinômios S_n, que são as somas parciais da série.

Podemos determinar os valores de x em que uma série de potências converge através do Critério da Razão (Teorema 17), sendo o caso extremo ($L = 1$) analisado em separado. Abaixo mostraremos alguns exemplos de séries de potências. Admitiremos que as operações derivação e integração sejam possíveis termo a termo para a série, o que é bastante razoável já que se trata de uma soma infinita.

Exemplo 14. Para qualquer valor que seja atribuído a x, a série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolutamente. O termo geral dessa série é $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ de modo que usando o Critério da Razão temos

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0.$$

Como $L < 1$, independente do valor de x, o Critério da Razão assegura a convergência da série.

Com isso, podemos definir uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Derivando a expressão acima em relação a x obtemos:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x)$$

Como $f'(x) = f(x)$, podemos dizer que essa função satisfaz a *equação diferencial*:

$$f'(x) - f(x) = 0$$

para qualquer valor de x. Para deduzir que $f(x) = e^x$ basta observarmos que:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{e^x}\right] = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

e, assim $f(x) = Ce^x$ onde C é uma constante. Como $f(0) = 1$, segue que $C = 1$ e temos $f(x) = e^x$, para todo x. Assim, temos a seguinte série de potências para representar a função exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nas figuras abaixo podemos conferir o gráfico da função e^x e das somas parciais da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A medida que o valor n aumenta, o gráfico de S_n se aproxima do gráfico da função exponencial.

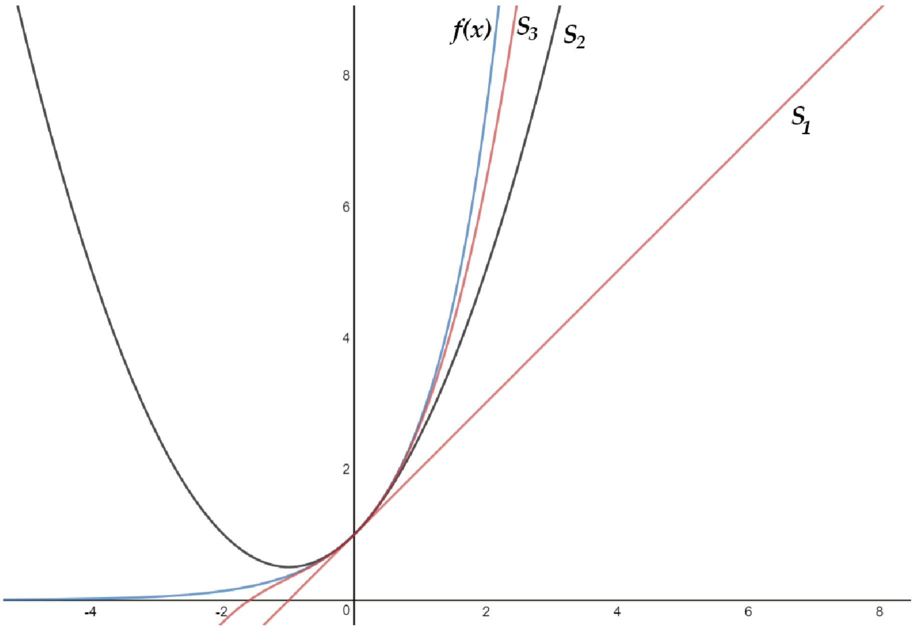


Figura 4.1 – Gráfico de $f(x) = e^x$ e S_1, S_2 e S_3.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 15. Se na série do exemplo anterior a variável x for substituída por t^2, obtemos

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \tag{4.3}$$

para qualquer valor de t. Integrando os lados extremos de (4.3) de 0 a 1, termo a termo, resulta em:

$$\int_0^1 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \tag{4.4}$$

Não conseguimos calcular com os métodos elementares do cálculo integral, a integral que aparece no lado esquerdo da expressão (4.4), essa relação nos permite que ela seja calculada então numericamente.

4.2 INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

Nesta seção será explorado sobre o intervalo de convergência de uma série, ou seja, o intervalo que contem os valores x em que a série 4.1 converge. Veremos que uma série pode convergir apenas quando $x = a$, pode convergir absolutamente em qualquer valor de x ou pode ser absolutamente convergente no intervalo $|x - a| < R$ e divergente quando $|x - a| > R$, podendo ser convergente ou não nos extremos desse intervalo. O raio R do intervalo, é um número real, denominado *raio de convergência* da série, e intervalo correspondente é chamado de *intervalo de convergência* da série. O intervalo de convergência de uma série pode ser de qualquer uma das formas abaixo:

$$(a - R, a + R), (a - R, a + R], [a - R, a + R) \ ou \ [a - R, a + R]$$

Teorema 19. Dada uma série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$:

1. se ela convergir em algum valor $x_0 \neq a$, então ela convergirá absolutamente em qualquer ponto do intervalo $|x - a| < |x_0 - a|$;

2. se ela divergir em $x = x_1$, então ela será divergente quando $|x - a| > |x_1 - a|$.

Demonstração. 1. Se a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x_0 - a)^n$ é convergente, do Critério do n-ésimo termo temos que $\lim\limits_{n=0} c_n(x_0 - a)^n = 0$, pela definição de limite, dado $\epsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n(x_0 - a)^n| < 1$.

Notemos que,

$$|c_n(x - a)^n| = |c_n(x - a)^n| \cdot \frac{|x_0 - a|^n}{|x_0 - a|^n} = |c_n(x_0 - a)^n| \cdot \frac{|x - a|^n}{|x_0 - a|^n} \tag{4.5}$$

Como $|c_n(x_0-a)| < 1 \, \forall \, n \geqslant n_0$, por (4.5) temos que

$$|c_n(x-a)|^n < \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$$

Para $|x-a| < |x_0-a|$, $\left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n < 1$, logo a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$ é convergente.

2. Suponhamos divergente a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1-a)^n$.

   Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2-a)^n$ for convergente em algum ponto x_2 tal que $|x_2-a| < |x_1-a|$, pela demonstração do item (1) deste teorema, esta série é convergente para todo valor x tal que $|x-a| < |x-2-a|$, e em particular irá convergir para $x = x_1$, pois $|x_1-a| < |x_2-a|$, o que contraria nossa própria hipótese de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1-a)^n$ ser divergente.

   Logo se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ diverge para um $x = x_1$, então irá divergir para todo valor x tal que $|x-a| > |x_1-a|$.

□

Teorema 20. Com relação a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, apenas uma das situações abaixo ocorre:

a) ou a série converge apenas quando $x = a$;

b) ou a série converge absolutamente para qualquer valor que se atribua a x;

c) ou existe um número real $R > 0$ (*raio de convergência*), tal que a série converge absolutamente quando $|x-a| < R$ e diverge quando $|x-a| > R$.

Demonstração. Que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge para quando $x = a$ já mencionamos anteriormente no texto. Assim, se esta série não convergir para mais nenhum outro valor, então o item *(a)* é satisfeito.

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ convergir em outro valor $x \neq a$, por exemplo em x_1, então pelo teorema 19 ela convergirá absolutamente, seja qual for o valor de x no intervalo $|x-a| < |x_1-a|$. Se ela for divergente em um valor $x = x_2$, ela também será divergente para qualquer x do intervalo $|x-a| > |x_2-a|$ (se este este valor de x_2 não existir, então a condição *(b)* é satisfeita) e assim o conjunto A constituído dos números $|x-a|$, onde x são os valores que a série converge absolutamente, é limitado superiormente por $|x_2-a|$ e o número R da condição *(c)* é o supremo do conjunto A.

□

Em relação ao raio de convergência R, nos casos que acontece a situação (a) dizemos que o raio de convergência é $R = 0$ e quando a série for convergente, independente do valor atribuído a x, dizemos que o raio de convergência é $R = \infty$. Com isso, toda série de potência tem um raio de convergência que poderá ser o zero, um número real positivo ou então ∞. Uma forma que nos permite calcular o raio de convergência de uma série de potências é dado no teorema abaixo.

Teorema 21. Seja

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

e R o raio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{\alpha n+\beta}$, $\alpha > 0$ então

a) $L = 0 \Rightarrow R = \infty$

b) $L = \infty \Rightarrow R = 0$

c) $0 < L < \infty \Rightarrow R = \left(\frac{1}{L}\right)^{1/\alpha}$

Demonstração. Seja a_n o termo geral da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{\alpha n+\beta}$ então $a_n = c_n(x-a)^{\alpha n+\beta}$ e assim

$$M = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{\alpha(n+1)+\beta}}{c_n(x-a)^{\alpha n+\beta}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{\alpha n+\alpha+\beta}}{c_n(x-a)^{\alpha n+\beta}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{\alpha}(x-a)^{\alpha n+\beta}}{c_n(x-a)^{\alpha n+\beta}}\right| = |x-a|^{\alpha}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x-a|^{\alpha}\cdot L \qquad (4.6)$$

De (4.6) e do Critério da Razão temos que:

a) se $L = 0 \Rightarrow M = 0$ e a série converge absolutamente para qualquer valor de x, portanto $R = \infty$;

b) se $L = \infty$ então para termos $M < 1$ e a série convergir, a única possibilidade é $x = a$, com isso $R = 0$;

c) se $0 < L < \infty$, então a série irá convergir para $M < 1$, logo $1 > |x-a|^{\alpha}L$ e daí, $|x-a| < \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, da mesma forma, a série diverge para $M > 1$, ou seja, quando $|x-a| > \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Daí podemos deduzir que nesse caso $R = \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

□

Exemplo 16. Na série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n n!}{10^n}$ temos que $a = 5$ e $c_n = \frac{n!}{10^n}$, aplicando o método apresentando no teorema (21) temos

$$M = \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim \frac{n+1}{10} = \frac{1}{10} \lim n + \lim 1 = \infty.$$

Como $L = \infty$ temos a situação do item b) e com isso $R = 0$, ou seja, a série converge apenas quando $x = 5$.

5 SÉRIES DE FOURIER

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi um matemático e físico francês que viveu na época de Napoleão, para quem trabalhou na França e no Egito ocupado pelos franceses. Ficou famoso pelo seu estudo com séries trigonométricas, as quais ele introduziu em 1807 ao apresentar um artigo a *Academia de Ciências da França*, que trata do problema prático da propagação do calor em barras, em chapas de sódio metálico. No desenvolvimento de seus artigos, Fourier afirmou que toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta em uma soma de funções seno e cosseno. Para ser mais explícito, ele afirmou que uma função qualquer, não importa como ela tenha sido definida no intervalo $(-\pi, \pi)$ pode ser representada neste intervalo por uma série trigonométrica, esta série será estudada neste capítulo.

5.1 DEFINIÇÃO

Definição 13 (*Séries de Fourier*)**.** Dada uma função $f(x)$, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, denomina-se *série de Fourier associada a* $f(x)$ a série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\ ) \tag{5.1}$$

onde a_0, a_n, b_n não dependem de x.

5.2 COEFICIENTES DE UMA SÉRIE DE FOURIER

Para calcular os coeficientes da série (5.1), suponhamos que ela represente uma função integrável $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ e que a integração seja possível termo a termo. Ainda, seja $s_m(x)$ representante de $\cos(mx)$ e $\operatorname{sen}(mx)$ e n e k números naturais, então é válido:

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} s_n(x)dx = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N};$

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} [s_n(x)]^2 dx = \pi \ \forall \ n \in \mathbb{N};$

3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cdot s_k(x)dx = 0 \ \forall \ n, k \in \mathbb{N};$

4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot sen(kx)dx = 0 \ \forall \ n, k \in \mathbb{N}.$

Calcularemos agora os coeficientes a_0, a_n e b_n.

Calculando a_0

Integrando a expressão (5.2)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\ ) \tag{5.2}$$

no intervalo $[-\pi, \pi]$, com as considerações feitas nos itens acima temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\ dx\Big)$$

do item (1) acima temos que $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0$ e $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = 0 \ \forall\ n$, com isso

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{a_0}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cdot 0 + b_n \cdot 0\Big)$$

e assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot \pi$$

isolando a_0 temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \tag{5.3}$$

Calculando $a_n, \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Multiplicando a expressão (5.2) por $\cos(kx)$ e integrando termo a termo no intervalo $[-\pi, \pi]$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot\cos(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cdot\cos(kx)\ dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cdot\cos(kx)\ dx\Big)$$

do item (1) acima temos que $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx = 0$ para o primeiro termo após a igualdade, ao último termo da direita podemos aplicar o item (4), e com isso $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cdot \cos(kx)\ dx = 0$, por fim no primeiro termo após o somatório temos duas possibilidades, se $n \neq k$ então acontece a situação do item (3) e $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(kx)\ dx = 0$, porém se $n = k$ temos uma situação referente ao item (2): $\int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos(nx)]^2\ dx = \pi$, assim quando $n = k$ temos

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = a_n \cdot \pi$$

ou ainda

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \tag{5.4}$$

Calculando $b_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Repetindo o processo feito para a_n, porém agora multiplicando (5.2) por $\operatorname{sen}(kx)$, teremos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx) dx \tag{5.5}$$

Os coeficientes a_0, a_n e b_n, dados por (5.3), (5.4) e (5.5) respectivamente, são chamados de *coeficientes de Fourier para f* e a série (5.1) fica da forma

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \cdot \cos(nx)\ dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx) dx \cdot \operatorname{sen}(nx)\ dx \Big) \tag{5.6}$$

e é chamada de *série de Fourier para f.*

Exemplo 17. Considere a função $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -k, \text{ se } \ -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ k, \text{ se } \ 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

Essa função pode representar *forças externas* aplicadas a sistemas mecânicos ou ainda *forças eletromotrizes*.

Definindo os coeficientes da função temos:

Para $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{0} -k\,dx + \int_{0}^{\pi} k\,dx\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg(-k\cdot x\Big|_{-\pi}^{0} + k\cdot x\Big|_{0}^{\pi}\Bigg) = \frac{1}{\pi}\Bigg(-k\pi + k\pi\Bigg) = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0 \tag{5.7}$$

Para $n \geqslant 1$, em a_n temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{0} -k\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} k\cos(nx)\,dx\Bigg) = \frac{-k}{\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx - \int_{0}^{\pi} cos(nx)\,dx\Bigg)$$

$$a_n = \frac{-k}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)\frac{-k}{\pi}\cdot(0-0) = \frac{-k}{\pi}\cdot 0$$

$$a_n = 0 \tag{5.8}$$

Já para b_n, temos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\operatorname{sen}(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{0} -k\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} k\operatorname{sen}(nx)\,dx\Bigg)$$

Como $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$ é uma função par, então

$$\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}(nx)\,dx = -\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Bigg(-\int_{-\pi}^{0} k\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} k\operatorname{sen}(nx)\,dx\Bigg) = \frac{1}{\pi}\Bigg(-\Bigg(-\int_{0}^{\pi} k\operatorname{sen}(nx)\,dx\Bigg) + \int_{0}^{\pi} k\operatorname{sen}(nx)\,dx\Bigg)$$

$$b_n = \frac{2k}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2k}{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right) = \frac{2k}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(n\cdot 0)}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{2k}{\pi}\Big(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\Big) = \frac{2k}{n\pi} - \frac{2k\cos(n\pi)}{n\pi}$$

ou ainda

$$b_n = \frac{2k}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

como $\cos(n\pi) = (-1)^n$, temos dois casos: *(i)* quando *n* é par e *(ii)* quando *n* é ímpar.

(i) Se *n* for par então

$$b_{2n} = \frac{2k}{2n\pi}(1-\cos(2n\pi)) = \frac{2k}{2n\pi}(1-1) = \frac{2k}{2n\pi}\cdot 0 \Rightarrow b_{2n} = 0 \tag{5.9}$$

(ii) Se *n* for ímpar então

$$b_{2n-1} = \frac{2k}{(2n-1)\pi}(1-\cos((2n-1)\pi)) = \frac{2k}{(2n-1)\pi}(1+1) = \frac{2k}{(2n-1)\pi}\cdot 2 \Rightarrow b_{2n} = \frac{4k}{(2n-1)\pi} \tag{5.10}$$

Assim, de (5.7), (5.8) e (5.9) a série de Fourier correspondente a função $f(x)$ é da seguinte forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\ )$$

$$f(x) = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(0\cdot\cos(nx) + \frac{4k}{(2n-1)\pi}\,\mathrm{sen}((2n-1)x\ )$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4k}{(2n-1)\pi}\,\mathrm{sen}((2n-1)x)$$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\Big(\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{3} + \frac{\mathrm{sen}(5x)}{5} + \dots\Big)$$

Considerando as somas parciais dessa série temos:

$S_1(x) = \frac{4k}{\pi}\Big(\mathrm{sen}(x)\Big)$

$S_2(x) = \frac{4k}{\pi}\Big(\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{3}\Big)$

$S_3(x) = \frac{4k}{\pi}\Big(\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{3} + \frac{\mathrm{sen}(5x)}{5}\Big)$

Na figura abaixo estão representados os gráficos da função f e da soma parcial S_3 para o caso de $k = 1$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 18. Determine os coeficientes a_0, a_n e b_n para $f(x) = |x|$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

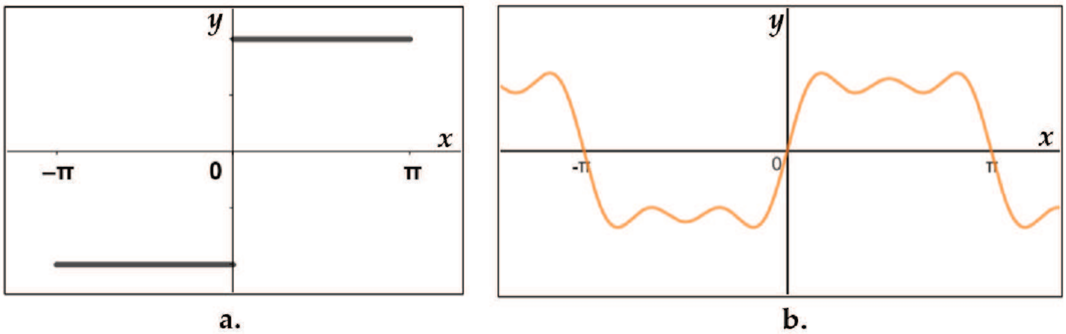


Figura 5.1 – Em (a) o gráfico da função $f(x)$ e em (b) o gráfico de soma S_3.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos então:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx = \pi$$

ainda, como f é uma função par, veremos na Proposição 1, que $b_n = 0\ \forall\ n$ e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nx\, dx$$

Resolvendo a integral da extrema direita da relação acima temos $a_n = \dfrac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2}$, e para $a_{2n} = 0$ e $a_{2n-1} = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$.

Assim a série de Fourier associada a função $f(x) = |x|$ no intervalo $-\pi < x < \pi$, é a série de cossenos

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

Os gráficos da Figura (5.2) ilustram as proximidades que a função $f(x)$ e soma S_3 da série de Fourier associada apresentam.

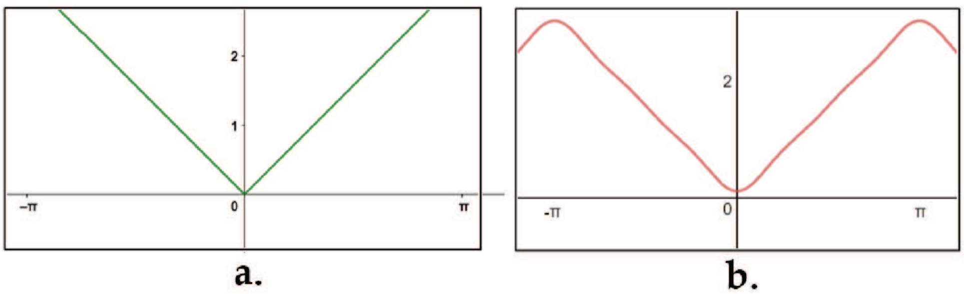


Figura 5.2 – Em (a) o gráfico da função $f(x)$ e em (b) o gráfico de soma S_3.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.3 FUNÇÕES 2L-PERIÓDICAS

Definição 14 (*Funções Parcialmente Contínuas*)**.** Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é denominada *parcialmente contínua* ou *contínua em partes* em $[a, b]$ quando for contínua onde ela tem limites laterais finitos, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos de $[a, b]$.

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parcialmente contínua e periódica com período fundamental de *2L*. Para expandir f em série de Fourier podemos utilizar uma mudança de variável, tal que, a forma de cálculo dos coeficientes da série seja de forma igual ao dos casos em que a função é 2π-periódica. Tomemos então $t = \dfrac{xL}{\pi}$, então o intervalo $-L < t < L$ é transformado, de maneira biunívoca, no intervalo $-\pi < x < \pi$, e a função $g(x) = f(xL/\pi)$ é parcialmente contínua e, além disso:

$$g(x + 2\pi) = f((x + 2\pi)L/\pi) = f(xL/\pi + 2L) = f(xL/\pi) = g(x) \;\; \forall \;\; x,$$

de onde segue que g é 2π-periódica. assim os coeficientes da função

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\ )$$

são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(xL/\pi) \cdot \cos(nx)dx, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(xL/\pi) \cdot \operatorname{sen}(nx)dx, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

fazendo a substituição $t = xL/\pi$, encontramos

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cdot \cos(nt\pi/L)dt, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cdot \operatorname{sen}(nt\pi/L)dt, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Assim, a série de Fourier $f(t)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt\pi/L) + b_n \operatorname{sen}(nt\pi/L)\ )$$

Exemplo 19. Seja $f(-2,2) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } & -2 < t < 0 \\ t, \text{ se } & 0 \leqslant t < 2 \end{cases}$$

Temos assim uma função 4-periódica. Usando os resultados acima, com $L = 2$, chegamos em

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(2x/\pi)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(2x/\pi)\ dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(2x/\pi)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(2x/\pi)\cos(nx)\ dx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{(n\pi)^2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(2x/\pi)\operatorname{sen}(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(2x/\pi)\operatorname{sen}(nx)\ dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Com isso, a série de Fourier de f é

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi x/2)}{n}, \quad -2 < t < 2 \tag{5.11}$$

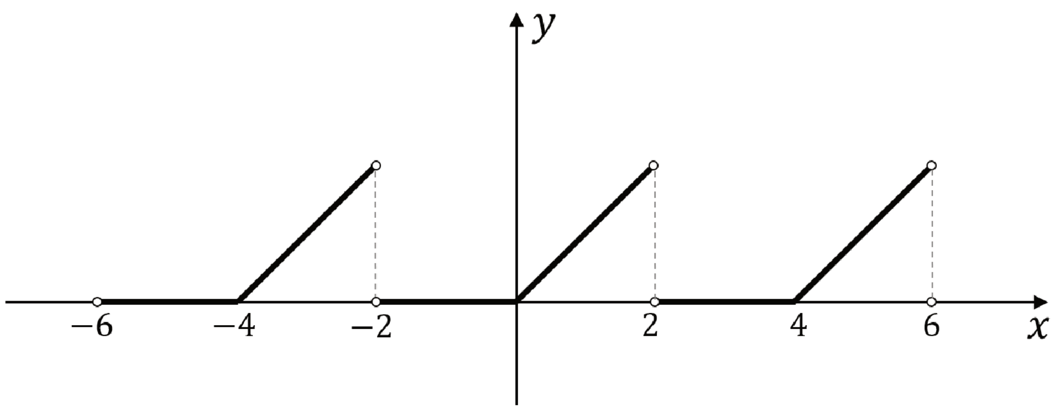


Figura 5.3 – Gráfico da função $f(x)$ no intervalo $(-6, 6)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Proposição 1 (*Séries em cossenos e Séries em senos*). 1. Se $f(x)$ é uma função par em $[-L, L]$, então

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{L}\,dx = 0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a série de Fourier de $f(x)$ é uma série de cossenos,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos n\pi x}{L}. \tag{5.12}$$

2. Se $f(x)$ é uma função ímpar em $[-L, L]$, então

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{\cos n\pi x}{L}\,dx = 0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a série de Fourier de $f(x)$ é uma série de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{L}. \tag{5.13}$$

Demonstração. Como a multiplicação de uma função par com uma função ímpar resulta em função ímpar. Em 1. a função $f(x)\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{L}$ será ímpar, já que $f(x)$ é par e a função seno é ímpar.

Já em 2. temos a função $f(x)\frac{\cos n\pi x}{L}$ também será ímpar, pois agora $f(x)$ é ímpar, como a função cosseno é par, segue que $f(x)\frac{\cos n\pi x}{L}$ é ímpar. □

Exemplo 20. Considerando a função identidade, definiremos a série de Fourier associada em $-L < x < L$.

A função $f(x) = x$ em $-L < x < L$ é ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$. Pela proposição anterior sabemos que $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Os coeficientes b_n são calculados então por

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} x\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{L}\,dx$$

5.4 CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

Definição 15 (*Funções Parcialmente Contínuas*)**.** Um função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita *parcialmente contínua* ou *contínua por partes* no intervalo $[a, b]$ quando for contínua, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos de $[a, b]$, onde ela tem limites laterais finitos.

Teorema 22 (*Convergência das Séries de Fourier*)**.** Seja $f(x)$ a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que seja 2L-periódica e contínua por partes no intervalo $[-L, L]$. Se f possui derivadas laterais em cada ponto desse intervalo, então a série de Fourier de f é convergente e tem soma $F(x)$ dada pela média dos limites laterais de f em x, isto é:

$$F(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Para $x = L$ e $x = -L$ definimos $F(x) = F(L) = F(-L) = \dfrac{f(L) + f(-L)}{2}$.

Se f for contínua no ponto x, então a soma da série é exatamente o valor de $f(x)$.

6 APLICAÇÕES

Nesse capítulo serão apresentadas algumas aplicações dos temas abordados nos capítulos anteriores. As aplicações aqui expostas são exploradas de forma breve, pois têm o intuito de apenas justificar o estudo de sequências e séries e sua importância tanto no campo da Matemática como em outras áreas. Alguns exemplos de aplicação podem ser conferidos ao longo dos capítulos anteriores, como é o caso do Exemplo 17 e do Exemplo 4.3.

6.1 FUNÇÕES COMO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Podemos representar algumas funções como série de potências, ou seja, conhecendo uma função $f(x)$, podemos encontrar uma série da forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Essa representação de funções em série de potências pode ser muito útil na integração de funções que não conseguimos calcular pelos métodos elementares, pois nos permite encontrar valores aproximados para suas integrais numericamente.

É o caso da integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$, que pode ser expressa na forma da seguinte série

$$\int_0^1 e^{t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

como mostra o exemplo 4.3 no capítulo 4.

A série geométrica, explorada na subseção 3.2.1, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b \cdot a^n = \frac{b}{1-a}$$

que converge para $\dfrac{b}{1-a}$ quando $|a| < 1$.

Escolhendo então $b = 1$ e $a = x$ teremos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \;\text{ quando }\; |x| < 1.$$

Com isso podemos dizer que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ representa uma boa aproximação para a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

6.2 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Vimos na seção 6.1 que podemos expressar uma função através de uma série de potências. Nesta seção, ilustraremos um método alternativo para encontrar solução de equações diferencias em séries de potências. O método consiste em usar a derivação termo a termo para verificar que dada uma função $y = f(x)$ definida por uma série de potências é solução de uma EDO dada, na sequência resolve-se a EDO e exibimos a solução através de uma série de potências.

Pelo método das séries de potências, podemos encontrar a solução geral da Equação Diferencial Ordinária

$$y'' - xy' + 2y = 0. \tag{6.1}$$

Considerando que a solução da EDO acima é da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

temos que

$$2y = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 2c_0 + 2c_1 x + 2c_2 x^2 + \ldots + 2c_n x^n + \ldots$$

Para a derivada de primeira ordem de y temos

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$-xy' = -x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n$$

$$-xy' = -c_1 x - 2c_2 x^2 - 3c_3 x^3 - \ldots - nc_n x^n - \ldots$$

E para a derivada de segunda ordem de y temos

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n^2 - n) x^{n-2} \text{ ou } y'' = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n^2 + n) x^{n-1}$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \ldots + c_{n+1}(n^2 + n) x^{n-1} + \ldots$$

Substituindo as expressões acima na equação diferencial (6.1) temos:

$$(2c_0 + 2c_1x + 2c_2x^2 + \ldots + 2c_nx^n + \ldots) + (-c_1x - 2c_2x^2 - 3c_3x^3 - \ldots - nc_nx^n - \ldots) +$$

$$+(2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots + c_{n+1}(n^2+n)x^{n-1} + \ldots) = 0$$

Rearranjando os termos podemos escrever da forma

$$(2c_0 + 2c_2) + (c_1 + 6c_3)x + 12c_4x^2 + (-c_3 + 20c_5)x^3 + \ldots +$$

$$+[(2-n)c_n + (n+1)(n+2)c_{n+2}]x^n + \ldots = 0$$

Igualando todos os coeficientes a zero, obtemos

$$2c_0 + 2c_2 = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow c_2 = -c_0}$$

$$c_1 + 6c_3 = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow\ c_3 = \frac{-c_1}{6}}$$

$$12c_4 = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow\ c_4 = 0}$$

$$-c_3 + 20c_5 = 0\ \Rightarrow\ c_5 = \frac{c_3}{20}\ \Rightarrow\ c_5 = \frac{\frac{-c_1}{6}}{20}\ \Rightarrow\ c_5 = \frac{-c_1}{6\cdot 20}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ c_5 = \frac{-c_1}{120}}$$

$$\vdots$$

$$(2-n)c_n + (n+1)(n+2)c_{n+2} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \ c_{n+2} = \frac{(n-2)c_n}{(n+1)(n+2)}}$$

Como $c_4 = 0$, da fórmula de recorrência segue que $c_{2n} = 0, \ \forall \, n \geqslant 2$.

Assim, podemos escrever a a solução $y(x)$ da EDO (6.1) da forma

$$y(x) = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 - \frac{c_1}{6}x^3 - \frac{c_1}{120}x^5 - \dots$$

ou, se colocarmos em evidência os termos c_0 e c_1 temos

$$y(x) = c_0(1 - x^2) + c_1\bigg(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{3}{2040}x^7 - \dots\bigg).$$

6.3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR COM SÉRIES DE FOURIER

6.3.1 A Equação do Calor

A equação de difusão do calor ou equação do calor é um exemplo de equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem. Essa equação determina o campo de temperatura, ou seja, representa como a temperatura varia com a posição no meio. (INCROPERA *et. al.*, 2008, p. 44). A equação do calor expressa um equilíbrio físico fundamental, no qual a taxa de calor que entra em qualquer parte da barra é igual à taxa de absorção de calor naquela parte da barra. (BOYCE e DIPRIMA, 2002, p 332).

A forma geral da equação do calor é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho s \frac{\partial u}{\partial t} \tag{6.2}$$

onde $k, \ \rho$ e s são constantes, e representam respectivamente a condutividade térmica (W/mK), densidade (Kg/m^3) e calor específico do material da barra (J/Kg). O termo u expressa a temperatura e $\dot{q}$ à taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume no meio (W/m^3) (INCROPERA; *et.al.*, 2008, p. 45-46).

A solução da Equação (6.2), é a função $u = u(x, y, z, t)$. Entretanto, dependendo da situação trabalhada, é possível trabalhar com versões mais simplificadas da equação. Por exemplo, para o caso da transferência de calorunidimensional, considerando apenas a direção x, onde a taxa de geração de energia térmica $(\dot{q})$ é igual a zero e condutividade térmica k é constante, a equação da transferência do calor pode ser escrita forma:

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{6.3}$$

onde α é uma constante chamada de difusividade térmica. Esse termo é um parâmetro que depende exclusivamente do material da barra.

6.3.2 Solução Equação do Calor com Série de Fourier

Uma das formas de resolver equações do calor, é através das séries de Fourier. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 21. Consideremos uma Equação Diferencial Parcial (EDP) da forma da equação (6.3), que representa a equação do calor em modo unidimensional com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 2, \ \ t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 2 \end{cases} \tag{6.4}$$

Solução:

Escrevemos a solução da EDP 6.4 da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ e substituindo essa equação na EDP temos;

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT)$$

$$X\frac{dT}{dt} = 3T\frac{d^2X}{dx^2}$$

Isolando os termos em t em x temos

$$\frac{1}{3T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\gamma^2 \tag{6.5}$$

Como em 6.5 não existe constante $c \geqslant 0$ que satisfaça as condições de contorno, então

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} + 3\gamma^2 T = 0 \\ \dfrac{d^2X}{dx^2} + \gamma^2 X = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

A solução do sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (6.6) acima é dada por:

$$\begin{cases} T = Ce^{-3\gamma^2 t} \\ X = A\cos(\gamma x) + B\,\mathrm{sen}(\gamma x) \end{cases} \tag{6.7}$$

Substituindo (6.7) em (6.4) teremos que a função u pode ser expressa em

$$u(x,t) = e^{-3\gamma^2 t}[A\cos(\gamma x) + B\,\mathrm{sen}(\gamma x)] \tag{6.8}$$

Utilizando as condições de contorno para determinar as constantes A e B em (6.8), portanto:

$$u(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; e^{-3\gamma^2 t}A = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; u(x,t) = Be^{-3\gamma^2 t}\,\mathrm{sen}(\gamma x) \tag{6.9}$$

$$u(2,t) = 0 \;\Rightarrow\; Be^{-3\gamma^2 t}\,\mathrm{sen}(2\gamma) = 0 \tag{6.10}$$

Temos que a solução $B = 0$ satisfaz (6.10), porém evitamos essa escolha que nos implicaria na solução trivial $u(x,t) = 0$. Consideremos então

$$sen(2\gamma) = 0 \;\Rightarrow\; 2\gamma = n\pi \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \tag{6.11}$$

Substituindo (6.11) em (6.10):

$$u(x,t) = B_n e^{\frac{3n^2\pi^2 t}{4}}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{2}) \tag{6.12}$$

Em (6.12), substituiu-se B por B_n, indicando que diferentes constantes podem ser usadas para diferentes valor de n.

Lembrando que pelo *Princípio da Superposição*, somas da solução de forma (6.12) também são soluções, podemos reescrever a solução (6.12) da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{3n^2\pi^2 t}{4}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \tag{6.13}$$

A solução dada em (6.13) deve satisfazer também a condição inicial $u(x,0) = x,\ 0 < x < 2$. Portanto, substituindo $t = 0$ em (6.13) temos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right),\ \ 0 < x < 2 \tag{6.14}$$

Observemos ainda que (6.14) equivale a expandir $f(x) = x$, no período $-2 < x < 2$, em uma série de Fourier cossenos. Com isso

$$B_n = -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \tag{6.15}$$

Substituindo (6.15) em (6.13), temos a solução

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{\frac{-3n^2\pi^2 t}{4}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right). \tag{6.16}$$

6.3.3 Métodos Numéricos de Solução de Equações Diferenciais Parciais

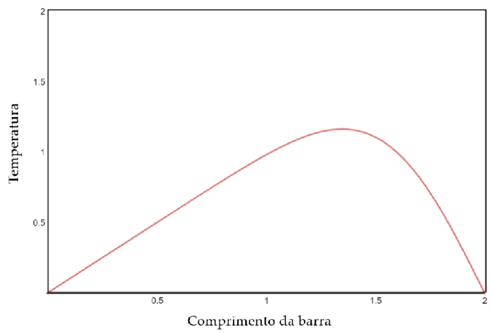
As equações diferencias parciais, em geral, são mais complexas do que as equações diferenciais ordinárias, justamente por envolverem mais variáveis. Quando trabalhamos com um modelo matemático, além da equação ou equações que o descrevem, o modelo apresenta algumas condições de fronteira. Com isso, o problema vai ficando cada vez mais complexo e a solução analítica mais difícil de ser obtida. Com isso, surgem os métodos numéricos de solução de equações diferenciais parciais.

Para as equações diferenciais parciais parabólicas, que é o caso da equação do calor, podemos resolver a equação com diferentes métodos, entre eles o explícito, implícito e de Crank-Nicolson. A fim de comparar o resultado obtido com séries de Fourier da equação diferencial apresentada em (6.4) no exemplo 21 acima, com uma solução numérica, utilizaremos o método de Crank Nicolson para essa equação com suas respectivas condições de fronteira.

O método de Crank-Nicolson é um dos mais utilizados para a solução de equações parabólicas. Como o método do Trapézio para as equações diferencias ordinárias, esse método faz a "média aritmética" do método explícito e implícito. Além disso, a utilização desse método se torna conveniente por ser incondicionalmente estável. Mais informações sobre este e os demais métodos numéricos de solução de equações diferenciais, podem ser conferidos em CUMINATO e MENEGUETTE (2013).

6.3.4 Comparação da Solução da Equação do Calor com Séries de Fourier e com Soluções Numéricas

Nas figuras (6.1) e (6.2) abaixo podemos conferir as soluções da Equação do Calor do exemplo 21 dada pela equação (6.4), para dois instantes de t distintos, onde os gráficos da esquerda são referentes a solução com séries de Fourier e os gráficos da direita são relacionados a solução pelo método numérico de Crank-Nicolson.



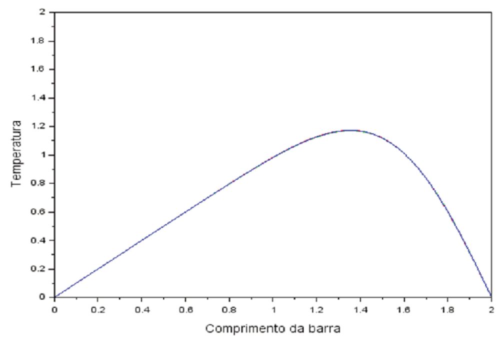
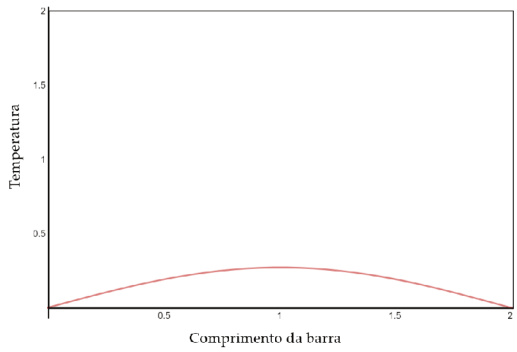


Figura 6.1 – Gráficos de soluções da EDP (6.4).

Fonte: Elaborado pelo autor.



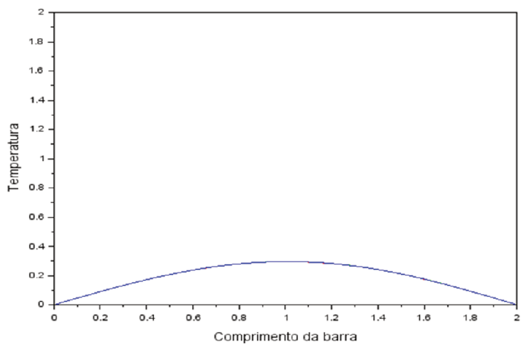


Figura 6.2 – Gráficos de soluções da EDP (6.4).

Fonte: Elaborado pelo autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho foi extremamente proveitosa, com este estudo de Sequências e Séries Numéricas, pude conhecer e aprender novos conceitos, os quais não tive a oportunidade de ver durante a graduação. Sem dúvida, serão extremamente úteis durante minha jornada na Matemática.

Além disso, este trabalho foi enriquecedor no sentido de influenciar e instigar cada vez o mais o desejo e interesse pela pesquisa em Matemática, apesar de ter sido uma breve revisão bibliográfica sobre alguns temas da área, já foi possível experienciar quão prazeroso esse caminho pode se tornar.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Blucher, 1999.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de janeiro: LTC, 2002.

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. **Discretização de equações diferenciais parciais**: técnicas de diferenças finitas. Rio de janeiro: SBM, 2013.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol. 4**. - 5 ed. - Rio de janeiro: LTC, 2012.

INCROPERA, F. P. *et. al.* **Fundamentos de Transferência de calor e de massa**. Rio de janeiro: LTC, 2008.

LIMA, E. L. **Curso de Análise, Vol 1**. Rio de janeiro: IMPA, 2016.

MATOS, M. P. **Séries e Equações Diferenciais**. Rio de janeiro: Ciência Moderna, 2017.