



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS DE LARANJEIRAS DO SUL
ENGENHARIA DE ALIMENTOS

CLAUDINEI ALVES

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA O PROBLEMA DO
TRANSIENTE TÉRMICO EM MULTICAMADAS**

LARANJEIRAS DO SUL

2017

CLAUDINEI ALVES

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA O PROBLEMA DO
TRANSIENTE TÉRMICO EM MULTICAMADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia de Alimentos da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito para a obtenção do título de Engenheira de Alimentos.

Orientador: Prof. Dr. Wanderson Gonçalves Wanzeller.

Co-orientadores: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes Dagnone e Prof. Dr. Gian Machado de Castro.

LARANJEIRAS DO SUL

2017

PROGRAD/DBIB - Divisão de Bibliotecas

Alves, Claudinei
APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA O PROBLEMA
DO TRANSIENTE TÉRMICO EM MULTICAMADAS/ Claudinei Alves.
-- 2017.
32 f.

Orientador: Wanderson Gonçalves Wanzeller.
Co-orientador: Carlos Augusto Fernandes ; Castro,
Gian Machado, Dagnone.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Engenharia de Alimentos , Laranjeiras do Sul, PR, 2017.

1. Transferência de Calor. 2. Transiente térmico. 3.
modelagem e análise numérica. 4. câmaras frias. 5.
Transformada de Laplace. I. Wanzeller, Wanderson
Gonçalves, orient. II. Dagnone, Carlos Augusto Fernandes
; Castro, Gian Machado,, co-orient. III. Universidade
Federal da Fronteira Sul. IV. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

CLAUDINEI ALVES

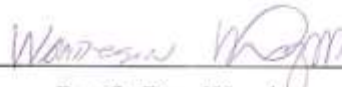
**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA O PROBLEMA
DO TRANSIENTE TÉRMICO EM MULTICAMADAS**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Alimentos na Universidade Federal da Fronteira Sul – Campus Laranjeiras do Sul-PR.

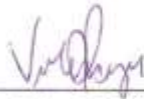
Orientador: Professor Dr. Wanderson Goncalves Wanzeller

Este trabalho de conclusão de curso foi defendido e aprovado pela banca em: 22/11/2017

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Wanderson Goncalves Wanzeller



Prof^a. Dr^a. Vivian Machado de Menezes



Prof^a. Dr . Gustavo Henrique Fidelis dos Santos

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela graça da VIDA, pelas bênçãos, pela proteção.

Aos meus amados pais, Ana e Argemiro, por serem os meus pilares, as peças fundamentais da minha existência... Que compartilham dos meus dias e das minhas dificuldades de vencer a cada momento. Simplesmente muito obrigado por TUDO!

Agradeço a minha irmã, Rosemara, pelos conselhos, companheirismo e amor.

Agradeço aos meus sobrinhos, Bruno e Rafaela, por sempre me fazerem sorrir em momentos de desesperos.

Agradeço aos meus amigos do tererê e aos meus amigos da universidade por estarem sempre por perto, por compartilharem diversos momentos de companheirismo e de alegria. Em especial agradeço aos meus amigos, Cássio, Charles, Douglas, Felipe, Jean, Klayson, Luan, Lucas, Mateus, Mauro, Raphael, Talis, Patrick e Wilson.

Ao meu orientador Prof. Wanderson, que se fez presente em todos os momentos, que nunca mediu esforços para me orientar. Sempre com muita competência, dedicação... Por todo o conhecimento transmitido, paciência e compreensão.

Aos meus coorientadores Prof. Carlos e Prof. Gian, por compartilharem todo seu conhecimento, sempre com muita elegância e competência, auxiliando, corrigindo e me ajudando a sempre progredir.

A todos os demais professores pelo conhecimento transmitido, com muito comprometimento, dedicação e carinho. Em especial agradeço ao Prof. Gustavo, Prof. Vania, Prof. Larissa, pelas oportunidades de realizar trabalhos dentro e fora da universidade, pelos conselhos, e pela grande ajuda em vários momentos. Muito obrigado e que Deus sempre abençoe vocês!

Agradeço a todos os demais que de alguma maneira contribuíram comigo durante esse tempo, meu sincero muito obrigado!

RESUMO

Câmaras frias são ambientes climatizados utilizados na conservação de alimentos. Basicamente apresentam paredes formadas por materiais distintos. Em geral, uma câmara fria é composta de uma camada de alvenaria com emboço (parede externa), uma camada de isolante térmico e uma terceira camada (interna) que serve de revestimento em que pode-se utilizar diversos tipos de materiais. Logo, sua composição é em multicamadas. Objetiva-se nesse trabalho realizar uma modelagem computacional do transiente térmico por entre as camadas da câmara fria. Neste trabalho foi utilizado o método da Transformada de Laplace para tratar o problema de transferência de calor numa barra composta, modelando o problema pela conhecida equação da condução do calor. Estudos mostraram que são possíveis tratamentos analíticos e numéricos para o problema do transiente térmico numa barra composta, porém, alguns métodos apresentam limitações. A análise do comportamento da distribuição da temperatura na barra composta (por diferentes materiais) pelo método da Transformada de Laplace mostrou-se eficiente (devido solucionar o problema da descontinuidade na função temperatura) e flexível (pode-se utilizar diferentes propriedades dos materiais) na solução do problema proposto (transiente térmico em duas camadas utilizando propriedades térmicas de uma câmara fria).

Palavras-chave: Câmaras frias. Modelagem computacional. Transiente térmico. Barra composta.

ABSTRACT

Cold rooms are air-conditioned environments used in food preservation. Basically they have walls formed by different materials. In general, a cold chamber is composed of a brick layer (external wall), a layer of thermal insulation and a third (inner) layer which serves as a coating in which various types of materials can be used. Therefore, its composition is in multilayers. The objective of this work is to perform a computational modeling of the thermal transient between the layers of the cold chamber. In this work the Laplace Transform method was used to treat the problem of heat transfer in a composite bar, modeling the problem by the known heat conduction equation. Studies have shown that analytical and numerical treatments are possible for the thermal transient problem in a composite bar, but some methods have limitations. The analysis of the behavior of the temperature distribution in the composite bar (by different materials) by the Laplace Transform method proved to be efficient (due to the solution of the problem of the discontinuity in the temperature function) and flexible (different properties of the materials can be used) in the solution of the proposed problem (two-layer thermal transient using thermal properties of a cold chamber).

Keywords: Cold rooms. Computational modeling. Thermal transient. Composite bar.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 OBJETIVOS	9
1.1.1 Objetivo geral	9
<i>1.1.1.1 Objetivos específicos</i>	9
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 LEI DE FOURIER	9
2.2 PROPRIEDADES TÉRMICAS DOS MATERIAIS	10
2.2.1 Condutividade térmica	10
2.2.2 Difusividade térmica	10
2.2.3 Calor específico (pressão constante)	11
2.3 ISOLANTES.....	11
2.4 CÂMARAS FRIAS.....	12
2.5 CONTATO PERFEITO	13
2.6 EQUAÇÃO DO CALOR	14
2.7 TRATAMENTO ANALÍTICO PARA UMA BARRA COMPOSTA	14
3 METODOLOGIA	17
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	18
5 CONCLUSÃO	21
REFERÊNCIAS	22
APÊNDICE A	24
APÊNDICE B	26

1 INTRODUÇÃO

Uma das formas da utilização do frio na conservação de alimentos é a refrigeração (FELLOWS, 2000). Na indústria, a refrigeração é utilizada em vários processos de transformação relacionados com o ramo alimentar, químico, plástico entre outros, mais especificamente na otimização do desempenho térmico e da eficiência energética de câmaras frias frigoríficas (CHAGAS, 2006). As câmaras frias são compartimentos fechados, formadas por diferentes materiais e dimensões de camadas, cujas condições internas sejam controladas por isolamento térmico. Os materiais utilizados para tal isolamento reduzem as trocas térmicas entre o ambiente externo e interno devido as suas propriedades termofísicas (COUTO et al., 2016).

Para que as condições interiores das câmaras frias sejam mantidas sob controle adequado de temperatura, se faz necessário uso de um sistema de refrigeração, em conjunto com uma infraestrutura física apropriada, que possibilite uma menor transferência de calor, o que contribui na diminuição de custos energéticos e operacionais (GURTAT, 2014; VERNIER, 2010).

O estudo da transferência de calor em câmaras frias se justifica pela possibilidade de reduzir o desperdício de energia elétrica melhorando o conforto térmico, que necessita de controle preciso da temperatura ambiente, sendo necessário um dimensionamento cuidadoso dos materiais das paredes, devido às trocas de calor com o ambiente externo (DAGA, 2011).

As trocas térmicas entre os materiais sólidos ocorrem pelo mecanismo da condução de calor, sendo o modelo de Fourier, da física matemática, um dos mais usados que descreve tal mecanismo. O problema que envolve as trocas térmicas causadas por uma diferença de temperatura entre os materiais sólidos, pode ser representado pela equação de condução do calor, que determina a distribuição da temperatura em um corpo (MELO, 2011).

A equação do calor pode determinar o comportamento futuro de diversos problemas, com base na variação dos problemas dos valores iniciais (P.V.I) e de contorno (P.V.C). Porém, a resolução da equação do calor pode ser complexa, o que dificulta ou até mesmo impossibilita a utilização de alguns métodos analíticos.

O método das diferenças finitas pode tratar analiticamente a equação calor. No entanto, os estudos de Gurtat (2014), apresentaram algumas limitações na utilização deste método, observando uma descontinuidade na função temperatura. Portanto, o presente trabalho dedicou-se a um estudo analítico e numérico (sob o ponto de vista físico-matemático) na solução de problemas do transiente térmico numa barra composta por diferentes materiais

(pode representar uma parede de uma câmara fria), utilizando a técnica da transformada de Laplace, a fim de solucionar o problema da descontinuidade da função temperatura no tratamento da equação do calor.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Modelagem computacional do transiente térmico unidirecional em multicamadas utilizando abordagens matemáticas e fundamentação física do processo termodinâmico envolvido. A fim de tratar a descontinuidade da função temperatura na interface dos materiais.

1.1.1.1 Objetivos específicos

- Estudo de uma linguagem de programação *FORTRAN 77* (CLIVE) para a construção do *software*;
- Discussão dos aspectos teórico-técnicos de uma barra composta, sob o ponto de vista de fenômenos de transporte;
- Tratamento analítico e computacional do problema físico em questão considerando todos os pré-requisitos (Lei de Fourier, Métodos Numéricos, Transformada de Laplace, entre outros).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 LEI DE FOURIER

A condução de calor pode ser definida como a transferência de energia térmica de uma parte de um corpo com temperatura mais elevada para outra parte do mesmo corpo a uma temperatura mais baixa. Esse mecanismo, que ocorre no nível molecular, envolve vários fenômenos que são determinados, em especial, pelo estado físico e estrutura do meio analisado (BRAGA, 2011).

Um dos modelos mais usados da física matemática que descreve a condução do calor em meio sólidos é o modelo de *Fourier* que pode ser descrito pela Equação (1) (CHIWIACOWSKY, 2002).

$$\dot{Q} = KA \frac{\Delta T}{L} \quad (1)$$

\dot{Q} é a taxa de energia transferida (W);

K é o coeficiente de condutividade térmica ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$);

ΔT é a diferença de temperatura entre as faces extremas de um material ($^\circ C$);

A é a superfície através da qual se dá a passagem de calor (m^2);

L é a espessura do material (m).

2.2 PROPRIEDADES TÉRMICAS DOS MATERIAIS

As características de cada material são definidas por várias propriedades térmicas importantes (VARNIER, 2010). No estudo em questão, torna-se indispensável conhecer algumas destas propriedades que são de fundamental relevância como, condutividade térmica, difusividade térmica e o calor específico. São estas que determinam se o material que constitui uma parede é mais ou menos eficiente no ponto de vista energético.

2.2.1 Condutividade térmica

Segundo Kreith (2003), a condutividade térmica é uma propriedade física dos materiais que é definida como a quantidade de energia térmica que “flui” através de uma unidade de área por unidade de tempo. A quantidade de calor que atravessa uma parede em um intervalo de tempo, depende dos seguintes fatores: condutividade térmica (K) do material; área (A); diferença de temperatura entre os extremos da parede, como por exemplo, temperatura interna (T_i) e temperatura externa (T_e) e a espessura (L) da parede, como expressa na Equação (1). Portanto, condutividade térmica, é a constante de proporcionalidade dependente da natureza do material, é uma propriedade física que consiste na facilidade dos mesmos conduzir calor.

2.2.2 Difusividade térmica

A difusividade térmica indica como o calor se difunde através de um material. Isso depende de três propriedades da matéria. Essas propriedades são conhecidas como propriedades termofísicas e incluem duas categorias distintas, propriedades e transporte (incluem os coeficientes de taxa de difusão, que para a transferência de calor depende da

condutividade térmica (K) e propriedades termodinâmicas - que dizem respeito ao estado de equilíbrio de um sistema. Massa específica (ρ) e calor específico (C_p) são duas dessas propriedades amplamente utilizadas em análise termodinâmica (INCROPERA et al., 2013).

Na análise de transferência de calor, a difusividade térmica dos materiais é a razão entre a condutividade térmica (K) pelo calor específico (C_p) e massa específica (ρ), como apresentado:

$$k = \frac{K}{\rho c_p} \quad (2)$$

Onde:

k é a difusividade térmica ($m^2 \cdot s^{-1}$);

ρ é a densidade ou massa específica ($kg \cdot m^{-3}$);

C_p é o calor específico a pressão constante ($J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$).

2.2.3 Calor específico (pressão constante)

Calor específico é uma grandeza física que define a variação térmica de um corpo, ao receber determinada quantidade de calor (INCROPERA et al., 2013). É possível calcular o calor específico de um corpo a partir de uma quantidade de calor, da massa do corpo, e da variação térmica (ΔT) que ele sofre.

$$C_p = \frac{Q}{m\Delta T} \quad (3)$$

Em que m é a massa.

2.3 ISOLANTES

Isolantes térmicos são materiais de baixo coeficiente de condutividade térmica. Normalmente é composto por materiais porosos, em que a resistência térmica se baseia na baixa condutividade do ar contido em seus vazios (VARNIER, 2010). Segundo Costa (1974), quanto menor a densidade do material e maior o número de poros, implica num maior poder de isolamento.

As principais características de um termoisolante:

- a) Baixa condutividade térmica;
- b) Baixa densidade;
- c) Boa resistência mecânica;

- d) Baixo custo operacional;
- e) Não serem inflamáveis.

Além disso, os materiais isolantes devem apresentar baixa penetração do vapor d'água. Visto que em decorrência do uso, alguns materiais isolantes tende a absorver umidade, causando um aumento no coeficiente de condutividade térmica do material e consequentemente diminuindo a eficiência do isolamento térmica (MARQUES et al., 2009).

A maioria dos materiais isolantes não contem todas as qualidades conjuntamente. Por isso, a escolha do material deve estar associada com a finalidade operacional. Os isolantes tem como objetivo reduzir as trocas térmicas entre o meio interno com o meio externo, evitando trocas térmicas indesejáveis (GURTAT, 2014; VARNIER, 2010).

Os isolantes geralmente são aplicados na conservação de alimentos, em câmaras frias, com objetivo de evitar trocas térmicas indesejáveis e manter a temperatura do meio interno em níveis adequados de armazenamento (GURTAT, 2014; VARNIER, 2010).

Os materiais termoisolantes mais utilizados em câmaras frigoríficas são o EPS (poliestireno expandido) e o PUR (poliuretano), que podem ser aplicados sob a forma de painéis para cobertura e fechamento lateral, que são diretamente montados sobre estruturas metálicas ou pré-moldados em concreto ou madeira. (GURTAT, 2014).

Considerando as propriedades térmicas abordadas até o momento, a Tabela 1 apresenta os materiais mais utilizados em câmara frigoríficas com suas respectivas propriedades dos materiais.

Tabela 1 - Propriedades termofísicas dos materiais formadores de câmaras frias.

	Aço galvanizado	EPS	PUR	Concreto
Densidade ρ (kg/m^3)	7836	1050	40	2000
Calor específico C_p ($J/kg \cdot K$)	443	1200	1674	840
Condutividade térmica K ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	48.9	0.157	0.029	1.4
Difusividade térmica k ($m^2 \cdot s^{-1}$) $\times (10^{-6})$	14.1	0.12	0.433	0.833

Fonte: Adaptada de ÇENGEL, 2012.

2.4 CÂMARAS FRIAS

As câmaras frias são compartimentos fechados, isolados termicamente, o qual possui condições internas que permite controle da temperatura e umidade (COUTO et al., 2016).

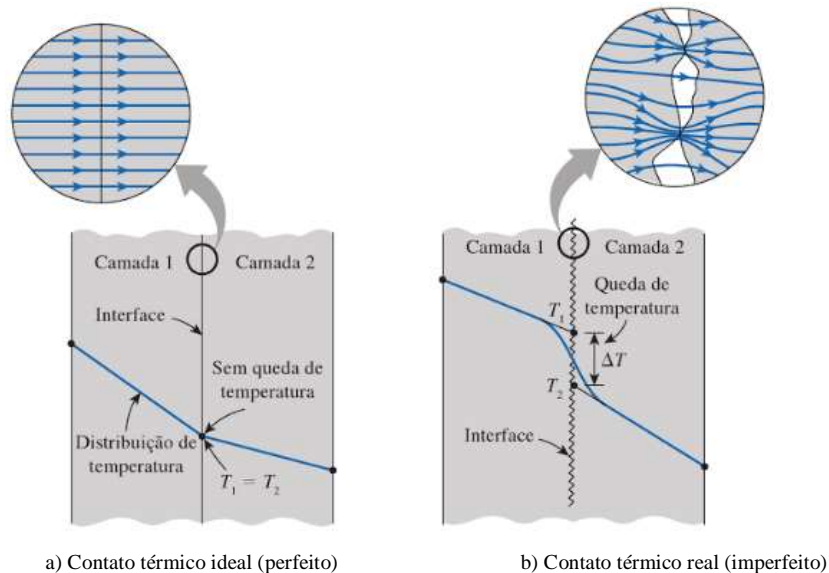
Geralmente as câmaras frias são utilizadas no setor industrial, para resfriamento ou congelamento de produtos alimentícios, tendo por objetivo manter os produtos armazenados em temperaturas próximas de 0 e -18 °C, para conservar e prolongar o período de estocagem (FELLOWS, 2000).

No processo de construção de câmaras frias, existem duas configurações bases. As câmaras de alvenaria, normalmente formada por uma parede de concreto, em contato com isolante térmico e internamente revestido com aço galvanizado, e as câmaras compostas por um painel frigorífico, as quais são formadas por chapas de aço galvanizado, contido em seu núcleo um material isolante de baixa condutividade térmica. Essas paredes formadas por diferentes materiais são denominadas de paredes compostas ou multicamadas (GURTAT, 2014).

2.5 CONTATO PERFEITO

Na análise de condução de calor por meio de paredes compostas, no qual os materiais apresentam características distintas, torna-se conveniente adotar condições de “contato perfeito” na interface desses materiais. A Figura 1.b, representa uma ilustração do contato térmico real, em que as superfícies não são perfeitamente lisas, sendo possível notar na interface dos materiais a existência de inúmeros picos (quando os materiais estão em contato) e espaços preenchidos de ar. Os picos fazem com que o calor seja propagado através da condução e para os espaços preenchidos de ar, a transmissão do calor ocorre por convecção. Em contra partida, considera-se na Figura 1.a, a condição de contato térmico ideal (perfeito), indicando que o fluxo de energia térmica ocorre da camada 1 para a camada 2 somente pelo mecanismo de condução (ÇENGEL, 2012).

Figura 1 – Distribuição de temperatura e linhas de fluxo de calor ao longo de duas placas compostas para o caso de contatos perfeito e imperfeito.



Fonte: ÇENGEL, 2012.

2.6 EQUAÇÃO DO CALOR

A equação do calor é uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem. Essa equação determina o campo de temperatura, ou seja, representa como a temperatura varia com a posição no meio. (INCROPERA et. al., 2013). A equação do calor expressa um equilíbrio físico fundamental, no qual o fluxo de energia térmica que entra em qualquer parte de um material é igual ao fluxo de energia térmica absorvido naquela parte do material (BOYCE; DIPRIMA, 2002).

Considerando que a espessura da parede de uma câmara fria é igual ao comprimento de uma barra, sendo uma das extremidades refrigerada (interior) e a outra extremidade em contato com o ambiente (exterior), o comportamento da temperatura no interior de uma barra homogênea, em apenas uma direção é dado pela equação do calor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

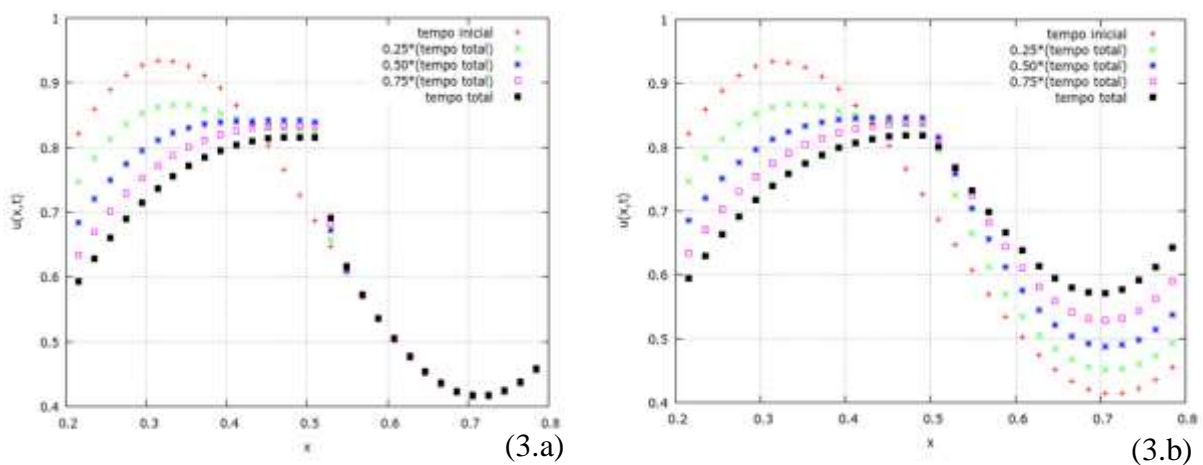
Sendo k o coeficiente de difusividade térmica, apresentado na Equação (2).

2.7 TRATAMENTO ANALÍTICO PARA UMA BARRA COMPOSTA

Entre as técnicas analíticas mais utilizadas em condução de calor transiente, as mais

difundidas são o método de separação de variáveis e o método da transformada de Laplace. A aproximação de derivadas por diferenças finitas é um dos mais antigos métodos para resolver equações diferenciais parciais (CUNHA DA SILVA, 2016). Entretanto, nos estudos de Gurtat (2014), que empregou o método explícito e implícito de Crank-Nicholson, apresentou algumas limitações, que resultou na observação de uma descontinuidade na função temperatura, localizado na interface dos materiais (Figura 4).

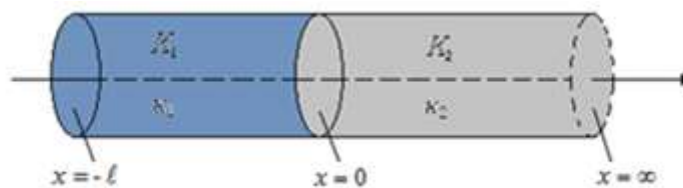
Figura 4 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra, em que para (3.a) utilizando materiais com (k) de ordens de grandeza diferentes (método implícito) e (3.b) utilizando materiais com (k) de mesma ordem de grandeza (método implícito).



Fonte: GURTAT, 2014.

Para o tratamento analítico da equação do calor utilizando a Transformada de Laplace é ilustrado na Figura 2 o problema proposto por Carslaw (1959) com as devidas condições.

Figura 2 – Barra composta por dois materiais de acordo com Carslaw (1959).



Fonte: Elaborado pelo autor.

$K_1 \neq K_2$ Condutividade térmica;

$k_1 \neq k_2$ Difusividade térmica.

Em que apresenta um comprimento entre $-\ell < x \leq 0$ (material 1) e entre $0 < x < \infty$ o material 2 com suas devidas propriedades físicas identificadas com os índices 1 e 2. A equação do calor nesse cenário:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0; \quad -\ell < x \leq 0, \quad t > 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{k_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (6)$$

Com as seguintes condições, que indicam temperaturas fixas nas extremidades:

P.V.I.

$$u(x, 0) = 0, \quad -\ell \leq x < \infty \quad (7)$$

P.V.C.

$$u(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0 \quad (8)$$

$$u(-\ell, t) = V, \quad t > 0. \quad (9)$$

E condições de contato perfeito (Lei de Fourier) em $x = 0$ para $t > 0$

$$u_1 = u_2 \quad (10)$$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (11)$$

Aplicando a Transformada de Laplace (apêndice A) nas equações básicas (5) e (6),

temos:

$$\frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2} - q_1^2 \bar{u}_1 = 0, \quad -\ell < x < 0 \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_2}{dx^2} - q_2^2 \bar{u}_2 = 0, \quad x > 0 \quad (13)$$

$$q_1 = (p/k_1)^{\frac{1}{2}}, \quad q_2 = (p/k_2)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

e nas condições P.V.C. temos:

$$\bar{u}_1 = \frac{V}{p}, \quad x = -\ell \quad (15)$$

$$\bar{u}_2 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (16)$$

e também nas condições de contato perfeito (Lei de Fourier)

$$K_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}, \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad x = 0, \quad t > 0. \quad (17)$$

Portanto, a solução das Equações (12) e (13):

$$\bar{u}_1 = \frac{V(\cosh q_1 x - \sigma \sinh q_1 x)}{p(\cosh q_1 \ell + \sigma \sinh q_1 \ell)} \quad (18)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{V}{p(\cosh q_1 \ell + \sigma \sinh q_1 \ell)} e^{-q_2 x} \quad (19)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad \sigma = \frac{K_2 \kappa}{k_1}, \quad \alpha = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \quad (20)$$

Aplicando a inversa de Laplace através das propriedades apresentada no Apêndice A.

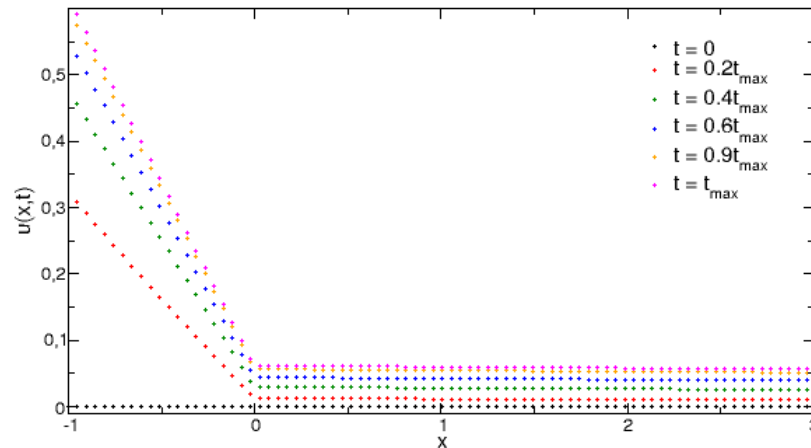
Temos a solução da Equação diferencial (5) e (6):

$$u_1 = V \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left\{ \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)\ell + x}{2\sqrt{k_1 t}} - \alpha \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)\ell - x}{2\sqrt{k_1 t}} \right\} \quad (21)$$

$$u_2 = \frac{2V}{1+\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)\ell + \kappa x}{2\sqrt{k_1 t}} \quad (22)$$

As curvas da função temperatura para diversos valores de tempo do problema proposto por Carslaw (1959) estão apresentadas na Figura 3.

Figura 3 – Transiente térmico para uma barra composta por dois materiais de condutividade térmica (K) de ordem de grandeza diferentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme observado na Figura 3, o problema proposto por Carslaw (1959) apresentou o transiente térmico numa barra composta por dois materiais com K de ordem de grandeza diferente, indicando que o método de Laplace é aplicável para condução de calor por entre matérias compostos.

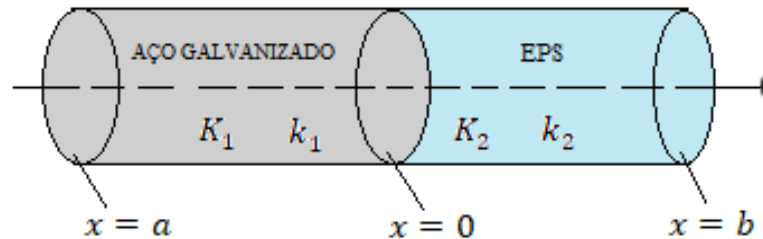
3 METODOLOGIA

No presente trabalho, a pesquisa iniciou-se com estudo da condução do calor para barras homogêneas em que os diferentes materiais foram colocados em contato, lado a lado com o intuito de formar uma única barra composta. Nesta abordagem utilizou-se o método da transformada de Laplace, para solucionar o problema aplicada a equação do calor para obter a solução em que envolvem condução de calor em uma barra unidimensional compostas por diferentes materiais. Segundo Carslaw (1959) problemas na condução de calor em sólidos compostos, geralmente são melhor resolvidos pelo método de transformada de Laplace. Tanto as transformações como as manipulações algébricas podem ser onerosas, mas nenhum novo princípio físico está envolvido. Para a utilização do método de transformada de Laplace, foi realizado estudo na literatura de Carslaw (1959), que apresenta problemas aplicado à barras compostas por diferentes materiais, conforme apresentado na seção 2.7.

Primeiramente, considerou-se a formação da barra composta por dois materiais conforme ilustrado na Figura 5 com a finalidade de observar, nas interfaces dos materiais, a

eficiência do método para eliminação da descontinuidade da função temperatura. Em que apresenta, entre $a < x \leq 0$ material 1 e entre $0 < x \leq b$ o material 2 com suas devidas propriedades físicas identificadas com os índices 1 e 2. Foram utilizados valores para as propriedades térmofísicas dos materiais e temperatura adimensionais.

Figura 5 – Barra composta por dois materiais com propriedades térmicas de ordens de grandezas diferentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A equação do calor nessa situação é

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0; \quad a < x \leq 0 \quad \text{e} \quad t > 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{k_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad 0 < x \leq b \quad \text{e} \quad t > 0. \quad (24)$$

Em seguida, foram estabelecidas as condições do problema, que indicam temperatura inicial na barra e as temperaturas fixas nas extremidades, considerando valores adimensionais.

P.V.I.

$$u(x, 0) = u_i, \quad a \leq x \leq b \quad (25)$$

P.V.C.

$$x = a \rightarrow u_1 = V_1, \quad t > 0 \quad (26)$$

$$x = b \rightarrow u_2 = V_2, \quad t > 0 \quad (27)$$

e condições de contato perfeito em $x = 0$ para $t > 0$

$$u_1 = u_2 \quad (28)$$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (29)$$

O tratamento analítico e a solução das equações estão apresentadas no apêndice B, como também o método para a implementação numérica da transformada inversa de Laplace, o qual utilizou-se uma linguagem de programação *FORTRAN 77*.

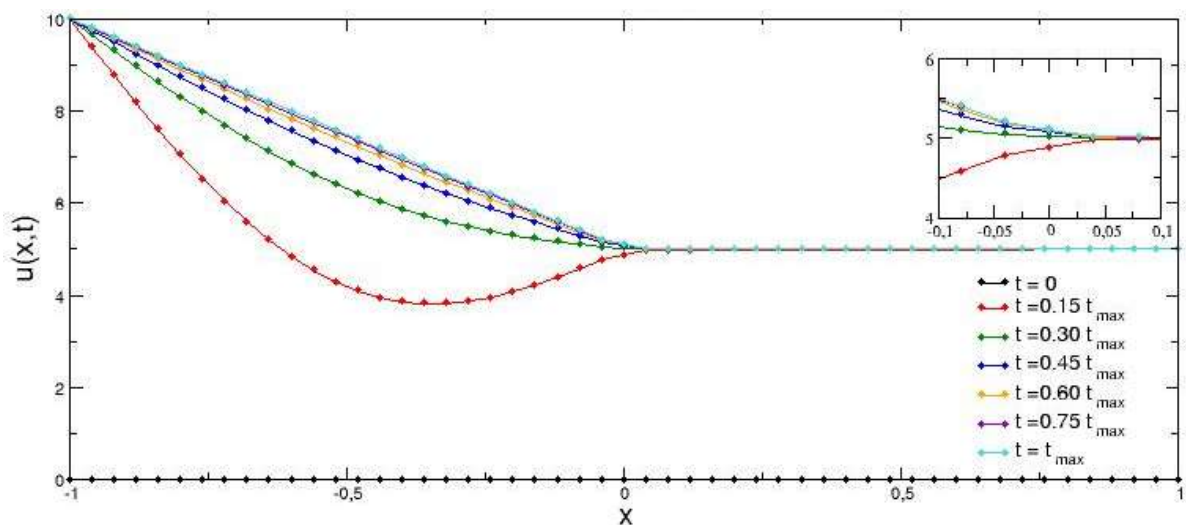
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As simulações numéricas realizadas com base no método da transformada inversa de

Laplace tiveram como cenários uma barra composta por dois materiais, diferenciando em cada uma as propriedades termofísicas.

Obteve-se como resultado o gráfico da função temperatura apresentado nas Figuras 6 e 7. Tendo duas situações: na Figura 6 os coeficientes de condutividades térmicas são de ordens de grandeza diferentes e na Figura 7 os coeficientes de condutividade térmica são de mesma ordem de grandeza e salienta-se que a condição inicial é diferente da utilizada nos estudos de Gurtat (2014).

Figura 6 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra utilizando materiais com coeficientes de condutividade térmica (K) de ordens de grandeza diferentes.



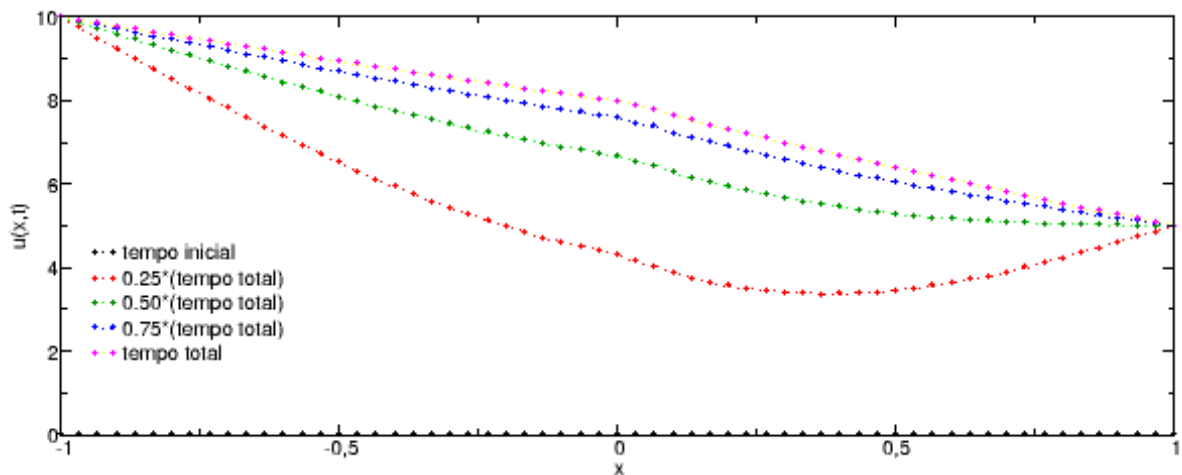
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 6 descreve o perfil de temperatura em uma barra composta por dois materiais em relação ao tempo. Foi possível observar entre $-1 < x \leq 0$ (material 1) apresentou uma maior variação de temperatura para diferentes valores de tempo, quando comparado com a variação de temperatura do material 2 ($0 < x \leq 1$). Isso ocorreu devido as propriedades térmicas dos materiais, em que para o material 2 foi utilizado valores adimensionais de condutividade térmica (K_2) igual a 0,16 e difusividade térmica (k_2) sendo 0,12 representando as propriedades térmicas do isolante poliestireno expandido (EPS), e para o material 1 foram utilizados os valores de condutividade térmica (K_1) igual a 48,0 e difusividade térmica (k_1) igual 14,0 representando as propriedades térmicas do aço galvanizado que possui uma capacidade de conduzir uma quantidade de energia térmica muito maior que o isolante térmico (EPS). Também foi possível observar o problema de valor de contorno (P.V.C.) apresentando os valores de temperatura nas extremidades dos materiais, para a extremidade do material 1 o valor de temperatura $u_1 = 10$ e para a extremidade do material 2 o valor de temperatura $u_2 = 5$, e o problema de valor inicial (P.V.I.) em que representa a temperatura de

toda a barra no tempo zero.

Para melhor análise do comportamento da função temperatura na região da interface dos materiais, é apresentado na figura 6 uma ampliação da função na região próxima de ($x = 0$), em que é possível observar a transição da energia térmica ocorrendo de forma contínua para diferentes valores de tempo, solucionando o problema da descontinuidade na função temperatura apresentado nos estudos de Gurtat (2014).

Figura 7 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra utilizando materiais com coeficientes de condutividade térmica (K) de mesma ordem de grandeza.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 7 foi possível avaliar o perfil de temperatura ao longo da barra composta por materiais com propriedades térmicas de mesma ordem de grandeza, com valores (escolhido de forma aleatória) adimensionais de condutividade e difusividade térmica para o material 1 sendo 40,0 e 0,52 e para o material 2 valores de 20,0 e 0,29 respectivamente. Para as curvas de temperatura com diferentes valores de tempo, observa-se uma suave perturbação na função temperatura na região da interface dos materiais ($x = 0$), justificando-se pelos valores de condutividade térmica e difusividade térmica do material 2, o qual apresenta valores menores do que o material 1, indicando que o material 2 conduz menor energia térmica do que o material 1. Também observou-se as mesmas condições para P.V.C e P.V.I. apresentadas no problema da Figura 6.

Conforme pode ser observado nas Figuras 6 e 7, podemos afirmar que o método da Transformada de Laplace (semi-analítico e numérico) não apresentou limitações quando aplicado no problema da condução de calor numa barra composta por dois materiais de ordens de grandezas diferentes, como também para materiais de mesma ordem de grandeza, para a interface dos materiais em $x = 0$, resultando na eliminação da descontinuidade na função

temperatura. Foi possível pelas condições de contato perfeito entre os materiais.

5 CONCLUSÃO

A análise e modelagem matemática do fenômeno da condução de calor não-estacionário, unidirecional, em uma barra composta por dois materiais, representando a porção de uma câmara fria (aço galvanizado e isolante térmico). Utilizando um método da Transformada de Laplace eliminou a descontinuidade. Ao analisar o comportamento da distribuição da temperatura numa barra composta por dois materiais com propriedades térmicas diferentes, pode-se observar que o método da Transformada de Laplace solucionou o problema da descontinuidade da função temperatura na interface dos materiais, isso foi possível pela condição de contato perfeito (Lei de Fourier).

Podemos afirmar que a aplicação do método da Transformada de Laplace em conjunto com o método numérico da inversa de Laplace, resultou em um modelo que permitem encontrar uma solução para o problema em questão, em forma semi-analítica. O método apresenta flexibilidade em relação à possibilidade de calcular para qualquer tipo de parede, permitindo analisar os efeitos de distintos materiais e espessuras, desde que a interface do materiais seja representado pelo valor zero.

Para as perspectivas futuras pretende-se resolver o problema de transferência de calor adicionando meios convectivos na interface dos materiais, a fim de avaliar o método e aproximar cada vez mais de uma situação real.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- BRAGA, W. F. Nova **abordagem do método do balance integral: aplicação a problemas inversos de condução de calor**. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis- SC, 2011.
- CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids**, 2nd Edn. 319-326. Oxford University Press, London, 1959.
- CHIWIACOWSKY, L. D. **Uso da função de transferência em problemas de condução do calor com Lei de Fourier modificada**. Dissertação Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre – RS. 2002.
- COSTA E.C.D., **Física aplicada à construção: conforto térmico**, Blücher, São Paulo, 1974.
- COUTO, L. C. R. S.; COSTA, C. F.; POSSANCINI, F. A.; SILVA, B. C. D.; OLIVEIRA, L. H.; SILVA, S. F. P. **Estudo das câmaras frigoríficas de um restaurante universitário**. XIV CEEL. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia – MG. pag 1-5. Outubro de 2016.
- CUNHA DA SILVA, A. **Análise térmica transiente de um elemento combustível esférico em resfriamento convectivo e radiativo usando modelo aperfeiçoando de parâmetros concentrados**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Nuclear. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – RJ. Março de 2016.
- ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A.J. **Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática**. 4ª Edição. Porto Alegre: AMGH, p. 139-147, 2012.
- DAGA, O. M. B. **Modelagem matemática da transferência de calor em paredes multicamadas de edificações em três dimensões**. Dissertação de Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – (UNIJUI). Ijuí –RS, 2011.
- DAVIES A.; CRANN D. **The solution of differential equations using numerical Laplace transforms**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1999, p. 65-79.
- FELLOWS, P. J. **Tecnologia do Processamento de Alimentos: Princípios e Prática**. 2ª edição, Porto Alegre: Artmed, 2006.
- GURTAT, M.; WANZELLER, W. G.; DAGNONE, C. A. F. ; CASTRO, G. M. **DINÂMICA DA TRANSMISSÃO DE CALOR POR CONDUÇÃO NA INTERFACE DE BARRAS COMPOSTAS**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia de Alimentos, Universidade Federal da Fronteira Sul. Laranjeiras do Sul-PR. 2014.
- GAVER, D. P. **Observing stochastic processes, and approximate transform inversion**. 1966, p. 444-459.

INCROPERA, F. P.; BERGMAN, T. L.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6ª ed., Editora LTC, Rio de Janeiro-RJ, 643p. 2013

KREITH, F.; BOHN, M. S. **Princípios de Transferência de Calor**. Editora Edgard Blücher, São Paulo. 2003.

MARQUES, A.; et al. **Isolamentos**. Universidade de Fernando Pessoa. Cidade do Porto. Portugal, 2009.

MELO, K. J. M. **Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional**. Monografia Bacharel em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFRSA, Angicos – RN. 2011.

STEHFEST, H. **ALGORITHM NUMERICAL INVERSION OF LAPLACE TRANSFORMS**. 1970, V. 13, p. 47-49.

VANIER, R. **Determinação de propriedades térmicas de materiais em paredes compostas utilizando o método do problema inverso**. Dissertação de Pós-Graduação. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ. Ijuí – RS. 2010.

APÊNDICE A

O apêndice A traz algumas propriedades úteis da transformada de Laplace utilizadas para o tratamento analítico da equação do calor.

Definição:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{u}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (\text{A1})$$

Aditividade:

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \quad (\text{A2})$$

Homogeneidade:

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{A3})$$

Transformada da derivada

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (\text{A4})$$

Transformada de funções selecionadas:

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad (p > 0) \quad (\text{A5})$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (p > 0) \quad (\text{A6})$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1!}{p-a} \quad (p > a) \quad (\text{A7})$$

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} \quad (p > 0) \quad (\text{A8})$$

Definição da função erro complementar:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (\text{A9})$$

Sendo que $\operatorname{erf}(z)$ é uma função dada por uma integral da seguinte forma:

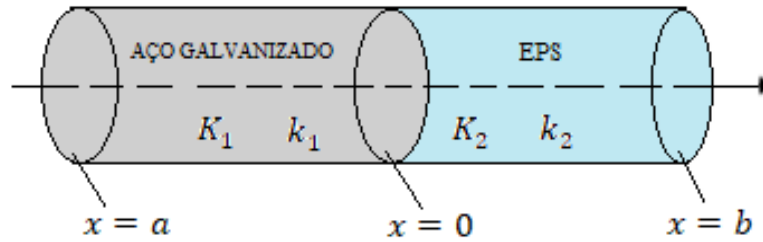
$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy \quad (\text{A10})$$

Em que y é apenas uma variável de integração e não tem significado.

APÊNDICE B

Nesse apêndice, está apresentado as contas sobre a transferência de calor por uma barra composta por dois materiais distintos. Sendo utilizado o método da Transformada de Laplace. O cenário pode ser ilustrado como a Figura B.1.

Figura B.1 – Barra composta por dois materiais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em que, entre $a < x \leq 0$ temos o material 1 e entre $0 < x \leq b$ o material 2 com suas devidas propriedades físicas identificadas com os índices 1 e 2. A equação do calor nessa situação é

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0; \quad a < x \leq 0 \quad \text{e} \quad t > 0 \quad (\text{B1})$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{k_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad 0 < x \leq b \quad \text{e} \quad t > 0 \quad (\text{B2})$$

Com as condições de contorno em $x = 0$ e $t > 0$

$$u_1 = u_2 \quad (\text{B3})$$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (\text{B4})$$

Além disso, em:

$$x = a \rightarrow u_1 = V_1 \quad (\text{B5})$$

$$x = b \rightarrow u_2 = V_2 \quad (\text{B6})$$

Usando transformadas de Laplace as equações B1 e B2 podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2} - q_1^2 \bar{u}_1 = 0; \quad a < x \leq 0 \quad \text{e} \quad t > 0 \quad (\text{B7})$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_2}{dx^2} - q_2^2 \bar{u}_2 = 0; \quad 0 < x \leq b \quad \text{e} \quad t > 0 \quad (\text{B8})$$

Sendo $q_1 = \sqrt{p/k_1}$ e $q_2 = \sqrt{p/k_2}$. Com isso as condições de contorno mudam para

$$\bar{u}_1 = \frac{V_1}{p} \quad \text{em} \quad x = a \quad (\text{B9})$$

$$\bar{u}_2 = \frac{V_2}{p} \quad \text{em} \quad x = b \quad (\text{B10})$$

Resolvendo a equação B7

A solução geral da equação B7 é

$$\bar{u}_1(x) = Ae^{q_1 x} + Be^{-q_1 x} \quad (\text{B11})$$

Usando a condição de contorno (eq. B9)

$$\frac{V_1}{p} = Ae^{q_1 a} + Be^{-q_1 a} \quad \rightarrow \quad B = \frac{V_1}{p} e^{q_1 a} - Ae^{2q_1 a} \quad (\text{B12})$$

Então,

$$\bar{u}_1 = Ae^{q_1 x} + \left(\frac{V_1}{p} e^{q_1 a} - Ae^{2q_1 a} \right) e^{-q_1 x} \quad (\text{B13})$$

Rearranjando,

$$\bar{u}_1 = A[e^{q_1 x} - e^{q_1(2a-x)}] + \frac{V_1}{p} e^{q_1(a-x)} \quad (\text{B14})$$

Resolvendo a equação B8

A solução geral da equação B8 é

$$\bar{u}_2(x) = Ce^{q_2 x} + De^{-q_2 x} \quad (\text{B15})$$

Usando a condição de contorno (eq. B10)

$$\frac{V_2}{p} = Ce^{q_2b} + De^{-q_2b} \quad \rightarrow \quad D = \frac{V_2}{p}e^{q_2b} - Ce^{2q_2b} \quad (\text{B16})$$

Então,

$$\bar{u}_2 = Ce^{q_2x} + \left(\frac{V_2}{p}e^{q_2b} - Ce^{2q_2b} \right) e^{-q_2x} \quad (\text{B17})$$

Rearranjando,

$$\bar{u}_2 = C[e^{q_2x} - e^{q_2(2b-x)}] + \frac{V_2}{p}e^{q_2(b-x)} \quad (\text{B18})$$

Temos então os valores de temperatura em toda a barra. Porém, ainda temos duas constantes a determinar. Para isso, aplicamos as condições de Fourier ($x = 0$) nas equações B14 e B18.

$$\bar{u}_1|_{x=0} = \bar{u}_2|_{x=0} \quad (\text{B19})$$

$$K_1 \frac{d^2\bar{u}_1}{dx^2} \Big|_{x=0} = K_2 \frac{d^2\bar{u}_2}{dx^2} \Big|_{x=0} \quad (\text{B20})$$

Então,

$$\frac{d^2\bar{u}_1}{dx^2} \Big|_{x=0} = Aq_1(1 + e^{2q_1a}) - \frac{V_1}{p}q_1e^{q_1a} \quad (\text{B21})$$

$$\frac{d^2\bar{u}_2}{dx^2} \Big|_{x=0} = Cq_2(1 + e^{2q_2b}) - \frac{V_2}{p}q_2e^{q_2b} \quad (\text{B22})$$

Temos um sistema de equações:

$$A(1 - e^{2q_1a}) + \frac{V_1}{p}e^{q_1a} = C(1 - e^{2q_2b}) + \frac{V_2}{p}e^{q_2b} \quad (\text{B23})$$

$$Aq_1K_1(1 + e^{2q_1a}) - \frac{V_1}{p}q_1K_1e^{q_1a} = Cq_2K_2(1 + e^{2q_2b}) - \frac{V_2}{p}q_2K_2e^{q_2b} \quad (\text{B24})$$

Da equação B23 isolamos A

$$A = C \frac{(1 - e^{2q_2b})}{(1 - e^{2q_1a})} + \frac{V_2e^{q_2b} - V_1e^{q_1a}}{p(1 - e^{2q_1a})} \quad (\text{B25})$$

Da equação B24 isolamos C

$$C = A \frac{q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} + \frac{V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a}}{p q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} \quad (\text{B26})$$

Levando a equação B25 em B27, temos:

$$C = \left[C \frac{(1-e^{2q_2 b})}{(1-e^{2q_1 a})} + \frac{V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}}{p(1-e^{2q_1 a})} \right] \frac{q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} + \frac{V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a}}{p q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} \quad (\text{B27})$$

Isolando a constante C

$$C = C \frac{(1-e^{2q_2 b})}{(1-e^{2q_1 a})} \frac{q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} + \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a})}{p(1-e^{2q_1 a})} \frac{q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} + \frac{(V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})}{p q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} \quad (\text{B28})$$

$$C - C \frac{(1-e^{2q_2 b})}{(1-e^{2q_1 a})} \frac{q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} = \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a})}{p(1-e^{2q_1 a})} \frac{q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} + \frac{(V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})}{p q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} \quad (\text{B29})$$

$$C \left[\frac{(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} \right] = \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})}{p(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} + \frac{(V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})}{p q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b})} \quad (\text{B30})$$

$$C = \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a}) + (V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})(1-e^{2q_1 a})}{p[(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})]} \quad (\text{B31})$$

Levamos a equação B31 em B25 e obtemos a constante A

$$A = \left[\frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a}) + (V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})(1-e^{2q_1 a})}{p[(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})]} \right] \frac{(1-e^{2q_2 b})}{(1-e^{2q_1 a})} + \frac{V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}}{p(1-e^{2q_1 a})} \quad (\text{B32})$$

$$A = \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})(1-e^{2q_2 b})}{p[(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})](1-e^{2q_1 a})} \quad (\text{B33})$$

$$+ \frac{(V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})(1-e^{2q_1 a})(1-e^{2q_2 b})}{p[(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})](1-e^{2q_1 a})} + \frac{V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}}{p(1-e^{2q_1 a})}$$

$$A = \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})(1-e^{2q_2 b})}{p[(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})](1-e^{2q_1 a})} \quad (\text{B34})$$

$$+ \frac{(V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})(1-e^{2q_2 b})}{p[(1-e^{2q_1 a}) q_2 K_2 (1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b}) q_1 K_1 (1+e^{2q_1 a})]} + \frac{V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}}{p(1-e^{2q_1 a})}$$

Reescrevendo as funções temperaturas em Laplace

$$\bar{u}_1 = A[e^{q_1 x} - e^{q_1(2a-x)}] + \frac{V_1}{p} e^{q_1(a-x)} \quad (\text{B35})$$

$$\bar{u}_2 = C[e^{q_2 x} - e^{q_2(2b-x)}] + \frac{V_2}{p} e^{q_2(b-x)} \quad (\text{B36})$$

Sendo que as constantes A e C

$$C = \frac{(V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a})q_1 K_1(1+e^{2q_1 a}) + (V_2 q_2 K_2 e^{q_2 b} - V_1 q_1 K_1 e^{q_1 a})(1-e^{2q_1 a})}{p[(1-e^{2q_1 a})q_2 K_2(1+e^{2q_2 b}) - (1-e^{2q_2 b})q_1 K_1(1+e^{2q_1 a})]} \quad (\text{B37})$$

$$A = C \frac{(1-e^{2q_2 b})}{(1-e^{2q_1 a})} + \frac{V_2 e^{q_2 b} - V_1 e^{q_1 a}}{p(1-e^{2q_1 a})} \quad (\text{B38})$$

A obtenção das transformadas inversas de Laplace analiticamente se mostrou muito onerosa. Então, foi necessário uma implementação numérica da transformada inversa de Laplace.

Stehfest (1970) desenvolveu um algoritmo para o cálculo numérico da inversa de Laplace baseado no trabalho de Gaver (1966). O método se aplica a partir de $F(p)$, que é a transformada de Laplace de $f(t)$, onde o algoritmo procura obter um valor aproximado de $f(t)$ para um valor específico de $t = T$, sendo $T \in \text{Dm}[f(t)]$

$$p_j = j \frac{\ln 2}{T} \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (\text{B39})$$

para M par. A expressão que produz um valor aproximado da transformada inversa a partir da transformada de Laplace de $F(p)$, em $t = T$ é

$$f(T) \approx \frac{\ln 2}{T} \sum_{j=1}^M w_j F(p_j) \quad (\text{B40})$$

Com

$$w_j = (-1)^{(M/2)+j} \sum_{k=\lceil \frac{1+j}{2} \rceil}^{\min(j, M/2)} \frac{(2k)! k^{M/2}}{\left(\frac{M}{2}-k\right)! k!(k-1)!(j-k)!(2k-j)!} \quad (\text{B41})$$

Em que k apresenta uma restrição em que deve ser o menor inteiro.

A partir do método de inversão numérica, obteve-se como resultado o gráfico da função temperatura apresentado nas Figuras 6 e 7 da seção 4.