UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

SOLANGE MARIA GUARDA

OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

CHAPECÓ
2018

SOLANGE MARIA GUARDA

OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Vitor José Petry

CHAPECÓ
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, km 02
CEP: 89801-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Guarda, Solange Maria
OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTI / Solange Maria Guarda. -- 2018.
82 f.:il.

Orientador: Doutor Vitor José Petry.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Chapecó, SC , 2018.

1. UNIDADE DE APRENDIZAGEM. 2. PROPOSTA METODOLÓGICA. 3. OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM. 4. ENSINO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA. I. Petry, Vitor José, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

UFFS PROFMAT

SOLANGE MARIA GUARDA

OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Vitor José Petry

Aprovado em: 14 / 12 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vitor José Petry - Orientador - UFFS

Prof. Dr. Pedro Elton Weber - UTFPR

Rosane Rossato Binotto

Prof. Drª. Rosane Rossato Binotto – UFFS

Chapecó/SC, dezembro de 2018

Dedico a todos os professores que lutam pelo desenvolvimento da ciência e formação humana.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, à família, que mesmo distante, sempre me apoiou, em especial, a meu filho, João Francisco, pela compreensão nas minhas ausências, pelo companheirismo do dia a dia, pelo carinho e amor incondicional.

Aos colegas de curso que foram figuras importantes nesta caminhada no incentivo, no apoio e pelos conhecimentos compartilhados, em especial aos colegas Darlan, Juliana V, Juliana W e Robson que dedicaram tempo para partilhar do seus conhecimentos para que eu pudesse ir adiante, minha eterna gratidão.

A todos os professores do curso, pelo conhecimento transmitido e em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Vitor José Petry, pela busca incessante do melhor para a conclusão deste trabalho nas suas orientações e contribuições.

Aos meus superiores no local de trabalho que me incentivaram a busca de aperfeiçoamente para o desempenho profissional e a liberação no trabalho para poder realizar meus estudos.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que, na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”

Charles Chaplin

RESUMO

Na presente pesquisa propõe-se o desenvolvimento de uma proposta metodológica em uma Unidade de Aprendizagem (UA) visando à utilização de Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA's) no ensino de geometria analítica: área do paralelogramo e do triângulo gerados por dois vetores linearmente independentes (LI) e o ensino das cônicas, em uma turma da primeira fase do curso de Arquitetura e Urbanismo. Os OVA's foram desenvolvidos usando o *software* Geogebra, que proporciona a utilização de ferramentas tecnológicas no processo de ensino e aprendizagem com o intuito de despertar maior atenção por parte dos alunos. A autora desenvolveu os OVA's e os depositou no *Geogebratube* com acesso público de modo que qualquer leitor possa acessá-los e manuseá-los. Esses OVA's foram apresentados em sala, permitindo a interação com os conceitos formais da Matemática trabalhados no ensino da geometria analítica. Durante o desenvolvimento da pesquisa, os alunos interagiram com os objetos e realizaram atividades relacionadas aos conteúdos com o objetivo de verificar formas de representações semióticas dos conceitos matemáticos abordados. A coleta de dados ocorreu, com base nas observações da pesquisadora, atividades realizadas pelos alunos e relatos, que serviram de parâmetro à realização da análise qualitativa exploratória, a fim de identificar e compreender possíveis contribuições desses objetos no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos abordados. A proposta metodológica resultante desta pesquisa poderá ser usada também em aulas do terceiro ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Unidade de Aprendizagem. OVA's. Representação semiótica. Aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The present research proposes the development of a methodological proposal in a Learning Unity (LU) aiming at the use of Virtual Learning Objects (VLO) in the teaching of analytical geometry: parallelogram’s area and triangle generated by two linearly independent vectors (LI) and the teaching of conics in a first phase class of the Architecture and Urbanism course. The VLOs were developed using Geogebra software, which provides the use of technological tools in the teaching and learning process in order to attract more attention from the students. The author has developed them and deposited them in Geogebratube with public access so that any reader can access them and handle them. These VLOs were presented in the room, through projection, interacting with the formal concepts of mathematics, worked in the teaching of analytical geometry. During the development of the research, the students interacted with the objects in a visual way and performed activities related to the contents whose objective was to verify the presence of interaction between the semiotic forms of representation of the mathematical concepts. Data collection was based on the observations, activities carried out by the students and reports, which served as parameters for conducting the exploratory qualitative analysis, in order to identify and understand possible contributions of these objects in the teaching and learning process of the concepts addressed. The methodological proposal resulting from this research can also be used in classes of the third year of high school.

Keywords: Learning Unit. VLO's. Semiotic representation. Meaningful learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

LI	Linearmente Independente
OVA	Objeto Virtual de Aprendizagem
UA	Unidade de Aprendizagem

LISTA DE SIGLAS

ARIADNE	Educacional Repository Consórcio mantido na Europa
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CARED	Campus Alberta Repositoryof Educacional Objects Canadá
CESTA	Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologias na Aprendizagem
MERLOT	Multimedia Educational Resource for Learning end online Teaching
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
PROUNI	Programa Universidade para Todos
RIVED	Rede Interativa Virtual de Educação abrangência
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica
UFFS	Universidade Federal Fronteira Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na presente pesquisa foi desenvolvida e aplicada uma Unidade de Aprendizagem (UA) utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA) para o ensino de conteúdos relacionados à geometria analítica: área do paralelogramo e do triângulo gerado por dois vetores Linearmente Independentes (LI) e o estudo das cônicas na disciplina de Matemática, da primeira fase do Curso de Arquitetura e Urbanismo. Esses OVA’s também poderão ser utilizados no terceiro ano do Ensino Médio.

No ambiente escolar, são perceptíveis as dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Matemática em todos os níveis de ensino. Há relatos, inclusive, de que a disciplina apresenta conteúdos complexos e de difícil entendimento para o aluno, discurso ratificado, muitas vezes, por pais de alunos e a sociedade em geral.

Por isso, nas atividades de planejamento, nas reuniões escolares, nos cursos de aperfeiçoamento, muito se discute sobre estratégias a serem adotadas em sala de aula a fim de que o professor conquiste a atenção dos alunos e o processo de ensino e aprendizagem possa tornar-se eficaz, possibilitando ao educando a absorção/construção dos conhecimentos científicos que a escola se propõe a trabalhar, tornando-os significativos. Tornar a aprendizagem significativa ao aluno poderá contribuir na transformação de sua realidade ou na forma como ele conduz situações de seu cotidiano.

As dificuldades em relação à disciplina de Matemática, no meio escolar, são visíveis pela sociedade quando avaliado o desempenho dos alunos, a exemplo do que ocorre na Prova Brasil e no Enem. Estudos apontam que, quando se trata do ensino da matemática, por apresentar raciocínio lógico e necessidade de argumentação e demonstração, grande parte dos alunos considera essa disciplina complexa e de difícil entendimento. Assim, é razoável, nesse contexto, que o professor à frente do processo de ensino e aprendizagem tente buscar meios, métodos e estratégias que auxiliem o aluno na compreensão desses conteúdos de forma a torná-los mais significativos.

Como se vivenciam, atualmente, grandes transformações proporcionadas pelo uso de tecnologias, nas relações de trabalho e nas relações sociais, estando as pessoas cada vez mais conectadas, é importante que o advento dos recursos tecnológicos seja incorporado à prática docente, uma vez que o uso apropriado desses recursos pelo professor poderá facilitar a compreensão de conhecimentos científicos aliados ao interesse do aluno pelo uso de tecnologias. Na disciplina de Matemática, a ferramenta tecnológica utilizada poderá auxiliar na interação entre as diferentes formas de representações semióticas dos conceitos trabalhados, contribuindo na elaboração do pensamento cognitivo do aluno.

A necessidade do professor, coordenador do processo de ensino e aprendizagem, em desenvolver novas metodologias e de aperfeiçoar-se para a atuação docente, justifica a pesquisa, bem como a elaboração de trabalhos acadêmicos científicos que poderão ser utilizados como suporte na prática docente. Nesse sentido, são necessários trabalhos que apresentem alternativas de práticas didáticas em conceitos matemáticos, utilizando ferramentas tecnológicas ou digitais que envolvam o aluno cada vez mais no processo de construção do seu conhecimento científico.

A atuação profissional, da professora autora deste trabalho, no Ensino Superior, nos últimos dez anos, permitiu a aplicação de algumas práticas com o uso de recursos tecnológicos nos cursos de Administração e Ciências Contábeis. Na disciplina de Estatística, empregou planilhas eletrônicas, para tabulação de dados, construção de gráficos, bem como utilizou ferramentas algébricas na determinação de algoritmos. No componente curricular de Matemática Financeira, a autora desenvolveu tabelas representando e comparando os sistemas de amortização. As atividades descritas configuram-se em exemplos da utilização de um recurso tecnológico ao desenvolvimento de objetos de aprendizagem em sala de aula.

A escolha pelo tema de pesquisa, de desenvolver OVA's e aplicá-los em uma Unidade de Aprendizagem para o estudo de conceitos de geometria analítica está relacionada à atividade desenvolvida pela autora, que trabalha com um componente curricular cuja ementa aborda tais conceitos e pelo fato de o *software* escolhido favorecer o desenvolvimento de OVA's nessa área.

Embora os conteúdos e conceitos abordados sejam também tratados no Ensino Médio, a aplicação das atividades relativas a esta pesquisa ocorreu na primeira fase do curso de Arquitetura e Urbanismo, no componente curricular de Matemática, devido à atuação da professora/autora no Ensino Superior e não no Ensino Médio.

Desenvolver e utilizar ferramentas que contribuam para a compreensão de conceitos e argumentações de forma significativa ao aluno é o objetivo da aplicação desta Unidade de Aprendizagem, tendo o *software* GeoGebra como suporte para construção dos OVA's que sirvam de ferramenta-auxiliar no ensino de conceitos da geometria analítica, delimitados na pesquisa: área do paralelogramo e do triângulo gerado por dois vetores linearmente independentes e o estudo das cônicas. Assim sendo, nesta UA, desenvolveram-se atividades abordando os conteúdos da geometria analítica: área do paralelogramo e do triângulo gerado por dois vetores LI e o estudo das cônicas. O registro das atividades e a coleta de dados para posterior análise se deu por meio de diários de bordo, de relatórios das atividades realizados pelos alunos, materiais desenvolvidos pelos alunos, relatos e observações realizadas pela professora da turma, pesquisadora deste trabalho.

A presente dissertação inicia pela introdução, com seus elementos básicos, segue com o segundo capítulo, que apresenta o referencial teórico, no qual discutem-se alguns autores que tratam sobre metodologias de ensino, utilização de ferramentas tecnológicas no ensino, Unidades de Aprendizagem e a utilização de OVA's no processo de ensino e aprendizagem. No próximo capítulo, consta a metodologia utilizada na elaboração deste trabalho. Nos capítulos 4 e 5, descrevem-se os processos de construção e utilização dos OVA's, seguida pela transcrição dos dados e análise. Por último, no capítulo 6 encontram-se as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo de revisão bibliográfica e fundamentação teórica, discutem-se estudos já realizados e considerações sobre a atividade de ensino, processo de aprendizagem, a elaboração de UA, a utilização de ferramentas tecnológicas e a inserção de OVA's na prática de ensino e no processo de aprendizagem. Constam também aspectos relacionados à formação cognitiva do aluno no processo de ensino e aprendizagem com a utilização de OVA's, no contexto de temas relacionados à geometria analítica e questões associadas à aplicação de UA.

Segundo Freschi e Ramos (2009), uma UA é um modo de planejar, elaborar e organizar as atividades que serão desenvolvidas em sala da aula. Visa a superar a forma conceitual de organização curricular de modo a contribuir para a aprendizagem interdisciplinar. É um conjunto de atividades que valoriza o conhecimento prévio do aluno e o aprofunda para um tema específico ou de forma interdisciplinar. Tem o propósito de desenvolver a aprendizagem significativa, por meio da pesquisa-ação, problematizando o conhecimento inicial do aluno, ajudando-o a reconstruir argumentos, promover a comunicação, especialmente a fala e a escrita.

Para Hofstaetter (2009), a simples utilização de tecnologias para pesquisar dados disponíveis na internet não se constitui como OVA's, é apenas um referencial bibliográfico de pesquisa com maior velocidade. Cabe à escola, principalmente ao professor, explorar as ferramentas tecnológicas em toda sua capacidade, de forma que sua utilização, de fato, tenha contribuição relevante no processo de aprendizagem. O autor aborda ainda que existem programas fomentados e desenvolvidos por instituições governamentais que podem ser utilizados por professores e estudantes, não somente para navegar em dados existentes, mas ir além, elaborar sequências e programar.

Segundo Bettio e Martins (2000) apud Antonio (2005), a aplicação de OVA's como estratégia de ensino deve ser bem estruturada e pode ser dividida em partes bem definidas: listar todos os conteúdos prévios necessários para aplicação do OVA; definir o que o aluno deve atingir com a utilização do OVA; e verificar ou avaliar, com base em *feedback*, a expectativa e qual foi seu aprendizado utilizando o OVA como estratégia de ensino.

Antonio (2005) descreve que OVA's podem ser definidos como recursos digitais, que são usados, reutilizados e combinados com outros objetos para criar um ambiente rico de aprendizado, seu uso pode reduzir o tempo de desenvolvimento, diminuir as necessidades de instrutores especialistas e reduzir os custos associados, e podem ser criados em qualquer mídia ou formato: *appletjava*, animação *flash,* vídeo ou áudio *clip*, foto, apresentação *power point*, *website* e que poderão ser utilizados em qualquer plataforma.

Com a acesso a novas tecnologias, os alunos estão cada vez mais conectados no ambiente escolar ou fora dele, conforme descreve Rita (2014), portanto, a escola pode oportunizar metodologias trazendo essas tecnologias ao processo de ensino e aprendizagem e uma dessas metodologias pode ser o desenvolvimento e aplicação de OVA’s, por meio dos quais os alunos poderão interagir de forma significativa na transformação de seu conhecimento.

Existem repositórios de OVA’s, cujo objetivo é controlar os conteúdos publicados, mantendo-os, em sua maioria, vinculados a projetos acadêmicos. Destacam-se algumas iniciativas nacionais e internacionais de repositórios de objetos virtuais de aprendizagem como: BIOE – Banco Internacional de Objetos de Aprendizagem, que abrange outros repositórios como: CESTA – Coletânea de entidades de suporte ao uso de tecnologias na aprendizagem, RIVED – Rede Interativa Virtual de Educação abrangência, ARIADNE – Educacional Repository Consórcio mantido na Europa, CARED – Campus Alberta Repository of Educacional Objects Canadá, e MERLOT – Multimedia Educational Resource for Learning end online Teaching. “Há uma preocupação de pesquisadores com a qualidade dos conteúdos apresentados em projetos considerados objetos virtuais de aprendizagem” (SANTOS; AMARAL, 2012).

O professor é desafiado a criar um ambiente favorável ao ensino utilizando aparatos tecnológicos e materiais didáticos de forma que o conteúdo seja melhor contextualizado e tenha significado para a vivência do aluno (SOUZA, 2013).

A retenção de conceitos trabalhados, em sala, para muitos, é mais eficaz quando apresentados de forma visual e não somente oral. De acordo com Costa (2013), se apresentados na forma visual os conceitos, o aluno consegue reter até 85% da informação até três horas depois e 65% até três dias depois.

Alguns aspectos devem ser considerados em relação à formação do conhecimento e do desenvolvimento do aluno. Vygotsky (2005) descreve que o desenvolvimento intelectual do aluno e a aprendizagem escolar possuem uma dependência recíproca, extremamente complexa e dinâmica, que os anos escolares constituem um período de maturação. Classifica de “zona do seu desenvolvimento potencial” o que uma criança é capaz de fazer com o auxílio de um adulto hoje, e amanhã, poderá fazer por si só. Ressalta que um aluno não vem para a escola sem conhecimento algum, uma vez que já possui um pré-conceito formulado na fase pré-escola. A exemplo disso, já conhece nome de determinados objetos, já fez comparação entre valores. Mas, a fase escolar é o momento em que sistematiza, organiza e amplia o conhecimento de forma orientada. Momento em que o indivíduo realiza operações que exigem consciência e controle, aprendizado de operações que favorecem o desenvolvimento das funções psicológicas pois está em fase de amadurecimento.

Para Duval (2009), as diferentes formas de representação de conteúdo, seja ele matemático ou não, são denominadas formas de representação semióticas. Essas formas devem transformar o funcionamento cognitivo do indivíduo para que haja uma apreensão conceitual, de raciocínio ou compreensão de enunciados. Ainda, na acepção do autor, o uso dos sistemas semióticos é essencial à compreensão do aluno e essa questão da importância das representações perpassa o domínio da matemática e de sua aprendizagem. O caráter intencional das representações conscientes é fundamental, do ponto de vista cognitivo, pois permite tomar consciência do papel essencial da significação na determinação dos objetos e é sempre através da significação, que se faz apreensão do conceito de um objeto. Em particular, para a aprendizagem das matemáticas, em virtude de essa atividade cognitiva requerer a utilização de sistemas de expressão e de representação, além da linguagem natural ou das imagens, requer também a utilização sistemas de escrita de numeração, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógica que exprimem as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos, esquemas, etc.

O professor, como agente no processo de ensino e aprendizagem, precisa ter consciência de como isso ocorre na formação cognitiva do aluno a fim de saber até que ponto pode avançar nos conteúdos em função da fase de desenvolvimento em que o aluno está e aplicar metodologias, desenvolver estratégias, adotar ferramentas que o despertem ao processo de aprendizagem de desenvolvimento intelectual.

Introduzir novas metodologias nos processos de ensino e aprendizagem, para alguns, pode ser uma quebra de paradigmas, um processo desafiador. Assim como a sociedade, a sala de aula também precisa se modernizar para acompanhar a evolução de novos conceitos, utilizar novos recursos, adotar novas metodologias:

> A evolução histórica mostra que os paradigmas científicos vão se modificando constantemente no universo. Segundo Assmann (1998), não há paradigma permanente, pois eles são historicamente mutáveis, relativos e naturalmente seletivos. A evolução da humanidade é continua e dinâmica, assim modificam-se os valores, as crenças, os conceitos e as ideias acerca da realidade. Essas mudanças paradigmáticas estão diretamente relacionadas ao olhar e à vivência do observador. (BEBRENS; OLIARI, 2007).

Sendo as mudanças na humanidade contínuas e dinâmicas, é de se esperar que a forma como o ensino é repassado, transmitido ou pensado no meio escolar também deva estar em constante transformação. Pensar e modificar as práticas pedagógicas considerando o desenvolvimento intelectual, o desempenho do aluno e as transformações sociais deve ser um processo constante na prática do docente. Constitui um desafio ao educador encontrar métodos e estratégias eficazes para que o aluno absorva os conhecimentos propostos no currículo escolar. Na prática, pode-se observar na utilização do livro didático uma estratégia facilitadora, em que o conteúdo e as atividades já estão pré-definidos, bastando ao professor apenas segui-lo.

> Quando pensamos na rotina escolar, o livro didático, surge, na melhor das hipóteses, como um norteador da prática aplicada na sala de aula e, não raramente, podemos observá-lo também como a maior referência na elaboração de tais práticas. Entretanto, esta ferramenta tão importante deve-se constituir em objeto de análise constante por parte de seus usuários, uma vez que pode trazer, entre outras coisas, discursos perigosos no que diz respeito ao trato da diversidade. (PENKAL, 2011 p. 11).

Um dos objetivos da escola é a formação do aluno como cidadão para ser um agente de transformação social capaz de acompanhar as inovações tecnológicas, as mudanças na forma de comunicação e das transformações vividas nas relações sociais.

> A adoção desses recursos passou a ser essencial e inevitável para a educação, pois com a revolução tecnológica que vem ocorrendo nas últimas décadas a sociedade passa por uma forte mudança, conseguindo várias informações com apenas um "click" e numa velocidade muito grande. (BRUGINSKI, 2014, p. 9).

Por muito tempo, a visão da sala de aula era a figura do professor como detentor do conhecimento e suas ferramentas para transmissão desse conhecimento eram o giz e o quadro, sendo o aluno apenas um observador e reprodutor do conhecimento apresentado pelo professor. Assim, o ensino não era um processo dinâmico e interativo, o aluno recebia a informação do conhecimento e o reproduzia "Em lugar de comunicar-se, o educador faz "comunicados" e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem" (FREIRE, 1987, p. 36).

Como as demais transformações sociais surgidas pela necessidade do homem de evoluir em seu próprio ambiente, a forma de educar, em que o professor é um mero transmissor de conteúdo; e o aluno, um receptor, também é percebido como uma necessidade de mudança, sendo essa forma de ensino ultrapassada, por não atender mais realidade na qual se está vivendo. A elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foi uma demonstração governamental de representatividade social da necessidade de refletir sobre as práticas educacionais no país.

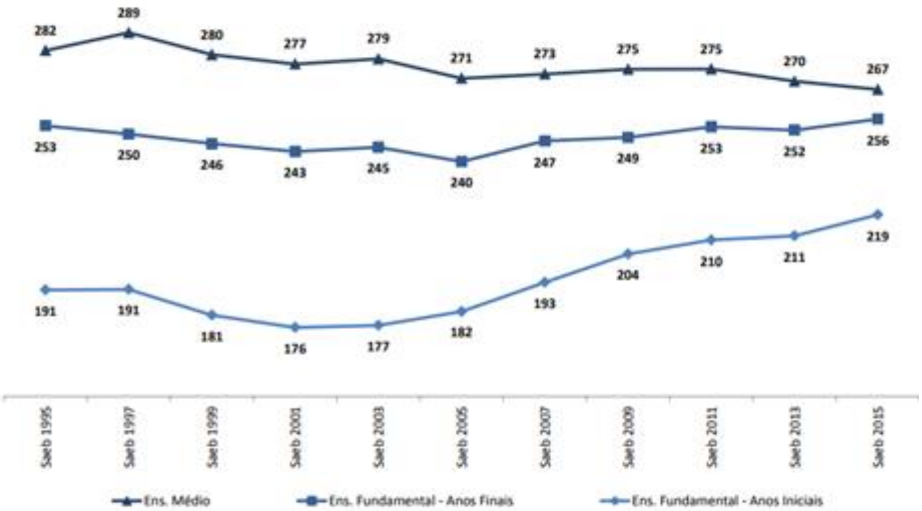
> O Brasil, como os demais países da América Latina, está empenhado em promover reformas na área educacional que permitam superar o quadro de extrema desvantagem em relação aos índices de escolarização e de nível de conhecimento que apresentam os países desenvolvidos. (PCNs, 2000. p. 5).

A formação dos alunos em relação ao estudo da matemática é uma discussão constante, visto os baixos índices de desempenho apresentados no currículo escolar, bem como comprovados com base nos índices apresentados pelo Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica (SAEB), avaliação em que o desempenho desses alunos têm piorado.

O gráfico mostrado na figura 1 apresenta o desempenho dos estudantes no SAEB, em matemática, no período de 1995 a 2015. Com base nele, pode-se verificar que o ensino médio tem um decrescimento no desempenho, apesar de os anos iniciais apresentarem um crescimento. Não obstante, de uma forma geral, esse crescimento, é muito baixo, muito aquém do desejável.

Na avaliação realizada pelo SAEB, a pontuação é verificada a partir da proficiência dos alunos em determinados conteúdos da disciplina de matemática considerando os níveis de ensino. Para o aluno de ensino fundamental, a escala adotada é de 125 a 425; e no ensino médio, de 225 a 475.

Figura 1 – Desempenho dos estudantes do Ensino Básico na disciplina de matemática na avaliação SAEB



Fonte: Diretoria de Avaliação da Educação Básica – DAEB/INEP.

Visando à melhoria do desempenho dos alunos, buscam-se alternativas para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma mais eficaz. Espera-se que a inserção de OVA's contribua nessa eficácia, uma vez que, conforme dados já apontados, observa-se que o aluno retém mais a informação quando há visualização do objeto de ensino.

2.1 O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

As tecnologias movimentam e aceleram o processo de ensino e aprendizagem, assim como aceleram as transformações sociais, transformações perceptíveis em todos os âmbitos, especialmente a comunicação que, hoje, por meio da tecnologia, é globalizada e quase imediata. Não convém a escola estar de fora desse processo, dessa globalização, por ser creditada a ela a formação científica do indivíduo.

> A denominada "revolução informática" promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central nos processos de desenvolvimento, em geral. É possível afirmar que nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias. (PCNs, 2000. p. 5).

Em qualquer nível de ensino, é possível fazer uso das tecnologias, desde que a escola disponha de recursos; e o docente, de conhecimento e planejamento para sua utilização.

Ao longo da história, a inserção das tecnologias, no meio escolar, é percebida através da utilização de aparelhos de comunicação, a utilização de projetores, TVs, vídeos, filmes, etc. Foi uma inserção gradual permitindo, por exemplo, aos professores projetar dados, gráficos, figuras mais complexas, o que era inviável usando somente giz e quadro. O uso da televisão, em aula, possibilitou que os alunos tivessem acesso a documentários que pudessem discutir temas da atualidade. No entanto, a utilização de tecnologias para o ensino vai muito além, e em se tratando da disciplina de matemática, é possível usar calculadora online, *softwares* que possibilitam representar expressões algébricas em formas geométricas, entre outras. Segundo Baldin (2008), há uma inovação metodológica oportunizada pelo uso de tecnologias no ensino dessa disciplina.

Estudos apontam que a aprendizagem significativa ocorre quando o "material novo" a ser aprendido seja potencialmente significativo do ponto de vista lógico que tenha estrutura e organização. É importante considerar os conhecimentos prévios do aluno, permitindo fazer relações substanciais com o novo, bem como é indispensável que o aluno esteja disposto a aprender esse algo novo, explicita Martin (2003) apud Ferro (2017).

Constantemente, a escola e os professores estão sendo desafiados a acompanhar os avanços permeados pelas novas tecnologias. "Esse também é um duplo desafio da educação: adaptar-se aos avanços das tecnologias e orientar o caminho de todos para o domínio e apropriação crítica desses novos meios" (KENSKI, 2008, p.18).

O professor tem um papel fundamental, nesse processo de inovação metodológica, oportunizando ao aluno o acesso às tecnologias como ferramenta de ensino. "Pesquisas indicam principalmente a necessidade de olhar para a preparação dos professores que irão utilizar os novos recursos na sala de aula" (BALDIN, 2008, p. 8). Sendo assim, para que o uso de tecnologias seja uma ferramenta eficaz, no processo de ensino e aprendizagem, o professor precisa estar preparado, conhecer essa ferramenta e a forma de utilizá-la.

O uso de tecnologias oportuniza pesquisas imediatas sobre diferentes temas, e em diferentes disciplinas, permitindo, inclusive, o desenvolvimento de atividades interdisciplinares

> [...] o uso de tecnologias traz a possibilidade de executar atividades de laboratórios com problemas contextualizados de matemática, introduzindo técnicas de modelagem, análise crítica de resultados mediados por tecnologias, habilidades de resolução de problemas, criando cenários favoráveis para atividades de Ensino Integrado (BALDIN, 2008, p. 8).

O OVA pode ser um instrumento metodológico riquíssimo, mas é preciso ter ciência de que para a adoção desse instrumento, o docente precisa estar preparado e ter clareza dos objetivos de seu uso.

2.2 A INSERÇÃO DE OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Nas últimas décadas, a sociedade se globalizou com o acesso aos diversos tipos de tecnologias, mas principalmente devido à utilização em massa da rede mundial de computadores (Internet) e a telefonia (celulares), mudando a forma como as pessoas se comunicam, como fazem negócios, consequentemente, alteram-se também os processos de ensino e aprendizagem.

> Para facilitar a adoção dos objetos de aprendizagem, o Learning TechnologyStandards Committee (LTSC) do IEEE, em 1996, forneceu padrões instrutivos da tecnologia (LTSC, 2000). Segundo a IEEE/LTSC o padrão LOM (Learning ObjectMetadado) focaliza o mínimo de conjunto de atributos necessários para permitir que um Objeto de Aprendizagem seja gerenciado, localizado e avaliado. Os metadados permitem a catalogação e a codificação do objeto de Aprendizagem, tornando-o compreensível para as diversas plataformas (SANTOS, 2007).

Para considerar uma ferramenta como objeto virtual de ensino, ela deve minimamente seguir alguns regramentos, de confiabilidade de dados. No caso de vídeos considerados como fonte de conteúdos educacionais, por exemplo, essa preocupação existe e os cuidados devem ser tomados, conforme explicita Santos (2007).

O objeto de aprendizagem já vem sendo discutido como instrumento de aprendizagem desde a década de 90, apesar de não haver uma definição única entre pesquisadores e defensores da forma específica de utilização desse material. As abordagens feitas sobre o tema são ecléticas, no entanto, fica evidente que o objeto virtual de aprendizagem é considerado importante no processo de ensino e aprendizagem pela capacidade de simular e animar fenômenos, podendo ser utilizado em vários ambientes. "... qualquer material digital que possa ser reutilizado para dar suporte ao ensino é considerado um objeto de aprendizagem" (AUDINO, 2010, p. 133).

Os objetos de aprendizagem são definidos por "qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino" (WILEY, 2000, p. 3). Esse objeto deve favorecer uma base escalável de aprendizagem e uma de suas características é a reutilização em diferentes contextos e ambientes de aprendizagem.

No contexto escolar, a inserção de mídias tecnológicas é impulsionada por alguns professores que acreditam que a escola deve acompanhar as transformações sociais e desempenhar seu papel fundamental de construtora e disseminadora do conhecimento.

> ...as escolas não podem privar seus alunos do acesso às novas tecnologias da informação e da comunicação, seja para a construção de novos conhecimentos, à interação das diferentes mídias disponíveis para o ensino, à realização de projetos interdisciplinares, seja simplesmente, para promover uma maior aproximação com essa nova realidade na qual todos estão cada vez mais envolvidos (DALL'ASTA; BRANDÃO, 2004, p. 2).

Existem algumas orientações sobre a proposição ou construção de um objeto de aprendizagem e sua finalidade:

> O Ministério da Educação [MEC, 2006] orienta que os objetos de aprendizagem devem objetivar: o aprimoramento da educação presencial e/ou à distância, para incentivar a pesquisa e a construção de novos conhecimentos para melhoria da qualidade, equidade e eficiência dos sistemas públicos de ensino pela incorporação didática das novas tecnologias de informação e comunicação (MONTEIRO, 2006, p. 391).

No âmbito escolar, o objeto virtual de aprendizagem tem por finalidade dinamizar o processo de ensino e aprendizagem focado na construção do conhecimento científico. *Softwares*, como Geogebra, são utilizados como ferramenta na construção de OVA.

O GeoGebra é um *software* livre e está disponível em: http://geogebra.com.br, pode ser baixado em qualquer sistema operacional. Trata-se de um *software* da Geometria Dinâmica. Segundo Teixeira (2015), estudos apontam que, a fim de que haja uma efetivação no processo de ensino e aprendizagem, é interessante utilizar pelo menos dois registros de representação. Nesse sentido, o *software* GeoGebra, como ferramenta permite relacionar a teoria e a representação algébrica com o comportamento geométrico.

2.3 ABORDAGENS TEÓRICAS SOBRE UA

A unidade de aprendizagem (UA) é entendida como um modo de planejamento, de elaboração, de organização e realização de uma atividade construída dialogicamente no ambiente da sala de aula. Uma atividade que possibilita a construção do conhecimento multidisciplinar através da pesquisa e leva em consideração o conhecimento apresentado pelo aluno. "Consiste, portanto, em um conjunto de atividades estrategicamente selecionadas para o estudo de um tema específico ou interdisciplinar, com vistas à construção dos conhecimentos dos participantes..." (FRESCHI; RAMOS, 2009, p. 157).

Albuquerque (2006) salienta que a UA tem como princípio organizar e educar pela pesquisa, considerando os questionamentos reconstrutivos, a argumentação e a comunicação crítica, de modo que permita a participação do aluno como autor, em conjunto com o professor do trabalho, aproximando de sua realidade e necessidades. Pressupõe-se que as habilidades desenvolvidas na UA são levadas pelo sujeito e determinantes para que ele se posicione perante situações da sua vida. Nessa proposta, professor e aluno trabalham juntos e são envolvidos por ideias motivadoras para desenvolver uma pesquisa. Dessa forma, constroem novos conceitos.

2.4 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO DAS MATEMÁTICAS

Para o ensino da matemática, é comum a utilização de diferentes símbolos para representar uma estrutura conceitual. Elaborar OVA's é uma tentativa de realizar a interação entre as formas de representação semióticas no ensino da matemática interagir as formas conceituais: escrita ou algébrica ou geométricas.

> Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento (DURVAL, 2012, p. 269).

Como descreve Duval, na matemática existem diferentes formas de representação de um mesmo elemento matemático, no entanto, é necessário que haja similaridade no pensamento cognitivo do aluno a fim de que ocorra, de fato, uma apropriação do conceito matemático relacionado aos objetos apresentados, seja geométrico, gráfico ou algébrico.

Ainda, segundo Kummer (2018), muitas vezes, o aluno tem dificuldade em fazer a passagem dos símbolos para a forma conceitual. Por isso, conforme os símbolos são apresentados, é necessário realizar uma sistematização dos elementos, apresentando-os de forma conceitual. Para isso, é preciso que ele acompanhe racionalmente a passagem da forma com a representação escrita.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho foi desenvolvido com alunos de uma turma da primeira fase do curso de Arquitetura e Urbanismo, de uma universidade localizada na cidade de Chapecó-SC, turma na qual a autora desta dissertação é professora. Por se tratar de conteúdos abordados também no ensino médio, as atividades propostas podem ser utilizadas nesse nível de ensino.

A turma era composta por 17 alunos, na faixa etária de 18 a 33 anos, sendo 12 mulheres e 5 homens. Desse montante, 11declararam trabalhar e os demais eram estudantes apenas. A maioria deles pertencia à classe média, com exceção dos bolsistas do PROUNI, os quais tinham benefício de 100% na mensalidade, e procediam de escolas particulares e públicas. Com o propósito de preservar a identidade deles, neste trabalho, cada sujeito será identificado pela letra A seguido de um número que vai de 1 a 17, no momento em que serão descritos os relatos ou apresentadas as atividades realizadas por eles.

A pesquisa foi realizada no componente curricular Matemática, cujo ementário contempla o conteúdo de geometria analítica, que contém os tópicos abordados neste trabalho.

Em virtude de a ementa da disciplina ser extensa, a professora optou por desenvolver os objetos no *software* Geogebra e fazer a apresentação deles, em sala de aula, no momento em que trabalhava os conteúdos. Foram apresentados 11 OVA’s aos alunos ao longo de 6 encontros, os quais tinham duração de 4 horas/aula cada, equivalente a 3h30min. Durante esses encontros, os discentes tiveram a oportunidade de interagir com os OVA’s com a finalidade de compreender os conceitos relacionados, além de desenvolver as atividades propostas.

Todos os OVA’s estão em um repositório Geogebratube, possuem instruções de uso, inicialmente ocultas. No canto superior à direita, consta uma barra indicando “instruções: clique aqui” que irá habilitar as informações ocultas no texto. Nos objetos que possuem movimento e rastro combinado criou-se uma ferramenta, no canto inferior à direita, que habilita e desabilita o rastro, permitindo uma melhor visualização dos aspectos considerados importantes a serem observados pelos alunos durante a interação com os objetos. Figuras deste trabalho que são print do *software* Geogebra os números inteiros e os números decimais estão separados por um ponto, linguagem do software, linguagem americana, na linguagem portuguesa utiliza-se vírgula para separar números inteiros de decimais.

Os objetos foram apresentados nos encontros no momento em que foi efetuada a introdução dos conceitos de geometria analítica. Os alunos observavam a apresentação dos objetos e descreviam ao observado e solicitado em forma de atividades. Posteriormente, a professora convidou-os para interagir com os objetos, no laboratório, mas, como as aulas do semestre já haviam terminado, a adesão foi mínima. Com base na observação e interação com os objetos, coletaram-se os dados da pesquisa, os quais foram usados, subsequentemente para a análise descritiva das observações feitas.

O trabalho caracteriza-se como sendo uma pesquisa qualitativa e exploratória. Qualitativa, por não se preocupar em analisar dados numéricos; exploratória, pois investiga fenômenos ocorridos no processo de aprendizagem quando da aplicação dos OVA's. Nesta, são feitos registros, análise e descrição dos fenômeno. Acredita-se que os resultados sofreram interferência devido ao fato de que a apresentação dos objetos ocorreu em sala de aula com auxílio da professora.

O desenvolvimento da pesquisa teve como foco principal o estudo da área do paralelogramo e do triângulo gerados por dois vetores linearmente independentes e o estudo das cônicas, utilizando OVA's desenvolvidos pela pesquisadora.

No decorrer da aplicação da pesquisa, os registros ocorreram por meio da observação, diários, atividades realizadas pelos alunos, bem como dos relatos deles, considerando a interação com os OVA's como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. A apresentação dos objetos foi dividida em etapas para facilitar a observação, compreensão e os registros. Dividiram-se as etapas da seguinte forma: 1 – apresentação dos OVA's referentes à área do paralelogramo e do triângulo; 2 – apresentação dos OVA's referentes à parábola; 3 – apresentação dos OVA's referentes à elipse; e 4 – apresentação dos OVA's referentes à hipérbole. Em cada etapa, os registros eram realizados de acordo com o objetivo de cada objeto e ao final, solicitou-se uma síntese dos conceitos elaborados com a apresentação de cada etapa.

Considerando que as atividades foram desenvolvidas durante as aulas da disciplina, durante a abordagem dos conteúdos de sua ementa, essas atividades compuseram uma das notas dos alunos para sua avaliação no componente curricular em questão sendo que, cada etapa compunha 25% dessa nota.

A análise de dados ocorreu de forma descritiva e qualitativa no decorrer de todo o processo, desde a apresentação dos objetos até o desenvolvimento das atividades propostas aos alunos. “A análise dos dados é um processo complexo que envolve retrocessos entre dados pouco concretos e conceitos abstratos, entre raciocínio indutivo e dedutivo, entre descrição e interpretação” (TEIXEIRA, 2003, p. 192).

O desenvolvimento e a descrição de cada objeto, sua aplicação, bem como a descrição das atividades desenvolvidas, a partir desses objetos, são apresentados no capítulo 4. A percepção do processo de ensino está descrita na análise dos resultados, no capítulo 5.

4 DESENVOLVIMENTO DOS OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E PROPOSTAS METODODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE CONTEÚDOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo, faz-se a descrição do processo de construção dos OVA's e a apresentação dos conteúdos neles trabalhados e seus objetivos. O leitor poderá utilizar esse modelo de proposta metodológica para o ensino de conteúdos relacionados à geometria analítica: área do paralelogramo e do triângulo gerados por dois vetores linearmente independentes e o estudo das cônicas. As atividades desenvolvidas durante a aplicação e análise dos dados estão descritas no próximo capítulo.

4.1 ÁREA DO PARALELOGRAMO E DO TRIÂNGULO DEFINIDOS POR DOIS VETORES LINEARMENTE INDEPENDENTES

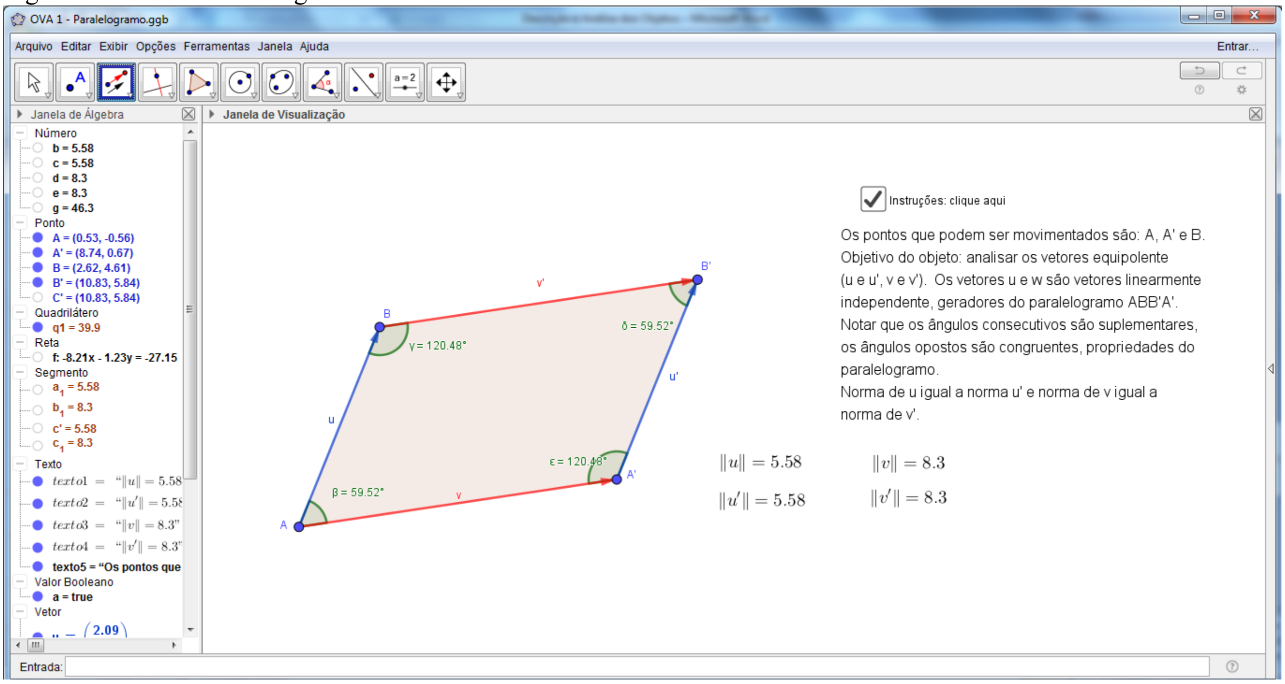
Nesta seção, desenvolve-se a primeira etapa de apresentação dos OVA's 1 e 2 – paralelogramo; e OVA 3 – triângulo, os objetivos e os conceitos matemáticos envolvidos em cada objeto.

4.1.1 PARALELOGRAMO

Para representar as propriedades do paralelogramo e determinar a área, foram construídos os OVAs 1 e 2. Inicialmente, descreve-se a utilização de cada objeto e em seguida, a descrição dos conteúdos trabalhados.

OVA 1 – Paralelogramo 1: Na utilização do OVA 1, ao movimentar os pontos A, A' e B, deve-se observar que, independente do movimento, o vetor u permanece paralelo ao vetor u', o vetor v permanece paralelo ao vetor v'. É possível observar que em relação aos ângulos internos tem-se queu: ângulos opostos são congruentes, ângulos consecutivos são suplementares e a soma das medidas dos ângulos internos é 360º, pois o paralelogramo é um quadrilátero. Destaca-se que o paralelogramo foi construído a partir de dois vetores lineares independentes, ou seja, que possuem direção e sentido distintos. Em seguida, foram definidos os vetores equipolentes u' e v', em que vetor u é equipolente a u' e o vetor v é eqüipolente a v'. Dois vetores ou mais são considerados equipolentes, se, e somente se, possuem módulo, direção e sentidos iguais. Os vetores equipolentes determinaram os lados opostos paralelos de mesma medida do paralelogramo. No objeto, foi inserida instrução de uso; ele pode ser acessado pelo link: https://www.geogebra.org/m/gerxuq2d.

Figura 2 – OVA 1: Paralelogramo 1



Fonte: Print do OVA 1 – Paralelogramo 1

Os objetivos desse OVA são identificar os vetores linearmente independentes: vetores u e v, vetores equipolentes como lados opostos e paralelos do paralelogramo, ou seja, vetores u e u' e vetores v e v' e as demais propriedades do paralelogramo, como, lados opostos e paralelos de mesma medida (vetores com a mesma norma), ângulos consecutivos suplementares e ângulos opostos congruentes.

Os conhecimentos prévios à apresentação desse objeto são: determinação da norma de vetor; definição de paralelismo; vetores equipolentes; ângulos congruentes; ângulos suplementares; e ângulos consecutivos.

OVA 2 – Paralelogramo 2: o objeto possui as mesmas propriedades que o anterior, no entanto, foi introduzido o segmento que representa a altura do paralelogramo que é o segmento perpendicular à reta suporte do vetor v. Ao movimentar os pontos A, A' e B, é possível observar que o segmento que representa a altura sempre se mantém perpendicular com a reta suporte do vetor v. A altura do paralelogramo é obtida utilizando a relação trigonométrica relativa ao seno do ângulo $B\hat{A}D$ do triângulo ABD, ou seja, $h = sen\alpha \cdot \|u\|$, para então determinar a área do paralelogramo 2, $A(\mathcal{P}) = h \cdot \|v\| \Rightarrow A(\mathcal{P}) = sen\alpha \cdot \|u\| \cdot \|v\|$.

Sendo $sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$, tem-se:

$$\left(Área\ \mathcal{P}\right)^2 = (\|u\|\|v\|sen\alpha)^2 = \|u\|^2\|v\|^2sen^2\alpha = \|u\|^2\|v\|^2(1 - cos^2\alpha)$$

$$= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2cos^2\alpha = \|u\|^2\|v\|^2 - (\|u\|\|v\|cos\alpha)^2$$
$$= \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2$$
$$Área\ \mathcal{P} = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}.$$

Observe que:

$$\left(Área\ \mathcal{P}\right)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 = det\begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix}$$

Se $u = (\alpha,\beta)$ e $v = (\alpha',\beta')$ em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY, então

$$\|u\|^2 = \alpha^2 + \beta^2,\ \|v\|^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2 \text{ e } \langle u,v\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta',$$

portanto,

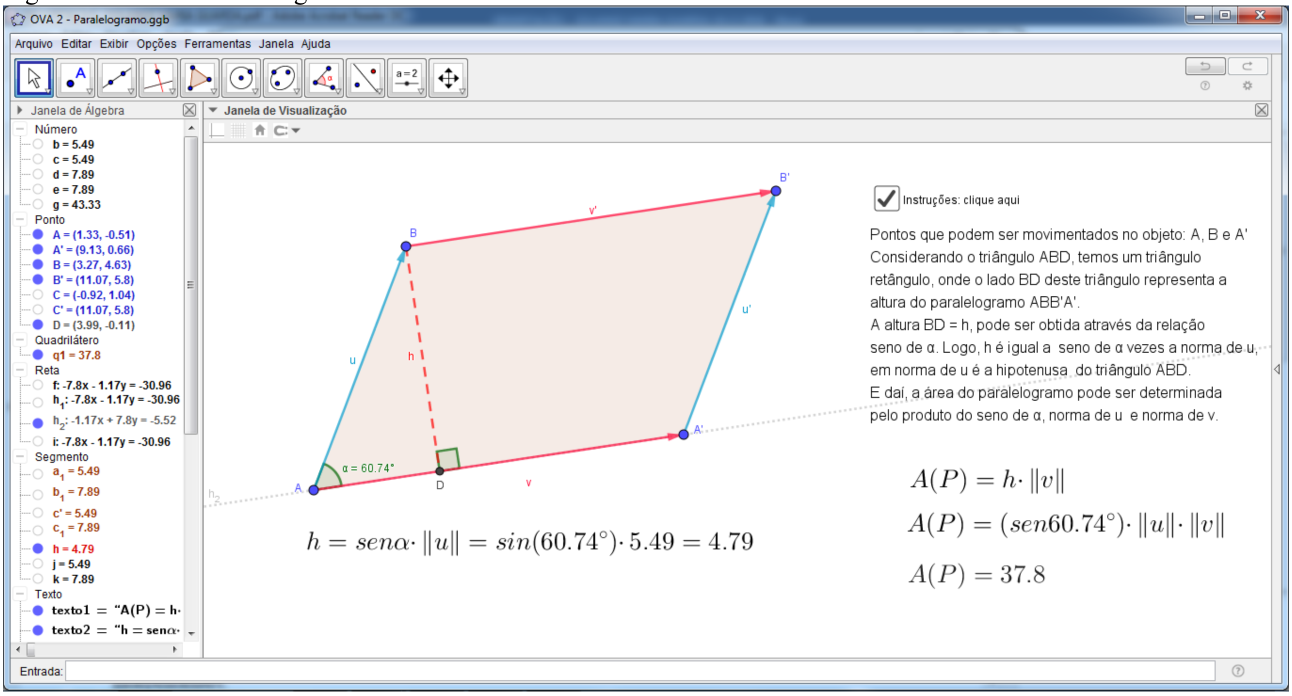
$$\left(Área\ \mathcal{P}\right)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)((\alpha')^2 + (\beta')^2) - (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2$$
$$= (\alpha\beta')^2 - 2(\alpha\beta')(\alpha'\beta) + (\alpha'\beta)^2 = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = \left[det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right]^2$$

Logo, a área do paralelogramo $\mathcal{P}$, cujos lados adjacentes são representantes dos vetores $u = (\alpha,\beta)$ e $v = (\alpha',\beta')$, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de u e v, respectivamente:

$$\left(Área\ \mathcal{P}\right) = \left|det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right|.$$

Neste objeto, destacam-se a altura do paralelogramo como sendo o segmento $\overline{BD}$ que é perpendicular à reta h_2 reta suporte do vetor v, o ângulo reto entre o segmento que representa a altura e o vetor v e o ângulo $\widehat{BAD}$. Esse objeto está disponível em: https://www.geogebra.org/m/jf4fjjhh.

Figura 3 – OVA 2: Paralelogramo 2



Fonte: Print do OVA 2 – Paralelogramo 2

Seu objetivo é determinar a altura relativa à base e à área do paralelogramo gerado por dois vetores linearmente independentes.

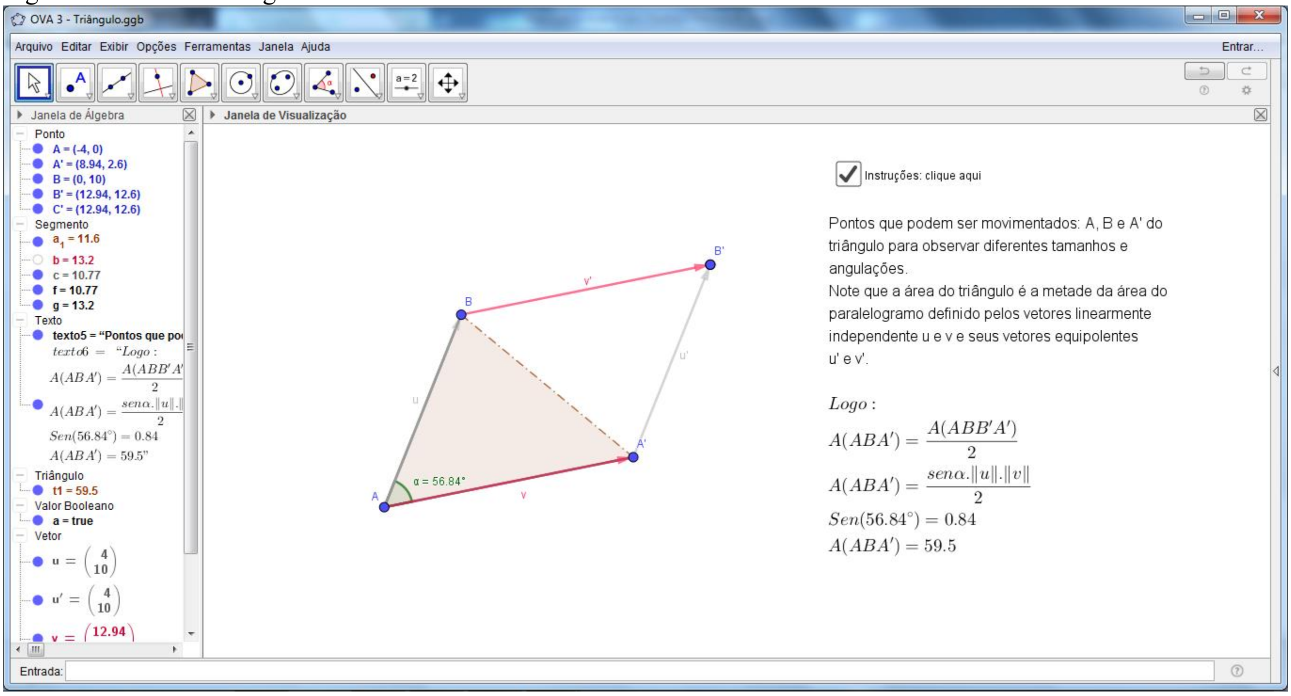
4.1.2 TRIÂNGULO

A área do triângulo gerada por dois vetores linearmente independentes, foi determinada considerando que o triângulo é a metade do paralelogramo gerado por esses vetores, daí foram utilizados os OVA's do paralelogramo como base para o OVA 3.

OVA 3 – Triângulo: esse objeto foi construído com base no OVA 1, introduzindo-se apenas a diagonal $A'B$ do paralelogramo $ABB'A$, de forma que o paralelogramo foi dividido em dois triângulos: o triângulo $\Delta ABA'$ e os triângulos $\Delta BB'A$.

Destaca-se, neste objeto, a região do triângulo $\Delta ABA'$, conforme Figura 4. Este objeto pode ser acessado em: https://www.geogebra.org/m/b6gey7vs.

Figura 4 – OVA 3: Triângulo



Fonte: Print do OVA 3 – Triângulo

O seu objetivo é determinar a área do triângulo gerado por dois vetores linearmente independentes.

Considerando o paralelogramo $ABB'A'$, tem-se que o segmento $\overline{BA'}$ divide o paralelogramo em dois triângulos $\Delta ABA'$ e $\Delta BB'A'$, que são congruentes pelo caso LLL, ou seja,

$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$, $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}'\|$ e o lado $\overline{BA'}$ é comum aos dois triângulos. Segue que a área do triângulo $\Delta ABA'$ é a metade da área do paralelogramo $ABB'A'$.

Sendo a área do paralelogramo, $A(ABB'A') = A(\mathcal{P}) = sen\alpha \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, a área do triângulo $\Delta ABA'$ é:

$$A(ABA') = \frac{A(ABB'A')}{2} = \frac{A(\mathcal{P})}{2} = \frac{sen\alpha \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}{2}$$

Portanto, a área de triângulo $\Delta ABA'$ é igual à metade do produto do $sen\alpha$, da norma de u e norma de v. Ainda, se os vetores u e v são vetores linearmente independentes, geradores do paralelogramo ou do triângulo, tais que $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$, a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ é igual ao determinante $\mathcal{D}$ das coordenadas dos vetores u e v, ou seja,

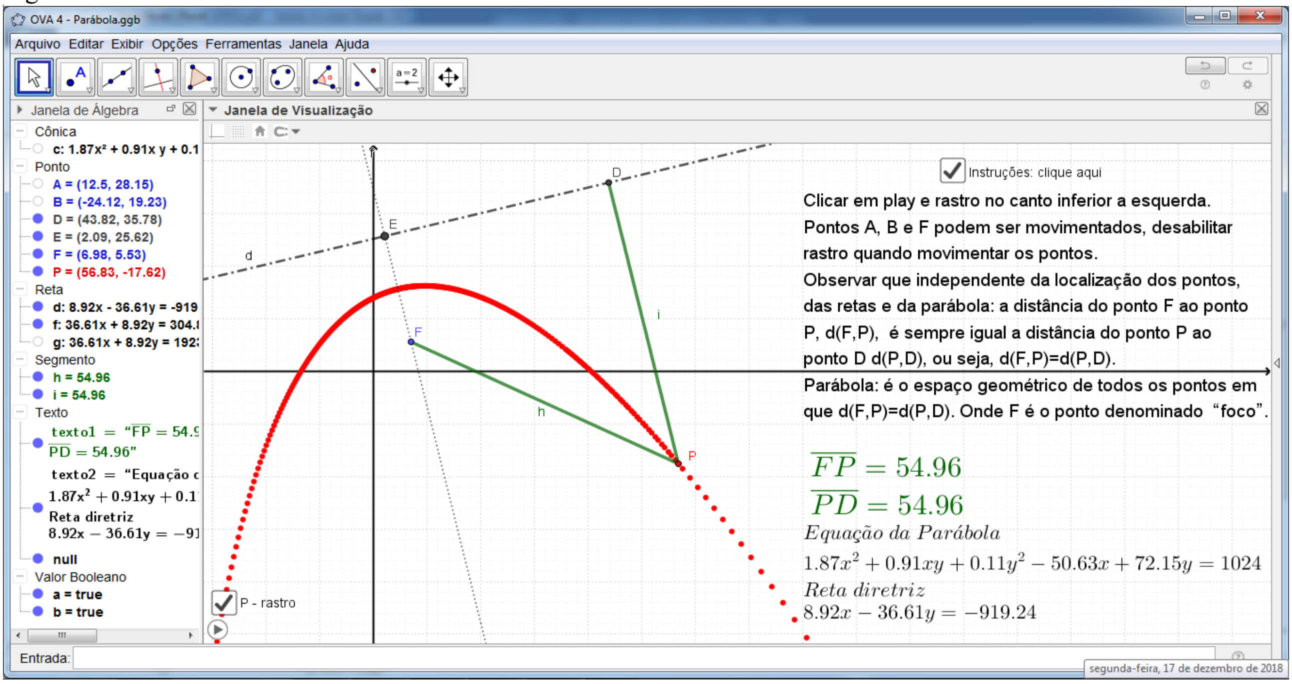
$A(\mathcal{P}) = \left| det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right| = |\alpha\beta' - \alpha'\beta| = |\mathcal{D}|$ e a área do triângulo $A(\Delta) = \frac{1}{2}|\mathcal{D}|$.

4.2 ESTUDO DA PARÁBOLA

Nesta seção, descrevem-se os OVA's 4 e 5, seus objetivos e os conteúdos matemáticos relacionados a eles no estudo da parábola.

OVA 4 – Parábola 1: destacam-se, nesse objeto, os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ com os valores de suas medidas, que são iguais. As orientações de uso estão inseridas no objeto e podem ser acessadas no link: [https://www.geogebra.org/m/wnzfzhep.](https://www.geogebra.org/m/wnzfzhep)

Figura 5 – OVA 4: Parábola 1



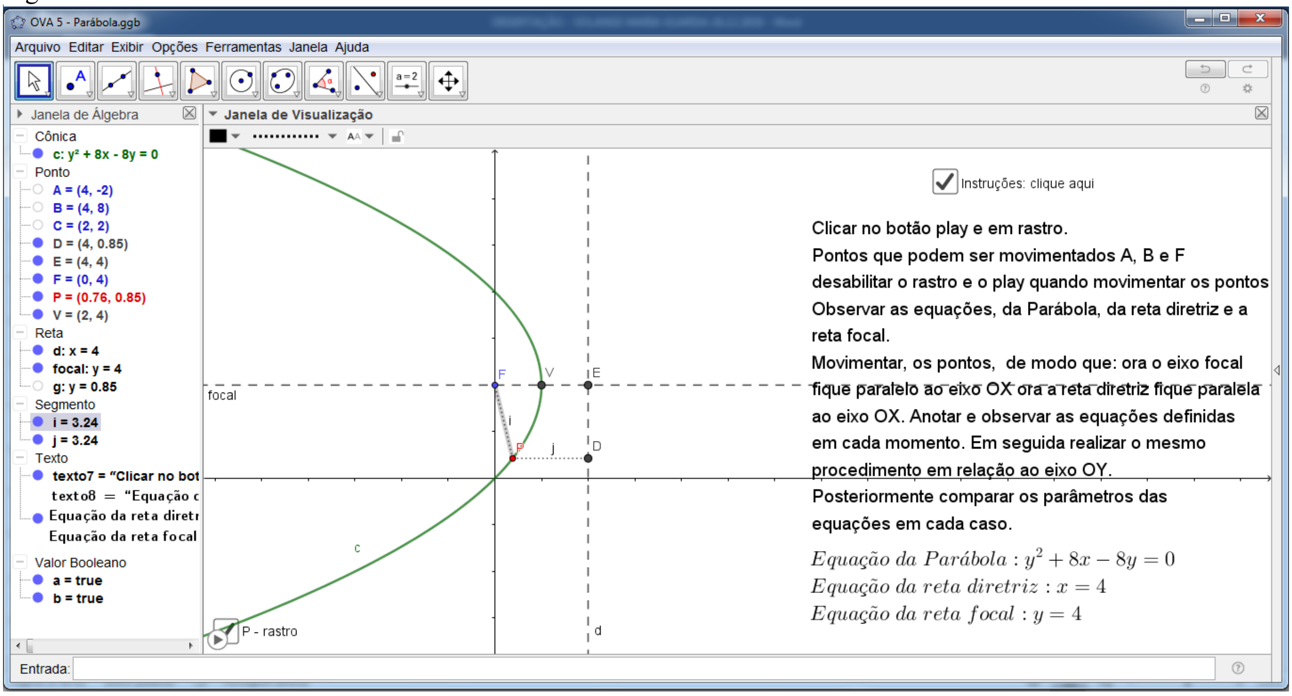
Fonte: Print do OVA 4 – Parábola 1

O objetivo desse OVA é reconhecer o lugar geométrico da parábola, que consiste no conjunto dos pontos P equidistantes do ponto F (denominado foco) e da reta diretriz d, ou seja, $d(F,P) = d(P,D)$, em que D é a projeção ortogonal de P sobre d.

OVA 5 – Parábola 2: esse objeto também aborda o lugar geométrico caracterizado pela parábola, porém destaca-se a localização da reta diretriz paralela a um dos eixos coordenados do sistema cartesiano OXY. Em suas instruções, é sugerido que o objeto seja manuseado, ora colocando o eixo focal paralelo ao eixo OX; ora colocando ele paralelo ao eixo OY e que sejam verificadas as diferenças nas equações representadas: equação da parábola, equação da reta diretriz e equação do eixo focal.

Nesse objeto, pode ser analisada, com base em sua movimentação, a relação entre o ponto P e o ponto do vértice V no momento em que P coincide com o ponto V. Neste momento podemos observar eanalisar a seguinte relação: $\overline{FP} = \overline{FV} = \overline{VE} = \overline{PD}$, sendo D o pé da perpendicular da reta diretriz d que passa pelo ponto P. Neste instante que D coincide com o ponto E, ponto de intersecção da reta diretriz e o eixo focal. Essas observações podem ser realizados no OVA, ele está disponível no link: https://www.geogebra.org/m/akevx5qx.

Figura 6 – OVA 5: Parábola 2



Fonte: Print do OVA 5 – Parábola 2

Os objetivos desse objeto são de identificar as diferenças da equação da parábola quando esta tem eixo focal paralelo ao eixo OX e quando tem eixo focal paralelo ao eixo OY e identificar o vértice como ponto médio do segmento $\overline{FE}$.

Vértice da parábola

Considera-se o segmento $\overline{FE}$, da Figura 6. O vértice V é o ponto médio desse segmento, pois V pertence à parábola, e assim, a distância de V até F é igual à distância de V à reta diretriz d, ou seja, $d(F,V) = d(V,d)$. Se E é o ponto de intersecção entre a reta diretriz e a reta focal, tem-se que $d(F,V) = d(V,E)$, de forma que as coordenadas do ponto V podem ser determinadas:

$$V = \left(\frac{x_F + x_E}{2}, \frac{y_F + y_E}{2}\right) = (x_v, y_v).$$

Para a determinação da forma canônica da equação da parábola, no sistema cartesiano ortogonal OXY, considera-se, inicialmente, o vértice V na origem $(0,0)$ do sistema cartesiano ortogonal OXY e a reta focal como um dos eixos das coordenadas. A obtenção das equações canônicas da parábola serão realizadas nos casos em que o eixo focal coincide com o eixo OX ou é paralelo ao eixo OX. No caso em que o eixo focal coincide com o eixo OY ou é paralelo a este, o processo é análogo.

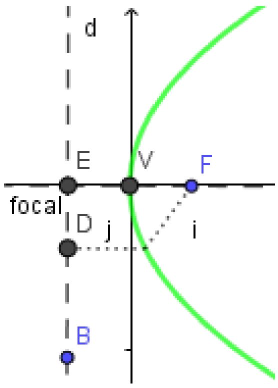
Para o caso da parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem $V(0,0)$, o eixo focal coincidente com o eixo OX e o foco $F(p,0)$ à direita da reta diretriz, tem-se: $d: x = -p$, reta focal $\ell: y = 0$, com $2p = d(F,d)$.

Da definição de parábola segue que:

$$
\begin{aligned}
P = (x,y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,d\,) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\
&\Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
&\Leftrightarrow -2px + y^2 = 2px \\
&\Leftrightarrow y^2 = 4px.
\end{aligned}
$$

Daí, a equação de $\mathcal{P}$ fica $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ que é a equação canônica da parábola quando o foco está à direita da reta diretriz, o eixo focal coincide com o eixo OX e o vértice é a origem do sistema ortogonal.

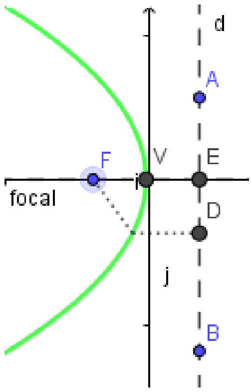
Figura 7 – Parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$



Fonte: autora

A obtenção da equação canônica com o vértice da parábola $\mathcal{P}$ na origem do sistema ortogonal OXY, $V(0,0)$, ponto $F(-p,0)$, reta diretriz $d: x = p$ e reta focal $\ell: y = 0$, ou seja, o caso em que o foco está à esquerda da reta diretriz, em que $2p = d(F,d)$ é análoga, sendo a equação canônica da parábola é $\mathcal{P}: y^2 = -4px$.

Figura 8 – Parábola $\mathcal{P}: y^2 = -4px$



Fonte: autora

A fim de se obter a forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ de vértice no ponto $V(x_v, y_v)$ qualquer e reta focal paralela ao eixo OX, considera-se um sistema de eixos ortogonais $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ com origem $\bar{O} = V = (x_v, y_v)$ e os eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ que têm direção e sentido iguais aos eixos OX e OY, respectivamente. No caso em que o foco F está à direita da reta diretriz d, tem-se que no sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, a equação da parábola é $\mathcal{P}: \bar{y}^2 = 4p\bar{x}$, o foco $\bar{F}(p, 0)$, o vértice $\bar{V}(0, 0)$, a reta diretriz $d: \bar{x} = -p$ e a reta focal $\ell: \bar{y} = 0$. Considerando que

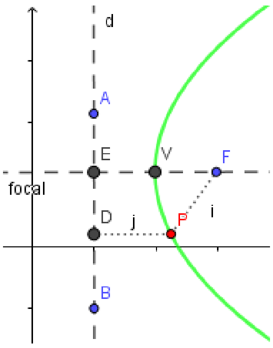
$$x = \bar{x} + x_v \text{ e } y = \bar{y} + y_v$$

segue que a equação da parábola $\mathcal{P}$ no sistema OXY é:

$$\mathcal{P}: (y - y_v)^2 = 4p(x - x_v)$$

e seus elementos são: foco $F(x_v + p, y_v)$, vértice $V(x_v, y_v)$, reta diretriz $d: x = x_v - p$ e reta focal $\ell: y = y_v$.

Figura 9 – Parábola $\mathcal{P}: (y - y_v)^2 = 4p(x - x_v)$

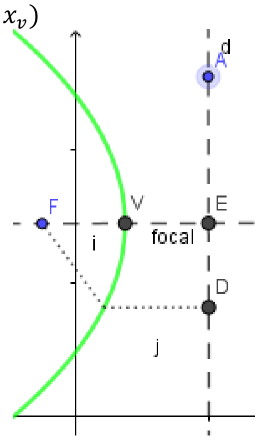


Fonte: autora

Quando o foco F está à esquerda da reta diretriz d, tem-se que no sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, a equação da parábola é $\mathcal{P}: \bar{y}^2 = -4p\bar{x}$, o foco $\bar{F}(-p, 0)$, o vértice $\bar{V}(0, 0)$, a reta diretriz $d: \bar{x} = p$ e reta focal $\ell: \bar{y} = 0$, tem-se, de forma análoga, que a equação da parábola $\mathcal{P}$ é:

$\mathcal{P}: (y - y_v)^2 = -4p(x - x_v)$ e seus elementos são: foco $F(x_v - p, y_v)$, vértice $V(x_v, y_v)$, reta diretriz $d: x = x_v + p$ e reta focal $\ell: y = y_v$.

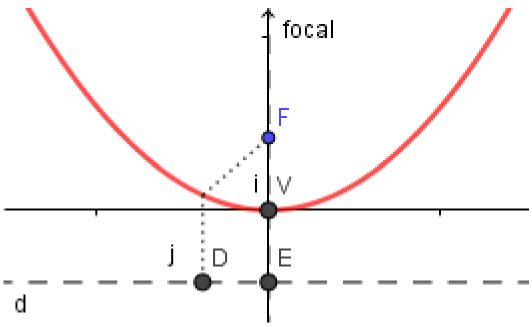
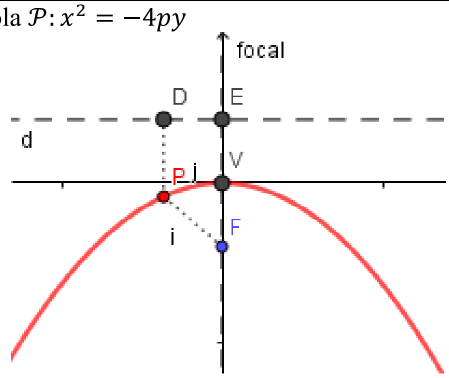
Figura 10 – Parábola $\mathcal{P}: (y - y_v)^2 = -4p(x - x_v)$

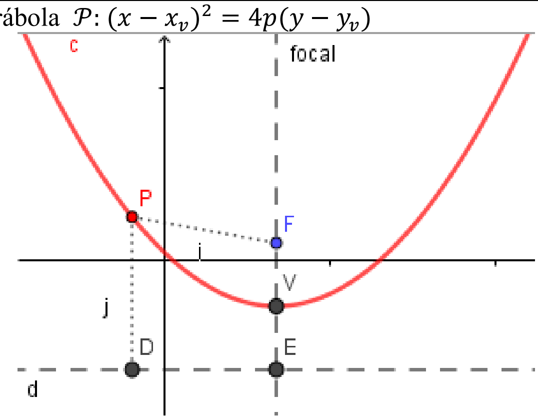
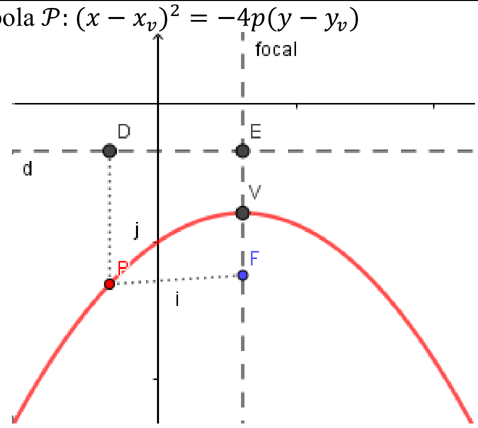


Fonte: autora

O quadro a seguir representa os elementos e as parábolas dos casos em que a reta focal coincide com o eixo OY ou é paralela a este. Como referido no início da seção, as demonstrações não serão feitas, pois podem ser realizadas de maneira análoga aos casos anteriores.

Quadro 1 – Resumo de parábolas com eixo focal coincidente com o eixo OY ou paralelo.

Ponto do foco (F) está acima da reta diretriz (d)	**Ponto do foco (F) está abaixo da reta diretriz (d)**
Eixo focal coincide com o eixo OY e o ponto do vértice $\boldsymbol{V = (0, 0)}$	
Parábola $\mathcal{P}: x^2 = 4py$  Fonte: autora Foco: $F(0, p)$ reta diretriz $d: y = -p$ reta focal $\ell: x = 0$ equação da parábola $\mathcal{P}: x^2 = 4py$	Parábola $\mathcal{P}: x^2 = -4py$  Fonte: autora Foco: $F(0, -p)$ reta diretriz $d: y = p$ reta focal $\ell: x = 0$ equação da parábola $\mathcal{P}: x^2 = -4py$

Ponto do foco (F) está acima da reta diretriz (d)	**Ponto do foco (F) está abaixo da reta diretriz (d)**
Eixo focal paralelo ao eixo OY e o ponto do vértice $\boldsymbol{V = (x_v, y_v)}$ ***um ponto qualquer***	
Parábola $\mathcal{P}: (x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$  Fonte: autora Foco: $F(x_v, y_v + p)$ reta diretriz $d: y = y_v - p$ reta focal $\ell: x = x_v$ equação da parábola $\mathcal{P}: (x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$	Parábola $\mathcal{P}: (x - x_v)^2 = -4p(y - y_v)$  Fonte: autora Foco: $F(x_v, y_v - p)$ reta diretriz $d: y = y_v + p$ reta focal $\ell: x = x_v$ equação da parábola $\mathcal{P}: (x - x_v)^2 = -4p(y - y_v)$

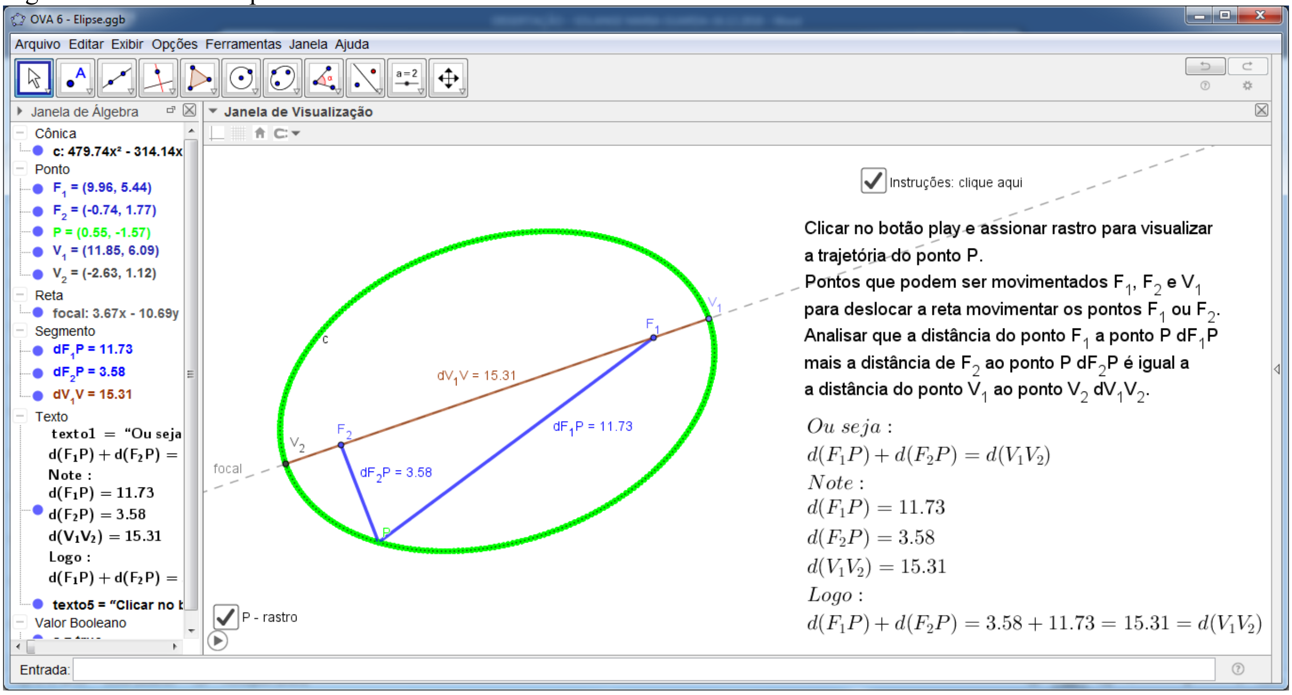
No momento da interação com os OVA's, os alunos observaram as características das parábolas para cada um dos casos descritos acima. Eles foram instigados a transitarem entre as representações na forma canônica e na forma geral, associando suas características ao lugar geométrico representado no gráfico.

4.3 ESTUDO DA ELIPSE

Nesta seção, são apresentados os OVAs 6, 7 e 8, seus objetivos e os conceitos matemáticos trabalhados durante a apresentação.

OVA 6 – Elipse 1: nesse objeto destacam-se os segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{F_2P}$ e $\overline{V_1V_2}$ e suas medidas com os pontos denominados focos F_1 e F_2, os pontos dos vértices V_1 e V_2, considerando que a soma da distância de P a F_1 e a distância de P a F_2 é igual à distância dos pontos V_1 e V_2, ou seja, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(V_1, V_2)$. Essas propriedades podem ser observadas no OVA, acessando o link: https://www.geogebra.org/m/z4sha9mj.

Figura 11 – OVA 6: Elipse 1

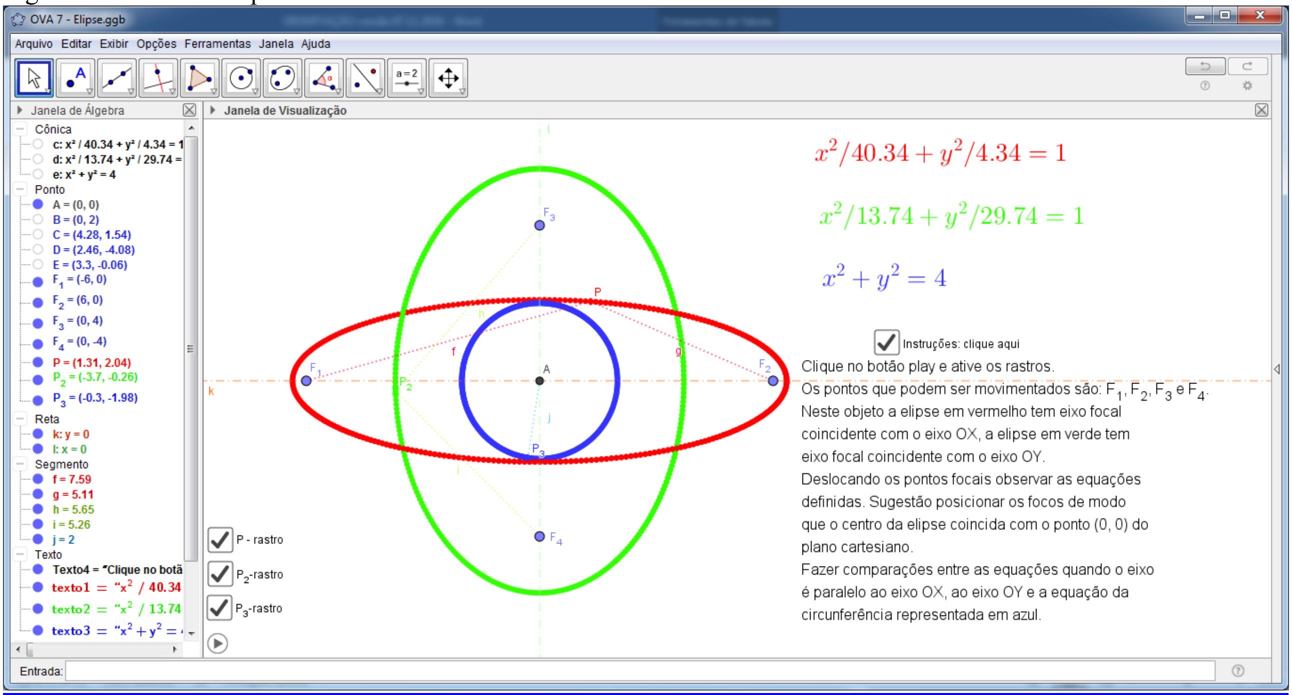


Fonte: Print do OVA 6 – Elipse 1

O objetivo desse objeto é identificar a distância de F_1 ao ponto P, $d(F_1P)$, a distância de F_2 ao ponto P, $d(F_2P)$, e concluir que a soma dessas distâncias é igual a uma constante, k, que é igual à distância entre os vértices V_1 e V_2.

OVA 7 – Elipse 2: o objeto foi construído de forma a apresentar duas elipses, com os eixos focais coincidentes com os eixos OX e OY do sistema cartesiano ortogonal OXY, respectivamente. Destacam-se, nesse objeto, as equações canônicas da elipse e da circunferência, permitindo-se comparar suas equações. Foi inserida a circunferência considerando que, se uma elipse tivesse focos coincidentes, ou seja, $d(F_1, F_2) = 0$, esta passaria a ser uma circunferência neste caso $F_1 = F_2$. Essas propriedades podem ser verificadas acessando o link: [https://www.geogebra.org/m/h3grbrvq.](https://www.geogebra.org/m/h3grbrvq)

Figura 12 – OVA 7: Elipse



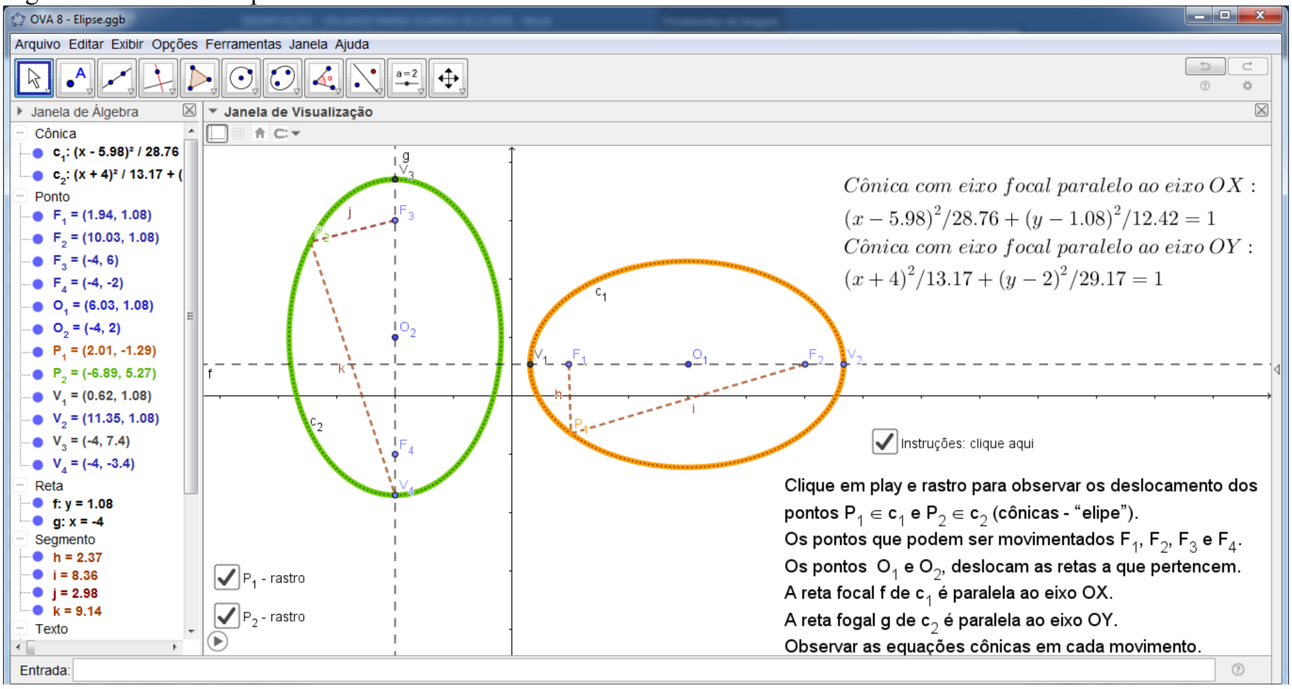
Fonte: Print do OVA 7 – Elipse 2

O objetivo desse objeto é identificar as diferenças nas representações das equações canônicas da elipse centrada na origem, quando esta tem eixo focal coincidente com o eixo OX, ou quando o eixo focal é coincidente com eixo OY e com a equação da circunferência.

OVA 8 – Elipse 3: o objeto possui duas elipses, uma representada com o eixo focal paralelo ao eixo OX e a outra representada com o eixo focal paralelo ao eixo OY, centradas em um ponto qualquer do plano. Os pontos que podem ser movimentados são os focais, um dos pontos do vértice de cada elipse V_2 e V_4, e as retas focais mantendo-as sempre paralelas aos eixos cartesianos.

Destacam-se, nesse objeto, as equações canônicas a fim de que sejam identificadas as diferenças entre a equação canônica da elipse com eixo paralelo ao eixo OX e a elipse com eixo paralelo ao eixo OY. As propriedades citadas e as instruções de uso podem ser verificadas, acessando-se o link: https://www.geogebra.org/m/evjxpg8z

Figura 13 – OVA 8: Elipse 3



Fonte: Print do OVA 8 – Elipse 3

O objetivo desse objeto é identificar as propriedades e as diferenças entre as equações canônicas da elipse quando esta possui eixo focal paralelo ao eixo OX ou quando a elipse possui eixo focal paralelo ao eixo OY para o caso em que seu centro seja um ponto qualquer do plano.

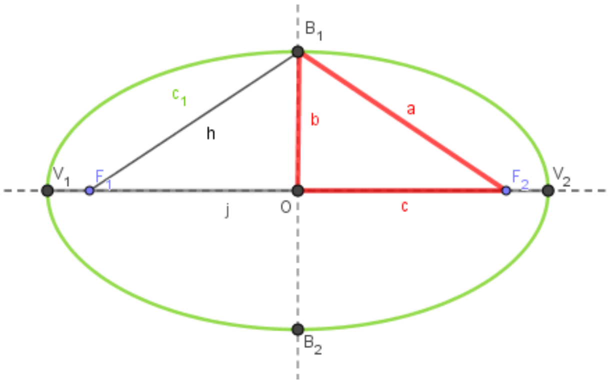
Os OVA's 6, 7 e 8 foram utilizados para trabalhar os conceitos matemáticos descritos a seguir:

Define-se uma Elipse $\mathcal{E}$ como o lugar geométrico de todos os pontos P do plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, F_1 e F_2, seja uma constante, igual a $2a$ e maior que a distância entre os foco, ou seja, $2a > 2c$, isto é: $\mathcal{E} = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$.

Para a obtenção de sua equação, considere um plano ortogonal com dois pontos fixos denominados focos, F_1 e F_2, tal que a distância entre eles seja $2c$ e dois pontos denominados vértices V_1 e V_2, cuja distância é representada por $2a$. O eixo focal da elipse é o segmento $\overline{V_1V_2}$ de comprimento $2a$, o eixo não focal da elipse é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$. O é o centro da elipse, intersecção dos eixos da elipse e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{B_1B_2}$. O número $e = \frac{c}{a}$ é denominado excentricidade da elipse, tal que, $0 < e < 1$. Note que o número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do centro aos focos. A Elipse $\mathcal{E}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

Na sequência, obtém-se a equação da elipse com eixo focal sobre o eixo OX e centro na origem do plano. Considere um sistema ortogonal OXY e uma elipse representada nesse sistema em que o centro O na origem deste sistema, eixo focal contém as coordenadas do vértice $V_1(-a,0)$ e $V_2(a,0)$, com $a > 0$, eixo não focal contém as coordenadas $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$, com $b > 0$, e focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, com $c > 0$. Observe que $0 < c < a$ e pelo Teorema de Pitágoras, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Figura 14 – Elipse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Fonte: autora

Observe, na Elipse da Figura 18, o triângulo retângulo ΔOB_1F_2, em que **a** é a hipotenusa e **b** e **c** são os catetos

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Pela definição de Elipse, temos que:

$$P(x,y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, tem-se:

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, substituindo: $b^2 = a^2 - c^2$, tem-se

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, dividindo por: a^2b^2, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que representa a forma equação na forma canônica da elipse, com centro na origem e eixo focal OX.

De forma análoga, se os pontos focais pertencem ao eixo OY e o centro da elipse coincide com a origem do sistema ortogonal OXY, conforme primeira figura do quadro 2, então sua equação canônica é: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, sendo seus principais elementos: reta focal $\ell: x=0$; reta não focal $\ell': y=0$; focos $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$; vértices sobre a reta focal $V_1(0,-a)$ e $V_2(0,a)$; vértices sobre a reta não focal $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$ em que $0<c<a$ e $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

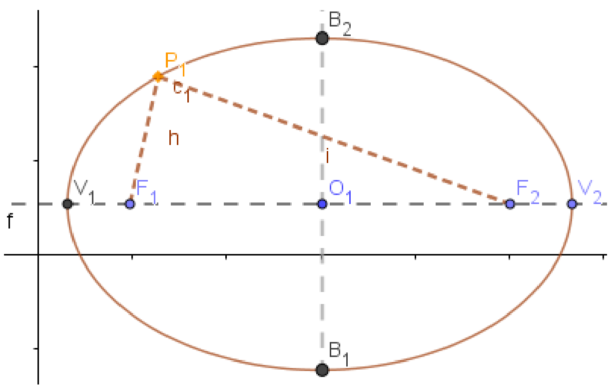
Por uma translação dos eixos coordenados, obtém-se a equação da elipse, na qual o eixo focal é horizontal (paralelo ao eixo do OX) ou vertical (paralelo ao eixo OY). Seja o eixo $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais transladados do sistema OXY, com a nova origem $\bar{O}=(x_0,y_0)$. Considera-se o caso de centro $\bar{O}(x_0,y_0)$, em que $\ell: y=y_0$ é a reta focal, $F_1(x_0-c,y_0)$ e $F_2(x_0+c,y_0)$ são os focos da elipse, um ponto $P(x,y)=P(\bar{x}+x_0,\bar{y}+y_0)$ pertence à elipse se e só se $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0-c-(\bar{x}+x_0))^2+(y_0-(\bar{y}+y_0))^2}+\sqrt{(x_0+c-(\bar{x}+x_0))^2+(y_0-(\bar{y}+y_0))^2}=$$

$$2a \Leftrightarrow d\big((\bar{x},\bar{y}),(-c,0)\big)+d\big((\bar{x},\bar{y}),(c,0)\big)=2a:$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Figura 15 – Elipse $\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$



Fonte: autora

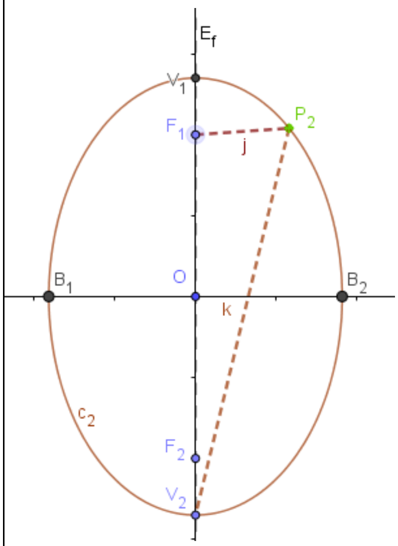
Tem-se ainda que os vértices sobre a reta focal são: $V_1(x_0-a,y_0)$ e $V_2(x_0+a,y_0)$ e os vértices sobre a reta não focal: $B_1(x_0,y_0-b)$ e $B_2(x_0,y_0+b)$.

Procedendo de forma análoga, verifica-se que a equação na forma canônica da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto (x_0,y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é $\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$. Em que $b^2=a^2-c^2$, a reta focal é $\ell: x=x_0$; a reta não focal é $\ell': y=y_0$; os focos são: $F_1(x_0,y_0-c)$ e

$F_2(x_0, y_0 + c)$; os vértices sobre a reta focal são $V_1(x_0, y_0 - a)$ e $V_2(x_0, y_0 + a)$ e os vértices sobre a reta não focal: $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$.

Quadro 2 – Resumo que representa as elipses com eixo focal ao eixo OY ou paralelo.

Elipse com eixo focal que coincide com o eixo OY



Fonte: autora

Focos: $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$

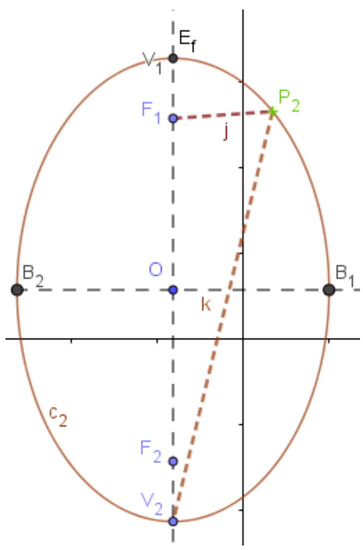
Centro: $O(0,0)$

Vértices sobre o eixo focal: $V_1(0, -a)$ e $V_2(0, a)$

Vértices sobre o eixo não focal: $B_1(-b, 0)$ e $B_2(b, 0)$

Equação canônica $\mathcal{E}: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

Elipse com eixo focal paralelo ao eixo OY



Fonte: autora

Focos: $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$

Centro: $O(x_0, y_0)$

Vértices sobre o eixo focal:

$V_1(x_0 - a, y_0)$ e $V_2(x_0 + a, y_0)$

Vértices sobre o eixo não focal: $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$

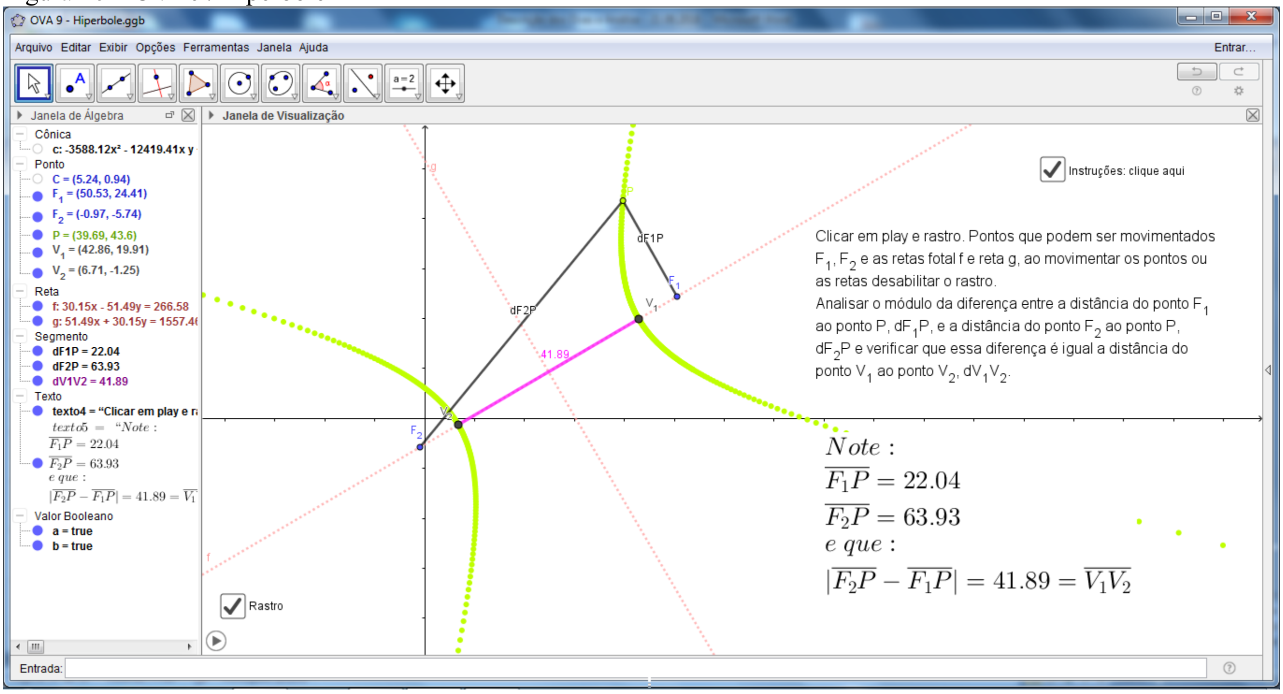
Equação canônica: $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

4.4 ESTUDO DA HIPÉRBOLE

Nesta seção, apresentam-se os OVA's 9, 10 e 11, seus objetivos e os conceitos matemáticos trabalhados em suas apresentações. Seção em que se encerra a descrição sobre a apresentação dos OVA's.

OVA 9 – Hipérbole 1: destacam-se, nesse objeto, os segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{F_2P}$ e $\overline{V_1V_2}$ com as respectivas medidas e a expressão algébrica $|\overline{F_2P} - \overline{F_1P}| = \overline{V_1V_2}$, em que F_1 e F_2, são os focos, P é um ponto que pertence à hipérbole e V_1e V_2 são seus vértices sobre o eixo focal, conforme figura 21. Essas propriedades e instruções do uso podem ser verificadas, acessando-se o link: https://www.geogebra.org/m/yuxs9s6z.

Figura 16 – OVA 9: Hipérbole 1

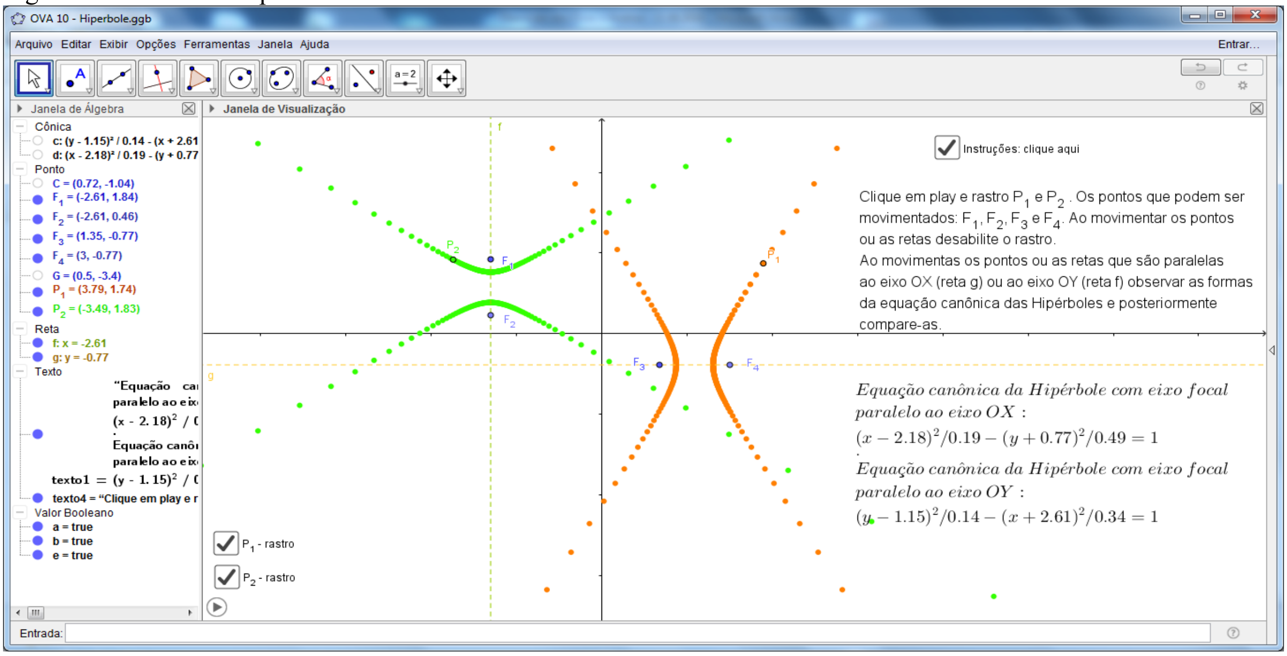


Fonte: Print do OVA 9 – Hipérbole 1

O objetivo desse objeto é identificar que o módulo da distância entre o ponto P e $F_{1,}d(P, F_1)$, menos a distância do ponto P ao ponto $F_2, d(P, F_2)$, é igual a uma constante k, que é igual à distância do ponto V_1 ao ponto $V_2, d(V_1, V_2)$, ou seja, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k = d(V_1, V_2)$.

OVA 10 – Hipérbole 2: esse objeto possui duas hipérboles, uma com eixo focal paralelo ao eixo OX e a outra com o eixo focal paralelo ao eixo OY. Os pontos que podem ser movimentados são os pontos focais. Destacam-se, nesse objeto, as equações canônicas das hipérboles representadas que podem ser verificadas com as instruções, acessando-se o link: https://www.geogebra.org/m/fed2y7bt.

Figura 17 – OVA 10: Hipérbole 2

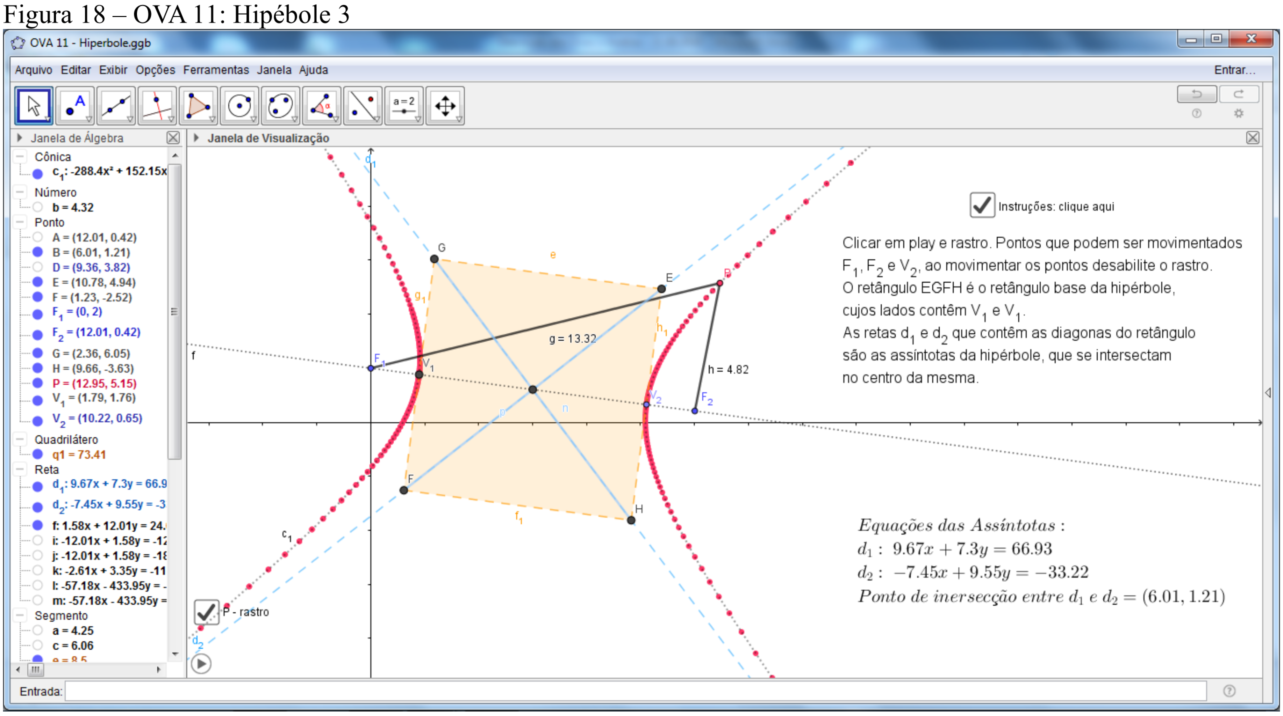


Fonte: Print do OVA 10 – Hipérbole 2

O objetivo desse objeto é identificar as diferenças entre as equações canônicas da hipérbole quando o eixo focal é paralelo ao eixo OX ou quando o eixo focal paralelo ao eixo OY.

OVA 11 – Hipérbole 3: destacam-se, nesse objeto, o quadrilátero base da hipérbole e as retas assíntotas, que são retas-suporte das diagonais desse quadrilátero, bem como as equações das assíntotas, que podem ser verificadas com as instruções de uso, acessando-se o link: https://www.geogebra.org/m/xrk8kc4d.

Figura 18 – OVA 11: Hipébole 3



Fonte: Print do OVA 11 – Hipérbole 3

O objetivo desse objeto é identificar o quadrilátero (retângulo), base da hipérbole e também identificar as retas que contêm as diagonais deste retângulo, que são as retas assíntotas e suas equações.

Os OVA's 9, 10 e 11 foram utilizados para trabalhar os conceitos matemáticos descritos na sequência.

Define-se uma Hipérbole $\mathcal{H}$ como o lugar geométrico de todos os pontos P do planno tal que o módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, F_1 e F_2, seja uma constante $2a$ e menor do que a distância entre os focos, ou seja, $2a < 2c$, isto é:

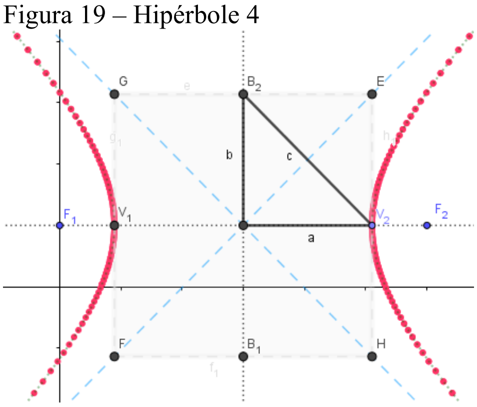
$$\mathcal{H} = \{P/\ |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}, 0 < a < c \text{ e } d(F_1,F_2) = 2c.$$

Para obtenção de sua equação, considere um plano com eixos ortogonais com dois pontos fixos sobre um dos eixos denominados focos F_1 e F_2 tal que a distância entre eles seja $2c$ e dois pontos sobre o mesmo eixo denominados vértices V_1 e V_2, cuja distância é representada por $2a$, sendo $a < c$. O eixo focal da hipérbole é o segmento $\overline{V_1V_2}$ de comprimento $2a$, o eixo não focal da hipérbole é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$, em que $b^2 = c^2 - a^2$.

O é o centro da hipérbole, intersecção dos eixos da hipérbole e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, conforme representados na figura 19. Note que a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal; b é a distância do centro aos vértices do triângulo sobre a reta não focal; e $\boldsymbol{c}$ é a distância do centro aos focos. A Hipérbole $\mathcal{H}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

Na sequência, será obtida a equação da hipérbole com eixo focal sobre o eixo OX e centro na origem do plano. Considere um sistema ortogonal OXY e uma hipérbole representada nesse sistema em que o centro O é a origem desse sistema, o eixo focal contém as coordenadas dos vértices $V_1(-a,0)$ e $V_2(a,0)$, com $a > 0$, o eixo não focal contém as coordenadas $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$, com $b > 0$ e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, com $c > 0$. Observe que $0 < a < c$ e pelo Teorema de Pitágoras, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Figura 19 – Hipérbole 4



A dedução desta equação $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, pelo Teorema da Pitágoras, já foi realizada no estudo da equação da elipse.

Fonte: autora

Pela definição de Hipérbole, tem-se que:

$$P(x,y)\,\epsilon\,\mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(P,F_1)-d(P,F_2) = 2a \quad (ramo\ direito\ de\ \mathcal{H}) \\ ou \\ d(P,F_1)-d(P,F_2) = -2a \quad (ramo\ esquerdo\ de\ \mathcal{H}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \quad (ramo\ direito\ de\ \mathcal{H}) \\ ou \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -2a \quad (ramo\ esquerdo\ de\ \mathcal{H}) \end{cases}.$$

O desenvolvimento dessa demonstração é feita de forma análoga à da elipse, chegando a:

$$P(x,y)\,\epsilon\,\mathcal{H} \Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

que representa a equação canônica da hipérbole, com centro na origem e eixo focal OX.

Como as assíntotas de $\mathcal{H}$ são retas que passam pela origem do sistema ortogonal OXY e tem inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação ao eixo OX, eixo focal, suas equações são: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

De forma análoga, se os pontos focais pertencem ao eixo OY e o centro da hipérbole coincide com a origem do sistema ortogonal OXY, conforme primeira figura do quadro 3, então sua equação canônica é: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} = 1$, sendo seus principais elementos reta focal $\ell: x = 0$; reta não focal $\ell': y = 0$; focos $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$; vértices sobre a reta focal $V_1(0,-a)$ e $V_2(0,a)$; vértices sobre a reta não focal $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$ em que $0 < a < c$ e $b = \sqrt{c^2-a^2}$, com as assíntotas $x = \pm\frac{b}{a}y$.

Por uma translação dos eixos coordenados, obtém-se a equação da hipérbole, em que o eixo focal é horizontal (paralelo ao eixo do OX) ou vertical (paralelo ao eixo OY).

Seja o eixo $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ um sistema de eixos ortogonais transladados ao sistema OXY com a nova origem $\bar{O}(x_0,y_0)$.

Considera-se o caso de centro $\bar{O}(x_0,y_0)$, onde $\ell: y = y_0$ é a reta focal, $F_1(x_0-c,y_0)$ e $F_2(x_0+c,y_0)$ são os focos da hipérbole, um ponto $P(x,y) = P(\bar{x}+x_0,\bar{y}+y_0)$ pertence à hipérbole se e só se $|d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a$.

$$\Leftrightarrow \left|\mathrm{d}\big((\bar{\mathrm{x}}+\mathrm{x}_0,\bar{\mathrm{y}}+\mathrm{y}_0),(\mathrm{x}_0-\mathrm{c},\mathrm{y}_0)\big) - \mathrm{d}\big((\bar{\mathrm{x}}+\mathrm{x}_0,\bar{\mathrm{y}}+\mathrm{y}_0),(\mathrm{x}_0+\mathrm{c},\mathrm{y}_0)\big)\right| = 2\mathrm{a}$$

$$\Leftrightarrow \left|\mathrm{d}\big((\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}}),(-\mathrm{c},0)\big) - \mathrm{d}\big((\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}}),(\mathrm{c},0)\big)\right| = 2\mathrm{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

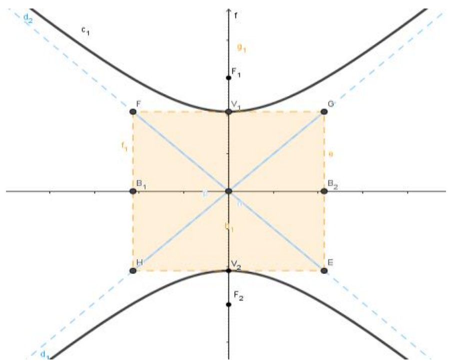
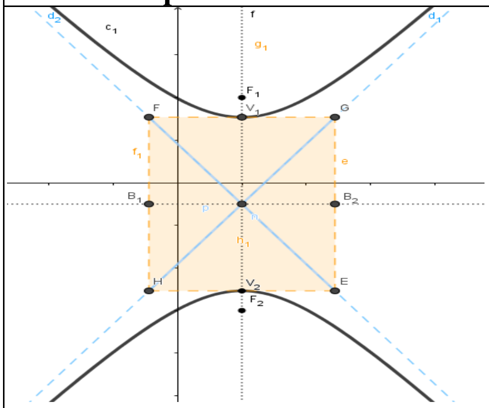
Tem-se ainda que os vértices sobre a reta focal são $V_1(x_0 - a, y_0)$ e $V_2(x_0 + a, y_0)$; os vértices sobre a reta não focal $B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 + b)$ e assíntotas $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

Procedendo de forma análoga, verifica-se que a equação canônica da hipérbole com centro no ponto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$, e eixo focal paralelo ao eixo OY, conforme segunda figura do quadro 3, é:

$$\mathcal{H}: \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Em que $b^2 = a^2 - c^2$, a reta focal é $\ell: x = x_0$; reta não focal é $\ell': y = y_0$; os focos são: $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$; os vértices sobre a reta focal são $V_1(x_0, y_0 - a)$ e $V_2(x_0, y_0 + a)$; os vértices sobre a reta não focal são $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$ e retas assíntotas são $x - x_0 = \pm\frac{b}{a}(y - y_0)$.

Quadro 3 – Resumo das hipérboles com eixo focal coincidente ou é paralelo ao eixo OY.

Eixo focal coincide com o eixo OY	
	Focos: $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ Centro: $O(0,0)$ Eixo focal $\ell: x = 0$ Eixo não focal $\ell': y = 0$ Vértices sobre o eixo focal $V_1(0, -a)$ e $V_2(0, a)$ Vértices sobre o eixo não focal $B_1(-b, 0)$ e $B_2(b, 0)$ Equação canônica: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Assíntotas: $x = \pm\frac{b}{a}y$
Eixo focal paralelo ao eixo OY	
	Focos: $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ Centro: $O(x_0, y_0)$ Eixo focal: $\ell: x = y_0$ Eixo não focal: $\ell': y = x_0$ Vértices sobre o eixo focal $V_1(x_0 - a, y_0)$ e $V_2(x_0 + a, y_0)$ Vértices sobre o eixo não focal $B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 + b)$ Equação canônica: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ Assíntotas: $(x - x_0) = \pm\frac{b}{a}(y - y_0)$

4.5 EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU E RECONHECIMENTO DAS CÔNICAS

A partir da interação com os OVA's, propôs-se que os alunos identificassem o gênero de cada cônica e a representassem, por meio da sua equação canônica a partir de sua equação na forma geral. É importante frisar que cada uma das cônicas pode ser expressa pela equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, podendo esta representar uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, dependendo das combinações de valores que os coeficientes (*A, B, C, D, E* e *F*) assumem. Em vários OVA's são apresentadas as equações das cônicas estudadas, na forma geral, permitindo aos alunos a análise dos coeficientes para cada situação, e a observaçãodas várias maneiras de representação de uma mesma cônica, seja pela equação geral, pela equação paramétrica e na representação geométrica. Ao proporcionar esse trânsito, acredita-se que possa ocorrer a aprendizagem de acordo com a teoria de Durval.

Na sequência, apresenta-se um resumo, visando a identificar as condições, as combinações de valores dos coeficientes para que a equação geral represente uma parábola, uma elipse (e em um caso particular, uma circunferência) ou uma hipérbole. Embora sejam abordados em alguns OVA's os casos que envolvam rotações, esses não tiveram seu estudo aprofundado no que se refere a transitar entre as várias formas de sua representação, por envolverem conceitos mais elaborados de álgebra linear, que não estava em pauta no momento da aplicação. Assim, no resumo que segue não se abordam esses casos, de forma a considerar apenas os casos em que se tem $C = 0$.

PARÁBOLA

1ª) $A = 0 \; e \; B \neq 0 \; ou \; A \neq 0 \; e \; B = 0$, ou seja, entre A e B apenas um pode existir;

2ª) $BD \neq 0 \; ou \; AE \neq 0$, a equação geral precisa ter duas variáveis **x** e **y.**

Observação: Se a equação geral tiver apenas uma variável (ou **x** ou **y**), então ela representa um par de retas ou um conjunto vazio.

ELIPSE

1ª) $AB > 0 \; e \; A \neq B$, ou seja, A e B precisam ser diferentes e ter o mesmo sinal;

2ª) $BD^2 + AE^2 - 4ABF > 0$, ou $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} > 4F$.

HIPÉRBOLE

1ª) $AB < 0$, ou seja, A e B precisam ter sinais diferentes;

2ª) $BD^2 + AE^2 - 4ABF \neq 0$, ou $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} \neq 4F$.

Observação: Se $BD^2 + AE^2 - 4ABF = 0$, a equação geral representa um par de retas.

Uma maneira alternativa de se reconhecer a cônica é escrever as equações na forma reduzida usando os processos de fatoração ao completar quadrados. Isso é abordado ao transitar entre as formas geral e canônica de cada cônica.

5 RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

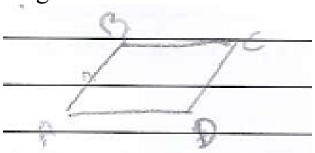
A pesquisa foi realizada num período de 6 encontros, com duração de 4 horas-aula, 3h30min, cada encontro, totalizando 24 horas-aulas, no período noturno. A apresentação dos OVA's realizou-se ao longo dos encontros, quando cada tópico em estudo era abordado. No primeiro encontro foram trabalhados os OVA's 1, 2 e 3 – paralelogramo e triângulo. No segundo encontro, os OVA's 4 e 5 – parábola. No terceiro encontro, deu-se continuidade ao trabalho sobre o estudo da parábola. No quarto encontro, foram abordados os OVA's 6, 7 e 8 – elipse. Parte do quinto encontro, destinou às atividades sobre elipse, também introduziu-se o estudo da hipérbole, apresentando os OVA's 9, 10 e 11. No sexto encontro, deu-se continuidade ao estudo da hipérbole, finalizando-o com atividades destinadas à turma. Em cada encontro, foram abordados os conceitos matemáticos envolvidos em cada objeto, bem como desenvolvidas atividades relacionadas.

Nesta seção, apresento os principais resultados, obtidos na interação dos OVA's com os objetos de estudos realizados pelos alunos. Junto com a análise dos dados coletados, focando, dentre outros aspectos, a interação das formas de representação: representação geométrica, algébrica e escrita, e o trânsito entre essas formas de representação, conforme propõe Duval.

5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS SOBRE PARALELOGRAMO E TRIÂNGULO

A atividade consistiu na apresentação dos OVA's 1, 2 e 3, e durante essa atividade, os alunos foram instigados a responder algumas questões considerando os objetos apresentados. Na primeira atividade, solicitou-se que os alunos descrevessem sua percepção em relação às propriedades do paralelogramo, como determinar sua altura e área, bem como a área do triângulo, ambos, gerados por dois vetores linearmente independentes. A atividade seguinte consistiu na resolução de exercícios para verificar a aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos trabalhados utilizando como ferramenta de abordagem os OVA's. As suas percepções relativas a essa atividade são apresentadas no quadro 4. A fim de apresentar as respostas de cada aluno, buscando preservar sua identidade, foram identificados pela letra "A" seguida de um número, atribuído aleatoriamente a cada aluno de 1 a 17, quantidade de alunos envolvidos nas atividades. Dessa forma, A1 representa o aluno 1 e assim, sucessivamente.

Quadro 4 – Percepção dos alunos relativa às propriedades do paralelogramo a partir da interação com o OVA 1.

Questão: Quais as propriedades do paralelogramo você identifica no OVA 1?			
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A1	Lados paralelos, ângulos opostos pelo vértice consecutivos	A10	O paralelogramo possui dois pares de lados paralelos, portanto são vetores equipolentes, e que não importa, o “movimento” que se faça, os lados permanecem paralelos e os ângulos internos opostos pelo vértice sempre serão congruentes.
A2	Lados paralelos, equipolentes, mesma norma, mesmo sentido, ângulos internos soma 360º.	A11	O paralelogramo possui 2 pares de lados paralelos, portanto, são vetores equipotentes, e que não importa o movimento que se faça os lados permanecem paralelos e os ângulos internos opostos são congruentes e ângulos consecutivos suplementares.
A3	Os lados são paralelos e equipolentes. Os ângulos são congruentes do seu ângulo oposto.	A12	Ângulos e lados opostos são iguais.
A4	Lados equipolentes, ângulos alternos internos, lei do seno para a altura.	A13	Possui lados e ângulos opostos congruentes, lados opostos paralelos, ângulos consecutivos formam 180º.
A5	Mesma norma, mesmo sentido lados paralelos. Os ângulos opostos são congruentes.	A14	Lados e ângulos opostos congruentes.
A6	Lados paralelos, ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Ângulos internos somam 360º. 	A15	Que são vetores paralelos, que os ângulos são congruentes, que indiferente como o paralelo muda ele ficam com os ângulos internos congruentes.
A7	Lados (vetores) opostos são paralelos e ângulos opostos são congruentes.	A16	Os ângulos opostos são congruentes, os vetores são paralelos.
A8	Observando o paralelogramo tem-se que ele possui dois pares de lados paralelos que são vetores equipolentes e que não importa o “movimento” que se faça os lados permanecem paralelos e ângulos internos opostos sempre são congruentes.	A17	Que são vetores paralelos, que os ângulos são congruentes, que indiferente como o paralelo muda eles ficam com os ângulos internos congruentes.
A9	Lados equipolentes, ângulos alternos internos iguais, lei do seno para a altura.		

Ao analisar as respostas dos alunos à questão apresentada no momento da interação com o OVA 1, verificou-se que a maioria conseguiu identificar duas das propriedades do paralelogramo: que os lados paralelos possuem a mesma medida, ou seja, a norma dos vetores u e u’ são iguais, assim como a norma dos vetores v e v’(A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A16); e que os ângulos opostos são congruentes, (A3, A5, A6, A7, A8, A10, A11, A12, A13, A14 e A16). Apenas dois alunos citaram o fato de os ângulos consecutivos serem suplementares (A11 e A13). Os alunos A15 e A17 descreveram que, independente de como o paralelogramo é movimentado, os ângulos permanecem congruentes, não observando se essa propriedade é válida somente para os ângulos opostos. O aluno A2 descreveu que a soma dos ângulos internos é 360º. O aluno A8 descreveu os lados paralelos como vetores equipolentes e que, independente da posição do paralelogramo, essa propriedade permanecia e os ângulos opostos "pelo vértice" eram congruentes, mesma descrição realizada pelo aluno A10. Com base na análise realizada, percebe-se, que, embora este último aluno tenha feito a observação correta na interação com o OVA1, houve uma confusão de linguagem, ao falar "opostos pelo vértice".

Observa-se ainda que alguns alunos tiveram dificuldades em expressar suas conclusões fazendo confusão de linguagem e/ou apresentando respostas desconexas e incompletas com relação às situações observadas. A exemplo os alunos A1 e A4 fazem descrições confusas e desconexas, o que sugere uma dificuldade de estabelecer as transformações de representação sugeridas por Durval. Já no caso dos alunos A2, A3, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16 e A17, parece haver um indicativo da habilidade de transitar da representação geométrica para a representação escrita, sugerindo-se a compreensão dos conceitos abordados.

Com o propósito de determinar a área do paralelogramo, sugeriu-se que os alunos observassem o OVA 2, que tem representada a altura e o ângulo formado entre os dois vetores u e v, geradores do paralelogramo. Eles deveriam apontar a forma de determinar a altura do paralelogramo para, posteriormente, determinar sua área, utilizando a linguagem vetorial proposta no objeto virtual de aprendizagem. No OVA 3, com a introdução do segmento $\overline{A'B}$ (diagonal do paralelogramo), os alunos deveriam determinar a forma de calcular a área do triângulo, sendo que esse segmento dividiu o paralelogramo $ABB'A'$ em dois triângulos congruentes $\Delta ABA'$e $\Delta BB'A'$. As percepções dos alunos acerca dessa atividade são apresentadas no quadro 5.

Quadro 5 – Representação da altura e área do paralelogramo e área do triângulo usando linguagem vetorial apresentadas nos OVA 2 e 3.

Pergunta: De que forma é possível determinara a altura e a área do paralelogramo e a área do triângulo?			
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A1	$Sen\,\alpha = \frac{cat\,op}{hipt}$ exemplo = você irá usar o cateto adjacente mais a hipótenusa para descobrir $h = \frac{v}{w}$ pode ser através do determinante $A(ABC) = det\begin{pmatrix}4 & 9\\ 2 & 6\end{pmatrix} / 36-18 / \frac{18}{2} / = \boxed{9}$ $(4,9)$ e $(2,6)$ ou $A(ABC) = \frac{Sen\,\alpha \cdot \lVert\vec{v}\rVert \cdot \lVert\vec{u}\rVert}{2}$ $A(P) = Sen\,\alpha \cdot \lVert\vec{v}\rVert \cdot \lVert\vec{w}\rVert$	A10	A altura de um triângulo pode ser determinada pela fórmula $sen\alpha = \frac{cat\ Op}{hip}$, sendo que a hipotenusa é a norma do vetor u, $h = sen\alpha \cdot \lVert u \rVert$. Área do paralelogramo = $A(P) = \lVert\vec{v}\rVert . sen\,\alpha . \lVert\vec{u}\rVert$ Área do triângulo = $A(ABC) = \frac{1}{2} . Sen\alpha . \lVert\vec{u}\rVert . \lVert\vec{v}\rVert$

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A2	Seno A = $\frac{h}{\text{norma de } \vec{u}}$ Lei do Seno $sen\ A = \frac{cat\ op}{hip}$ Área do paralelogramo $A(P) = \left\| det \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix} \right\|$ Não representou a área do triângulo	A11	A altura de um triângulo pode ser determinada pela fórmula $sen\alpha = \frac{cat\ Op}{hip}$, sendo que a hipotenusa é a norma do vetor u, $h = sen\alpha.\|u\|$. $A(P) = sen\ \alpha . \|\vec{u}\| . \|\vec{w}\|$ $A(ABC) = \frac{1}{2} \left\| det \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix} \right\|$
A3	 $sen\alpha = \frac{h}{\|\vec{v}\|}$ $\hookrightarrow h = sen\alpha . \|\vec{v}\|$ $Det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ $\frac{1}{2} \left\| det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \right\|$	A12	$Sen\ \alpha = \frac{h}{\|u\|}$ $h = Sen\ \alpha \cdot \|\vec{u}\|$ A paralelogramo: $A = \|\vec{w}\| \cdot h$; $A = Sen\alpha \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|$ A triângulo: $A = \frac{\|\vec{w}\| \cdot h}{2}$ $A = \frac{1}{2} \cdot Sen\alpha \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|$
A4	$sen\alpha = \frac{cat.op}{hip}$ $sen\alpha = \frac{h}{\|\vec{v}\|}$ $sen\alpha . \|\vec{v}\| = h$ $A(P) = Sen\ \alpha . \|\vec{v}\| . \|\vec{w}\|$ $A(ABC) = \frac{1}{2} \left\| det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \right\|$	A13	$h = Sen\ \alpha \cdot \|u\|$ Paralelogramo $A(P) = det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ Triângulo $A_\Delta = \frac{1}{2} . Sen\alpha \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|$
A5	Sen A = $\frac{h}{\text{norma de } \vec{u}}$ $A(P) = h\ \|\vec{v}\|$ Não representou a área do triângulo	A14	$Sen\ \alpha = \frac{h}{\|\vec{u}\|} \rightarrow h = Sen\ \alpha . \|\vec{u}\|$ Paralelogramo: $A = \|w\| . h \rightarrow A = Sen\ \alpha . \|\vec{v}\| . \|\vec{u}\|$ Triângulo: $A = \frac{\|w\| . h}{2} \rightarrow A = \frac{Sen\ \alpha . \|\vec{w}\| . \|\vec{u}\|}{2}$
A6	Seno A = $\frac{h}{\text{norma de } \vec{u}}$ $sen\ A = \frac{cat\ op}{hip}$ Lei do Seno paralelogramo $A(P) = \left\| det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \right\|$ Área do Triângulo $A(ABC) = \frac{1}{2} \left\| det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \right\|$	A15	$sen\alpha = \frac{cat\ op.}{hip} = sen.\frac{h}{\|\vec{u}\|}$ $\|\vec{v}\| . sen\alpha = h$ $A(ABC) = Sen\ \alpha . \|\vec{v}\| . \|\vec{u}\|$ ou $A(ABC) = det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ paralelogramo $A(ABC) = \frac{1}{2} sen\alpha . \|\vec{v}\| . \|\vec{u}\|$ ou $A(ABC) = \frac{1}{2} sen\alpha . \|\vec{v}\| . \|\vec{u}\|$ Triângulo
A7	$Sen\alpha = \frac{cat\ op}{hip} \rightarrow Sen\alpha = \frac{\|\vec{u}\|}{h} \rightarrow h = Sen\alpha . \|\vec{u}\|$ Paralelogramo - $A(P) = Sen\ \alpha . \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$ Triângulo - $A(ABC) = \frac{1}{2} . Sen\alpha \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ ou $A(ABC) = \frac{1}{2} \left\| det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right\|$	A16	$sen\ \alpha = \frac{cat\ op}{hip} = sen\alpha = \frac{h}{\|\vec{u}\|}$ $\|\vec{u}\| . sen\alpha = h$ área do triângulo: $A = \frac{1}{2} . sen\alpha\ \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$ ou $A = \frac{1}{2} \left\| det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right\|$ área do paralelogramo: $A = sen\alpha\ \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$ ou $A = \left\| det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right\|$

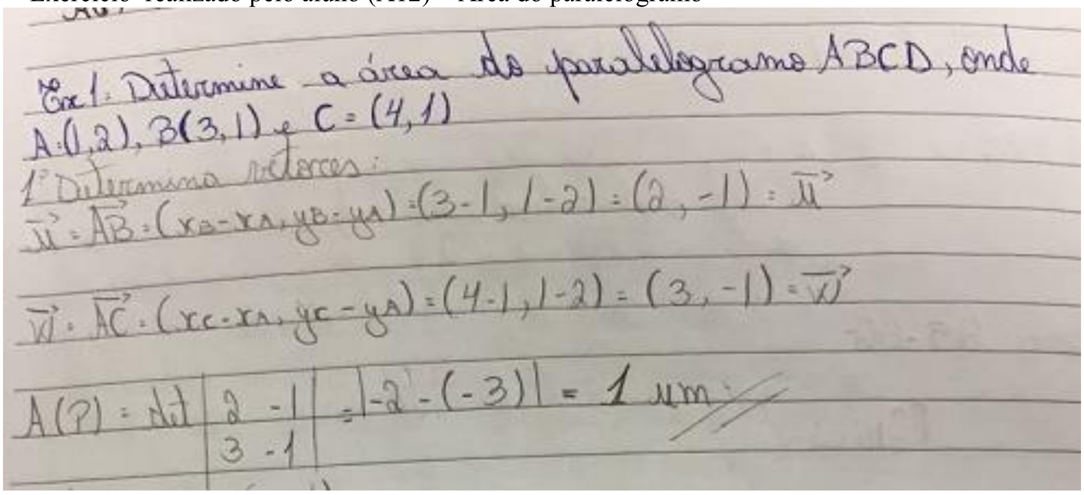
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A8	A altura do triângulo pode ser determinada pela fórmula $sen\,\beta = \frac{cat\,op}{hip}$, sendo que a hipotenusa é a norma do vetor. Dessa forma a tem-se $h = sen\,\beta . \Vert\vec{u}\Vert$. Área paralelogramo $= sen\,\alpha . \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{w}\Vert$ Área triângulo $= \frac{1}{2} . sen\,\alpha . \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{v}\Vert$	A17	$sen\,\alpha = \frac{cat\,op}{hip} = sen = \frac{h}{\Vert\vec{v}\Vert}$ $\Vert\vec{v}\Vert\, sen\,\alpha = h$ $A(A,B,C) = sen\,\alpha . \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{v}\Vert$ ou $A(A,B,C) = \left\vert det \begin{vmatrix} \alpha & B \\ \alpha' & B' \end{vmatrix} \right\vert$ Paralelogramo $A(A,B,C) = \frac{1}{2} sen\,\alpha . \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{v}\Vert$ ou $A(A,B,C) = \frac{1}{2} \left\vert det \begin{vmatrix} \alpha & B \\ \alpha' & B' \end{vmatrix} \right\vert$ Triângulo
A9	$sen = \frac{cat.\,opost}{hip} = \frac{h}{\Vert\vec{u}\Vert} = sen\,\alpha . \Vert\vec{v}\Vert = h$ $A(ABC) = \frac{1}{2} . sen\,\alpha . \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{v}\Vert$ — $A(P)\, sen\,\alpha . \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{v}\Vert$ $A(ABC) = \frac{1}{2} \left\vert det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \right\vert$		

Ao analisar a representação em linguagem algébrica, verificou-se que 15, dos 17 alunos que realizaram a atividade, representaram a altura do paralelogramo como sendo o produto do seno do ângulo entre os vetores geradores do paralelogramo e a norma do vetor base do paralelogramo. Embora essa representação esteja presente na manipulação dos OVA's, acredita-se que houve a compreensão dessa relação, no entanto, no momento em que foram instigados a fazer a representação em linguagem escrita, referiam-se a elementos (em particular a altura e o ângulo) de representação geométrica, sem representá-la em suas respostas. Acredita-se que isso tenha ocorrido em função de o objeto estar projetado e que os educandos estavam se baseando na projeção, para fazerem a representação escrita, não se dando conta de que seu texto poderia ser acessado, sem a projeção. Foi identificado que o aluno A1 teve dificuldade de expressar a determinação da altura do paralelogramo utilizando os elementos propostos no OVA 2. Acredita-se que ele não tenha conseguido realizar a transformação entre as formas de representação visual, geométrica e escrita. O aluno A6, apesar de ter escrito "lei do seno" de forma equivocada, fez a representação da relação trigonométrica do seno de forma correta, no entanto, na parte inicial colocou uma representação desconexa igual à representação do aluno A1, o que sugere uma representação sem a compreensão real ou cópia.

Quanto à representação algébrica da área do paralelogramo e do triângulo, os alunos A1, A8, A10, A12 e A14 representaram-na de forma correta, utilizando-se de linguagem vetorial, sugerindo que estes conseguiram fazer a conexão entre as representações geométrica, algébrica e escrita. Para representar a área do paralelogramo e do triângulo, os alunos A3, A4, A7, A9, A11, A16 e A17 transitaram entre a representação utilizando seno, norma e a representação utilizando determinante das coordenadas dos vetores linearmente independentes geradores do paralelogramo e/ou do triângulo referindo-se à forma de calcular o produto vetorial já estabelecida anteriormente, sugerindo haver conexão semiótica entre as diferentes formas de representação independente da representação utilizada. Os alunos A2 e A5 representaram somente a área do paralelogramo.

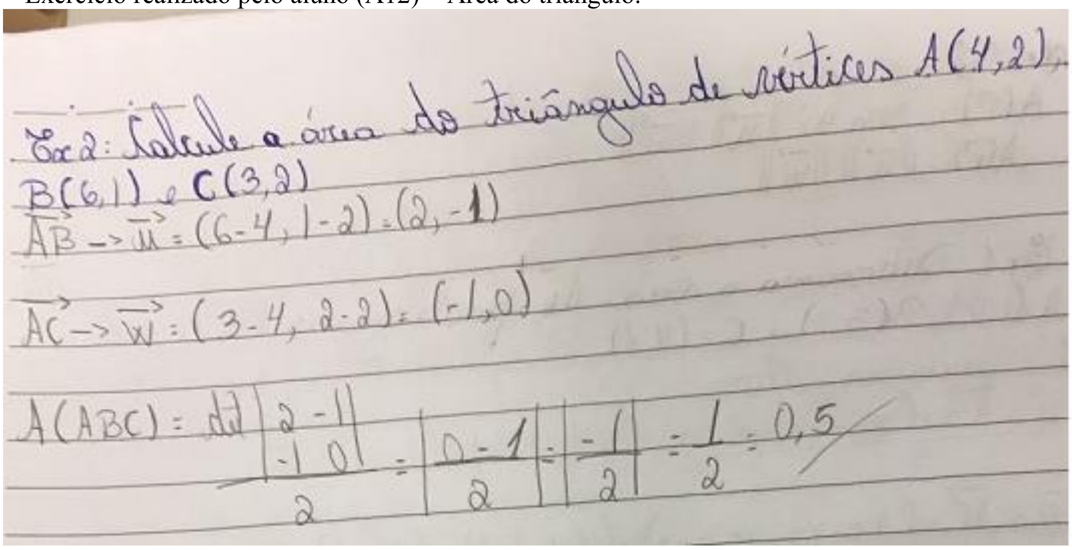
Após a apresentação e interação com os OVA's 1, 2 e 3, foram realizadas atividades a fim de verificar a compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados. A atividade consistiam em determinar a área do paralelogramo ou do triângulo considerando conhecidos três de seus vértices. Observou-se que a maioria dos alunos conseguiram desenvolver a atividade sem a necessidade de interferência da professora, conforme exemplificado nas figuras 20 e 21. Apesar de se tratar de uma atividade bem simples, esta serviu para consolidar a compreensão do processo de cálculo das áreas.

Figura 20 – Exercício realizado pelo aluno (A12) – Área do paralelogramo



Fonte: arquivo próprio.

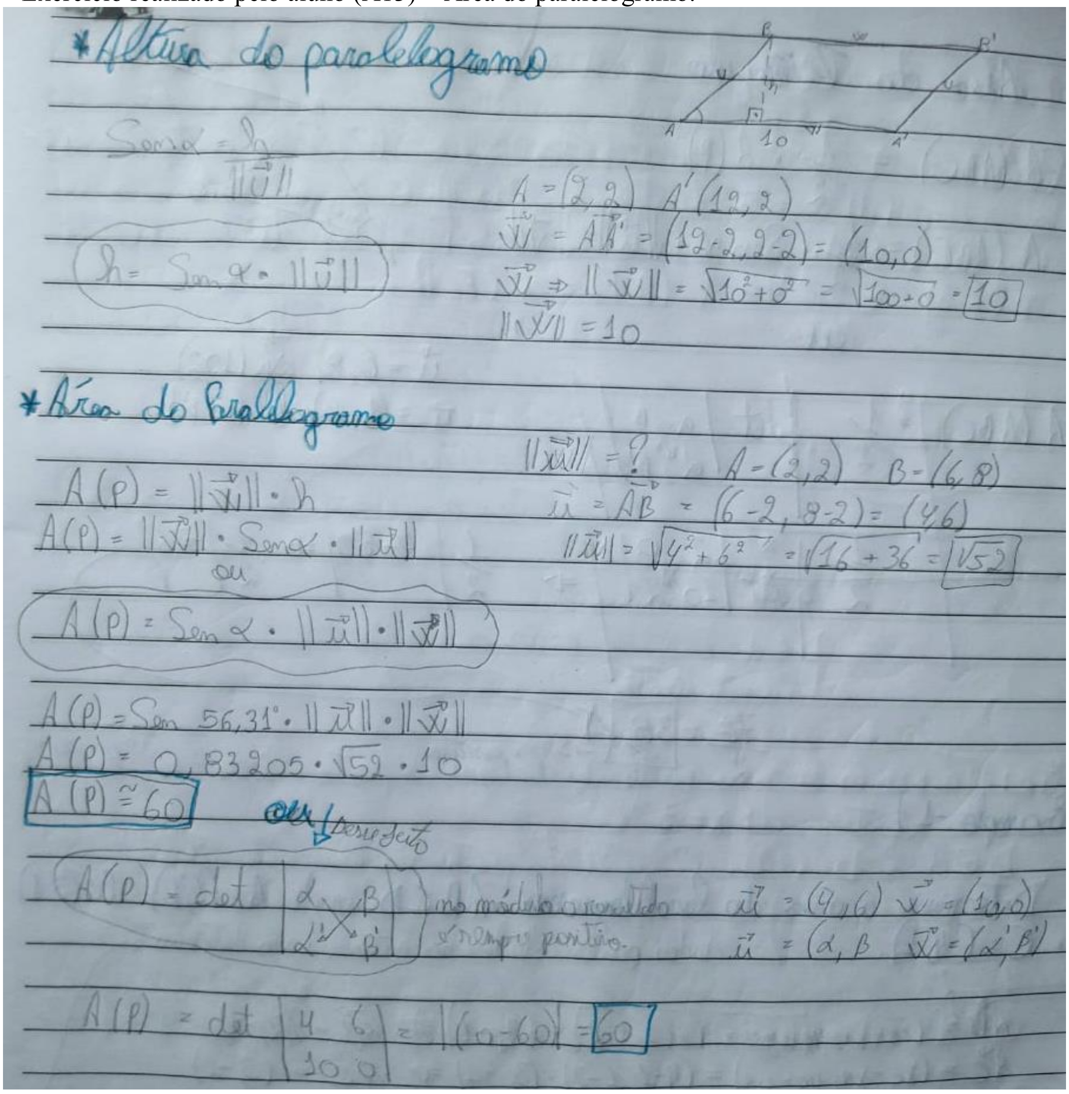
Figura 21 – Exercício realizado pelo aluno (A12) – Área do triângulo.



Fonte: arquivo próprio

Em outra atividade, foram dados três vértices do paralelogramo, solicitando-se aos alunos que, com base na visualização do OVA2 (projetado), passassem a calcular a norma de um dos vetores geradores e a altura do paralelogramo em relação a esses vetores a partir da identificação do ângulo formado entre os vetores geradores e, de posse dessas informações, determinar a área do paralelogramo. Nessa atividade, observou-se maior dificuldade de alguns alunos, sendo necessária, em alguns casos, a interferência da professora. Outros conseguiram fazer a resolução sem maiores problemas. A solução apresentada na figura 22, proposta pelo aluno A13, exemplifica a capacidade de realizar a conexão entre a representação geométrica dada através de projeção e a escrita apresentada na resolução do exercício.

Figura 22 – Exercício realizado pelo aluno (A13) – Área do paralelogramo.

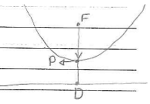


Fonte: arquivo próprio.

5.2 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS SOBRE O ESTUDO DA PARÁBOLA

Após a apresentação do OVA 4 – Parábola 1, solicitou-se aos alunos a descrição de sua percepção em relação à medida dos segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$, observando a relação do ponto vértice com o foco e a reta diretriz $\overline{FE}$, conforme representado na figura 5 da parábola. Essas percepções são apresentadas no quadro 6.

Quadro 6 – Percepção dos alunos na interação com o OVA's 4 e 5 em relação às medidas dos segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$ e a relação do ponto do vértice com o foco e o ponto E ($\overline{FE}$) que pertence à reta diretriz d.

Questão proposta: a) Faça uma descrição do que você observou no OVA 4 em relação aos segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$. b) Descreva que relação o ponto do vértice tem com o ponto do foco e a reta diretriz d, quando o ponto P está sobre o ponto V (vértice).			
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A1	a) O eixo focal sempre se mantém no mesmo lugar a distância do ponto F ao D é sempre o mesmo o ponto P passa sempre pelo mesmo lugar. b) O ponto P passa a ser o ponto médio do segmento $\overline{FD}$.	A10	a) Dependendo do foco na diretriz, a concavidade pode ser para cima ou para baixo e dessa forma, há alteração na equação da parábola. Os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ possuem a mesma distância. b) Quando o ponto P passa pelo vértice, o ponto P também passa a ser o ponto médio do segmento $\overline{FD}$. Eles são iguais.
A2	a) Observei que as parábolas não são apenas para cima ∪ ou para baixo ∩ como foi nos ensinado no Ensino Fundamental, elas podem ter várias direções. O ponto focal permanece parado enquanto o outro ponto pode mudar, conforme o local a equação pode ser positiva ou negativa. b) Quando o ponto P passa pelo vértice, também passa a ser o ponto médio do segmento $\overline{FD}$. São iguais.	A11	a) Não respondeu. b) Passa a ser o ponto médio do segmento $\overline{PD}$.
A3	b) Passa a ser ponto médio de F,B.	A12	a) P e D variam, enquanto F, V e a reta diretriz permanecem com o mesmo valor. Quando P estiver no V, será o ponto médio de $\overline{FD}$. $P \longrightarrow ponto$; $d \longrightarrow reta\ diretriz$; $V \longrightarrow vértice$; $F \longrightarrow foco$; $D \longrightarrow ponto\ da\ reta\ diretriz$ b) a distância de $\overline{PF}$ a $\overline{PD}$ é a mesma Passa a ser o ponto médio de $\overline{FD}$.  V fica entre F e a reta diretriz, sendo o ponto médio.

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A4	a) Conforme posicionamento do foco na diretriz, a concavidade pode ser para cima, para baixo, assim haverá alteração nas equações. b) Quando o P passa pelo vértice (sendo o vértice ponto médio), o ponto P automaticamente será ponto médio também do $\overline{FD}$.	A13	a) Concavidade para direita, valor positivo; à esquerda: negativo. Parábolas: o ponto P mantém sempre a mesma distância do ponto F e D. b) Quando o ponto P passa pelo vértice, ele passa a ser também o ponto médio do segmento $\overline{FD}$.
A5	a) Dependendo do foco na diretriz, a concavidade pode ser para cima ou para baixo e dessa forma, há alteração na equação da parábola. Os pontos F e P e P e D possuem a mesma distância. b) O vértice é o ponto médio em relação ao ponto do foco e a reta diretriz.	A14	a) P e D variam, enquanto o F, V e reta diretriz mantêm os mesmos valores. Os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ possuem a mesma distância. b) Quando P estiver no vértice, entre F e D, ele será o ponto médio.
A6	a) A distância do foco ao P na parábola é igual à distância do P ao D na reta diretriz. O vértice é a mediatriz $\overline{FD}$. Quanto mais o foco está perto da diretriz, mais fechado vai ser a parábola.	A15	a) A parábola é um conjunto de todos os pontos do plano que estão a mesma distância de F e D. Os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ possuem a mesma distância.
A7	a) Conforme posicionamento do foco na diretriz, a concavidade pode ser para cima, para baixo, assim como haverá alteração nas equações da parábola, negativa ou positiva, de acordo com o plano cartesiano. Concavidade virada para baixo. b) Quando o P passa pelo vértice (sendo o vértice o ponto médio), o ponto P automaticamente será ponto médio também de FD.	A16	a) Concavidade virada para baixo. b) Quando o P passa pelo vértice (sendo o vértice ponto médio), o ponto P automaticamente será o ponto médio também do FD.
A8	a) Dependendo do foco na diretriz, a concavidade pode ser para cima ou para baixo e dessa forma, há alteração na equação da parábola. Os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ possuem a mesma distância. b) O vértice é o ponto médio em relação ao ponto do foco e a reta diretriz.	A17	b) Quando P passa pelo vértice (sedo o vértice ponto médio) o ponto P automaticamente será ponto médio também de FD.
A9	a) Conforme posicionamento do foco na diretriz, a concavidade pode ser para cima, para baixo, assim como haverá alteração na equação da parábola, negativa ou positiva, de acordo com o plano cartesiano. b) F é o ponto médio entre o foco e a reta diretriz.		

Ao analisar a questão proposta, item a, verificou-se que os alunos A1, A5, A8, A10, A12, A14 e A16 identificaram a igualdade entre os segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PD}$. Os alunos A6 e A13 descreveram o ponto P como um ponto que equidista de F e D. Essas descrições admitem a possibilidade de os alunos realizarem a conexão entre a representação geométrica e a descrita, apesar da ausência de elementos que ratifiquem a descrição do conceito de parábola como um lugar geométrico, observado apenas na descrição do aluno (A15).

Os alunos A2, A4, A5, A7 e A8 fizeram menção à posição do foco da reta diretriz, relacionando esses dois fatos à concavidade da parábola, relatando o observado no objeto, sem precisarem qual elemento da equação estava diretamente relacionado com a concavidade da parábola, de forma que não se pode afirmar que houve real compreensão desse conceito ou apenas uma descrição do observado.

O aluno A2 fez um registro de desconhecer, anteriormente à apresentação do OVA, as posições da parábola cuja concavidade não fosse "para cima" ou "para baixo" conforme estudado no ensino básico, dando uma noção de percepção estática do espaço geométrico em relação a objetos de estudo.

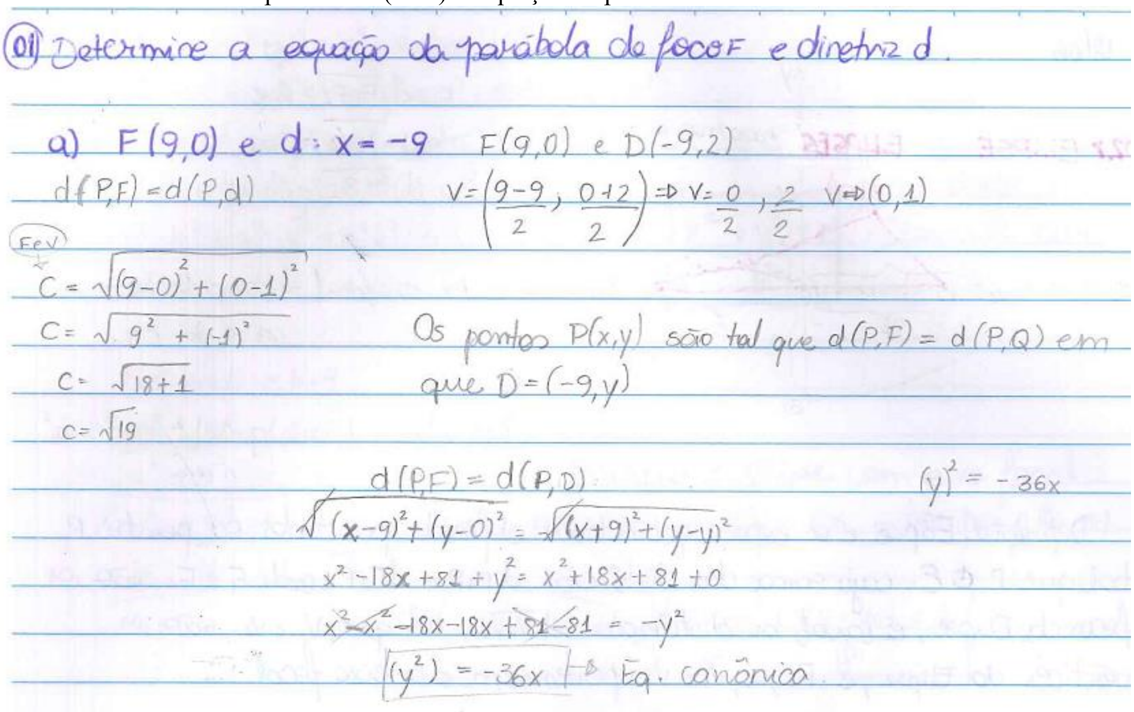
Pela descrição dos alunos A2, A4, A5, A7 e A8, perceberam no objeto a relação entre a posição da parábola e sua forma algébrica. Os alunos A7, A9 e A13 descreveram a posição à direita ou à esquerda com a "equação" positiva ou negativa. Acredita-se que, em relação à parábola com eixo focal paralelo ao eixo OX, o valor do parâmetro p ser positivo ou negativo, apesar da pouca precisão da linguagem.

Ainda, o aluno A6 observou no objeto que, quanto mais próximo o foco ficava da reta diretriz, a parábola é mais fechada, identificando, dessa forma, uma importante propriedade da cônica estudada.

Ao analisar o item b da questão proposta, em relação à posição do ponto P, quando este se sobrepõe ao ponto do vértice V, os alunos A1, A2, A4, A7, A10, A12, A13, A14, A16 e A17 identificaram o ponto P como ponto médio do segmento com origem no foco e extremidade no pé da perpendicular à reta diretriz, denotando que conseguiram fazer a conexão entre a forma geométrica e a escrita. E os alunos A3, A5, A8, A9 e A11 fizeram confusão de linguagem, não ficando claro se conseguiram identificar o ponto P como ponto médio do segmento $\overline{FE}$, sendo F o foco; e E o ponto de intersecção da reta diretriz e o eixo focal. O aluno A12, além da descrição, fez uma representação gráfica, sugerindo que, quando há uma representação gráfica, consegue relacionar de forma mais clara a forma escrita.

Após a apresentação do OVA's e formulação de conceitos, realizaram-se atividades e exercícios para verificar a aprendizagem em relação aos conteúdos.

Figura 23 – Exercício resolvido pelo aluno (A12) – Equação da parábola.



01) Determine a equação da parábola do foco F e diretriz d.

a) F(9,0) e d: x = −9   F(9,0) e D(−9,2)

d(P,F) = d(P,d) $V = \left(\frac{9-9}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow V = \frac{0}{2}, \frac{2}{2}$ $V \Rightarrow (0,1)$

F e V

$C = \sqrt{(9-0)^2 + (0-1)^2}$

$C = \sqrt{9^2 + (-1)^2}$ Os pontos P(x,y) são tal que d(P,F) = d(P,Q) em que D = (−9,y)

$C = \sqrt{18+1}$

$C = \sqrt{19}$

d(P,F) = d(P,D) $(y)^2 = -36x$

$\sqrt{(x-9)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+9)^2+(y-y)^2}$

$x^2 - 18x + 81 + y^2 = x^2 + 18x + 81 + 0$

$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 18x - 18x + \cancel{81} - \cancel{81} = -y^2$

$\boxed{(y^2) = -36x} \Rightarrow$ Eq. canônica

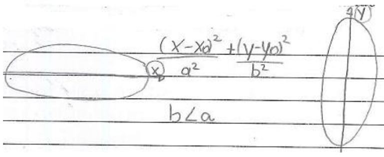
Fonte: arquivo próprio.

Nota-se, com base na resolução do exercício, figura 23, que, no início, o aluno determinou o ponto do vértice e a sua distância até o foco incorretamente, embora essa informação não fosse necessária à resolução do problema, e na sequência, retomou ao que se pedia – determinação da equação canônica da parábola a partir da distância entre pontos, e assim, conseguiu fazer a representação escrita de forma coerente.

5.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS DO ESTUDO DA ELIPSE

Após a apresentação do OVA 6, 7 e 8, solicitou-se aos alunos o registro por escrito de suas compreensões sobre a distância do ponto P (ponto genérico da elipse) aos pontos focais F_1 e F_2 e sua relação com os pontos dos vértices V_1 e V_2, bem como que apontassem as diferenças percebidas entre as equações canônicas da elipse quando e eixo focal é paralelo ao eixo OX ou quando o eixo focal é paralelo ao eixo OY. Solicitou-se ainda que pensassem em uma definição para elipse.

Quadro 7 – Percepção dos alunos na interação com OVA 6, 7 e 8 com relação aos segmentos $\overline{PF_1}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{V_1V_2}$, com relação as equação cônicas da elipse e sua definição.

Questão: a) Qual a relação existente entre os segmentos $\overline{PF_1}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{V_1V_2}$? b) Qual a diferença entre a equação canônica da elipse quando esta tem eixo focal paralelo ao eixo OX ou paralelo ao eixo OY? c) Dê uma definição para elipse.			
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A1	a) Soma das distâncias dF_1P e dF_2P, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse é igual à distância dV_1V_2. b) Paralelo ao X $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)}{b^2}$ Paralelo ao y $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}$ c) Um espaço geométrico definido por todos os pontos P.	A10	a) A soma das distâias de dF_1P e dF_2P é igual à distância dV_1V_2. b) Eixo focal paralelo ao eixo OX $\Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Eixo focal paralelo ao eixo Oy $\Rightarrow \frac{(x-x_0)}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ c) É o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos F_1 e F_2, seja constante, igual a $2a$ e maior que a distância entre os focos ($2a > 2c$).
A2	a) Soma das distâncias dF_1P e dF_2P é igual a distância de V_1 e V_2. b) EIXO FOCAL PARALELO AO EIXO OX $\Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ EIXO FOCAL PARALELO AO EIXO OY $\Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{b^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ c) É um tipo de secção cônica, se uma superfície cônica é cortada com um plano que não passa pela base e que não intersecta as duas folhas do cone, a intersecção entre o cone e o plano é uma elipse.	A11	a) $dF_1 e F_2 = dV_1V_2$ b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ paralelo ao OX (muda o termo a e b) $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ paralelo ao Oy c) É o espaço geométrico definido por todos os pontos P, tal que $P \in \mathcal{E}$, cuja soma das distâncias dF_1P e dF_2P, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, é igual a dV_1V_2, V_1 e V_2 são os vértices da elipse.
A3	a) Formam sempre um triângulo. b) Apenas no sentido. c) É a soma constante de dois pontos constantes no plano.	A12	a) A soma das distâncias $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ é igual à distância $\overline{V_1V_2}$. b)  x $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$ $b<a$ y $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}$ $b>a$ c) Espaço geométrico definido por todos os pontos P, tal que $P \in \mathcal{E}$. A soma das distâncias $d\overline{F_1P}$ e $d\overline{F_2P}$ é igual à distância $d\overline{V_1V_2}$. F_1, F_2, V_1 e V_2 pertencem ao eixo focal.

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A4	a) O tamanho do $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ será igual à distância de $\overline{V_1V_2}$. b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Paralelo ao ox muda o termo a e b $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ paralelo ao oy c) É o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos F_1 e F_2, seja constante, igual a $2a$ e maior que a distância entre os focos $2a > 2c$.	A13	a) $\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=\overline{V_1V_2}$ b) Eixo OX = $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Eixo OY = $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ No eixo Y $b>a$ c) É o espaço geométrico definido por todos os pontos P, onde $F_1, F_2, V_1 e V_2$ pertencem ao eixo focal da elipse.
A5	a) A soma das distâncias de F_1 a P e F_2 a P é igual à distância de V_1 a V_2. b) eixo focal paralelo a OX $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=2$$ eixo focal paralelo a OY $$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=2$$ c) Lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano tem soma constante interseção de um cone circular reto e um plano que corta todas as suas geratrizes.	A14	a) A soma da distância dos focos ao ponto P é igual à distância entre os vértices pertencentes ao eixo focal. b) Paralelo ao eixo X: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Paralelo ao eixo y: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ c) Espaço geométrico definido por pontos p, cuja soma das distâncias dos focos ao P, é igual à distância dos vértices da elipse, pertencentes ao eixo focal. $dF_1P + dF_2P = dV_1V_2$.
A6	a) A soma da distância de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ é igual à distância $\overline{V_1V_2}$. b) eixo focal paralelo a OX $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=2$$ eixo focal paralelo a OY $$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=2$$	A15	a) Que a soma de F_1P e F_2P dá a V_1V_2 b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ paralelo ox muda o termo a e b $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ paralelo ao oy c) Elipse é o lugar geométrico dos planos de um ponto tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos denominados focos F_1 e F_2.
A7	a) O tamanho de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ será igual à distância de $\overline{V_1V_2}$ b) $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ paralelo ao eixo OX (muda o termo a e b) $$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$ paralelo ao eixo OY c) É o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias do ponto 1 ao ponto 2 é a constante $2a$.	A16	a) a Soma de F_1P e F_2P Resulta na distancia do V_1 ao V_2. $\Big\}$ $F_1P+F_2P=V_1V_2$ b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ Paralelo ao ox muda o Termo a e b. $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ paralelo ao oy c) Lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos F_1 e F_2, seja uma constante, igual a $2a$ e maior que a distância então os focos ($2a > 2c$).

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A8	a) A soma das distâncias de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ é igual à distância de $\overline{V_1V_2}$. b) Se o eixo focal coincide com o eixo OX a equação canônica é: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Se o eixo focal coincide com o eixo OY a equação canônica é: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ c) É o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos denominados focos, F_1 e F_2, seja constante, igual a $2a$ e maior que a distância entre os focos $(2a > 2c)$.	A17	b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ paralelo ox muda o termo a e b. $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ paralelo ao oy. c) É o espaço geométrico definido por todos os pontos P, tal que $P \in \mathcal{E}$, cuja soma das distâncias dF_1P e dF_2P, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, é igual à distância de dV_1V_2, tal que V_1 e V_2 são os vértices da elipse e F_1, F_2, V_1 e V_2 pertencem ao eixo focal da elipse.
A9	a) Ambos são à distância do centro O. b) Quando é paralela OX tem a forma oval no sentido do eixo X. Quando é paralela OY tem a forma oval no sentido do eixo Y. c) É o espaço geométrico definido por todos os pontos P tal que $P \in \mathcal{E}$, cuja soma das distâncias dF_1P e dF_2P, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse.		

Analisando a questão proposta, no item a, verificou-se que os alunos A1, A2, A4, A5. A6, A7, A8, A10, A12, A13, A14, A15 e A16 descreveram que a relação existente entre os segmentos $\overline{PF_1}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{V_1V_2}$ como soma da medida das distâncias dos focos ao ponto P igual à distância entre os vértices da elipse pertencentes ao eixo focal, sugerindo que houve interação entre as formas de representações geométrica, algébrica e escrita. O aluno A3 narrou uma forma geométrica observada entre esses segmentos de forma imprecisa. E o aluno A9 referiu que esses segmentos são distâncias do centro, mostrando que, nesses dois casos, não houve a compreensão do conceito abordado.

Em relação ao item "b", solicitou-se aos alunos que apontassem as diferenças entre as equações canônicas da elipse quando o eixo focal é paralelo ao eixo OX ou paralelo ao eixo OY, o esperado era que fizessem alguns apontamentos em relação aos parâmetros, no entanto os alunos A1, A4, A7, A8, A10, A11, A13, A14, A15, A16 e A17 apenas reproduziram a forma algébrica da equação canônica que estava no OVA apresentado. Os alunos A3 e A9 fizeram uma descrição imprecisa, não deixando claro qual o objetivo da descrição, a qual estava mais relacionada ao formato da elipse e não de sua representação algébrica. Já os alunos A2, A5 e A6 representaram a equação canônica de forma equivocada, passando a impressão de uma cópia equivocada. Aqui cabe observar, analisando as descrições feitas pelos alunos, que houve grande dificuldade de transitar da forma de representação geométrica para a linguagem escrita, limitando-se a maioria apenas a copiar a equação reduzida em cada um dos casos. Houve, com base nessa constatação, uma necessidade de intervenção da professora na tentativa de esclarecer a situação.

Em relação ao item c, verificou-se que os alunos A11, A12, A14 e A17 fizeram menção de "que é um lugar geométrico dos pontos P, cuja soma das distâncias aos pontos focais é igual à distância entre os pontos dos vértices pertencentes ao eixo focal" dando a impressão de haver conexão entre as formas de representação geométrica e escrita. Os alunos A1, A4, A8, A9, A10 e A16 seguiram essa mesma ideia, todavia não identificaram que a soma das distâncias é igual à distância entre os vértices do eixo focal. Dessa forma, não deixaram claro se houve ou não compreensão do conceito de elipse. O aluno A5 também abordou essa ideia, apesar de fazer confusão entre "ponto" e "plano".

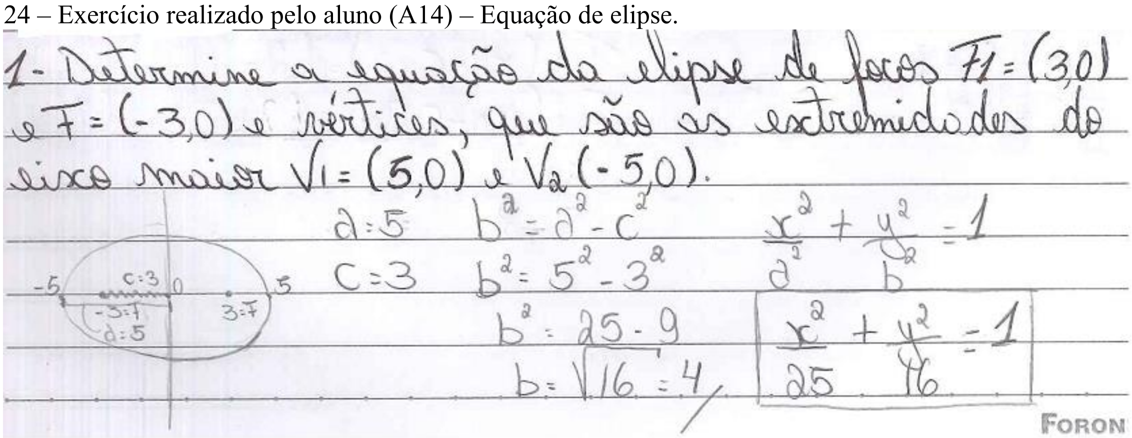
O aluno A2 fez uma tentativa de descrição de uma figura representada em outro momento e não pelos OVA's quando comentado sobre a forma que Apolonio utilizou para representar as cônicas. Os alunos A7 e A15 também mencionaram essa lembrança e acrescentaram mais informações sobre o lugar geométrico, dando a impressão de que, apesar da escrita confusa, tinham noção do conceito de elipse.

O aluno A13 descreveu "espaço geométrico" dos pontos P "onde" os pontos focais e dos vértices pertencem ao eixo focal não relacionando à questão das distâncias, mostrando-se confuso em relação aos conceitos envolvidos na definição de elipse.

Apesar de algumas confusões na compreensão e na linguagem escrita, todos fizeram uma tentativa de definir uma elipse, mesmo que, em alguns casos, de forma bastante informal.

Para identificar mais alguns aspectos relativos à aprendizagem e para melhor compreensão/fixação dos conceitos envolvidos no estudo da elipse, foram realizados exercícios, conforme representado na figura 24.

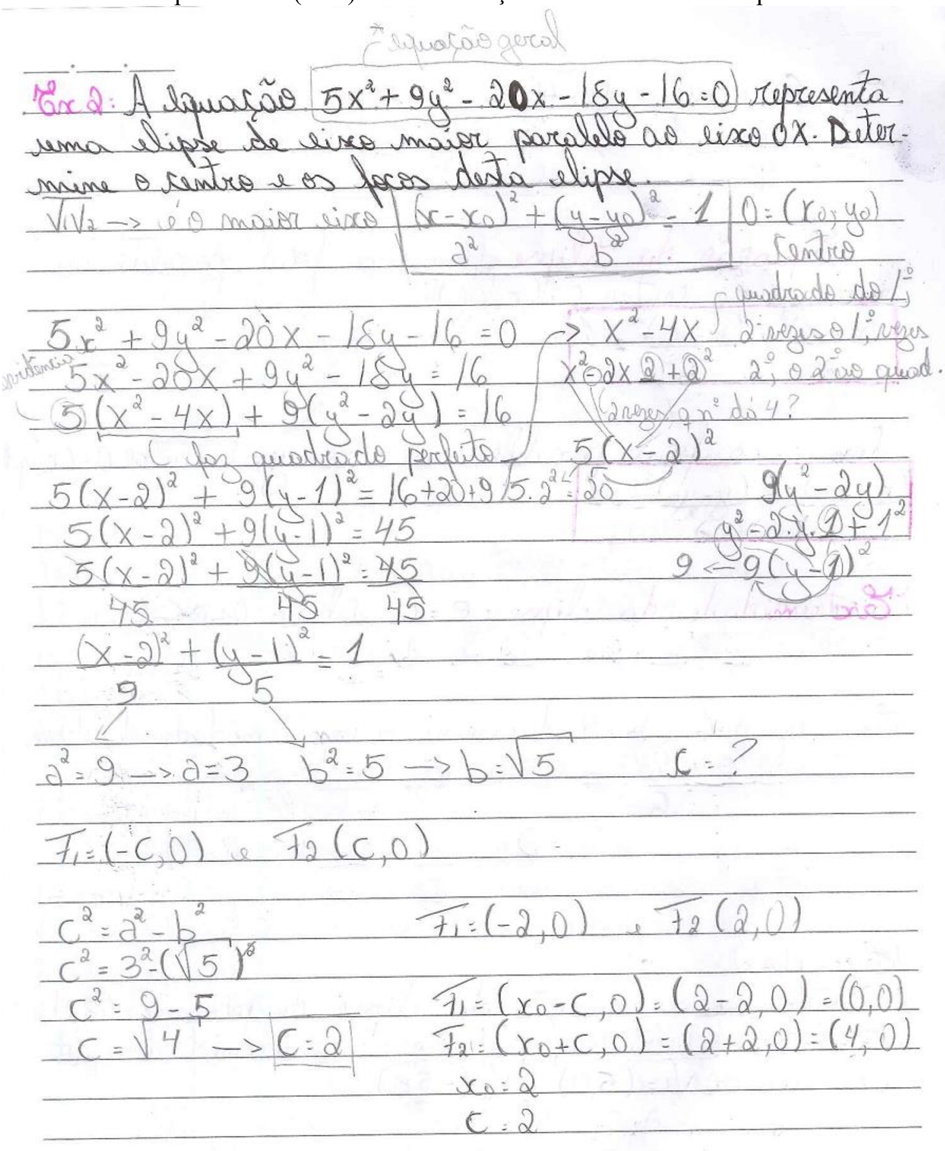
Figura 24 – Exercício realizado pelo aluno (A14) – Equação de elipse.



Fonte: arquivo próprio.

O aluno A14 fez a representação geométrica, na figura 24, para, possivelmente, identificar as medidas dos parâmetros a e c, determinou o valor de b e representou a equação canônica, sugerindo haver interação entre a forma de representação e a forma escrita, caracterizando, dessa maneira, a aprendizagem de acordo com Duval.

Figura 25 – Exercício realizado pelo aluno (A14) – Determinação dos elementos da elipse.


Equação geral

Ex 2: A equação $5x^2+9y^2-20x-18y-16=0$ representa uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo OX. Determine o centro e os focos desta elipse.

$V_1V_2 \rightarrow$ é o maior eixo $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ $O=(x_0,y_0)$ centro

quadrado do 1º, 2 vezes o 1º vezes 2º, o 2º ao quad.

$5x^2+9y^2-20x-18y-16=0 \rightarrow x^2-4x$

$5x^2-20x+9y^2-18y=16$ $x^2-2x2+2^2$

$5(x^2-4x)+9(y^2-2y)=16$ 2 vezes q nº dá 4?

dos quadrado perfeito $5(x-2)^2$

$5(x-2)^2+9(y-1)^2=16+20+9$ $5.2^2=20$ $9(y^2-2y)$

$5(x-2)^2+9(y-1)^2=45$ $y^2-2.y.1+1^2$

$\frac{5(x-2)^2}{45}+\frac{9(y-1)^2}{45}=\frac{45}{45}$ $9 \leftarrow 9(y-1)^2$

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$

$a^2=9 \rightarrow a=3$ $b^2=5 \rightarrow b=\sqrt{5}$ $c=?$

$F_1=(-c,0)$ e $F_2(c,0)$

$c^2=a^2-b^2$ $F_1=(-2,0)$ e $F_2(2,0)$

$c^2=3^2-(\sqrt{5})^2$

$c^2=9-5$ $F_1=(x_0-c,0)=(2-2,0)=(0,0)$

$c=\sqrt{4} \rightarrow \boxed{c=2}$ $F_2=(x_0+c,0)=(2+2,0)=(4,0)$

$x_0=2$

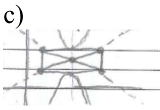
$c=2$

Fonte: arquivo próprio.

5.4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS DADOS DO ESTUDO DA HIPÉRBOLE

Durante a apresentação dos OVA's 9, 10 e 11, a professora solicitou aos alunos que fizessem a observação e descrevessem sua percepção em relação à distância do ponto P aos pontos focais F_1 e F_2 e sua relação com a distância dos pontos do vértice V_1 e V_2. Ela pediu ainda a identificação das diferenças entre equações canônicas da hipérbole quando o eixo focal é paralelo ao eixo OX ou quando o eixo focal é paralelo ao eixo OY. Também requisitou que identificassem o polígono-base e descrevessem uma definição da hipérbole.

Quadro 8 – Percepção dos alunos na interação com os OVA's 9, 10 e 11 com relação aos segmentos $\overline{PF_1}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{V_1V_2}$, diferença entre as equações cônicas e definição da hipérbole.

Questão: a) Observe e descreva a relação entre os segmentos $\overline{PF_1}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{V_1V_2}$. b) Aponte as diferenças das equações canônicas da hipérbole quando esta possui eixo focal paralelo ao eixo OX ou paralelo ao eixo OY. c) Qual o polígono-base da hipérbole? d) Descreva a definição da hipérbole.			
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A1	a) E estão na reta focal todos os pontos c e a. b) possui os vertices = $A_1 = (a,0)$ e $A_2 = (a,0)$ eixo imaginario: $B_1 = (0,-b)$ e $B_2 = (a,-b)$ focos = $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ onde $b^2 = c^2 - a^2$ c)  eles estão sobre a reta x d) É o conjunto de pontos $P(x,y)$ tal que $P = \|d(F_1,P) - d(F_2P)\| = 2a = \overline{V_1V_2}$ $2a = \overline{V_1V_2}$	A10	a) O módulo da diferença entre F_1P e F_2P é igual a uma constante a $2a$ e $d(\boldsymbol{V_1V_2}) = 2a$, com $2a < 2c$. b) Quando o eixo focal é paralelo ao OX do plano cartesiano, a fórmula é $\frac{(\boldsymbol{x-x_0})^2}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{(\boldsymbol{y-y_0})^2}{\boldsymbol{b^2}} = 1$ e quando o eixo focal é paralelo ao eixo OY do plano cartesiano, a fórmula é $\frac{(\boldsymbol{y-y_0})^2}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{(\boldsymbol{x-x_0})^2}{\boldsymbol{b^2}} = 1$. Quando retas focais coincidem com OX ou OY (conforme o caso), o ponto x_0, y_0 coincidem com os da reta focal, pois são iguais a zero e desta forma eles não "aparecem" na forma algébrica. c) O polígono observado é um retângulo. As diagonais estão sobre as retas assíntotas. d) Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante $(2a < 2c)$, com $\overline{F_1F_2} = 2c$.

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A2	a) Os valores são iguais $F_1P - F_2P = 5,24 = V_1V_2$ b) $OX = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $OU = \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)}{b^2} = 1$ **c)** Retângulo assíntotas. **d)** Considere F_1 e F_2 como sendo dois pontos distintos do plano e $2c$ a distância entre eles Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano, tais que a diferença, em valor absoluto, das distâncias à F_1 e F_2 é a constante $2a$. A hipérbole pode ter os focos sobre o eixo X e o eixo Y.	A11	a) A diferença de $d(F_1, F_2)$ é igual à constante $2a$, e $2a = d(V_1, V_2)$. b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ eixo focal paralelo a OX. $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ eixo focal paralelo a OY. c) Retângulo, as diagonais estão sobre as retas assíntotas. d) Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ e um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante ($2a < 2c$), com $\overline{F_1F_2} = 2c$.
A3	a) H é igual ao módulo de $\overline{F_1P}$ menos $\overline{F_2P}$ igual a $2a$. b) Paralela $X \rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$ Paralelo $Y \rightarrow \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2}$ c) Quadrilátero sobre as assíntotas. d) É o lugar geométrico cuja distância dos focos é constante.	A12	a) A distância de $\overline{F_1P}$ menos a distância de $\overline{F_2P}$ é igual a $\overline{V_1V_2}$, que é $2a$. b) Paralela ao eixo do x: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ coincidente: $\frac{(x)^2}{a^2} - \frac{(y)^2}{b^2} = 1$ Paralela ao eixo do y: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ coincidente: $\frac{(y)^2}{a^2} - \frac{(x)^2}{b^2} = 1$ c) Retângulo. Estão sobre as retas assíntotas ou Quadrado. Neste caso, ainda, as hipérboles são isósceles. d) É o conjunto dos pontos de um plano, onde a diferença da distância $\overline{F_1F_2}$ é $2c$. Ainda, a diferença entre $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ é igual a $2a$.
A4	a) Dados quaisquer dois pontos, o módulo da diferença entre eles e os pontos focais F_1 e F_2, como os segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ é sempre igual à distância $2a = \overline{V_1V_2}$. Considerando ponto P pertencente a hipérbole. b) Quando o eixo focal é paralelo OX, ele fica alinhado ao eixo OY. Quando o eixo focal é paralelo ao eixo Oy ele fica alinhado ao eixo OX. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2}$ c) Retângulo. Estão sobre as retas assíntotas. d) É o espaço geométrico dos pontos P considerando dois pontos fixos F_1 e F_2, no plano cuja distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Considerando ainda o módulo da diferença entre $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ é igual a uma constante, $2a$, tal que $2a = d(V_1, V_2)$ com $2a < 2c$.	A13	a) Subtraindo os pontos $\overline{F_1P}$ de $\overline{F_2P}$, tem-se a medida de V_1 ao V_2. b) Não respondeu c) Base de um retângulo e suas diagonais estão sobre as retas assíntotas. d) É o espaço geométrico dos pontos P, com 2 pontos fixos F_1 e F_2 e suas distâncias são iguais a $2c$, considerando também que F_1 a P menos F_2 a P é igual a $\overline{V_1V_2}$.

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A5	a) Os valores são iguais $F_1P - F_2P = 5,24 = V_1V_2$ b) $OX - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)}{b^2} = 1$ c) Retângulo. Assíntota. d) Hipérbole é o conjunto dos pontos dos planos cuja diferença das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a(0 < 2a < 2c)$.	A14	a) A diferença entre a distância F_1P e F_2P é igual a distâncias entre os vértices V_1 e V_2. $\lvert dF_1P - dF_2P \rvert = dV_1V_2$ b) Paralela OX: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ Coincidente OX: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Paralela Oy: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ Coincidente Oy: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ c) Retângulo. Estão sobre as assíntotas da hipérbole. **d)** É o espaço geométrico do ponto P. Considerando dois fixos F_1 e F_2, no plano cuja distância é igual a $2c$. $d(F_1, F_2) = 2c$. A diferença das distâncias F_1P e F_2P é igual à distância entre os vértices (V_1V_2)
A6	a) $F_1P - F_2P = V_1V_2$ b) Com foco sobre o eixo x = $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ · sobre o eixo x o y fica negativo Com foco sobre o eixo y = $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ · sobre o eixo y o x fica negativo. c) Retângulo. Assíntota. d) É o conjunto dos pontos do plano, tais que a diferença, em valor absoluto, das distâncias à F_1 e F_2 é uma constante $2a$.	A15	a) Os valores são iguais $F_1P = F_2P = 9,24 = V_1V_2$ b) $OX = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $OY = \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2}$ c) Um retângulo, e as diagonais são assíntotas. d) Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tal que a diferença em módulo de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante $(2a < 2c)$ com $\overline{F_1F_2} = 2c$.
A7	a) A diferença de distância $d(F_1, F_2)$ é igual a uma constante $2a$, sendo que $2a = d(V_1, V_2)$. b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, eixo focal paralelo a OX. $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$, eixo focal paralelo a OY. c) Retângulo as diagonais estão sobre as retas assíntotas. d) Lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos deste mesmo plano é constante.	A16	a) Os valores são iguais $F_1P - F_2P = 9,24 = V_1V_2$. b) $OX = \frac{(x-x_a)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x^2)}{b^2} = 1$ c) Um retângulo, e as diagonais são assíntotas. **d)** Lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante (2a<2c), com $\overline{F_1F_2} = 2c$.

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A8	a) O módulo da diferença entre F_1P e F_2P é igual a uma constante, $2a$. E $d(V_1, V_2) = 2a$, sendo que $2a < 2c$. b) Quando o eixo focal é paralelo ao eixo OX do plano cartesiano: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ Quando o eixo focal é paralelo ao eixo OY do plano cartesiano: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ Quando os eixos focais coincidem com OX ou OY (conforme o caso) o ponto x_0, y_0 coincide com os da reta focal pois são iguais a 0 e desta forma, eles não "aparecem" na forma algébrica. c) O polígono observado é um retângulo. As diagonais estão sobre as retas assíntotas. d) É o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante ($2a < 2c$), com $\overline{F_1F_2} = 2c$.	A17	a) Os valores são iguais: $F_1P = F_2P = 9{,}24 = V_1V_2$ b) $Ox = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $Oy = \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ c) Um retângulo e as diagonais são assíntotas. d) É o espaço geométrico dos pontos P. Considerando dois pontos fixos F_1 e F_2, no plano cuja distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Considerando, ainda, o módulo da diferença entre F_1P e F_2P é igual a uma constante, $2a$ tal que $2a = d(V_1, V_2)$ com $2a < 2c$.
A9	a) A diferença de distâncias $d(F_1, F_2)$ é igual a uma constante $2a$, sendo que $2a$ é igual a $d(V_1, V_2)$. b) Quando o eixo focal é paralelo OX, ele fica alinhado ao eixo OY. Quando eixo focal é paralelo ao eixo OY ele fica alinhado ao eixo OX. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$ $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$ c) Retângulo. Retas Assíntotas. d) É o espaço geométrico dos pontos P considerando os pontos fixos F_1 e F_2.		

Em relação ao item a da questão proposta, verificou-se que os alunos A8, A10, A12 e A14 fizeram uma relação correta, mas a linguagem não foi formal, entre os segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{F_2P}$ e $\overline{V_1V_2}$ que representam as distâncias entre os pontos da hipérbole. O aluno A13 realizou uma relação semelhante, embora a colocação "ponto" não ficasse adequada na representação. Já os alunos A2, A5, A6, A15, A16 e A17 representaram parcialmente essa relação, utilizando um valor numérico representado no OVA naquele momento e não uma representação genérica ($\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = valor\ numérico = \overline{V_1V_2}$). Essa análise sugere uma compreensão e habilidade de representação da forma geométrica e sua passagem para as representações algébrica e escrita por parte da maioria dos alunos, apesar de algumas dificuldades em relação à formalidade da linguagem.

O aluno A3 fez uma definição de $\mathcal{H}$ (acredita-se que esteja se referindo à hipérbole) como o módulo da diferença entre as distância do ponto P ao ponto F_1 e do ponto P ao ponto F_2 igual a uma constante $2a$, no entanto não relacionou essa constante com a distância entre os vértices pertencentes ao eixo focal, ficando a dúvida se ele conseguiu fazer essa relação.

Os alunos A1 e A4 realizaram uma representação desconexa e confusa. Os alunos A7, A9 e A11 elaboraram uma representação equivocada em relação a distâncias entre os focos e os vértices, passando a impressão de que não conseguiram fazer a relação entre a forma geométrica e a escrita, o que indica a não compreensão dos conceitos abordados.

Em relação ao item b da questão proposta, os alunos A2, A3, A6, A7, A8, A10, A11, A12, A14, A15 e A17, representaram as equações canônicas relacionando-as com a posição do eixo focal, no entanto não é possível identificar se compreenderam o que estava proposto na questão, pois não fizeram menção à diferença entre os parâmetros. Os alunos A5 e A16 representaram as equações e não fizeram menção aos eixos focais, ou fizeram-na parcialmente.

O aluno A1 não representou a equação canônica, nem apontou as diferenças, apenas fez uma cópia da forma genérica dos pontos representados. O aluno A13 não respondeu ao item. E os alunos A4 e A9 representaram a equação canônica, mas fizeram uma descrição muito confusa. Acredita-se que os alunos A1, A4, A9 e A13 não tenham conseguido abstrair os conceitos trabalhados pelas descrições feitas em seus relatos.

Em relação ao item c, todos apontaram um quadrilátero como polígono-base da hipérbole na forma escrita ou através de representação geométrica. O aluno A12 observou que, se esse quadrilátero for um quadrado, a hipérbole é isósceles. Os alunos A7, A8, A10, A11 e A13 descreveram que as diagonais desse quadrilátero estavam sobre as retas assíntotas, e os alunos A3, A4, A12 e A14 realizaram uma descrição confusa, mas foi possível perceber que estavam relacionando as diagonais do quadrilátero como parte das retas assíntotas da hipérbole, dando a impressão de que houve compreensão, apesar de a escrita não ser formal e clara. Os alunos A15, A16 e A17 fizeram uma descrição muito similar e descreveram as diagonais como retas assíntotas, não ficando claro se houve ou não compreensão das diagonais do quadrilátero em relação às retas assíntotas da hipérbole.

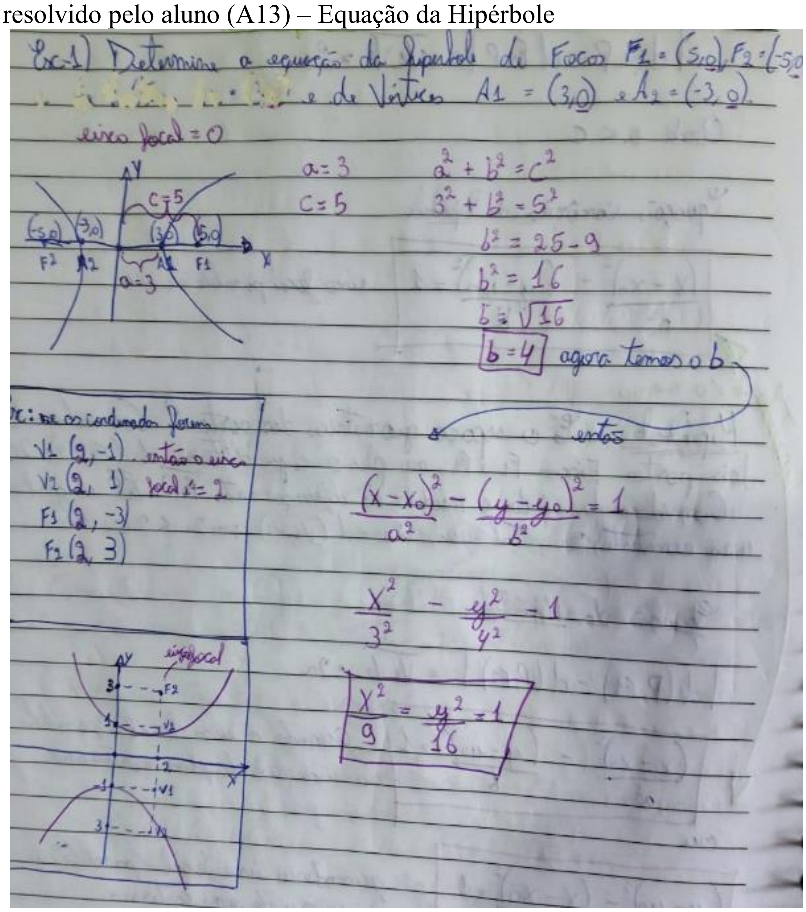
E em relação ao item d, a maioria dos alunos A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9. A10, A13, A14, A15, A16 e A17 fizeram uma descrição coerente da definição de hipérbole, descrevendo-a como um “conjunto de pontos” ou um “lugar geométrico” mesmo a linguagem não sendo precisa e formal, cabe ressaltar que, para essa sistematização, os alunos contaram com a interferência da professora, visto que, nos objetos anteriores, discussões análogas já haviam sido feitas. Mesmo com essa interferências, ao longo do processo; os alunos A3 e A12 continuaram com dificuldade para fazer uma descrição coerente.

Cabe ressaltar que, após o desenvolvimento de algumas atividades, alguns alunos não apresentavam mais o mesmo empenho na descrição dos relatos, perdendo um pouco o foco, o que provocou a necessidade de interferência da professora, na busca de motivação dos alunos, principalmente para mobilizá-los a responder às questões propostas, além da necessidade de auxiliar na sistematização dos conceitos discutidos.

No caso da atividade ilustrada na figura 33, solicitou-se aos alunos a determinação da equação canônica da hipérbole. Para a maioria destes alunos, houve a necessidade da intervenção da professora para a compreensão do que era solicitado ou de como proceder para atender a essa solicitação.

Na resolução do exercício, representado na figura 26, há a impressão de que o aluno A13 utilizou a representação geométrica a fim de entender como proceder na resolução do exercício com a representação de a e c para, em seguida, determinar o valor de b e posteriormente, utilizar-se da forma canônica geral para determinar a equação canônica desse caso particular, procedendo da forma correta.

Figura 26 – Exercício resolvido pelo aluno (A13) – Equação da Hipérbole



Fonte: arquivo próprio.

Como os conteúdos trabalhados eram parte da ementa da disciplina de matemática, as atividades realizadas pelos alunos compuseram uma avaliação. Nesse sentido, aplicou-se uma prova individual escrita, com base na qual percebeu-se que, na identificação das formas geométricas e nas equações gerais, os alunos não apresentaram muita dificuldade. No entanto, no trânsito entre a equação geral e a forma canônica, por meio da fatoração, identificaram-se algumas dificuldades.

Após a apresentação dos OVA's e a resolução de atividades, a professora solicitou aos alunos que descrevessem, se, em sua percepção, a utilização do OVA's da forma como foram apresentados auxiliaram na compreensão dos conceitos trabalhados.

Em relação à avaliação se o OVA auxilia na compreensão dos conceitos, todos responderam que "sim" auxilia. O aluno (A10) escreveu que: "Acredito que auxilia, pois com o objeto é mais fácil visualizar os vetores, as parábolas, as hipérboles e as elipses. Além de ser mais fácil de visualizar, também é mais fácil entender como eles funcionam e como são construídos". Em relação à primeira parte do relato, acredita-se que o aluno esteja se referindo à forma geométrica dos objetos projetados; na segunda, acredita-se que esteja associando a definição do objeto. Descreveram ainda que, através da projeção, conseguiram identificar melhor os elementos de cada objeto "Ajuda a compreender de onde vem a definição de pontos, vértices e focos para melhor solucionar as questões" (A4). Ou ainda, que a aula fica mais didática "O objeto virtual é de suma importância e torna a aula mais didática, contribuindo para o entendimento e melhor compreensão do aluno." (A13). Neste relato, talvez, o termo "didático" queira expressar que a aula ficasse mais interessante ou fácil de ser entendida, em seu ponto de vista, ou que ele tem uma melhor compreensão dos temas abordados daquela forma.

Nos seus relatos, os alunos enfatizaram muito a questão da "forma", que parece estar relacionada à representação geométrica de cada objeto "pois ajuda na compreensão visual, de qual é a forma real, completa da parábola, elipse e hipérbole" (A14).

O aluno A6 acreditava, com base em sua descrição, que o objeto demonstrava a teoria "pois complementa a base teórica, ver a demonstração de como cada um se forma auxilia na compreensão dos elementos e de como se relacionam." Cabe ressaltar que um objeto não é capaz de realizar demonstrações, ele serve de suporte para a interação entre as formas de representação geométrica e algébrica na intenção de que o aluno consiga representá-las na forma escrita.

Em todos os relatos, nota-se um parecer positivo em relação à utilização dos OVA's, por ser um recurso didático que desperta mais o interesse, ou pela facilitação na visualização das formas, ou pela representação geométrica estar diretamente relacionada à expressão algébrica e que é possível verificar a mudança na expressão algébrica, assim que se movimenta a forma geométrica.

Após o encerramento dos seis encontros, em horário extra, a professora pediu aos alunos que fossem até o laboratório de informática, onde poderiam manusear os objetos virtuais de aprendizagem com um roteiro com a orientação que segue: “Acesse os OVA’s, utilize a ferramenta seguindo as orientações constantes nela, movimente os pontos conforme orientação, observe o que ocorre com os dados apresentados. Posteriormente relate sua percepção sobre a utilização dos OVA’s se estes auxiliam na compreensão dos conceitos trabalhados e representados nestes, considerando inclusive a facilidade de manuseio e compreensão. Quais as sugestões que você daria para melhorar o objeto.” Nessa atividade, por ser extra-classe, houve pouca adesão por parte dos alunos, sendo os relatos descritos na sequência.

Em relação ao solicitado, o aluno A1 fez a seguinte descrição “Creio que o uso dos OVAs auxilia muito na compreensão dos objetos citados, principalmente na parábola, elipse e hipérbole, devido à dificuldade que os alunos têm em relacionar fórmulas e representá-las. O movimento do ponto P e a mudança constante das fórmulas no software ajudam a raciocionar o que está mudando e porque, além da possibilidade de manuseio de outros pontos da equação (a interface é clara e de fácil manuseio, colocando em prática um assunto altamente teórioco)”. Observa-se, com base nesse relato, que o aluno percebeu as diferentes formas de representação de um elemento matemático quando descreveu “entre fórmulas e a representação em si” sugerindo que a representação “em si” trata-se da representação geométrica. Conseguiu também perceber que a representação algébrica está associada à mudança de posição da figura geométrica representada no OVA. Através desta descrição, é possível perceber que, apesar de o aluno conseguir fazer a interação entre a forma algébrica e a geométrica, na descrição sobre a representação em linguagem escrita e conceitual do objeto, ele acredita que “colocar em prática” o conceito é o singelo ato de manusear a forma geométrica.

Observe o relato do aluno A12: “Com meu próprio manuseio, pude entender e visualizar um pouco melhor, porque parei para rever as informações e a mudança nas variáveis, além de estar mais próximo de mim. No quadro, eu consigo visualizar, mas não tão bem quanto agora. Seria uma opção interessante pedir que os próprios alunos trouxessem computador, ou, se possível, usassem o celular (se o Geogebra funcionar neste). E observar com calma a mudança nos valores. A hipérbole e a parábola parecem, também, muito semelhantes, dependendo dos pontos, é interessante usar o Geogebra para essa visualização, mas deixar claro suas diferenças. Achei interessante o uso das instruções ao lado para o manuseio e gostei de mexer com o objeto de aprendizado. Confesso que prefiro desenhar o trajeto no caderno, mas essa visualização colabora muito para entender”.

Segundo a descrição do aluno A12, apreendeu-se que ele sentiu a necessidade de um tempo maior de interação com as formas de representação para, então, formular um conceito sobre o elemento matemático, quando relatou “pausei para rever as informações e a mudança de variáveis”, nesta fala, há percepção de reconhecimento entre as formas escritas e geométrica.

Dando continuidade, passa-se ao relato do aluno A13 “O objeto virtual de avaliação auxilia claramente para o estudo e o melhor entendimento de cada imagem, pode-se obter, assim, uma visão espacial de como os pontos e os deslocamentos acontecem nas imagens estudadas. Ao se movimentar o figura, pode-se ainda verificar como as coordenadas também se alteraram. É de suma importância a compreensão e uso dessa ferramenta para que possa se desenvolver um raciocínio no aluno que o faça entender melhor os cálculos, tornando-se assim uma melhor compreensão didática para o aluno em sala de aula por ser de fácil manuseio.”

Conforme o relato do aluno A13, observou-se que ele descreveu os OVA’s como uma ferramenta de ligação entre o raciocínio e o cálculo, o que leva a acreditar que este está formando um conceito mental relacionando a figura geométrica com a forma algébrica.

Por último, consta o relato do aluno A14 “Sim, eles auxiliam na compreensão, pois representam o formato real e ainda apresenta mais possibilidades ao variar suas medidas. Apenas uma sugestão, ao apresentá-la, a compreensão é mais fácil quando a reta focal está paralela ao eixo x ou y, ao invés de inclinada. E talvez ao se mostrar uma representação fazê-la também no quadro, com as mesmas medidas, para se mostrar o que se utilizou para chegar ao resultado, simplifica bastante a ajuda na compreensão. ”

Com base na descrição do aluno A14, observou-se que ele utilizou o termo “fácil”, o que faz acreditar que o aluno prefere a forma sobre a qual já tenha elaborado um conceito mental acerca do elemento matemático, resistindo à formulação de um novo conceito formal em relação à propriedade do elemento matemático não ser mais estático em relação aos eixos OX e OY e sim, rotacionados e transladados conforme apresentados nos OVA’s.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem reporta a sala de aula ao momento contemporâneo de inovação. Neste trabalho foi desenvolvida uma unidade de aprendizagem direcionada ao estudo da área do paralelogramo e do triângulo gerado por dois vetores linearmente independentes e ao estudo das cônicas. Para a aplicação dessa unidade foram desenvolvidos OVA's visando seu uso como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem. A partir do desenvolvimento e aplicação das atividades junto aos alunos buscou-se verificar de que forma esses contribuem na interação entre as formas de representação semióticas dos objetos de estudo.

Os objetos criados foram disponibilizados no Geogebratube, para que essa ferramenta possa ser utilizada e reutilizada pelos leitores para apresentação de conteúdos matemáticos em sala e aula ou para estudos individualizados. Destaca-se a importância de os docentes buscarem alternativas de intermediação entre as formas de representação de objetos de estudos da matemática para a consolidação do processo de aprendizagem, de forma a desenvolver nos alunos habilidades de representação dos objetos estudados em forma de linguagem escrita, na sua forma geométrica e sua representação algébrica. A utilização de ferramentas tecnológicas na prática docente mostrou-se um aliado para despertar mais o interesse e o comprometimento do discente na construção do conhecimento. Espera-se que o material desenvolvido na elaboração UA e dos OVA's contribua no trabalho dos docentes e no estudo de discentes em relação aos temas propostos.

Foram realizados 6 (seis) encontros com duração de 3h30min (três horas e meia), onde foram apresentados os OVA's nos momentos de apresentação e sistematização dos conceitos relativos aos temas abordados. Observou-se durante a realização deste trabalho que os alunos interagiram de forma dinâmica, questionando ao que observavam nos objetos, propondo conjecturas e desenvolvendo as atividades propostas. Assim, na minha avaliação, o uso dos OVA's contribuiu na aprendizagem referente a determinação da área do paralelogramo e do triângulo e na sistematização de conceitos e atividades da elipse e da hipérbole, no entanto, percebendo-se maior dificuldade na sistematização dos conceitos e atividades relacionados a parábola.

Os temas abordados nesse trabalho fazem parte da ementa do componente curricular do curso de Arquitetura e Urbanismo em uma Universidade de Chapecó na qual trabalho como professora. Por fazer parte da ementa, as atividades propostas compuseram uma nota do semestre, sendo que a pontuação de cada atividade estava condicionada a entrega da atividade.

Verificou-se na sistematização dos conceitos representados nos quadros 4, 5, 6, 7 e 8, que alguns alunos não demonstraram muito comprometimento na devolutiva das atividades propostas essa situação está particularmente exemplificada pelo aluno A1, que durante o semestre demonstrou conhecimento para realizar cálculos e até demonstrações, no entanto, na sistematização solicitada não demonstrou clareza e objetividade.

De modo geral observou-se que a maioria dos alunos conseguiram transitar entre as formas de representação, principalmente entre as formas de representação geométrica e algébrica. Houve também quem demonstrou capacidade em transitar entre as formas de representação escrita, algébrica e geométrica (como por exemplo o aluno A10). Observou-se ainda que no momento da realização de atividades em que deveriam realizar cálculos, a maioria não apresentou muitas dificuldades.

Ao finalizar esse trabalho salienta-se a importância de o docente buscar metodologias que envolvam o aluno na construção e transformação do seu conhecimento. Em se tratando do estudo da matemática não se pode ignorar que os objetos matemáticos possuem diferentes formas de representação semióticas e que é necessário realizar a conexão entre essas formas de representação para que o aluno transforme em sua forma cognitiva o conceito a ser abstraído. Deste modo acredita-se que este trabalho possa contribuir nas diferentes formas de representação e apresenta alternativas de como realizar a conexão estre estas formas de representação.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, F.M. **Unidade de aprendizagem: uma alternativa para professores e alunos conviverem melhor.** 2006. Disponível em: http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3079

ANTONIO, W.J. **Objetos de aprendizagem virtuais: material didático para educação básica.**Unesp, 2005. Disponível em: http://www.abed.org.br/congresso2005/por/pdf/006tcc1.pdf.

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S. **Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos uma nova proposição aplicada à educação.** Revista Contemporânea de Educação, vol. 5, n. 10, jul/dez 2010.

BALDIN, Yuriko Y. **Uso de tecnologia como ferramenta didática no ensino integrado: uma forma de educação continuada para professores de nível básico**. In: Carvalho, Luiz M. et al. **História e tecnologia no ensino da matemática**, Vol. 2. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008. In: Kipper, D. Fruet, F.S. O. Kinast, E.J. **Um estudo das potencialidades do ensino-aprendizagem de matemática mediado pelas tecnologias de informação e comunicação.** Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v.22, n.1, p.247-272, jan./jun.2014.

BRASIL.**Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Parte I – Bases Legais. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BEBRENS, M. A.; OLIARI, A.L.T. **A evolução dos paradigmas na educação: do pensamento científico tradicional a complexidade.** Diálogo Educ., Curitiba. v.7. n. 22. p. 53-66, set./dez.2007.

BRUGINSKI, W. J. **Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software Geogebra para o estudo de funções trigonométricas.** PROFMAT, 2014.

DALL'ASTA, R.J.; BRANDÃO, E.J.R. **A transposição didática em Softwares educacionais.** UPF, 2004.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. REVEMAT, 2012**.** Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Penseé Humaine: Registres Sémiotiques et Apprendtissages Intellectueis).** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FERRO, M.G.D.; PAIXÃO, M.S.LS. **Psicologia da aprendizagem: fundamentos teóricos-metodológicos dos processos de construção do conhecimento.** Teresina: EDUFPI, 2017.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 26ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FRESCHI, M.; RAMOS, M. G. **Unidade de aprendizagem: um processo em construção que possibilita o trânsito entre o censo comum e o conhecimento científico.** Revista Electrónica Enseñanza de lasCiencias. Vol. 8. N. 8, 2009. Disponível em: http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen8/ART9_Vol8_N1.pdf

HOFSTAETTER, Andrea. **Objetos virtuais de aprendizagem possibilidades para a educação em artes visuais.** 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/gearte/pesquisas/pesquisa_andrea01.pdf.

KENSKI, V. M. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação. Campinas: Papirus, 2008.

KUMMER, T. **Ações e operações de visualização, raciocínio e representação no processo de construções geométricas. (**p. 47-61). In: Scheffer, N. F. Comachio, E. Cenci, D. (org). Tecnologias da informação e comunicação na educação matemática: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representação. Curitiba: CRV, 2018.

MONTEIRO, B.S. et al. **Metodologia de desenvolvimento de objetos de aprendizagem com foco na aprendizagem significativa.** Paraíba: UFPB, 2006.

PENKAL, L.L. et al. **Diversidade no Ensino**. Guarapuava: Editora Unicentro, 2011.

RITA, J.S. et al. **A importância de objetos virtuais de aprendizagem no ensino da matemática.** Artigo apresentado no: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_Rita_01003699014.pdf

SANTOS, M. E. K. L.; AMARAL, L. H. **Avaliação de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Matemática.** 2012. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/viewFile/109/71

SANTOS, L.M.A.; FLORES, M. L. P.; TAROUCO, L. M. R. **Objetos de aprendizagem: teoria instrutiva apoiada por computador.** Revista Novas Tecnologias na Educação: CINTED-UFRGS, V. 6, nº 2, dezembro, 2007.

SOUZA et all. **Secções cônicas e uso de materiais didáticos,** 2013. Disponível em: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1223.pdf.

TEIXEIRA, I. R. G. **O uso do softwareGeoGebra nas construções gráficas de Funções Quadráticas.** Disponível em: http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd6_igor_teixeira.pdf

TEIXEIRA, E.B. **A análise de dados na pesquisa científica: importância e desafios em estudos organizacionais.** UPF: Editora Unijuí, ano 1, n. 2, jul/dez, 2003 (p. 177 – 201).

VYGOTSKY, L.S. LEONTIEV, A. et all. **Psicologia e pedagogia: bases psicológicas da apresndizagem e do desenvolvimento. São Paulo: Centauro, 2005.**

WILEY, D. A. **Connecting learning objects to instructional design theory : Adefinition, a metaphor, and a taxonomy** . 2000. Disponível em:http://reusability.org/read/. Acesso em: 28 de abril de 2007.

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf