



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL  
CAMPUS CHAPECÓ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**UM ESTUDO SOBRE CURVAS GEODÉSICAS**

**DANIEL ARGEU BRUXEL**

**CHAPECÓ  
2018**

**DANIEL ARGEU BRUXEL**

**UM ESTUDO SOBRE CURVAS GEODÉSICAS**

Trabalho de conclusão de curso de graduação  
apresentado como requisito parcial para obten-  
ção do grau de Licenciado em Matemática da  
Universidade Federal da Fronteira Sul.

Orientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Bi-  
notto

CHAPECÓ  
2018

**PROGRAD/DBIB - Divisão de Bibliotecas**

Bruxel, Daniel Argeu  
Um estudo sobre curvas geodésicas/ Daniel Argeu  
Bruxel. -- 2018.  
44 f.:il.

Orientador: Rosane Rossato Binotto.  
Trabalho de conclusão de curso (graduação) -  
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de  
Matemática , Chapecó, SC, 2018.

1. Geodésicas. 2. Curvas. 3. Superfícies. 4.  
Mathematica. I. Binotto, Rosane Rossato, orient. II.  
Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

DANIEL ARGEU BRUXEL

## UM ESTUDO SOBRE CURVAS GEODÉSICAS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul.

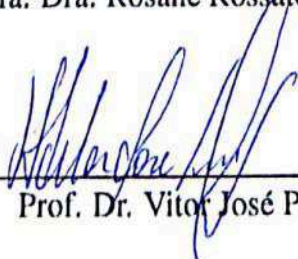
Orientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

Aprovado em: 04/07/2018

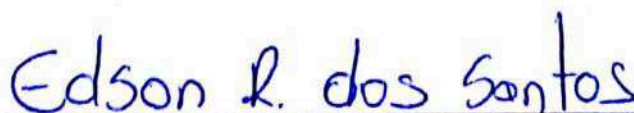
BANCA EXAMINADORA:



\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto - UFFS



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Vitor José Petry - UFFS



\_\_\_\_\_  
Prof. Msc. Edson Ribeiro dos Santos - UFFS

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que me acompanha em meus sonhos e me guia em Sua direção.

À minha família, que sempre me auxiliou nesta caminhada. Obrigado pela paciência!

Aos professores do curso de Matemática, pelos ensinamentos ao longo do curso, em especial minha orientadora, professora Rosane Rossato Binotto, pelas orientações, desde o início do curso, nos projetos de extensão, iniciação científica e neste trabalho de conclusão de curso. Obrigado pela paciência nessa caminhada, pelos ensinamentos, por acreditar e incentivar sempre a continuar estudando.

Aos membros da banca, pelas sugestões e melhorias ao texto.

Aos meus amigos da república, em especial Leiliane, Luana e Roberta, pelos momentos de risos, filmes, desabafos e também momentos de estudos.

A todos os meus colegas de turma e especialmente aos meus colegas e grandes amigos Angélica, Fernando e Eliziane. Uma amizade que surgiu na graduação, mas que perdure para sempre! Obrigado pelo companheirismo, carinho, inúmeros momentos de risos, pelo tempo em que nos reunimos para estudarmos juntos, pelas listas emprestadas e por sempre ter um ombro amigo nos momentos difíceis. Esses 9 semestres de graduação foram incríveis com vocês ao meu lado.

## RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de estudar um tipo especial de curvas em superfícies: as geodésicas. Essas curvas têm uma ampla aplicação na Geometria Diferencial e em outras áreas, como a Física, em especial na teoria da relatividade. Apresentamos os resultados básicos sobre curvas planas e espaciais, superfícies parametrizadas e em seguida as curvas geodésicas, as equações gerais para curvas geodésicas e para o caso específico de curvas de revolução e apresentamos também alguns exemplos. Usamos o software Mathematica para ilustrar as curvas e superfícies e também para calcular as equações das curvas nos casos em que a obtenção das soluções analíticas é inviável.

**Palavras-chave:** Geodésicas, Curvas, Superfícies, Mathematica.

## ABSTRACT

This work has the objective to study a special type of curves in the surfaces: the geodesics. These curves have a You can also find other options of Differential and Geometric Geometry, especially in the theory of relativity. We present the basic features in curves and spatial, parametrized surfaces and then as geodesic curves, presenting as geodesic sequences and for the specific case of curves of revolution, presenting examples. We use Mathematica software to illustrate curves and surfaces to calculate the sample equations in cases where analytical solutions are not feasible.

**Keywords:** Geodesics, Curves, Surfaces, Mathematica.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Elipse, com $a = 2$ e $b = 1$ . . . . .	11
Figura 1.2 – Tractriz. . . . .	11
Figura 1.3 – Hélice. . . . .	12
Figura 2.1 – Helicóide. . . . .	24
Figura 2.2 – Parabolóide hiperbólico. . . . .	25
Figura 2.3 – Parabolóide elíptico. . . . .	25
Figura 2.4 – Sela do Macaco. . . . .	26
Figura 2.5 – Uma superfície de revolução. . . . .	27
Figura 2.6 – Cone. . . . .	27
Figura 2.7 – Toro. . . . .	28
Figura 2.8 – Chapéu de Scherlock. . . . .	28
Figura 2.9 – Curva de Viviani. . . . .	30
Figura 3.1 – Paralelos do toro. . . . .	39
Figura 3.2 – Um segmento de uma geodésica (nem meridiano e nem paralelo) do toro. . . . .	39
Figura 3.3 – Esfera e o equador (único paralelo que é geodésica). . . . .	40
Figura 3.4 – Cilindro com meridianos, paralelos e uma hélice. . . . .	41



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	9
<b>1 CURVAS PARAMETRIZADAS</b> .....	10
<b>1.1 Teoria local das curvas planas</b> .....	14
<b>1.2 Teoria local das curvas em <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	17
<b>2 SUPERFÍCIES</b> .....	23
<b>2.1 Formas Quadráticas Fundamentais</b> .....	31
<b>3 CURVAS GEODÉSICAS</b> .....	34
<b>3.1 Geodésicas em superfícies de revolução</b> .....	36
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	42
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	43

## INTRODUÇÃO

No plano euclidiano, se desejamos ir de um ponto a outro a trajetória mais curta será uma linha reta. Uma linha reta pode ser caracterizada de duas maneiras diferentes: é o caminho mais curto entre dois pontos; não se curva nem para a esquerda nem para a direita (isto é, tem curvatura nula) à medida que viajamos ao longo dela. Agora, se ao invés de uma superfície plana desejarmos ir de um ponto a outro em uma superfície arbitrária, um terreno irregular com colinas, por exemplo, qual é o caminho que deve ser seguido? Surge assim a noção de geodésica.

Transferindo as ideias do plano para uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ , as geodésicas desempenham o papel de linhas retas. São trajetórias descritas por partículas que minimizam energia e, localmente, minimizam o comprimento de arco dentre as curvas que unem dois pontos em uma superfície e, desta forma, minimizam distâncias.

Neste trabalho, que é uma continuidade de um projeto de iniciação científica realizado em 2015, apresentamos, no capítulo 1, os conceitos preliminares sobre curvas parametrizadas planas e espaciais com alguns exemplos, definimos curvatura, torção e mostramos que a curvatura determina, a menos de um movimento rígido, uma curva plana.

No capítulo 2 falamos sobre superfícies parametrizadas regulares e sobre superfícies de revolução. Também apresentamos as formas quadráticas.

Por fim, no capítulo 3 apresentamos alguns resultados sobre curvas geodésicas, as equações diferenciais das geodésicas de uma superfície e a extensão para o caso particular das superfícies de revolução. Apresentamos alguns exemplos, com o apoio do software Mathematica para visualizar os traços e para determinar as parametrizações das geodésicas mais complexas, inviáveis de serem feitas manualmente.

Utilizamos como referência as obras de Araújo (2012), Carmo (2012), Keti (2008) e para trabalhar com o software Mathematica utilizamos a obra conjunta dos autores Gray, Abenna e Salamon (2006).

## 1 CURVAS PARAMETRIZADAS

Neste capítulo apresentaremos alguns dos resultados sobre curvas no plano e no espaço. A ideia intuitiva de curva plana é a de uma linha contínua contida num plano, isto é, como se fizéssemos um traço sem tirar o lápis do papel. Outra ideia intuitiva de curva é a de trajetória de uma partícula, em que, a cada instante  $t$ , tem-se uma posição no plano. Formalizando essa ideia, tem-se que, se  $\alpha(t)$  representa o vetor posição dessa partícula no instante  $t$ , a curva será descrita por uma aplicação de parâmetro  $t$  com imagem em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.** Dado um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , dizemos que uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que para cada  $t$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , com  $x(t)$  e  $y(t)$  funções diferenciáveis, é uma curva parametrizada diferenciável do plano se esta for uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$ . A variável  $t \in I$  é dita parâmetro da curva e chamaremos de traço da curva os pontos de  $\alpha(t)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Analogamente, uma curva no espaço é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , com  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  funções diferenciáveis.

**Definição 2.** Dada uma curva  $\alpha(t)$ , o vetor tangente (ou vetor velocidade) desta curva em  $t$  é definido como  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \subset \mathbb{R}^2$ . Analogamente, para uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tem-se  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ .

Quando o vetor velocidade nunca se anula tem-se uma direção tangente bem definida em cada instante  $t$ , ou seja, existe uma reta tangente em cada valor do parâmetro  $t$ . Curvas com esta propriedade são chamadas de curvas regulares. Quando  $\alpha'(t_0) = 0$  dizemos que  $t_0 \in I$  é um ponto singular de  $\alpha$ .

As curvas a seguir são exemplos de curvas parametrizadas diferenciáveis.

**Exemplo 1.** O traço da aplicação  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , com  $a$  e  $b$  constantes não nulas, descreve uma elipse (Figura 1.1).  $\alpha$  é parametrizada diferenciável, pois as coordenadas são diferenciáveis e não possui pontos singulares, pois  $\alpha'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)) = (0, 0)$  se  $a = b = 0$ , o que não acontece.

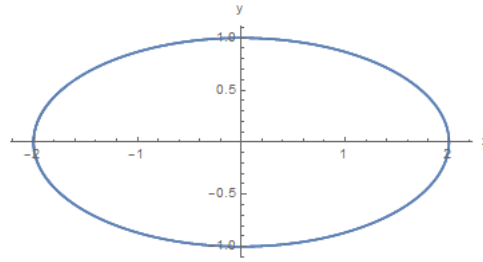


Figura 1.1 – Elipse, com  $a = 2$  e  $b = 1$ .

**Exemplo 2.** A tractriz é o traço (Figura 1.2) da aplicação  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = \left( \sin(t), \cos(t) + \log \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right)$ , sendo o parâmetro  $t$  o ângulo que o vetor  $\alpha'(t)$  faz com o eixo  $y$ .

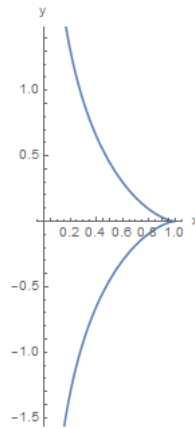


Figura 1.2 – Tractriz.

Esta curva é parametrizada diferenciável, exceto em  $t = \frac{\pi}{2}$ . De fato, as coordenadas são infinitamente diferenciáveis no intervalo  $(0, \pi)$ . Mostremos que  $\alpha$  não é regular em  $\frac{\pi}{2}$ : tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left( \cos(t), -\sin(t) + \frac{\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \\ &= \left( \cos(t), -\sin(t) + \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \end{aligned}$$

Usando a relação trigonométrica  $\sin(t) = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ , podemos simplificar a parametrização, obtendo

$$\alpha'(t) = \left( \cos(t), \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \right).$$

Logo,  $\alpha'(t) = (0, 0)$  se  $\cos(t) = 0$  e  $\left( \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \right) = 0$ , equivalentemente  $\cos(t) = 0$  e  $\sin(t) = 1$ . Como  $t \in (0, \pi)$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Além disto, essa curva tem a propriedade de ter o comprimento do segmento da tangente da tractriz entre o ponto de tangência e o eixo  $y$  constante e igual a 1. De fato, seja  $S$  o comprimento do segmento entre o ponto de tangência e o eixo  $y$ . Como  $t$  é o ângulo que o vetor tangente faz com o eixo  $y$ , temos que  $\text{sen}(t) = \frac{x(t)}{S}$ . Como a coordenada  $x(t)$  da curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é  $\text{sen}(t)$  temos que  $\text{sen}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{S}$ . Essa igualdade é satisfeita se  $S = 1$ .

**Exemplo 3.** A hélice circular (Figura 1.3) é o traço da aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (a \cos(t), b \text{sen}(t), bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b \neq 0$  de passo  $2\pi b$ , ou seja, se  $\alpha(t_1)$  e  $\alpha(t_2)$  são dois pontos que têm as duas primeiras coordenadas respectivamente iguais, então as terceiras diferem por um múltiplo de  $2\pi b$ . O parâmetro  $t$  mede o ângulo que o eixo  $x$  faz com a reta que liga a origem à projeção do ponto  $\alpha(t)$  sobre o plano  $xy$ .

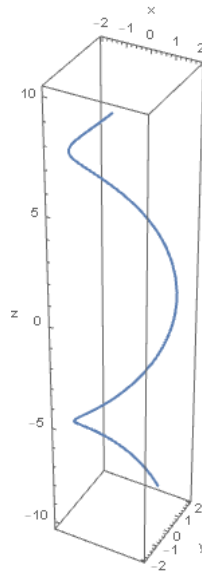


Figura 1.3 – Hélice.

Podemos obter várias curvas regulares que têm o mesmo traço de uma dada curva  $\alpha$ . Isto é feito usando o conceito de uma função de reparametrização  $h$ :

**Definição 3.** Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular plana e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável, de classe  $C^\infty$  tal que  $h'(s) \neq 0 \forall s \in J$  e  $h(J) = I$ . Então a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço de  $\alpha$ , chamada reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ . A função  $h$  é dita mudança de parâmetro.

A definição de função de mudança de parâmetro para curvas espaciais é a mesma, apenas estendendo-a para  $\mathbb{R}^3$ .

Dada uma curva  $\alpha$  definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ , podemos calcular o seu comprimento. Inicialmente, tomemos uma partição do intervalo  $[a, b]$ :  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e ligando os pontos  $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)$  obtemos uma linha poligonal. O comprimento dessa linha é definido como a soma dos comprimentos dos segmentos que a formam, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Quanto mais estreitos e numerosos forem os intervalos da partição melhor aproximar-se-á o valor do somatório ao comprimento da curva. O limite desses somatórios quando o máximo das diferenças  $t_i - t_{i-1}$  tende a zero é chamado de comprimento de arco da curva  $\alpha$  e é dado por  $\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$ .

Quando o comprimento do arco da curva de  $t_0$  a  $t_1$ ,  $t_0 \leq t_1$ , é igual a  $t_1 - t_0$  dizemos que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco (isto também vale para curvas em  $\mathbb{R}^3$ ). Além disso, uma curva regular está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, o vetor tangente a curva é unitário para todo parâmetro  $t$ . De fato, suponha primeiro que a curva  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco e seja  $t_0 \in I$  fixo e considere a função comprimento de arco  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , a partir de  $t_0$ . Então  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$  se  $t \geq t_0$  e  $s(t) = -\int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt = -(t_0 - t) = t - t_0$  se  $t_0 \geq t$ . Dessa forma, para  $t \in I$ ,  $s(t) = t - t_0$ . Derivando temos  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ . Para mostrar a recíproca, temos por hipótese que o vetor tangente é unitário, ou seja,  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ , então  $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$  para quaisquer  $t_0, t \in I$  com  $t_0 \leq t$ . Assim, pela definição, concluímos que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 1.** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  admite uma reparametrização  $\beta$ , tal que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

*Demonstração.* Seja  $s$  a função comprimento de arco. Como  $\alpha$  é regular temos que  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ , ou seja, a função  $s$  é estritamente crescente, logo a inversa existe. Seja  $h : J \rightarrow I$  a inversa de  $s$ . Como para todo  $t \in I$  tem-se  $h(s(t)) = t$ , obtemos por derivação  $\frac{dh}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 1$ . Daí, como  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0$  concluímos que  $\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0$ . Portanto, a aplicação  $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ ,  $s \in J$ , é uma reparametrização de  $\alpha$  e  $\|\beta'(s)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = 1$ , ou seja,  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Analogamente, estendemos essa proposição para curvas em  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1 Teoria local das curvas planas

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Para cada  $s \in I$ , o vetor tangente  $\alpha'$  é unitário e denotemos-o por  $t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ . Agora, consideramos o vetor unitário  $n(s) = (-y'(s), x(s))$  ortogonal a  $t(s)$ , tal que a base ortogonal  $t(s), n(s)$  tem a mesma orientação que a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ . Observe que,  $\|n(s)\| = 1$  (pois  $\alpha$  é regular e  $\langle t(s), n(s) \rangle = x'(s)(-y'(s)) + y'(s)x'(s) = 0$ ).

**Definição 4.** O conjunto de vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  é chamado de referencial de Frenet da curva plana  $\alpha$  em  $s$ .

O referencial de Frenet  $t(s), n(s)$  satisfaz as seguintes equações, ditas serem as fórmulas de Frenet de uma curva plana:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -k(s)t(s). \end{aligned}$$

De fato, como  $t(s)$  é um vetor unitário, temos que  $\|t(s)\| = \|\alpha'(s)\| = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$  e derivando:  $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$  ou seja,  $t'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$  e proporcional a  $n(s)$ :

$$t'(s) = k(s)n(s).$$

A quantidade  $k(s)$  é chamada de curvatura de  $\alpha(s)$ .

Consideramos uma curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , segue da definição de curvatura que ,

$$\begin{aligned} \langle t'(s), n(s) \rangle &= \langle k(s)n(s), n(s) \rangle \Rightarrow \langle t'(s), n(s) \rangle = k(s)\langle n(s), n(s) \rangle \\ &\Rightarrow \langle t'(s), n(s) \rangle = k(s), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \\ &= \langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s)) \rangle \\ &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s). \end{aligned}$$

Analogamente como  $n(s)$  é unitário, temos que  $n'(s)$  é ortogonal a  $n(s)$  e proporcional a  $t(s)$ :

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \langle n'(s), t(s) \rangle &= \langle (-y''(s), x''(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle \\ &= -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) \\ &= \langle (x''(s), y''(s)), (y'(s), -x'(s)) \rangle \\ &= -\langle t'(s), n(s) \rangle \\ &= -k(s) \end{aligned}$$

concluimos que

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

A proposição seguinte possibilita calcular os vetores  $t$  e  $n$  e a curvatura  $k$  sem mudar a parametrização da curva:

**Proposição 2.** Seja  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ ,  $r \in I$ , uma curva regular. Então,

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}; \\ n(r) &= \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}; \\ k(r) &= \frac{-x''y' + x'y''}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $h = s^{-1} : J \rightarrow I$  e  $s : I \rightarrow J$  é a função comprimento de arco. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \beta(s(r)) \\ \alpha'(r) &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dr} \\ \alpha''(r) &= \frac{d^2\beta}{ds^2} \left( \frac{ds}{dr} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{ds^2}. \end{aligned}$$

Como

$$s(r) = \int \|\alpha'(r)\| dr,$$

temos que

$$s'(r) = \frac{ds}{dr} = \|\alpha'(r)\| = \sqrt{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle} = \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{\frac{1}{2}},$$



daí

$$\begin{aligned} s''(r) &= \frac{d^2 s}{dr^2} = \frac{1}{2} \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{-\frac{1}{2}} (\langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle + \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle) \\ &= \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^2}. \end{aligned}$$

Considerando  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ , segue que

$$t(r) = \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|} = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{(x'(r))^2 + (y'(r))^2}}$$

Pela definição de vetor normal temos que

$$n(r) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{(x'(r))^2 + (y'(r))^2}}.$$

Como

$$k(s(r)) = \left\langle \frac{d^2 \beta}{ds^2}(s(r)), n(r) \right\rangle,$$

temos que:

$$\begin{aligned} k(r) &= k(s(r)) = \frac{\langle \alpha''(r), n(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^2} = \frac{(-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r))}{\|\alpha'(r)\|^3} \\ &= \frac{-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{\sqrt{((x'(r))^2 + (y'(r))^2)^3}}. \end{aligned}$$

■

A seguir mostramos o Teorema Fundamental das Curvas Planas, que afirma que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano.

**Teorema 1.** a) Dada uma função diferenciável  $k(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , cuja curvatura é  $k(s)$ .

b) A curva  $\alpha(s)$  acima é única quando fixamos  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , onde  $v_0$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ .

c) Se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

*Demonstração.* a) Seja a curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , dada por:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds, \\ y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(s) + \lambda) ds, \end{aligned}$$

onde  $s_0 \in I$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$ . Então

$$\begin{aligned} t(s) = \alpha'(s) &= (x'(s), y'(s)) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)) \\ n(s) &= (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) \\ \alpha''(s) &= \theta'(s)(-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) = \theta'(s)n(s) \end{aligned}$$

Daí temos que  $\|\alpha'(s)\| = 1$  e  $k(s) = \theta'(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$ ,  $\forall s \in I$ .

b) Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , com curvatura  $k(s)$ . Daí

$$\begin{aligned} t(s) = \alpha'(s) \Rightarrow t'(s) &= \alpha''(s) \\ &= (x''(s), y''(s)) \\ &= k(s)n(s) \\ &= k(s)(-y'(s), x'(s)) \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas de  $\alpha$  satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s) \\ y''(s) = -k(s)x'(s) \end{cases}$$

Portanto, com as condições iniciais  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , a existência e a unicidade da curva  $\alpha$  segue do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

c) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas curvas que têm a mesma curvatura. Fixado  $s_0$ , existem uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que a curva  $\bar{\alpha} = L \circ T \circ \beta$  satisfaz  $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$  e  $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$ . Concluimos pelo ítem anterior que  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$ . ■

## 1.2 Teoria local das curvas em $\mathbb{R}^3$

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Como o vetor tangente  $\alpha'(s)$  é unitário, o módulo  $\|\alpha''(s)\|$  da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em  $s$ , ou seja,  $\|\alpha''(s)\|$  dá uma medida do quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$ , da reta tangente a  $\alpha$  em  $s$ . Isso sugere a seguinte definição:

**Definição 5.** Se  $\alpha$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$  é o número real

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

**Proposição 3.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e só se,  $k(s) = 0 \forall s \in I$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, então  $\alpha(s) = p + vs$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $v$  um vetor do  $\mathbb{R}^3$ . Daí

$$\alpha'(s) = v \text{ e } \alpha''(s) = 0, \forall s \in I,$$

portanto  $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\|\alpha''(s)\| = 0, \forall s \in I$ , então  $\alpha''(s) = 0$ , donde, por integração, concluimos que  $\alpha'(s) = v$  e  $\|v\| = 1$  (pois  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco). Novamente por integração obtemos  $\alpha(s) = p + vs$ , cujo traço é um segmento de reta. ■

Se  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \forall s \in I$ , então  $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \forall s \in I$ . Portanto, nos pontos  $s \in I$  onde  $k(s) \neq 0$ , isto é,  $\alpha''(s) \neq 0$ , podemos definir um vetor unitário na direção de  $\alpha''(s)$ .

**Definição 6.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . Denominamos vetor normal a  $\alpha$  em  $s$  o vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}.$$

Denotando  $t(s) = \alpha'(s)$  temos que  $t(s)$  e  $n(s)$  são ortogonais e, da definição de vetor normal concluimos que  $t'(s) = k(s)n(s)$ .

**Definição 7.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . Denominamos vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  o vetor

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

**Definição 8.** O triedro de Frenet de uma curva  $\alpha$  em  $s$  é o referencial ortonormal  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$ .

Cada par de vetores de triedro de Frenet determina um plano:

- $t(s)$  e  $n(s)$  determinam um plano, denominado plano osculador, ortogonal a  $b(s)$ , ou seja, o plano formado pelo conjunto de pontos  $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), b(s) \rangle = 0\}$ ;

- $t(s)$  e  $b(s)$  determinam um plano, denominado plano retificante, ortogonal a  $n(s)$ , ou seja, o plano formado pelo conjunto de pontos  $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), n(s) \rangle = 0\}$ ;
- $b(s)$  e  $n(s)$  determinam um plano, denominado plano normal, ortogonal a  $t(s)$ , ou seja, o plano formado pelo conjunto de pontos  $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), t(s) \rangle = 0\}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \times n(s) \\ b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s). \end{aligned}$$

Portanto  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$  e ortogonal a  $t(s)$ . Além disso, temos

$$\|b(s)\| = 1 = \langle b(s), b(s) \rangle = 1.$$

derivando:

$$\begin{aligned} \langle b(s), b(s) \rangle' &= 0 \Rightarrow \\ \langle b'(s), b(s) \rangle + \langle b(s), b'(s) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \langle b'(s), b(s) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $b'(s) \perp b(s)$ , portanto paralelo a  $n(s)$  e podemos escrever

$$b'(s) = \tau(s)n(s).$$

**Definição 9.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção da curva  $\alpha$  em  $s$ , podendo ser negativa ou positiva.

Como o vetor  $b(s)$  é unitário,  $|\tau(s)| = \|b'(s)\|$  mede a taxa de variação do ângulo do plano osculador de  $\alpha$  em  $s$  com os planos osculadores vizinhos, isto é,  $|\tau(s)|$  indica quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$ , do plano osculador de  $\alpha$  em  $s$ .

**Exemplo 4.** Consideramos a hélice circular, parametrizada pelo comprimento de arco:

$$\alpha(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Calculando então o vetor tangente  $t(s) = \alpha'(s)$  temos:

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \left( \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \Rightarrow \\ \alpha''(s) &= \left( \frac{-a}{a^2 + b^2} \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{-a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right).\end{aligned}$$

Podemos agora calcular a curvatura  $k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$ . Obtemos agora os demais vetores:

$$\begin{aligned}n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \left( -\cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -\operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right) \\ b(s) &= t(s) \times n(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( b \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -b \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \right) \\ b'(s) &= \frac{b}{a^2 + b^2} \left( \cos \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right), 0 \right).\end{aligned}$$

Assim, a torção  $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = -\frac{b}{a^2 + b^2}$  é constante.

O Triedro de Frenet é um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , possibilitando obter os vetores  $t'(s)$ ,  $b'(s)$  e  $n'(s)$  como combinação linear de  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$ . Temos que

$$\begin{aligned}n(s) = b(s) \times t(s) \Rightarrow n'(s) &= b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) \\ &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s).\end{aligned}$$

**Definição 10.** As equações

$$\begin{aligned}t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s) \\ b'(s) &= \tau(s)n(s)\end{aligned}$$

são denominadas *fórmulas de Frenet*.

**Proposição 4.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t \in I$  e seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ , uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco com a mesma orientação, onde  $h(s) = s^{-1} : J \rightarrow I$  e  $s : I \rightarrow J$ ,  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$ , é a função comprimento de arco

de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então,

$$\begin{aligned} t_\alpha(t) &= t_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}; \\ n_\alpha(t) &= n_\beta(s(t)) = \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}; \\ b_\alpha(t) &= b_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} - \frac{\langle\alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t)\rangle\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^3}; \\ k_\alpha(t) &= k_\beta(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}; \\ \tau_\alpha(t) &= \tau_\beta(s(t)) = \frac{\langle\alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Como  $\alpha(t) = \beta(s(t))$ ,  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$  e  $s''(t) = \frac{\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ , segue que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\beta}{ds} \|\alpha'(t)\| \\ \alpha''(t) &= \frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= \frac{d^2\beta}{ds^2} \|\alpha'(t)\|^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|} \end{aligned}$$

Dáí temos que

$$t_\alpha(t) = t_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 \frac{d^2\beta}{ds^2} &= \alpha''(t) - \frac{d\beta}{ds} \frac{\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\| - \frac{d\beta}{ds} \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle \|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \frac{d\beta}{ds} \|\alpha'(t)\| \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|} \\ \frac{d^2\beta}{ds^2} &= \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^4} \quad (1.2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{ds}{dt} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \frac{\beta}{ds} \times \frac{d\beta}{ds} \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \left\| \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| \\
&= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| \text{sen}90^\circ \\
&= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| \\
&= (s'(t))^3 \beta''(s(t)) \\
&= (s'(t))^3 k_\beta(s(t))
\end{aligned}$$

donde podemos concluir que

$$k_\beta(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Daí por 1.2 temos que

$$n_\alpha(t) = n_\beta(s(t)) = \frac{\beta''(s(t))}{k_\beta(s(t))} = \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \quad (1.3)$$

Obtendo a torção e o vetor binormal: como

$$b_\beta(s(t)) = t_\beta(s(t)) \times n_\beta(s(t)),$$

temos, por 1.1 e 1.3, que

$$\begin{aligned}
b_\alpha(t) = b_\beta(s(t)) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \times \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\
&= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \quad (1.4)
\end{aligned}$$

Derivando 1.4 obtemos

$$b'_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} - \frac{\langle\alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t)\rangle \alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \quad (1.5)$$

Assim, como

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(s(t)) = \langle b'_\beta(s(t)), n_\beta(s(t)) \rangle,$$

temos, por 1.3 e 1.5, que

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\langle\alpha'(t) \times \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

■

## 2 SUPERFÍCIES

Neste capítulo apresentaremos alguns dos resultados sobre superfícies

**Definição 11.** Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo

- i.  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ , ou seja, as coordenadas de  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ ;
- ii. Para todo ponto  $q = (u, v) \in U$ , a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é injetora.

O subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  obtido pela imagem da aplicação  $X$  é chamada de traço de  $X$ .

A condição ii. da definição de superfície garante a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície, ou de modo equivalente, que a  $dX_q$  leva vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes. Para fazer isso, calculamos a matriz associada a aplicação  $dX_q$ , nas bases canônicas  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(u, v)$  e  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ .

Se  $X$  é uma superfície parametrizada e  $q = (u_0, v_0) \in U$  um ponto, denominamos curvas coordenadas de  $X$  em  $q$  as curvas

$$\begin{aligned} u &\mapsto X(u, v_0), \\ v &\mapsto X(u_0, v) \end{aligned}$$

e de vetores tangentes à essas curvas os vetores

$$\begin{aligned} X_u(u_0, v_0) &= dX_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) e \\ X_v(u_0, v_0) &= dX_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz da aplicação  $dX_q$  é

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a condição ii da Definição 11 pode ser expressa exigindo que os vetores coluna da matriz acima sejam linearmente independentes, ou seja, que o produto vetorial  $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)$  seja diferente do vetor nulo.



**Exemplo 5.** Vamos considerar uma hélice circular  $\alpha(u) = (\cos u, \text{senu}, u)$ , para cada  $u$  temos uma única reta que passa pela hélice e é ortogonal ao eixo  $z$ . Unindo essas retas obtemos uma superfície, chamada helicóide (figura 2.1), parametrizada por

$$X(u, v) = (0, 0, u) + v(\cos u, \text{senu}, 0), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

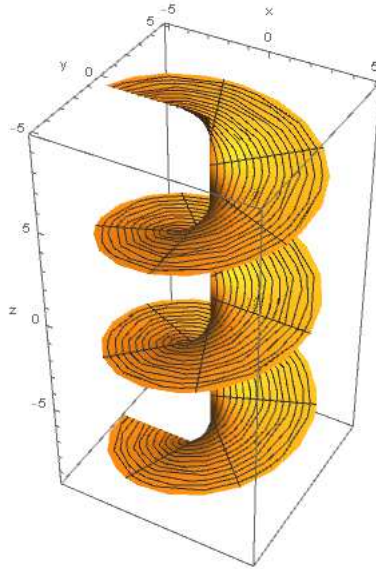


Figura 2.1 – Helicóide.

De fato essa é uma superfície parametrizada regular. A primeira condição da definição de superfície é satisfeita, pois as coordenadas são infinitamente deriváveis. Para verificar a segunda condição, verificamos que o produto vetorial  $X_u \times X_v$  é não nulo. Temos:

$$X_u = (-v \text{senu}, v \cos u, 1)$$

$$X_v = (\cos u, \text{senu}, 0)$$

$$X_u \times X_v = (-\text{senu}, \cos u, -v) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

**Proposição 5.** Se  $f(u, v)$  é uma função real diferenciável, onde  $(u, v) \in U$ , e  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , então a aplicação  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função  $f$ .

*Demonstração.* Mostramos que são satisfeitas as duas condições da Definição 11:  $X$  é diferenciável, pois as funções coordenadas de  $X$  são diferenciáveis. Para mostrar que a diferencial de  $X$  em  $q$  é injetora, mostremos que os vetores coluna de  $dX_q$  são linearmente independentes. De fato, a matriz  $dX_q$  é igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix},$$

portanto temos que

$$(1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v) = (-f_u, -f_v, 1) \neq (0, 0, 0),$$

ou seja, os vetores coluna são linearmente independentes. ■

A seguir, apresentamos alguns exemplos dessas superfícies.

**Exemplo 6.** O parabolóide hiperbólico (figura 2.2) é o traço da aplicação

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $a$  e  $b$  constantes não nulas.

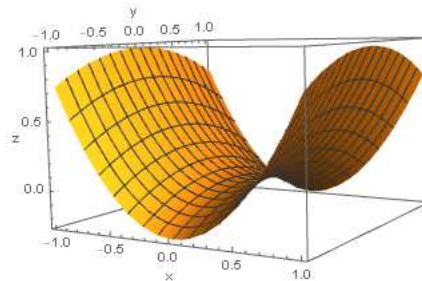


Figura 2.2 – Parabolóide hiperbólico.

**Exemplo 7.** O parabolóide elíptico (Figura 2.3) é o traço da aplicação

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $a > 0$  e  $b > 0$ .

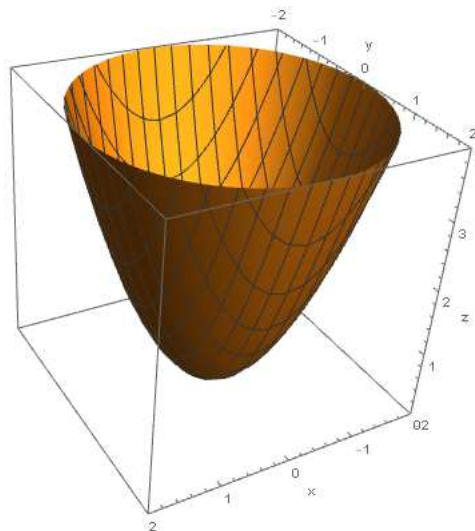


Figura 2.3 – Parabolóide elíptico.

**Exemplo 8.** A sela do macaco (Figura 2.4) é a superfície que descreve o gráfico da função  $f(u, v) = u^3 - 3uv^2$ .

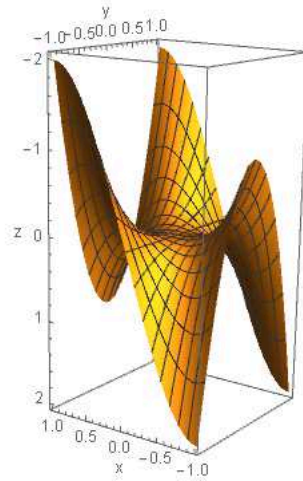


Figura 2.4 – Sela do Macaco.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(v) = (f(v), g(v))$ , uma curva parametrizada regular tal que  $f(v) \neq 0, \forall v \in I$ , podemos imaginar  $\alpha$  contida no plano  $xz$  definindo

$$\alpha(v) = (f(v), 0, g(v)).$$

Se girarmos esta curva ao redor do eixo  $z$  obteremos uma superfície parametrizada regular, chamada superfície de revolução, que pode ser parametrizada por

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{senu}, g(v)),$$

onde  $u$  é o ângulo de rotação em torno do eixo  $z$ . De fato, esta superfície satisfaz as propriedades da definição 11: temos que

$$X_u = (-f(v) \operatorname{senu}, f(v) \cos u, 0),$$

$$X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{senu}, g'(v)).$$

Para mostrar que estes dois vetores são linearmente independentes, notemos que, se o vetor resultante do produto vetorial  $X_u \times X_v$  é não nulo, então seu módulo é diferente de zero. Mostramos que isso acontece:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2 &= \|f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \operatorname{senu}, -f(v)f'(v)\|^2 \\ &= (f(v))^2 [(g'(v))^2 + (f'(v))^2] \neq 0, \end{aligned}$$

já que  $f(v) \neq 0 \forall v \in I$  e  $\alpha$  é regular (ou seja,  $f'$  e  $g'$  nunca se anulam).

A curva girada é chamada de curva geratriz e os círculos descritos pelos pontos da curva geratriz são os paralelos da superfícies  $X$  e as várias posições da curva geratriz sobre a superfície são chamados de meridianos de  $X$  (Figura 2.5).

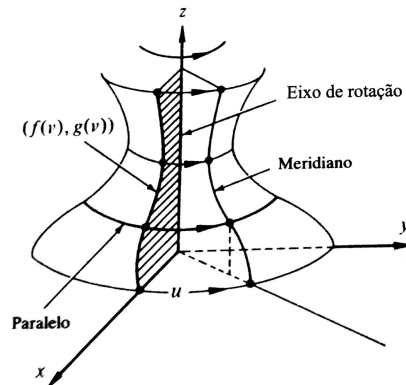


Figura 2.5 – Uma superfície de revolução.

Fonte: (CARMO, 2012)

Exemplos dessas superfícies são apresentadas a seguir.

**Exemplo 9.** O cone de uma folha menos o vértice (Figura 2.6) é o traço da aplicação

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Esta superfície é obtida girando uma reta que passa pela origem.

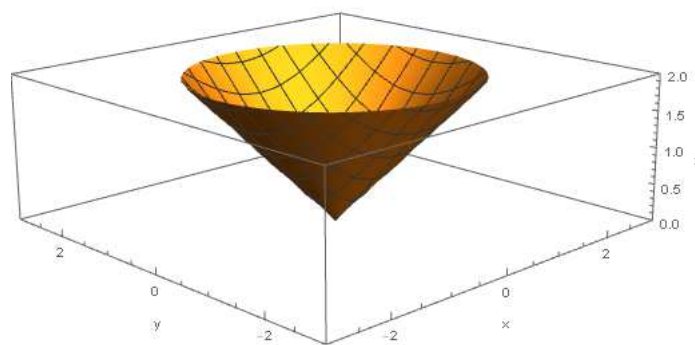


Figura 2.6 – Cone.

**Exemplo 10.** Se girarmos em torno do eixo  $z$  uma circunferência de raio  $r$  centrada no ponto  $(a, 0, 0)$ , parametrizada por  $\alpha(u) = (a + r \cos u, 0, r \operatorname{senu})$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , com  $0 < r < a$ , contida no plano  $xz$  obtem-se uma superfície chamada toro (Figura 2.7), dada pela aplicação

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{senv}, r \operatorname{senu}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

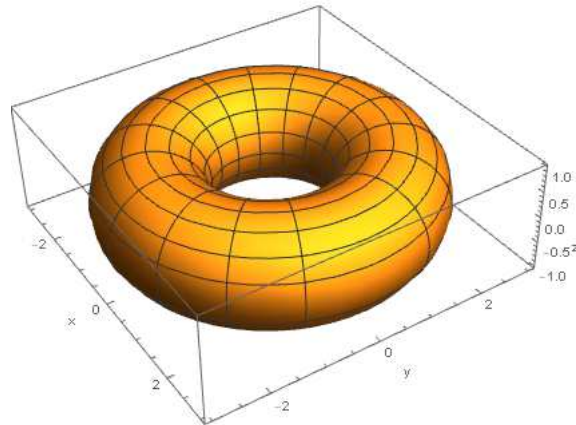


Figura 2.7 – Toro.

**Exemplo 11.** A rotação da curva plana  $\alpha(u) = (0, u, u^3)$ ,  $u \in (-1, 1)$ , contida no plano  $yz$ , em torno da reta  $z = 1$  gera uma superfície chamada de Chapéu de Scherlock (figura 2.8). Esta superfície é parametrizada por

$$X(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, u, (1 - u^3) \operatorname{sen} v + 1), \quad -1 < u < 1, \quad v \in \mathbb{R}.$$

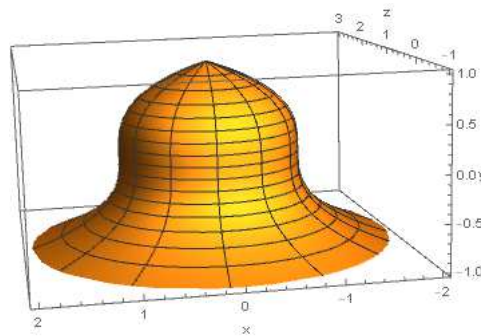


Figura 2.8 – Chapéu de Scherlock.

Na definição de superfície, observamos que a segunda condição na definição 11 garante a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície. A seguinte definição nos diz que um vetor tangente a uma superfície em um ponto  $q$  é um vetor tangente a uma curva da superfície no ponto  $q$ .

**Definição 12.** Se  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor  $w \in \mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  se  $w = \alpha'(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ .

Com essa definição, concluímos que os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  são tangentes à superfície em  $(u_0, v_0)$ , pois são tangentes às curvas coordenadas de  $X$ .

**Definição 13.** O conjunto de vetores tangentes a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  forma o plano tangente a  $X$  em  $(u_0, v_0)$ , denotado por  $T_q X$ .

Pela definição 13 o plano tangente, em um ponto é formado pelo conjunto de vetores tangentes à superfície nesse ponto, mostremos que esses vetores são obtidos como combinação linear dos vetores coordenados:

**Proposição 6.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $q = (u_0, v_0)$ . Então,  $T_q X$  é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva na superfície e  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ . Se  $w \in T_q X$ , então  $w = \alpha'(t_0)$ . Portanto

$$\begin{aligned} w = \alpha'(t_0) &= \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{dv}{dt}(t_0) \\ &= X_u(u_0, v_0) u'(t_0) + X_v(u_0, v_0) v'(t_0) \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $w$  é vetor tangente a  $X$  em  $(u_0, v_0)$  e é uma combinação linear de  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  então

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

e existe uma curva  $\alpha(t)$  da superfície tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(t_0) = w$ . Considerando

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= X(u(t), v(t)) \Rightarrow \\ \alpha'(t) &= \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{dv}{dt}(t_0) = w = aX_u + bX_v \end{aligned}$$

Portanto

$$u'(t) = a \text{ e } v'(t) = b.$$

Por integração podemos concluir que

$$u(t) = at + u_0$$

$$v(t) = bt + v_0$$

■

Como  $T_q X$  é um plano em  $\mathbb{R}^3$ , existe uma única direção normal a este plano.

**Definição 14.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. O vetor unitário normal ao plano tangente  $T_q X$  é o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(q).$$

De fato, como o vetor  $X_u \times X_v$  é normal aos vetores  $X_u(u, v)$  e  $X_v(u, v)$  que geram o plano tangente  $T_q X$ ,  $N(u, v)$  é normal a este plano.

Se o domínio da superfície  $X$  é um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , então variando  $(u, v) \in U$ , temos uma aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , denominada aplicação normal de Gauss:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v).$$

A imagem desta aplicação está contida na esfera unitária, centrada na origem.

**Definição 15.** Seja  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  uma superfície parametrizada regular. Considerando  $u$  e  $v$  como funções diferenciáveis de parâmetro  $t$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , a curva  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva cujo traço está contido na superfície  $X$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma curva da superfície.

**Exemplo 12.** A curva de Viviani (figura 2.9) parametrizada por  $\alpha(t) = (a(\sin(t))^2, a \sin(t) \cos(t), a \cos(t))$  tem o traço contido em uma esfera.

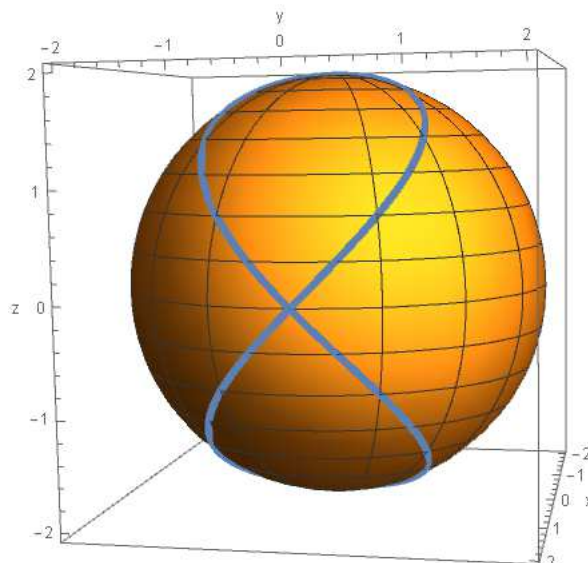


Figura 2.9 – Curva de Viviani.

## 2.1 Formas Quadráticas Fundamentais

**Definição 16.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $\forall q \in U$ , a aplicação

$$I_q : T_q X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

é denominada a primeira forma quadrática de  $X$  em  $q$ .

Considerando que um vetor  $w \in T_q X$  é da forma

$$w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

a primeira forma fundamental fica

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u, v) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u, v) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u, v).$$

Se  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada regular denotamos

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle(u, v), \quad F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle(u, v) \text{ e } G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle(u, v).$$

**Definição 17.**  $E, F, G$  são chamados os coeficientes da primeira forma quadrática.

**Proposição 7.** Os coeficientes da primeira forma quadrática satisfazem as seguintes propriedades:

- a)  $E(u, v), G(u, v) > 0$ ;
- b)  $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$ .

*Demonstração.* a) De fato,  $X_u$  e  $X_v$  são não nulos e

$$E(u, v) = \langle X_u \times X_u \rangle = \|X_u\|^2 > 0 \quad \text{e} \quad G(u, v) = \langle X_v \times X_v \rangle = \|X_v\|^2 > 0.$$

b) Segue da identidade vetorial

$$\|w \times \bar{w}\|^2 = \|w\|^2 \|\bar{w}\|^2 - \langle w, \bar{w} \rangle^2$$

que

$$EG - F^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0.$$

■



**Definição 18.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Fixado  $q = (u_0, v_0) \in U$ , a segunda forma quadrática de  $X$  em  $q$  é uma aplicação

$$II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R},$$

que para cada vetor  $w \in T_q X$  associa  $II_q$  da seguinte forma: se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva diferenciável da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = q$  e  $\alpha'(t_0) = w$ , então definimos  $II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$ , onde  $N$  é o vetor normal a  $X$ .

Podemos escrever um vetor tangente à superfície como  $w = \alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$ . Assim,

$$\alpha''(t) = u''(t)X_u + (u'(t))^2 X_{uu} + 2u'(t)v'(t)X_{uv} + (v'(t))^2 X_{vv} + v''(t)X_v. \quad (2.1)$$

Com isso concluímos que  $II_q$  não depende da curva que escolhemos na superfície:

$$\begin{aligned} II_q(w) &= \langle \alpha''(t), N(u, v) \rangle \\ &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u, v) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u, v) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u, v) \end{aligned}$$

Se  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada regular, denotamos

$$e(u, v) = \langle X_{uu}, N \rangle(u, v), \quad f(u, v) = \langle X_{uv}, N \rangle(u, v) \quad e \quad g(u, v) = \langle X_{vv}, N \rangle(u, v)$$

e,  $f$  e  $g$  são chamados coeficientes da segunda forma quadrática da superfície  $X$ .

Os vetores  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$  são linearmente independentes, temos que  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vv}$ ,  $N_u$  e  $N_v$  podem ser expressos como combinação linear de  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$ :

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + a_{11} N, \quad (2.2)$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12} N, \quad (2.3)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + a_{22} N, \quad (2.4)$$

$$N_u = b_{11} X_u + b_{12} X_v, \quad (2.5)$$

$$N_v = b_{21} X_u + b_{22} X_v. \quad (2.6)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  são determinados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental.  $\Gamma_{ij}^k$  são chamados de símbolos de Christoffel da superfície  $X$ .  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são determinados considerando o produto interno das três primeiras relações acima com o vetor  $N$ , obtêm-se  $a_{11} = e$ ,  $a_{12} = f$ ,  $a_{22} = g$ .

Considerando o produto interno das relações (2.2) a (2.6) com  $X_u$  e  $X_v$ , obtemos os demais coeficiente:

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \quad (2.12)$$

$$b_{11} E + b_{12} F = \langle N_u, X_u \rangle = -e, \quad (2.13)$$

$$b_{11} F + b_{12} G = \langle N_u, X_v \rangle = -f, \quad (2.14)$$

$$b_{21} E + b_{22} F = \langle N_v, X_u \rangle = -f, \quad (2.15)$$

$$b_{21} F + b_{22} G = \langle N_v, X_v \rangle = -g. \quad (2.16)$$

Resolvendo (2.7) e (2.8) para  $\Gamma_{11}^1$  e  $\Gamma_{11}^2$ , (2.9) e (2.10) para  $\Gamma_{12}^1$  e  $\Gamma_{12}^2$ , (2.11) e (2.12) para  $\Gamma_{22}^1$  e  $\Gamma_{22}^2$ , (2.13) e (2.14) para  $b_{11}$  e  $b_{12}$ , (2.15) e (2.16) para  $b_{21}$  e  $b_{22}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & b_{12} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ b_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} & b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Podemos observar que os símbolos de Christoffel só dependem dos coeficientes de  $I_q$  e de suas derivadas.

### 3 CURVAS GEODÉSICAS

A seguir, definiremos as curvas chamadas curvas geodésicas. Estas curvas têm a característica de serem o caminho mais curto na superfície entre quaisquer dois pontos. Não demonstraremos essa propriedade aqui, mas ela pode ser consultada na obra de ARAUJO (2012) página 152. Essas curvas têm diversas aplicações na cartografia e também na teoria da relatividade geral estudada pela física.

**Definição 19.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma geodésica da superfície  $X$  se,  $\forall t \in I$ ,  $\alpha''(t)$  é um vetor normal a  $X$  em  $(u(t), v(t))$ .

Conforme a definição acima, uma curva é chamada de geodésica se o vetor  $\alpha''(t)$  for perpendicular a superfície no ponto  $\alpha(t)$ .

**Proposição 8.** Uma curva geodésica  $\alpha(t)$  em uma superfície possui  $\|\alpha'(t)\|$  constante.

*Demonstração.* Se a curva  $\alpha$  é uma geodésica, então o vetor  $\alpha''(t)$  é perpendicular a superfície no ponto  $\alpha(t)$ , isto é, o vetor tangente  $\alpha'(t)$  é perpendicular a  $\alpha''(t)$ , o que é equivalente a  $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ . Consideramos agora a derivada de  $\|\alpha'(t)\|^2$ :

$$\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0,$$

donde temos  $\|\alpha'(t)\|$  uma constante. ■

**Exemplo 13.** Toda reta  $\alpha(s) : I \rightarrow X$ , parametrizada pelo comprimento de arco, contida em uma superfície, é uma geodésica, pois  $\alpha''(s) = 0$  para todo  $s \in I$ .

**Proposição 9.** A reparametrização de uma geodésica pelo comprimento de arco, continua sendo geodésica.

*Demonstração.* Seja  $\alpha(t)$  uma geodésica. Consideramos a função comprimento de arco  $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt$ . Como  $\|\alpha'(t)\|$  é uma constante positiva,  $s(t) = \|\alpha'(t)\|t$ . Agora seja  $\alpha(t) = \beta(s(t))$ , onde  $\beta$  é uma reparametrização pelo comprimento de arco, derivando duas vezes:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(s) \frac{ds}{dt} \\ \alpha''(t) &= \beta''(s) \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \beta''(s) \|\alpha'(t)\|^2 \Rightarrow \beta''(s) = \alpha''(t) \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Com isso, o vetor  $\beta''(s)$  é um múltiplo escalar do vetor  $\alpha''(t)$  e como este último é paralelo ao vetor  $N$ ,  $\beta''(s)$  também será, ou seja,  $\beta(s)$  é uma geodésica. ■

A proposição seguinte garante a verificação se uma curva é uma geodésica.

**Proposição 10.** Seja  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , uma curva regular de uma superfície  $X(u, v)$ . Então  $\alpha$  é uma geodésica se, e só se, as funções  $u(t)$ ,  $v(t)$  satisfazem o sistema de equações

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 &= 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Como  $\alpha(t)$  é uma geodésica se, e só se,  $\forall t \in I$ ,  $\alpha''(t)$  é paralelo ao vetor  $N$  então  $\alpha''(t)$  não tem componente tangencial à superfície, logo escrevendo  $\alpha''(t)$  como combinação linear de  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$  teremos que ter  $X_u$  e  $X_v$  nulos. Substituindo  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$  e  $X_{vv}$  na equação (2.1) pelas relações que foram determinadas em (2.2) a (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= [u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1] X_u + \\ &\quad + [v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2] X_v + \\ &\quad + [(u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g] N. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma geodésica de  $X$  se, e só se,  $u(t)$  e  $v(t)$  satisfazem o sistema (3.1). ■

A proposição 10 permite identificarmos uma geodésica se as funções  $u(t)$  e  $v(t)$  satisfazem o sistema 3.1. Porém estas funções vão existir para toda superfície? A resposta para esta pergunta está no teorema a seguir, conhecido como o teorema da existência para geodésicas que garante a existência de uma única geodésica em um intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$ :

**Proposição 11.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto com  $(u, v) \in U$ . Então, para todo  $q \in U$  e  $w \neq 0$ , tal que  $w \in T_qX$ , existe  $\epsilon > 0$  e uma única geodésica  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  da superfície  $X$ , em que  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , tal que  $(u(0), v(0)) = q$  e  $\alpha'(t) = w$ .

*Demonstração.* Se  $q = (u_0, v_0)$ , consideremos o vetor tangente  $w$  como combinação linear dos vetores  $X_u$  e  $X_v$   $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ . Pelo teorema de existência e unicidade da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias aplicado ao problema de valor inicial existem  $\epsilon > 0$  e funções  $u(t)$ ,  $v(t)$  definidas no intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$  e ainda que estas funções são únicas. Portanto,  $\alpha(t)$  é uma geodésica da superfície  $X$  de modo que  $(u(0), v(0)) = q$  e o vetor tangente  $\alpha'(t) = w$ . ■

### 3.1 Geodésicas em superfícies de revolução

No capítulo 2 estudamos as superfícies de revolução, parametrizadas por  $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$ , sendo  $v$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $z$ . Determinamos agora as geodésicas dessas superfícies.

Calculamos os coeficientes da primeira forma quadrática, usando a definição 17, obtemos:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle(u, v) = f'(u)^2 \cos^2 v + f'(u)^2 \operatorname{sen}^2 v + g'(u)^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle(u, v) = -f'(u)f(u) \cos v \operatorname{sen} v + f'(u)f(u) \cos v \operatorname{sen} v = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle(u, v) = f(u)^2 \operatorname{sen}^2 v + f(u)^2 \cos^2 v = f(u)^2. \end{aligned}$$

Com isso, podemos determinar os símbolos de Christoffel. Temos que

$$E_u = 2(f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)), \quad E_v = 0, \quad F_u = F_v = 0, \quad G_u = 2f(u)f'(u) \quad e \quad G_v = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} = \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} = \frac{-f(u)f'(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = \frac{f'(u)}{f(u)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Desta forma, podemos determinar as equações das geodésicas, usando a proposição (10):

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2 \left( \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2} \right) - (v')^2 \left( \frac{f(u)f'(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2} \right) &= 0 \\ v'' + 2u'v' \left( \frac{f'(u)}{f(u)} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Com isso, podemos verificar que todo meridiano  $\alpha(s)$ , isto é, quando o ângulo de rotação  $v$  é constante, parametrizado pelo comprimento de arco, então  $u = u(s)$ , é uma geodésica. De fato, calculando as equações do sistema 3.3 quando  $v = v_0$  e  $u = u(s)$ , teremos  $v' = 0$  e daí a segunda equação do sistema é satisfeita de imediato e a primeira equação fica:

$$u'' + (u')^2 \left( \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2} \right) = 0 \tag{3.4}$$

Como o meridiano  $\alpha(s) = (f(u) \cos v_0, f(u) \operatorname{sen} v_0, g(u))$ , onde  $u = u(s)$ , está parametrizado pelo comprimento do arco, temos que  $|\alpha'(s)| = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{(f'(u)u'(s) \cos v_0)^2 + (f'(u)u'(s) \operatorname{sen} v_0)^2 + (g'(u)u'(s))^2} &= 1 \Rightarrow \\ (f'(u)u'(s))^2 + (g'(u)u'(s))^2 &= 1 \Rightarrow \\ (u'(s))^2((f'(u))^2 + (g'(u))^2) &= 1 \Rightarrow \\ (u'(s))^2 &= \frac{1}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}. \end{aligned}$$

Por derivação, temos:

$$\begin{aligned} 2u'(s)u''(s) &= \frac{-(2f'(u) \cdot f''(u)u'(s) + 2g'(u)g''(u)u'(s))}{((f'(u))^2 + (g'(u))^2)^2} \\ u'(s)u''(s) &= \frac{-(f'(u) \cdot f''(u) + g'(u)g''(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} (u'(s))^3 \\ u''(s) &= \frac{-(f'(u) \cdot f''(u) + g'(u)g''(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} (u'(s))^2 \\ u''(s) + \frac{(f'(u) \cdot f''(u) + g'(u)g''(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} (u'(s))^2 &= 0 \end{aligned}$$

que é a primeira equação do sistema de equações de geodésicas em uma superfície de revolução. A segunda equação do sistema é satisfeita pois como  $v$  é uma constante, tem-se que  $v'_0 = 0$ .

Verificamos também que os paralelos, ou seja, quando  $u = u_0$  é uma constante e o ângulo de rotação  $v = v(s)$ , parametrizado pelo comprimento de arco, são geodésicas, desde que  $f'(u) = 0$ . Usando os sistema de 3.3 temos:

$$\begin{aligned} v'' &= 0 \\ \frac{-(v'(s))^2(f(u)f'(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observemos que, deve-se ter  $v'(s)$  não nulo para que  $v = v(s)$  seja não constante. Além disso,  $f > 0$  e ainda o denominador da fração na segunda equação é diferente de zero. Logo, para que a equação seja satisfeita, deve-se ter  $f'(u) = 0$ .

Para obtermos as curvas geodésicas que não são paralelos nem meridianos, consideremos a segunda equação do sistema de equações geodésicas de superfícies de revolução:

$$v'' + 2u'v' \left( \frac{f'(u)}{f(u)^2} \right) = 0.$$

Esta equação é equivalente a  $(f(u)^2 v')' = f(u)^2 v'' + 2f(u)f'(u)v'u' = 0$  e isso nos diz que  $f(u)^2 v'$  é uma constante  $c$ . Tomemos uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco,

que não seja nem um meridiano nem um paralelo da superfície. Como essa geodésica está parametrizada pelo comprimento de arco, vale  $\|\alpha'(s)\| = 1$  e como já calculado anteriormente,

$$u'(s)^2(f'(u)^2 + g'(u)^2) + v'(s)^2 f(u)^2 = 1,$$

daí multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\left(\frac{ds}{dv}\right)$ , obtemos:

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \left(\frac{du}{dv}\right) (f'(u)^2 + g'(u)^2) + f(u)^2,$$

e como  $\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \frac{(f(u))^4}{c^2}$ , podemos reescrever essa igualdade da seguinte forma:  $(f(u))^2 = c^2 + c^2 \frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2} \left(\frac{dv}{du}\right)^2$ . Usando a última igualdade, temos:

$$\begin{aligned} (f(u))^2 - c^2 &= \frac{c^2}{(f(u))^2} ((f'(u))^2 + (g'(u))^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \frac{(f(u))^2 ((f(u))^2 - c^2)}{c^2} &= ((f'(u))^2 + (g'(u))^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{(f(u))^2 ((f(u))^2 - c^2)}{c^2 ((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}} &= \frac{dv}{du} \\ \frac{c}{f(u)} \sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2 - c^2}} &= \frac{dv}{du} \end{aligned}$$

Concluimos então, por integração, que

$$v = c \int \frac{1}{f(u)} \sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2 - c^2}} du + \text{constante},$$

que é a equação de um segmento de uma geodésica da superfície de revolução que não é nem um paralelo nem um meridiano.

A seguir, apresentamos algumas superfícies e suas geodésicas. Para calcular as integrais e obter os traços das curvas, utilizando o software Mathematica.

**Exemplo 14.** O toro, apresentado no capítulo 2 é uma superfície de revolução parametrizada por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Sabemos que todos os meridianos são geodésicas. Vamos verificar os paralelos. As funções são  $f(u) = a + r \cos u$  e  $g(u) = r \sin u$ , com  $0 < r < a$ . Os paralelos do toro são geodésicas, desde que  $f'(u) = 0$ . Neste caso temos que  $f'(u) = -r \sin u = 0$  somente quando  $u = 0$  e  $u = \pi$ . Se  $u = 0$  temos que a geodésica será

$$\alpha_1 = (a + r \cos 0) \cos v, (a + r \cos 0) \sin v, r \sin 0 = ((a + r) \cos v, (a + r) \sin v, 0),$$

ou seja, a circunferência exterior do toro. Quando  $u = \pi$  temos a curva

$$\alpha_2 = (a + r \cos \pi) \cos v, (a + r \cos \pi) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} \pi = ((a - r) \cos v, (a - r) \operatorname{sen} v, 0),$$

ou seja, a circunferência interna do toro. A figura 3.2 mostra essas geodésicas. Portanto, somente estes dois paralelos são geodésicas.

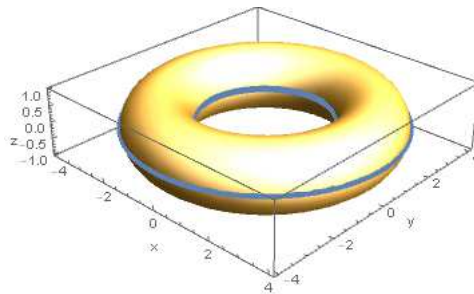


Figura 3.1 – Paralelos do toro.

As demais geodésicas do toro são caracterizadas por  $\frac{dv}{du} = \frac{c}{f} \sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2 - c^2}}$  onde  $f(u) = a + r \cos u$ ,  $f'(u) = -r \operatorname{sen} u$  e  $g'(u) = r \cos u$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{c}{a + r \cos u} \sqrt{\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 u + r^2 \cos^2 u}{(a + r \cos u)^2 - c^2}} \Rightarrow \\ \frac{dv}{du} &= \frac{cr}{(a + r \cos u)(a + r \cos u)^2 - c^2} \Rightarrow \\ v(u) &= cr \int \frac{1}{(a + r \cos u) \sqrt{(a + r \cos u)^2 - c^2}} du \end{aligned}$$

A figura 3.2 apresenta um segmento de uma curva geodésica.

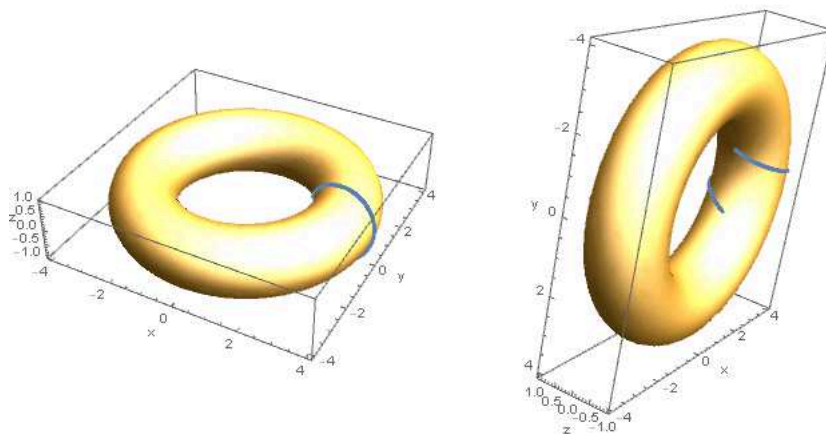


Figura 3.2 – Um segmento de uma geodésica (nem meridiano e nem paralelo) do toro.

**Exemplo 15.** A esfera de raio  $r$ , centrada na origem, parametrizada por  $X(u, v) = (r \operatorname{sen} u \cos v, r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u)$ ,  $r > 0$ ,  $0 < u < \pi$ , é obtida girando uma circunferência



de raio  $r$  também centrada na origem. Vamos determinar os paralelos da esfera que são geodésicas.

Temos  $f(u) = \operatorname{sen}u$  e  $g(u) = \cos u$ . Para obtermos os paralelos que são geodésicas, devemos ter  $f'(u) = \cos(u) = 0$ , ou seja,  $u = \frac{\pi}{2}$ .

Se  $u = \frac{\pi}{2}$ , temos  $\alpha(v) = (r \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos v, r \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \operatorname{sen}v, r \cos(\frac{\pi}{2})) = (r \cos v, r \operatorname{sen}v, 0)$ . Portanto, o equador é o único paralelo que é uma geodésica. A figura 3.3 apresenta a esfera e o paralelo que é geodésica.

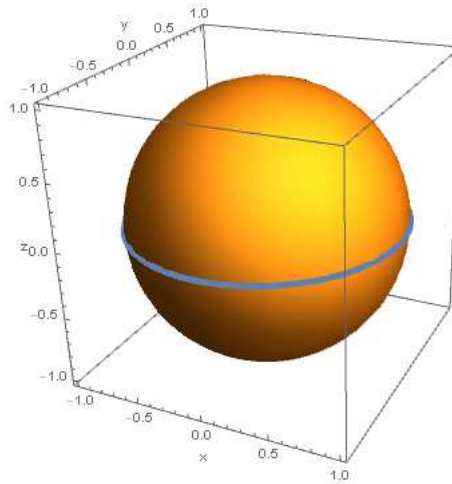


Figura 3.3 – Esfera e o equador (único paralelo que é geodésica).

As demais geodésicas são caracterizadas por

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{c}{\operatorname{sen}u} \sqrt{\frac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 u - c^2}} \Rightarrow \\ \frac{dv}{du} &= \frac{c}{\operatorname{sen}u \sqrt{\operatorname{sen}^2 u - c^2}} \Rightarrow \\ v(u) &= \int \frac{c}{\operatorname{sen}u \sqrt{\operatorname{sen}^2 u - c^2}} du. \end{aligned}$$

Neste caso, as geodésicas são círculos máximos da esfera.

**Exemplo 16.** Vamos determinar as geodésicas do cilindro, parametrizado por  $X(u, v) = (a \cos u, a \operatorname{sen}u, v)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ . Neste caso, todos os paralelos do cilindro são geodésicas, pois  $f'(u) = 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}$ . Vamos determinar as demais geodésicas. Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{c}{a} \sqrt{\frac{0 + 1}{a^2 - c^2}} \Rightarrow \\ \frac{dv}{du} &= \frac{c}{a \sqrt{a^2 - c^2}} \Rightarrow \\ v &= \int \frac{c}{a \sqrt{a^2 - c^2}} du \Rightarrow \\ v &= \frac{uc}{a \sqrt{a^2 - c^2}} + k, \end{aligned}$$

onde  $k$  é uma constante. Desta forma, as curvas geodésicas são hélices. A figura 3.4 apresenta um cilindro, alguns paralelos, meridianos e uma hélice.

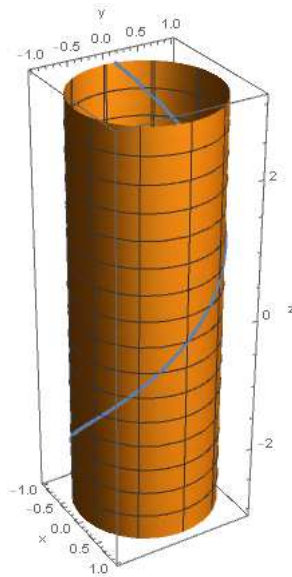


Figura 3.4 – Cilindro com meridianos, paralelos e uma hélice.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar geometria diferencial de curvas e superfícies foi um desafio, pois no curso de licenciatura em matemática não temos essa disciplina. No entanto, este estudo iniciou com um projeto de iniciação científica, no qual me identifiquei e adquiri gosto pelo assunto, desejando aprofundar um pouco mais este tópico. O estudo possibilitou aliar conceitos nunca vistos com os conhecimentos de cálculo e álgebra linear estudados durante o curso de graduação, conseguindo ampliar a visão sobre o assunto e obter um bom aprendizado.

A possibilidade de trabalhar com o software Mathematica também foi de grande aprendizado, pois foi fundamental para resolver integrais mais complexas e também para visualizar os traços das curvas e superfícies. O software não substitui a teoria, mas auxilia na visualização e na ideia intuitiva de alguns conceitos.

As curvas geodésicas têm uma importância na Matemática por terem a característica de serem as curvas, sobre uma superfície, que têm o menor comprimento ligando dois pontos. Não demonstramos essa propriedade neste trabalho, mas é uma perspectiva para outros trabalhos, inclusive na continuidade e aprofundamento dos estudos na área da matemática pura.

## REFERÊNCIAS

ARAUJO, P. V. **Geometria diferencial**. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 3.ed. Boston: Chapman and Hall/CRC, 2006.

TENENBLAT, K. **Introdução a Geometria Diferencial**. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2008.