



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL**  
***CAMPUS CHAPECÓ***  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL**  
**PROFMAT**

**ROBSON KLEEMANN**

**DESENVOLVIMENTO DE PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O TRABALHO**  
**INTERDISCIPLINAR NAS DISCIPLINAS DE MATEMÁTICA E FÍSICA**

**CHAPECÓ**

**2018**

**ROBSON KLEEMANN**

**DESENVOLVIMENTO DE PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O TRABALHO  
INTERDISCIPLINAR NAS DISCIPLINAS DE MATEMÁTICA E FÍSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Vitor José Petry.

**CHAPECÓ**

**2018**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL**

Av. Fernando Machado, 108 E

CEP 89802-112

Caixa Postal 181

Centro

Chapecó - SC

Brasil

**PROGRAD/DBIB - Divisão de Bibliotecas**

KLEEMANN, ROBSON

DESENVOLVIMENTO DE PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O  
TRABALHO INTERDISCIPLINAR NAS DISCIPLINAS DE MATEMÁTICA  
E FÍSICA/ ROBSON KLEEMANN. -- 2018.

88 f.:il.

Orientador: VITOR JOSÉ PETRY.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da  
Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação em Mestrado em  
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Chapecó, SC,  
2018.

1. RELAÇÕES INTERDISCIPLINARES. 2. PROPOSTAS  
METODOLÓGICAS. 3. SOFTWARE GEOGEBRA. I. PETRY, VITOR  
JOSÉ, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul.  
III. Título.



**ROBSON KLEEMANN**

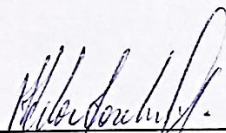
**DESENVOLVIMENTO DE PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O TRABALHO  
INTERDISCIPLINAR NAS DISCIPLINAS DE MATEMÁTICA E FÍSICA**

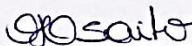
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFES, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

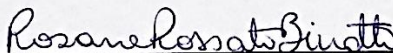
Orientador (a): Prof. Dr. Vitor José Petry

Aprovado em: 12 / 07 / 2018

BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Vitor José Petry - UFES

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Olga Harumi Saito - UTFPR

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Rosane Rossato Binotto – UFES

Chapecó/SC, julho de 2018

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela existência e capacidade de realizar este trabalho.

A toda minha família, pela compreensão nos momentos em que estive ausente, incentivo nos momentos de dificuldades e paciência nos momentos de angústia.

Aos amigos, colegas de curso e de trabalho, pela motivação, companheirismo e auxílios em momentos de necessidades.

Aos professores que fizeram direta e indiretamente parte deste processo, em especial ao meu orientador, professor Dr. Vitor José Petry, pelos encaminhamentos e contribuições.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

## RESUMO

O presente trabalho evidencia a importância do uso da interdisciplinaridade e da utilização de recursos tecnológicos na prática pedagógica, apresentando três propostas metodológicas para o ensino de Matemática a partir de relações interdisciplinares com problemas da disciplina de Física tendo o *software* GeoGebra como suporte intermediador. Abordam-se os tópicos envolvendo espelhos esféricos e a semelhança de triângulos: caracterização das imagens a partir da posição do objeto em relação ao espelho; ondas, sinais de satélites e a parábola: funcionamento de uma antena parabólica; e, Leis de Kepler e a elipse: lugar geométrico da trajetória descrita pelos planetas em torno do Sol. Ainda, disponibiliza-se de forma *online*, objetos virtuais de aprendizagem referente às propostas metodológicas, desenvolvidos no GeoGebra.

**Palavras-chave:** Relações Interdisciplinares. *Software* GeoGebra. Propostas Metodológicas.

## ABSTRACT

The present work evidences the importance of the use of interdisciplinarity and the use of technological resources in the pedagogical practice, presenting three methodological proposals for the teaching of Mathematics from interdisciplinary relations with problems of the discipline of Physics, having GeoGebra software as intermediary support. Addressed the topics involving spherical mirrors and the similarity of triangles: characterization of the images from the position of the object in relation to the mirror; waves, satellite signals and the parabola: functioning of a satellite dish; and Kepler's Laws and the Ellipse: the locus of the trajectory described by the planets around the Sun. In addition, is available, online, a pedagogical material on the subject of methodological proposals, developed from GeoGebra.

**Key words:** Interdisciplinary Relationships. GeoGebra Software. Methodological Proposals.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Principais elementos dos espelhos esféricos.....	14
Figura 02 - Formação de imagem no espelho esférico côncavo.....	16
Figura 03 - Lugar geométrico da parábola.....	18
Figura 04 - Parábola obtida pela interseção da antena parabólica com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação.....	19
Figura 05 - Gráfico da parábola $\mathcal{P}$ .....	19
Figura 06 - Trajetória circular dos planetas em torno do Sol.....	20
Figura 07 - Elipse e seus elementos.....	21
Figura 08 - Simulação de trajetória elíptica descrita pelo planeta Terra em torno do Sol.....	22
Figura 09 - Interseção da esfera com um plano, gerando a calota esférica.....	37
Figura 10 - Espelhos esféricos: (a) côncavo e (b) convexo.....	38
Figura 11 - Espelhos esféricos côncavo e convexo no plano bidimensional.....	38
Figura 12 - Elementos geométricos de um espelho esférico.....	39
Figura 13 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a primeira propriedade.....	39
Figura 14 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a segunda propriedade.....	40
Figura 15 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a terceira propriedade.....	40
Figura 16 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a quarta propriedade.....	41
Figura 17 - Caracterização do ângulo de abertura de um espelho esférico.....	42
Figura 18 - Representação dos raios paraxiais e ângulo $\theta$ de abertura no espelho côncavo de acordo com o raio de curvatura.....	43
Figura 19 - Objeto posicionado antes do centro de curvatura de um espelho côncavo...	44
Figura 20 - Objeto posicionado sobre o centro de curvatura de um espelho côncavo....	44
Figura 21 - Objeto posicionado entre o centro de curvatura e o foco de um espelho côncavo.....	45
Figura 22 - Objeto posicionado sobre o foco de um espelho côncavo.....	45
Figura 23 - Objeto posicionado entre o foco e o vértice de um espelho côncavo.....	46
Figura 24 - Objeto posicionado em frente a um espelho convexo.....	47
Figura 25 - Semelhança de triângulos.....	48
Figura 26 - Objeto posicionado em frente a um espelho côncavo gerando uma imagem congruente ao objeto.....	50
Figura 27 - Objeto posicionado em frente a um espelho esférico côncavo de modo que os raios refletidos sejam paralelos.....	51
Figura 28 - Determinação analítica da imagem em espelhos esféricos.....	52
Figura 29 - Estudo analítico da imagem a partir do comprimento de arcos.....	53
Figura 30 - Espelho esférico côncavo, que respeita as condições de nitidez de Gauss, posicionado sobre o plano OXY.....	56
Figura 31 - Superfície parabólica ou parabolóide de revolução.....	58
Figura 32 - Transmissor e refletor de ondas eletromagnéticas.....	59



Figura 33 - Lugar geométrico da parábola de foco $F$ , diretriz $d$ e seus elementos.....	60
Figura 34 - Parábola com vértice na origem e foco $F$ acima da reta diretriz.....	61
Figura 35 - Parábola com vértice na origem e foco $F$ abaixo da reta diretriz.....	62
Figura 36 - Parábola com vértice na origem e foco $F$ à direita da reta diretriz.....	62
Figura 37 - Parábola com vértice na origem e foco $F$ à esquerda da reta diretriz.....	63
Figura 38 - Parábola com vértice em $V = (x_0, y_0)$ e foco $F$ acima da reta diretriz.....	64
Figura 39 - Parábola com vértice em $V = (x_0, y_0)$ e foco $F$ abaixo da reta diretriz.....	64
Figura 40 - Parábola com vértice em $V = (x_0, y_0)$ e foco $F$ à direita da reta diretriz.....	65
Figura 41 - Parábola com vértice em $V = (x_0, y_0)$ e foco $F$ à esquerda da reta diretriz.	66
Figura 42 - Incidência e reflexão dos raios sobre a antena parabólica, e reta tangente à parábola.....	67
Figura 43 - Reta tangente à parábola no ponto $P$ .....	68
Figura 44 - Modelo simplificado do sistema planetário geocêntrico.....	70
Figura 45 - Modelo simplificado do sistema planetário heliocêntrico de Ptolomeu.....	71
Figura 46 - Representação das forças existentes entre dois corpos no espaço.....	72
Figura 47 - Esboço de uma elipse obtida a partir de três pontos do plano.....	72
Figura 48 - Eixo maior de uma elipse.....	73
Figura 49 - Elipse com todos os seus elementos.....	73
Figura 50 - Simulação do movimento da Terra em torno do Sol.....	76
Figura 51 - Posição da Terra quando ocorrem os fenômenos afélio e periélio.....	77
Figura 52 - Translação da Terra utilizando valores que se aproximam dos dados reais..	78
Figura 53 - Representação gráfica da segunda lei de Kepler.....	79
Figura 54 - Classificação do movimento do planeta de acordo com o espaço da trajetória no qual ele se encontra.....	80

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>11</b>
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>23</b>
3.1 INTERDISCIPLINARIDADE .....	23
3.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA A PARTIR DE RELAÇÕES INTERDISCIPLINARES .....	27
3.3 AS TIC'S NO ENSINO DE MATEMÁTICA .....	29
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>33</b>
4.1 PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA A PARTIR DE RELAÇÕES INTERDISCIPLINARES COM A FÍSICA UTILIZANDO O GEOGEBRA .....	34
<b>5 PROPOSTAS METODOLÓGICAS .....</b>	<b>36</b>
5.1 ESPELHOS ESFÉRICOS E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: CARACTERIZAÇÃO DA IMAGEM A PARTIR DA POSIÇÃO DO OBJETO EM RELAÇÃO AO ESPELHO ....	36
5.2 ONDAS, SINAIS DE SATÉLITES E PARÁBOLA: FUNCIONAMENTO DE UMA ANTENA PARABÓLICA .....	57
5.3 LEIS DE KEPLER E A ELIPSE: LUGAR GEOMÉTRICO DA TRAJETÓRIA DESCRITA PELOS PLANETAS EM TORNO DO SOL.....	69
5.4 CONTRIBUIÇÕES E POTENCIALIDADES DAS PROPOSTAS METODOLÓGICAS .....	81
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>84</b>
<b>7 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>86</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática, como componente curricular obrigatório na Educação Básica, assume o papel de fundamentar os conceitos básicos relativos à mesma, permitindo ao aluno o desenvolvimento de habilidades e competências que podem ser úteis em momentos oportunos para solucionar necessidades cotidianas, como para auxiliar em possíveis criações de novas ferramentas ou tecnologias, objetivando sempre aperfeiçoamentos e melhorias.

Por abordar um amplo quantitativo de conceitos a serem estudados, principalmente aos alunos da Educação Básica, que têm a Matemática como uma disciplina paralela às demais, cabe aos profissionais incumbidos de mediar esse conhecimento, o desenvolvimento e uso de recursos metodológicos que permitam uma melhor compreensão e assimilação dos conceitos, com uma visão abrangente, buscando resgatar o uso da Matemática a partir de aplicações em problemas reais, de modo a suprir eventuais necessidades cotidianas.

A Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas são exemplos de metodologias empregadas no ensino da disciplina. A inserção dessas no planejamento e desenvolvimento das aulas, permite uma aproximação dos conceitos matemáticos com situações-problema reais, instigando no aluno o desenvolvimento e a capacidade de pesquisa, resgatando a teoria matemática para resolver e/ou explicar determinado fenômeno envolvido no problema.

Outra alternativa metodológica para o ensino da Matemática e outras áreas afins, constitui-se em um trabalho interdisciplinar com o uso de *softwares* como ferramentas de ensino. As Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE's) (2008) destacam que a interdisciplinaridade torna a aprendizagem significativa à medida que a mesma for explorada nas abordagens dos conceitos específicos, a fim de permitir uma articulação entre as disciplinas que exploram assuntos complementares, auxiliando no enriquecimento e compreensão de determinado conteúdo.

Vale destacar que, fazer uso da interdisciplinaridade não consiste no fato do professor de uma área específica, em sua prática pedagógica, atuar como professor de uma área distinta à sua, mas sim, em utilizar-se de conceitos específicos de sua área de formação para justificar determinados fenômenos abordados em outras disciplinas; ou ainda, utilizar-se de problemas abordados nas áreas diversas, investigá-los e resgatar possíveis conceitos matemáticos a serem explorados a fim de justificar determinados fenômenos, vindo ao encontro da teoria matemática em algum assunto específico.

Complementam as DCE's (2008, p. 27) que, no conjunto de disciplinas da grade curricular da Educação Básica,

[...] as relações interdisciplinares se estabelecem quando:

- conceitos, teorias ou práticas de uma disciplina são chamados à discussão e auxiliam a compreensão de um recorte de conteúdo qualquer de outra disciplina;
- ao tratar do objeto de estudo de uma disciplina, buscam-se nos quadros conceituais de outras disciplinas referenciais teóricos que possibilitem uma abordagem mais abrangente desse objeto.

Paralelo a isso, destaca-se também o uso das mídias tecnológicas como metodologia de ensino da Matemática, tornando computadores, celulares, e demais recursos tecnológicos, ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem, atuando como suportes mediadores no desenvolvimento das aulas de matemática. A inserção dos recursos tecnológicos na aplicação e planejamento da prática docente impulsiona os conteúdos curriculares e fortalece a prática pedagógica.

No presente trabalho, inicialmente, efetua-se um resgate bibliográfico acerca de alguns trabalhos desenvolvidos que descrevem estudos e aspectos relevantes associados à interdisciplinaridade e ao uso dos recursos tecnológicos como ferramenta suporte para o processo de ensino-aprendizagem, com ênfase à Matemática.

Ressalta-se também, sobre a importância do desenvolvimento de práticas interdisciplinares bem como do uso de *softwares* na prática pedagógica, associada ao contexto da Educação Básica, objetivando a aprendizagem dos conceitos matemáticos de maneira mais abrangente, significativa e eficiente.

Ao final, apresentam-se três propostas metodológicas desenvolvidas para o ensino de Matemática a partir de situações-problema abordadas também na disciplina de Física, efetuando sempre um paralelo entre os conteúdos específicos comuns, abordados e aplicáveis em ambas as disciplinas. Ademais, apresentam-se algumas contribuições e potencialidades das propostas metodológicas desenvolvidas, associando aos teóricos abordados na fundamentação.

Os principais tópicos explorados em cada proposta metodológica são:

1 - Espelhos esféricos e a semelhança de triângulos: caracterização das imagens a partir da posição do objeto em relação ao espelho;

2 - Ondas, sinais de satélites e a parábola: funcionamento de uma antena parabólica; e

3 - Leis de Kepler e a elipse: lugar geométrico da trajetória descrita pelos planetas em torno do Sol.

O desenvolvimento de atividades interdisciplinares objetiva o uso de métodos diferenciados de ensino, o enriquecimento do processo de ensino-aprendizagem e uma visão mais abrangente por parte do aluno, a partir do resgate e do cruzamento de conceitos comuns a ambas as disciplinas que atuam de modo complementar.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Buscando argumentações e complementações acerca da importância de práticas interdisciplinares e do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) e *softwares*, em particular o GeoGebra, no ensino de Matemática, destacam-se neste espaço alguns autores e suas ideias relacionadas ao tema. Abordam-se também alguns conceitos relativos aos conteúdos da disciplina de Física a serem abordados nas propostas metodológicas, sendo eles: espelhos esféricos; ondas e sinais de satélites; e, leis de Kepler.

Pinheiro (2017), propõe mecanismos para produção de materiais didáticos, ressaltando sobre a importância do uso das TIC's no ensino, dada sua capacidade de permitir ao aluno uma visão ilustrativa de situações práticas, empregando o GeoGebra como um *software* suporte para estabelecer parâmetros visuais em problemas cotidianos.

Miskulin (2009) destaca que as TIC's trazem vários benefícios, como a possibilidade de novas formas para gerar, dominar e disseminar o conhecimento, destacando que o educar de maneira tradicional não combina com a realidade atual, sendo que a busca por aperfeiçoamento, diferenciação e dinamização das metodologias de ensino e práticas desenvolvidas em sala de aula são também de responsabilidade dos agentes do processo educacional, incluindo os professores. Alega ainda que “[...] essa nova dimensão prioriza um novo conhecimento que considera o desenvolvimento do pensamento criativo como uma dimensão fundamental da cognição humana” (MISKULIN, 2009, p. 153-154).

Lago (2017), propõe a caracterização das principais cônicas, dentre elas a elipse e a parábola. Ainda, apresenta uma análise sobre possíveis aplicações em diversas situações do cotidiano, ressaltando sobre a importância do estudo das mesmas. Ainda destaca que a introdução destes conceitos ocorre desde a Educação Básica. Assim, é necessário estimular o interesse dos alunos, permitindo uma aprendizagem básica para que possam, posteriormente, utilizá-la em processos mais complexos. O autor cita também algumas aplicações: lançamento de projéteis, lanternas e faróis, antena parabólica, leis das órbitas dos planetas, óptica, dentre outras.

Pesse (2017), descreve as principais cônicas (não degeneradas), enfatizando o grande campo de aplicação dos conceitos em equipamentos úteis à sociedade, indica propostas de atividades experimentais para serem desenvolvidas com alunos do 3º Ano do Ensino Médio, tendo como aliado o *software* GeoGebra. Obteve resultados satisfatórios da aplicação realizada junto a uma turma de 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo.

De acordo com as DCE's (2008), “[...] os recursos tecnológicos, como o *software*, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da Internet, entre outros, têm favorecido as experimentações matemáticas e potencializado formas de resolução de problemas” (PARANÁ, 2008, p. 65). Justifica-se esse favorecimento pois o uso de recursos tecnológicos em sala de aula permite a manipulação do problema matemático, trabalhando em paralelo a um modelo, passível de modificações em relação a seus dados iniciais, facilitando para o aluno a comparação dos resultados a partir de dados distintos, já que, um aspecto fundamental da disciplina de Matemática é a experimentação e a manipulação dos valores de variáveis.

Assim, surgem desafios que os professores precisam enfrentar em sala de aula com o propósito de atingir os objetivos educacionais, envolvendo o desenvolvimento de habilidades, competências e valores. A interdisciplinaridade vem como uma alternativa para dinamizar as aulas e cativar a atenção dos alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) (BRASIL, 1998, p. 06) justificam a importância do aprofundamento dos saberes disciplinares específicos em cada área. Por outro lado, destacam a necessidade da “[...] articulação interdisciplinar desses saberes, propiciada por várias circunstâncias, dentre as quais se destacam os conteúdos tecnológicos e práticos, já presentes junto a cada disciplina, mas particularmente apropriados para serem tratados desde uma perspectiva integradora”, bem como “[...] a interdisciplinaridade do aprendizado científico e matemático não dissolve nem cancela a indiscutível disciplinaridade do conhecimento”.

Fazenda (1998) reúne um conjunto de textos, de um grupo de autores, que buscam a inserção da interdisciplinaridade no campo das tendências metodológicas, realçando que um dos principais objetivos comuns dos autores é o enfrentamento de um paradoxo que a educação contempla: a longevidade das questões da didática e o ineditismo das proposições interdisciplinares.

Kleiman e Moraes (1999), discutem as relações entre os aspectos educacionais relacionados ao cotidiano escolar, desde planos de ensino, propostas pedagógicas, livros didáticos e equipe escolar, tendo como suporte mediador a prática da leitura. Enfatizam que a leitura é fundamental para o desenvolvimento do indivíduo, sendo uma necessidade cotidiana e uma prática contínua. Reforçam também que, o trabalho escolar precisa direcionar-se no sentido de formar um indivíduo não individualista, mas sim, que tenha capacidade e facilidade de relacionar os conceitos das diversas disciplinas e de conseguir se relacionar com o meio, expressando-se em suas necessidades.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) destacam que o “currículo deve contemplar as quatro áreas do conhecimento, com tratamento metodológico

que evidencie a contextualização e a interdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos dos saberes específicos” (BRASIL, 2012, art. 8º § 1º).

Fazenda (2011) retrata uma complexa reflexão e descrição acerca de práticas que envolvem relações interdisciplinares entre as diversas disciplinas, apresentando 16 capítulos escritos por um grupo de profissionais que resgatam desde aspectos históricos da interdisciplinaridade direcionada à educação básica, bem como apresentam relatos de experiências de resultados obtidos com o desenvolvimento de tais práticas.

Quando se pensa na associação entre Matemática e interdisciplinaridade, Tomaz e David (2013) elucidam algumas questões relacionadas às possibilidades de inserção de relações interdisciplinares no ensino da Matemática, justificadas pelos benefícios que tais técnicas concretizam, dentre elas, a formação integral do aluno como cidadão, surtindo a necessidade de tratar o ensino da disciplina levando-se em conta a complexidade do contexto social e a riqueza da visão interdisciplinar na relação entre ensino e aprendizagem, assegurando ao aluno a possibilidade de enfrentar desafios cotidianos, e, a partir destes, alcançar os objetivos previamente definidos.

Jahn, *et al.* (2014) deixa um questionamento reflexivo, de modo que a interdisciplinaridade passa a ser vista como uma possibilidade de reduzir divergências entre os conceitos abordados em sala de aula

Não seria a interdisciplinaridade, ou outras práticas integradoras da Matemática com outros diversos conhecimentos de diferentes áreas para a compreensão ou áreas de conhecimento, uma forma de garantir espaços curriculares mais interessantes para todos, pela construção de contextos de fato significativos para os estudantes? (JAHN, *et al.* 2014, p. 12-13).

Reforçam ainda que, é comum notar uma disputa de espaço/tempo entre as disciplinas no ambiente escolar, assim a interdisciplinaridade entra nesse contexto para auxiliar na quebra dessa barreira entre as disciplinas, permitindo ao aluno refletir, aperfeiçoar e associar determinado assunto com os conceitos disciplinares específicos.

O uso de *softwares* no desenvolver das aulas é uma ferramenta de grande importância e utilidade, pois permite ao aluno a visualização, análise e manipulação de dados a partir da situação-problema em estudo. Nóbriga e Araújo (2010) utilizam o *software* GeoGebra como um instrumento auxiliador do processo de ensino e de aprendizagem, apresentando várias sugestões de atividades a serem desenvolvidas a partir de conteúdos matemáticos, explicando os passos para o manuseio e utilização das principais ferramentas que o mesmo dispõem.

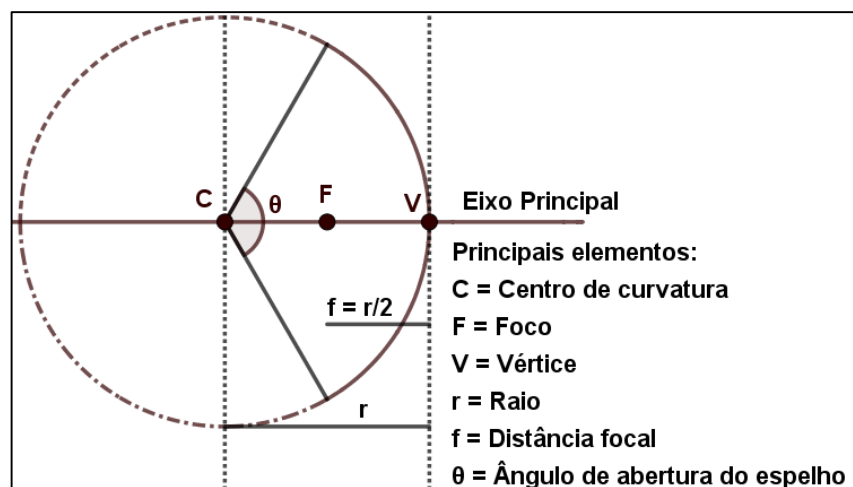
Como é abordado o ensino de Matemática a partir de situações-problema trabalhadas na disciplina de Física no Ensino Médio, ter-se-ão Serway e Jewett (2011), Serway e Jewett (2010), Artuso e Wrublewski (2013) e Guimarães, Piqueira e Carron (2014) como principais referências para identificação dos conceitos físicos abordados neste nível de ensino, na associação com as situações-problema.

Aliado ao tema “espelhos esféricos e a semelhança de triângulos: caracterização das imagens a partir da posição do objeto em relação ao espelho”, enfatiza-se que “os espelhos esféricos são muito utilizados no cotidiano, estando presentes em alguns retrovisores de carros, em entradas de elevadores e estacionamentos, esquinas com pouca visibilidade para motoristas, estojos de maquiagem, equipamentos odontológicos” (ARTUSO, WRUBLEWSKI, 2013, p. 200). Os autores descrevem que há a possibilidade de ambas as partes da esfera serem espelhadas, ou seja, a superfície interna ou externa. Se a parte interna é espelhada, tem-se um espelho esférico côncavo e, se a parte externa for espelhada, um espelho esférico convexo.

Assim, um espelho esférico é representado por uma parte da esfera, o que na linguagem matemática é também denominada de calota esférica. Seus principais elementos estão associados aos elementos da esfera imaginária.

A Figura 01 apresenta os principais elementos dos espelhos esféricos. Evidenciando que uma calota esférica tem natureza espacial, porém, representa-se um corte da esfera através de um plano passando por um diâmetro, o que facilita o estudo e relações das propriedades de incidência e reflexão dos raios de luz.

Figura 01 - Principais elementos dos espelhos esféricos



Fonte: Autor

Observa-se que o centro de curvatura  $C$  do espelho coincide com o centro da esfera, sendo que, a distância entre o vértice  $V$  e o centro de curvatura tem módulo igual ao



comprimento do raio  $r$  da esfera. Ressalta-se também, que o foco  $F$  é o ponto médio do segmento  $\overline{CV}$ , ou seja, a distância do foco ao vértice tem módulo equivalente à metade do raio da esfera.

De acordo com as características do espelho e da posição do objeto em relação ao espelho, pode ocorrer a formação de imagens com características distintas, tais como imagens reais ou virtuais; direita ou invertida; maior, menor ou igual ao objeto; ou não ocorrer formação de imagens.

Grifa-se que, a formação da imagem ocorre no ponto de encontro dos raios refletidos ou do prolongamento destes, os quais correspondem a reflexão dos raios incidentes (com origem no objeto) a partir do espelho, respeitando algumas propriedades de acordo com o comportamento da luz no meio.

Artuso, Wrublewski (2013, p. 205-206) descrevem as propriedades de alguns raios cujo comportamento é facilmente previsto, os raios notáveis:

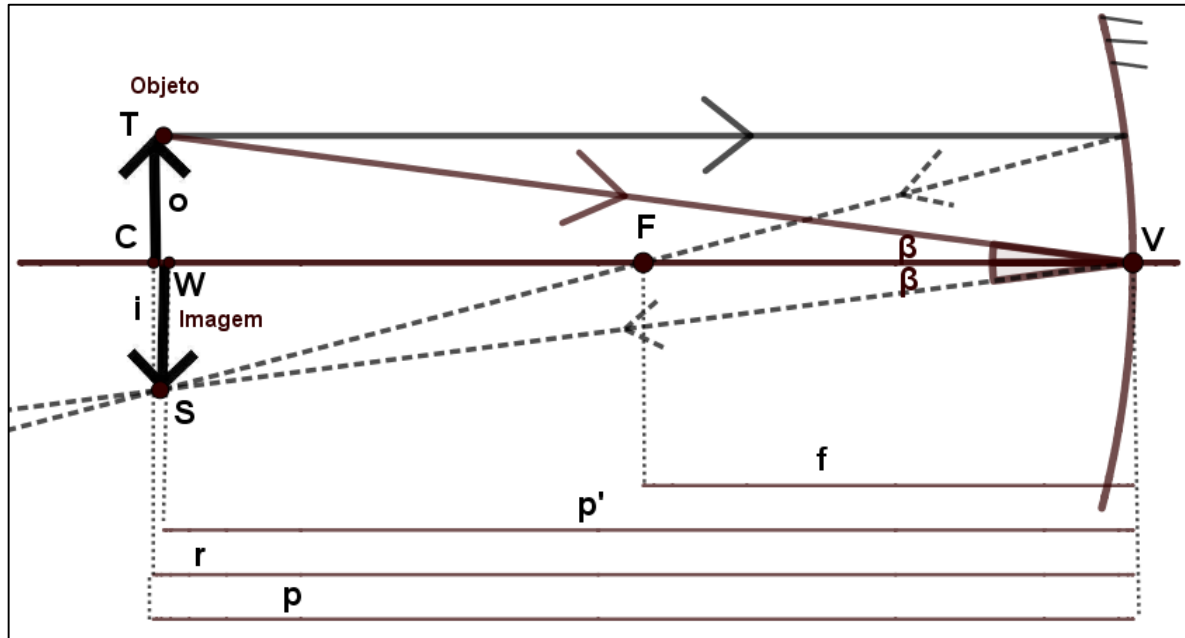
- 1) todo raio de luz que incide paralelamente ao eixo principal do espelho se reflete (ele mesmo ou seu prolongamento) passando pelo foco;
- 2) pelo Princípio da Reversibilidade, todo raio de luz incidente que passa pelo foco (ele mesmo ou seu prolongamento) se reflete paralelamente ao eixo principal.
- 3) todo raio de luz incidente no vértice do espelho reflete-se simetricamente em relação ao eixo principal.
- 4) todo raio de luz (ou seu prolongamento) que incide no espelho, passando pelo seu centro de curvatura, se reflete sobre si mesmo.

Para obtenção da imagem e de suas características, é necessário utilizar alguns cálculos. A semelhança de triângulos (neste caso, triângulos retângulos) permite-nos estabelecer relações de proporção, conhecidas as características do objeto ou da imagem, bem como da posição de ambos em relação ao espelho. Usando pelo menos duas reflexões de raios já é possível caracterizar a imagem do objeto.

A Figura 02 apresenta um espelho esférico côncavo de centro de curvatura  $C$ , foco  $F$  e vértice  $V$ , bem como a imagem de um objeto que se encontra sobre o centro de curvatura, obtida a partir das propriedades 1) e 3) de incidência e reflexão dos raios sobre o espelho. Sendo  $o = \overline{TC}$  o tamanho do objeto;  $i = \overline{WS}$  o tamanho da imagem;  $p = \overline{CV}$  a distância do objeto em relação ao espelho;  $p' = \overline{WV}$  a distância da imagem em relação ao espelho;  $f = \overline{FV}$  a distância focal; e,  $r = \overline{CV}$  o raio de curvatura do espelho. Para os demais casos associados às posições

distintas para o objeto em relação ao espelho, os procedimentos para caracterização da imagem são análogos.

Figura 02 - Formação de imagem no espelho esférico côncavo



Fonte: Autor

Pelos dados da Figura 02:  $T\hat{C}V \equiv S\hat{W}V = 90^\circ$  e  $T\hat{V}C \equiv S\hat{V}W = \beta$  (pela propriedade (3) da reflexão dos raios luminosos). Pelo caso AA (ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos vê-se que  $\Delta TCV \sim \Delta SWV$ .

Como reforçam Serway e Jewett (2010), aproveitando-se dessa semelhança, é possível determinar as características da imagem, estabelecendo parâmetros de comparação em relação ao objeto.

Assim:

$$\Delta TCV \sim \Delta SWV \Leftrightarrow \frac{\overline{TC}}{\overline{SW}} = \frac{\overline{CV}}{\overline{WV}} \Leftrightarrow \frac{o}{i} = \frac{p}{p'} \quad (*)$$

Esta relação pode ser enunciada como: a razão entre os tamanhos do objeto e da imagem é igual a razão entre as distâncias do objeto e da imagem em relação ao espelho.

Guimarães, Piqueira e Carron (2014), Artuso e Wrublewski (2013), Serway e Jewett (2010), além de outras referências de livros de Física do Ensino Médio que foram consultados, destacam que quando o objeto estiver situado sobre o centro de curvatura a imagem possui as seguintes características: situada sobre o centro de curvatura; de natureza real; invertida em

relação ao objeto; e, de tamanho igual ao do objeto. Aplicando estas informações na Figura 02, e empregando a relação (\*):

$$o = i \Leftrightarrow \frac{o}{i} = 1 \Leftrightarrow \frac{p}{p'} = 1 \Leftrightarrow p = p'.$$

Ou seja, a distância do objeto ao espelho é igual a distância da imagem ao espelho.

Salienta-se que, para caracterizar as imagens, os autores tomam por referência conceitos associados às condições de nitidez de Gauss<sup>1</sup> permitindo justificar as abordagens apresentadas pelos livros didáticos de Física. Essas condições serão apresentadas e analisadas no desenvolvimento da proposta metodológica.

Associado ao tema “Ondas, sinais de satélites e a parábola: funcionamento de uma antena parabólica”, é de suma importância o conhecimento da propriedade refletora da parábola que explica o funcionamento de muitos aparelhos cotidianos que são de grande utilidade, tanto para o desenvolvimento e estudo da ciência, como para suprir necessidades humanas.

Uma utilização importante das superfícies refletoras

[...] é dado pelas antenas parabólicas, empregadas na rádio-astronomia, bem como no dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco, deste modo, reforçando-os consideravelmente” (LIMA, *et al.* 2012, p. 154).

“A propriedade refletora da parábola é a mais explorada nas aplicações práticas, como na modelagem dos espelhos para telescópios, antenas parabólicas ou faróis refletores” (DELGADO, FRENSEL, CRISSAFF, 2013, p. 146).

Também, Delgado, Frensel e Crissaff (2013, p. 146) conceituam parábola, considerando-a como um lugar geométrico representado na Figura 03 e descrito a seguir: “Sejam  $\mathcal{L}$  uma reta e  $F$  um ponto do plano não pertencente a  $\mathcal{L}$ . A parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F$  e diretriz  $\mathcal{L}$  é o conjunto de pontos do plano cuja distância a  $F$  é igual a sua distância a  $\mathcal{L}$ :  $\mathcal{P} = \{P | d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}$ ”.

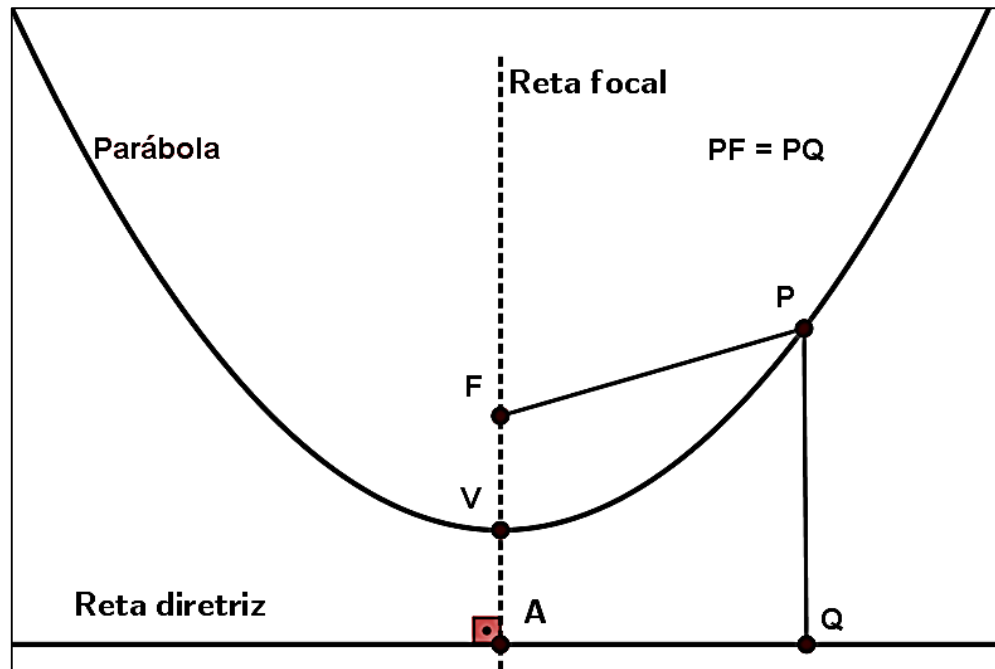
Ainda, por definição, tem-se que a reta focal  $\ell$  é a reta que contém o foco  $F$  da parábola e é perpendicular à diretriz.

O ponto  $V$  da parábola  $\mathcal{P}$  que pertence à reta focal é o vértice de  $\mathcal{P}$ . Se  $A$  é o ponto tal que  $\{A\} = \mathcal{L} \cap \ell$ , então  $V$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AF}$ . Toda parábola é simétrica em relação a sua reta focal.

---

<sup>1</sup> Em homenagem a Carl Friedrich Gauss, físico, astrônomo e matemático alemão, de grande importância para o desenvolvimento de estudos em diversas áreas, incluindo a óptica.

Figura 03 - Lugar geométrico da parábola



Fonte: Autor

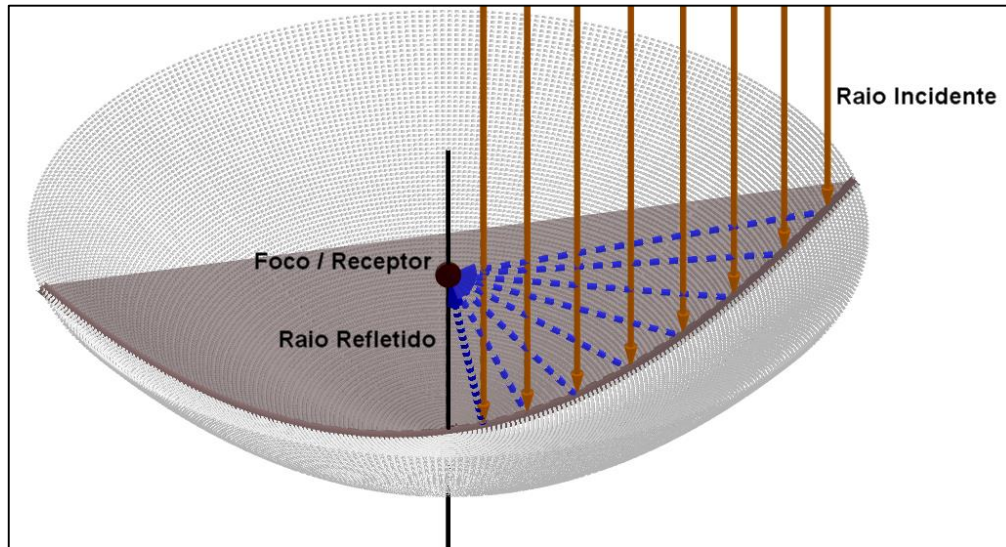
Pode-se compreender uma parábola como o gráfico de uma função quadrática. “Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ”. (LIMA, *et al.* 2012, p. 131). Complementando que “o gráfico de uma função quadrática é uma parábola”. (LIMA, *et al.* 2012, p. 143).

Ainda, “se girarmos uma parábola em torno do seu eixo (a reta focal), ela vai gerar uma superfície chamada *parabolóide de revolução*, também conhecida como *superfície parabólica*” (LIMA, *et al.* 2012, p. 154), porém, no estudo da incidência e reflexão dos raios luminosos “a superfície parabólica pode ser substituída pela parábola que é a interseção dessa superfície com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação (igual ao eixo da parábola)”. (LIMA, *et al.* 2012, p. 155).

A Figura 04 representa uma antena parabólica ou um parabolóide de revolução e a interseção de um plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação. Esta interseção gera o lugar geométrico de uma parábola cujo foco coincide com uma sugestiva posição para o aparelho receptor da antena parabólica.

A caracterização da imagem produzida pelo aparelho receptor depende diretamente da quantidade de raios que incidem sobre a superfície da antena e, do direcionamento da reflexão dos mesmos. Tão melhor será a imagem quanto mais raios refletirem concentrando-se em um único ponto.

Figura 04 - Parábola obtida pela interseção da antena parabólica com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação

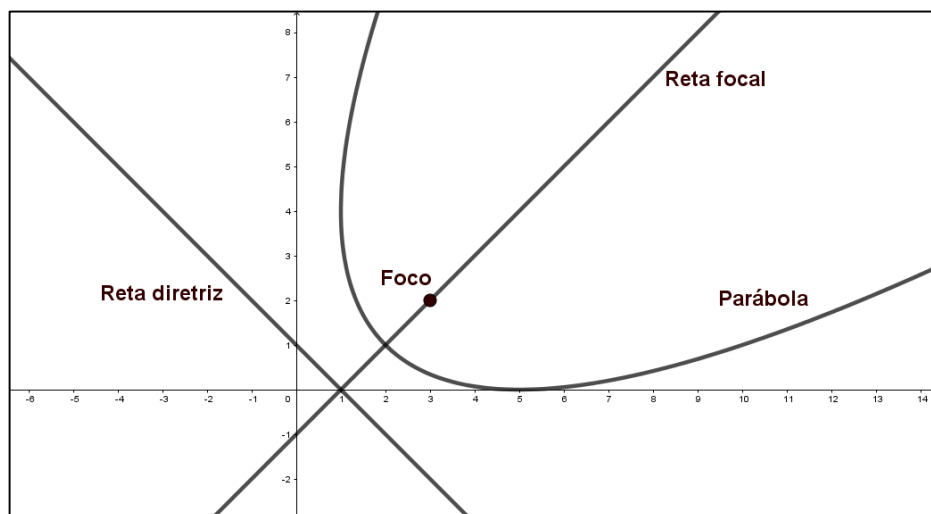


Fonte: Autor

Como a antena é parabólica, ou seja, em formato de parabolóide, e pela propriedade reflexiva dos raios, se eles incidirem paralelamente ao eixo principal, refletirão passando pelo foco. Assim, basta que o receptor seja posicionado no foco das parábolas produzidas por secções transversais do parabolóide.

Ilustrando a partir de dados numéricos e utilizando o GeoGebra, considere o ponto  $F = (3,2)$  como foco e  $\mathcal{L}: x + y = 1$  como reta diretriz. A Figura 05 representa, no plano, o gráfico da parábola  $\mathcal{P}$  de equação  $\mathcal{P}: x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$  que, no plano  $OXY$ , satisfaz as condições iniciais.

Figura 05 - Gráfico da parábola  $\mathcal{P}$

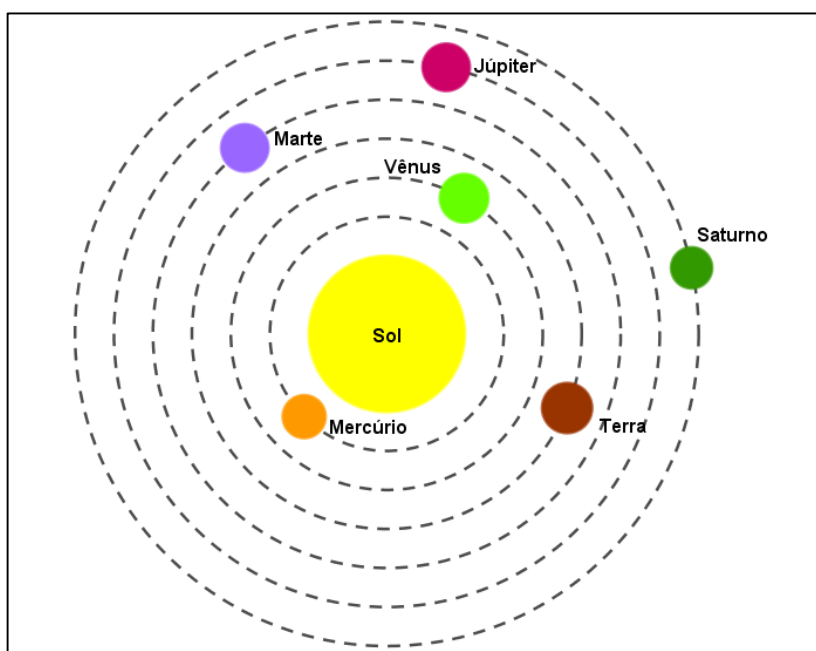


Fonte: Autor

Referente ao assunto da proposta metodológica “Leis de Kepler<sup>2</sup> e a elipse: lugar geométrico da trajetória descrita pelos planetas em torno do Sol”, Ávila (2010) apresenta um resgate histórico da evolução da teoria científica do movimento dos planetas em torno do Sol, descrevendo desde o período em que Nicolau Copérnico desenvolvia estudos sobre o fato, bem como as contribuições de Eudoxo, Hiparco, Ptolomeu e outros astrônomos da antiguidade. Destaca-se que o movimento dos planetas era associado ao seu raio e a distância do planeta ao Sol, considerando que a velocidade era constante durante toda a trajetória.

Inicialmente, as teorias afirmavam que os planetas giravam em órbita circular em torno do Sol, sendo que o Sol ocupava o centro do círculo, como mostra a Figura 06.

Figura 06 - Trajetória circular dos planetas em torno do Sol



Fonte: Autor

Porém, o desencontro de informações era frequente, o que mantinha os astrônomos em constante análise, buscando por melhores aproximações da realidade. Séculos depois, a partir de muitas observações e pesquisas, inicialmente realizadas sobre os planetas Terra e Marte, Johannes Kepler propôs as leis das órbitas dos planetas, com o detalhe de que a trajetória descrita pelos planetas não era mais circular, mas sim, elíptica.

Delgado, Frensel, Crissaff (2013, p. 99) definem que “uma elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante

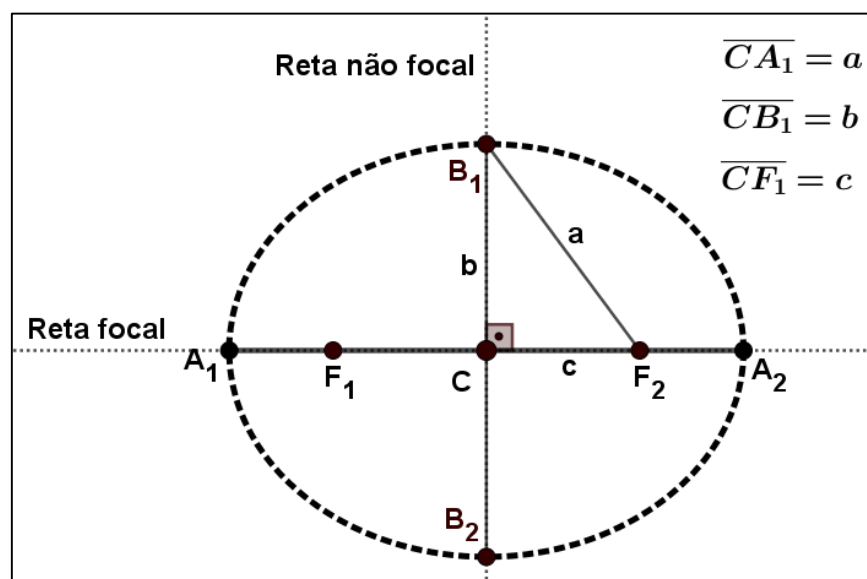
<sup>2</sup> Em homenagem a Johannes Kepler (1571 – 1630), astrônomo e matemático alemão que estudou o movimento dos planetas, sendo seguidor de Galileu Galilei e inspiração para Isaac Newton.

$2a > 0$ , maior do que a distância entre os focos  $2c \geq 0$ . Ou seja, sendo  $0 \leq c < a$  e  $d(F_1, F_2) = 2c$ ,  $\mathcal{E} = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$ ". Ainda:

- a reta  $\ell$  que contém o foco é a reta focal;
- a interseção da elipse com a reta focal  $\ell$  consiste exatamente de dois pontos,  $A_1$  e  $A_2$ , chamados vértices da elipse sobre a reta focal;
- o segmento  $\overline{A_1A_2}$  de comprimento  $2a$  é o eixo focal da elipse;
- o centro  $C$  da elipse é o ponto médio do segmento  $\overline{A_1A_2}$ , sendo também ponto médio do segmento  $\overline{F_1F_2}$ ;
- a reta não focal é a reta  $\ell'$  perpendicular a  $\ell$  que passa pelo centro  $C$ .
- a elipse intersecta a reta não focal  $\ell'$  em exatamente dois pontos,  $B_1$  e  $B_2$ , denominados vértices da elipse sobre a reta não focal;
- o eixo não focal da elipse corresponde ao segmento  $\overline{B_1B_2}$  de comprimento  $2b$ , onde  $b^2 = a^2 - c^2$ ;
- o número  $e = \frac{c}{a}$  é a excentricidade da elipse, sendo  $0 \leq e < 1$ ;
- o número  $a$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal,  $b$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e  $c$  é a distância do centro aos focos.

A Figura 07 representa uma elipse com seus principais elementos, de acordo com as definições de Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Figura 07 - Elipse e seus elementos



Fonte: Autor

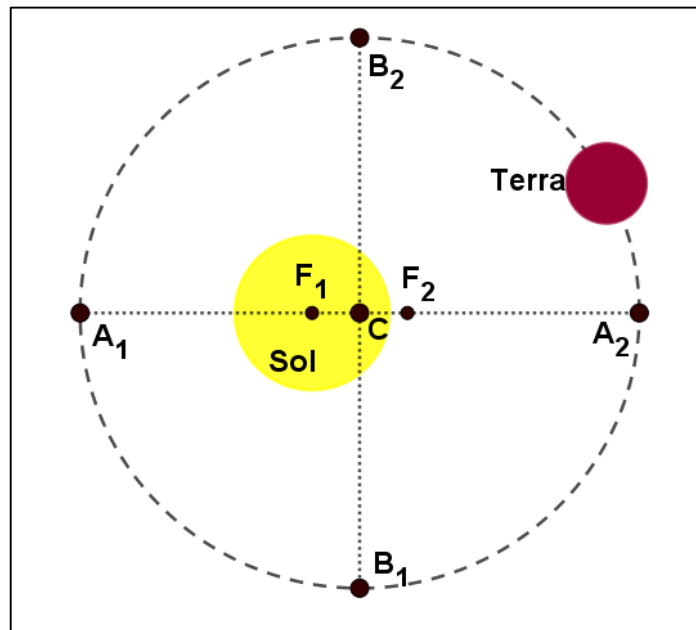
Ainda, Serway e Jewett (2011), enunciam as Leis de Kepler como:

1) todo planeta no Sistema Solar descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, sendo que o Sol ocupa um dos focos, conforme Figura 08;

2) o raio vetor traçado do Sol até qualquer planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais;

3) o quadrado do período orbital de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita elíptica.

Figura 08 - Simulação de trajetória elíptica descrita pelo planeta Terra em torno do Sol



Fonte: Autor

Note que, a descoberta e oficialização dessas leis representam um importante episódio de aplicação da Matemática, principalmente a partir de conceitos geométricos, junto à Astronomia. Ainda, no desenvolvimento desses estudos, destaca-se o grande leque de abordagens conceituais, explorados por diferentes componentes curriculares no Ensino Básico, o que reforça a importância desse trabalho, em sala de aula, como ferramenta interdisciplinar.



### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresenta-se um resgate bibliográfico acerca do surgimento, evolução e inserção da interdisciplinaridade na Educação, bem como os principais propósitos que justificam a importância da utilização junto aos processos de ensino e aprendizagem. Além disso, reflete-se sobre o ensino de Matemática a partir de relações interdisciplinares e utilizando recursos tecnológicos, enfatizando o *software* GeoGebra.

#### 3.1 INTERDISCIPLINARIDADE

Ao abordar determinada ferramenta de ensino, convém efetuar um breve resgate histórico em relação a sua necessidade, origem e evolução. Analisando-se o século XX, até a década de 1930, percebe-se que a ciência não era tão evoluída quanto é na atualidade, em relação ao quantitativo de conceitos em cada área de ensino. Com o passar dos anos, a evolução fez com que novas áreas de conhecimento fossem surgindo, com desenvolvimento de estudos em diversos campos.

No contexto educacional, essa evolução, a partir de reformas, trouxe como consequência uma divisão nas abordagens, ou seja, criaram-se as disciplinas escolares, que possuíam em sua individualidade uma linha a ser seguida, com um quadro de conteúdos a serem trabalhados de acordo com o nível de ensino.

Esta singularidade das disciplinas começou a sofrer contradições em relação à sua utilização junto ao ambiente escolar. Fazenda (1998, p. 112), destaca que muitas escolas passaram a “[...] romper com o tradicional currículo centrado em disciplinas. A integração era vista como uma maneira de evitar a fragmentação que acompanha a divisão por disciplinas”. O uso da interdisciplinaridade tem como principal objetivo aproximar essas divisões, a fim de que os resultados sejam produtivos a ambas as disciplinas.

Já na década de 1970, vestígios investigativos da interdisciplinaridade podem ser destacados. Cita Fazenda (2008, p. 18), em uma notação utilizada pelo Ceri (Centro de Pesquisa e Inovação do Ensino), um órgão da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) (Documento Ceri/HE/SP/7009) que “[...] a interdisciplinaridade é definida como interação existente entre duas ou mais disciplinas [...]”.

Direcionando-se para um possível conceito de interdisciplinaridade, fez-se um resgate de autores que apresentam um conceito próprio acerca do termo. Destaca Antiseri (1975, p.185-186) *apud* Yared (2008, p. 162) que,

[...] do ponto de vista cognitivo, a interdisciplinaridade recupera a unidade na compreensão das "coisas" (fato histórico, texto filosófico, fato educativo, comportamento humano, evento social, fenômeno natural), unidade que foi quebrada durante a pesquisa científica, a qual procede no caminho de uma especialização progressiva. O trabalho interdisciplinar, portanto, não consiste no aprender um pouco de tudo, mas no enfrentar o problema (explicativo, previsível, interpretativo) com toda a competência do especialista que domina o problema, suas dificuldades, as explicações e previsões dos outros competentes. Além do mais, do ponto de vista psicossocial, a interdisciplinaridade que se realiza através do trabalho de grupo, dos docentes e discentes, poderá ser um dos fatores que contribuem ao desarraigamento de competição na escola, enquanto impulsiona a ver no outro um colaborador e não um rival. A interdisciplinaridade é uma luta contra os efeitos alienantes da divisão do trabalho.

Parafrazeando-o, é notório que o autor aponta a importância do estudo direcionado e o desenvolvimento da ciência, mas, pensando em aprendizes que convivem num espaço escolar da Educação Básica, o uso da interdisciplinaridade pode acarretar desencontros nas informações, e isso não é agravante, de modo que gera abertura para novos questionamentos, promovendo com isso um processo contínuo de aprendizagem, que dependerá da capacidade de cada indivíduo.

Complementa Suero (1986, p.18-19) *apud* Yared (2008, p. 161-162) que

[...] a palavra interdisciplinaridade evoca a "disciplina" como um sistema constituído ou por constituir, e a interdisciplinaridade sugere um conjunto de relações entre disciplinas abertas sempre a novas relações que se vai descobrindo. Interdisciplinar é toda interação existente dentre duas ou mais disciplinas no âmbito do conhecimento, dos métodos e da aprendizagem das mesmas. Interdisciplinaridade é o conjunto das interações existentes e possíveis entre as disciplinas nos âmbitos indicados.

Traduz-se a visão de que, todas as disciplinas possuem “aberturas<sup>3</sup>” para sofrer influência de conceitos de outras disciplinas distintas. Assim, se as disciplinas A e B realizarem uma interação C, diz-se que A e B realizaram uma ação interdisciplinar. E, se ao considerar o conjunto de todas as interações possíveis entre as disciplinas A e B, refere-se à interdisciplinaridade das mesmas.

Agrega Fazenda (2002, p. 180) *apud* Yared (2008, p. 161-162) que a

[...] interdisciplinaridade é uma nova atitude diante da questão do conhecimento, de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender e dos aparentemente expressos, colocando-os em questão. [...] A interdisciplinaridade pauta-se numa ação

---

<sup>3</sup> Possibilidade de estabelecer relações (teórica, prática, ...) com outras disciplinas a partir de conceitos específicos.

em movimento. Pode-se perceber esse movimento em sua natureza ambígua, tendo como pressuposto a metamorfose, a incerteza.

Aborda-se um aspecto sob o qual há uma abertura no direcionamento do tema/problema que se propõe a investigar, bem como às relações que se deseja estabelecer. Iniciar um estudo sobre determinado assunto pode ser induzido por uma indagação, uma curiosidade, acerca de uma situação-problema, partindo de investigações na busca por melhor compreensão e aprofundamento de conceitos que justificam o problema. Esse fato gera a elaboração de hipóteses, que, a partir de relações de conceitos de disciplinas distintas, permitem a obtenção de resultados que, analisando sob um ponto de vista distante, é possível visualizar aquisição de conhecimento na referida atividade, não sendo apenas específico de uma área, mas de todas as utilizadas para buscar a solução do seu problema, caracterizando uma aprendizagem interdisciplinar.

E, reforça Assumpção (2011, p. 23-24), que o termo interdisciplinaridade

[...] se compõe de um prefixo – *inter* – e de um sufixo – *dade* – que, ao se justaporem ao substantivo – *disciplina* – nos levam à seguinte possibilidade interpretativa, onde: *inter*, prefixo latino que significa *posição* ou *ação intermediária*, reciprocidade, interação (como “interação”, temos aquele fazer que se dá a partir de duas ou mais coisas ou pessoas – mostra-se, pois, na relação sujeito-objeto). Por sua vez, *dade* (ou *idade*) sufixo latino, guarda a propriedade de substantivar alguns adjetivos, atribuindo-lhes o sentido de *ação* ou resultado de *ação*, qualidade, estado ou, ainda, modo de ser. Já a palavra *disciplina*, núcleo do termo, significa a epistemé, podendo também ser caracterizado como ordem que convém ao funcionamento numa organização ou ainda um regime de ordem imposta ou livremente consentida.

Assim, ao associar o prefixo, radical e sufixo da palavra interdisciplinaridade, obtém-se “[...] um encontro que pode ocorrer entre seres – *inter* – num certo fazer – *dade* – a partir da direcionalidade da consciência, pretendendo compreender o objeto, com ele relacionar-se, comunicar-se”. (ASSUMPÇÃO, 2011, p. 24).

Ainda, pontua Pacheco, *et al.* (2010, p. 137):

O que seria a interdisciplinaridade senão a construção de um sistema complexo que visa integrar as verdades de cada disciplina como unidades simples, mas aceitando suas diferenças e respeitando a complexidade de sua própria formação, reintegrando cada disciplina em um todo que já foi um dia naturalmente unido. Passando então a perceber cada disciplina como inseparável da construção do todo do qual passa a fazer parte, distinguindo-o, porém, desse mesmo todo.

Fazenda (2011, p. 16) destaca que as disciplinas tradicionais propostas pelo currículo atual conduzem o aluno apenas a um acúmulo de informações, de modo que ao unir os conhecimentos de todas as disciplinas tem-se um leque muito amplo e abrangente, mesmo que

a capacidade do ser humano não seja suficiente para armazenar, e manter armazenada, tamanha informação. Para isso, existem os recursos tecnológicos como ferramentas que realizam e processam tais atividades de maneira eficiente e a uma velocidade elevada. Assim, a

[...] inclusão de novas disciplinas ao currículo tradicional, só faz avolumarem-se as informações e atomizar mais o conhecimento. O currículo tradicional, que já traduzia um conhecimento disciplinar, com esse acréscimo de disciplinas tende a um conhecimento cada vez mais disciplinado, onde a regra principal seria somente um policiamento maior às fronteiras das disciplinas. O efeito nada mais representaria que a punição aos que quisessem transpor essas barreiras. (FAZENDA, 2011, p. 16-17).

Uma disciplina específica não é racional apenas em si mesma. Sua origem e evolução também tem raízes e/ou futuros frutos em aplicações relacionadas à outras áreas. Na Matemática, por exemplo, é interessante que se saiba relacionar os conceitos específicos da área utilizando-os em aplicações cotidianas. O conhecimento evolui a partir das necessidades sociais.

Do ponto de vista integrador, a interdisciplinaridade requer um equilíbrio entre amplitude, profundidade e síntese. A amplitude assegura uma larga base de conhecimento e informação. A profundidade assegura o requisito disciplinar, profissional e/ou conhecimento e informação interdisciplinar para a tarefa a ser executada. A síntese assegura o processo integrador. (FAZENDA, 1998, p. 121)

Destaca-se que a interdisciplinaridade não consiste em efetuar uma reestruturação curricular, mas sim, a partir de situações-problema buscar resgatar conceitos curriculares da disciplina em questão. Cita Fazenda (1998, p. 119) que, “professores que tomam emprestado o rótulo interdisciplinar não estão necessariamente engajados em práticas interdisciplinares. As duas coisas não devem ser confundidas”.

Também, ressaltam as DCE's (2008) que, em suas individualidades, as disciplinas do currículo escolar são abertas a abordagens externas, de modo que admitem a possibilidade de inter-relacionar-se, individualmente ou em conjunto, com outras disciplinas, assim “[...] ampliam a abordagem dos conteúdos de modo que se busque, cada vez mais, a totalidade, numa prática pedagógica que leve em conta as dimensões científica, filosófica e artística do conhecimento” (DCE's, 2008, p. 27).

As novas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) orientam a organização do currículo em áreas de conhecimento, as quais direcionam para atender aos propósitos previstos ao público do Ensino Médio. São 4 áreas, assim divididas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas.

Destacam Ramos, Freitas e Pierson (2013, p. 13) que

[...] as áreas de conhecimento devem ser compreendidas como conjunto de conhecimentos cuja afinidade entre si pode se expressar pela referência a um objeto comum não equivalente aos específicos de cada componente curricular, mas a partir do qual essas especificidades se produzem.

Dessa forma, prioriza-se a busca por métodos de ensino que permitam efetuar uma relação mútua entre as disciplinas abordadas na Educação Básica de modo que desenvolvam

[...] o potencial de aglutinação, integração e interlocução de campos de saber, ampliando o diálogo entre os componentes curriculares e seus respectivos professores, com consequências perceptíveis pelos educandos e transformadoras da cultura escolar rígida e fragmentada. Trata-se de um tipo de organização que tem a interdisciplinaridade como princípio. (RAMOS, FREITAS, PIERSON. 2013, p. 14).

Em suma, a interdisciplinaridade é um dentre os vários recursos possíveis para explorar os mais diversos conceitos dos diferentes componentes curriculares, possibilitando uma ligação de maneira contextualizada.

### 3.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA A PARTIR DE RELAÇÕES INTERDISCIPLINARES

Mediante o processo evolutivo da Educação, de modo geral, a necessidade de inter-relacionar os conteúdos matemáticos com problemas cotidianos, utilizando-se de conceitos científicos abordados em disciplinas distintas da Matemática, é essencial na aprendizagem do aluno. Para isso, propostas metodológicas são repensadas seguidamente, reformulando e ampliando as já existentes e aplicadas no ambiente escolar.

Tomaz e David (2013) evidenciam que:

[...] Essas propostas pretendem mudar o isolamento e a fragmentação dos conteúdos, ressaltando que o conhecimento disciplinar por si só não favorece a compreensão de forma global e abrangente de situações da realidade vividas pelo aluno, elegendo dois princípios básicos para o ensino de Matemática: o da contextualização e o da interdisciplinaridade. (TOMAZ e DAVID, 2013, p. 14).

Destacam ainda que, de acordo com o princípio da contextualização,

[...] o ensino da matemática deve estar articulado com as várias práticas e necessidades sociais, mas de forma alguma se propõe que todo conhecimento deva sempre ser aprendido a partir das situações da realidade do aluno. Outra forma de contextualização pode ocorrer via inter-relações com outras áreas do conhecimento, que, por sua vez, pode ser entendida como uma forma de interdisciplinaridade (TOMAZ e DAVID, 2013, p.14).

Conforme o princípio da interdisciplinaridade:

[...] pode ser esboçado por meio de diferentes propostas, com diferentes concepções, entre elas, aquelas que defendem um ensino aberto para inter-relações entre a Matemática e outras áreas do saber científico ou tecnológico, bem como com as outras disciplinas escolares (TOMAZ e DAVID, 2013, p.14).

Assim, o ensino na Educação Básica torna-se mais abrangente e significativo a partir do momento em que se parte de uma situação-problema do cotidiano (contextualização) e recorre-se a conceitos específicos de determinada(s) disciplina(s) (interdisciplinaridade) na busca por diferentes hipóteses na explicação do fenômeno associado.

Acredita-se que a aprendizagem ocorre, de modo mais eficiente, a partir do momento em que o aluno consegue justificar suas hipóteses e obter conclusões (lógicas ou não). A capacidade de observar, questionar, sugerir possibilidades de respostas aos questionamentos, experimentar, testar e obter conclusões acerca de determinado assunto ou fenômeno, é que permite ao aluno uma visualização e compreensão de modo mais abrangente, que não fica restrito a apenas uma das etapas, como responder a questionamentos, por exemplo. De modo simplificado, pode-se dizer que a aprendizagem ocorre quando o aluno possui a capacidade de modelar uma situação-problema.

Tomaz e David (2013), relacionam a interdisciplinaridade como uma *transferência de aprendizagem*, entendendo que a mesma ocorre de modo mais eficiente e autônomo, a partir do momento em que os alunos transferem seus conhecimentos de matérias distintas na busca pela justificativa de fenômenos de uma matéria específica, cientes ainda que, paralelamente a isso, tem-se o professor como mediador no processo de ensino e aprendizagem, que também coparticipa no processo de *transferência de aprendizagem*.

Associando à aprendizagem matemática, destacam Boaler e Greeno (2000, p. 195 *apud* TOMAZ e DAVID, 2013, p. 44) que:

Em qualquer estágio de aprendizagem matemática, os aprendizes têm alguns conceitos e métodos que eles já sabem e compreendem. A sua nova aprendizagem amplia o que eles já sabem. Então, nós podemos pensar um episódio de aprendizagem, como aquele que faz uma vinculação e uma tradução, e possivelmente uma ampliação de forma que algum novo tópico seja incluído e integrado com alguns de seus conhecimentos matemáticos anteriores.

Um dos grandes desafios existentes na inserção de práticas de ensino diferenciadas, como a interdisciplinaridade, é que as mesmas demandam do professor um preparo maior, pois, além dos conceitos específicos de sua área de formação, o mesmo passa a investigar assuntos de outras áreas que possuem ligação direta (aplicações, por exemplo) com os conceitos abordados em sua disciplina.

Além do mais, o educador também é desafiado a procurar resoluções para situações-problema abordadas a cada momento, podendo ser, inclusive, problemas de interesse dos alunos. As aulas deixam de ser um espaço no qual o professor apresenta seu planejamento ao aluno e segue o mesmo tal e qual foi planejado. Partir da contextualização permite distintos direcionamentos.

Introduzir conceitos matemáticos a partir de problemas explorados e(ou) explicados na Física é um exemplo no qual se faz uso da interdisciplinaridade. Ao trabalhar elipse e seus elementos, por exemplo, pode-se utilizar como situação-problema a trajetória descrita pelos planetas ao redor do Sol, que são justificadas pelas Leis de Kepler abordadas na disciplina de Física.

Nesse sentido encontra-se a resistência dos docentes em trabalhar práticas como a citada, pois o mesmo precisará se desafiar na investigação do problema, junto ao aluno, podendo criar hipóteses, buscando justificativas baseadas nos conceitos específicos da Matemática.

D'Ambrósio (2004), *apud* Tomaz e David (2013, p. 15) destacam que “[...] as contribuições da educação escolar para a formação da cidadania, e da Matemática escolar para a participação crítica do ser humano na sociedade, são ainda muito incipientes”, acentuando que muitas das potencialidades matemáticas envolvendo grandezas numéricas são oriundas de orientações advindas da própria família, provindas de eventuais necessidades.

Mesmo que se tenha decorrido mais de uma década em relação aos estudos citados, ainda há deficiência de atividades que buscam aproximar fenômenos cotidianos com os conhecimentos científicos na prática pedagógica. O aluno, por vezes, conclui o ciclo da Educação Básica escasso de visões para as quais possa utilizar os conhecimentos construídos durante o processo, gerando um hiato nesse elo de ligação.

### 3.3 AS TIC'S NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Hodiernamente, a informação está a um ‘click’ de distância entre quem busca pela mesma e quem a disponibiliza. Essa facilidade na obtenção de informações necessárias, ou que sejam de interesse próprio, estão presentes nos mais diversos meios e disponíveis a partir de meios distintos, desde um livro impresso até nos recursos tecnológicos, como um livro digital, por exemplo.

Essa realidade também está presente nas escolas. Quadro negro (ou *lousa*), giz (ou pincel atômico) e professor foram uma combinação presente nas salas de aula. Mas, com a enorme influência da tecnologia no meio, pode-se dizer que manter apenas esses três elementos no desenvolvimento das aulas, produz uma rotina assemelhada à forma tradicional de ver e trabalhar a Educação.

Mesmo que conceituar a tecnologia seja algo complexo, Ramos, Freitas e Pierson (2013) arriscam-se a defini-la como

[...] uma coleção de sistemas, incluindo aí não apenas instrumentos materiais, mas igualmente tecnologias de caráter de organização (sistemas de saúde, de educação), projetadas para realizar alguma função. Tecnológico, portanto, não é apenas o que transforma e constrói a realidade física, mas igualmente aquilo que transforma e constrói a realidade social. (RAMOS, FREITAS e PIERSON, 2013, p. 24).

Destaca-se que o uso da tecnologia digital como ferramenta aliada ao ensino de Matemática não consiste apenas em uma forma de distração dos alunos ou economia de tempo, ou seja,

[...] não tem por objetivo a simples redução de tempo empregado em determinada atividade que poderia ser realizada manualmente. Isso pode até ocorrer, mas não é o principal objetivo. O essencial é abrir o leque de possibilidades para o fazer e o pensar matemático, buscando reconhecer e valorizar os conhecimentos e diferentes formas de expressão dos estudantes, a fim de estabelecer um permanente diálogo com a prática educativa. (JAHN, *et al.* 2014, p. 18-19).

As TIC's estão disponíveis para serem utilizadas de modo a melhorar a qualidade dos resultados obtidos. Assim, a combinação entre os diversos elementos que compõem ou estão presentes no cotidiano escolar é de fundamental importância, pois a existência de recursos e materiais distintos permitem o melhor desenvolvimento do aluno nos mais diversos aspectos.

Rolkouski (2011, p. 87) cita que “[...] o papel da tecnologia no processo ensino-aprendizagem subentende uma concepção do que vem a ser o aprender e o ensinar”. Complementa ainda que “[...] o uso da tecnologia está além do ‘fazer melhor’, ‘fazer mais rápido’, trata-se de um ‘fazer diferente’” (ROLKOUSKI, 2011, p. 102).

De acordo com Oliveira e Moura (2015), vale ressaltar que o simples fato de inserir as TIC's no cotidiano escolar, mais em específico na rotina da sala de aula, não vai produzir conhecimento por si só, ou seja, é necessário compreender que as ferramentas tecnológicas não são o ponto principal no processo de ensino e aprendizagem, mas um dispositivo que proporcionaliza a mediação entre educador, educando e saberes escolares, permitindo uma prática mais eficiente e significativa.



A Matemática (assim como outras ciências) teve, e ainda tem, fundamental importância no desenvolvimento de inovações na evolução da sociedade como um todo, onde a aplicabilidade dos conceitos matemáticos específicos se faz presente junto à prática da pesquisa e produção de novos recursos e objetos materiais. Assim, a tecnologia é uma ferramenta complementar para a Matemática. Logo, é essencial que o uso das tecnologias também esteja presente nas aulas de matemática.

Silveira e Bisognin (2008, p. 1) acentuam que:

A utilização do computador e dos softwares educacionais, como recursos pedagógicos auxiliam os professores a tornar as aulas mais atraentes e resgatando o interesse do aluno pelo estudo da Matemática. No Ensino de Geometria o uso de um software educacional oferece muitas potencialidades, pois pode criar um ambiente rico de imagens, sons e animações, fornecendo dessa maneira, um estudo mais dinâmico e permitindo que o aluno visualize, interaja com o computador, construa e experimente. Diante do computador os alunos procuram as soluções para os seus problemas e dessa maneira constroem seus próprios conhecimentos.

Não apenas no contexto da geometria, mas ao trabalhar um problema sobre funções, por exemplo, o professor pode fazer uso de recursos tecnológicos para construir e analisar um gráfico, explorando visualmente intervalos, domínio e imagem. Além disso, é possível manipular os valores associados ao problema e criar possíveis hipóteses sobre o assunto a partir de modificações do comportamento gráfico, ou vice-versa, o que permite ao aluno uma participação mais ativa, exercitando sua capacidade de reflexão, análise, elaboração, síntese e conclusão.

Assim, Vicente e Paulino (2013) completam, destacando a importância do uso das TIC's nas aulas de matemática, quando afirmam:

Mas é sobretudo, na disciplina de Matemática que as TIC's têm ajudado e funcionado como alavanca e motor de aprofundamento de conhecimentos, de sistematização de noções e conteúdos, de desenvolvimento da capacidade de observação, comunicação e investigação matemática, contribuindo para despertar e estimular para a disciplina, olhar para a Matemática como uma disciplina atrativa, interessante e necessária desfazendo a ideia de que a matemática é uma disciplina de sucesso, só para alguns alunos (VICENTE; PAULINO, 2013, p. 46).

Muitos *softwares* estão sendo desenvolvidos, tendo por objetivo uma facilidade cada vez maior em sua manipulação e um maior quantitativo de funções e atividades desenvolvidas. Um exemplo de *software* que pode ser utilizado nas aulas de matemática como recurso pedagógico auxiliar é o GeoGebra, um mecanismo tecnológico livre desenvolvido por

Markus Hohenwarter, em 2002, que consiste em um programa que permite manipular relações de diversos conteúdos matemáticos.

Dantas e Ferreira (2017, p. 01), em seus materiais disponibilizados para o 12º curso *online* que ministram anualmente sobre o GeoGebra, sua utilização e aplicação, afirmam que “o GeoGebra é um *software* com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos”.

Destacam-se alguns mecanismos que o programa permite explorar: construção de pontos, seja um ponto fixo ou pontos gerados por interseções; segmentos de reta; segmentos orientados (vetores); retas; lugares geométricos; polígonos; círculos, semicírculos, arco ou setor circular; cônicas; ângulos; gráfico de funções; sequências; representação de dados estatísticos; dentre outros.

Permite também a inserção de variáveis numéricas em equações e a manipulação de dados a partir da função “controle deslizante”, que possibilita associar uma variável de acordo com um intervalo desejado e uma variação específica, um incremento. É possível ainda desenvolver construções sob a perspectiva 3D, sendo de fundamental importância na análise de problemas com aplicação espacial.

Considerando as potencialidades que o *software* oferece e por ser de livre acesso, utiliza-se o GeoGebra junto ao desenvolvimento desse trabalho.

## 4 METODOLOGIA

Tendo as considerações de Demo (2000) no direcionamento e caracterização dos gêneros de pesquisa, destaca-se que o presente trabalho tem cunho essencialmente teórico e descritivo, apresentando, inicialmente, um resgate no campo bibliográfico acerca do tema, seguido da elaboração de propostas metodológicas para o ensino de Matemática a partir de contextualizações de conteúdos da Física.

Apresentam-se aqui desenvolvidas três propostas metodológicas que possuem problemas como condições iniciais de estudo, e, a partir dos mesmos, faz-se um resgate dos principais conceitos matemáticos possíveis de serem explorados junto às situações-problema, buscando, a partir desses, justificar determinados fenômenos.

Descrevem-se, nas propostas metodológicas, possíveis relações a serem estabelecidas entre conteúdos específicos das disciplinas de Física e Matemática, no desenvolvimento das aulas de acordo com um plano de ensino previamente elaborado, tendo como problema inicial uma situação cotidiana e, a partir dessa resgatar conceitos específicos de ambas as disciplinas, buscando possíveis justificativas ou esclarecimentos para um determinado fenômeno. Logo, não se traz o desenvolvimento de planos de aulas contendo exercícios propostos e demais encaminhamentos, mas sim, resgates interdisciplinares possíveis de serem realizados junto ao contexto escolar, paralelamente a exposição dos conteúdos programáticos.

Destaca-se ainda que, os conceitos físicos e matemáticos que serão descritos e investigados junto às situações-problema, referem-se aos conteúdos abordados nas disciplinas de Matemática e Física na Educação Básica.

Ao final do desenvolvimento das propostas metodológicas apresentam-se alguns dos principais conceitos matemáticos possíveis de serem abordados, contribuições e potencialidades que se espera com a utilização desse material ou das abordagens junto às mesmas.

Na elaboração das propostas metodológicas utilizam-se, constantemente, relações interdisciplinares entre a Matemática e a Física e, de acordo com a necessidade, de um suporte tecnológico: o *software* GeoGebra, como uma ferramenta complementar e pedagógica no planejamento e desenvolvimento do material. Também, disponibilizam-se alguns *links* com materiais construídos pelo autor deste trabalho e que possibilitam a manipulação de dados, permitindo uma visão mais abrangente do assunto a ser explorado.

#### 4.1 PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA A PARTIR DE RELAÇÕES INTERDISCIPLINARES COM A FÍSICA UTILIZANDO O GEOGEBRA

Ensinar e aprender matemática exige dos integrantes do processo de ensino e aprendizagem uma capacidade ampla de investigação e articulação entre os diversos saberes e conhecimentos, envolvendo um emaranhado de conceitos que podem relacionar duas ou mais áreas específicas.

Destacam Luiz e Col (2013, p. 02) que “a aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas”, permitindo ao aluno participar do processo de investigação e elaboração de conceitos acerca do objeto de estudo. Assim, o educando torna-se um agente do processo educacional, deixando de ser meramente receptor ou reproduzidor de conceitos.

As relações interdisciplinares desempenham papel fundamental para o desenvolvimento evolutivo do estudante em relação à compreensão e aprendizagem de conceitos científicos ou naturais. Neste processo, é interessante que o professor realize uma mediação entre os conhecimentos que os alunos já possuem e os conceitos ainda não explorados ou aprofundados, desenvolvendo a capacidade de investigação, desafiados por situações-problema interdisciplinares que permitam resgatar e abordar conceitos matemáticos.

Neste trabalho efetua-se a análise de algumas coleções de livros didáticos das disciplinas de Física e Matemática propostos para serem trabalhados no Ensino Médio, e, a partir dessa sugerem-se propostas metodológicas de ensino para trabalhar determinados conteúdos, estando constantemente presente as relações interdisciplinares entre a Matemática e a Física, partindo de problemas abordados na disciplina de Física e resgatando conceitos matemáticos existentes nos mesmos.

São desenvolvidas três propostas metodológicas de ensino, sendo que da disciplina de Física, cada proposta abordará com maior especificidade os seguintes temas: (1) espelhos esféricos; (2) ondas, sinais e satélites; e, (3) Leis de Kepler.

Quanto aos conceitos matemáticos, apresenta-se, respectivamente, com maior ênfase o resgate e a investigação dos seguintes assuntos: (1) semelhança de triângulos; (2) parábola: caracterização, elementos e relações matemáticas, congruência e semelhança de triângulos, propriedades do triângulo isósceles, retas tangentes, paralelismo e perpendicularismo; (3) elipse: caracterização, elementos e relações matemáticas.

Ressalta-se que, mesmo que não sejam citados, existem outros conceitos matemáticos possíveis de serem explorados conexas às contextualizações enfatizadas. As investigações

acerca do problema é que direcionam os assuntos específicos que são abordados, de acordo com a necessidade.

No desenvolvimento das propostas metodológicas utilizam-se situações-problema do cotidiano e, a partir dessas, inicia-se um processo de investigação e resgate de conceitos relativos às disciplinas de Matemática e Física, buscando justificar determinado fenômeno. Para isso, apresentam-se as leis físicas disponibilizadas em referenciais adotados, e, utiliza-se da teoria matemática na busca por explicações acerca do assunto. Aliado a isso, desenvolvem-se demonstrações de alguns conceitos matemáticos.

Ainda, emprega-se o *software* GeoGebra como um facilitador na visualização das representações gráficas, o que permite compreender e relacionar mais facilmente os conceitos teóricos e as aplicações na prática. Disponibiliza-se também de forma *online*, material pedagógico, construído a partir do GeoGebra, reforçando as abordagens teóricas descritas.

Uma das contribuições e potencialidades apresentadas associadas às propostas metodológicas são as ferramentas desenvolvidas com o GeoGebra e disponibilizadas na forma *online*, que permitem manipular os dados relativos às situações-problema facilitando a compreensão pois proporcionam a visualização.

## 5 PROPOSTAS METODOLÓGICAS

Nesta seção disponibilizam-se três propostas metodológicas para o ensino de matemática a partir de relações interdisciplinares com a Física, abordando contextualizações físicas e, por um processo investigativo, resgatam-se conceitos matemáticos úteis na justificativa de determinado fenômeno. Comenta-se também sobre as principais contribuições e potencialidades que as propostas metodológicas proporcionam, associando com algumas referências apresentadas na revisão bibliográfica e na fundamentação teórica.

### 5.1 ESPELHOS ESFÉRICOS E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: CARACTERIZAÇÃO DA IMAGEM A PARTIR DA POSIÇÃO DO OBJETO EM RELAÇÃO AO ESPELHO

*Pay attention! Objects in mirror are closer than they appear.* É possível em algum momento da vida deparar-se com a leitura dessa frase. Consegue lembrar onde? Mesmo que não tenha se deparado com tal situação, em alguns carros importados, essa frase aparece no espelho retrovisor direito com o intuito de alertar os motoristas a respeito de um fato importante: objetos cujas imagens são visualizadas nesse espelho estão mais perto do que parecem.

Abrindo parênteses e sem demonstrações, importa lembrar que, nos espelhos planos, a caracterização das imagens é dada de tal forma que: (i) a imagem possui o mesmo tamanho do objeto; (ii) a distância da imagem ao espelho é igual a distância do objeto ao espelho; (iii) a imagem é sempre virtual (formada “atrás” do espelho) e direita (na mesma orientação do objeto).

Desta forma, como na situação descrita anteriormente interpreta-se que a imagem está mais distante do espelho em relação ao objeto e, o tamanho do objeto e da imagem são diferentes, então as condições indicam que os espelhos retrovisores dos automóveis não são espelhos planos.

No cotidiano, existem situações que dependendo da posição do objeto em relação à superfície refletora, a imagem aparece em tamanho real, maior ou menor do que o objeto, ou ainda, pode nem ocorrer a formação de imagem, mesmo que a superfície seja refletora. Assim, é comum o questionamento sobre o motivo pelo qual ocorre essa ampliação, redução ou inexistência das imagens.

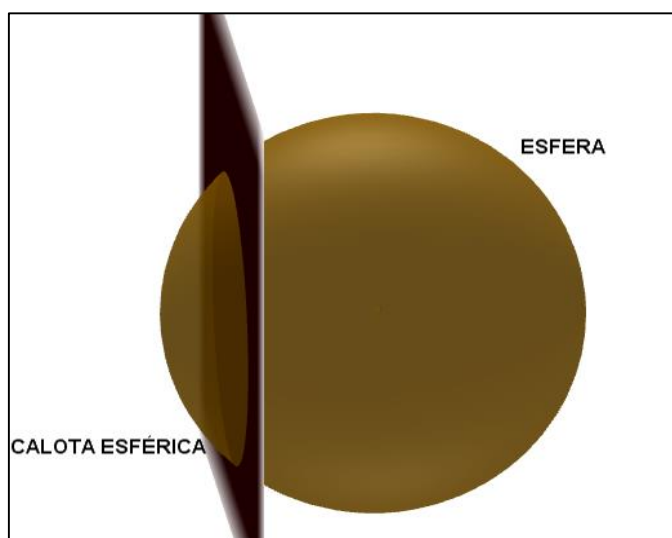
Em geral, os espelhos podem ser classificados em planos ou curvos. Os espelhos planos, como o próprio nome sugere, apresentam superfície refletora sem curvatura, enquanto os espelhos curvos apresentam superfície refletora com curvatura. Dessa forma, na situação-problema anterior, conclui-se que os espelhos retrovisores dos automóveis são espelhos curvos e utilizados pelas montadoras de automóveis com o objetivo de ampliar o campo visual do condutor do veículo.

Há inúmeras utilizações e benefícios dos espelhos, como por exemplo: telescópios, espelhos retrovisores de automóveis, lanternas, clínicas de análises visuais, na ampliação do campo visual a partir de sistemas de espelhamento em ambientes como forma de vigilância, espelhos de maquiagem e de barbear, instrumentos utilizados por dentistas para visualizar detalhes na boca do paciente, entre outros.

Define-se espelho como “toda superfície com alto poder de reflexão da luz na qual é preponderante a reflexão especular<sup>4</sup>, típica de superfícies polidas” (ARTUSO, WRUBLEWSKI, 2013, p. 194).

Este trabalho tem como foco o estudo dos espelhos curvos, com especificidade aos espelhos esféricos, que correspondem a uma esfera ou uma calota esférica, conforme Figura 09, sendo que, para estudar o comportamento das imagens de acordo com a posição do objeto em frente ao espelho, utiliza-se a calota esférica, análogas as abordagens quando se tratar de uma esfera.

Figura 09 - Interseção da esfera com um plano, gerando a calota esférica

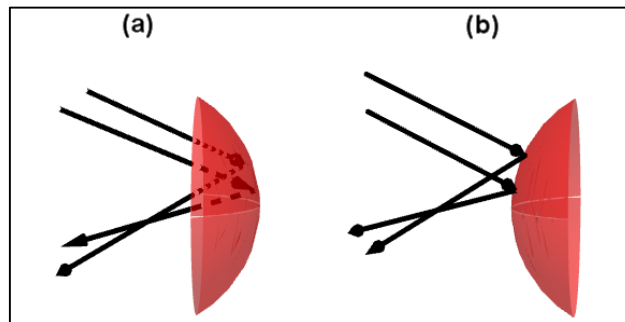


Fonte: Autor

<sup>4</sup> Ocorre quando a luz incide sobre superfícies opacas lisas e perfeitamente refletoras.

Guimarães, Piqueira e Carron (2014, p. 229) destacam que os espelhos esféricos “[...] são calotas esféricas obtidas pelo corte de uma superfície esférica com um plano, e, em seguida, espelhadas”. Desse modo: “se o espelhamento é feito na superfície interna da calota, o espelho esférico é denominado côncavo” e, “quando o espelhamento é feito na superfície externa da calota, o espelho esférico é denominado convexo”, conforme representado na Figura 10, a partir do GeoGebra, no espaço tridimensional.

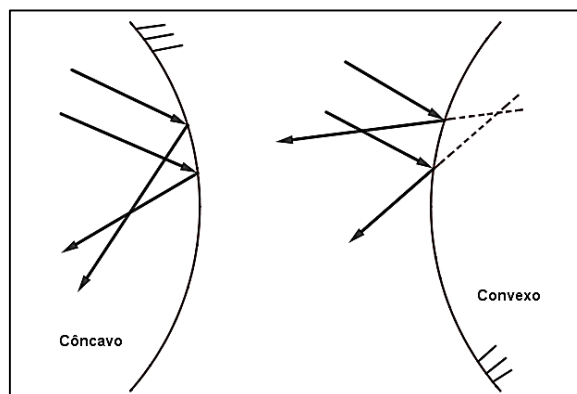
Figura 10 - Espelhos esféricos: (a) côncavo e (b) convexo



Fonte: Autor

Para analisar e estudar o comportamento de um raio de luz incidente sobre um espelho esférico, utiliza-se uma secção transversal da calota esférica que contém o centro da esfera imaginária da qual a calota foi originada, de acordo com o direcionamento do raio de luz incidente sobre o espelho, conforme Figura 11. Logo, é possível realizar o estudo do comportamento dos raios bem como as características da imagem formada, tendo o espaço bidimensional como referência.

Figura 11 - Espelhos esféricos côncavo e convexo no plano bidimensional

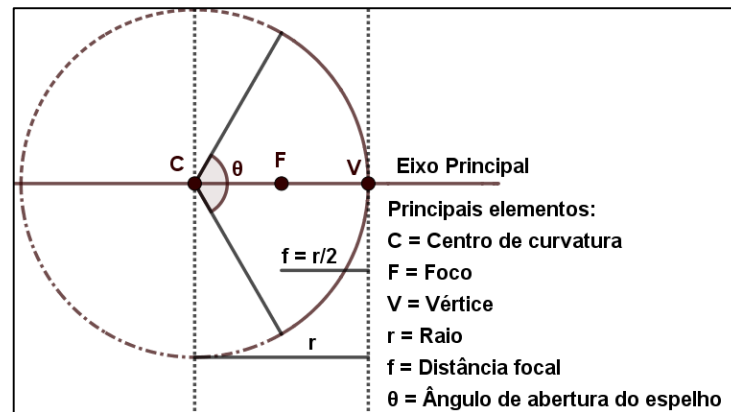


Fonte: Autor

Na Figura 12, identificam-se os principais elementos geométricos associados aos espelhos esféricos.



Figura 12 - Elementos geométricos de um espelho esférico



Fonte: Autor

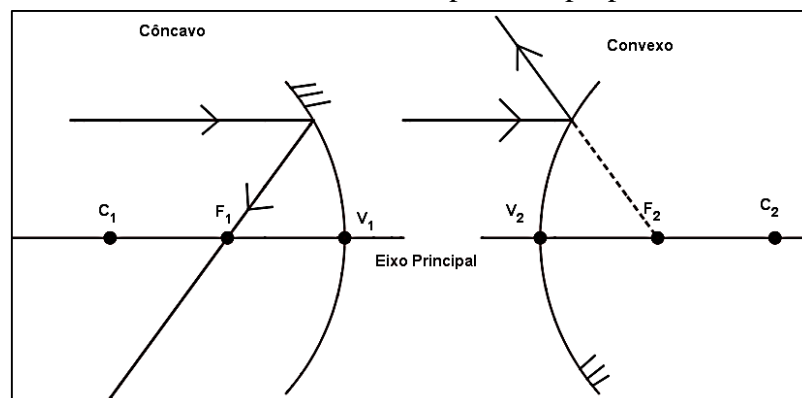
O centro de curvatura coincide com o centro da esfera que deu origem à calota esférica; o vértice é um ponto qualquer pertencente à esfera; e, o foco é o ponto médio entre o vértice e o centro de curvatura. A distância focal, numericamente, equivale à metade da medida do raio da esfera, e, por definição, é positiva nos espelhos côncavos e negativa nos espelhos convexos.

Apresentam-se aqui as características dos raios luminosos e o processo de formação da imagem com Guimarães, Piqueira e Carron (2014) e, Artuso e Wrublewski (2013) como principais referências.

Existem alguns raios notáveis que apresentam comportamento característico, com as seguintes propriedades:

Propriedade 01: Os raios luminosos que incidem paralelamente ao eixo principal de um espelho são refletidos de modo que passam pelo foco (se o espelho for côncavo) ou são refletidos de tal forma que os seus prolongamentos passem pelo foco (se o espelho for convexo), Figura 13;

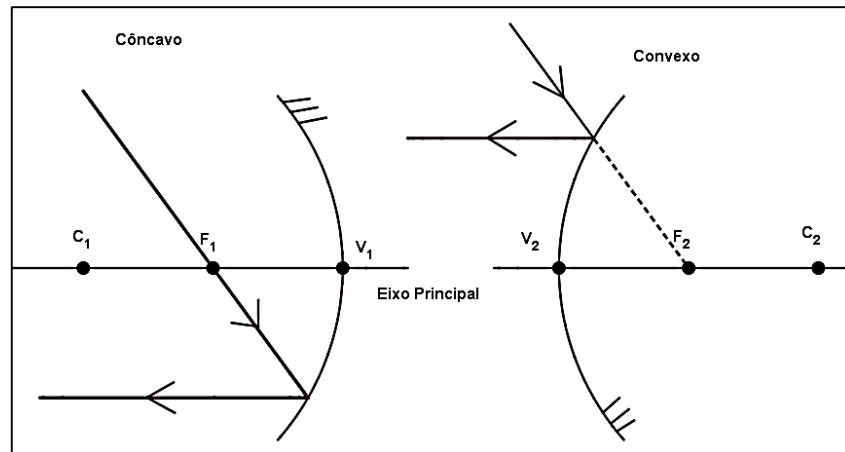
Figura 13 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a primeira propriedade



Fonte: Autor

Propriedade 02: Os raios luminosos (ou seus prolongamentos) que incidem passando pelo foco são refletidos paralelamente ao eixo principal, Figura 14;

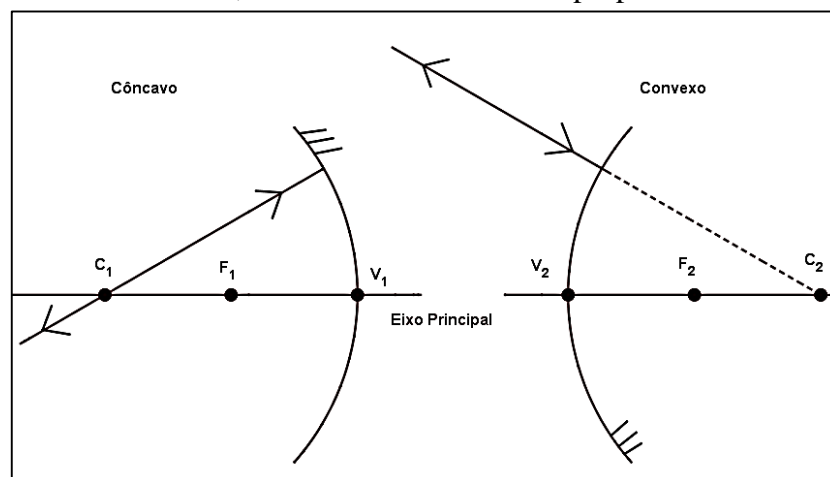
Figura 14 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a segunda propriedade



Fonte: Autor

Propriedade 03: Os raios luminosos (ou seus prolongamentos) que incidem passando pelo centro de curvatura são refletidos sobre si mesmos, Figura 15;

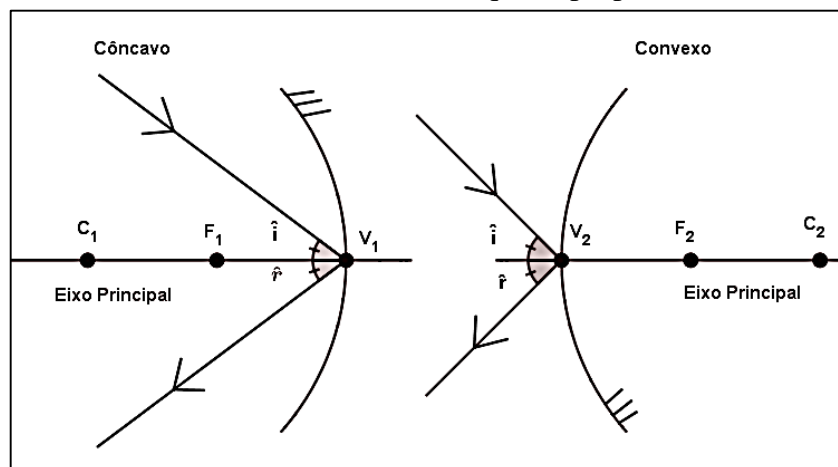
Figura 15 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a terceira propriedade



Fonte: Autor

Propriedade 04: O raio luminoso que incide no vértice do espelho tem como raio refletido o seu simétrico em relação ao eixo principal, Figura 16.

Figura 16 - Comportamento do raio incidente e refletido no espelho esférico côncavo e convexo, de acordo com a quarta propriedade



Fonte: Autor

No link <https://ggbm.at/xv9tsnT9> encontra-se disponível material desenvolvido pelo autor deste trabalho, construído a partir do GeoGebra e que permite visualizar a incidência e reflexão dos raios para os espelhos esféricos côncavos e convexos, possibilitando a manipulação de dados através do controle deslizante e também exibindo os rastros em relação à incidência em pontos distintos.

Observa-se que a formação de imagens está condicionada à forma com que os raios incidem sobre o espelho. Guimarães, Piqueira e Carron (2014, p. 233) destacam que “quando um objeto real é posicionado diante de um espelho esférico, seja ele côncavo ou convexo, é obtida uma imagem conjugada que será real ou virtual. Além disso, a imagem pode ser ampliada, reduzida ou do mesmo tamanho do objeto”. Uma imagem é real quando é formada em frente ao espelho e virtual quando atrás.

Conforme Artuso, Wrublewski (2013) a imagem pode ainda ser caracterizada de acordo com sua orientação em direita (mesmo sentido) ou invertida (sentido contrário) em relação ao objeto, e, quanto a sua distância em relação ao espelho, podendo formar-se mais próxima, mais distante ou a uma mesma distância do objeto.

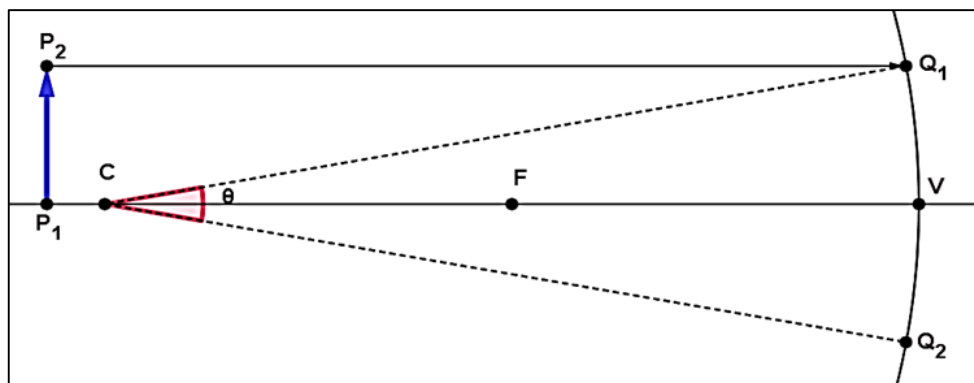
Portanto, para caracterizar a imagem é necessário estabelecer os seguintes procedimentos: (i) traçar ao menos dois raios distintos que partem do objeto e chegam ao espelho (raios incidentes); (ii) para cada raio incidente, determinar o respectivo raio refletido; e, (iii) no ponto de encontro dos raios refletidos (se existir) haverá a formação da imagem em relação ao objeto.

Outra restrição associada à formação das imagens nos espelhos esféricos refere-se às condições de nitidez de Gauss. Artuso e Wrublewski (2013), de acordo com Gauss, afirmam que, para obtenção de imagens nítidas, os seguintes itens precisam ser atendidos:

- os raios luminosos devem incidir próximos ao eixo principal e praticamente paralelos em relação a ele. Raios com essas características são denominados paraxiais;
- o ângulo de abertura ( $\theta$ ) do espelho deve ser pequeno (menor ou igual a  $10^\circ$ ). O espelho que apresenta uma área razoável tem seu raio de curvatura bastante grande, o que torna o espelho esférico pouco curvado, aproximando-se de um espelho plano.

A caracterização do ângulo de abertura  $\theta$  de um espelho é dada de acordo com o tamanho do objeto que se deseja obter na imagem. Considere-se a Figura 17 que representa um espelho esférico côncavo de centro de curvatura  $C$ , foco  $F$  e vértice  $V$ , e, um objeto representado pelo vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  perpendicular ao eixo principal, sendo  $P_1$  um ponto sobre o eixo principal e  $P_2$  o ponto mais distante do eixo principal. Sejam  $Q_1$  um ponto sobre a superfície do espelho, obtido a partir da incidência do raio com origem em  $P_2$  e paralelo ao eixo principal, e  $Q_2$  o ponto sobre a superfície do espelho, simétrico a  $Q_1$  em relação ao eixo principal. O ângulo de abertura  $\theta$  do espelho é definido por  $\theta = \widehat{Q_1CQ_2}$ .

Figura 17 - Caracterização do ângulo de abertura de um espelho esférico



Fonte: Autor

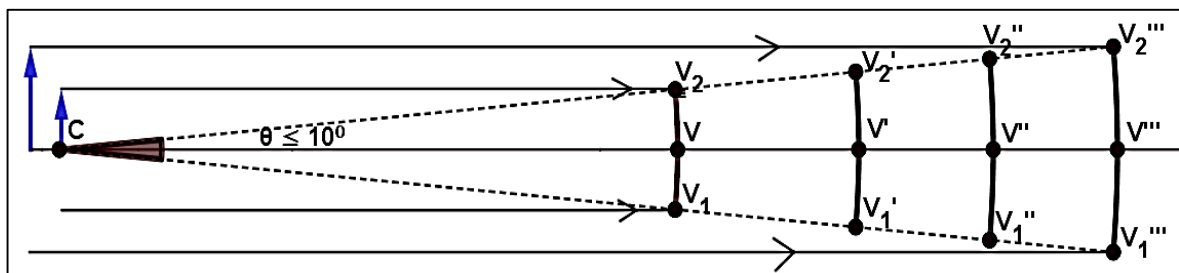
Em suma, quanto menor for o tamanho do objeto, menor será o ângulo de abertura do espelho. Como as condições de nitidez de Gauss afirmam que  $\theta$  deve ser inferior a  $10^\circ$ , os raios devem incidir muito próximos ao eixo principal, ou seja, são raios paraxiais.

Na Figura 17, nota-se que o comprimento do arco  $\widehat{Q_1Q_2}$ , fixado um ângulo  $\theta$ , depende do raio do círculo. Quanto maior for o raio, maior será o comprimento do arco.

Desse modo, sejam os círculos  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  e  $\Gamma'''$  formados pela interseção de um plano com uma esfera de centro  $C$  e raios  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$  e  $r'''$  com  $r < r' < r'' < r'''$ , respectivamente, tal

que o plano contenha  $C$ . Ainda, sejam  $V_1, V_2; V_1', V_2'; V_1'', V_2''$  e  $V_1''', V_2'''$  pontos de  $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$  e  $\Gamma'''$ , respectivamente, simétricos em relação a um de seus diâmetros, e que delimitam os espelhos. A Figura 18 apresenta quatro espelhos esféricos côncavos com um mesmo ângulo de abertura  $\theta$ , porém com raios de módulos distintos. Nota-se que o ângulo  $\theta = V_1\hat{C}V_2 = V_1'\hat{C}V_2' = V_1''\hat{C}V_2'' = V_1'''\hat{C}V_2'''$  é equivalente, mesmo com a variação do raio, e, quanto aos comprimentos dos arcos tem-se  $\widehat{V_1V_2} < \widehat{V_1'V_2'} < \widehat{V_1''V_2''} < \widehat{V_1'''V_2'''}$ .

Figura 18 - Representação dos raios paraxiais e ângulo  $\theta$  de abertura no espelho côncavo de acordo com o raio de curvatura



Fonte: Autor

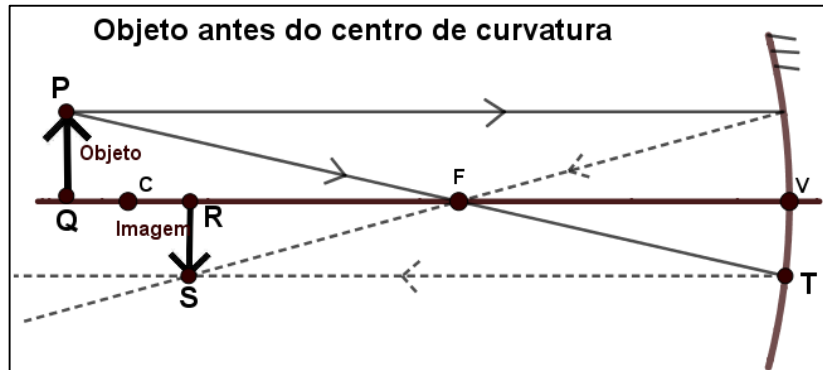
Dessa forma, fixado o ângulo de abertura  $\theta \leq 10^\circ$  para o espelho, para garantir a nitidez das imagens tem-se que quanto maior for o tamanho do objeto, maior deve ser o raio de curvatura do espelho.

Reforça-se que, ao se analisar matematicamente as características das imagens que são apresentadas, pelos livros didáticos, para os espelhos esféricos, há uma aproximação do real, sendo tão próximas quanto menor for o ângulo de abertura do espelho e mais próximos do eixo principal os raios incidirem. Como as condições de nitidez de Gauss geram um erro matemático, paralelo ao desenvolvimento da proposta metodológica efetua-se um estudo e análise deste desencontro de informações, justificados a partir do GeoGebra e de dados geométricos.

Analisa-se, inicialmente, o comportamento da imagem produzida por um espelho esférico côncavo de centro de curvatura  $C$ , foco  $F$  e vértice  $V$ , de acordo com a posição do objeto em relação ao espelho. Esse comportamento toma como base o exposto nos livros didáticos de Física para o Ensino Médio que foram consultados, embora tenham algumas imprecisões matemáticas originadas por simplificações e que serão discutidas posteriormente. Tomam-se uma seta como objeto e o GeoGebra para a representação. E, considerem-se as linhas pontilhadas como sendo a representação dos raios refletidos (ou seus prolongamentos) e as linhas cheias como sendo os raios incidentes. São cinco casos a analisar de acordo com Artuso e Wrublewski (2013):

- 1) Objeto real  $PQ$  posicionado antes do centro de curvatura  $C$ , Figura 19: para obter a imagem, utilizam-se as propriedades 01 e 02, apresentadas anteriormente.

Figura 19 - Objeto posicionado antes do centro de curvatura de um espelho côncavo



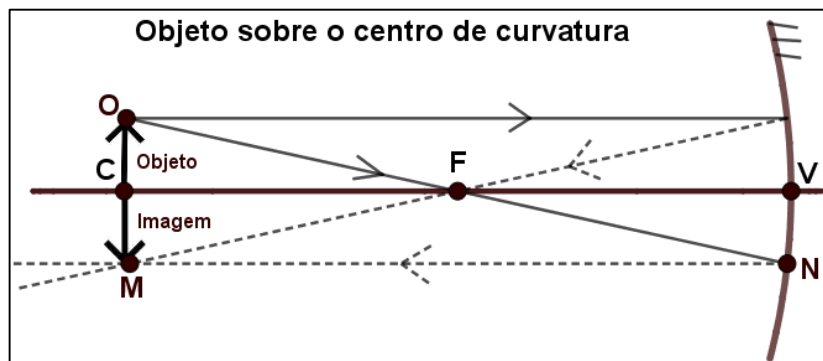
Fonte: Autor

As características da imagem  $SR$  são:

- posicionada entre o foco e o centro de curvatura;
- natureza real;
- orientação invertida em relação ao objeto; e,
- tamanho menor do que o objeto.

- 2) Objeto real  $OC$  posicionado sobre o centro de curvatura, Figura 20: empregam-se as propriedades 01 e 02.

Figura 20 - Objeto posicionado sobre o centro de curvatura de um espelho côncavo



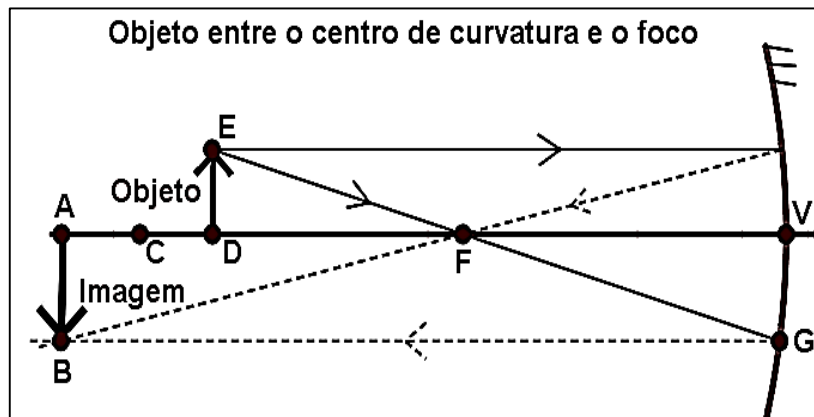
Fonte: Autor

As características da imagem  $MC$  são:

- posicionada sobre o centro de curvatura;
- natureza real;

- orientação invertida em relação ao objeto; e,
  - tamanho igual ao do objeto.
- 3) Objeto real  $ED$  posicionado entre o centro de curvatura  $C$  e o foco  $F$ , Figura 21: utilizam-se as propriedades 01 e 02.

Figura 21 - Objeto posicionado entre o centro de curvatura e o foco de um espelho côncavo

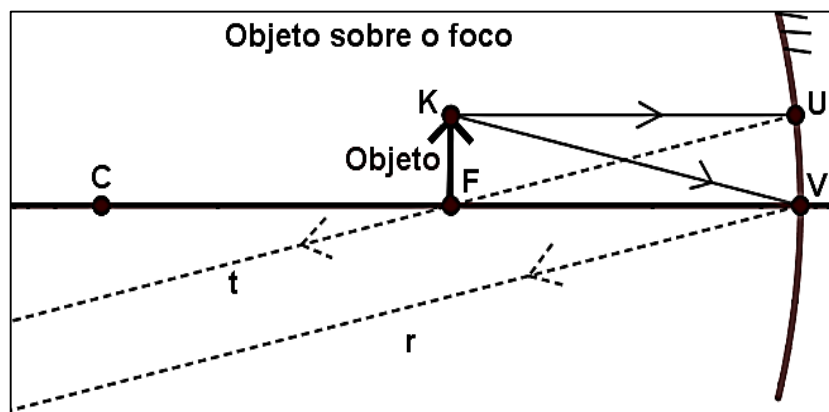


Fonte: Autor

As características da imagem  $BA$  são:

- posicionada antes do centro de curvatura;
  - natureza real;
  - orientação invertida em relação ao objeto; e,
  - tamanho maior ao do objeto.
- 4) Objeto real  $KF$  posicionado sobre o foco  $F$ , Figura 22: utilizam-se as propriedades 01 e 04.

Figura 22 - Objeto posicionado sobre o foco de um espelho côncavo

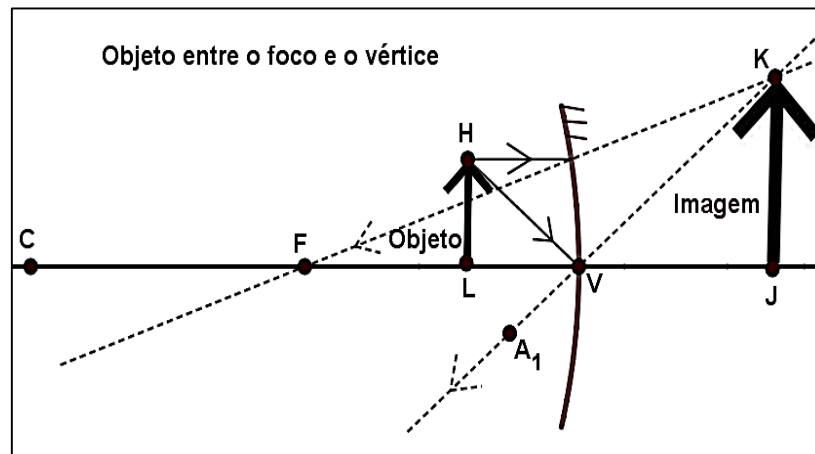


Fonte: Autor

Neste caso, como os raios refletidos são paralelos, não ocorre formação de imagem.

- 5) Objeto real  $HL$  posicionado entre o foco  $F$  e o vértice  $V$ , Figura 23: utilizam-se as propriedades 01 e 04.

Figura 23 - Objeto posicionado entre o foco e o vértice de um espelho côncavo



Fonte: Autor

As características da imagem  $KJ$  são:

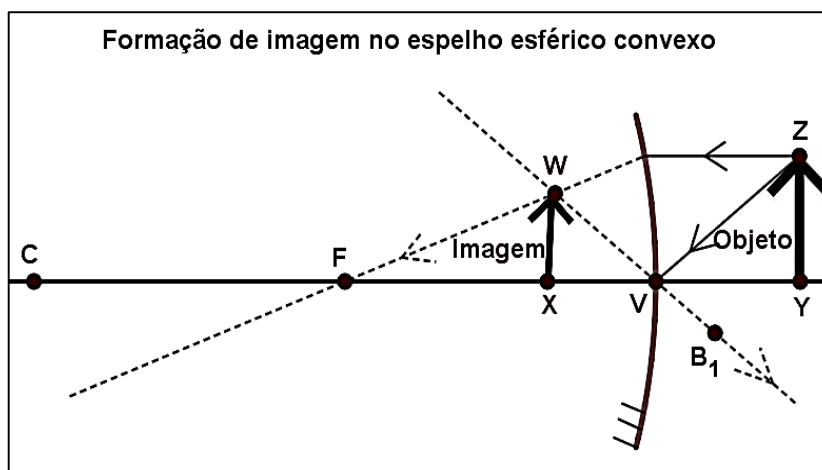
- posicionada atrás do espelho;
- natureza virtual;
- orientação direita em relação ao objeto; e,
- tamanho maior que o do objeto.

No link <https://ggbm.at/WbgMaja5> encontra-se disponível um material que permite manipular a posição do objeto em relação ao espelho esférico côncavo a partir de um controle deslizante, visualizando a imagem formada. É possível também exibir os rastros da imagem, podendo efetuar comparações quanto à caracterização e classificação da mesma, o que vem ao encontro das descrições aqui apresentadas.

Analogamente, nos espelhos convexos, as imagens formadas possuem as mesmas características independentemente da posição que o objeto ocupa em relação ao espelho. A Figura 24 representa a imagem  $WX$  de um objeto  $ZY$  em frente a um espelho convexo, obtida a partir das propriedades 01 e 04.



Figura 24 - Objeto posicionado em frente a um espelho convexo



Fonte: Autor

As características da imagem  $WX$  são:

- posicionada atrás do espelho, entre o foco e o vértice;
- natureza virtual;
- orientação direita em relação ao objeto; e,
- tamanho menor que o do objeto.

Da mesma forma, no *link* <https://ggbm.at/ec53mW3f> encontra-se disponível um material que permite manipular a posição do objeto em relação ao espelho esférico convexo a partir de um controle deslizante, visualizando a imagem formada. É possível também exibir os rastros da imagem, podendo efetuar comparações quanto à caracterização e classificação da mesma, o que vem ao encontro das descrições aqui abordadas.

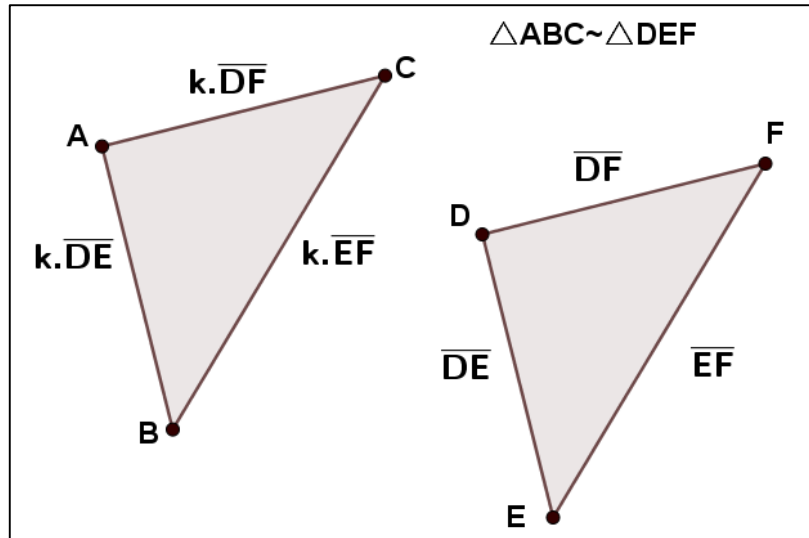
Para justificar que o tamanho da imagem é maior, menor ou igual ao tamanho do objeto, nos respectivos casos, pode-se utilizar da semelhança de triângulos.

Neto (2013, p. 148) afirma que “dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes sejam sempre a mesma”.

Representa-se a semelhança entre dois triângulos pelo símbolo  $\sim$ . Assim, se  $\Delta ABC$  é semelhante ao  $\Delta DEF$  então, simbolicamente,  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

Pela definição e, conforme Figura 25,  $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$  e  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DFE}$ , e, existir  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$ . O valor  $k$  é denominado razão de semelhança dos triângulos.

Figura 25 – Semelhança de triângulos



Fonte: Autor

Como  $k \in \mathbb{R}^+$ , então, se dois triângulos são semelhantes, uma, e somente uma, dentre as condições ocorrerá:  $\begin{cases} 0 < k < 1 \\ k = 1 \\ k > 1 \end{cases}$ . Quando  $k$  representa a razão entre os lados correspondentes

dos triângulos, tem-se:

- i) Se  $0 < \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k < 1$ , então as medidas correspondentes aos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são menores do que as medidas  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{EF}$ , respectivamente, de modo que, o triângulo  $ABC$  é menor do que o triângulo  $DEF$ .
- ii) Se  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k = 1$ , então as medidas correspondentes aos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são iguais às medidas  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{EF}$ , respectivamente, de modo que, o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$  ( $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ).
- iii) Se  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k > 1$ , então as medidas correspondentes aos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são maiores do que as medidas  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{EF}$ , respectivamente, de modo que, o triângulo  $ABC$  é maior do que o triângulo  $DEF$ .

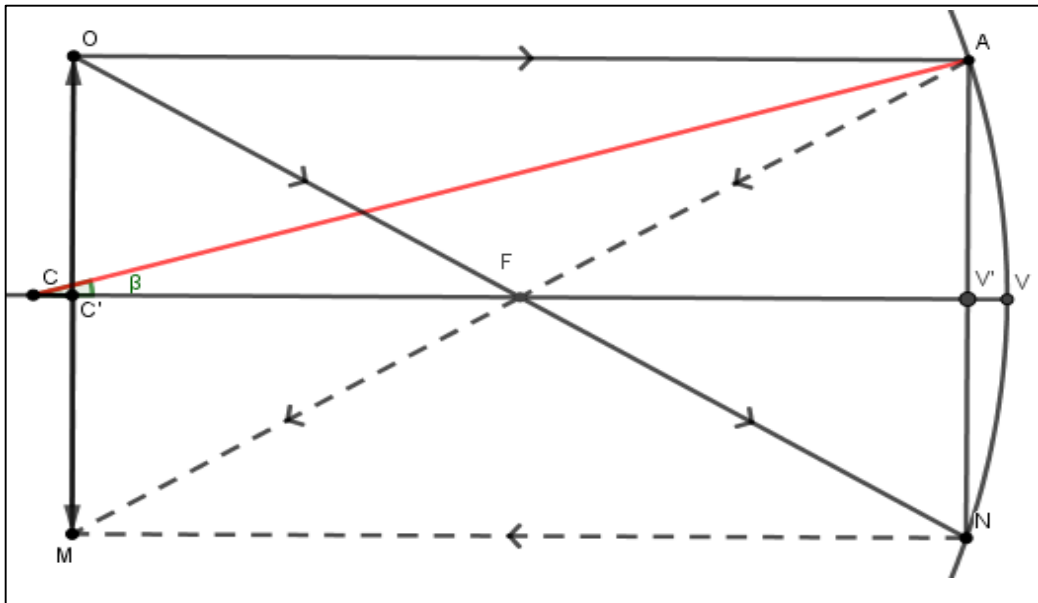
Por conseguinte, objetiva-se analisar, investigar e buscar justificativas matemáticas, a partir da semelhança de triângulos, verificando a veracidade de cada um dos seis casos de imagens formadas em espelhos esféricos, anteriormente descritos.

Inicialmente destaca-se que, pelo fato de abordar espelhos que respeitam as condições de nitidez de Gauss, os autores dos livros de Física consultados, desconsideraram a “pequena curvatura” do espelho (inferior a  $10^\circ$ ), avaliando o caso de modo análogo a uma superfície plana. Assim, dado um ponto  $P'$  qualquer sobre a superfície de um espelho esférico de vértice  $V$ , consideram que o segmento  $\overline{P'V}$  é a projeção ortogonal do ponto  $P'$  sobre o eixo principal, e, que o objeto situado em frente ao espelho também é perpendicular em relação ao eixo principal. Tomando essas hipóteses, os casos acima expostos (representados na Figura 19 até a Figura 24) se verificam, porém do ponto de vista matemático isso é inconsistente, visto que nenhuma corda da circunferência pode ser perpendicular a um raio em um de seus extremos. Na sequência, faz-se uma análise dessas situações com o objetivo de observar os erros cometidos em cada caso ao fazer a simplificação de considerar o espelho como plano.

Objeto real  $PQ$  posicionado antes do centro de curvatura  $C$  de um espelho côncavo: na Figura 19 analisam-se os triângulos  $PFQ$  e  $TFV'$ , onde  $V'$  é a projeção ortogonal de  $T$  sobre  $\overline{CV}$ . Nota-se que,  $P\hat{Q}F = T\hat{V}'F = 90^\circ$  e  $P\hat{F}Q = T\hat{F}V'$  pois são ângulos opostos pelo vértice. Logo, por AA,  $\Delta PFQ \sim \Delta TFV'$ . Assim,  $\frac{PQ}{TV'} = \frac{PF}{TF} = \frac{QF}{V'F} = k$ , mas  $QF > CF = VF > V'F \Rightarrow \frac{QF}{V'F} = k > 1 \Rightarrow \frac{PQ}{TV'} = k > 1 \Rightarrow PQ > TV'$ . Como  $TV' \equiv SR$ , então  $PQ > SR$ , sendo  $PQ$  o tamanho do objeto e  $SR$  o tamanho da imagem, justificando a caracterização da imagem, a qual indica que o tamanho da imagem é menor em relação ao objeto. Neste caso, apesar da simplificação feita, a situação exposta nos livros de Física se confirma.

Para avaliar a veracidade do segundo caso, ilustrado na Figura 20, considera-se a Figura 26, onde  $\overline{V'N}$  é ortogonal ao segmento  $\overline{CV}$ , sendo  $V$  o vértice e  $C$  o centro de curvatura do espelho côncavo de raio  $r$ . Seja  $C'$  um ponto de  $\overline{CF}$  tal que  $\overline{C'O}$  (tamanho do objeto) e  $\overline{C'M}$  (tamanho da imagem) sejam ortogonais à  $\overline{CF}$ . Note que por AA,  $\Delta OFC' \sim \Delta NFV'$ . Assim,  $\overline{C'O} \equiv \overline{C'M}$  se, e somente se,  $\overline{C'F} \equiv \overline{FV'}$ , ou seja,  $F$  é ponto médio de  $\overline{C'V'}$  de forma que  $\overline{CC'} \equiv \overline{V'V}$ . Sendo  $\cos \beta = \frac{CV'}{r}$ , segue que  $\overline{V'V} = \overline{CV} - \overline{CV'} = r - r \cdot \cos \beta = r(1 - \cos \beta)$ . Observe que quando  $\beta$  tende à zero,  $\overline{V'V}$  tende à zero e conseqüentemente  $C'$  tende à  $C$ , ou seja, para objetos suficientemente pequenos, ou raios de curvatura suficientemente grandes (espelho próximo do plano),  $\beta$  fica próximo de zero e assim,  $C'$  próximo de  $C$ . Se considerar o limite das condições de nitidez de Gauss, tem-se  $\beta = 5^\circ$ . Assim  $\overline{V'V} = r(1 - \cos 5^\circ) \cong 0,0038r$ , o que representa 0,38% do valor do raio do espelho. Esse é o erro cometido na aproximação sugerida nos livros didáticos de Física para o Ensino Médio consultados.

Figura 26 - Objeto posicionado em frente a um espelho côncavo gerando uma imagem congruente ao objeto



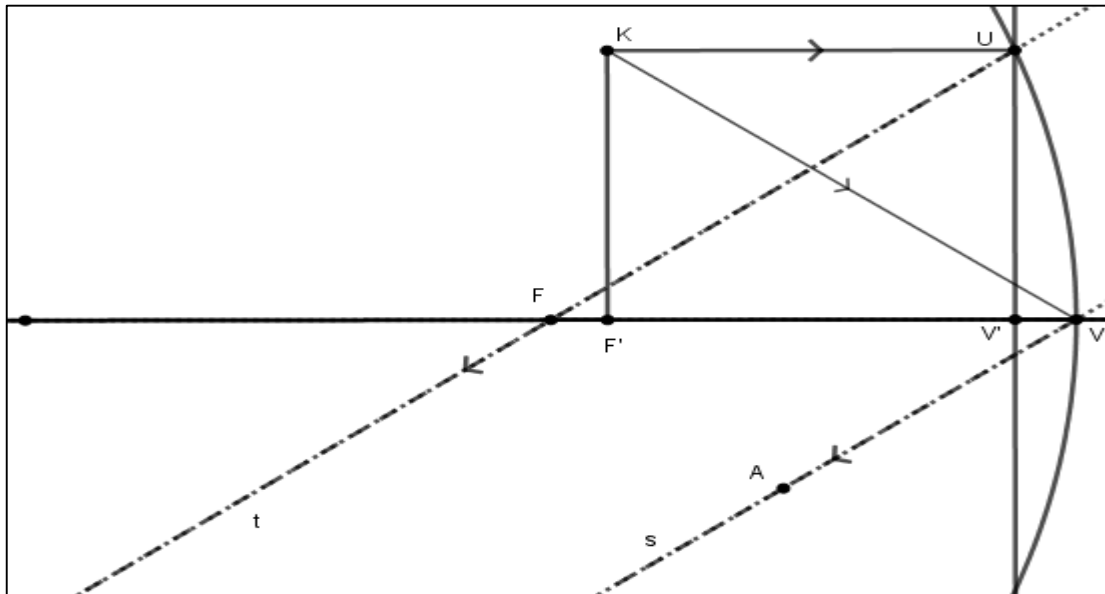
Fonte: Autor

Nota-se que para um objeto  $O'C''$  de tamanho e orientação iguais ao objeto  $OC'$  da Figura 26, com  $C'' \in \overline{CC'}$ , traz  $\overline{O'C''} > \overline{N'V''}$ , sendo  $N'$  o ponto de incidência do raio, sobre o espelho, que parte de  $O'$  e passa pelo foco  $F$ , e,  $V''$  a projeção ortogonal de  $N'$  sobre  $\overline{FV}$ . Com isso, o tamanho da imagem será menor que o tamanho do objeto.

Semelhantemente, observa-se que para um objeto  $O''C'''$  de tamanho e orientação iguais ao objeto  $OC'$  da Figura 26, com  $C'''$  situado entre  $C'$  e  $F$ , temos  $\overline{O''C'''} < \overline{N''V''''}$ , sendo  $N''$  o ponto de incidência do raio, sobre o espelho, que parte de  $O''$  e passa pelo foco  $F$ , e,  $V''''$  a projeção ortogonal de  $N''$  sobre  $\overline{FV}$ . Assim, o tamanho da imagem é maior que o tamanho do objeto.

Em relação ao objeto real  $KF$  “posicionado sobre o foco  $F$ ” de um espelho côncavo, ilustrado na Figura 22, ocorre uma situação análoga aos casos anteriores. Novamente é possível mostrar que os raios refletidos são paralelos quando o objeto está posicionado em um ponto  $F' \in \overline{FV}$ , de forma que  $\overline{FF'} \equiv \overline{V'V}$ , onde  $V'$  é a projeção ortogonal de  $U$  sobre  $\overline{FV}$ , conforme Figura 27. De fato, as retas  $s$  e  $t$  são paralelas se, e somente se,  $U\hat{F}V \equiv A\hat{V}F$ . Pela propriedade de reflexão dos raios tem-se  $K\hat{V}F \equiv A\hat{V}F$  e assim,  $s \parallel t \Leftrightarrow U\hat{F}V \equiv K\hat{V}F$ . Sendo  $K\hat{F}'V \equiv U\hat{V}'F \equiv 90^\circ$  e  $\overline{F'K} \equiv \overline{V'U}$ , segue que isso ocorre se, e somente se,  $\overline{F'V} \equiv \overline{V'F}$  o que implica  $\overline{FF'} \equiv \overline{V'V}$ .

Figura 27 - Objeto posicionado em frente a um espelho esférico côncavo de modo que os raios refletidos sejam paralelos



Fonte: Autor

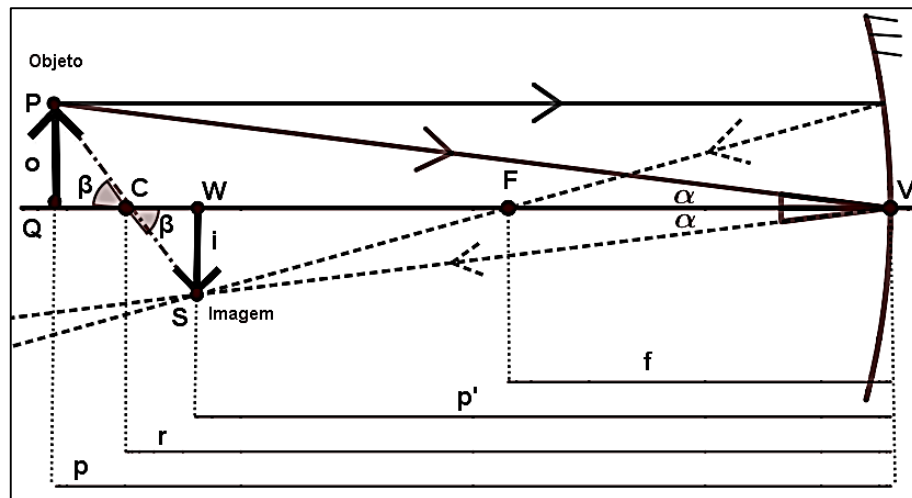
Na Figura 23 sugere-se que, quando o objeto real  $HL$  for posicionado entre o foco  $F$  e o vértice  $V$  de um espelho côncavo, o tamanho da imagem é maior em relação ao objeto e a imagem fica posicionada atrás do espelho. Seguindo a ideia usada no caso anterior, é possível observar que isso ocorre quando o objeto está posicionado entre o ponto  $F'$  e o vértice  $V$ .

Situações análogas ocorrem nos demais casos em que, do ponto de vista da formalidade matemática, são necessários alguns ajustes em relação ao exposto nos livros de Física. Vale ressaltar que os autores consideraram simplificações, que trazem aproximações da realidade e, quando o ângulo de abertura é pequeno, a aproximação fica bem razoável, o que justifica a condição de nitidez de Gauss como um ponto de tolerância do erro da aproximação.

No link <https://ggbm.at/zwXPPbYc> disponibiliza-se um arquivo que permite manipular o ângulo de abertura do espelho e as características do objeto, tendo como consequência a modificação das características da imagem, no qual indicam-se alguns valores numéricos, possibilitando visualizar a existência de erros matemáticos.

Ainda, é possível estabelecer algumas relações quantitativas associadas às características da imagem nos espelhos esféricos a partir de uma determinação analítica, descritas por Artuso e Wrublewski (2013) para espelhos que satisfazem as condições de nitidez de Gauss, ou seja, as características da imagem tendem ao real. Os autores relacionam as grandezas tomando um espelho esférico côncavo e um objeto posicionado antes do centro de curvatura, podendo ser generalizado para uma posição qualquer.

Figura 28 - Determinação analítica da imagem em espelhos esféricos



Fonte: Autor

Na Figura 28:

- $o = \overline{PQ}$  representa o tamanho do objeto;
- $i = \overline{SW}$  representa o tamanho da imagem;
- $p = \overline{QV}$  representa a distância do objeto ao espelho;
- $p' = \overline{WV}$  representa a distância da imagem ao espelho;
- $r = \overline{CV}$  representa o raio da esfera da qual originou-se o espelho;
- $f = \overline{FV}$  representa a distância focal, ou seja, a distância do foco ao vértice do espelho.

Nos triângulos  $PQV$  e  $SWV$  tem-se que  $P\hat{Q}V = S\hat{W}V = 90^\circ$  e  $P\hat{V}Q = S\hat{V}W = \alpha$ .

Assim, por AA:

$$\Delta PQV \sim \Delta SWV \Rightarrow \frac{\overline{PQ}}{\overline{SW}} = \frac{\overline{QV}}{\overline{WV}} \Rightarrow \frac{o}{i} = \frac{p}{p'} \quad (5.1.1).$$

Considerando a propriedade de que todo raio que incide passando pelo centro de curvatura, reflete sobre si mesmo, tem-se que  $P\hat{C}Q = S\hat{C}W = \beta$ . Como  $P\hat{Q}C = S\hat{W}C = 90^\circ$ , então, por AA:

$$\Delta PQC \sim \Delta SWC \Rightarrow \frac{\overline{PQ}}{\overline{SW}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{WC}} \Rightarrow \frac{o}{i} = \frac{p-r}{r-p'} \quad (5.1.2).$$

Igualando (5.1.1) e (5.1.2) e utilizando a informação de que  $r = 2f$ :

$$\frac{p}{p'} = \frac{p-r}{r-p'}$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{p-2f}{2f-p'}$$

$$\begin{aligned}
 (p - 2f)p' &= (2f - p')p \\
 p'p - 2fp' &= 2fp - p'p \\
 2p'p &= 2fp + 2fp' \quad (5.1.3).
 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados de (5.1.3) por  $2fp'p \neq 0$ :

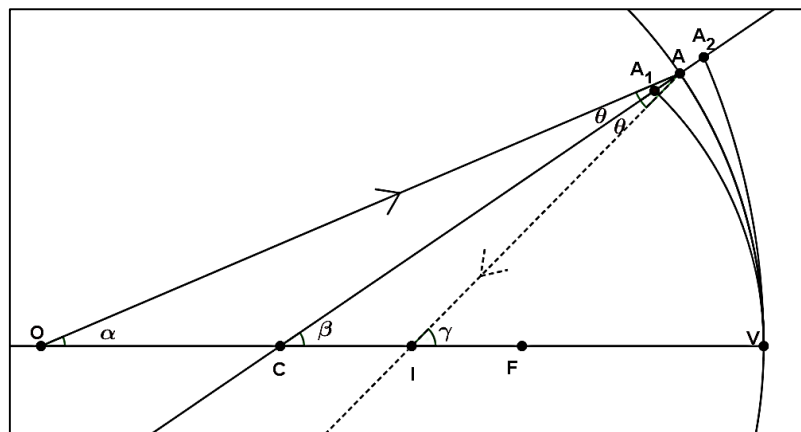
$$\begin{aligned}
 \frac{2p'p}{2fp'p} &= \frac{2fp}{2fp'p} + \frac{2fp'}{2fp'p} \\
 \frac{1}{f} &= \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} \quad (5.1.4).
 \end{aligned}$$

A expressão matemática (5.1.4) é denominada equação dos pontos conjugados, na qual os módulos das grandezas aproximam-se dos valores reais.

Por outro lado, Halliday, Resnick, Walker (2012) apresentam uma relação que permite explorar um limite associado a ângulos e comprimento de arcos, obtendo uma aproximação para a equação dos pontos conjugados, justificada matematicamente.

Para isso tomam um objeto  $O$  pontual localizado antes do centro de curvatura e situado sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo de centro de curvatura  $C$ , foco  $F$  e vértice  $V$ , conforme Figura 29. Como  $\overline{CA}$  é o raio da esfera que originou o espelho, então  $\overline{CA}$  é perpendicular à reta  $w$  que passa por  $A$  e é tangente à esfera. Sejam  $\overline{OA}$  o raio incidente sobre o espelho no ponto  $A$ , com um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo principal, e  $\overline{AI}$  sua reflexão, com  $I$  pertencendo ao eixo principal. Disso tem-se que  $O\hat{A}C = C\hat{A}I = \theta$  pela propriedade 03 de incidência e reflexão dos raios. Também, um raio que incide partindo do ponto  $O$  na direção do eixo principal é refletido na mesma direção e também passa pelo ponto  $I$ . Assim,  $I$  é a imagem de  $O$ . Considere ainda que  $V\hat{C}A = \beta$  e  $V\hat{I}A = \gamma$ .

Figura 29 - Estudo analítico da imagem a partir do comprimento de arcos



Fonte: Autor

Na Figura 29, pelo teorema do ângulo externo:

$$\beta = \alpha + \theta \quad (5.1.5).$$

$$\gamma = \alpha + 2\theta \quad (5.1.6).$$

Multiplicando (5.1.5) por 2 e subtraindo as equações obtém-se:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (5.1.7).$$

Conforme Figura 29, considerem-se os pontos  $A_1$  e  $A_2$  pertencentes à semirreta que contém o segmento  $\overline{CA}$  tais que o arco  $\widehat{VA_1}$  esteja contido no círculo de centro  $I$  e raio  $\overline{VI}$  e o arco  $\widehat{VA_2}$  esteja contido no círculo de centro  $O$  e raio  $\overline{OV}$ .

Utilizando as medidas de  $\alpha, \beta, \gamma$  em radianos tem-se que  $\alpha = \frac{\widehat{VA_2}}{\overline{OV}} = \frac{\widehat{VA_2}}{p}$ ,  $\beta = \frac{\widehat{VA}}{\overline{CV}} = \frac{\widehat{VA}}{r}$  e  $\gamma = \frac{\widehat{VA_1}}{\overline{IV}} = \frac{\widehat{VA_1}}{p'}$ , sendo  $p, p'$  e  $r$  a distância do objeto ao espelho, a distância da imagem ao espelho e o raio de curvatura do espelho, respectivamente.

Assim, por (5.1.7), se  $\beta \rightarrow 0$  então  $\alpha + \gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$  e  $\gamma \rightarrow 0$  já que  $\alpha, \gamma > 0$ . Disso, se  $A_1, A_2 \rightarrow A \rightarrow V$ , então  $\widehat{VA_1}, \widehat{VA_2} \rightarrow \widehat{VA}$ . Logo:

$$\alpha = \frac{\widehat{VA_2}}{\overline{OV}} \cong \frac{\widehat{VA}}{p}; \quad \beta = \frac{\widehat{VA}}{r}; \quad \gamma = \frac{\widehat{VA_1}}{\overline{IV}} \cong \frac{\widehat{VA}}{p'} \quad (5.1.8).$$

Substituindo (5.1.8) em (5.1.7) obtém-se:

$$\begin{aligned} 2\frac{\widehat{VA}}{r} &\cong \frac{\widehat{VA}}{p} + \frac{\widehat{VA}}{p'} \\ \frac{\widehat{VA}}{r/2} &\cong \frac{\widehat{VA}}{p} + \frac{\widehat{VA}}{p'} \\ \frac{1}{f} &\cong \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \end{aligned} \quad (5.1.9),$$

sendo uma relação de aproximação para a equação conjugada de Gauss.

Ainda, na Figura 29, se  $\alpha \rightarrow 0$ , então os raios incidem muito próximos à superfície, e, em (5.1.9), se  $p \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{p} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{p'} \Rightarrow p' \rightarrow f$ , ou seja, a imagem tende a se formar próxima ao foco; de modo análogo, se  $O \rightarrow C \Rightarrow p \rightarrow 2f \Rightarrow p' \rightarrow 2f \Rightarrow I \rightarrow C$ , ou seja, se o



objeto estiver próximo ao centro de curvatura, a imagem tende a se formar próxima ao centro de curvatura.

No *link* <https://ggbm.at/zbbydd5w> encontra-se disponível um material que permite manipular, a partir de controles deslizantes, o raio de curvatura do espelho, o ângulo  $\beta$  de inclinação e a posição do objeto em relação ao espelho, tendo por base as definições abordadas por Halliday, Resnick, Walker (2012).

Ademais, como já citado e explorado inicialmente, a imagem (quando existir) poderá ser maior, menor ou igual ao objeto. Assim, denomina-se  $A = \frac{i}{o}$  como o aumento linear transversal da imagem em relação ao objeto, logo:

- se  $i > o \Rightarrow A > 1$ , ou seja, o tamanho da imagem é maior que o tamanho do objeto;
- se  $i = o \Rightarrow A = 1$ , ou seja, o tamanho da imagem é igual ao tamanho do objeto;
- se  $i < o \Rightarrow A < 1$ , ou seja, o tamanho da imagem é menor que o tamanho do objeto.

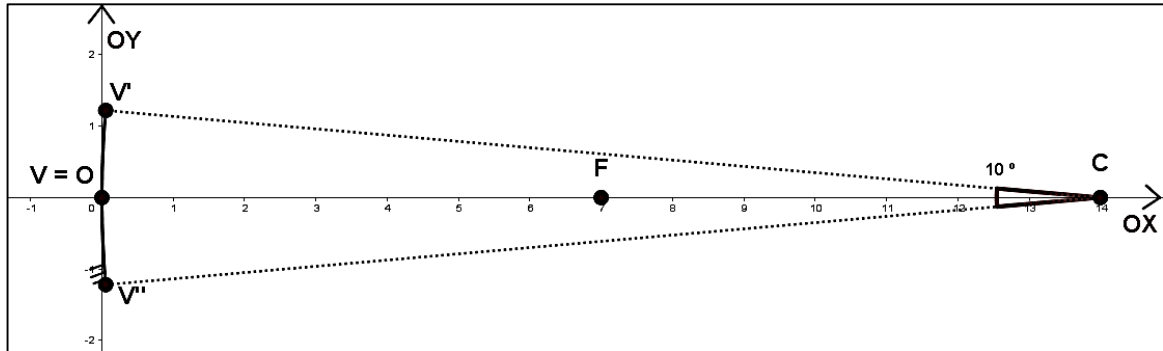
Também, da semelhança de triângulos,  $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$ , assim:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} \quad (5.1.10).$$

Como a imagem pode ser direita ou invertida em relação ao objeto, e, real ou virtual, faz-se necessário uma convenção de sinais. Artuso e Wrublewski (2013) afirmam que para utilizar adequadamente a equação dos pontos conjugados (5.1.9) e a do aumento linear (5.1.10), deve-se estabelecer e conhecer uma convenção de sinais associados ao tipo de elementos envolvidos no processo.

Para isso, considere-se um plano cartesiano  $OXY$  e um espelho esférico côncavo de centro de curvatura  $C$ , foco  $F$  e vértice  $V$ , tal que o vértice do espelho esférico coincide com a origem  $O$  do plano cartesiano; o eixo  $OX$  coincide com o eixo principal do espelho, sendo a parte côncava apontada no sentido positivo do semieixo  $OX$  e a parte não refletora para o semieixo negativo  $OX$ ; e, o eixo  $OY$  coincide com a planificação do espelho (considerando as condições de nitidez de Gauss, essa planificação se aproxima do eixo  $OY$ ), conforme Figura 30. Por definição, considera-se que o objeto esteja sempre localizado no primeiro quadrante do plano  $OXY$ .

Figura 30 - Espelho esférico côncavo, que respeita as condições de nitidez de Gauss, posicionado sobre o plano  $OXY$



Fonte: Autor

Logo, o eixo  $OX$  indica a distância do objeto ( $p$ ) e da imagem ( $p'$ ) em relação ao espelho, além da natureza da imagem (real ou virtual); e, o eixo  $OY$  indica o tamanho do objeto ( $o$ ) e da imagem ( $i$ ) bem como a orientação da imagem em relação ao objeto (direita ou invertida).

Para que haja formação de imagem, o objeto precisa estar localizado em frente ao espelho, ou seja, sobre o semieixo positivo  $OX$ , o que implica  $p > 0$ . Como o foco está sobre o semieixo  $OX$ , à direita da origem, então  $f > 0$ . Considerando a equação conjugada de Gauss, tem-se:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} \Leftrightarrow \frac{p-f}{fp} = \frac{1}{p'} \Leftrightarrow p' = \frac{fp}{p-f} \quad (5.1.11).$$

Como  $fp > 0$ , então, em (5.1.11):

- $p > f \Leftrightarrow p - f > 0 \Leftrightarrow p' > 0$ , o que implica imagem real, ou seja, localizada em frente ao espelho;
- $p < f \Leftrightarrow p - f < 0 \Leftrightarrow p' < 0$ , o que implica imagem virtual, ou seja, localizada atrás do espelho;

Assim, nos espelhos côncavos pode ocorrer a formação de imagem com as seguintes características: real ou virtual; direita ou invertida; maior, menor ou igual ao objeto; e mais próxima ou mais distante do espelho em relação ao objeto. Essas características dependem da posição do objeto em relação ao espelho.

A análise para os espelhos esféricos convexos, bem como para a comparação entre o tamanho do objeto e da imagem, é análogo, destacando que, para os espelhos convexos, o centro de curvatura e o foco encontram-se no semieixo negativo  $OX$ .

A tabela a seguir apresenta as principais características das grandezas associadas aos espelhos esféricos quanto a algumas condições:

Características quanto ao(à)									
Tipo de espelho		Natureza do objeto		Natureza da imagem		Orientação do objeto para		Orientação da imagem para	
Côncavo	Convexo	Real	Virtual	Real	Virtual	Cima	Baixo	Cima	Baixo
$f > 0$	$f < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p' > 0$	$p' < 0$	$o > 0$	$o < 0$	$i > 0$	$i < 0$

Destaca-se que, dependendo da situação, é necessário adotar a convenção de sinais acima para que a relação matemática satisfaça todos os casos, porém ressaltando que o sinal serve apenas para caracterizar a imagem. As relações referem-se a um espelho esférico côncavo ou convexo, o que permite descrever as principais características associadas à imagem.

## 5.2 ONDAS, SINAIS DE SATÉLITES E PARÁBOLA: FUNCIONAMENTO DE UMA ANTENA PARABÓLICA

Frequentemente, são ouvidos comentários ou questionamentos associados ao funcionamento de dispositivos a partir de sinais de satélites, como uma televisão, pelo fato de, a partir de um receptor e de algumas condições específicas para o mesmo, ser possível converter sinais de satélites em imagens transmitidas.

Adjunto a esse processo existem inúmeras situações que se atribui à Física o estudo e a busca por explicações, que se utiliza de contribuições da Matemática como suporte nas justificativas para determinados fenômenos.

Neste trabalho busca-se resgatar conceitos matemáticos na justificativa do funcionamento de uma antena parabólica. Para isso, inicialmente, é necessário resgatar alguns conceitos físicos relativos às ondas e sinais de satélites, para posteriormente investigar a situação-problema e sondar estratégias que justifiquem o comportamento.

A ondulatória é um ramo da Física que se detém no estudo das ondas. Artuso e Wrublewski (2013, p. 267) definem onda como “toda perturbação (oscilação) que se propaga em um meio (material ou não)”. Onda não é matéria, ou seja, não possui massa, sendo considerada uma forma de energia. Podem ser classificadas, quanto à natureza, em ondas mecânicas e eletromagnéticas.

De acordo com Artuso e Wrublewski (2013, p. 272), as ondas mecânicas são “produzidas por meio de oscilações de átomos e moléculas, gerando variações de pressão que induzem outros átomos e moléculas a oscilarem com mesma frequência. [...] necessita de um meio material para propagar-se, ou seja, não se propaga no vácuo” e, as ondas eletromagnéticas “são produzidas por oscilações dos campos elétricos e magnéticos” que “oscilam perpendicularmente, um em relação ao outro, gerando uma onda eletromagnética, cuja direção de propagação também é perpendicular a esses campos”, de forma que as ondas eletromagnéticas “não necessitam de um meio material e podem se propagar no vácuo”.

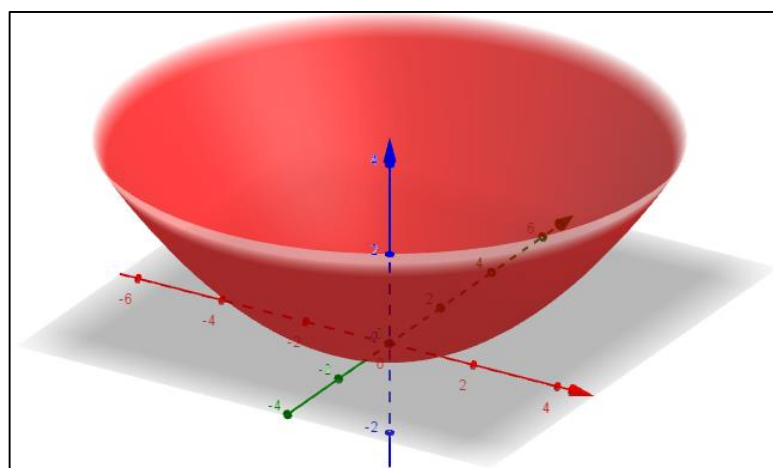
Guimarães, Piqueira, Carron (2014, p. 159) citam as “ondas em cordas, em molas, na superfície e no interior dos líquidos, dos sólidos (terremotos) e dos gases (som se propaga no ar)” como exemplos de ondas mecânicas e “as ondas de rádio, os raios infravermelhos, a luz visível, os raios X” como exemplos de ondas eletromagnéticas.

Assim, sendo as ondas e sinais de satélites um exemplo de ondas eletromagnéticas, tomemo-las por referências de modo a investigar e buscar resultados que justifiquem a utilização de uma antena parabólica no processo de obtenção do sinal eletromagnético, já que os sinais de satélites são captados pela antena e transmitidos ao receptor.

Destaca-se que, existem dois elementos essenciais neste processo: o transmissor e o receptor. O transmissor tem a função de enviar, na forma de ondas eletromagnéticas, sinais para o receptor, e, este finaliza o processo, decodificando o sinal transmitido e convertendo-o em informação, como uma imagem digital, por exemplo.

A superfície de uma antena parabólica tem o formato de um parabolóide, que pode ser denominado parabolóide de revolução, pois é possível obtê-lo rotacionando uma parábola em torno de seu eixo de simetria, Figura 31.

Figura 31 - Superfície parabólica ou parabolóide de revolução



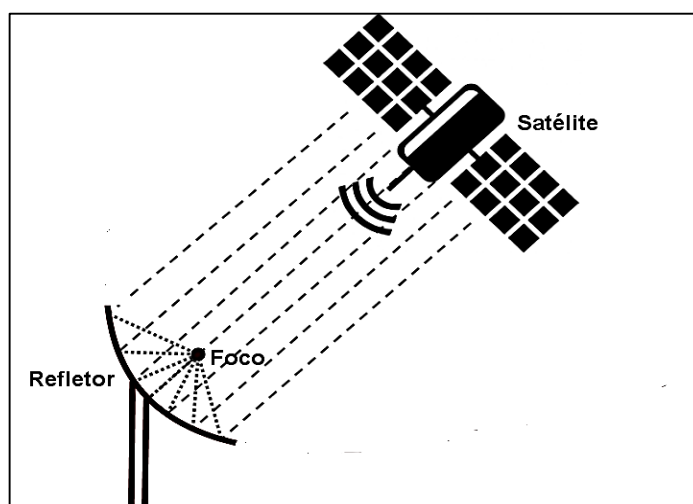
Fonte: Autor

O posicionamento da superfície parabólica é de fundamental importância para a qualidade do sinal a ser captado. Sua direção deve estar apontada para um transmissor de sinais eletromagnéticos, que recebe e transmite os sinais de satélites através de ondas eletromagnéticas.

Ao instalar uma antena parabólica, para que seu funcionamento seja satisfatório, é fundamental uma posição ideal para o alimentador do sistema receptivo que deve estar localizado sobre o eixo de simetria do parabolóide.

O comportamento dos sinais de altas frequências enviados pelos transmissores aos alimentadores dos sistemas receptivos aproxima-se muito do comportamento dos raios de luz. Assim, é possível analisar o comportamento das ondas eletromagnéticas de modo análogo aos raios luminosos, considerando os transmissores como um emissor de luz e a antena parabólica como um refletor de luz, Figura 32.

Figura 32 - Transmissor e refletor de ondas eletromagnéticas



Fonte: Autor

Destaca-se aqui, sem aprofundar, que o comportamento de um raio de luz quando incide sobre uma superfície esférica paralelamente ao eixo principal, reflete passando pelo foco. Em virtude das ondas eletromagnéticas possuírem comportamento análogo ao da luz, é possível reestruturar a propriedade, adequando ao contexto.

Outrossim, os sinais de frequências emitidos na forma de ondas, que incidem paralelamente ao eixo principal de um parabolóide (ou contextualizando, de uma antena parabólica) são refletidos de modo que passam pelo foco da parábola gerada por uma intersecção do parabolóide com um plano que contenha seu vértice e o eixo principal.

Os satélites e transmissores emitem ondas eletromagnéticas a todo momento e em todas as direções. Para analisar o comportamento das ondas que incidem sobre a superfície

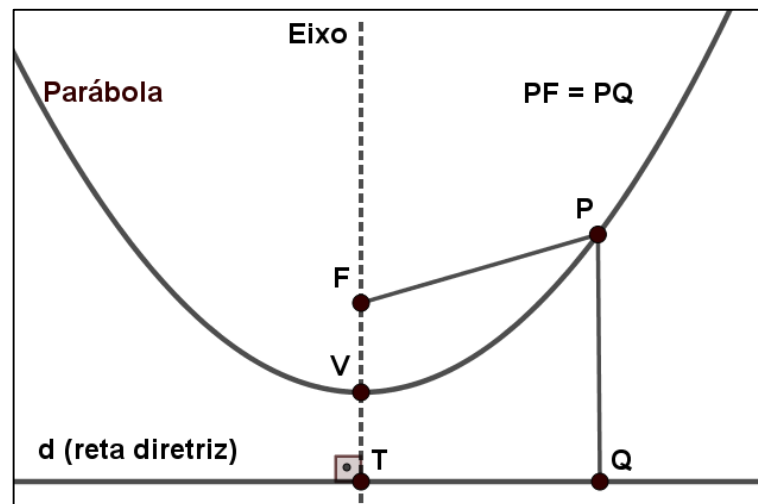
parabólica, por convenção, é preciso considerar que as mesmas são emitidas paralelamente umas às outras, já que o ângulo entre elas é extremamente pequeno, o que facilita o estudo de seu comportamento.

Inicialmente, é necessário identificar os elementos e as principais características da superfície refletora, ou seja, da superfície parabólica. Ao tomar-se um plano que contenha o eixo de simetria (ou eixo de rotação) do parabolóide, tem-se que a intersecção do plano com o parabolóide será uma parábola. Detendo-se assim no estudo sobre uma das parábolas, sendo o comportamento análogo ao tomar um plano qualquer que contenha o eixo de simetria.

Lima (2014, p.112) define a parábola como um lugar geométrico da seguinte forma: “dados um ponto  $F$  e uma reta  $d$  que não o contém, a parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  é o conjunto de pontos do plano que distam igualmente de  $F$  e de  $d$ ”. Ainda, “a reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo da parábola. O único ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a intersecção do eixo com a diretriz”, conforme Figura 33.

Vale ressaltar que a distância de um ponto a uma reta é representada pela menor distância entre o ponto e a reta, cujo valor corresponde ao comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta

Figura 33 - Lugar geométrico da parábola de foco  $F$ , diretriz  $d$  e seus elementos



Fonte: Autor

Segundo Paiva (2009), a distância  $2p = FT$  do foco à reta diretriz é denominada parâmetro da parábola. Como  $V$  é o ponto médio de  $FT$ , então  $FV = VT = p$ . Também, associando uma parábola em um plano de eixos cartesianos pode-se representá-la por uma equação, denominada forma canônica da parábola.

Seendo  $\mathcal{P}$  uma parábola, por definição, um ponto genérico  $P = (x, y)$  pertence à parábola se, e somente se, a distância de  $P$  ao foco  $F$  for igual a distância do ponto  $P$  à reta diretriz  $d$ .

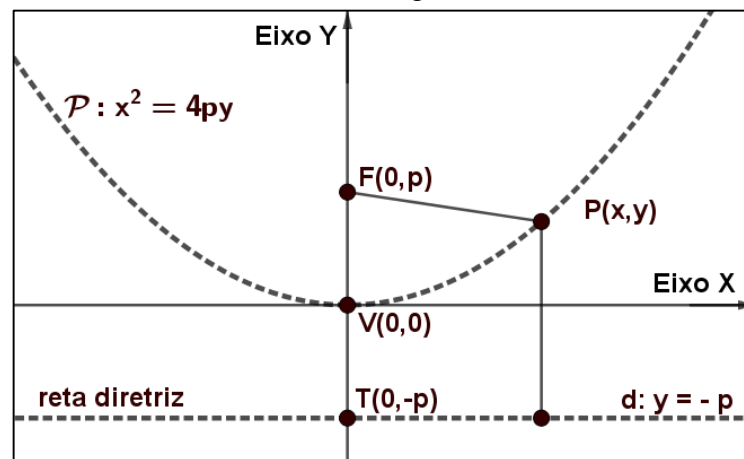
Considerando os casos em que a reta diretriz é paralela aos eixos cartesianos e o vértice da parábola seja a origem, ou seja,  $V = (0,0)$ . Analisam-se dois casos: (i) reta diretriz paralela ao eixo  $OX$ ; e, (ii) reta diretriz paralela ao eixo  $OY$ .

Para o caso (i), existem duas possibilidades:

(i') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice na origem e foco  $F$  acima da reta diretriz, Figura 34: Nesse caso, tem o foco  $F = (0, p)$  e diretriz  $d: y = -p$ . Algebricamente:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(F, P) = d(P, d) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \frac{|0 \cdot x + y \cdot 1 - (-p)|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 4py \qquad \qquad \qquad (5.2.1).
 \end{aligned}$$

Figura 34 - Parábola com vértice na origem e foco  $F$  acima da reta diretriz



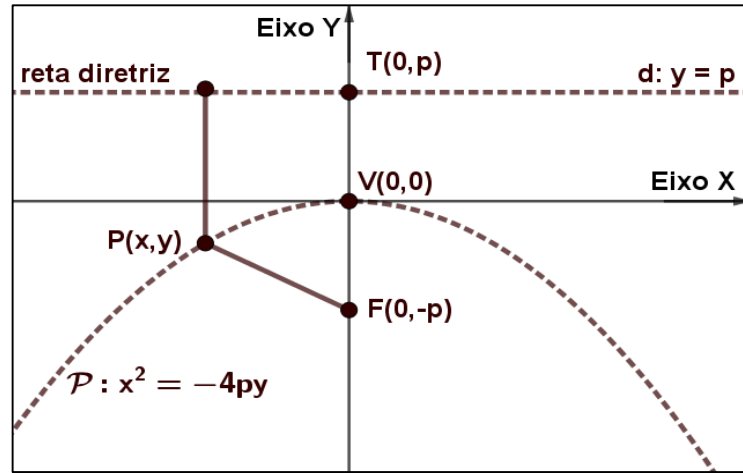
Fonte: Autor

(i'') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice na origem e foco  $F$  abaixo da reta diretriz, Figura 35: Neste caso, tem o foco  $F = (0, -p)$  e diretriz  $d: y = p$ . Algebricamente:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(F, P) = d(P, d) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-p))^2} = \frac{|0 \cdot x + y \cdot 1 - p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y-p| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y+p)^2 = (y-p)^2 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2yp + p^2 &= y^2 - 2yp + p^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= -4py \end{aligned} \quad (5.2.2).$$

Figura 35 - Parábola com vértice na origem e foco  $F$  abaixo da reta diretriz



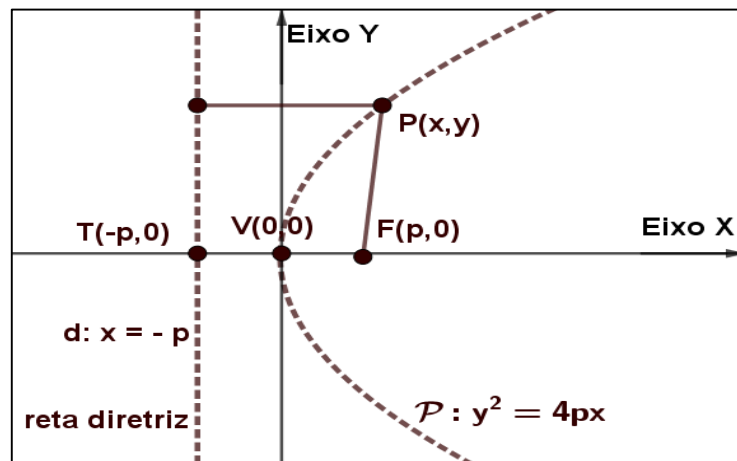
Fonte: Autor

Analogamente, para o caso (ii), tem-se duas possibilidades:

(ii') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice na origem e foco  $F$  à direita da reta diretriz, Figura 36: Neste caso, tem o foco  $F = (p, 0)$  e diretriz  $d: x = -p$ . Algebricamente:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(F, P) = d(P, d) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - (-p)|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 + (x-p)^2 = (x+p)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2xp + p^2 = x^2 + 2xp + p^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4px \end{aligned} \quad (5.2.3).$$

Figura 36 - Parábola com vértice na origem e foco  $F$  à direita da reta diretriz



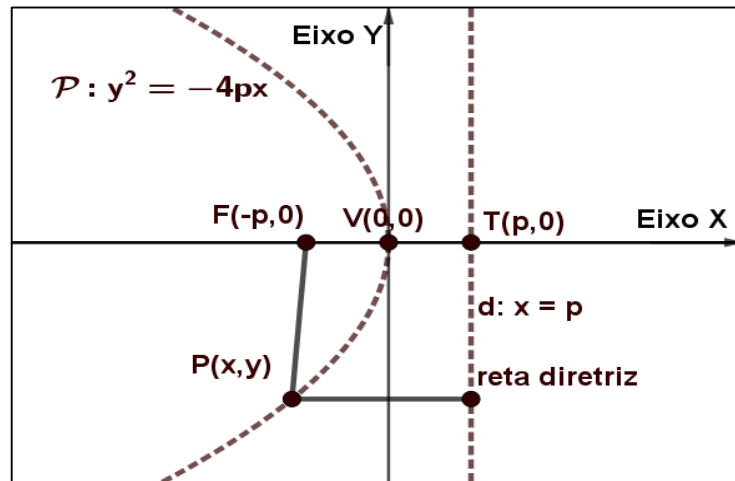
Fonte: Autor



(ii'') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice na origem e foco  $F$  à esquerda da reta diretriz, Figura 37: Neste caso, tem o foco  $F = (-p, 0)$  e diretriz  $d: x = p$ . Algebricamente:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(F, P) = d(P, d) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - 0)^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x + p)^2 + y^2} = |x - p| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y^2 + (x + p)^2 = (x - p)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y^2 + x^2 + 2xp + p^2 = x^2 - 2xp + p^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y^2 = -4px \qquad (5.2.4).
 \end{aligned}$$

Figura 37 - Parábola com vértice na origem e foco  $F$  à esquerda da reta diretriz



Fonte: Autor

Ainda, analogamente ao desenvolvimento anterior, considerando os casos em que a reta diretriz é paralela aos eixos cartesianos e o vértice da parábola seja um ponto qualquer, aqui denota-se  $V = (x_0, y_0)$ .

Analisando um sistema cartesiano  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  obtido a partir da translação do sistema  $OXY$  tal que sua origem seja o ponto  $V = (x_0, y_0) \in OXY$ , o que representa  $\bar{O} = (0,0)$ , e os eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$  com mesmo sentido e direção dos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Assim, dado um ponto  $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$  no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , traz que este ponto pode ser representado por  $P = (x - x_0, y - y_0)$  no sistema  $OXY$ .

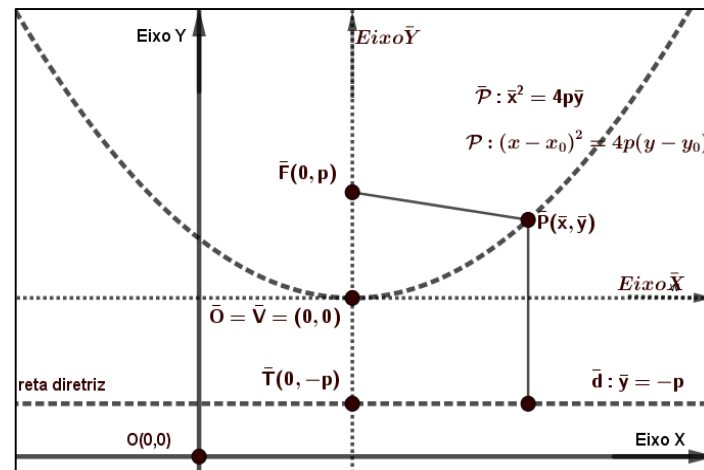
Dessa forma, cabe analisar dois casos: (iii) reta diretriz paralela ao eixo  $OX$ ; e, (iv) reta diretriz paralela ao eixo  $OY$ . Para a análise das equações, toma-se inicialmente o sistema de coordenadas no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ , e, ao final, fazendo as substituições respeitando a definição de que  $\bar{x} = x - x_0$  e  $\bar{y} = y - y_0$ .

Para o caso (iii), existem duas possibilidades:

(iii') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  acima da reta diretriz, Figura 38: no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  em que  $\bar{V} = \bar{O} = (0,0)$ ,  $\bar{F} = (0, p)$  e reta diretriz  $\bar{d}: \bar{y} = -p$ . Algebricamente, e usando-se de (5.2.1), é possível obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(\bar{F}, \bar{P}) = d(\bar{P}, \bar{d}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^2 = 4p\bar{y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \end{aligned} \quad (5.2.5).$$

Figura 38 - Parábola com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  acima da reta diretriz

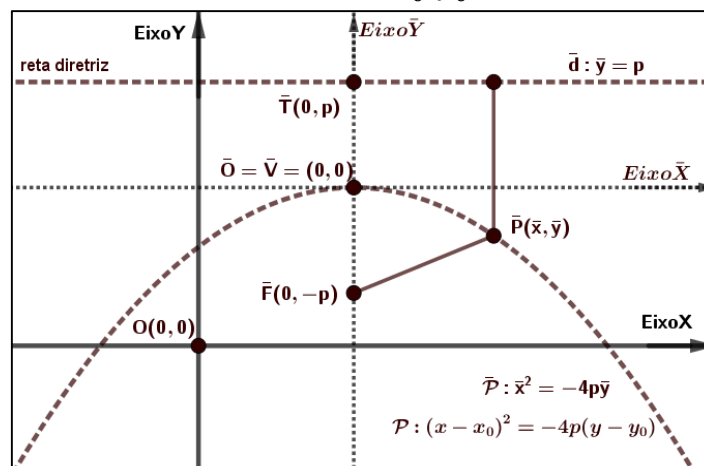


Fonte: Autor

(iii'') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  abaixo da reta diretriz, Figura 39: no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  onde  $\bar{V} = \bar{O} = (0,0)$ ,  $\bar{F} = (0, -p)$  e reta diretriz  $\bar{d}: \bar{y} = p$ . Algebricamente, e usando-se de (5.2.2), obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(\bar{F}, \bar{P}) = d(\bar{P}, \bar{d}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^2 = -4p\bar{y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0) \end{aligned} \quad (5.2.6).$$

Figura 39 - Parábola com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  abaixo da reta diretriz



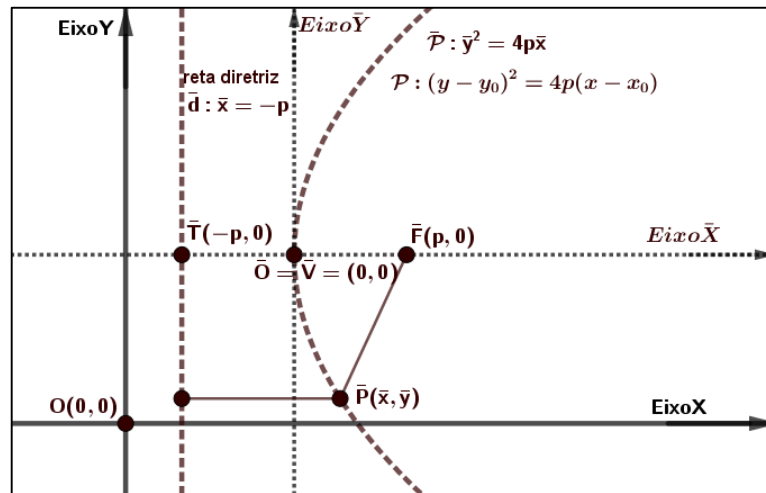
Fonte: Autor

Analogamente, para o caso (iv), há duas possibilidades:

(iv') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  à direita da reta diretriz, Figura 40: no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  em que  $\bar{V} = \bar{O} = (0,0)$ ,  $\bar{F} = (p, 0)$  e reta diretriz  $\bar{d}: \bar{x} = -p$ . Algebricamente, e usando-se da relação (5.2.3), obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(\bar{F}, \bar{P}) = d(\bar{P}, \bar{d}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{y}^2 = 4p\bar{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \end{aligned} \quad (5.2.7).$$

Figura 40 - Parábola com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  à direita da reta diretriz

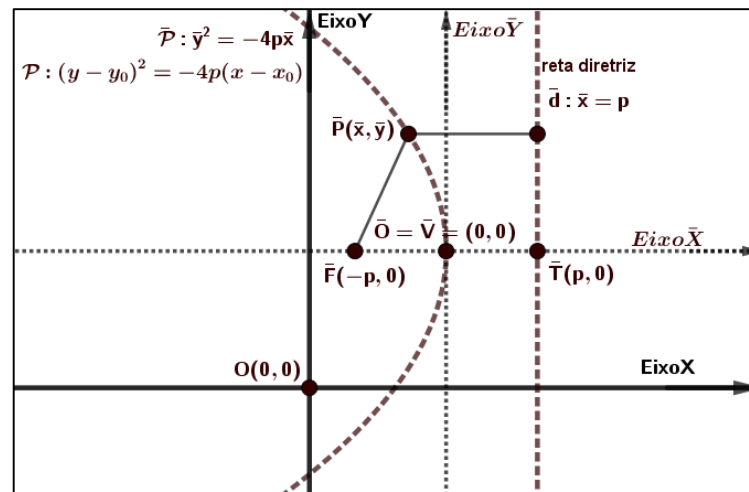


Fonte: Autor

(iv'') Parábola  $\mathcal{P}$  com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  à esquerda da reta diretriz, Figura 41: no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  onde  $\bar{V} = \bar{O} = (0,0)$ ,  $\bar{F} = (-p, 0)$  e reta diretriz  $\bar{d}: \bar{x} = p$ . Algebricamente, e usando-se da relação (5.2.4), obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(\bar{F}, \bar{P}) = d(\bar{P}, \bar{d}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{y}^2 = -4p\bar{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0) \end{aligned} \quad (5.2.8).$$

Figura 41 - Parábola com vértice em  $V = (x_0, y_0)$  e foco  $F$  à esquerda da reta diretriz



Fonte: Autor

No link <https://ggbm.at/ZDnDTRjS> encontra-se disponível uma construção que permite manipular os valores para o foco e a reta diretriz, facilitando a análise do comportamento das parábolas dos itens (i) e (iii) e suas subdivisões.

No link <https://ggbm.at/tE6eygQg> é apresentado um material que permite a manipulação dos valores para o foco e reta diretriz, facilitando a análise do comportamento das parábolas dos itens (ii) e (iv) e suas subdivisões.

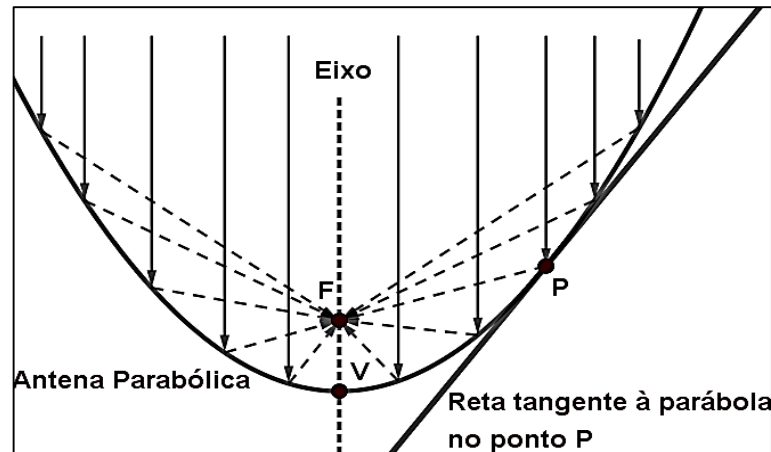
Existem casos em que a concavidade da parábola não se dá nem para baixo ou para cima, nem para esquerda ou direita. Caso isso ocorra, efetua-se uma rotação do eixo cartesiano  $OXY$ , podendo ter (ou não) sofrido uma translação. Porém, para esta abordagem, faz-se necessário o trabalho com autovalores e autovetores, conteúdo abordado no ensino superior, de acordo com a escolha do curso e necessidade de aplicações do mesmo na prática profissional. Dessa forma, abordou-se aqui apenas os casos em que o eixo principal da parábola era paralelo a um dos eixos cartesianos:  $OX$  ou  $OY$ .

No link <https://ggbm.at/S3ZmATPR> há uma animação produzida com o GeoGebra no sistema tridimensional, que mostra como obter um parabolóide a partir de uma parábola girando em torno de um eixo, sendo este a reta focal. Ainda, é possível fazer com que a parábola sofra rotação e/ou translação em torno do eixo  $OXYZ$ , tendo como consequência a alteração do sentido de abertura da parábola, e, conseqüentemente, do parabolóide.

As propriedades de incidência e reflexão de raios, incluem que quando um raio incide paralelamente ao eixo principal, reflete passando pelo foco. Destaca-se que, existem inúmeros raios que incidem sobre a superfície refletora da antena parabólica, considera-se que incidam paralelamente uns aos outros. A Figura 42 representa um conjunto de raios incidentes

(apresentados em linhas cheias) e suas reflexões (representado através de pontilhado), que refletem sobre o foco da parábola descrita por um corte da antena parabólica.

Figura 42 - Incidência e reflexão dos raios sobre a antena parabólica, e reta tangente à parábola



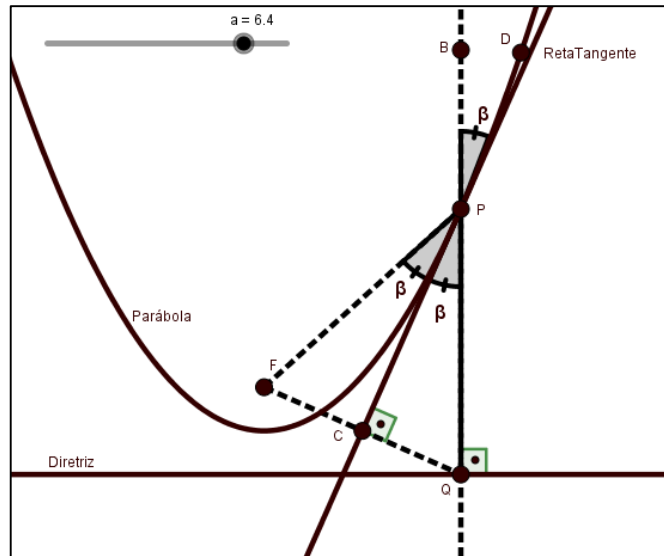
Fonte: Autor

No link <https://ggbm.at/XSYcSaXY> encontra-se disponível uma animação que apresenta a incidência e reflexão dos raios sobre uma secção transversal do parabolóide, o que vem ao encontro das justificativas para o funcionamento da antena parabólica.

De acordo com Lima (2013), o ângulo formado entre a parábola e o raio incidente (*r. i.*) ou o raio refletido (*r. r.*), é dado pelo menor ângulo entre o respectivo raio que incide sobre a antena parabólica no ponto *P* ou que reflete do ponto *P*, e a reta tangente à parábola, também no ponto *P*, sendo que “a tangente a uma parábola no ponto *P* é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto e *P* é tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado da reta”. (LIMA, 2013, p.122).

Lima (2013, p.122) mostra que “se a parábola é o gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sua tangente no ponto  $P = (x_0, y_0)$ , onde  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ , é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a  $2ax_0 + b$ ”. Esta inclinação da reta tangente ao gráfico da parábola no ponto  $P = (x_0, y_0)$  também pode ser obtida a partir da derivada da função neste ponto, ou seja,  $f'(x_0)$ .

Sejam *F* o foco da parábola de equação dada pela função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , *P* o ponto no qual a reta tangente intersecta a parábola, *Q* o pé da perpendicular baixada de *P* sobre a reta diretriz e *C* o ponto de interseção da reta tangente à parábola no ponto *P* e o segmento *FQ*, conforme Figura 43.

Figura 43 - Reta tangente à parábola no ponto  $P$ 

Fonte: Autor

Sabendo que a parábola que representa a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , tem, no ponto  $P = (x, y)$ , uma reta tangente com inclinação  $m_1$  definida pela derivada da função  $f(x)$ ,

$$m_1 = f'(x) = 2ax + b \quad (5.2.9),$$

determina-se a inclinação da reta que passa pelos pontos  $F$  e  $Q$ , sendo  $F$  o foco da parábola e  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta diretriz.

Lima (2013, p. 124) define as coordenadas do foco  $F$  da parábola e do ponto  $Q$  sobre a reta diretriz como “[...]  $F = (m, k + \frac{1}{4a})$  e  $Q = (x, k - \frac{1}{4a})$ , onde  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k =$  ordenada do vértice da parábola”.

Conhecidos dois pontos quaisquer, a inclinação da reta que contém esses pontos pode ser dada pela fração cujo numerador representa a diferença dos valores das coordenadas  $y$  dos pontos e o denominador a diferença dos respectivos valores das coordenadas  $x$  dos dois pontos. Assim, a inclinação da reta que passa pelos pontos  $F = (m, k + \frac{1}{4a})$  e  $Q = (x, k - \frac{1}{4a})$  é:

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k - \frac{1}{4a} - (k + \frac{1}{4a})}{x - m} = \frac{-2(\frac{1}{4a})}{x - (-\frac{b}{2a})} = \frac{-\frac{1}{2a}}{\frac{2ax + b}{2a}} = -\frac{1}{2ax + b} \quad (5.2.10).$$

Portanto, conforme dados da Figura 43, o segmento de reta  $FQ$  é perpendicular à reta tangente ao gráfico da parábola no ponto  $P$ , ou seja,  $PC \perp FQ$ , pois os coeficientes angulares  $m_1$  (5.2.9) e  $m_2$  (5.2.10) das retas que contém os segmentos  $PC$  e  $FQ$ , respectivamente, são tais que  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

Assim,  $P\hat{C}F \equiv P\hat{C}Q \equiv 90^\circ$ . Além disso, como  $FP \equiv QP$  o triângulo  $FPQ$  é isósceles de base  $FQ$  o que permite afirmar que  $P\hat{Q}F \equiv P\hat{F}Q$ . Logo, por *AA*, tem-se que  $\Delta PFC \equiv \Delta PQC$ , o que implica dizer que  $F\hat{P}C \equiv Q\hat{P}C \equiv \beta$ .

Da mesma forma, se considerar a incidência de um raio sobre um ponto  $P$  da parábola, paralelamente ao eixo principal, então, conforme Figura 43, temos que  $B\hat{P}D \equiv Q\hat{P}C \equiv \beta$ , pois são opostos pelo vértice, o que implica dizer que  $B\hat{P}D \equiv Q\hat{P}C \equiv F\hat{P}C \equiv \beta \Rightarrow B\hat{P}D \equiv F\hat{P}C$ .

Conforme já citado, se um raio incidir sobre uma superfície parabólica com um ângulo de incidência ( $\hat{i}$ ), refletirá com um ângulo de reflexão ( $\hat{r}$ ), tal que  $\hat{i} = \hat{r}$ , semelhantemente ao que ocorre na situação-problema descrita, já que o comportamento da luz é semelhante ao dos sinais de satélites. No entanto, por outra propriedade da incidência e reflexão dos raios apresenta que, todo raio que incide sobre uma superfície parabólica paralelamente ao eixo principal, reflete passando pelo foco.

Além disso, para que o sinal produzido por uma antena parabólica e seus componentes seja de boa qualidade é necessário que:

- 1) a posição da antena parabólica deve ser tal que, os sinais emitidos pelos transmissores possam incidir de modo paralelo ao eixo principal/central (sendo este imaginário), ou seja, deve estar apontada para a direção do satélite;
- 2) o receptor deve estar posicionado sobre o foco da antena parabólica, que se encontra sobre o eixo principal;
- 3) a superfície da antena parabólica não pode conter deformações, pois caso existam, dificultam a reflexão dos raios, e, quanto maior for a concentração de raios refletidos sobre o foco, melhor será a qualidade do sinal.

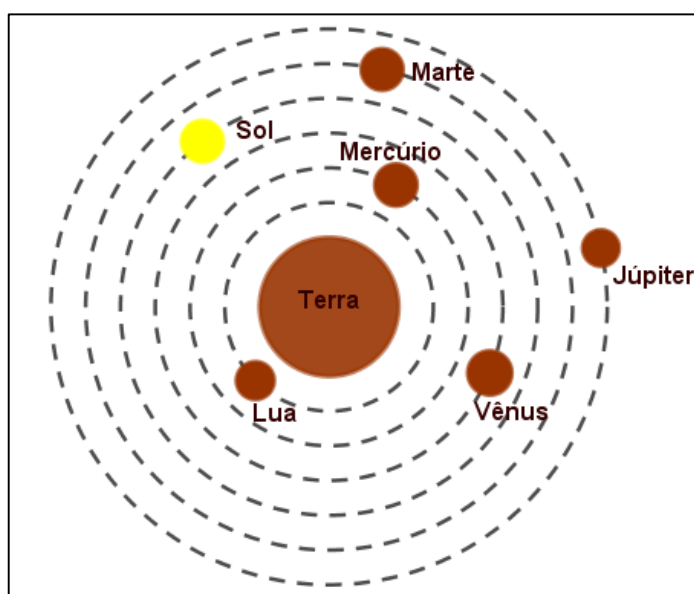
### 5.3 LEIS DE KEPLER E A ELIPSE: LUGAR GEOMÉTRICO DA TRAJETÓRIA DESCRITA PELOS PLANETAS EM TORNO DO SOL

Por muito tempo, o modelo planetário do geocentrismo, aperfeiçoado por Cláudio Ptolomeu (90 -168) e apresentado por Aristóteles de Estagira (384 a.C. – 322 a. C.), foi tomado

como referência para justificar a movimentação dos astros. O geocentrismo (*geo* = Terra) considerava que a Terra estava fixa no centro do Universo e todos os outros astros giravam em torno dela, inclusive o Sol.

Ademais, defendia-se que a trajetória descrita pelo movimento dos astros em torno da Terra era na forma de um círculo, motivo que justificava o fato da Terra ser considerada o centro do Universo, Figura 44.

Figura 44 - Modelo simplificado do sistema planetário geocêntrico



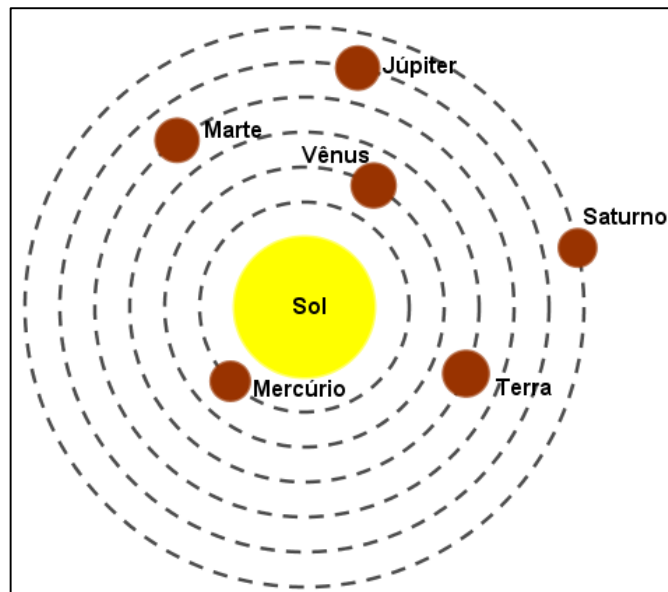
Fonte: Autor

Vale destacar que, nos diversos estudos realizados acerca do assunto, alguns cientistas consideravam a Terra em repouso absoluto. Já outros consideravam que a Terra, mesmo sendo o centro do universo, realizava um movimento em torno de seu próprio eixo, denominado movimento de rotação.

A teoria do geocentrismo passou a sofrer algumas contradições, e “somente com o Renascimento (a partir do século XV), com bases mais racionais, se propôs o modelo heliocêntrico – o Sol como centro do sistema planetário” (GUIMARÃES, PIQUEIRA, CARRON, 2014, p. 235). Nicolau Copérnico (1473 – 1543), na perspectiva do heliocentrismo, também chegou a afirmar que os planetas descreviam trajetórias circulares em torno do Sol, conforme Figura 45, porém a ideia não foi muito bem aceita pelos cientistas da época, que continuaram realizando investigações sobre o assunto.



Figura 45 - Modelo simplificado do sistema planetário heliocêntrico de Ptolomeu



Fonte: Autor

Após um longo tempo de estudos, Johannes Kepler propôs três leis que descrevem as principais características da movimentação dos planetas ao redor do Sol, as quais são conhecidas e aceitas (pelo menos até o presente momento) como as “leis de Kepler”. As teorias Newtonianas, dentre elas a da gravitação universal, auxiliaram na compreensão e reforçaram os conceitos já abordados por Kepler, até então.

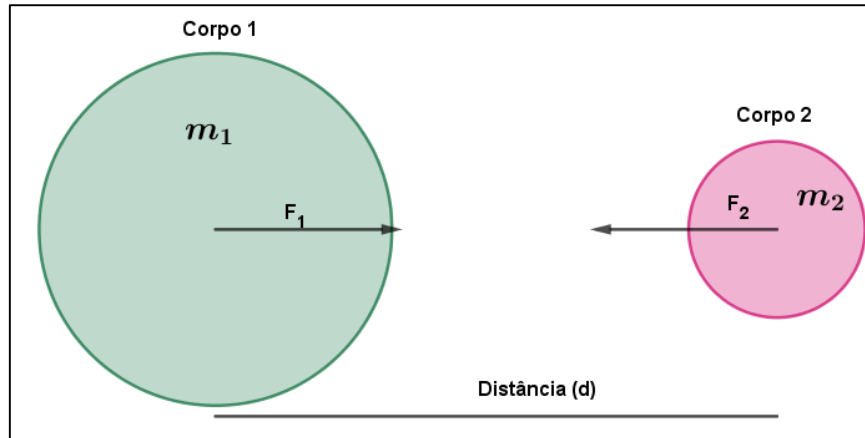
A teoria newtoniana da gravitação universal relaciona o comportamento entre dois corpos quaisquer do espaço, afirmando que “matéria atrai matéria na razão direta do produto entre suas massas e na razão inversa do quadrado da distância que as separa” (GUIMARÃES, PIQUEIRA, CARRON, 2014, p. 245). Pode ser representada algebricamente por:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \quad (5.3.1),$$

sendo  $F$  a força de atração entre os corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  separados por uma distância  $d$ , e  $G$  uma constante de gravitação universal, dada por  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ .

Ainda, de acordo com Moro (2015, p. 09), reforçando a lei da gravitação universal, afirma que “todos os objetos no Universo atraem todos os outros objetos numa força direcionada ao longo da linha que passa pelos centros dos dois objetos e que é proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois objetos”, conforme Figura 46.

Figura 46 - Representação das forças existentes entre dois corpos no espaço



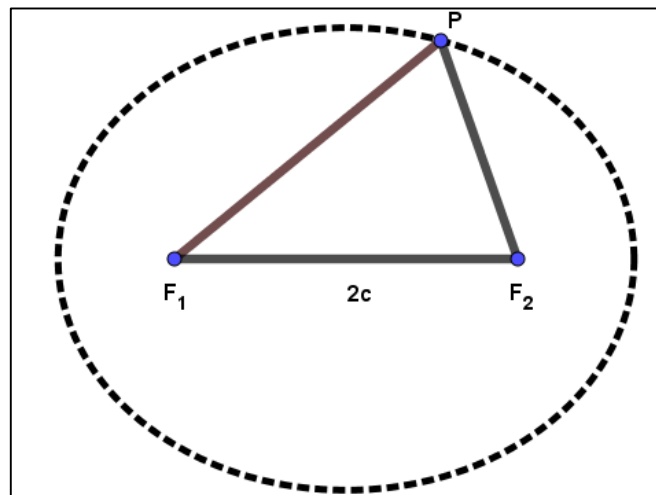
Fonte: Autor

A primeira lei de Kepler, também conhecida como lei das órbitas, define que “todos os planetas do sistema solar, incluindo a Terra, giram em torno do Sol em órbitas elípticas. Em cada uma dessas órbitas, o Sol ocupa um dos focos da elipse” (GUIMARÃES, PIQUEIRA, CARRON, 2014, p. 237).

Inicialmente, para melhor compreender o fenômeno, é importante definir e caracterizar matematicamente uma elipse. Para isso, serão pautadas as descrições propostas por Paiva (2009).

Fixados dois pontos,  $F_1$  e  $F_2$ , de um plano  $\alpha$ , tal que  $\overline{F_1F_2} = 2c$ , com  $c > 0$ , chama-se elipse o conjunto dos pontos  $P$  do plano  $\alpha$  cuja soma das distâncias  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$  é uma constante  $2a$ , com  $2a > 2c$ . Assim,  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ . Note que, como  $c > 0 \Rightarrow 2c > 0 \Rightarrow 2a > 2c > 0 \Rightarrow a > 0$ , Figura 47.

Figura 47 - Esboço de uma elipse obtida a partir de três pontos do plano

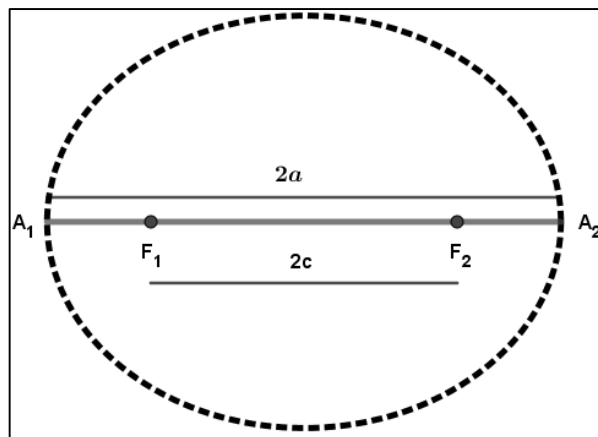


Fonte: Autor

Seguem algumas especificações:

- os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse. A medida  $2c$  é a distância focal (distância entre os dois focos), sendo  $c$  a semidistância focal;
- qualquer segmento de reta cujos extremos são pontos da elipse é chamado corda da elipse. A corda  $\overline{A_1A_2}$  que passa pelos focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamada eixo maior (ou eixo principal) da elipse e sua medida é igual a  $2a$ , Figura 48;

Figura 48 - Eixo maior de uma elipse

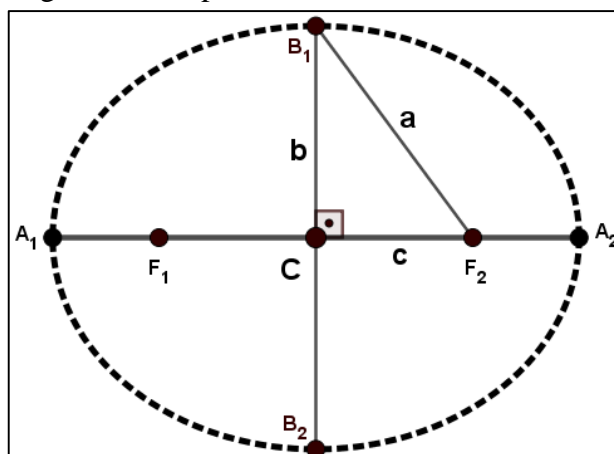


Fonte: Autor

Ainda:

- o ponto médio  $C$  do eixo maior  $\overline{A_1A_2}$ , que também é ponto médio do segmento  $\overline{F_1F_2}$ , é chamado de centro da elipse, sendo  $\overline{A_1C}$  e  $\overline{A_2C}$  os semieixos maiores;
- a corda  $\overline{B_1B_2}$ , que passa por  $C$  e é perpendicular ao eixo maior, é o eixo menor da elipse, sendo os segmentos  $\overline{B_1C}$  e  $\overline{B_2C}$  os semieixos menores. Esses semieixos tem medidas iguais, que serão indicadas por  $b$ , isto é,  $\overline{B_1C} = \overline{B_2C} = b$ , Figura 49;

Figura 49 - Elipse com todos os seus elementos



Fonte: Autor

• na Figura 49, note que há congruência de triângulos:  $\Delta B_1 F_1 C \equiv \Delta B_2 F_1 C \equiv \Delta B_1 F_2 C \equiv \Delta B_2 F_2 C$  por *LAL*, o que implica  $\overline{B_1 F_1} = \overline{B_1 F_2} = \overline{B_2 F_1} = \overline{B_2 F_2}$  (5.3.2). Ainda, pela definição de elipse que  $\overline{B_1 F_1} + \overline{B_1 F_2} = \overline{B_2 F_1} + \overline{B_2 F_2} = 2a$  (5.3.3), então, por (5.3.2) e (5.3.3), tem-se que  $\overline{B_1 F_1} = \overline{B_1 F_2} = \overline{B_2 F_1} = \overline{B_2 F_2} = a$ ;

• note que, o  $\Delta B_1 F_2 C$  é retângulo em  $C$ . Com isso, pelo Teorema de Pitágoras, mostra-se que  $\overline{B_1 F_2}^2 = \overline{B_1 C}^2 + \overline{F_2 C}^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ ;

• os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  são denominados vértices da elipse;

• o número  $e = \frac{c}{a}$  é chamado de excentricidade da elipse. Note que,  $0^\circ < \widehat{B_1 F_2 C} < 90^\circ \Rightarrow 0 < \cos(\widehat{B_1 F_2 C}) = \frac{c}{a} = e < 1 \Rightarrow 0 < e < 1$ . Isso permite concluir que, se a excentricidade for um valor numérico próximo a zero (pela direita), então a elipse se assemelha ao formato de uma circunferência, e, se a excentricidade for próxima a 1 (pela esquerda), a elipse será mais achatada.

A partir dos dados característicos da elipse, obtém-se as equações da elipse de acordo com sua posição em relação ao eixo  $OXY$ .

1º caso) Elipse  $\mathcal{E}$  centrada na origem e eixo maior contido no eixo  $OX$ : Nesse caso, terá as seguintes características:  $C = (0,0)$ ;  $F_1 = (-c, 0)$ ;  $F_2 = (c, 0)$ ;  $A_1 = (-a, 0)$ ;  $A_2 = (a, 0)$ ;  $B_1 = (0, b)$  e  $B_2 = (0, -b)$  de modo que  $a > c > 0$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Assim:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 &\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\Leftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
 &\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
 &\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
 &\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.3.4}.
 \end{aligned}$$

2º caso) Elipse  $\mathcal{E}$  centrada na origem e eixo maior contido no eixo  $OY$ : Nesse caso, terá as seguintes características:  $C = (0,0)$ ;  $F_1 = (0, -c)$ ;  $F_2 = (0, c)$ ;  $A_1 = (0, -a)$ ;  $A_2 = (0, a)$ ;  $B_1 = (b, 0)$  e  $B_2 = (-b, 0)$  de modo que  $a > c > 0$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Assim, analogamente a demonstração anterior do 1º caso:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + c)^2} + \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \end{aligned} \quad (5.3.5).$$

3º caso) Elipse  $\mathcal{E}$  centrada no ponto  $C = (m, n)$  e eixo maior paralelo ao eixo  $OX$ : Nesse caso, terá as seguintes características:  $C = (m, n)$ ;  $F_1 = (m - c, n)$ ;  $F_2 = (m + c, n)$ ;  $A_1 = (m - a, n)$ ;  $A_2 = (m + a, n)$ ;  $B_1 = (m, n - b)$  e  $B_2 = (m, n + b)$  de modo que  $a > c > 0$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Assim, analogamente aos casos anteriores:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - (m - c))^2 + (y - n)^2} + \sqrt{(x - (m + c))^2 + (y - n)^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1 \end{aligned} \quad (5.3.6).$$

4º caso) Elipse  $\mathcal{E}$  centrada no ponto  $C = (m, n)$  e eixo maior paralelo ao eixo  $OY$ : Nesse caso, terá as seguintes características:  $C = (m, n)$ ;  $F_1 = (m, n - c)$ ;  $F_2 = (m, n + c)$ ;  $A_1 = (m, n - a)$ ;  $A_2 = (m, n + a)$ ;  $B_1 = (m - b, n)$  e  $B_2 = (m + b, n)$  de modo que  $a > c > 0$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Assim, analogamente aos casos anteriores:

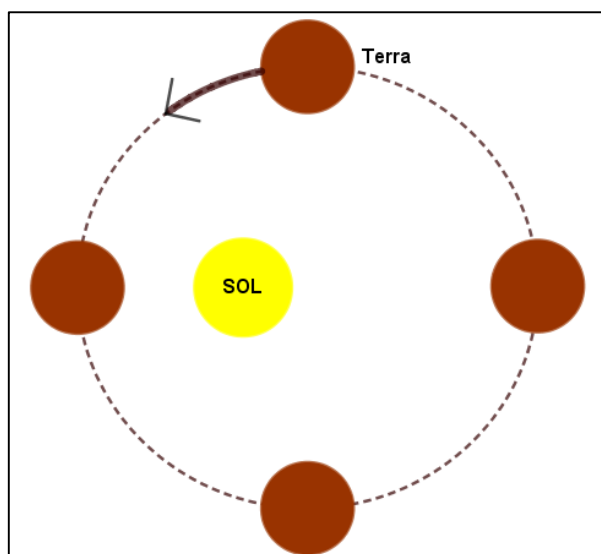
$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - m)^2 + (y - (n - c))^2} + \sqrt{(x - m)^2 + (y - (n + c))^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1 \end{aligned} \quad (5.3.7).$$

Nos *links* <https://ggbm.at/ujptms42> e <https://ggbm.at/wjsejwd8> encontram-se disponíveis dois arquivos que permitem manipular a posição da elipse em relação ao plano

$OXY$ , mantendo sempre o eixo focal paralelo aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Destaca-se também que os casos  $1^\circ - 3^\circ$ , e,  $2^\circ - 4^\circ$ , podem ser visualizados simultaneamente em um mesmo arquivo, respectivamente aos *links* citados.

Com as informações anteriores, os conceitos da primeira Lei de Kepler e utilizando-se do GeoGebra, é possível simular o movimento da Terra em torno do Sol, Figura 50.

Figura 50 - Simulação do movimento da Terra em torno do Sol



Fonte: Autor

Enfatiza-se também que, o tempo necessário para um planeta realizar uma volta completa em torno do Sol caracteriza um ano sideral. No caso do planeta Terra, por exemplo, este período corresponde a aproximadamente 365 dias e 6 horas. Como o ano é caracterizado com 365 dias, existem os anos bissextos a cada 4 anos, suprindo as  $6 \cdot 4 = 24$  horas excedentes, e, o dia 29 de fevereiro, que existe de 4 em 4 anos, supre os tempos excedentes das seis horas anuais.

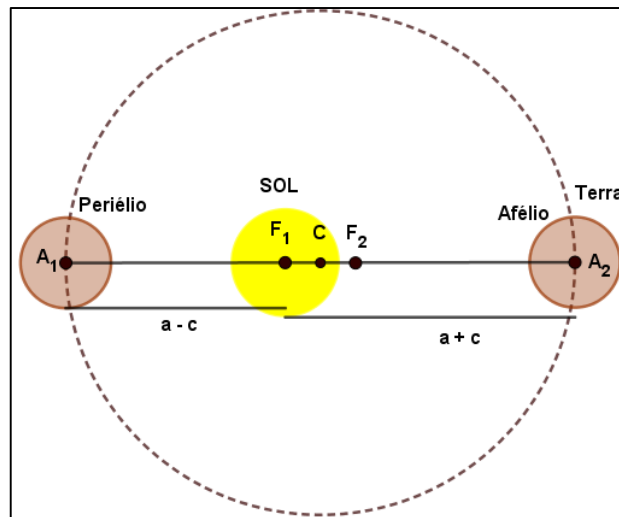
É denominado translação o movimento descrito pelo planeta em torno do Sol, que tem as estações do ano como uma das consequências. Vale ressaltar que, as estações do ano só existem em virtude do ângulo de inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao plano orbital, que é de aproximadamente  $23,5^\circ$ . Caso não existisse tal inclinação, em virtude da pequena excentricidade da trajetória elíptica desenvolvida pela Terra, as estações do ano não existiriam. A caracterização das estações do ano é dada de acordo com a posição que o planeta se encontra na trajetória elíptica desenvolvida em torno do Sol e do hemisfério que o ponto de referência encontra-se localizado, sobre o planeta.

Pelos conceitos de elipse e da 1ª Lei de Kepler já abordados, como o Sol localiza-se fixo em um dos focos da elipse, então a distância da Terra ao Sol varia de acordo com a posição na

trajetória. Existe um ponto no qual a Terra encontra-se o mais distante possível do Sol e outro no qual está mais próxima possível do Sol, que são denominados de afélio e periélio, respectivamente. O periélio ocorre, aproximadamente, nos dias 03 ou 04 de janeiro e o afélio nos dias 03 ou 04 de julho.

Considerando que o Sol encontra-se sobre o foco  $F_1$ , estando entre o centro  $C$  e o vértice  $A_1$ , o periélio ocorre no instante em que a Terra está sobre o vértice  $A_1$  do eixo maior, e, o afélio ocorre no momento em que a Terra encontra-se na posição do vértice  $A_2$  sobre o eixo maior, Figura 51.

Figura 51 - Posição da Terra quando ocorrem os fenômenos afélio e periélio



Fonte: Autor

Quando o planeta está na posição  $A_1$  (periélio), a distância da Terra ao Sol é dada por  $a - c$ , e, quando o planeta encontra-se na posição  $A_2$  (afélio), a distância da Terra ao Sol é dada por  $a + c$ .

Estudos indicam que a distância média da Terra ao Sol é de  $150.000.000 \text{ km}$  (quilômetros), sendo  $147.098.290 \text{ km}$  no periélio e  $152.098.232 \text{ km}$  no afélio<sup>5</sup>. Considerando esses dados, tem-se:

$$\begin{cases} a + c = 153.098.232 \\ a - c = 147.098.290 \end{cases} \quad (5.3.8).$$

Resolvendo o sistema (5.3.8) obtém-se que  $a = 150.098.261$  e  $c = 2.999.971$ . Como  $b > 0$  e  $b = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$ , então  $b \cong 150.068.278,22435$ . Note que,  $a, b$  e  $c$  representam,

<sup>5</sup> Disponível em: [https://www.suapesquisa.com/astronomia/distancia\\_sol\\_planetas.htm](https://www.suapesquisa.com/astronomia/distancia_sol_planetas.htm). Acesso em: 03 mar. 2018.

respectivamente, a distância do centro ao vértice focal da elipse, a distância do centro ao vértice não focal da elipse e a distância do centro ao foco da elipse, que possuem o quilômetro como unidade de medida.

Ainda, analisando a excentricidade da elipse que descreve o movimento da Terra em torno do Sol tem-se  $e = \frac{c}{a} = \frac{2.999.971}{150.068.261} = 0,0199907094$ , sendo um valor próximo de zero (pela direita), o que caracteriza que a elipse tem um formato que se aproxima de uma circunferência.

Considere-se as proporções e a diferença:

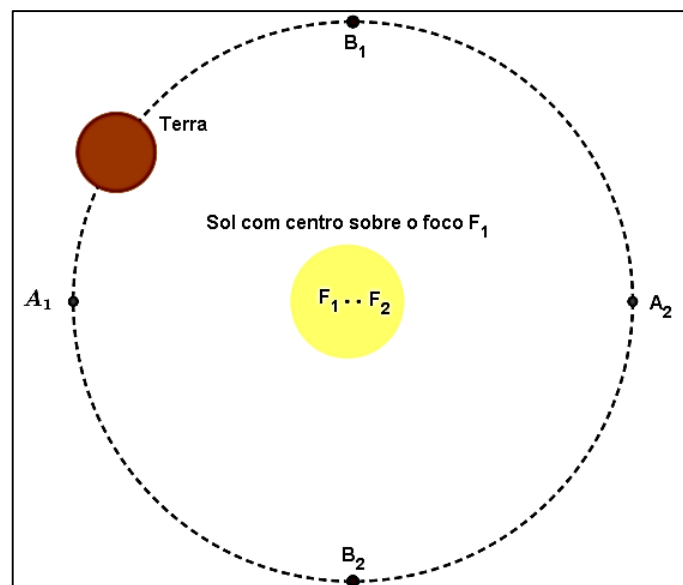
$$\frac{a}{c} = \frac{150.098.261}{2.999.971} = 50,0332373213 \Rightarrow a \cong 50,0332373213c \quad (5.3.9),$$

$$\frac{b}{c} = \frac{150.068.278,22435}{2.999.971} = 50,0232429661 \Rightarrow b \cong 50,0232429661c \quad (5.3.10),$$

$$a - b = 150.098.261 - 150.068.278,22435 = 29.982,77565 \neq 0 \quad (5.3.11).$$

Na Figura 52 apresenta-se um esboço da trajetória descrita pela translação da Terra em torno do Sol, utilizando a proporcionalidade dos valores aproximados e apresentados nas relações (5.3.9), (5.3.10) e (5.3.11).

Figura 52 - Translação da Terra utilizando valores que se aproximam dos dados reais



Fonte: Autor



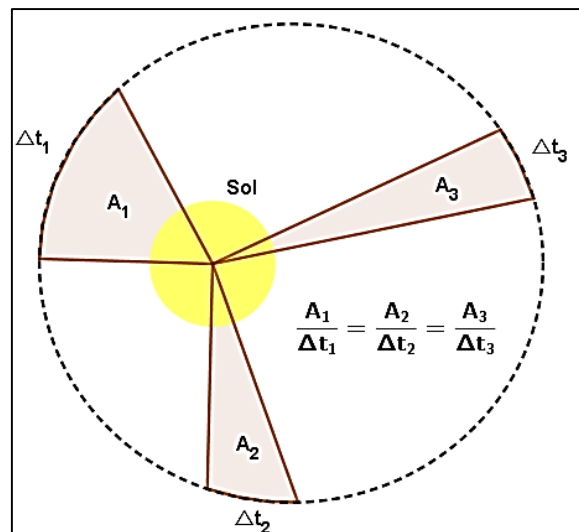
Note que, na Figura 52, ao usar os dados numéricos que se aproximam da realidade, a elipse aproxima-se do formato de um círculo. Mas, de (5.3.9) e (5.3.10) tem-se  $a \neq c$  e  $b \neq c$ , e, de (5.3.11) tem-se que  $a \neq b$ , o que não caracteriza um círculo. Vale ressaltar que, os valores reais foram utilizados em quilômetros.

No *link* <https://ggbm.at/GDgqcBwF> encontra-se disponível uma animação que apresenta a trajetória elíptica descrita pelo planeta Terra em torno do Sol, permitindo manipular através de um controle deslizante, a posição da Terra sobre a elipse. Destaca-se que as estações do ano apresentadas referem-se ao hemisfério sul do planeta.

Ainda, a segunda lei de Kepler, conhecida como Lei das Áreas, enuncia que “a área descrita pelo raio vetor de um planeta (linha imaginária que liga o planeta ao Sol) é diretamente proporcional ao tempo gasto para descrevê-la” (ARTUSO, WRUBLEWSKI, 2013, p. 171). Em outras palavras, Serway e Jewett (2011, p. 374) enunciam a segunda lei de Kepler afirmando que “o raio vetor traçado do Sol até qualquer planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempos iguais”.

Utilizando o GeoGebra, na Figura 53, busca-se representar graficamente o que a lei enuncia.

Figura 53 - Representação gráfica da segunda lei de Kepler



Fonte: Autor

De modo geral, pelas definições da segunda lei de Kepler, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \frac{A_3}{\Delta t_3} = \dots = \frac{A_n}{\Delta t_n}, \forall n \in \mathbb{N} / n > 1 \quad (5.3.12).$$

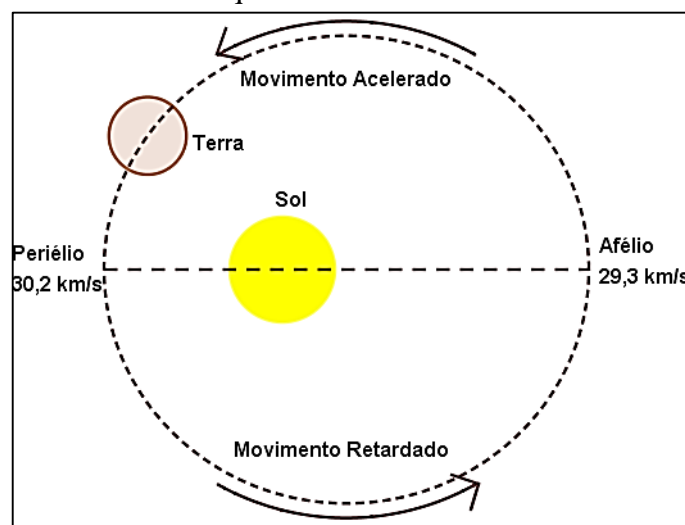
Em (5.3.12), tomando  $\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2}$  e considerando  $A_1 = A_2$ , implica  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ . Generalizando, se  $A_i = A_j$  então  $\Delta t_i = \Delta t_j$  com  $i, j \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, ao considerar a Figura 53, e, sendo  $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$  os deslocamentos do planeta sobre a trajetória elíptica descrevendo as áreas  $A_1, A_2, A_3$ , respectivamente, obtém-se  $\Delta S_1 > \Delta S_2 > \Delta S_3$ .

Se  $V_i = \frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$  a velocidade média de translação do planeta ao percorrer o deslocamento  $\Delta S_i$  no intervalo de tempo  $\Delta t_i$ , descrita a área  $A_i$ , com  $i \in \mathbb{N}$ . Da definição, tomadas áreas iguais, tem-se intervalos de tempos iguais e deslocamentos diferentes. Como os intervalos de tempos são iguais, adotemos  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t > 0$ . Ao dividir ambos os membros da inequação  $\Delta S_1 > \Delta S_2 > \Delta S_3$  por  $\Delta t$  temos  $\frac{\Delta S_1}{\Delta t} > \frac{\Delta S_2}{\Delta t} > \frac{\Delta S_3}{\Delta t} \Rightarrow V_1 > V_2 > V_3$ .

Assim, quanto mais próximo do Sol o planeta estiver, maior será sua velocidade ao descrever o movimento de translação. Dessa forma, conclui-se que o planeta atingirá velocidade máxima quando estiver caracterizando o fenômeno periélio que vale, aproximadamente,  $30,2 \text{ km/s}$  e, terá velocidade mínima no momento que caracteriza o fenômeno afélio, sendo essa igual a  $29,3 \text{ km/s}$ .

Essa justificativa vem ao encontro do que enuncia a lei de gravitação universal de Newton, quantificada em (5.3.1), afirmando que a força de atração entre os corpos é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre eles, no caso, quanto maior a distância do planeta ao Sol, menor será a velocidade de translação, e vice-versa, conforme Figura 54.

Figura 54 - Classificação do movimento do planeta de acordo com o espaço da trajetória no qual ele se encontra



Fonte: Autor

Portanto, pode-se classificar o movimento dos planetas em torno do Sol de acordo com a posição que eles ocupam. Considerando  $P$  e  $Q$  os pontos da trajetória elíptica do planeta em torno do Sol que representam o periélio e o afélio, respectivamente, classifica-se o movimento em duas etapas:

i) Quando o planeta desloca-se de  $P$  para  $Q$ : Nesse caso, o planeta está cada vez distanciando-se mais do Sol, o que tem como consequência a diminuição na velocidade de translação, ou seja, o movimento é classificado como retardado ou retrógrado;

ii) Quando o planeta desloca-se de  $Q$  para  $P$ : Nesse caso, o planeta descreve uma trajetória de modo que sua distância ao Sol está cada vez menor, acarretando o aumento de sua velocidade de translação, e, com isso, classifica-se o movimento em acelerado.

#### 5.4 CONTRIBUIÇÕES E POTENCIALIDADES DAS PROPOSTAS METODOLÓGICAS

Os desenvolvimentos das propostas metodológicas aqui apresentadas possuem como principais contribuições: proposta 01) Caracterização das imagens formadas por espelhos esféricos côncavos e convexos em diferentes distâncias em relação ao espelho; proposta 02) Explicação do funcionamento de uma antena parabólica; e proposta 03) Identificação e caracterização do lugar geométrico que os planetas descrevem em torno do Sol.

Para isso, partiu-se da contextualização, utilizando-se de fenômenos cotidianos, seguido da busca por referenciais teóricos que abordam conceitos estudados junto à Educação Básica e que auxiliam nas justificativas dos problemas.

Destaca-se que, ao introduzir uma aula de Física sobre espelhos esféricos, uma atividade possível de ser realizada é trazer um espelho esférico, e, posicionar os alunos em distâncias diferentes em frente ao mesmo. Dessa forma, espera-se que os alunos percebam algumas características da imagem distintas, se comparadas às de um espelho plano, por exemplo, o tamanho da imagem, que pode ser maior, menor ou igual, podendo variar de acordo com sua posição.

Analogamente, para iniciar o estudo de ondas e sinais de satélites, junto às aulas de Física, a introdução pode ser feita com um vídeo pedagógico cujo assunto revê alguns conceitos básicos sobre ondas, e, a partir disso, interligar e provocar uma discussão associada ao cotidiano dos alunos, que assistem a canais de TV frequentemente e que precisam de uma antena parabólica e um receptor para que seu funcionamento seja satisfatório.

Ainda, ao trabalhar as Leis de Kepler em uma aula de Física, é possível efetuar um resgate histórico quanto à evolução da teoria que explica o comportamento do movimento dos astros em torno do Sol, abordando desde o geocentrismo até o heliocentrismo e as relações da gravitação universal. Também é oportuno investigar alguns conceitos geográficos, como os fenômenos periélio, afélio e estações do ano.

Partir dos questionamentos e dúvidas contextualizadas dos alunos em relação a situações-problema, e buscar possíveis respostas através de investigações pautadas em conceitos específicos, é uma possibilidade para introduzir o desenvolvimento da aula, o que corrobora com as descrições propostas por Tomaz e David (2013).

Além disso, Tomaz e David (2013) destacam que a contextualização e o trabalho interdisciplinar produzem uma combinação perfeita no desenvolvimento de propostas metodológicas, que não primam apenas por estudar teoricamente conceitos específicos a uma ou outra disciplina seguindo rigorosamente um roteiro pré-estabelecido no planejamento, e sim inter-relacioná-los, buscando explicações para determinado fenômeno.

Nesse sentido, a partir dos conceitos físicos abordados nas propostas metodológicas, é válido efetuar um resgate de conceitos matemáticos presentes em cada situação-problema, que atuam de modo complementar quando são desenvolvidos paralelamente nas aulas de ambas as disciplinas.

Destaca-se na sequência alguns conceitos da disciplina de Matemática que podem ser abordados ou resgatados em cada uma das propostas apresentadas.

Na proposta 01 pode-se resgatar conceitos relativos a ângulos congruentes (simétricos e opostos pelo vértice), retas paralelas, retas concorrentes e respectivo ponto de intersecção, razão e proporção, propriedades na circunferência, retas tangentes, dentre outros. Além disso, no desenvolvimento desta proposta metodológica, utiliza-se constantemente da semelhança de triângulos para justificar as características da imagem em relação à posição do objeto diante do espelho.

Na proposta 02, é possível explorar, dentre outros, elementos relativos ao estudo da parábola, ângulos congruentes, congruência e semelhança de triângulos, propriedades do triângulo isósceles, retas tangentes, paralelismo e perpendicularismo. Todos esses conceitos matemáticos são suportes facilitadores para justificar o funcionamento de uma antena parabólica.

A proposta 03, permite estudar, dentre outras, as seguintes abordagens matemáticas: elipse com caracterização, elementos e relações matemáticas (fórmulas), vetores, razão e proporção, análise de áreas. Assim, os resgates matemáticos aqui descritos auxiliam na

compreensão e estudo das leis de Kepler, as quais caracterizam o movimento dos astros em torno do Sol.

A investigação da situação-problema pode não se restringir apenas à disciplina de Física. É possível que, com auxílio da disciplina de Matemática, por exemplo, realize-se um trabalho de análise da própria, onde ambos os professores possam contribuir com argumentações resgatadas do contexto e possam aplicar conceitos pertinentes aos conteúdos da grade curricular da disciplina que ministra, buscando justificar determinado fenômeno de estudo.

De tal modo, o objetivo de estabelecer relações interdisciplinares não corresponde ao fato do professor deixar de ministrar suas aulas abordando conteúdos específicos de sua disciplina, e sim trabalhar com situações-problema que sejam do interesse do aluno e que também são investigadas em outras disciplinas, o que permite ao educando uma interligação dos conceitos, conforme destacam Fazenda (2011), Fazenda (1998) e as DCE's (2008).

Dessa forma, na busca por justificar determinados questionamentos dos alunos, é necessária a aplicação de conceitos abordados em duas (ou mais) disciplinas, ou seja, estabelecerem-se relações interdisciplinares, o que legitima as definições propostas por Suero (1986) *apud* Yared (2008), quando distingue interdisciplinaridade de relações interdisciplinares.

Os materiais aqui propostos têm por objetivo auxiliar no direcionamento de possíveis contextualizações a serem investigadas na sala de aula, destacando o uso de situações-problema como uma de suas potencialidades, permitindo com que o aluno tenha um tema como pressuposto de estudo, instigando-o a investigar, o que difere de abordar os conceitos específicos, de modo direto, sem justificar suas aplicações.

Ainda, durante o desenvolvimento do material, disponibilizam-se alguns *links* que direcionam para construções realizadas no *software* GeoGebra, sendo considerada uma potencialidade deste material a possibilidade de visualização e manipulação de dados, inclusive com animações. Retomando Silveira e Bisognin (2008), reforça-se que a utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino-aprendizagem é um fator preponderante, pois cativa a atenção dos estudantes e permite uma articulação dos dados, além de riquezas como imagens, sons e animações.

Igualmente, espera-se que, a partir da contextualização e dos direcionamentos apresentados nestas propostas metodológicas, os alunos tenham capacidade de compreender e justificar os fenômenos abordados, utilizando-se de conceitos pertinentes, principalmente, às disciplinas de Matemática e Física.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento das propostas metodológicas apresentadas nesse trabalho teve como principal direcionamento o uso de problemas cotidianos abordados mais especificamente na disciplina de Física, e, a partir desses, resgatar a aplicação de alguns conceitos matemáticos.

Sendo um dos focos reforçar a interdisciplinaridade, foram utilizadas relações interdisciplinares entre conteúdos da Matemática e da Física para direcionar a investigação dos problemas abordados: formação de imagens em espelhos esféricos côncavos e convexos; funcionamento de uma antena parabólica; e, trajetória desenvolvida pelos planetas em torno do Sol.

Além disso, ciente da importância do uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem, utilizou-se o *software* GeoGebra como suporte para o desenvolvimento de materiais virtuais com a finalidade de facilitar ao aluno a compreensão da teoria específica bem como das diferentes possibilidades de interpretar os resultados graficamente, de acordo com as condições iniciais de determinado problema.

Destaca-se que o uso de recursos tecnológicos em sala de aula facilita o trabalho dos profissionais atuantes na Educação, pois o aluno consegue visualizar mais facilmente e de maneira clara as relações que o professor deseja abordar nas aulas com suas explicações. No caso do GeoGebra o fato de poder manipular os dados é um fator importante, pois permite trabalhar com valores distintos em uma mesma situação problema, permitindo facilmente relacionar formas algébricas com suas respectivas visualizações geométricas.

Espera-se que o material desenvolvido nas propostas metodológicas possa contribuir no direcionamento dos conteúdos em aplicações no espaço escolar, onde alunos e professores possam obter resultados conjuntos a partir da investigação e do desenvolvimento das aulas.

Nas propostas metodológicas apresentadas, os recursos *online* disponibilizados (construção com o GeoGebra), permitem ao educando a visualização das diferentes características de acordo com posições diversas dos objetos, sendo que, a manipulação de dados através do controle deslizante, possibilita ao aluno a capacidade de comparação de acordo com as posições ocupadas. A ferramenta “habilitar rastro” também está disponível no GeoGebra e auxilia na assimilação dos conceitos.

Um fator preponderante para que o uso de relações interdisciplinares esteja presente nas aulas é que depende muito da disponibilidade e iniciativa do professor em buscar propor situações-problema que inter-relacionem os conteúdos específicos, bem como estabelecer

vínculos de relações com professores de outras áreas durante os planejamentos pedagógicos, trabalhando com problemas equivalentes, porém com abordagens diferentes, sendo estas complementares.

Reforçando assim o que enunciam as DCE's (2008), quanto mais o docente inserir práticas interdisciplinares ao seu planejamento, mais a aprendizagem torna-se significativa, pois permite uma articulação de conceitos abordados em disciplinas distintas, o que enriquece na compreensão.

Levando em conta tudo o que foi abordado na fundamentação teórica e no desenvolvimento das propostas metodológicas, pode-se dizer que a inserção do uso de práticas interdisciplinares na sala de aula é de importância basilar, já que traz benefícios associados à aprendizagem dos alunos, de modo que essa não fica restrita a apenas uma disciplina, mas permita associar com conceitos abordados em outras disciplinas.

Ressalva-se que o uso de práticas interdisciplinares não se faz necessário a todo momento no desenvolvimento das aulas, mas quando os assuntos a serem abordados permitem realizar essas relações a partir de problemas presentes no cotidiano dos alunos, acredita-se que a aprendizagem e o estímulo na investigação e coleta de dados da situação-problema torna-se mais produtiva, tanto por parte do aluno que está no papel de aprendiz, como para o professor que atua como um mediador.

Por fim, destaca-se que o autor deste trabalho possui intenções futuras de aprofundar os estudos acerca de assuntos associados à interdisciplinaridade, assim como de aplicar as propostas metodológicas aqui apresentadas, tanto com alunos como com professores da Educação Básica, buscando verificar se as contribuições e potencialidades apresentadas ocorrem junto à prática.

## 7 REFERÊNCIAS

ARTUSO, A. R.; WRUBLEWSKI, M. **Física**. v. 01. Curitiba: Positivo, 2013.

\_\_\_\_\_. **Física**. v. 02. Curitiba: Positivo, 2013.

ASSUMPÇÃO, I. Interdisciplinaridade: uma tentativa de compreensão do fenômeno. In: FAZENDA, I. *et al.* **Práticas Interdisciplinares na Escola**. / Ivani C. A. Fazenda (coordenadora). 12ª ed. São Paulo: Cortez, 2011, p. 23-25.

ÁVILA, G. Kepler e a Órbita Elíptica. **Revista Professor de Matemática**, São Paulo. nº 15, jan. 2010. Disponível em: <file:///D:/PROFMAT/T%C3%B3picos%20de%20Matem%C3%A1tica/Artigos%20relacionados%20-%20Referencial%20Te%C3%B3rico/Artigo%20RPM%20sobre%20%C3%B3rbita%20dos%20planetas%20ao%20redor%20do%20sol.pdf> Acesso em 10 out. 2017.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação/Conselho Nacional da Educação/Câmara da Educação Básica, 2012.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Parte III. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTAS, S.; FERREIRA, G. F. **Curso de GeoGebra**: 12ª edição. Capítulo 01 – Interfaces e Ferramentas. 2017. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/site/?page\_id=273> Acesso em 28 out. 2017.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAF, L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

DEMO, Pedro. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

FAZENDA, I. **Didática e Interdisciplinaridade**. 16ª ed. Campinas, SP: Papyrus, 1998.

\_\_\_\_\_. Interdisciplinaridade-Transdisciplinaridade: visões culturais e epistemológicas. In: FAZENDA, I. *et al.* **O que é Interdisciplinaridade?** / Ivani Fazenda (org). São Paulo: Cortez, 2008, p. 17-28.

FAZENDA, I. *et al.* **Práticas Interdisciplinares na Escola**. / Ivani C. A. Fazenda (coordenadora). 12ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

GUIMARÃES, O.; PIQUEIRA, J. R.; CARRON, W. **Física**. vol. 01. São Paulo: Ática, 2014.

\_\_\_\_\_. **Física**. vol. 02. São Paulo: Ática, 2014.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. WALKER, J. **Fundamentos de Física**: óptica e Física moderna. vol 04. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.



JAHN, A. P. *et al.* **Formação de Professores do Ensino Médio, Etapa II - Caderno V: Matemática** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014.

KLEIMAN, A. B.; MORAES, S. E. **Leitura e interdisciplinaridade: tecendo redes nos projetos da escola**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 1999.

LAGO, D. M. **Um Estudo das Cônicas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática, Goiânia: GO, 2017. Disponível em: < [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150280291](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150280291) > Acesso em 20 set. 2017.

LIMA, E. L. **Números e Função Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio** – volume 01, 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LUIZ, E. A. J.; COL, L. **Alternativas Metodológicas para o Ensino de Matemática Visando uma Aprendizagem Significativa**. Artigo apresentado no VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas: RS, 2013. Disponível em: <<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1015/115>> Acesso em 11 nov. 2017.

MISKULIN, R. G. S. As Potencialidades Didático-Pedagógicas de um Laboratório de Educação Matemática Mediado pelas TIC's na Formação de Professores. In: LORENZATO, S. *et al.* **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. / Sérgio L. (org). 2ª ed. Campinas: SP, Autores Associados, 2009.

MORO, G. A. D. **Física: ensino médio**. v. 02. Curitiba: Positivo, 2015

NETO, A. C. M. **Geometria**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NÓBRIGA, J. C. C.; ARAÚJO, L. C. L. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Editora Exato, 2010.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S. P. **TIC's na Educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno**. 2015. Disponível em: <<http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/viewFile/11019/8864>> Acesso em 24 out. 2017.

PACHECO, R. C. S. *et al.* **Interdisciplinaridade vista como um processo de construção do conhecimento**. RBPG, Brasília, v.7, n.12, p.136 – 159, julho de 2010.

PAIVA, M. **Matemática**. v. 03. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce\\_mat.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf)> Acesso em 29 set. 2017.

PESSE, M. M. **Cônicas: Classificação e Atividades com o Software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática, São José do Rio Preto: SP, 2017. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=95084](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95084)> Acesso em 10 out. 2017.

PINHEIRO, N. N. G. **O Uso do Software GeoGebra como Mecanismo para Produção de Material Didático e Estudo de Objetos do Cotidiano dos Alunos.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática, Teófilo Otoni: MG, 2017. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150960187](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150960187)> Acesso em 30 set. 2017.

RAMOS, M. N.; FREITAS, D.; PIERSON, A. H. C. **Formação de Professores do Ensino Médio, etapa I - caderno IV: Áreas de conhecimento e integração curricular /** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

ROLKOUSKI, E. **Tecnologias no Ensino de Matemática.** Curitiba: Ibplex, 2011.

SERWAY, R. A.; JEWETT Jr, J. W. **Princípios da Física: Mecânica Clássica.** v. 01. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

\_\_\_\_\_. **Princípios da Física: Óptica e Física Moderna.** v. 04. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

SILVEIRA, A. M.; BISOGNIN, E. **O Uso de Programas Computacionais como Recurso Auxiliar para o Ensino de Geometria Espacial.** 2008. Disponível em: <<http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/19.pdf>> Acesso em 21 out. 2017.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. **Interdisciplinaridade e Aprendizagem da Matemática em Sala de Aula.** 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

VICENTE, J. M.; PAULINO, R. **O PTE, as TIC's, a Matemática e o GeoGebra.** *AdolesCiência: Revista Júnior de investigação*, v. 2, n. 1, p. 45-48, 2013.

YARED, I. O que é interdisciplinaridade? In: FAZENDA, I. *et al.* **O que é Interdisciplinaridade?** / Ivani Fazenda (org). São Paulo: Cortez, 2008, p. 161-166.