LUCIA MENONCINI

O JOGO DAS OPERAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DEFINIDA NO CÁLCULO DE ÁREA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de doutor em Educação Científica e Tecnológica.
Professor Orientador: Dr. Méricles Thadeu Moretti.

Florianópolis, SC

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço as pessoas que estiveram ao meu lado, apoiando-me, orientando-me, estendendo-me a mão...

A Deus... pela vida e pela oportunidade de atuar no magistério público superior e ingressar no Doutorado Interinstitucional – DINTER entre a Universidade Federal da Fronteira Sul e a Universidade Federal de Santa Catarina.

A meu marido Altamir, meus filhos Caetano e Heitor... pelo apoio incondicional, pela força nas horas de fraqueza, pela compreensão acima de tudo e pelo amor sincero.

A meus pais Idanir e Deomira... pela vida, pelo convívio fraterno, pelos ensinamentos e valores humanos.

A meus irmãos, cunhados, cunhadas, sobrinhos, sobrinhas, sogro e sogra... pelas conversas de apoio.

A meu orientador, professor Dr. Méricles Thadeu Moretti... pelas sábias orientações, pelas palavras que exalavam tranquilidade e pela confiança depositada em mim.

Ao querido Pinho e à querida Ione... pela sutilizada e ao mesmo tempo pelo rigor com que abraçaram e conduziram a coordenação do DINTER.

Aos professores do PPGECT... pelo convívio amistoso e pelos ensinamentos que contribuíram para esta formação profissional e acima de tudo, cidadã.

Aos amigos do DINTER... por compartilharem momentos de aprendizado, de socialização e de amizade.

Aos colegas da UFFS, campus Chapecó... pelos significativos diálogos nos corredores, nos encontros de estudo informais e no grupo de pesquisa, os quais iluminaram meu caminho.

Aos gestores e aos envolvidos da UFFS e da UFSC... por tornarem possível a concretização do DINTER.

Aos queridos alunos do Cálculo B de 2018 da UFFS.... pela forma com que me acolheram e acolheram a ideia da tese, mostrando respeito e comprometimento com o desenvolvimento das atividades propostas.

A CAPES e ao FUMDES... pelo auxílio financeiro entre 2015 e 2018. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e também contou com apoio do UNIEDU.

OBRIGADA!!

RESUMO

Nesta pesquisa, investigamos como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática usavam operações semióticas na aprendizagem da integral no cálculo de área. Trata-se de uma pesquisa qualitativa em que as intervenções empíricas foram realizadas no âmbito acadêmico, integrando-se ao processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo. Embasados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e partindo de elementos da metodologia da Engenharia Didática, organizamos uma sequência didática composta por 5 blocos de atividades. Cada bloco continha objetivos específicos, que juntos, visavam a compreensão do objeto em estudo. A sequência didática explorou a diversidade de registros de representação e operações semióticas, principalmente tratamentos e conversões. Utilizamos o software GeoGebra para o esboço de curvas e para conversões de representações produzidas nos registros gráfico-geométrico e algébrico, proporcionando aos alunos um ambiente de experimentação. No desenvolvimento das atividades, os alunos foram desafiados a tratar, de forma articulada, o pensamento, a visualização e a escrita. Foram instigados a construir conhecimentos, pautados no confronto de ideias, na elaboração e na refutação de hipóteses e de conjecturas. A análise dos resultados sinaliza que a sequência didática possibilita a compreensão da integral no cálculo de área, visto que os alunos conseguiram desenvolver com autonomia as atividades propostas, alcançando os objetivos previstos em cada bloco. Também, a equivalência de áreas, assunto não abordado em livros textos de Cálculo, é um elemento que pode ser introduzido junto ao estudo desta integral. Outrossim, que os problemas envolvendo área requerem a mobilização de múltiplas operações semióticas e neste sentido, confirmamos que a conversão é, de fato, uma operação não neutra e criadora de novos conhecimentos, como afirma Duval.

Palavras-chave: Cálculo Integral; Área de regiões; Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

In this research, it was possible to investigate how students from a graduation course from Mathematics were using semiotic operations in integral learning of area calculation. It refers to a qualitative research whose empirical interventions were proceeded in academic field, taking part of the process of teaching and learning calculation. Having as a background the Theory of Registers and Semiotic Representation by Raymond Duval and from elements of Didactics Engineering Methodology, organizing a didactics sequence formed by 5 blocks of activities. Each block contained specific goals, which, together, aimed at understanding the object in study. The didactic sequence has explored the diversity of registers of semiotic representation and operations, mainly treatments and conversions. The software GeoGebrapara was used for the sketch of curves and for conversions of representations produced in graphical-geometric and algebraic records, promoting to the students an experimentation environment. In the development of activities, students were challenged to deal, in an articulated way, the reasoning, viewing and writing. Students were also led to build knowledge, based on ideas confrontation, elaboration and refutation of hypothesis and conjectures. The analysis of results points that the didactic sequence makes possible the understanding of integral in area calculation, once students were capable to develop, autonomously, the activities proposed, reaching the goals aimed in each block. Furthermore, the equivalence of areas, a subject that is not approached in text books of calculation, is an element that can be introduced together with the study of the integral. Besides, the problems involving area require the mobilization of multiple semiotic operations, and, thus, we confirmed that conversion is, in fact, an operation non neutral and creator of new knowledge, as stated by Duval.

Key-words: Integral Calculation; Area of regions; Semiotic Representation Registers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral ou simplesmente Cálculo é um dos componentes curriculares que integra a matemática elementar[1] do ensino superior, nos cursos de ciências exatas. A presença e a importância do Cálculo neste nível de ensino se justifica pela contribuição à instrumentalização , da formação científica matemática que possibilita desvelar, analisar e resolver diversos fenômenos ligados à ciência. Fenômenos que tratam da variação de uma certa grandeza em relação a outra e que são objetos de estudo do Cálculo Diferencial, como a variação da posição de um objeto em relação ao tempo (velocidade); do número de habitantes em relação a uma determinada área (densidade demográfica); da massa de uma pessoa em relação a sua altura (índice de massa corporal - IMC). Fenômenos que estão relacionados a determinadas somas e que são objetos de estudo do Cálculo Integral, como o cálculo da área de uma elipse; o volume de um sólido geométrico limitado por curvas de funções; o trabalho realizado por uma força; ou a massa de uma partícula. O Cálculo fornece uma visão ampla e profunda não apenas da matemática, mas de suas relações com outras áreas do conhecimento.

Sendo professora na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS, campus Chapecó, entendo que o Cálculo é uma ferramenta útil aos alunos, porém incorporá-lo à vida acadêmica está longe de ser uma tarefa fácil. Uma das razões que compromete essa incorporação é a dificuldade de aprendizagem que tem gerado reprovações em larga escala e desistências, provocando 'represamento' de alunos. Este termo é utilizado por professores de Matemática da UFFS, em analogia a uma represa, que por meio de uma barragem, impede a passagem da água. Da mesma forma, o represamento em Cálculo, por meio das dificuldades de aprendizagem, interrompe o fluxo natural do aluno no curso, retendo-o em determinada fase ou componente curricular.

Ao longo dos doze anos atuando na docência do magistério superior, percebo que são muitos os fatores[2] atrelados às dificuldades de aprendizagem de Cálculo: carência da compreensão de conteúdos básicos de matemática, conteúdos abstratos ou que exigem maior formalismo matemático, hábitos inadequados de estudo direcionados às vésperas das

[1] "A aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria, que servem de base para a matemática que se ensina atualmente nas escolas de primeiro e segundo graus, bem como a álgebra clássica superior, a geometria analítica e o cálculo das séries básicas dos cursos superiores de matemática, constituem o que em geral se chama de "matemática elementar" " (EVES, 2004, p. 461).

[2] Foge ao escopo do trabalho uma discussão mais ampla e aprofundada acerca de tais fatores. Fazemos apenas a exposição dos mesmos, sob o ponto de vista da pesquisadora.

avaliações, escolhas metodológicas adotadas pelo professor para o ensino dos conteúdos, entre outros. Superar tais dificuldades é um desafio para o aluno uma vez que estes fatores são, em geral, cumulativos. Ao mesmo tempo, é também um desafio para o professor que precisa buscar continuamente alternativas para qualificar o ensino e a aprendizagem deste componente curricular.

Tenho estudado e aplicado diferentes abordagens de ensino nas aulas de Cálculo como resolução de problemas e uso de tecnologias digitais, mas sinto falta de 'algo a mais' que complemente as abordagens, independente da escolha adotada, e potencialize o ensino e a aprendizagem. A busca por novas metodologias e teorias de ensino é válida, contudo para além delas é preciso conhecer as dificuldades que emergem durante o processo de aprender. Acredito que este 'algo a mais' esteja relacionado à compreensão do funcionamento cognitivo do pensamento matemático. Por esta razão, deposito minha confiança na teoria de aprendizagem denominada Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval.

A teoria de Duval fornece subsídios para compreender o funcionamento do pensamento à medida que confere às múltiplas representações semióticas um papel fundamental na aprendizagem matemática. Sabendo que os objetos matemáticos são entidades abstratas, só temos acesso a eles por meio de representações. Considerando que um mesmo objeto pode ser representado de formas diferentes, em registros de representação semiótica distintos, trabalhar esta variedade de representações para que o aluno perceba a distinção entre objeto e sua representação, é um dos pontos centrais da teoria.

Esse estudo, embasado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, propõe novos elementos a serem tratados junto às aplicações[3] da integral definida, ou seja, junto à integral no cálculo de área. Da mesma forma que os conceitos teóricos, as aplicações são igualmente importantes, pois revelam onde as teorias estudadas estão presentes no cotidiano e a maneira de empregá-las para resolver problemas. Ademais, podem ser comparadas a uma ponte que liga o conhecimento teórico e o conhecimento real. Para Lima (2007, p.184) "as aplicações são a parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar".

[3] A integral no cálculo de área também é uma das aplicações da integral definida. Por esta razão, neste estudo, usamos indistintamente os termos "aplicações da integral" ou "integral no cálculo de área'.

As aplicações da integral que tratam do cálculo de área possibilitam ampliar os estudos introduzidos pela Geometria Euclidiana à medida que expandem o cálculo às figuras mais gerais, cujos contornos são curvas.

Para mostrar em que consistem os elementos a serem tratados em nosso estudo, buscamos inicialmente observar tais aplicações em livros textos[4] de Cálculo. As observações permitiram reconhecer o enfoque metodológico dado pelos autores e as similaridades entre tais enfoques:

- quanto ao enunciado das atividades: a grande maioria dos exemplos e exercícios são apresentados discursivamente e privilegia o cálculo de área de regiões limitadas entre curvas;
- quanto à resolução das atividades: seguem um procedimento baseado no esboço de curvas e na identificação dos pontos de interseção entre as curvas para encontrar o intervalo de integração [a,b]; na afirmação de que as funções assumem valores não negativos em [a,b]; e na aplicação de uma fórmula que envolve integral definida para o cálculo da área da região.

As observações sinalizam que o registro discursivo é privilegiado entre os registros de partida e que o registro gráfico-geométrico serve apenas para fornecer o intervalo de integração e a função integrando. Neste sentido, o estudo da integral tende a ser um processo mecânico que visa a automatização da aplicação de fórmulas matemáticas para obtenção da área, transparecendo que esta grandeza se resume a um valor numérico.

De modo geral, o tratamento dos autores é também o tratamento dos professores em sala de aula, uma vez que o livro texto muitas vezes é o principal ou o único material usado no ensino, consolidando uma prática centrada na memorização e no uso de fórmulas.

Nossa proposta de inserção de novos elementos a serem discutidos no estudo da integral no cálculo de área se diferencia do enfoque contido nos livros textos pelas seguintes razões:

- os registros algébrico, gráfico-geométrico e discursivo estão num mesmo patamar de relevância, ou seja, não há o predomínio de um registro de partida em detrimento dos outros. Para tal, elaboramos atividades que contemplam os diferentes registros de partidas;

[4] Foram observados três livros textos de Cálculo que compõem a bibliografia básica de cursos da UFFS, campus Chapecó, e os detalhes desta observação estão contemplados na seção 2.4.

- em problemas de área em que a região está limitada entre curvas, a função integrando resultante da diferença entre funções é mais que uma expressão algébrica a ser aplicada em uma integral. Ela é explorada algébrica e graficamente;
- para além de um valor numérico, a área é um atributo intrínseco à região e com base nesse entendimento, a equivalência de áreas é estudada a partir da função integrando;
- o valor numérico encontrado para a área, não é o resultado mais relevante, mas o desenvolvimento do percurso em um todo, que envolve a exploração das representações gráfico-geométricas, das representações algébricas e das representações discursivas.

Considerando o exposto acerca da integral no cálculo de área e a necessidade de produzir trabalhos que contribuam para qualificar o ensino e a aprendizagem de Cálculo, apresentamos nosso problema de pesquisa: *De que forma os alunos, com auxílio do GeoGebra, utilizam operações semióticas na aprendizagem da integral no cálculo de áreas?*

Para responder essa pergunta, apoiamo-nos na teoria de Duval e contamos com o auxílio computacional do software GeoGebra para explorar dinamicamente as representações e as conversões que acontecem entre o registro gráfico-geométrico e o registro algébrico. Em relação aos tipos de funções exploradas, limitamo-nos às polinomiais por entendermos que um estudo abordando esta classe de funções serve de base para trabalhos futuros.

Concernente à estrutura do trabalho, o Capítulo 1 abrange exclusivamente tópicos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Fazemos um apanhado geral da referida teoria apresentando o conceito de registro de representação semiótica e discutindo os quatro grandes registros, a saber, figural ou geométrico, gráfico, da língua natural e também da língua formal ou algébrico, uma vez que os problemas de área requerem a mobilização destes registros. Outrossim, enunciamos uma nova nomenclatura de registro, o gráfico-geométrico, que emergiu neste trabalho e se justifica pelo fato das representações das funções no registro gráfico formarem uma figura geométrica.

No Capítulo 2 são discutidos temas relacionados ao estudo: o uso do computador no ensino, uma vez que o GeoGebra é utilizado para a exploração gráfico-visual e para conversões dos registros gráfico-geométrico e algébrico; a problemática do ensino e da aprendizagem do Cálculo, em que são mostrados as altas taxas de não aprovação de alunos em universidades brasileiras e são expostas tentativas para minimizar o problema; o Cálculo Integral e Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que apresenta estudos que contemplam o ensino de conteúdos de integral sob o olhar da referida teoria; a resolução de problemas de área em livros textos de Cálculo, que mostra o tratamento dado por autores à integral no cálculo de área e indica que a temática em estudo requer a mobilização de múltiplos registros de representação semiótica; a equivalência de áreas, que é explorada a partir da função integrando, mas não é contemplada em livros textos de Cálculo; e os aspectos históricos do Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que os tratamentos efetuados no registro algébrico, para obtenção da área de uma região limitada por curvas, partem deste teorema.

O Capítulo 3 apresenta os aspectos metodológicos adotados para o trabalho empírico. A pesquisa é de cunho qualitativo e os dados provêm da aplicação de uma sequência didática organizada com base em elementos da Engenharia Didática. Apresentamos os sujeitos da pesquisa e descrevemos a forma de organização e de aplicação da referida sequência. Também, construímos as análises a *priori* das atividades e discutimos as análises a *posteriori* e *validação,* embasados nas produções dos partícipes.

As Considerações abarcam a síntese dos resultados e o relato sobre questões relevantes que permearam o estudo. Ademais, sinalizamos para a continuidade deste e para perspectivas futuras.

CAPÍTULO 1

Apresentamos nesse capítulo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e tratamos do seu principal conceito, o *registro de representação semiótica* ou simplesmente *registro*. O registro é um sistema semiótico que cumpre as operações cognitivas de formação, tratamento e conversão. Existem quatro grandes registros criados por Duval para comportar as representações semióticas, a saber, o registro figural ou geométrico, o registro gráfico, o registro da língua natural e o registro da língua formal ou algébrico. Os dois primeiros registros contemplam as representações não discursivas enquanto que os dois últimos, as discursivas.

O estudo da integral no cálculo de área requer a mobilização dos registros supracitados. Por esta razão, eles são discutidos ao longo do capítulo e no final é apresentado o registro gráfico-geométrico, criado para atender aos fins deste trabalho.

1.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Matemática é uma ciência que difere de outros domínios do conhecimento porque apresenta certas especificidades quanto aos seus objetos de estudo. Os objetos matemáticos não são reais como uma célula, uma flor ou um planeta. As frações, os vetores, os números não podem ser manipulados fisicamente. Para ter acesso a eles é preciso recorrer às suas representações ou a um sistema semiótico que possibilite representá-los. É possível representar as frações por um desenho, pela razão entre dois números ou por uma expressão algébrica. Há diferentes formas de representar o mesmo objeto e essa variedade de representações é outra característica da matemática.

O fato de que os objetos são reconhecidos somente por meio de representações pode ocasionar a confusão entre representação e objeto, dando a impressão de que são uma unidade. Sobre esta confusão, quase inevitável, Duval (2012c, p. 270, grifos do autor) destaca que "**o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações**". Portanto, a utilização de múltiplos registros de representação é necessária à distinção entre objeto e sua representação e consequentemente à compreensão da matemática.

Duval (2004) afirma que uma representação semiótica cumpre seu papel, de permitir o acesso a um objeto, quando são utilizados pelo menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação deste objeto e quando se consegue, espontaneamente, converter de um sistema para outro, tais representações.

As representações semióticas estão relacionadas a sistemas semióticos que são sistemas particulares de signos. A língua natural, os diagramas, a escrita algébrica e as figuras geométricas são exemplos destes sistemas. Os sistemas semióticos permitem a transformação de representações e são essas transformações que atribuem à atividade matemática o poder ilimitado de exploração que conduz a novos conhecimentos (DUVAL, 2015). Mais, um sistema semiótico pode cumprir três operações cognitivas inerentes a qualquer representação:

a) **A formação de uma representação semiótica identificável** serve para constituir uma marca ou um conjunto de marcas, reconhecidas como representação de algo em determinado sistema semiótico.
b) **O tratamento** é uma atividade que ocorre no interior do registro ou do sistema semiótico e consiste na transformação de uma representação em outra, obedecendo regras próprias do sistema. O tratamento consiste em substituir representações de modo que a nova representação ofereça algum ganho de conhecimento em relação à representação que foi substituída.
c) **A conversão** ocorre entre registros. A representação do objeto pertencente a um dado registro é transformada em outra representação pertencente a outro registro. Assim, a conversão modifica a forma de representar um determinado objeto.

Quando um sistema semiótico cumpre tais operações cognitivas, passa a ser chamado *registro de representação semiótica*. Os registros permitem “analisar o desempenho cognitivo específico que a atividade matemática exige e no qual é preciso penetrar para poder compreender matemática” (DUVAL, 2016, p.1). Isso porque, as operações de formação, tratamento e conversão possibilitam reconhecer um objeto matemático e explorá-lo a partir de transformações da sua representação.

A transformação que acontece entre registros, chamada conversão, não deve ser equiparada a uma atividade de codificação ou de interpretação:

> **Bem que a atividade cognitiva de conversão de uma representação possa, muitas vezes, parecer ser estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, ela lhe é irredutível, porque, por um lado, ela não se funda sobre alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro lado, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação** (DUVAL, 2012c, p. 273, grifos do autor).

Infere-se das palavras do autor, que a conversão está longe de ser uma codificação ou uma interpretação. Ela é uma operação não neutra, transformadora e produtora de conhecimentos. Converter uma representação em outra produz novas significações relativas ao objeto representado, implicando em novos conhecimentos. Esta operação está diretamente associada à coordenação dos registros e à compreensão da matemática, conforme *hipótese fundamental* enunciada por Duval (2012c, p. 282, grifos nosso): ***"a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão".***

A conversão é pouco explorada no ensino e às vezes é negligenciada por ser entendida como simples mudança de registro que se desenvolve por conta própria, à medida que se consegue formar representações nos registros e desenvolver tratamentos sobre estas representações (DUVAL, 2012c). Em geral, os alunos não conseguem realizar a conversão por conta própria, pois ela exige a análise, o domínio e a manipulação de conhecimentos nos diferentes registros, tornando-se uma tarefa de difícil execução. Assim, esta operação não é espontânea, tão pouco imediata para os alunos e precisa ser trabalhada no ensino, pois de acordo com a hipótese fundamental de Duval, é a rapidez e a espontaneidade com que ela é executada que conduz à coordenação dos registros e à compreensão conceitual.

A dificuldade de realizar conversões se acentua quando as representações semióticas produzidas em registros diferentes não são congruentes entre si, ou seja, quando não há correspondência direta entre os conteúdos que os tornam equivalentes. Segundo Duval (2012c) a congruência é determinada por três critérios:

- Correspondência semântica de unidades significantes: cada unidade significante simples (elementar) de uma das representações associa-se a uma unidade elementar da outra representação;
- Unicidade semântica terminal: cada unidade significante no registro de partida tem uma única unidade significante no registro de chegada;
- Organização das unidades significantes: ao comparar as unidades significantes de duas representações estas devem apresentar a mesma ordem nas duas representações. Este critério é adequado quando as representações se apresentam na mesma dimensão.

Quando esses critérios são satisfeitos, a conversão não se torna problema para a maioria dos alunos, pois é possível perceber as correspondências entre os conteúdos. Quando não há congruência, as correspondências não são reconhecidas de imediato e a dificuldade de realizar a conversão se intensifica podendo ocasionar um bloqueio no pensamento dos alunos, levando-os a se sentirem coagidos ou incapazes de realizar as transformações necessárias.

O fenômeno de congruência ou não congruência está fortemente relacionado ao processo de substitutividade, que consiste em substituir uma expressão ou uma representação por outra, seja ele realizado no interior do registro ou entre registros. Assim, a substitutividade abrange não somente a conversão (substitutividade inter-registros), mas também os tratamentos (substitutividade intraregistros).

Grande parte das dificuldades dos alunos em realizar uma atividade matemática está atrelada à não congruência semântica durante a substituição de uma formulação ou de uma representação por outra. Em virtude disso, discute-se a seguir, o processo de substitutividade e o fenômeno de congruência semântica.

1.1.1 O processo de substitutividade e a congruência semântica

A matemática é uma linguagem universal que não se resume a símbolos, da mesma forma que a língua natural não se resume a um conjunto de letras. Ao contrário, ambas necessitam de uma organização lógica, coerente e semântica para dar sentido a suas expressões.

O discurso em matemática precisa da língua natural para se constituir e se desenvolver, porém de um jeito diferente daquele utilizado para fins de comunicação. Esta diferença consiste basicamente no fato de que, para adentrar no modo matemático, a língua natural precisa ser substituída por uma linguagem própria da matemática. De fato, se em uma atividade matemática, o enunciado está descrito em língua natural, este precisa ser substituído por uma escrita algébrica, por uma fórmula literal, por uma representação gráfica ou por uma figura geométrica, por exemplo.

Enquanto que o discurso em língua natural se desenvolve por junção ou acumulação de palavras ou frases em que a sequência destas buscam reforçar ou completar o que estava escrito anteriormente, o discurso em matemática desenvolve-se principalmente por substituição. A substitutividade não é uma codificação ou um processo de substituir uma expressão por outra, distinta ou desconexa, mas consiste em substituir de tal maneira que a outra expressão, embasada em conhecimentos matemáticos que garantam a invariância referencial (definições, propriedades, teoremas), seja capaz de atribuir novos sentidos, possibilitando o progresso do pensamento matemático (DUVAL, 2012b).

Este jogo de substitutividade, considerado essencial para o pensamento matemático, só é válido se preservar a referência e se manter o sentido, que corresponde ao valor de verdade.

Sentido e referência não são sinônimos e esta distinção é um princípio basilar para as substituições. Assim, as mudanças na forma escrita ou representacional devem manter a referência e o valor de verdade. As expressões 4/2, (1+1) e √4 representam o mesmo objeto, mantendo referência ao 'número dois'. Porém não apresentam o mesmo significado, pois cada expressão descreve pontos de vistas distintos. A primeira representação trata da divisibilidade, a segunda recorre à soma e à unidade e a terceira, à radiciação. Isso mostra que, mesmo mantendo a referência, formas diferentes de escrita exibem propriedades distintas do objeto.

À primeira vista, parece simples realizar o processo de substitutividade: basta distinguir referência e sentido e mantê-los inalterados durante todo o processo de conversão. Toda essa simplicidade aparente, esconde por trás uma questão delicada, que trata da congruência semântica:

> Em outros termos, do ponto de vista da constituição objetiva do saber, a substituição, que permite desenvolver o cálculo e a demonstração, funciona em relação à referência. **Mas, do ponto de vista da apropriação subjetiva do saber matemático, a substituição funciona primeiramente em relação ao sentido associativo interno:** tudo depende, então, daquilo que chamaremos de **congruência** ou **não congruência semântica das expressões a serem substituídas uma pela outra** (DUVAL, 2012b, p. 100, grifos do autor).

O autor revela que a substituição funciona ora em relação à referência ora em relação ao sentido interno que está associado à congruência semântica. Desta forma, duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes ou vice-versa.

O fenômeno de não congruência se revela importante para a aprendizagem porque possibilita o desenvolvimento do pensamento matemático, embasado em atividades de substitutividade que mantêm a referência. Neste sentido, Duval (2012b) discute três atividades que tratam do fenômeno. A primeira consiste na passagem da representação geométrica da reta para a representação simbólica dos números reais. A segunda aborda a não congruência semântica em enunciados de problemas, enquanto que a terceira contempla a não congruência entre discurso e fórmula. Esta última atividade é apresentada abaixo:

Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho, 31 anos a menos do que seu pai. A soma da idade das três pessoas é 119 anos. Calcular as idades.

As idades do homem e do seu filho foram designadas por x e y respectivamente e a primeira equação foi escrita de maneiras distintas:

$x - 23 = y$, quer dizer, a idade do homem menos 23 é igual a idade do filho.

$x = y + 23$, quer dizer, a idade do homem é igual a idade do filho mais 23.

Ambas as equações são referencialmente equivalentes ao enunciado 'um homem tem 23 anos a mais do que seu filho', porém não são congruentes. Para haver congruência entre enunciado e equação é preciso escrever a expressão $x + 23 = y$, o que não é referencialmente equivalente, mas tende a ser uma opção de escrita dos alunos na tentativa de resolver o problema.

Para Duval (2012b) a dificuldade imposta pela não congruência, apesar de ser comum no ensino, não é tratada explícita e sistematicamente. Em geral, a não congruência semântica suscita dificuldades de compreensão justamente porque requer manipulações de dados, de modo que uma expressão seja substituída por outra, que sejam efetuados tratamentos ou conversões de representações entre registros, os quais nem sempre se apresentam espontaneamente ou visivelmente possíveis.

As substituições se tornam fáceis quando são identificadas as correspondências diretas entre o conteúdo e sua substituição. Porém, a maioria das substituições está relacionada à não congruência, o que impõe certas resistências e entraves ao desenvolvimento do pensamento matemático.

1.2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A existência de distintas formas de representar um mesmo objeto matemático levou Duval (2004) a organizar as representações semióticas em quatro grandes registros: o registro figural, também denominado geométrico; o registro gráfico; o registro da língua natural; e o registro da língua formal ou algébrico. Tais registros são requeridos em atividades matemáticas e permitem que representações semióticas sejam transformadas em outras, por meio de operações de formação, de tratamentos e de conversão.

É próprio da matemática a necessidade de trabalhar com múltiplos registros. Diante de um enunciado em língua natural é preciso escrevê-lo formalmente; diante de uma figura geométrica é preciso reconhecer suas propriedades; diante de um gráfico, interpretá-lo. A diversidade de registros é, sem dúvida, imprescindível em atividades matemáticas. Contudo frente a tantos registros, tende-se a privilegiar um deles, escolhido para ser o principal, no qual são efetuados os tratamentos. A respeito desse assunto, tem-se que:

> Mobilizamos também um segundo registro, seja para antecipar os tratamentos a realizar, e portanto, escolher o registro de tratamento, seja para controlar os tratamentos efetuados no registro escolhido. Essa mobilização pode ser feita explicitamente para a produção em paralelo com a representação de um segundo registro, como em geometria ou em análise. Mas, quase sempre, ela fica implícita (DUVAL, 2011b, p. 116).

Segundo o autor, paralelamente ao registro principal há os secundários ou intermediários que na maioria das vezes permanecem implícitos, mas dão suporte ao principal. Por exemplo, para converter uma propriedade matemática enunciada em língua natural em uma representação no registro algébrico, é frequente recorrer ao registro geométrico para suscitar percepções e interpretações que auxiliem na escrita algébrica.

Os quatro grandes registros, que dão origem a uma variedade de representações para os objetos matemáticos, são classificados em monofuncionais ou plurifuncionais e suas representações, denominadas discursivas ou não discursivas, conforme quadro:

Quadro 1: Classificação dos registros e das representações

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros Plurifuncionais (tratamentos não algoritmizáveis)	**Célula 11** Língua natural: associações verbais (conceituais); descrição, definição, explicação; Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas	**Célula 12** Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas nas dimensões 0, 1, 2, 3); Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos; modelização de estruturas físicas
Registros Monofuncionais (tratamentos principalmente algoritmizáveis)	**Célula 21** Sistema de escrita: - numéricas (binária, decimal,...); - algébricas; - simbólicas (línguas formais); Cálculo literal, algébrico, formal...	**Célula 22** Gráficos cartesianos (visualização de variações) mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 52)

De acordo com o Quadro 1, os registros monofuncionais são específicos da matemática, enquanto que os plurifuncionais são mobilizados em todas as áreas do conhecimento, principalmente para desenvolver as funções de comunicação e de objetivação.

As representações discursivas são oriundas de registros discursivos que permitem a produção de expressões de acordo com regras sintáticas e podem ser mono ou plurifuncionais. São exemplos de registros discursivos as línguas natural e formal, visto que a língua natural envolve palavras e a língua formal, fórmulas que contêm letras, símbolos, etc. As representações não discursivas produzem representações visuais como imagens, figuras geométricas, gráficos cartesianos ou esquemas, podendo ser originadas de registros mono ou plurifuncionais.

São diversas as possibilidades de combinar as células 11, 12, 21 e 22 e portanto, de efetuar conversões entre os registros. A passagem da escrita algébrica (célula 21) para o gráfico (célula 22) é a passagem da representação discursiva para a representação não discursiva, que ocorre por meio da conversão entre registros monofuncionais. A passagem de um enunciado em língua natural (célula 11) para uma expressão algébrica (célula 21) ocorre entre registros plurifuncional e monofuncional, respectivamente.

Há também conversões em sentido inverso, que são sentidos não usualmente praticados, a exemplo da passagem da representação gráfica (célula 22) para a algébrica (célula 21) ou a passagem da escrita algébrica (célula 21) para a língua natural (célula 11). Os sentidos direto e inverso impõem custos cognitivos diferentes, comparados ao custo de subir e descer uma montanha (DUVAL, 2011b).

Os exemplos de combinações das células apresentadas no Quadro1 mostram que a conversão pode ser realizada entre registros mono ou plurifuncionais, tratar de representações discursivas ou não discursivas e ser realizada em sentido direto ou inverso. Não há regras para efetuar conversões e também não há garantias de que elas sejam reversíveis. Assim, converter em um sentido não significa que seja possível converter no sentido inverso.

1.2.1 O registro figural ou registro geométrico

Este registro compreende as figuras geométricas, que são representações não discursivas. A maneira de ver tais figuras está relacionada às modificações a serem efetuadas nelas, com vistas a novas percepções que contribuam para a resolução de um problema ou para a compreensão de um conceito, por exemplo. Assim, elas requerem um modo de ver que se diferencia do olhar requerido por uma fotografia ou por uma obra de arte.

1.2.1.1 A maneira matemática de ver as figuras

Uma figura instiga o olhar e de imediato os olhos tendem a focar àquilo que se destaca, que geralmente é sua forma global. A percepção que reconhece se a forma é curva ou reta, se os contornos são fechados, abertos, justapostos ou separados, é o modo comum ou natural de ver as representações visuais (DUVAL, 2011b).

As figuras são instrumentos de produção de conhecimento. Em particular, as figuras geométricas exercem um papel fundamental na construção de conhecimentos matemáticos: recorre-se a elas para compreender um conceito, para reconhecer ou aplicar uma propriedade, para demonstrar um teorema, para resolver um problema, etc.

Se diante de uma figura geométrica a reação imediata é perceber seu formato global, então se pode pensar que, independente do observador, a figura observada sempre revela as mesmas informações. No entanto, não é isso que acontece. A percepção é uma habilidade individual e subjetiva. Se para um observador, o que se destaca na forma figural são as linhas retas, para outro, pode ser o contorno fechado, o estilo da linha ou mesmo, a cor do contorno.

São muitas as maneiras de ver as figuras geométricas e esta diversidade torna-as um registro de representação semiótico cognitivamente produtivo. Segundo Duval (2011b), o poder cognitivo das figuras geométricas está atrelado a três características. A primeira diz respeito ao seu valor intuitivo que conduz de imediato à percepção de certas qualidades. A segunda permite reconhecer o objeto que ela apresenta como imagem desenhada (a planta baixa de uma casa remete ao objeto casa). E por fim, uma figura não é um desenho porque ela é resultado de um processo construtivo e instrumentalizado, embasado em conhecimentos matemáticos.

Das três características, as duas primeiras estão relacionadas à visualização, enquanto que a terceira, à construção. Apesar de as duas primeiras serem fundamentais para a aprendizagem da matemática, especialmente da geometria, no ensino o que prevalece é a terceira, ressaltando o domínio de propriedades e de conceitos geométricos.

Em relação à maneira de ver essas figuras, Duval (2011b) lança três hipóteses para reflexão:

- Ver figuras geométricas requer o mesmo modo comum de ver uma imagem qualquer ou um objeto real?
- Ou ela está subordinada ao conhecimento de determinados conceitos?
- Ou ainda, depende de operações de reorganização visual das figuras?

Apesar de afirmar que o ensino de matemática está orientado com base nas duas primeiras hipóteses, o autor ressalta que a maneira matemática de ver as figuras está atrelada à terceira hipótese e que portanto, requer a conscientização da necessidade de operar visualmente sobre elas. Sobre isso, esclarece:

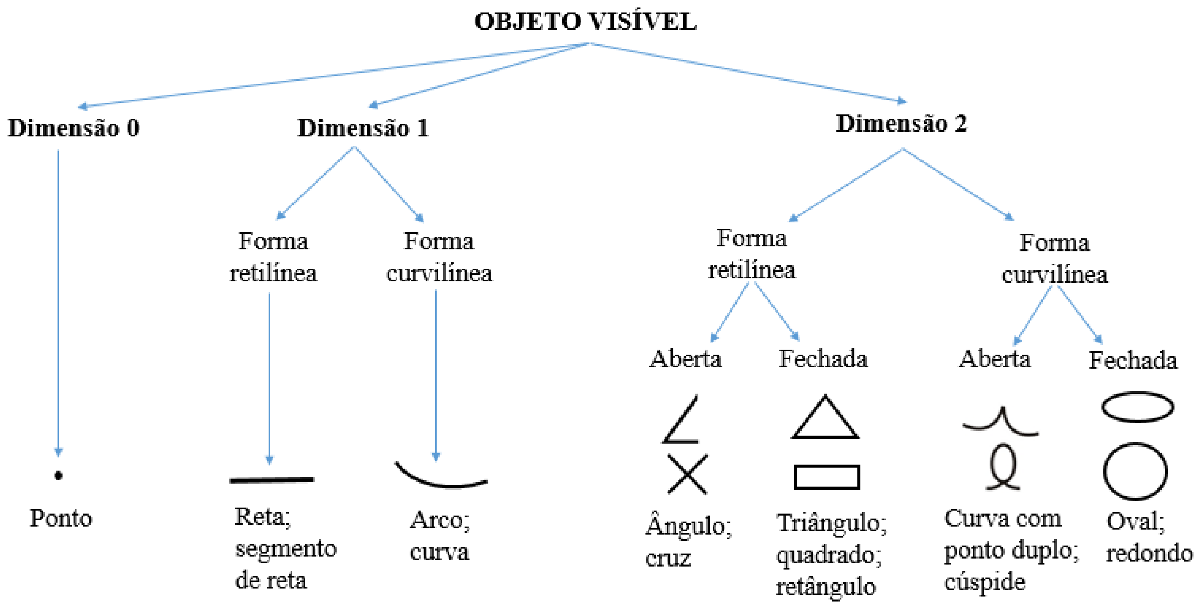
> A terceira hipótese equivale a assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico. Para mostrá-lo é preciso descrever as operações puramente figurais que permitem, independentemente ou mesmo antes, a utilização de uma propriedade matemática. São essas operações figurais que permitem transformar qualquer figura em outra, com a finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação (DUVAL, 2011b, p. 85).

Segundo o autor, o modo de ver a figura deve suscitar operações visuais a serem realizadas, que contribuam para a resolução do problema ou para o reconhecimento de uma propriedade, por exemplo. Estas operações transformam a figura em uma nova representação que revela interpretações e sentidos até então, ocultos.

Toda figura geométrica é resultado da combinação de dois tipos de variações: variações de dimensão e variações qualitativas, relativas à forma, ao tamanho, à orientação, à cor, etc. Portanto, em uma figura são identificados elementos que pertencem a diferentes dimensões e que apresentam qualidades visuais distintas. A identificação de alguns destes elementos interfere positiva ou negativamente na identificação dos demais.

A possibilidade de variar a dimensão e as qualidades visuais permitem o reconhecimento de unidades figurais elementares, mostradas na figura abaixo:

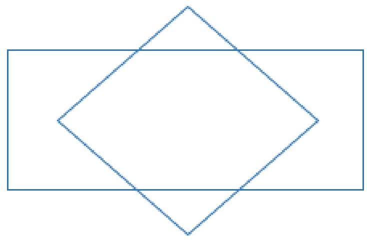
Figura 1: Unidades figurais



Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 159)

De acordo com a Figura 1, as unidades figurais são formas elementares que compõem toda e qualquer figura geométrica. Para Flores e Moretti (2004 p. 2) elas "são formas identificáveis que não podem ser decompostas em formas mais simples, a menos que mudemos de dimensão, nem podem ser distinguidas sobre critérios de tamanho". Destarte uma figura é sempre uma configuração de pelo menos duas unidades figurais e são as propriedades (paralelismos, simetria, interseção, etc) entre estas unidades que determinam o conteúdo pertinente da figura. Para exemplificar essa configuração, tem-se a Figura 2.

Figura 2: Configuração de uma figura geométrica



Fonte: Adaptado de Duval (2011b, p. 87)

Essa figura bidimensional é formada por elementos pertencentes a diferentes dimensões, que são os segmentos de retas (dimensão um) e os pontos (dimensão zero), e também por variações qualitativas relativas à forma (todas as formas contêm linhas retas e contornos fechados, mas se diferem pelo número de lados: triângulo, retângulo, hexágono, pentágono) e relativas à posição (superposição ou justaposição das formas). À primeira vista se percebe em destaque uma figura de dimensão 2, composta por um quadrado e um retângulo que parecem uma unidade e não a reunião de segmentos pertencentes a dimensões inferiores. Sobre isto Duval (2004) afirma que os elementos de dimensão 2 predominam sobre os elementos de dimensões inferiores, pois as Leis da Gestalt[5], do fechamento ou da continuidade, explicam que quando linhas formam um contorno simples e fechado o que se destaca é a figura como um todo, já que o todo tende a facilitar a compreensão da imagem visualizada.

Ao privilegiar a forma unificada da figura, as Leis da Gestalt acabam por dificultar o reconhecimento de outros elementos pertencentes a dimensões inferiores e das diferentes

[5] São oito as Leis da Gestalt: Unidade, Segregação, Unificação, Fechamento, Continuidade, Proximidade, Semelhança e Pregnância da Forma. A Pregnância da Forma abarca as demais Leis e por esta razão é considerada para a Gestalt, a base da percepção visual. Maiores informações acerca da Teoria da Gestalt e de suas Leis podem ser encontradas em Morais (2017).

formas que aparecem na figura. Isso explica porque na Figura 2, o quadrado sobreposto ao retângulo é imediatamente reconhecido enquanto que os segmentos de retas, os dois triângulos, os dois pentágonos e o hexágono não são facilmente identificados. Esta percepção intuitiva e imediata da forma bidimensional é a maneira comum de ver uma imagem, seja ela uma imagem qualquer ou uma figura geométrica.

Diferentemente de outras representações visuais, as figuras geométricas requerem uma mudança na maneira de olhar, que caracteriza o modo matemático de vê-las. Este modo possibilita não apenas a compreensão de conceitos e propriedades geométricos, mas a sua aplicação na resolução de problemas em diferentes situações e contextos.

Duval (2011b) destaca que a primeira tarefa para ver matematicamente diz respeito à passagem da maneira comum, que consiste no reconhecimento perceptivo das formas das figuras em duas dimensões, para a maneira matemática que está centrada na desconstrução dimensional e nas operações de reorganização visual da figura. Mais do que direcionar o olhar para perceber as unidades figurais que pertencem a dimensões inferiores da figura bidimensional é preciso também operar sobre a figura, para que sejam explicitadas informações ocultas em sua forma original.

1.2.1.2 Apreensões geométricas

O termo apreensões tem sido usado por Duval (2012a; 2012c) para destacar as variadas interpretações que emergem quando se interage com figuras, especialmente aquelas que possuem função heurística. Sobre esta função, Duval (2016, p.13) afirma que “a utilização heurística de figuras em geometria consiste em visualizar, na figura dada, as hipóteses do problema em outra figura, que é uma reorganização enriquecida ou não da figura inicialmente dada”. Isso significa que as figuras com produtividade heurística possibilitam reorganizar a figura inicial, de modo que novas percepções possam emergir.

As apreensões geométricas estão relacionadas à habilidade de ver uma figura e permitem reconhecer as unidades figurais, bem como operar sobre ela. São quatro as apreensões, sendo que a **apreensão sequencial** visa a reprodução figural e é requerida em atividades voltadas à construção ou à descrição de figuras.

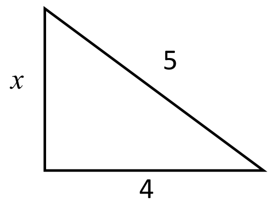
Ao interagir com figuras geométricas é natural que a primeira apreensão a emergir esteja relacionada ao reconhecimento daquilo que se destaca nas figuras, que é a sua forma. Esta **apreensão perceptiva da forma** está subordinada às Leis da Gestalt, que levam a reconhecer automaticamente a forma global e unificada da figura. Ao mesmo tempo, essas leis impedem ou dificultam que elementos de dimensões inferiores sejam reconhecidos na figura e consequentemente, que as formas sejam percebidas como agrupamento destes elementos.

Uma figura, por si só, tende a mostrar explícita ou implicitamente propriedades geométricas que lhe são intrínsecas, a exemplo da congruência, da regularidade, do paralelismo e da simetria. Quando ela não evidencia tais propriedades ou outras hipóteses necessárias à sua adequada leitura, é preciso o auxílio de algum tipo de descrição. Neste caso, entra em cena a **apreensão discursiva**, que em oposição àquela intuitiva e imediata, é controlada pela interpretação das hipóteses enunciadas.

As apreensões perceptiva e discursiva estão sempre presentes em atividades que envolvem figuras geométricas. Além de serem atitudes opostas, são também conflitantes, uma vez que a "**figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente**" (DUVAL, 2012a, p.120, grifos do autor). A escolha da representação figural e das hipóteses enunciadas determinam a intensidade do conflito entre as apreensões. A Figura 3 e a Figura 4 exibem este conflito e ao mesmo tempo ressaltam a importância da articulação das duas apreensões para a aprendizagem.

Figura 3: O que a figura mostra.

Calcule os valores de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.



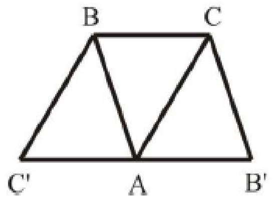
Fonte: Melo (1999, p. 65)

Nessa figura, Moretti e Brandt (2015, p. 600) discutem o problema apresentado por Melo (1999). Eles chamam a atenção para a necessidade de articular a figura às hipóteses enunciadas, pois tanto na representação triangular quanto no enunciado, não há qualquer indicação da existência do ângulo reto. Porém, o que se destaca na figura é a percepção intuitiva de um triângulo retângulo. Seja pela posição escolhida para representar o triângulo ou pelos valores atribuídos aos lados, a apreensão perceptiva induz a calcular o valor de x a partir do Teorema de Pitágoras. Se a posição do triângulo fosse modificada, seria possível que outros elementos ou propriedades fossem identificados e utilizados para calcular o valor do lado desconhecido.

Já na Figura 4, reconhecer os paralelogramos enunciados na hipótese pode não ser tão espontâneo.

Figura 4: O que o enunciado mostra.

ACBC' e AB'CB são paralelogramos. Provar que A é o meio geométrico de C'B'.



Fonte: Duval (2012a, p. 122)

Observando esta figura, é possível identificar um trapézio com um triângulo inscrito ou mesmo, três triângulos justapostos, que são figuras diferentes daquelas descritas na hipótese. O enunciado afirma que existem dois paralelogramos, mas a identificação deles pode não ser tão imediata quanto à identificação do trapézio ou dos triângulos. Para reconhecer os paralelogramos recorre-se à apreensão discursiva que controla a apreensão perceptiva e remete à interpretação das hipóteses, atrelando os elementos figurais às informações enunciadas.

Se o enunciado da Figura 4 explicitasse outras propriedades, a exemplo do paralelismo entre os segmentos $\overline{BC'}$ e $\overline{AC}$, então novas interpretações poderiam emergir. Portanto, a escolha do enunciado de um problema influencia na maneira de ver a figura geométrica e qualquer alteração nas hipóteses provoca modificações no modo de vê-la, apesar de ela se manter inalterada.

Diante de um problema matemático que envolve simultaneamente hipóteses e figuras geométricas, uma atitude entre os alunos chama a atenção de Duval (2012a): primeiramente fazem a leitura das hipóteses e com base nelas constroem ou interpretam a figura; após a construção ou interpretação, a atenção se volta exclusivamente para a figura, como se o enunciado não fizesse parte do problema ou que ele não fosse mais necessário. Esse esquecimento ou abandono do enunciado representa a ausência de interpretação discursiva da figura e é uma atitude comumente reconhecida por professores em sala de aula.

Segundo Duval (2012a), mesmo a apreensão perceptiva tendo papel central para a aprendizagem, está subordinada à discursiva, uma vez que as propriedades pertinentes e aceitáveis da figura devem estar atreladas às hipóteses enunciadas. Assim, a subordinação da apreensão perceptiva à discursiva se torna crucial para direcionar o olhar para aquilo que a figura realmente quer mostrar e não para aquilo que se deseja que ela mostre. Neste sentido, Moretti e Brandt (2015, p. 600) enfatizam que “a figura geométrica é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: uma figura não é o que ela mostra, mas o que é levada a mostrar, em geral, o que está no enunciado”.

A escolha por determinada figura ou por determinadas hipóteses influencia diretamente na percepção de elementos ou de propriedades figurais, os quais nem sempre correspondem aos elementos ou propriedades que o problema exige ver, conforme se constatou nas Figuras 3 e 4. Desta forma, as diferentes combinações entre figura e enunciado não só induzem o modo de vê-la, mas também impõem certas dificuldade ou facilidades de articulá-los.

O grau de dificuldade está relacionado à congruência entre o que é enunciado e o que é visível de imediato na figura. Se as hipóteses descrevem elementos reconhecidos pela percepção imediata, então a possibilidade de ver o que a figura deve mostrar é significativamente maior em relação às situações em que o enunciado e a figura não são semanticamente congruentes.

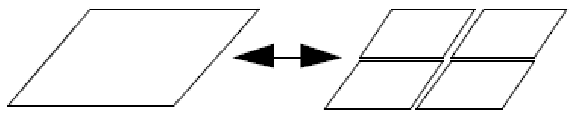
Para além do que a congruência permite ver, é preciso ultrapassar as barreiras da percepção. Ver uma figura geométrica demanda mais que reconhecer formas ou interpretar discursivamente elementos ou propriedades. Exige ver operações figurais que permitam efetuar tratamentos matemáticos, e portanto, uma outra forma de interpretação se faz necessária, a **apreensão operatória**.

A apreensão operatória diz respeito às operações de modificação e de reorganização realizadas visualmente na figura. As diferentes modificações realizadas em uma figura geométrica, seja visual ou mentalmente, são organizadas em três grupos e denominadas modificações mereológicas, modificações óticas e modificações posicionais.

As modificações mereológicas visam a decomposição da figura em partes, podendo reagrupá-las entre si ou realocá-las em outras figuras. O reagrupamento ou a realocação formam uma figura visualmente diferente da original, em que é possível identificar as diferenças ou as semelhanças entre a figura original e a figura modificada.

Sobre a decomposição figural, Duval (2005) destaca três modos de efetuá-la, conforme ilustram as Figuras 5, 6 e 7.

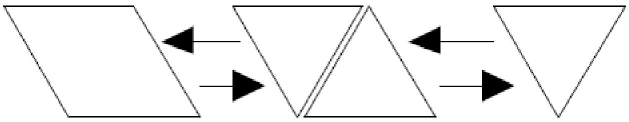
Figura 5: Decomposição estritamente homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21)

Na Figura 5, a decomposição é chamada estritamente homogênea porque a figura final preserva a forma da figura original.

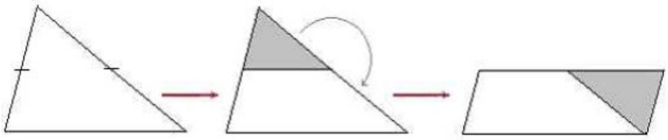
Figura 6: Decomposição homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21)

Aqui, a decomposição homogênea não preserva a forma inicial, mas suas partes apresentam formas idênticas entre si.

Figura 7: Decomposição heterogênea

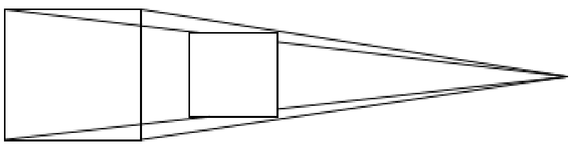


Fonte: Duval (2005, p. 21)

Na decomposição heterogênea a figura final assume forma totalmente diferente da forma original.

As modificações óticas são relativas ao tamanho da figura original. Elas produzem uma figura semelhante à figura original, porém com tamanho diferenciado, podendo ser ampliado ou reduzido:

Figura 8: Modificação ótica: homotetia

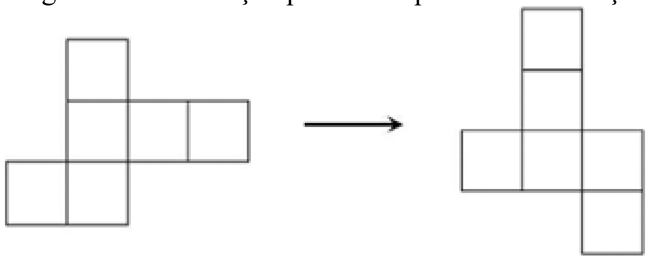


Fonte: Duval (2004, p. 167)

Esta figura apresenta dois quadrados semelhantes, percebidos em profundidade, por meio da modificação conhecida como homotetia, que preserva a forma e a orientação da figura original, mas altera o seu tamanho.

As modificações posicionais estão relacionadas à orientação e à posição da figura. Os movimentos de translação, rotação ou reflexão sobre a figura original produzem uma representação figural que preserva o tamanho e a forma, mas apresenta alterações na orientação e na posição em relação à figura original:

Figura 9: Modificação posicional por meio de rotação



Fonte: Duval (2004, p. 173)

Aqui, a figura foi rotacionada 90º em sentido anti-horário e produziu uma nova representação.

Diferentes operações semióticas estão associadas a cada tipo de modificação. As operações provocam alterações na figura permitindo o desenvolvimento de sua função heurística. Quanto à função heurística Duval (2012a, p. 125, grifos do autor) afirma que ela **"está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto".** Isso significa que diante de um problema matemático que envolve figuras geométricas é preciso mobilizar determinadas operações figurais de tal forma que evidenciem e tornem possível a aplicação de tratamentos figurais.

Contudo, mesmo havendo congruência entre apreensão operatória e tratamento matemático, há que se levar em consideração certos fatores ligados à visibilidade que podem inibir a mobilização das operações. Tais fatores são apresentados no quadro:

Quadro 2: Apreensão operatória e fatores de visibilidade

Tipo de modificação figural	**Operações que constituem a produtividade heurística**	**Fatores que interferem na visibilidade**
Modificações mereológicas	- Reconfiguração intermediária - Mergulhamento	Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
Modificações posicionais	- Rotação -Translação	Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: Duval (2012a, p.127)

O Quadro 2 mostra alguns fatores relacionados à organização perceptiva da figura, que interferem na visibilidade e na mobilização de operações figurais, como a convexidade, a posição e a orientação. Geralmente, é mais fácil reconhecer subfiguras convexas do que não convexas. Outrossim, o posicionamento e a orientação da figura podem interferir diretamente no reconhecimento de propriedades geométricas.

Além destes fatores, há que se levar em consideração outros, por exemplo a complementaridade, a divisão da figura em partes e a direção. De fato, perceber se as partes da figura se sobrepõem à original, identificar se ela está fracionada ou se necessita ser fracionada, ou privilegiar as direções horizontal e vertical, podem disparar ou inibir operações figurais (DUVAL, 2012c).

Ainda em relação ao Quadro 2, é possível observar as diferentes operações atreladas a cada tipo de modificação. A reconfiguração intermediária, pertencente à modificação mereológica, chama a atenção pela sua potencialidade em efetuar tratamentos. Esta operação semiótica desempenha importante papel na resolução de problemas, inclusive em problemas de área, objeto deste estudo, e por esta razão é abordada na próxima subseção.

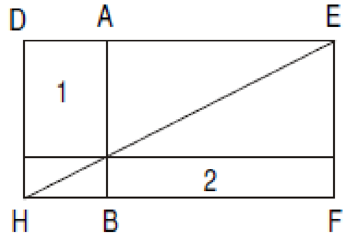
1.2.1.3 A operação de reconfiguração intermediária

A modificação mereológica divide a figura em subfiguras e estabelece uma relação entre as partes e o todo. A divisão origina a operação de reconfiguração intermediária, que busca reorganizar as partes de forma a possibilitar a aplicação de tratamentos figurais. Por meio da reconfiguração pode-se calcular a medida de área de uma figura a partir da soma das áreas de suas partes ou a partir do reconhecimento da equivalência de dois reagrupamentos intermediários.

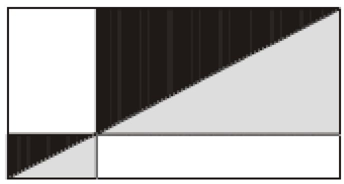
Para Flores e Moretti (2006, p. 8) a operação de reconfiguração "consiste, basicamente, na complementaridade de formas, ou seja, das partes obtidas por um fracionamento que podem ser reagrupadas em subfiguras incluídas na figura inicial". Os autores apresentam na Figura 10, o problema de Euclides, abordado por Duval (1995), para mostrar que a reconfiguração é considerada uma operação de complementaridade de formas.

Figura 10: Problema de Euclides

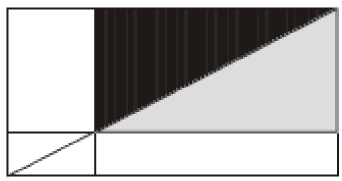
Mostrar a igualdade das partes 1 e 2 qualquer que seja a posição do segmento AB.



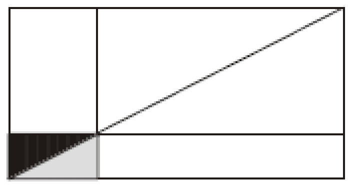
Para mostrar a igualdade parte-se da supressão dos triângulos DHE e EHF de duas configurações não-convexas e iguais:



Ou parte-se da supressão sucessiva de duas partes elementares iguais:



Seguido de



Fonte: Duval (1995, p.199-202); Flores e Moretti (2006, p. 8)

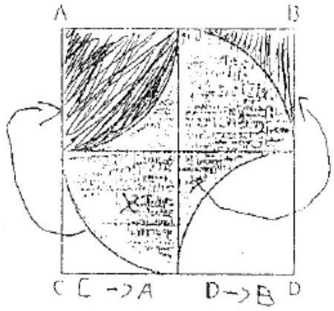
Para resolver o problema de Euclides, os autores afirmam que Duval (1995) aplica várias vezes a reconfiguração intermediária. Essa operação está ligada à habilidade de visualização[6]: é preciso visualizar as subfiguras pertinentes, visualizar a reorganização das subfiguras e ainda visualizar os possíveis tratamentos a serem aplicados. Ademais, a reconfiguração pode intervir em problemas cuja resolução não demanda a utilização de um *corpus* de definições e teoremas (DUVAL, 2012a).

Mesmo servindo de *start* para a resolução de problemas, a reconfiguração não garante a sua correta resolução. A Figura 11 traz uma atividade sobre o cálculo de áreas de figuras planas, resolvida por alunos de 5ª série do ensino fundamental, que comprova a referida afirmação.

[6] Com base nas ideias de Duval (2004), Moretti (2013, p. 293) define que a visualização é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. Ela não exige nenhum conhecimento matemático, mas pode comandar as apreensões.

Figura 11: A área da região hachurada

Calcule a área da região *hachurada* tendo em vista o quadrado ABCD de lado 4 cm.



Fonte: Flores Bolda (1997, p. 122)

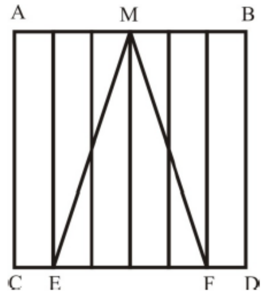
A análise de Flores e Moretti (2006, p. 11), sobre o problema apresentado por Flores Bolda (1997) na Figura 11, revela que o aluno utiliza a reconfiguração para formar um retângulo de 4 cm de comprimento e 2 cm de largura em que a área é 8 cm^2. No entanto, ele conclui que o valor da área solicitada é 2 cm^2, em virtude de efetuar a contagem dos dois quadrados. As modificações figurais permitiram ao aluno obter uma resposta, mas o fato de não articular a figura ao enunciado, conduziu-o à resposta incorreta.

Este exemplo abordado por Flores e Moretti (2006) explicita a importância da leitura do enunciado para a resolução correta do problema e permite inferir que a partir da operação de reconfiguração é possível o reconhecimento de formas figurais não visíveis pela percepção imediata. Contudo, a reconfiguração não é suficiente para conduzir à correta resolução do problema. Além do mais, comprova que as apreensões operatória e perceptiva devem estar subordinadas à apreensão discursiva.

A reconfiguração intermediária também pode ser um recurso natural para a resolução de problemas, conforme se observa nas figuras a seguir.

Figura 12: Partição de um quadrado.

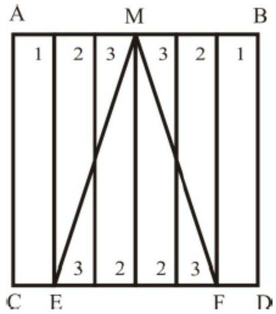
Fazer a partição de um quadrado em três partes iguais, a partir do ponto médio do lado AB



Fonte: Duval (2012a, p. 128)

Em relação a esta atividade, Duval (2012a) explica que um aluno do *cinquième* (equivalente ao 7º ano no Brasil) faz seis partições homogêneas. Enumerando com os mesmos algarismos as partes elementares iguais, ele indica que as reconfigurações intermediárias (AMEC, MFE e MBDF) têm o mesmo tamanho:

Figura 13: Reconfigurações intermediárias



Fonte: Duval (2012a, p. 129)

Usando tratamentos figurais, o aluno mostra que o quadrado pode ser dividido em três partes iguais. Todavia, sente dificuldades em registrar, por escrito, a solução explicada verbalmente, segundo o autor.

Este exemplo abordado por Duval (2012a) permite inferir que a conversão entre os registros figural e da língua natural não é espontânea e que em certas situações a operação de reconfiguração tem 'força' de tratamento matemático para demonstrar uma propriedade reconhecida visualmente sobre a figura. Sobre a última inferência Duval (2012a, p. 130) afirma que "esta operação é congruente a um tratamento matemático possível em uma classe de problemas diretamente acessíveis aos alunos, porque não requerem de maneira explícita o emprego de alguma definição ou teorema".

De forma geral, a reconfiguração intermediária pode favorecer o desenvolvimento de habilidades ligadas à visualização. Para além da percepção imediata, ela permite a resolução de problemas por meio de tratamentos figurais.

1.2.2 O registro gráfico

Neste trabalho, o registro gráfico contempla as representações de funções construídas no plano cartesiano. Dentre as abordagens para o esboço de curvas neste plano está a interpretação global das propriedades figurais, proposta por Duval (2011a).

Diferentemente da abordagem ponto a ponto, frequentemente aplicada no ensino, em que é apresentada a expressão algébrica da função e com base nela é construído o gráfico, a interpretação global permite articular as representações gráfica e algébrica. Nela, busca-se identificar as unidades gráficas e fazer a associação destas unidades às unidades algébricas para que as modificações efetuadas num registro sejam percebidas no outro.

1.2.2.1 Abordagens gráficas

Esboçar uma curva no plano cartesiano é mais que aplicar regras de codificação que associam pares ordenados a pontos no plano. Da mesma forma, ler e interpretar uma representação gráfica não se resume a identificar pontos particulares. As dificuldades de leitura e de interpretação não estão atreladas à compreensão dos conceitos matemáticos ligados às funções, mas no desconhecimento de regras de correspondência semiótica entre o registro gráfico e o registro algébrico.

Sobre as abordagens para o esboço de curvas de funções no plano cartesiano, Duval (2011a) apresenta três possibilidades: a abordagem ponto a ponto, a abordagem de extensão do traçado efetuado e a abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

No ensino é comum tratar o esboço de curvas de funções a partir da abordagem ponto a ponto. Tal abordagem considera como referência os eixos graduados e sobre eles são marcados pontos que correspondem a pares ordenados. Há forte associação entre pontos e pares ordenados.

Esse procedimento é comumente empregado para realizar conversões entre registros, em que o registro de partida é o algébrico e o de chegada, o gráfico. Em sentido inverso, ele é praticamente inoperante, pois ainda que havendo "congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente" (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 43). Desta forma, a abordagem ponto a ponto dificulta a percepção da articulação entre os registros, especialmente quando a representação gráfica é o registro de partida.

Ainda neste tipo de abordagem, a visualização do gráfico restringe-se a ver determinados pontos e o esboço da curva é a junção de pontos, oriundos da aplicação de regras de codificação, o que impede uma leitura mais ampla e global acerca de suas propriedades. No entanto, ela é adequada ao estudo de funções, especialmente das funções do primeiro e segundo grau, no qual se faz necessária uma leitura pontual, como encontrar pontos de intersecções, pontos de máximos e mínimos.

A abordagem de extensão do traçado efetuado se assemelha à abordagem ponto a ponto, pois ambas consideram a análise de pontos particulares da curva, sem a preocupação com suas propriedades globais. Porém se distinguem pelo fato de que a abordagem de extensão do traçado não se limita a um conjunto finito de pontos marcados no plano cartesiano. Ela compreende as atividades de interpolação e de extrapolação.

Em contraste com as abordagens ponto a ponto e de extensão do traçado, Duval (2011a) enuncia a interpretação global de propriedades figurais, em que o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito pela expressão algébrica. Nela é possível compreender que o gráfico e a expressão algébrica estão articulados entre si, uma vez que as modificações feitas num registro são visualizadas e reconhecidas no outro.

O olhar focado para pontos particulares cede espaço para um olhar mais amplo da curva. Sobre isso, Duval (2011a, p. 99, grifos do autor) destaca que "**não estamos mais na presença da associação "um ponto – um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica"** ". Isso implica que, para além da observação de pontos específicos numa curva é preciso uma interpretação global, em que as propriedades da curva sejam destacadas, analisadas e correlacionadas com a escrita algébrica. É preciso identificar alterações conjuntas do gráfico e da expressão algébrica, estabelecendo correspondências entre as variáveis visuais e as unidades significativas da expressão algébrica.

Estabelecer correspondências entre representações de funções produzidas em diferentes registros e reconhecer a forma com que elas estão articuladas, pressupõe a conversão. No ensino, as conversões acontecem com maior intensidade no sentido do registro algébrico para o gráfico. Isso significa que, partindo da representação da função no registro algébrico chega-se à representação no registro gráfico, dando a impressão de haver certa relação de dependência entre as representações, transparecendo que a segunda está subordinada à primeira.

Uma das razões que leva priorizar esse sentido de conversão é a dificuldade de análise simultânea das propriedades visuais e algébricas, visto que a maioria das funções possui alto grau de complexidade. Para realizar a conversão em sentido inverso, que parte do registro gráfico, é necessária a abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Mais do que identificar variáveis visuais e unidades algébricas significativas, a interpretação global permite a articulação e a coordenação dos registros.

Para exemplificar o procedimento de interpretação global figural para o esboço de curvas de funções polinomiais do primeiro grau, da forma $y = ax + b$, Duval (2011a) elabora o Quadro 3 em que explicita as variáveis visuais gráficas e as unidades simbólicas correspondentes, pertencentes ao registro algébrico:

Quadro 3: Variáveis visuais e unidades simbólicas

Variáveis Visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido da inclinação	Ascendente Descendente	Coeficiente a > 0 Coeficiente a < 0	ausência do símbolo + presença do símbolo -
Ângulo com o eixo *x*	Partição simétrica Ângulo menor que 45º Ângulo maior que 45º	Coef Angular a =1 Coef. Angular a < 1 Coef angular a >1	ausência de coef. escrito
Posição em relação ao eixo *y*	Corta acima da origem Corta abaixo da origem Corta na origem	Constante b > 0 Constante b < 0 Constante b = 0	sinal + sinal –

Fonte: Adaptado de Duval (2011a, p. 101)

Esse quadro mostra as correspondências entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas em que qualquer alteração na representação da função no registro algébrico provoca alteração na representação da função no registro gráfico e vice-versa. Se desejar que a reta tenha ângulo com o eixo *x* maior que 45º e a posição do traçado em relação ao eixo *y* esteja acima da origem, é preciso atribuir para o coeficiente angular *a* e para a constante *b*, valores maiores que 1 e 0, respectivamente, por exemplo, $y = 2x + 3$. Da mesma forma, observando o quadro e a expressão $y = -x + 5$, é possível identificar que a reta é decrescente, forma um ângulo de 45º com os eixos coordenados e está deslocada 5 unidades acima da origem, no eixo *y*.

A partir das ideias de Duval (2011a) sobre o esboço de curvas, novos estudos se desenvolveram e o procedimento de interpretação global figural passou a ser utilizado para esboçar curvas de outros tipos de funções:

a) Funções polinomiais do segundo grau.

Moretti (2003) estuda o esboço de curvas de funções quadráticas com base em movimentos de translação, que são operações semióticas atreladas à apreensão operatória. O autor entende que este movimento permite reconhecer as correspondências entre os registros gráfico e algébrico, mantendo a ideia do procedimento de interpretação global figural. O estudo resgata elementos da parábola enquanto lugar geométrico ao tempo que a trata como curva da função polinomial de segundo grau.

Para iniciar as discussões, Moretti (2003) relembra que equações do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e b, c reais, podem ser reescritas na forma canônica $y - y_v = a(x - x_v)^2$.

A forma canônica possibilita esboçar curvas por meio de translações horizontal e vertical da parábola base $y = ax^2$. Para o caso em que o coeficiente a é positivo ($a > 0$), o autor analisa os elementos que determinam a translação vertical e sua interligação com o número de raízes da equação:

i) Uma *translação vertical para cima do eixo x* indica que a curva não intercepta o eixo *x* e portanto, não há raízes reais. Neste caso $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo e y_v é positivo.

ii) Uma *translação vertical para baixo do eixo x* indica que a curva intercepta o eixo *x* em dois pontos e portanto, há duas raízes reais e distintas. Aqui, $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo e y_v é negativo.

iii) *Nenhuma translação vertical* indica que a curva intercepta o eixo *x* em um único valor e assim, as raízes reais são iguais e coincidem com o vértice da parábola. Nesta situação, tanto Δ quanto y_v são nulos.

O objeto matemático ‘função polinomial do segundo grau’, representado nos registros algébrico e gráfico, possibilita distinguir o objeto de sua representação. Mais, ao desenvolver as conversões e estabelecer correspondências entre as representações produzidas nestes registros se está proporcionando condições para que o aluno coordene os registros.

Em seu trabalho, Moretti (2003) também desenvolve a ideia do esboço de curvas de funções do primeiro grau, via movimentos de translação.

b) **Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.**

Silva (2008) também usa o procedimento de interpretação global figural para estudar o esboço de curvas das funções trigonométricas $y = \pm a + bsen(kx \pm c)$, das funções exponenciais $y = b + a^x$, $y = a^{x+d}$ e das funções logarítmicas $y = b + log_a(x \pm d)$, a partir das ideias de Moretti (2003) sobre translação.

Para as funções trigonométricas a autora se baseia no Quadro 3 e cria seu próprio quadro que mostra as características das curvas senóides, relacionando as variáveis visuais e as unidades algébricas. Já o esboço de curvas das funções exponenciais e logarítmicas é estudado partindo das formas canônicas de suas expressões algébricas.

c) Funções modulares lineares.

À luz de Duval (2011a) e com base nas propostas de Moretti (2003) e de Silva (2008), Menoncini e Moretti (2017) desenvolvem o esboço de curvas das funções lineares modulares da forma $f(x) - (a) = b|x - (c)/k|$, com $b \neq 0$, $k \neq 0$.

Os autores destacam que a representação da função no registro algébrico, na forma canônica $f(x) - a = b|x - (c/k)|$, fornece informações relevantes acerca do comportamento da curva. Os coeficientes b e k estão relacionados, nesta ordem, à concavidade e ao ângulo do traçado, enquanto que os termos constantes a e c indicam as direções e os sentidos das translações. Os valores de *c* e *k* estão interligados de forma que o quociente entre eles determina a coordenada abscissa do vértice. Em síntese:

a) O coeficiente b indica a concavidade do traçado: o traçado está voltado para cima quando $b > 0$ ou para baixo, quando $b < 0$;
b) O coeficiente k indica o ângulo de abertura do traçado: se $k = 1$, então o ângulo é simétrico; se $k > 1$ o ângulo com o eixo horizontal é maior e se $k < 1$ o ângulo com o eixo horizontal é menor;
c) O termo constante a indica a translação do traçado no eixo *y*: o traçado se desloca ***a*** unidades para cima, se $a > 0$, ou para baixo, se $a < 0$;
d) O termo constante *c* indica a translação no eixo *x*: o traçado se desloca $\frac{c}{k}$ unidades para à direita quando $\frac{c}{k} > 0$ ou para à esquerda no caso $\frac{c}{k} < 0$;
e) O vértice do traçado $V = (x_v, y_v)$ possui coordenadas $x_v = \frac{c}{k}$ e $y_v = \pm a$.

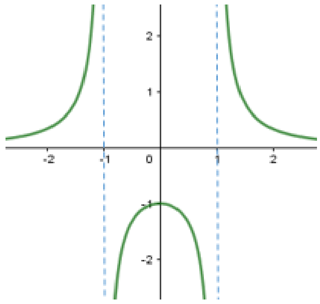
Estas são as correspondências possíveis, em duplo sentido, entre as representações das funções modulares lineares, produzidas nos registros gráfico e algébrico. É esta correspondência biunívoca que fortalece a relação existente entre as duas formas de representação, explicitando que ambas se complementam e representam o mesmo objeto matemático, a saber, a função modular linear.

d) Funções no ensino superior.

À medida que as funções vão se combinando e dando origem a novas funções, o esboço de curvas vai se tornando cada vez mais complexo, exigindo alternativas que permitam aplicar o procedimento de interpretação global, sem perder sua essência.

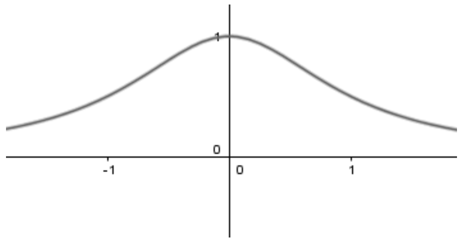
A complexidade das funções é mostrada nas Figuras 14 e 15, em que, a simples alteração no sinal da escrita algébrica da função racional $y = \frac{1}{x^2-1}$, gera a escrita algébrica $y = \frac{1}{x^2+1}$, bem semelhante à original, porém com representação no registro gráfico visivelmente diferente.

Figura 14: Curva da função $y = \frac{1}{x^2-1}$



Fonte: Autora

Figura 15: Curva da função $y = \frac{1}{x^2+1}$

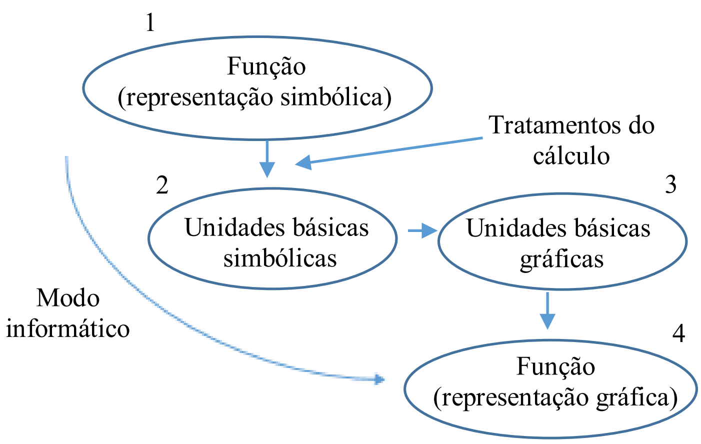


Fonte: Autora

Pensando nestas funções mais complexas, tratadas no ensino superior, Luiz (2010) apresenta o esboço de curvas com base no trabalho de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008). Estes últimos autores, seguindo as ideias de Duval (2011a), criam unidades básicas gráficas e unidades básicas simbólicas que servem de unidades significativas e auxiliam a conversão das representações entre os registros gráfico e simbólico em duplo sentido. Tais unidades básicas são descritas em função de elementos e conceitos do Cálculo, especialmente limites e derivadas.

No caso em que as conversões são efetuadas com auxílio de algum recurso informático, Luiz (2010) atribui novo nome ao procedimento de interpretação global de propriedades figurais proposto por Duval (2011a), chamando-o de "informático de interpretação global". O procedimento informático, mostrado na Figura 16, permite realizar a conversão entre os registros algébrico e gráfico com maior rapidez e confiabilidade, pois a construção gráfica é quase instantânea a partir da inserção da escrita algébrica no software em uso.

Figura 16: Esquema de conversão entre representações simbólica e gráfica



Fonte: Adaptado de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 110)

Com base no esquema apresentado na Figura 16, a conversão em sentido $1 \rightarrow 4$, que parte da representação simbólica para a representação gráfica, é desenvolvida de forma mais ágil em comparação à forma manual. Este recurso também dinamiza a visualização à medida que torna possível alterar expressões algébricas, movimentar e comparar gráficos, etc. Qualquer modificação na representação da função no registro simbólico é reconhecida na representação no registro gráfico. Já no sentido inverso, de $4 \rightarrow 1$, devido à complexidade das funções, é percorrido o caminho $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, que utiliza as unidades básicas gráficas e simbólicas, e cujo objetivo é produzir uma análise qualitativa do esboço da curva sem necessariamente a preocupação com a escrita simbólica.

Os trabalhos apresentados aqui, que tratam do esboço de curvas de funções a partir do procedimento de interpretação global figural, revelam uma forma de traçar curvas em que são valorizados os seus aspectos qualitativos. Diferentemente da visão pontual e local, oriunda da abordagem ponto a ponto, comumente utilizada no ensino e contemplada em livros didáticos e livros textos, tal procedimento busca o olhar mais amplo acerca das qualidades da curva, uma vez que o traçado é a representação de um objeto descrito por uma expressão algébrica.

Estes trabalhos têm trazido contribuições significativas para o ensino e para a aprendizagem de Cálculo no nível superior, bem como para o ensino Fundamental e Médio, já que o esboço de curvas é tratado na Educação Básica.

1.2.3 O registro das línguas

O registro das línguas compreende as representações discursivas provenientes do registro da língua natural ou do registro da língua formal. Ele permite desenvolver tanto a comunicação quanto as operações que estão associadas às funções discursivas, essenciais para a construção de conhecimentos.

Para Duval (2004), o emprego de uma língua deve mobilizar certas funções, não apenas para haver um discurso, mas para haver uma diversidade de discursos. Estas funções a serem mobilizadas estão separadas em dois grupos: o das funções meta-discursivas e o das funções discursivas.

1.2.3.1 Funções meta-discursisvas

No grupo das funções meta-discursivas estão as funções de comunicação, de tratamento e de objetivação, que são comuns a quaisquer sistemas de representação.

A comunicação permite o reagrupamento de elementos para tornar possível a transmissão de informações e para promover a mudança de base da comunicação. Um exemplo de mudança de base é a passagem de um discurso oral para um discurso escrito, utilizando um alfabeto. Todos os sistemas semióticos podem cumprir a função de comunicação, mas nenhum desenvolve a comunicação tão apropriadamente como a língua natural.

O tratamento é uma função interna ao registro e consiste em transformar uma informação em outra. Ele possibilita criar uma variedade de discursos, pois se consegue comunicar de maneiras diferentes. Ao reelaborar uma frase com outras palavras se está modificando o discurso, ou seja, efetuando a operação de tratamento. Em sala de aula, esta operação é bastante comum para tornar o discurso mais compreensível entre professor e aluno.

A objetivação é a possibilidade de tomar consciência daquilo que, até o momento, ainda se apresentava obscuro. Ela é "uma exteriorização que permite desenvolver a significação dos objetos quando ainda não se possuía consciência antes da sua objetivação semiótica" (DUVAL, 2016, p. 11). É a partir do trabalho de exteriorização com fins de organização que se chega à clarificação do obscuro e consequentemente à conscientização.

1.2.3.2 Funções discursivas

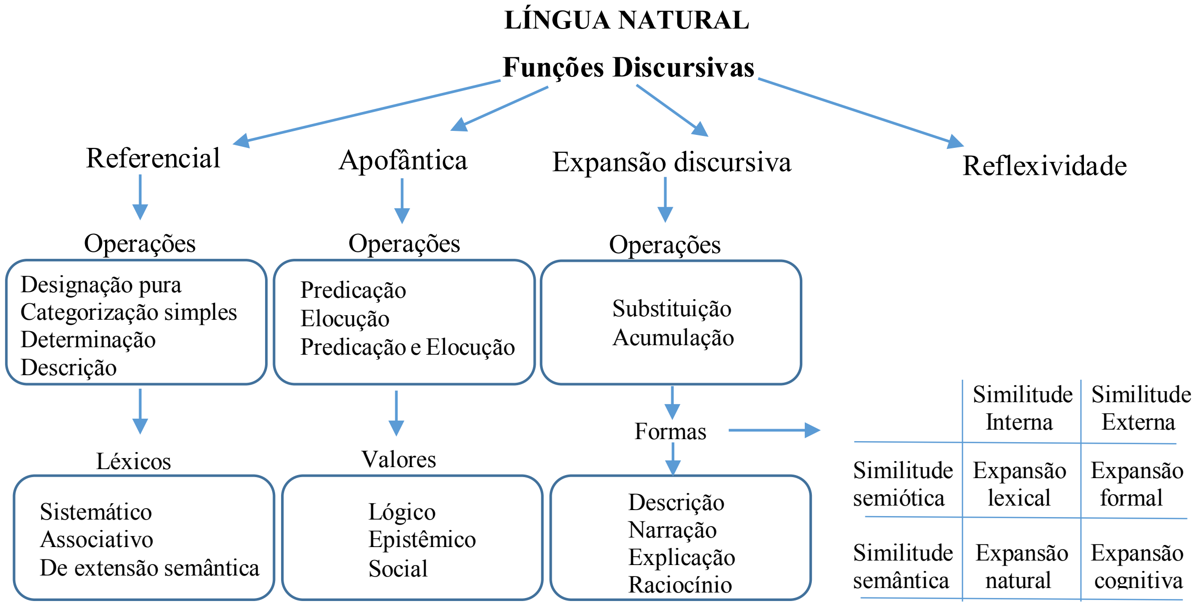
Além das funções meta-discursivas, comuns a quaisquer sistemas de representação, há também funções mais específicas, aplicáveis a certos sistemas. São as chamadas funções discursivas.

Quando fala em discurso, Duval (2004) não se restringe ao linguístico. Ao contrário, considera os diferentes discursos, seja a partir de símbolos, de expressões algébricas, etc, e por conta disso apresenta quatro funções discursivas, que ao seu ver, são capazes de:

- Designar objetos (função *referencial*);
- Dizer alguma coisa sobre os objetos designados, a partir de um enunciado completo (função *apofântica*);
- Articular um enunciado completo a outro, coerentemente (função *de expansão discursiva*)
- Mostrar o valor, o modo ou o *status* de um enunciado completo, por parte de quem enuncia (função *de reflexividade*).

Duval (2004, p. 89) afirma que "a organização de um discurso depende sempre das funções discursivas que cumpre e das operações discursivas realizadas". Cada função discursiva está associada a operações (Figura 17) e o predomínio de algumas destas funções e de algumas de suas operações acabam por influenciar diretamente a organização e a análise do discurso.

Figura 17: Funções discursivas de uma língua e suas operações



Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 85- 124); Brandt, Moretti e Bassoi (2014, p. 480)

Com base nesta figura são descritas a seguir, as funções discursivas e as operações associadas a elas. A primeira função, chamada referencial, está ligada à designação de objetos e possui quatro operações discursivas:

i) a designação pura identifica um objeto utilizando-se de alguma marca particular, podendo ser uma letra (identificação de um vértice A de um triângulo), um símbolo (ângulo α), um gesto corporal (apontar o dedo para designar o lado de um quadrado). As marcas servem unicamente de referências e não têm a intenção de produzir quaisquer significações;

ii) a operação de categorização simples identifica objetos a partir da associação de uma marca a uma categoria, que pode ser vértice, lado, ângulo, ponto médio, bissetriz, etc. Diante da letra B, é necessário especificar a categoria designada, indicando se B é ponto de interseção de curvas, origem de uma semirreta, ponto médio de um segmento, etc.

iii) a determinação é a operação que visa reforçar a categorização do objeto, a partir do uso de artigos definidos e indefinidos, por exemplo, B é a interseção das curvas.

iv) a descrição é comparada à categorização, porém mais complexa, já que consiste na combinação ou no cruzamento das operações de categorização. A descrição permite que um objeto seja designado ou nomeado mesmo quando não existe uma nominação ou uma categorização própria.

A segunda função discursiva da Figura 17 é a apofântica. Ela tem a finalidade de dizer alguma coisa sobre o objeto designado, pois se uma língua se restringisse a cumprir apenas a função referencial, seria equiparada a uma atividade de codificação. É a partir da função apofântica, com seus enunciados completos, que a língua cumpre essa finalidade.

Sobre os enunciados completos, também denominados unidades apofânticas, Duval (2004) afirma que um enunciado completo se diferencia de uma expressão referencial pelo valor social, lógico ou epistêmico que assume. O valor social refere-se a normas, apelos, ordens, enquanto que o valor lógico refere-se à verdade ou à falsidade e o valor epistêmico indica certeza ou necessidade. Os valores do enunciado completo dependem não só do contexto no qual o discurso se situa, mas do universo cognitivo, representacional e relacional dos interlocutores.

As operações associadas à função apofântica são a predicação e a elocução. As duas operações estão ligadas à produção de enunciados completos, entretanto distinguem-se pelos valores assumidos. Um enunciado produzido a partir da predicação assume valor lógico ou epistêmico, enquanto que um enunciado formado por elocução assume valor social.

A terceira função a ser apresentada é a expansão discursiva. Como o próprio nome já indica, esta função expande o discurso a partir da articulação entre enunciados completos. Isso porque, um discurso nem sempre mostra tudo o que realmente quer dizer e portanto, são as entrelinhas, que quando explicitadas, permitem esta expansão.

Há duas operações por trás da expansão do discurso, a saber, a substituição e a acumulação. A primeira é inerente à atividade matemática, já que os cálculos se efetuam por substituição. As inferências também funcionam por substituição, pois a nova inferência substitui a anterior, possibilitando o progresso do discurso. A expansão por acumulação é característica de discursos descritivos, narrativos ou explicativos. Neste modo de expansão do discurso, as frases se juntam formando uma sequência de informações que complementam as frases já escritas. Não há substituições de frases, mas cada nova frase vem para reafirmar ou completar a anterior, permitindo que o discurso progrida.

A inferência, a descrição, a explicação, a narração e o raciocínio são formas pelas quais o discurso pode ser expandido e possibilitam reconhecer a intenção por trás de um conjunto de frases ou de proposições. Partindo de tais formas se reconhece, por exemplo, passos de um raciocínio, episódios de um relato, descrições de um objeto ou justificativas de uma declaração.

A última função discursiva é a função de reflexividade. Ela está relacionada à elocução. Ao utilizar uma língua, o locutor produz enunciados que expressam suas intenções, para que o interlocutor consiga interpretar o que lhe foi dito. A relação entre o ato intencional de produção do enunciado e suas condições de interpretação é denominada elocução. A função de elocução permite que em um enunciado apareçam marcas de enunciação, as quais são importantes para a comunicação e para o discurso com finalidade estritamente científica. A referida função, atrelada ao discurso científico é chamada função de reflexividade.

Ao considerar a existência de diferentes discursos e de inúmeras funções discursivas associadas a eles, Duval (2004) chama a atenção para dois discursos em particular: o da língua natural e o da língua formal. Mais especificamente, sua atenção se volta para a dificuldade de conversão de um discurso em língua natural para um discurso em língua formal. Sabendo que o discurso em língua formal é próprio de atividades matemáticas, a referida conversão é discutida a seguir.

1.2.3.3 A conversão da língua natural para a língua formal

Para Duval (2004) os diferentes empregos da língua natural, seja na conversação (emprego comum), seja num enunciado de teoremas matemáticos (emprego especializado) ou na escrita (emprego literário), produzem uma variedade de discursos.

Para analisar cada um dos discursos é preciso que haja a separação entre o plano das funções meta-discursivas e o plano das funções discursivas. É esta separação, em que as funções discursivas se mantêm independentes das meta-discursivas, que dá conta de explicar os diferentes empregos da língua natural, pois "a organização de um discurso depende sempre das funções discursivas que cumpre e das operações discursivas selecionadas para cumprir tais funções" (DUVAL, 2004, p. 89). Assim, o autor considera que as funções meta-discursivas devem exercer apenas uma influência indireta na organização de um discurso, enquanto que as funções discursivas, influência direta.

Sabendo que a língua natural e a língua formal cumprem as mesmas funções discursivas, a saber, as funções referencial, apofântica e de expansão discursiva, poderia inferir-se que as línguas possuem estruturas semelhantes. Neste caso, a conversão entre os referidos registros seria uma operação simples e espontânea. No entanto, o que se percebe é a dificuldade de transformar um enunciado em língua natural em uma expressão algébrica ou vice-versa, o que comprova que as línguas possuem estruturas próprias e distintas.

Apesar de cumprirem as mesmas funções discursivas, as línguas se diferem pelo fato de que cada uma mobiliza certas operações para que sejam cumpridas as funções discursivas. E estas operações não são necessariamente as mesmas, gerando dificuldades durante o processo de conversão, uma vez que a conversão depende da comparação das operações mobilizadas em cada registro.

Para reconhecer a complexidade dessa comparação é preciso compreender como são cumpridas as três funções discursivas, em cada registro de língua:

- Função apofântica: para cumprir essa função, em língua natural, são usadas as conjunções. Já na língua formal, são empregados conectivos proposicionais que funcionam parecidos com as conjunções, mas são utilizados somente quando os enunciados possuem valor de verdade. A diferença entre as conjunções e os conectivos proposicionais é que as conjunções articulam o conteúdo dos enunciados que combinam.
- Função referencial: em língua natural, constrói-se uma lista de nomes de predicados primitivos a partir da qual se originam todos os outros predicados por combinação ou por associação. Em língua formal não se consegue criar uma lista de símbolos primitivos, sendo necessário um simbolismo característico.
- Função de expansão discursiva: em língua natural se cumpre esta função por acumulação ou adjunção enquanto que em língua formal, por substituição.

A passagem de um registro de língua para outro requer a superação de obstáculos inerentes a cada uma das três funções discursivas, especialmente os relacionados às funções referenciais e apofântica, pois estas não ocorrem no interior do registro.

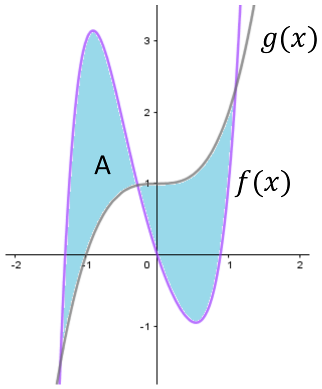
1.2.4 O registro gráfico-geométrico

Discutidos os grandes registros de representação semiótica, apresenta-se o registro gráfico-geométrico, que surge da necessidade deste estudo em trabalhar uma representação pertencente simultaneamente aos registros gráfico e geométrico.

Tendo em vista que o registro gráfico e o registro geométrico abrangem respectivamente o esboço de curvas e as figuras geométricas, é proposta a nomenclatura registro gráfico-geométrico para o registro que está no plano cartesiano, mas é uma figura geométrica.

Esta nomenclatura é necessária uma vez que o estudo da integral no cálculo de área envolve o esboço de curvas no plano cartesiano e estas curvas limitam uma região plana, formando uma figura geométrica. Assim, o registro gráfico-geométrico compreende as figuras geométricas representadas no plano cartesiano, como se observa na Figura 18.

Figura 18: Registro gráfico-geométrico



Fonte: Autora

A figura geométrica A é formada a partir do esboço das curvas $f(x)$ e $g(x)$, no plano cartesiano. Ele é uma representação geométrica produzida no registro gráfico, o que justifica a nomenclatura registro gráfico-geométrico.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo discutimos temas relacionados ao nosso estudo: o computador no ensino, visto que o GeoGebra é usado na resolução das atividades da sequência didática; as elevadas taxas de não aprovação em Cálculo em universidades brasileiras, em particular na Universidade Federal da Fronteira Sul, com intuito de justificar a produção deste trabalho voltado ao ensino e à aprendizagem de Cálculo; pesquisas que envolvem Cálculo Integral e Teoria dos Registros de Representação Semiótica; a resolução de problemas de área em livros textos de Cálculo, que revela a abordagem dos autores em relação à temática e a necessidade de mobilizar múltiplos registros de representação no estudo da integral no cálculo de área; a equivalência de áreas, não contemplada em livros textos; e aspectos históricos do Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que o cálculo de área de regiões limitadas por curvas remete ao uso deste teorema.

2.1 O COMPUTADOR NO ENSINO

O computador é considerado um outro modo fenomenológico de produção de representações semióticas, assim como o mental, o oral, o gráfico ou o visual. Cada qual, possui estrutura própria que permite a execução de diferentes funções: mentalmente se desenvolvem as funções de objetivação e de tratamento rápido; por meio da fala são cumpridas as funções de comunicação ou de objetivação; no modo gráfico ou visual, pela escrita e por desenhos em geral, são desenvolvidas as funções de tratamento, de objetivação e de comunicação; e computacionalmente se executam as funções de simulação e de tratamento "instantâneo" ilimitado, via afixagem sobre um comando (DUVAL, 2011b).

Duval (2011b) afirma ser possível analisar uma atividade cognitiva a partir dos modos fenomenológicos de produção, em que se privilegia a análise das funções de produção de representações, ou a partir dos registros mobilizados nessa produção, em que são tratados a estrutura e o sentido das representações produzidas.

O uso do computador com softwares matemáticos tem ampliado as possibilidades de transformação visual de figuras, permitindo explorar propriedades e relações matemáticas:

> Os programas computacionais atuais oportunizam, não só construir as figuras, mas explorar transformações de figuras por um simples deslocamento de um "objeto": um ponto, um segmento, etc. Não somente preenchem, também, uma função heurística, mas possibilitam uma abordagem "experimental", ao menos quase experimental das relações e propriedades geométricas (DUVAL, 2015, p. 7-8).

Infere-se das palavras do autor que o computador não só possibilita a construção e a exploração dinâmica de figuras, em um ambiente de experimentação, mas também contribui para o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático. Sobre esse assunto Duval (2011b; 2015) enuncia que:

- Os computadores não constituem um novo registro de representação. As representações produzidas no computador ou no papel são as mesmas e exigem a operação de desconstrução dimensional das formas bidimensionais que geralmente predominam na visualização;
- Eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Isso significa que o resultado de uma atividade aparece imediatamente na tela do monitor após um clique. Se obtém muito mais do que se obteria à mão livre e portanto, automatizam a produção cognitiva de representações semióticas;
- A inovação mais fascinante está relacionada ao poder de visualização, pois as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis: são deslocadas, alongadas ou comprimidas a partir de um ponto. Os softwares não servem unicamente de instrumentos de cálculo, mas assumem funções de simulação e de modelização que ultrapassam os limites do que possa ser concebido "mentalmente" ou manualmente no modo gráfico.

O autor também discorre que o dinamismo da visualização das representações semióticas não discursivas, como gráficos e figuras geométricas, é consequência do poder ilimitado dos tratamentos efetuados por meio de softwares. Ademais, afirma que em trabalhos que exigem a observação e a comparação de representações semióticas, produzidas em registros distintos, é preciso que as diferentes formas do objeto apareçam na tela do monitor para que os alunos identifiquem as alterações nas representações e estabeleçam correspondências entre os elementos significantes de cada representação.

O uso do computador no ensino de Cálculo é uma prática recente entre professores universitários brasileiros. De acordo com Souza Junior (2000), na década de 90, poucos destes profissionais ousaram utilizar o computador no ensino. O autor destaca que algumas iniciativas foram tomadas por professores que ministravam Cálculo, na tentativa de introduzir o recurso computacional em sala de aula, porém, sem registros documentais. Por exemplo, a reunião de orientação de pesquisa em 1998, em que João Frederico da Costa Azevedo Meyer relata sua experiência desenvolvida na década de 70, sobre o uso da programação Pascal para auxiliar alunos na compreensão de conteúdos de Cálculo.

Ainda segundo Souza Junior (2000), as primeiras referências a programas de derivação e integração simbólicas, voltadas à pesquisa em Matemática Aplicada, aparecem em 1988 no XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). Contudo, elas não apresentam preocupação explícita com as implicações didáticas ou com o ensino.

Com o decorrer dos anos, novas pesquisas têm surgido e mostrado a crescente inserção do computador e das tecnologias de comunicação no ensino de Cálculo e seus efeitos positivos para a aprendizagem.

A utilização do computador em práticas educativas para a produção de conhecimentos é defendida por Borba e Penteado (2010, p. 45) quando os autores destacam que "[...] uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento."

Nessa perspectiva, os computadores com seus softwares, complementam os instrumentos educacionais já existentes resultando numa nova forma de produção de conhecimento embasada em experimentações, verificações e refutações de hipóteses:

> Da mesma forma, devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma "nova linguagem" que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 48).

Para os autores, a informática se diferencia de outros instrumentos educacionais tradicionais, como o papel, a calculadora ou o quadro negro e desafia o pensamento linear a partir da simulação, da experimentação e da interação com uma linguagem que integra escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.

Além de conferir maior grau de confiança e de objetividade em relação aos instrumentos educacionais tradicionais, o computador também proporciona dinamismo à atividade, experimentação, confronto, validação ou descarte de hipóteses relacionadas ao problema estudado, de forma a fortalecer as discussões que culminarão na construção do conhecimento.

O computador ganha espaço entre os professores de Cálculo e é considerado um importante recurso para visualização gráfica, que complementa e dá significado às representações algébrica e numérica. Programas computacionais, a exemplo do Maple, Derive e GeoGebra recobrem diversos domínios do ensino e permitem a construção, a visualização e a análise dinâmica de figuras e gráficos, além de possibilitar uma melhor articulação entre diferentes registros de representação semiótica.

O GeoGebra é um software gratuito, atualmente utilizado para o ensino de conceitos matemáticos relativos à Geometria, à Álgebra, à Estatística e ao Cálculo. Nele se pode construir e explorar figuras geométricas planas e espaciais, gráficos de função bi e tridimensionais, além de calcular distâncias, áreas, volumes ou inclinações.

Em relação à proposta deste estudo, o GeoGebra possibilita o esboço de curvas de funções no mesmo plano cartesiano. Contribui para a comparação qualitativa entre curvas e para a articulação entre curvas e expressões algébricas. Isso porque as representações semióticas produzidas nos registros gráfico e algébrico aparecem na mesma tela do computador e cada alteração efetuada em uma das formas pode ser visível imediatamente na outra forma.

Quanto ao cálculo de área de uma região limitada por curvas, o software possibilita, entre outros, efetuar tratamentos figurais relativos à decomposição da região em retângulos, de modo que a área da região seja aproximada pela soma das áreas destes retângulos.

2.2 A PROBLEMÁTICA DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO

Na década de 90, a problemática com o processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo, mais especificamente com os altos índices de não aprovação, ganha a atenção de estudiosos. Preocupados, desenvolveram trabalhos que apontam para a iminente necessidade de discutir o problema e de buscar elementos que contribuam para a melhoria do processo.

Um destes trabalhos é a tese de Barufi (1999) que mostra as elevadas taxas de alunos reprovados e desistentes em Cálculo, no Instituto de Matemática e Estatística – IME da Universidade de São Paulo, entre 1990 e 1995:

> De fato, verificamos que no ano de 1995, a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência em MAT 135 (Cálculo para Funções de uma Variável Real) foi de 66,9 %, e, em MAT 131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8% (BARUFFI, 1999, p.3).

Os dados mostrados por Baruffi (1999) não são exclusivos do IME. Em 1994, na Escola Politécnica, a autora constata que a taxa de não aprovação se manteve em 46,9%, mesmo em cursos de re-oferecimento para alunos que já haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A exemplo de Baruffi (1999), Rezende (2003) afirma que as taxas de não aprovação em Cálculo, na Universidade Federal Fluminense, no período de 1996 a 2000, permeiam entre 45% e 95% para cursos em geral, chegando a no mínimo 65% para o curso de Matemática.

Corroborando com os autores já citados, Olímpio Junior (2006) e Do Nascimento (2003) também apresentam dados semelhantes. O primeiro autor, em 2006, afirma que no curso de Matemática da Universidade de São Paulo, a taxa de reprovação média na disciplina de Cálculo I oscila entre 40% e 50%. O segundo, constata que na Universidade Federal de Pernambuco, no segundo semestre de 1997, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral aplicada ao Bacharelado em Química e à Licenciatura em Física teve índice máximo de reprovação, ou seja, atingiu 100% destas turmas.

Os dados citados anteriormente revelam que os resultados insatisfatórios nos componentes de Cálculo vêm se agravando e se constituindo em um fenômeno educacional complexo que assola alunos, professores e comunidade científica em geral.

Na Universidade Federal da Fronteira Sul[7]- UFFS, campus Chapecó, esta preocupação também é pertinente. O grande número de reprovações e de desistências tem causado um fenômeno, chamado por professores de Matemática desta instituição, de 'represamento'. Ao reprovar ou desistir do Cálculo, o aluno acaba impedido de cursar componentes curriculares cujo pré-requisito é o Cálculo. Desta forma, o termo empregado pelos professores faz jus ao fenômeno, uma vez que, semelhante à ação de uma represa que impede a passagem da água, assim também a reprovação ou a desistência impede o progresso natural do aluno, em seu curso de graduação.

As tabelas que são apresentadas a seguir, explicitam dados referentes à reprovação por nota e a não aprovação (que corresponde à reprovação por nota ou por falta, ou à desistência), nos dois primeiros componentes de Cálculo, a saber, Cálculo I e Cálculo II ou Cálculo A e Cálculo B. Os dados provêm dos quatro cursos de graduação da UFFS, campus Chapecó, que apresentam em suas matrizes curriculares, componentes de Cálculo. São eles: Agronomia, Ciência da Computação, Engenharia Ambiental e Licenciatura em Matemática.

A Tabela 1 exibe os dados relativos ao curso de Agronomia, que possui entrada anual, no início de cada ano e contém em sua matriz curricular apenas o componente Cálculo I. A notação TE, que aparece na primeira coluna da tabela, indica turma especial.

---

[7] A Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) possui seis campus distribuídos nos estados de Santa Catarina, Paraná e Rio Grande do Sul. Em Santa Catarina há o campus de Chapecó, no Paraná há os campus de Realeza e de Laranjeiras do Sul e no Rio Grande do Sul há os campus de Erechim, Cerro Largo e Passo Fundo.

Tabela 1: Reprovações em Cálculo I – curso de Agronomia

Ano/Semestre Turma	**Matrículas**	**Reprovações por nota**	**Não aprovações**	**Reprovações por nota (%)**	**Não aprovações (%)**
2011/1	37	18	20	48,6	54,1
2012/1	57	13	16	22,8	28,1
2013/1	25	8	8	32	32
2013/1 -TE	16	1	1	6,3	6,3
2014/1	38	14	21	36,8	55,3
2015/1	50	15	22	30	44
2015/2 - TE	39	17	32	43,6	82,1
2016/2	58	9	11	15,5	19
2017/2	53	1	3	1,9	5,7

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Com base nessa tabela, é possível calcular o índice médio de reprovação por nota e de não aprovação, em Cálculo I, no curso de Agronomia, período 2011 a 2017. Tais índices aproximaram-se de 26,4%, e de 36,3%, respectivamente. Também, o curso ofertou no primeiro semestre de 2013 e no segundo semestre de 2015, turmas especiais de Cálculo I. As turmas especiais, geralmente são ofertadas quando há um grande número de alunos não aprovados em um componente curricular.

O segundo curso de graduação é Ciência da Computação, que possui duas entradas anuais oferecidas em turnos diferentes. A primeira entrada ocorre no primeiro semestre de cada ano, no turno vespertino. A segunda entrada é oferecida no segundo semestre de cada ano, no noturno. Ambas as ofertas possuem a mesma carga horária, componentes curriculares, ementários e referências, diferindo apenas no tempo de integralização curricular. A matriz curricular contém os seguintes componentes de Cálculo: Cálculo I, Cálculo II e Cálculo Numérico.

As próximas duas tabelas contêm dados referentes aos componentes de Cálculo I e de Cálculo II no curso de Ciência da Computação. As notações T1 e T2 referem-se às turmas com ingresso no primeiro e no segundo semestre, respectivamente, enquanto que TE, à turma especial.

Tabela 2: Reprovações em Cálculo I – curso de Ciência da Computação

Ano/Semestre Turma	Matrículas	Reprovações por nota	Não aprovações	Reprovações por nota (%)	Não aprovações (%)
2010/2 – T1	31	15	21	48,4	67,7
2011/1 – TE	30	15	18	50	60
2011/2 – T1	26	9	13	34,6	50
2011/2 – T2	23	5	11	21,7	47,8
2012/2 – T1	35	3	28	8,6	80
2012/2 – T2	39	8	25	20,5	64,1
2013/2 – T1	34	10	19	29,4	55,9
2013/2 – T2	37	5	20	13,5	54,1
2014/1 – T1	47	16	25	34	53,2
2014/2 – T1	14	2	9	14,3	64,3
2014/2 – T2	28	11	21	39,3	75
2015/ 2 – T1	38	17	32	44,7	84,2
2015/2 – T2	46	36	36	78,3	78,3
2016/2 – T1	37	20	26	54,1	70,3
2016/2 – T2	47	10	20	21,3	42,6
2017/2 – T1	42	26	30	61,9	71,4
2017/2 – T2	50	12	16	24	32

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

De acordo com os dados da tabela, a média de reprovação por nota, em Cálculo I, no curso de Ciência da Computação, entre 2010 e 2017 ficou em torno de 35,2% e a média de não aprovação em 61,8%. A diferença entre os percentuais revela que um número significativo de alunos não alcançou o mínimo de 75% de presença ou desistiu do Cálculo I. De fato, no segundo semestre de 2012, dos 35 matriculados na Turma T1, apenas 3 reprovaram por nota enquanto que outros 25 reprovaram por falta ou desistiram de frequentar as aulas. O mesmo fenômeno é registrado na turma T2, segundo semestre de 2013, em que dos 37 matriculados, 5 reprovaram por nota e outros 15 reprovaram por falta ou desistiram.

Outro dado intrigante da Tabela 2 refere-se a turma T1 do segundo semestre de 2015. Aqui, dos 38 alunos matriculados em Cálculo I, 32 não foram aprovados, chegando ao maior índice do período, 84,2% de não aprovação.

Tabela 3: Reprovações em Cálculo II – curso de Ciência da Computação

Ano/Semestre Turma	**Matrículas**	**Reprovações por nota**	**Não aprovações**	**Reprovações por nota (%)**	**Não aprovações (%)**
2011/1 – T1	8	1	5	12,5	62,5
2012/1 – T1	13	5	5	38,5	38,5
2011/1 – T2	13	2	4	15,4	30,8
2013/1 – T1	4	2	2	50	50
2013/1 – T2	18	4	7	22,2	38,9
2014/1 – T1	15	7	12	46,7	80
2014/1 – T2	19	3	6	15,8	31,6
2015/ 1 – T1	20	2	4	10	20
2015/1 – T2	31	7	10	22,6	32,3
2016/1 – T1	22	8	10	36,4	45,5
2016/1 – T2	14	10	10	71,4	71,4
2017/1 – T1	15	7	8	46,7	53,3
2017/1 – T2	36	2	7	5,6	19,4

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Segundo esta tabela, a média de reprovação por nota, em Cálculo II, no curso de Ciência da Computação, entre 2011 e 2017, é de 30,3%, enquanto que a média de não reprovação se aproxima de 44,2%.

Tomando os dados da Tabela 2 e da Tabela 3 como referência, ao se comparar as médias de Cálculo I e de Cálculo II, percebe-se que as reprovações por nota ficam próximas, na faixa dos 30%. Já as médias de não aprovação permeiam 60% em Cálculo I e 40% em Cálculo II, indicando que as reprovações por falta ou as desistências são mais acentuadas no primeiro componente de Cálculo do que no segundo componente.

O próximo curso contemplado é a Engenharia Ambiental, que possui entrada anual e em sua matriz curricular há os componentes Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III, Cálculo IV e Cálculo Numérico.

A Tabela 4 expõe os dados de reprovação por nota e de não aprovação nos componentes de Cálculo I e II, na Engenharia Ambiental, entre 2010 e 2017.

Tabela 4: Reprovações em Cálculo I – curso de Engenharia Ambiental

Ano/Semestre	Matrículas	Reprovações por nota	Não aprovações	Reprovações por nota (%)	Não aprovações (%)
2010/2	29	8	15	27,6	51,7
2011/2	38	23	25	60,5	65,8
2012/2	19	3	6	15,8	31,6
2013/2	46	27	30	58,7	65,2
2014/2	41	9	24	22	58,5
2015/1	34	9	21	26,5	61,8
2015/2	27	12	12	44,4	44,4
2016/2	32	9	11	28,1	34,3
2017/2	24	8	14	33,3	58,3

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Observando os dados da tabela acima, em média, cerca de 35,2% dos alunos de Engenharia Ambiental reprovaram por nota e 52,4% reprovaram por nota ou por falta, ou desistiram de cursar o componente de Cálculo, nos anos de 2010 a 2017.

Tabela 5: Reprovações em Cálculo II – curso de Engenharia Ambiental

Ano/Semestre	Matrículas	Reprovações por nota	Não aprovações	Reprovações por nota (%)	Não aprovações (%)
2011/1	19	1	5	5,3	26,3
2012/1	22	2	2	9,1	9,1
2013/1	19	2	2	10,5	10,5
2014/1	18	9	9	50	50
2015/1	17	6	6	35,3	35,3
2016/1	28	17	20	60,7	71,4
2017/1	46	11	24	23,9	52,2

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Já no Cálculo II, a média de reprovação por nota permeou 27,8% enquanto que a média de não aprovação ficou em 36,4%. A exemplo do curso de Ciência da Computação, a Engenharia Ambiental também apresenta maior taxa de reprovação por nota e de não aprovação no componente de Cálculo I.

O último curso de graduação que contém componentes de Cálculo é a Licenciatura em Matemática. Com entrada anual, esse curso contém em sua matriz curricular os componentes Cálculo A, Cálculo B, Cálculo C, Cálculo Numérico e optativas em Cálculos. As ementas dos Cálculos A e B são bastante semelhantes aos dos Cálculos I e II, porém por se tratar de um curso de Licenciatura em Matemática, busca-se enfatizar demonstrações formais dos resultados matemáticos, em comparação com os outros cursos. Os dados relativos aos Cálculos A e B, da Licenciatura em Matemática, estão apresentados nas Tabelas 6 e 7, nesta ordem.

Tabela 6: Reprovações em Cálculo A – curso de Matemática

Ano/Semestre	Matrículas	Reprovações por nota	Não aprovações	Reprovações por nota (%)	Não aprovações (%)
2014/2	27	10	17	37	63
2015/2	35	16	26	45,7	74,3
2016/2	28	10	16	35,7	57,1
2017/2	40	22	22	55	55

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Observando os dados desta tabela, em Cálculo A, no curso de Licenciatura em Matemática, entre 2014 e 2017, a média de reprovação por nota se aproximou de 43,4% enquanto que a média de não aprovação ficou em 62,4%.

Tabela 7: Reprovações em Cálculo B – curso de Matemática

Ano/Semestre	Matrículas	Reprovações por nota	Não aprovações	Reprovações por nota (%)	Não aprovações (%)
2015/1	10	2	2	20	20
2016/1	13	3	4	23,1	30,8
2017/1	14	3	6	21,4	42,9

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Entre 2015 e 2017, em média, 21,5% dos licenciandos em Matemática reprovaram por nota e 31,2% não foram aprovados em Cálculo B.

Para melhor visualizar as médias de reprovações por nota e de não aprovação nos dois primeiros componentes de Cálculo, relativos aos quatro cursos da UFFS, campus Chapecó, são apresentadas as Tabelas 8 e 9.

Tabela 8: Reprovações por nota e não aprovações em Cálculo I / Cálculo A

Curso	**Componente de Cálculo**	**Reprovações por nota (%)**	**Não aprovações (%)**
Agronomia	Cálculo I	26,4	36,3
Ciência da Computação	Cálculo I	35,2	61,8
Engenharia Ambiental	Cálculo I	35,2	52,4
Licenciatura em Matemática	Cálculo A	43,4	62,4

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

Tabela 9: Reprovações por nota e não aprovações em Cálculo II / Cálculo B

Curso	**Componente de Cálculo**	**Reprovações por nota (%)**	**Não aprovações (%)**
Ciência da Computação	Cálculo II	30,3	44,2
Engenharia Ambiental	Cálculo II	27,8	36,4
Licenciatura em Matemática	Cálculo B	21,5	31,2

Fonte: Autora com base nos dados da Diretoria de Registro Acadêmico da UFFS, campus Chapecó

De acordo com as Tabelas 8 e 9, com exceção do curso de Agronomia que contém apenas Cálculo I, nos cursos de Ciência da Computação, Engenharia Ambiental e Licenciatura em Matemática, os maiores índices de reprovação por nota ou de não aprovação estão ligados ao primeiro componente de Cálculo. O curso de Licenciatura em Matemática é o curso com maior média de reprovação por nota, com 43,4%, e de não aprovação, com 62,4%, no componente Cálculo A. Em contrapartida, esse curso contém as menores médias, relativas ao componente de Cálculo B.

De modo geral, os índices de não aprovação evidenciam a existência da problemática de ensinar e de aprender Cálculo. Contudo, não é pretensão deste trabalho resolver tal problema, visto que são múltiplas as suas causas e as quais podem ter relações com a falta de conhecimentos básicos de matemática, com a dificuldade de conciliar estudo e trabalho, com hábitos inadequados de estudo, com as metodologias de ensino, etc.

Cada autor ao desenvolver seu trabalho de pesquisa ou cada professor ao ministrar sua aula, pode identificar inúmeros fatores que contribuem para a problemática do ensino e da aprendizagem. Ouvindo alunos que concluíram a disciplina de Cálculo e professores que ministraram este componente, Nascimento (2001) revela em sua pesquisa que, para os alunos, os fatores primordiais são a diferença de metodologias adotadas no ensino médio e na graduação, bem como dificuldades próprias do Cálculo, enquanto que para os professores, predomina a falta de conhecimentos de matemática básica.

São diversas as causas e também diversas as tentativas para solucionar o problema, conforme expõem Cabral e Baldino (2006):

> [...] dar preponderância à questão metodológica na consolidação da base conceitual dos alunos (NASCIMENTO, 2001), fazer uso de projetos temáticos (PEREIRA; CARVALHO,2003), estabelecer cursos de nivelamento e apoio para alunos ingressantes (FRANCHI, 2003; DZIEDZIC et al., 2001), fazer uso da resolução de problemas como metodologia de ensino (CONCEIÇÃO; GONÇALVES, 2003) e mudar a concepção epistemológica do professor sobre as disciplinas (LODER, 2001) (CABRAL E BALDINO, 2006, p. 4).

Na mesma direção de Franchi (2003) e de Dziedzic et al. (2001), os professores de Matemática da UFFS, campus Chapecó, participam de editais institucionais de monitorias de Cálculos e de disciplinas basilares, com intuito de oferecer outras oportunidades aos alunos para sanarem dúvidas relativas a conteúdos de Cálculo e de matemática básica.

No projeto de Monitoria de 2015 (UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL, 2015), o professor Pedro A. P. Borges, escreve que as monitorias são recursos pedagógicos e têm objetivo de monitorar e apoiar os processos de ensino e de aprendizagem das referidas disciplinas, visando uma aprendizagem consistente e a redução do nível de reprovação. Mais, a monitoria é um espaço que permite a troca de experiências de estudo entre estudantes, possibilita o ambiente de questionamento, o envolvimento e a identificação pela linguagem mais simplificada e, em muitos casos, a compreensão dos conceitos e desenvolvimento de habilidades, inviabilizados em aulas conduzidas pelo professor.

Nesse sentido, o professor conclui que a monitoria tem se mostrado uma alternativa parcialmente eficaz, mas indispensável para todos os alunos, principalmente para aqueles que têm rendimento médio e disponibilidade de tempo para procurar a monitoria visando superar suas dificuldades.

As diferentes tentativas para minimizar a repetência e a desistência de alunos, citadas anteriormente, são igualmente válidas à medida que fornecem elementos significativos que contribuem para a compreensão da problemática em torno do complexo processo de ensinar e de aprender Cálculo.

2.3 CÁLCULO INTEGRAL E TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Muitos trabalhos, sob diferentes perspectivas, têm contribuído para o ensino e para a aprendizagem de Cálculo. Há aqueles que investigam as potencialidades e os limites das Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC's para o ensino de conceitos de Cálculo (VILLARREAL, 1999; OLÍMPIO JUNIOR, 2006; BARBOSA, 2009); os que discutem as dificuldades inerentes ao ensino deste componente curricular (REZENDE, 2003; DO NASCIMENTO, 2003; BARBOSA, 2004); os que utilizam mapas conceituais como sinalizador de aprendizagem (FERRÃO, 2013; CARGNIN, 2013); os que tratam mais especificamente sobre derivadas (MEYER, 2003; ANDRÉ, 2008; JUNQUEIRA, 2014) e integrais (OLIVEIRA, 2004; SUCUCUGLIA, 2006); os que, sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, estudavam derivadas (GODOY,2004, PASA, 2017), integrais (DA SILVA, 2004; HSIA, 2006; CAMPOS, 2007; PICONE, 2007; ANDRADE FILHO, 2011; CARGNIN, 2013) e conceitos que são fundamentais para o Cálculo, a exemplo do esboço de curvas de funções (SILVA, 2008; LUIZ, 2010; MENONCINI e MORETTI, 2017).

Dentre os trabalhos citados, alguns apresentam certa proximidade com essa pesquisa, que trata do ensino e da aprendizagem da integral no cálculo de área, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Por esta razão, as principais ideias dos trabalhos desenvolvidos por Da Silva (2004), Hsia (2006), Campos (2007), Picone (2007), Andrade Filho (2011) e Cargnin (2013) são apresentadas.

Da Silva (2004) estuda a abordagem do conceito de integral em dois livros textos de Cálculo, frequentemente utilizados em universidades e destinados a públicos diferenciados. Tais livros são de autoria de Guidorizzi e de Stewart. O autor apresenta o livro do Guidorizzi afirmando que foi preparado para atender aos cursos de Cálculo da Escola Politécnica da USP, do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Instituto de Engenharia do IEEP, enquanto que o livro do Stewart foi elaborado para a sociedade americana.

Considerando o livro um significativo recurso pedagógico, muitas vezes o principal material didático usado por professores e alunos, Da Silva (2004) investiga como tais livros tratam do conceito de integral. Ele mostra os registros, os tratamentos e as conversões contempladas pelos autores, concluindo que as conversões e as visualizações gráficas contidas nos livros textos, quando exploradas, podem promover maior entendimento do conceito de integral, por parte do aluno.

Na mesma direção de Da Silva (2004) estão Hsia (2006) e Campos (2007), que também se voltaram para livros didáticos, apesar de explorarem aspectos diferentes do Cálculo Integral.

Hsia (2006) investiga a maneira que alunos, do segundo e também do quinto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática, usam o livro didático, quando estudam o conteúdo de integral. Os alunos que pertenciam ao segundo semestre ainda não haviam estudado integrais e o livro de Cálculo analisado era de autoria de James Stewart.

Por meio de conversões, a autora analisa as produções escritas dos alunos, apontando se elas apresentam-se encadeadas. Com base nos resultados, conclui que não foi possível apontar diferenças nas produções dos alunos, mesmo eles estando em semestres distintos. Também, descreve as estratégias dos alunos ao interagirem com o livro. Cita que inicialmente recorrem ao índice do livro para localizar o conteúdo de integral, em seguida elaboram um esquema embasado nos tópicos que consideram essenciais e por último, resolvem os exercícios propostos tomando de referência os exemplos e os exercícios já resolvidos, utilizando vários registros de representação.

Campos (2007) restringe-se ao Teorema Fundamental do Cálculo. Ele aponta os enfoques de autores de livros textos em relação ao ensino deste teorema e analisa se a coordenação de registros de representação semiótica é explorada. A conclusão sinaliza que os enfoques são diversificados, que o registro algébrico é o mais utilizado e que a coordenação entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural é realizada com maior ou menor intensidade, variando de autor para autor.

Trabalhando com professores, Picone (2007) investiga os registros de representação mobilizados por estes profissionais quando abordam o Teorema Fundamental do Cálculo. A autora busca compreender a importância dada pelos professores à coordenação de registros e a maneira com que exploram a visualização a partir da representação gráfica.

O trabalho, que usa questionários para a coleta de dados, mostra a importância e o papel das variáveis visuais significativas para a realização da conversão da representação no registro gráfico para o registro algébrico e em sentido inverso, bem como para as argumentações em língua natural. Segundo o autor, os professores envolvidos afirmam que os principais registros empregados por eles são o algébrico, o gráfico e o da língua natural. Também, reconhecem que a coordenação dos registros é fundamental para o ensino de Cálculo.

O estudo de Andrade Filho (2011) trata de integrais duplas. O autor apresenta uma sequência didática que visa auxiliar os alunos na compreensão da referida integral, por meio da mobilização de diferentes sistemas semióticos. O registro gráfico é explorado para obtenção dos limites de integração, tanto no cálculo de áreas quanto no cálculo do volume, via integral dupla. Os resultados sinalizam que os registros de representação são fundamentais para permitir o acesso ao objeto de estudo no processo de transposição didática dos objetos matemáticos.

Já Cargnin (2013) trabalha com alunos e busca identificar as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da Teoria das Situações Didáticas para conceituar integral definida. A autora usa mapas conceituais que servem de instrumentos didáticos para acompanhar o desenvolvimento dos alunos no que tange ao referido conceito. No trabalho se discute o fenômeno de congruência semântica entre representações dos conceitos de somatório, de convergência e de área de região delimitada por curvas, considerados pela autora, pré-requisitos para a conceitualização. Por fim, conclui que as atividades planejadas, baseadas na exploração de diferentes registros de representação semiótica, permitem aos alunos atribuir significação ao conteúdo ensinado.

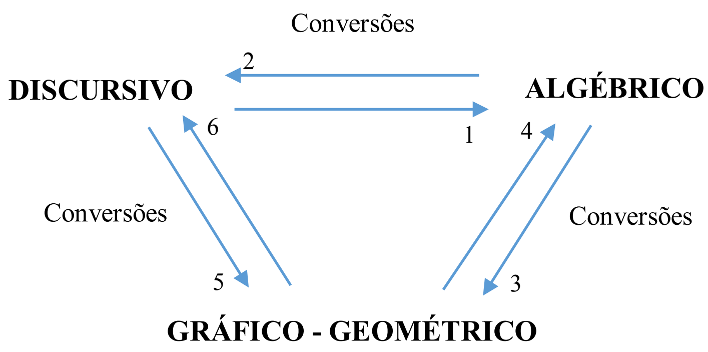
Dos seis trabalhos apresentados, apenas Cargnin (2013) faz referência ao cálculo de área sob uma curva para mostrar os tratamentos e as conversões possíveis de serem realizadas. Contudo, a autora não adentra profundamente nos problemas de área, haja vista que sua intenção é discutir o fenômeno de congruência semântica entre as diferentes representações do conceito de área. Assim, tais trabalhos diferenciam-se desta pesquisa que visa identificar e analisar as operações semióticas empregadas pelos alunos, no estudo da integral no cálculo de área.

2.4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ÁREA EM LIVROS TEXTOS DE CÁLCULO

As aplicações da integral definida, que tratam do cálculo de área de regiões limitadas por curvas de funções, requer a mobilização dos registros algébrico, gráfico-geométrico e da língua natural. O trânsito entre os registros ocorre por meio de conversões, as quais devem ocorrer em duplo sentido (Figura 19) para que haja coordenação dos registros e consequentemente, compreensão integral de um conteúdo, conforme hipótese fundamental de Duval (2004).

Para realizar as conversões é preciso reconhecer as unidades básicas significativas nos registros de partida e de chegada e estabelecer correspondências entre elas de modo que modificações em uma unidade gerem modificações em sua unidade correspondente. As unidades básicas significativas recebem nomes diversificados, de acordo com o registro. No registro discursivo, são nominadas elementos formais, no registro gráfico-geométrico, unidades visuais e no registro algébrico, unidades algébricas.

Figura 19: Conversões requeridas em aplicações da integral definida



Fonte: Autora

Nessa figura, as setas azuis indicam o sentido da conversão. Seguindo as ideias de Duval (2004) é possível afirmar:

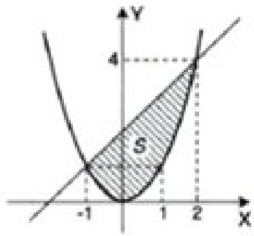
- Para a conversão no sentido 1, os elementos formais são identificados e associados às unidades algébricas. O sentido 2 implica na descrição discursiva das representações produzidas no registro algébrico;
- A conversão 3 corresponde à associação das unidades significativas algébricas às unidades visuais. O sentido 4 parte da representação gráfico-geométrica e associa as unidades visuais às unidades algébricas;
- O sentido 5 requer o reconhecimento dos elementos formais aos quais devem ser associados às unidades visuais gráfico-geométrica. Por fim, o sentido 6 consiste em reconhecer e descrever os elementos visuais pertinentes.

Destas seis conversões possíveis, nem todas são tratadas no ensino, pois em alguns sentidos são bastante complexas, especialmente quando não há congruência semântica entre as representações. A conversão mais frequente é aquela que parte do discursivo para a escrita algébrica, como se observa na resolução do Exemplo 1 apresentado por Flemming e Gonçalves (2007).

Exemplo 1: *Encontre a área limitada por* $y = x^2$ *e* $y = x + 2$.

Para resolver esse exemplo, as autoras inicialmente apresentam a Figura 20, resultante do esboço das curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Figura 20: Região plana limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p. 275).

Em seguida destacam a região *hachurada* S e com base nela constatam que os pontos de intersecção das curvas têm abscissas -1 e 2 e portanto, que o intervalo de integração é [-1,2]. Afirmam que neste intervalo, ambas as funções são positivas e que $x + 2 \geq x^2$. Por fim, encontram o valor da área S por meio do Teorema Fundamental do Cálculo:

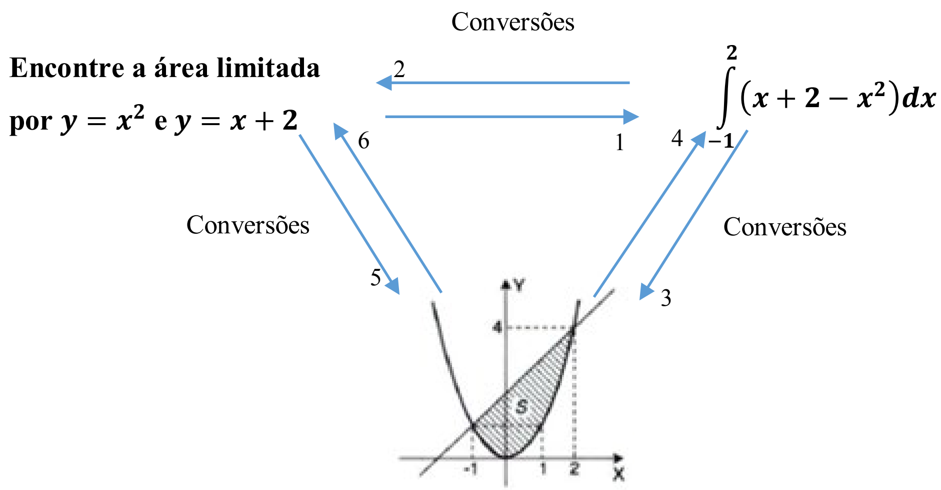
$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} u.a$$

O procedimento de resolução aplicado neste exemplo parte do enunciado, que está representado no registro discursivo e chega a uma integral definida que está no registro algébrico, ou seja, pressupõe a conversão em sentido 1 (Figura 19). Esta conversão não acontece diretamente, pois para calcular a integral, via Teorema Fundamental do Cálculo, é preciso conhecer o intervalo de integração e a função integrando, os quais dependem do esboço de curvas e da identificação da região de integração.

A região de integração, representada no registro gráfico-geométrico, é construída com base no discurso o que implica na realização da conversão em sentido 5. Determinada a região de integração e reconhecidos o intervalo de integração e a função integrando, a passagem destas informações para o registro algébrico origina uma outra conversão, desta vez, no sentido 4.

Portanto, o cálculo da área S está atrelado às conversões nos sentidos 1, 4 e 5, sendo que o registro gráfico-geométrico serve de registro intermediário entre o discurso e a integral. Além dessas conversões, outros sentidos podem ser explorados no ensino da integral no cálculo de área, como revela a Figura 21.

Figura 21: Os sentidos das conversões



Fonte: Autora

Quanto às seis conversões apresentadas nesta figura, tem-se que:

- No sentido 1, a palavra área é o elemento formal, ou seja, a palavra-chave do registro discursivo que deve ser associada à unidade significativa algébrica, que neste caso é uma integral do tipo $\int_a^b h(x)dx$;
- O sentido 2 consiste na elaboração de um discurso que parte da interpretação do conceito de integral definida, do intervalo de integração [-1,2] e da função integrando $h(x) = x + 2 - x^2$;
- No sentido 3 são reconhecidos os dados pertencentes à integral e associados às unidades visuais da região de integração, ou seja, o intervalo de integração é associado à intersecção das curvas e a função $h(x) = x + 2 - x^2$ à região S limitada superiormente pela curva $y = x + 2$ e inferiormente pela curva $y = x^2$;
- A conversão em sentido 4 parte da visualização da região e busca fornecer os dados necessários à resolução da integral;
- No sentido 5 são esboçadas as curvas das funções $y = x + 2$ e $y = x^2$ e associado o elemento formal do discurso à região S;
- O sentido 6 explora discursivamente a representação da região S no registro gráfico-geométrico.

Problemas que partem do registro discursivo, como o Exemplo 1, requerem inicialmente a identificação e a compreensão dos elementos formais, sem os quais o aluno não consegue iniciar o processo do cálculo de área. Da mesma forma, problemas que partem de outros registros também exigem a identificação das suas unidades significativas. Identificar estas unidades em cada registro e ainda estabelecer correspondências entre elas pode ser fonte de dificuldades para os alunos e por esta razão as conversões precisam ser exploradas no ensino da integral.

É fundamental proporcionar atividades que permitam realizar as conversões em duplo sentido. Cada sentido revela uma faceta do objeto matemático ‘área’ e são os múltiplos sentidos que possibilitam ao aluno reconhecer a complementaridade das facetas, distinguindo o objeto de suas representações, conduzindo-o à coordenação dos registros e à compreensão conceitual, segundo Duval (2004).

A resolução do Exemplo 1 permitiu a constatação de três pontos importantes que justificam e reforçam a proposta deste trabalho:

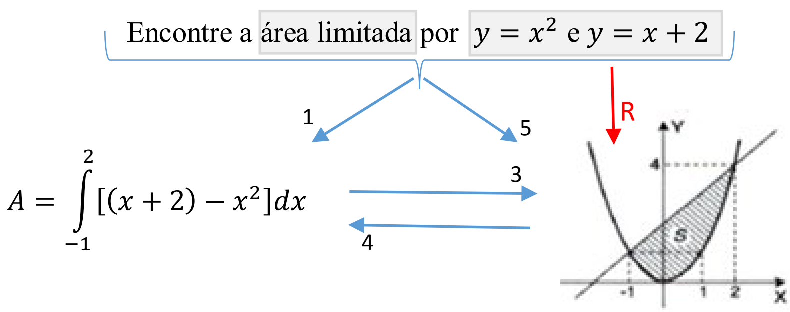
1º ponto: as conversões são executadas em apenas alguns sentidos;

2º ponto: o registro gráfico-geométrico serve exclusivamente de intermediário para a conversão entre os registros discursivo e algébrico;

3º ponto: a função integrando, resultado da operação entre funções algébricas, não é explorada em nenhum registro.

No 1º ponto se afirma que a conversão não é realizada em todos os sentidos. De fato, basta observar o procedimento de resolução, em que aparecem apenas as conversões do registro discursivo para o algébrico, em sentido 1, do registro gráfico-geométrico para o algébrico, em sentido 4, e do registro discursivo para o gráfico-geométrico, no sentido 5, como ilustra a figura abaixo:

Figura 22: Conversões no ensino da integral no cálculo de área



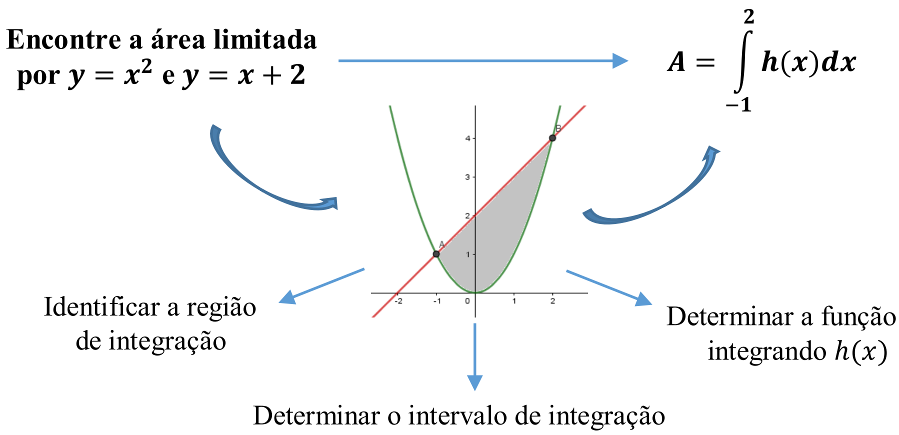
Fonte: Autora

Nesta figura, é preciso atenção para não concluir a existência da conversão do registro algébrico para o gráfico-geométrico, aparentemente indicada pela seta vermelha R. Observa-se que as expressões algébricas $y = x^2$ e $y = x + 2$ integram o registro discursivo e estão contempladas na conversão em sentido 5, que parte do discurso para a representação da região

S no registro gráfico-geométrico. Portanto, na resolução do livro, a conversão em sentido 3, que representa a passagem da escrita algébrica para o gráfico-geométrico, não é realizada.

O 2º ponto destaca que o registro gráfico-geométrico não é explorado, servindo unicamente de intermediário. De fato, a conversão do discurso para a expressão algébrica da integral, em sentido 1, não é uma passagem direta. Ela necessita do registro gráfico-geométrico, para identificação da região, obtenção do intervalo de integração e da função integrando, necessários ao cálculo da integral, de acordo com a Figura 23.

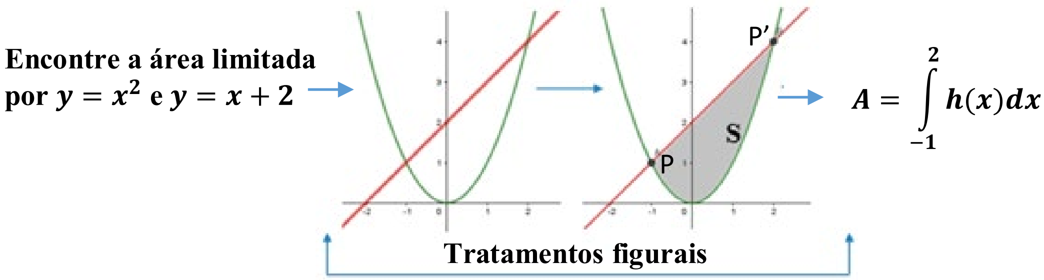
Figura 23: O registro gráfico-geométrico como registro intermediário



Fonte: Autora

Nessa figura, o esboço das curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ permite identificar a região, cuja área está sendo procurada. A partir da visualização desta região são determinados o intervalo de integração, por meio da resolução da equação $x^2 - (x + 2) = 0$, e a função integrando $h(x) = x^2 - (x + 2)$. Assim, ao mesmo tempo que são efetuados tratamentos no registro algébrico para encontrar o intervalo de integração e a função integrando, são também efetuados tratamentos figurais e algébricos que revelam os pontos de interseção das curvas e a região S.

Figura 24: Os tratamentos figurais no registro gráfico-geométrico



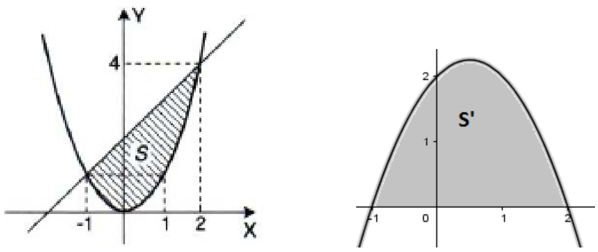
Fonte: Autora

Na Figura 24, a localização dos pontos P e P’ indicam a realização de tratamentos figurais. Por meio destes tratamentos são reconhecidos os limites de integração, necessários ao cálculo da área S.

Quanto ao 3º ponto, sobre a não exploração da função integrando, as autoras optam por desenvolver apenas a integral $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, com $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$, cujo integrando é $f(x) - g(x) = (x + 2) - (x^2)$. Esta operação entre $f(x)$ e $g(x)$ pode ser interpretada como uma única função $h(x) = x + 2 - x^2$, cujas propriedades são diferentes das propriedades de suas funções componentes $f(x)$ e $g(x)$. A função $h(x)$ é utilizada para calcular a área S, mas não é explorada em nenhum registro de representação semiótica. Um estudo mais detalhado sobre a função integrando $h(x)$ é apresentado na próxima seção, que trata da equivalência de áreas.

Ao representar a função $h(x) = x + 2 - x^2$ no registro gráfico é obtida uma nova região S’ que apresenta formato distinto de S:

Figura 25: Regiões equivalentes S e S’



Observando as regiões S e S’ surge uma indagação:
Há relações entre as regiões?

Fonte: Autora

A área da região S é a diferença entre a área abaixo da curva de $f(x) = x + 2$ e a área abaixo de $g(x) = x^2$, sendo representada pela integral definida:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \qquad \text{(I)}$$

Sabendo que a integral $\int_a^b f(x)dx$ representa a área abaixo da curva $f(x)$ e $\int_a^b g(x)dx$ a área abaixo de $g(x)$, o aluno precisa:

- compreender que a expressão $S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ fornece a diferença entre estas áreas, isto é, fornece a área limitada entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$.

- reconhecer que a região S está limitada superiormente pela curva $f(x)$ e inferiormente pela curva $g(x)$ e por esta razão a ordem das integrais na expressão (I) é essencial para obter resultado positivo, o qual representa a área S.

Ainda observando a Figura 25, constata-se que a área sob a curva $h(x) = f(x) - g(x) = x + 2 - x^2$ e acima do eixo x é determinada via integral:

$$S' = \int_a^b h(x)dx \;= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Ao calcular a integral S', o aluno deve interpretar o significado da operação de subtração entre $f(x)$ e $g(x)$. Neste caso, a integral fornece a área abaixo da curva $h(x) = x + 2 - x^2$, diferentemente de $S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ que trata da área limitada entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$. Pela propriedade da integral $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$, conclui-se que as duas expressões produzem o mesmo valor para a área. Logo, as regiões S e S' apresentam uma relação de equivalência entre si.

O Exemplo 1, extraído do livro das autoras Flemming e Gonçalves (2007) e analisado nesta seção, chamou a atenção para livros textos de Cálculo. Neste sentido, buscou-se observar o enfoque dos autores ao abordarem a integral no cálculo de área. Mais especificamente, perceber de que forma são apresentados os problemas de área e quais curvas e regiões são exploradas na resolução desses problemas.

Para a observação foram selecionados três livros textos que fazem parte da bibliografia básica dos cursos de graduação da UFFS que contêm em suas matrizes curriculares componentes de Cálculo:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2007.
- LEITHOLD, L**. O cálculo com geometria analítica**.3ed. São Paulo: Harbra, 1994. v1.
- STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v1.

Os três livros apresentam semelhanças entre si ao tratar da integral no cálculo de área, porém diferem na apresentação:

a) A grande maioria dos exemplos parte do registro discursivo;
b) A resolução dos exemplos segue um procedimento algoritmizado que consiste: no esboço das curvas e na identificação visual da região formada; na determinação dos

pontos de interseção para encontrar o intervalo de integração [a,b]; na afirmação de que as curvas assumem valores não negativos em [a,b]; na aplicação de uma fórmula que envolve integral definida para o cálculo da área da região;

c) Todos os exemplos tratam de regiões limitadas entre curvas, em que a área é calculada por meio da integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, cujo integrando é a diferença entre representações de funções no registro algébrico;
d) Os exercícios, em sua maioria, são reproduções dos exemplos;
e) São raros os exemplos e exercícios que partem do registro gráfico-geométrico;
f) Nenhum exemplo ou exercício parte do registro algébrico;
g) Nenhum exemplo ou exercício considera como registro de chegada, o discursivo;
h) O esboço de curvas é utilizado unicamente para encontrar a região, que por sua vez determina os dados necessários à integral;
i) O esboço da curva da função integrando $h(x) = f(x) - g(x)$ e a região abaixo desta curva não são explorados, nem algébrica, nem graficamente.

Esses pontos em comum sinalizam que o discurso é o registro de partida que predomina e que o registro gráfico-geométrico serve de intermediário para fornecer os dados necessários à integral para determinar a área procurada.

É unânime entre os autores o uso da integral $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$ para o cálculo da área, cuja validade é comprovada pela propriedade $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. No entanto, não há nenhum tratamento da função integrando $h(x) = f(x) - g(x)$, visto que a região abaixo de $h(x)$ se difere da região limitada entre as curvas de $f(x)$ e de $g(x)$.

O tratamento dado pelos autores ao cálculo de área sinaliza um ensino baseado na aplicação de fórmulas sem exploração da função integrando $h(x)$ e da região abaixo desta curva.

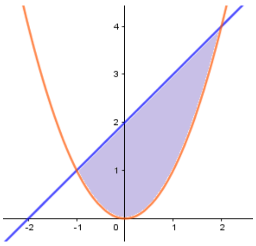
2. 5 A EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Conforme observado em livros textos de Cálculo, a função $h(x) = f(x\ ) - g(x)$ serve de integrando no cálculo de área, mas sua curva não é esboçada, tão pouco é identificada a região abaixo do seu gráfico. A função $h(x)$ pode ser reescrita a partir de funções distintas de $f(x)$ e de $g(x)$. A combinação dessas outras funções, acaba por gerar regiões específicas com formatos variados, porém com áreas equivalentes.

Para exemplificar esta afirmação, voltando à função $h(x) = x + 2 - x^2$ tratada no Exemplo 1, é possível fazer inúmeras combinações de funções, que geram áreas equivalentes à região abaixo desta curva e também à região limitada entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$. Logo, $h(x)$ pode ser escrita de maneiras distintas:

a) a diferença entre as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$. Neste caso, $h(x) = x + 2 - x^2$ e a região sob a curva é da forma:

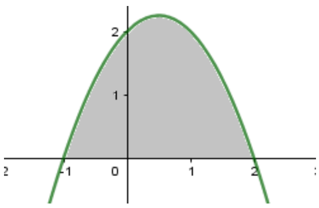
Figura 26: Região limitada pelas curvas $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$



Fonte: Autora

a) a diferença entre $f(x) = x + 2 - x^2$ e $g(x) = 0$, ou seja, $h(x) = x + 2 - x^2$, cuja região sob $h(x)$ é:

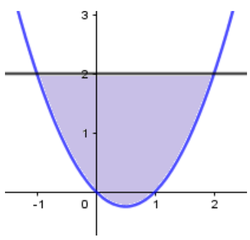
Figura 27: Região limitada pelas curvas $f(x) = x + 2 - x^2$ e $g(x) = 0$



Fonte: Autora

b) a diferença entre as funções $f(x) = 2$ e $g(x) = -x + x^2$, em que $h(x) = 2 + x - x^2$ e a região está limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola:

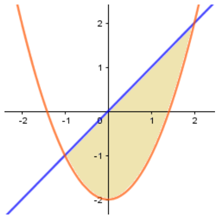
Figura 28: Região limitada pelas curvas $f(x) = 2$ e $g(x) = -x + x^2$



Fonte: Autora

c) a diferença entre $f(x) = x$ e $g(x) = -2 + x^2$. Aqui, a função é dada por $h(x) = x + 2 - x^2$ e a região de integração pode ser vista na Figura 29.

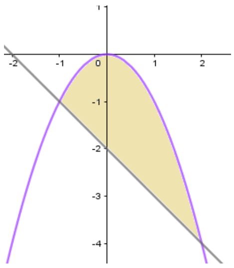
Figura 29: Região limitada pelas curvas $f(x) = x$ e $g(x) = -2 + x^2$



Fonte: Autora

d) a diferença entre $f(x) = -x^2$ e $g(x) = -x - 2$, cuja expressão algébrica é $h(x) = -x^2 + x + 2$ e cuja região está posicionada abaixo do eixo *x,* conforme figura:

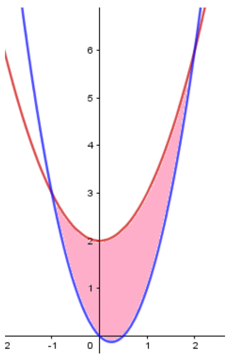
Figura 30: Região limitada pelas curvas $f(x) = -x^2$ e $g(x) = -x - 2$



Fonte: Autora

e) a diferença entre as funções $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 2x^2 - x$, ou seja, $h(x) = x^2 + 2 - 2x^2 + x$ e a região é limitada por $f(x)$ e $g(x)$:

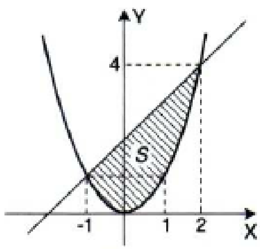
Figura 31: Região limitada pelas curvas $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 2x^2 - x$



Fonte: Autora

O processo de encontrar áreas equivalentes permite o desenvolvimento de tratamentos algébricos e figurais. Por meio deles são produzidas regiões que apresentam-se sob diversos formatos, porém com a mesma área. Sendo assim, qualquer uma das regiões apresentadas anteriormente poderia ser a região S, procurada no Exemplo 1, cujo enunciado e região são reapresentados abaixo:

Exemplo 1: *Encontre a área limitada por* $y = x^2$ *e* $y = x + 2$.



Em livros textos, no estudo da integral no cálculo de área, não são mencionadas, nem exploradas as regiões equivalentes, somente a região S associada à expressão $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

A equivalência de áreas é um tema pouco abordado no ensino atualmente, mas já foi muito contemplado na antiguidade.

No trabalho de Euclides, intitulado *Os Elementos*[8], a área é considerada um atributo da figura e os problemas envolvendo área são tratados a partir da busca por figuras iguais[9], sem preocupação com um valor numérico para a área.

Datado de aproximadamente 300 a.C, *Os Elementos* é a obra que marca o auge da organização da geometria grega, até esta época. Nela, os únicos instrumentos usados na resolução de problemas relativos à construção de figuras eram a régua não graduada e o compasso.

> A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. Na realidade, nos *Elementos*, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato (ROQUE, 2012, p.160).

---

[8] A obra completa de Os Elementos está disponível em www.dominiopublico.gov.br.

[9] Para Euclides, afirmar que duas figuras são iguais pode significar que elas são congruentes ou que elas têm a mesma área, segundo De Carvalho (2006).

Segundo Roque (2012), o uso de régua não graduada e de compasso mostra a preocupação dos gregos com uma geometria mais abstrata e rigorosa, segundo o contexto de rigor vigente naquela época. Corroborando com a autora, De Carvalho (2006) destaca que a ideia de perfeição estava associada à reta e ao círculo, uma vez que os movimentos retilíneo uniforme e circular uniforme eram considerados pelos gregos movimentos 'naturais', livres de imperfeições e de irregularidades.

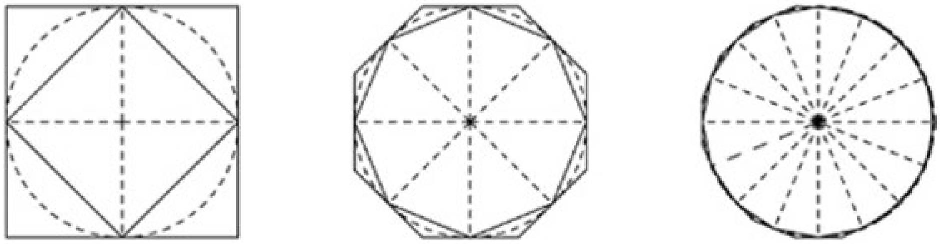
Em *Os Elementos*, a área de figuras é explorada considerando-a uma grandeza geométrica, sem a preocupação em associar valores numéricos às dimensões. As figuras são transformadas em outras para a comparação de suas áreas. Esta outra figura, usada pelos gregos como padrão, é o quadrado. Para calcular a área de uma figura qualquer é preciso encontrar um quadrado que tenha igual área, utilizando somente a régua não graduada e o compasso. Tal procedimento foi chamado quadratura. De acordo com essa noção s é possível inferir o conceito de equivalência. Neste, duas figuras são ditas equivalentes quando possuem a mesma grandeza, isto é, a mesma área, cuja comprovação se dava pela decomposição e comparação de superfícies planas.

Vale ressaltar que os gregos deram conta da quadratura para figuras poligonais, ou seja, de mostrar que a área de uma figura poligonal era igual a área de um determinado quadrado.

Resolvida a quadratura de um polígono, era hora de se ater ao problema da quadratura de figuras limitadas por curvas, como a quadratura do círculo e a da parábola. Buscando soluções para o problema da quadratura destas figuras, os gregos utilizam o método da Exaustão, creditado a Eudoxo de Cnidus (408 a 355 a.C). Este método consiste em 'exaurir' uma figura por meio de outras figuras. A ideia basilar é inscrever na figura um polígono regular e aumentando o número de lados do polígono, fazer crescer a área do polígono até chegar muito próxima da área da figura inicial.

Arquimedes (287 a.C – 212 a.C) refina o método da Exaustão criado por Eudoxo, e no caso do círculo, propõe que ele seja simultaneamente inscrito e circunscrito por um polígono regular. Partindo de sucessivas duplicações do número de lados, até que os seus tamanhos se tornem cada vez menores, chega a figuras cujas áreas tendem a uma mesma quantidade, de acordo com a ilustração:

Figura 32: Método da Exaustão

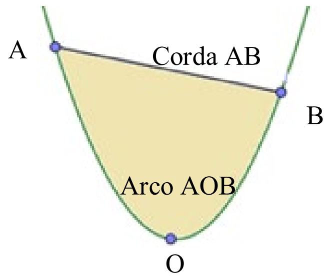


Fonte: Roque (2012, p.206)

A Figura 33 apresenta a ideia do método de Arquimedes para a quadratura do círculo, em que essa figura foi inscrita e circunscrita por quadrados. Partindo de sucessivas duplicações do número de lados dos quadrados, as áreas das duas figuras se tornam muito próximas, de modo a determinar na área do círculo.

Arquimedes também estuda a quadratura da parábola, que consiste em calcular a área da região limitada por um arco de parábola e por uma corda, conforme abaixo:

Figura 33: Quadratura da parábola



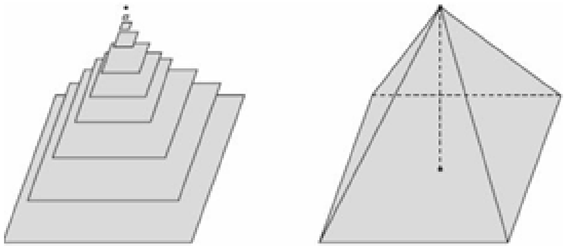
Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho (2012, p. 272)

Para encontrar a área da figura curvilínea limitada pelo arco AOB e pela corda AB, Arquimedes emprega o método da Exaustão, porém em vez de usar retângulos para as aproximações das áreas, utiliza triângulos. Ele inscreve um grande triângulo na figura e em seguida inscreve outros menores, até que a soma de suas áreas se aproximem da área procurada (ROQUE; CARVALHO, 2012).

No século XVII, os problemas envolvendo área ganham novas interpretações a partir das ideias de decomposição de figuras e também do método dos indivisíveis. Estudiosos desse século, como Cavalieri, Galileu, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz e Cauchy aprimoram os conhecimentos construídos ao longo dos tempos e criam procedimentos que permitem chegar ao Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Boyer (2010), Boaventura Cavalieri (1598-1647) publica em 1635 o livro Geometria Indivisibilibus Continuorum (Geometria dos Indivisíveis Contínuos) em que apresenta uma maneira de pensar geometricamente o volume, com base na soma de um número indefinido de áreas paralelas, que são volumes indivisíveis.

Figura 34: O volume como soma de um número indefinido de áreas paralelas



Fonte: Roque, (2012, p. 347)

Essa figura mostra a ideia de Cavalieri sobre os indivisíveis. Para ele, o volume de uma pirâmide é obtido pela soma de infinitas áreas de quadrados sobrepostos, que formam o referido sólido. Ademais, para o cálculo de áreas de figuras planas, propõe a soma de uma infinidade de segmentos de reta paralelas ou “indivisíveis”.

Os estudos de Cavalieri sobre os indivisíveis foram aprimorados e a área de uma figura passa a ser decomposta em uma quantia indefinida de retângulos em vez de segmentos de retas. Assim, a área da figura curvilínea era aproximada pela soma das áreas dos retângulos infinitamente finos que a decompunham.

2.6 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece relações entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral e é a ferramenta que possibilita calcular áreas de figuras limitadas por curvas com maior rapidez. Neste sentido, reconhecendo a importância do teorema e sua estreita ligação com o objeto deste estudo, são apresentados aspectos históricos relacionados a ele, embasados em Edwards Junior (1979), Eves (2004), Boyer (2010), Roque (2012) e Roque e Carvalho (2012).

Apesar de ter eclodido junto aos trabalhos desenvolvidos no século XVII, as origens do Teorema Fundamental do Cálculo datam da antiguidade, com as tentativas de resolver os problemas de quadratura e de tangentes. Assim, um longo caminho foi percorrido e inúmeras contribuições foram aprimoradas até chegar aos conhecimentos de hoje sobre este teorema e sobre o Cálculo Diferencial e Integral.

Galileu (1564 – 1643) foi um dos estudiosos que deixou contribuições significativas ao Cálculo. Em seu trabalho sobre o movimento de um ponto ao longo de uma linha reta, com velocidade variável, Galileu percebe que o movimento pode ser representado por um gráfico que relaciona as variáveis velocidade e tempo.

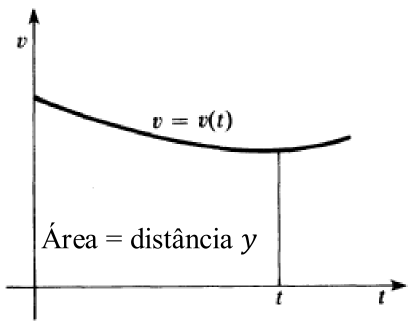
Usando a ideia de Galileu e a ideia dos indivisíveis de Cavalieri, Torricelli (1608- 1647) mostra que a distância percorrida pelo ponto é igual a área sob a curva velocidade-tempo, uma vez que a distância percorrida durante um elemento infinitesimal de tempo é igual ao produto do tempo pela velocidade instantânea (EDWARDS JUNIOR, 1979).

Para Torricelli, um ponto P que inicia seu movimento no tempo $t = 0$, com velocidade $v(t) = t^n$, num tempo t, percorre a distância y dada pela expressão algébrica:

$$y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Graficamente, a distância y percorrida por P, corresponde à área sob a curva $v(t)$:

Figura 35: Curva velocidade-tempo



Fonte: Adaptado de Edwards Junior. (1979, p. 138)

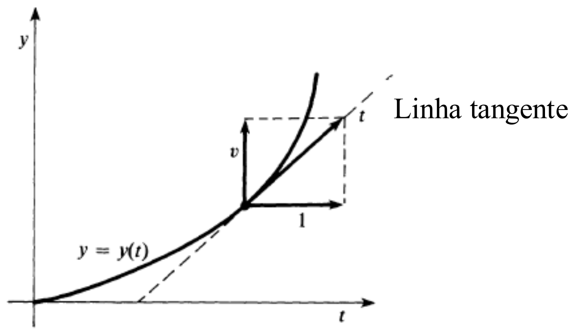
Por outro lado, o movimento do ponto P pode ser representado por um gráfico cujas variáveis são a distância percorrida e o tempo. Se o ponto se mover ao longo da curva $y = y(t)$, com velocidade horizontal 1 e velocidade vertical v (a velocidade do ponto cujo movimento é representado na Figura 36), o vetor velocidade do ponto será o resultante de um vetor horizontal de comprimento 1 e um vetor vertical de comprimento v (Figura 37). Logo, a velocidade v é a inclinação da linha tangente à curva na posição $y = y(t)$.

Assim, se a distância percorrida no tempo t é $y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, então a velocidade é dada por:

$$v(t) = t^n$$

e coincide com a inclinação da linha tangente à curva $y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, mostrada na Figura 37.

Figura 36: Inclinação da linha tangente



Fonte: Adaptado de Edwards Junior (1979, p. 138)

Apoiado nas descobertas de que:

a) a área sob a curva $y = x^n$ é dada por $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

b) a tangente à curva $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tem inclinação x^n,

Torricelli chega à noção intuitiva acerca da relação inversa entre as equações $y = x^n$ e $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, a qual indica que os problemas de tangente e de quadratura são inversos entre si. Esta é uma embrionária formulação do Teorema Fundamental do Cálculo, em que a taxa de variação da área sob uma curva é igual à sua ordenada (EDWARDS JUNIOR., 1979).

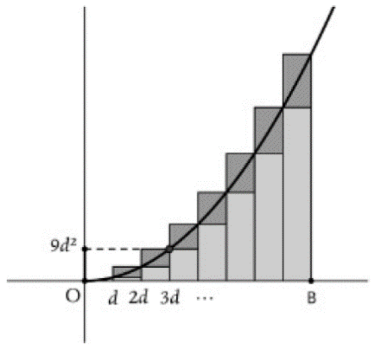
Segundo Boyer (2010), com a morte de Torricelli, seus trabalhos foram parcialmente transmitidos aos sucessores, chegando a Isaac Barrow (1630 -1677).

Barrow também observa a relação inversa entre os problemas de tangente e de quadratura, porém, a preferência por métodos geométricos ao invés de algébricos para demonstrar seus trabalhos, acaba tornando inoperante esta relação. Mais tarde, os procedimentos analíticos, em especial os desenvolvidos por Descartes (1596 -1650) e Fermat (1607-1665), permitem a efetivação da relação observada por Barrow.

Por meio de procedimentos analíticos e notações atuais, o exemplo a seguir, extraído de Roque (2012, p. 348), descreve a aproximação entre a área sob a parábola $y = x^2$ e as áreas dos retângulos, por Fermat e Pascal (1623 -1662).

Para calcular a área da parábola $y = x^2$ entre dois pontos O e B, constroem-se retângulos sobre as abscissas de pontos de distância d, 2d, 3d,..., nd. Há n retângulos cujas bases medem sempre d, e suas alturas, de acordo com a equação da parábola, serão dadas, respectivamente, por d^2, $4d^2$, $9d^2$,..., n^2d^2. Para encontrar a área, somam-se as áreas desses retângulos, obtendo-se:

$$A = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \cdots + n^2d^3 = d^3(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots. + n^2)$$



Segundo a autora, Pascal e Fermat já sabiam encontrar a soma das *m*-ésimas potências dos *n* primeiros números naturais, então a soma dos termos $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots. + n^2$ poderia ser substituída por:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots. + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Sabendo que *d* é a divisão de OB por *n*, então:

$$A = d^3\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = OB^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

Quando o número de retângulos aumenta, os dois últimos termos podem ser desprezados e a soma das áreas dos retângulos passa a ser dada por:

$$A = \frac{OB^3}{3} = \frac{x^3}{3}$$

O procedimento empregado por Pascal e Fermat resulta em uma expressão analítica para o cálculo de áreas, a qual possibilita a evolução do método da Exaustão e abre espaço para a definição atual de integral. Ademais, este exemplo comprova as ideias de Torricelli de que a área abaixo da curva $y = x^n$ era expressa por $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Os trabalhos desenvolvidos no século XVII, especialmente os de natureza infinitesimal, deram conta de explicar inúmeros problemas que permaneciam em aberto desde a antiguidade, mas careciam de certa organização e estruturação. Sobre isso, tem-se que:

> A maior novidade introduzida na matemática por Newton e Leibniz reside no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre como resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas não se dedicaram a mostrar a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas (ROQUE, 2012, p. 354).

Segundo Roque (2012), o trabalho de sistematização que contribuiu significativamente para o avanço do conhecimento ocorreu de forma independente e foi creditado a Newton (1642 a 1727) e a Leibniz (1646 a 1716).

Newton e Leibniz também exploraram problemas envolvendo áreas. O primeiro, por exemplo, determina que a área sob a curva $y = f(x)$ pode ser obtida observando as taxas de variação de y em relação a x. Ele prova que a área abaixo de $y = x^n$, com n inteiro positivo é $A = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ e usando série binomial infinita prova que a expressão A é também válida para n racional, $n \neq -1$. Com isso, complementa as ideias de Torricelli e em 1.666 apresenta a equação:

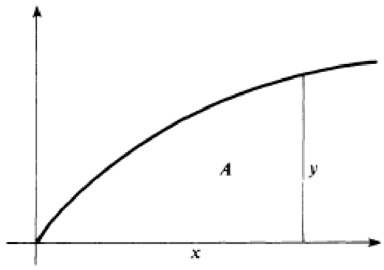
$$\frac{dA}{dx} = y$$

Para chegar a esta equação, após estabeler a relação $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ da equação polinomial $f(x, y) = 0$, Newton propõe o problema inverso, que consiste em encontrar y em termos de x, dada uma equação que realcione x e $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Esse problema implica em encontrar a equação:

$$\varphi(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Do ponto de vista gráfico, a relação estabelecida por Newton pode ser representada por:

Figura 37: Problema inverso de Newton



Fonte: Edwards Junior (1979, p. 194)

O problema de encontrar y em termos de x recebeu o nome de antidiferenciação, enquanto que o caso geral $g\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0$ ficou conhecido por equação diferencial.

Então, em 1.666, ao discutir o cálculo de áreas por meio de antiderivação, Newton apresenta a equação:

$$\frac{dA}{dx} = y$$

em que A denota a área sob a curva $y = f(x)$.

Newton não apenas comprova que os problemas de tangente e de quadratura são processos inversos, mas também apresenta, pela primeira vez na história, o Teorema Fundamental do Cálculo em sua forma explícita, fornecendo a base para uma abordagem algorítmica para o cálculo de áreas. Porém, a linguagem e as notações usadas por ele são consideradas confusas pela comunidade científica da época, o que acaba prejudicando a difusão de suas ideias.

Da mesma forma que Newton, Leibniz também se dedica aos problemas de quadratura e de tangente. Sua teoria está alicerçada sobre as operações inversas de soma e de diferença. Para ele, determinar a tangente a uma curva implica em calcular a razão das diferenças das ordenadas e das abscissas quando essas se tornam infinitamente pequenas, enquanto que a quadratura de uma figura implica em somar as áreas dos retângulos infinitamente pequenos que a decompõe. Com isso, Leibniz também conclui que os problemas de quadratura e de tangente, são inversos um do outro.

O método de Leibniz, baseado em somas e diferenças, torna-se importante para a comunidade científica, devido a sua generalidade. Para dar conta dos novos resultados, Leibniz cria notações mais claras e adequadas, em comparação com as de Newton, e por esta razão, permanecem até hoje, como dy e dx para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x

e y respectivamente e o símbolo de integral que corresponde a letra S alongada, que representa soma.

Os problemas de quadratura e de tangente originaram os conceitos de integração e de derivação. Da inicial e aparente desconexão entre tais problemas emergiu um forte resultado conhecido por Teorema Fundamental do Cálculo. Sobre isso, Stewart (2009) discorre:

> O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram esta relação e usaram-na para descrever o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas [...] (STEWART, 2009, p. 357).

De acordo com o autor, o Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma relação inversa entre os processos de derivação e de integração, sendo que, ao solucionar um problema de tangentes se está solucionando também um problema de área.

Na época de Newton e Leibniz, o processo de integração era entendido como operação inversa da diferenciação. Porém, esta concepção muda quando o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 a 1857) define formalmente limite e a partir dele apresenta sua definição sem vinculação com a diferenciação, escrevendo a soma:

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

em que $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$ é a divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos.

No século XIX o matemático alemão Bernahrd Riemann (1826 a 1866) aprofunda os estudos sobre a integral, formalizando o limite da soma das partições dos intervalos. Este limite passa a ser chamado soma de Riemann e origina a definição de integral de Riemann.

As ideias de Riemann generalizam o conceito de integral definida, apresentado por Cauchy e se mostram válidas para resolver inúmeros problemas, permitindo a evolução da ciência. Entretanto, são inadequadas para certos problemas relativos à Análise Matemática.

Buscando suprir algumas das inadequações, o matemático francês Henri Léon Lebesgue (1875-1941) apresenta estudos com base na teoria de medidas, criando a integral de Lebesgue[10]. As duas integrais são coincidentes quando as funções são integráveis no sentido de Riemann.

[10] Sobre a integral de Lebesgue sugere-se a leitura dos trabalhos de Otero-Garcia (2015) e de Palaro (2006).

No entanto, funções integráveis no sentido de Lebesgue não implicam, necessariamente integráveis no sentido de Riemann.

Atualmente, os problemas de área, em que a região é limitada por curvas de funções em determinado intervalo, podem ser resolvidos por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, cujo enunciado é apresentado por Flemming e Gonçalves (2007, p. 267):

Teorema Fundamental do Cálculo: *Se f é contínua sobre [a,b] e se F é uma primitiva de f neste intervalo então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Neste teorema, ao afirmar que *F* é uma primitiva de *f,* subintende-se que a derivada de $F(x)$ coincide com a função $f(x)$. No entanto, a relação entre as funções *F* e *f* só é válida quando $f(x)$ for contínua em um intervalo fechado, o que garante a existência de $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.

Ademais, sabendo que $F'(x) = f(x)$, tem-se a expressão algébrica $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. Decorre dessa expressão que uma soma provém do processo de integração enquanto que a variação da referida soma é oriunda da diferença entre a primitiva aplicada no valor *b* e a primitiva aplica em *a*, comprovando que o Teorema Fundamental do Cálculo proporciona a conexão entre integral e derivada.

Ao longo dos anos, mas não linearmente, muitos matemáticos e estudiosos contribuíram direta ou indiretamente para o avanço do Cálculo. A cada tempo e em seu contexto, não produziram conhecimentos a partir do nada, mas retomando estudos de seus antecessores, aperfeiçoaram métodos que permitiram o desenvolvimento e o surgimento de novas ideias. Hoje, os métodos do Cálculo são aplicados em diferentes áreas do conhecimento e servem para resolver inúmeros problemas reais.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo são apresentados os aspectos metodológicos que adotamos para conduzir e desenvolver o trabalho empírico. Trata-se de uma investigação aplicada no ambiente acadêmico, a qual foi incorporada aos processos de ensino e de aprendizagem de um componente curricular de Cálculo. Nela, buscamos observar, interpretar e descrever as ações dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul, campus Chapecó, ao desenvolverem uma sequência didática que abordava a integral no cálculo de área.

Amparados por elementos da Engenharia Didática, organizamos uma sequência didática composta por cinco blocos de atividades em que cada bloco contém objetivos específicos e que juntos visam contribuir para a aprendizagem do objeto em estudo.

3.1 O PERCURSO METODOLÓGICO

Esta pesquisa apresenta características que configuram-na como uma pesquisa de cunho qualitativo, segundo critérios estabelecidos por Bogdan e Biklen (1991) e abordados por Lüdke e André (1986): a fonte direta de dados é o ambiente natural; os dados coletados são predominantemente descritivos; dá-se maior atenção ao processo do que ao produto; o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. De fato, os sujeitos da pesquisa participam de um experimento pedagógico em seu ambiente natural, que é o ambiente universitário; a resolução das atividades pelos sujeitos, as observações e as anotações da pesquisadora são registradas descritivamente, constituindo-se a base para as análises; o interesse maior da pesquisa é analisar a manifestação dos sujeitos ao interagirem com o objeto de estudo.

Nesta investigação busca-se conhecer e analisar as operações semióticas, especialmente os tratamentos e as conversões, desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa ao estudarem a integral no cálculo de área. Embasados nos pressupostos teórico-metodológicos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da Engenharia Didática, foi organizada uma sequência didática, a qual viabilizou as ações dos sujeitos para a coleta de dados.

A Engenharia Didática de Michele Artigue (1996) é uma teoria educacional ou uma metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. Elaborada no início da década de 1980, para trabalhos de Educação Matemática, apresenta-se como um “esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino” (ARTIGUE, 1996, p. 196).

Nesta metodologia, uma sequência didática é planejada com objetivo de obter informações para desvelar o fenômeno investigado e sua execução está atrelada ao desenvolvimento de quatro etapas:

1. ***Análise prévia ou preliminar***

Esta etapa visa formar a concepção da engenharia, apoiando-se no quadro teórico didático e nos conhecimentos didáticos já adquiridos acerca do objeto de estudo:

a) A análise epistemológica dos conteúdos contemplados no ensino;

b) A análise do ensino habitual e de seus efeitos;

c) A análise das concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos;

d) A análise do campo das limitações onde se situará a efetiva realização didática;

e) Os objetivos específicos da investigação.

2. ***Análise a priori***

A análise a *priori* consiste na descrição do objeto e na proposição de melhorias para intervenção no ensino e na aprendizagem. Para apresentar melhorias, é necessário primeiro identificar os problemas referentes ao objeto de estudo e elencar hipóteses, as quais serão averiguadas ao longo do desenvolvimento da proposta didática.

3. ***Experimentação***

É o momento em que o pesquisador entra em contato direto com os sujeitos do estudo. Para esta fase é fundamental que ele tenha clareza do objetivo da pesquisa e identifique as condições sob as quais a pesquisa está sendo realizada. A sequência didática e os instrumentos para a coleta de dados são aplicados e as observações acerca dos mesmos são registradas.

4. ***Análise a posteriori e validação***

De posse dos dados coletados da aplicação da sequência didática, faz-se o tratamento dos dados e o confronto das análises a *priori* e a *posteriori* com intuito de validar ou refutar as hipóteses elencadas no início da pesquisa. Partindo desse confronto são feitas adequações à sequência didática. Caso necessário, para complementação de informações, são realizados ou utilizados outros instrumentos, como entrevistas individuais ou coletivas e questionários.

Adaptando as etapas supracitadas a esta pesquisa, pode-se dizer que a análise *prévia* corresponde ao estudo desenvolvido sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o computador no ensino, a problemática do ensino e da aprendizagem do Cálculo, as pesquisas que envolvem Cálculo Integral, a resolução de problemas envolvendo áreas em livros textos de

Cálculo, a equivalência de áreas, e os aspectos históricos do Teorema Fundamental do Cálculo. Assim, a análise *prévia* está disposta ao longo dos Capítulos 1 e 2.

Na análise *a priori* são apresentadas as descrições matemáticas das atividades que compõem a sequência didática. Esta descrição representa a tentativa de prever o desenvolvimento matemático dos alunos durante a execução das atividades.

A etapa da *experimentação* incide na aplicação da sequência didática. É o momento em que os alunos utilizam seus conhecimentos para resolver as atividades propostas e desta forma, produzem os dados para a análise a *posteriori* e *validação*.

Na análise a *posteriori* e *validação* são confrontados os dados produzidos pelos alunos na *experimentação* com os dados previstos na análise a *priori*, visando validar ou não a proposta executada.

As etapas relativas à análise a *priori, experimentação* e análise *posteriori* são apresentadas neste capítulo, seções 3.2, 3.3 e 3.4. Já os instrumentos para a coleta de dados estão no Apêndice 2.

3.2 A ORGANIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O ponto de partida para a criação das atividades que compõem a sequência didática foi a observação, em livros textos de Cálculo, acerca da abordagem dos autores em relação à integral no cálculo de área, já apresentada na seção 2.4. Nestes materiais, constatou-se que a temática é abordada de forma teórica, em que se prioriza o registro discursivo como registro de partida e que os exercícios são reproduções dos exemplos.

Com base nas observações planejou-se uma sequência didática para oferecer aos alunos uma visão em que a integral no cálculo de área não é apenas resultado da aplicação de fórmulas, mas um processo que articula os vários registros de representação semiótica e explora operações semióticas, especialmente os tratamentos e as conversões. Desta forma, a sequência didática contempla a diversidade de representações semiótica, possibilita a aplicação de tratamentos e conversões e usa o software GeoGebra para proporcionar dinamismo gráfico e também para permitir a articulação entre os registros algébrico e gráfico.

As conversões ocorrem entre os registros discursivo, gráfico-geométrico e algébrico. As operações semióticas de tratamento e de conversão fomentam a coordenação dos registros e consequentemente, a compreensão integral do conceito matemático, conforme propõe Duval (2004).

As atividades da sequência didática foram elaboradas de modo a ensejar reflexão, discussão, criação de conjecturas e refutação de hipóteses, por meio de operações semióticas e do uso do GeoGebra. Assim, pretende-se criar espaços de diálogos e de experimentações que contribuem para tornar os alunos agentes ativos e autônomos no processo de construção do conhecimento.

A compreensão da integral no cálculo de área requer, inicialmente, a retomada dos conceitos de área e de integral definida e posteriormente o entendimento de três pontos basilares, considerados pré-requisitos para tal compreensão. O primeiro ponto pressupõe a relação entre a integral enquanto área de uma região e a posição desta região no plano cartesiano. Há que se destacar que a integral pode ter outros significados além do significado de área. Assim, como já mencionado na introdução deste estudo, a integral pode ser o trabalho realizado por uma força, ou o volume de um sólido, ou a massa de uma partícula, por exemplo. O segundo ponto trata da identificação das curvas que limitam a região. E o terceiro discute a possibilidade de mudança da variável de integração.

Esses três pontos estão contemplados no Bloco 2, Bloco 3 e Bloco 5, respectivamente. Para além deles, faz-se uma retomada dos conceitos de área e de integral definida, no Bloco 1, e apresenta-se um elemento a mais a ser explorado no estudo da integral no cálculo de área, que é a equivalência de áreas, tratada no Bloco 4.

Procurando desenvolver nos alunos a compreensão dos pontos elencados anteriormente, a sequência didática foi pensada e organizada em 5 blocos, em que cada bloco apresenta objetivos específicos ligados à compreensão dos referidos pontos. Desta forma, o Bloco 1 resgata o conceito de área como limite de uma soma de áreas de retângulos e relaciona este limite ao conceito de integral definida. O Bloco 2 mostra que a integral enquanto área está associada à posição da região no plano cartesiano e que portanto, depende do esboço de curvas. O Bloco 3 trata da área entre curvas e sinaliza para a importância da região ser limitada por uma única curva superior e outra curva inferior. O Bloco 4 contempla a equivalência de áreas e o Bloco 5 discute a escolha da variável de integração.

As atividades e os blocos levaram em conta as análises prévias e estão ordenados segundo um critério a *priori,* alicerçado na experiência docente da pesquisadora, considerado adequado ao alcance do objetivo maior desta pesquisa. Outrossim, o ordenamento permite que os conhecimentos construídos em uma atividade ou em bloco possam ser utilizados em atividades ou em blocos posteriores.

As atividades foram nomeadas por **Atividade X-Y**, em que X indica a ordem da atividade no bloco Y. Por exemplo, a Atividade 1-3 indica a primeira atividade do bloco 3.

3.3 A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi aplicada no Laboratório de Informática (sala 408 –A) da Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, que conta com 50 computadores, todos instalados com o software GeoGebra.

Os sujeitos da pesquisa eram alunos da Licenciatura em Matemática desta universidade, que cursavam a terceira fase, no primeiro semestre de 2018. A escolha pelo curso se justifica pois neste semestre, o referido curso prevê a disciplina de Cálculo B, cuja ementa contém o conteúdo de integral no cálculo de área. Não há nenhuma especificidade que direcione a aplicação das atividades para tal curso de graduação, o que torna a sequência didática passível de ser executada em outros cursos da instituição ou de outras instituições.

A aplicação da sequência didática iniciou-se após a professora de Cálculo B finalizar, em sala de aula, o estudo sobre soma de Riemann, integral definida, Teorema Fundamental do Cálculo e técnicas de integração, porém antes de iniciar as aplicações da integral que envolvem o cálculo de área. Teoricamente, os alunos já conheciam o conceito de integral definida e sua associação com a área abaixo do gráfico de uma função. Entretanto, mesmo com tais conhecimentos, optou-se por iniciar a sequência didática com atividades que retomassem e reforçassem a compreensão dos referidos conceitos, considerados fundamentais para o desenvolvimento do estudo.

O primeiro contato da pesquisadora com os sujeitos da pesquisas ocorreu na noite de 20 de março de 2018, quando, com o consentimento da professora de Cálculo B, a pesquisadora dialoga com a turma acerca das ideias do trabalho de Tese e da importância da participação deles nas atividades propostas.

A professora de Cálculo B disponibilizou três encontros consecutivos, de 4 horas/aula cada encontro, para a aplicação da sequência didática. Assim, as atividades se desenvolvem no horário de aula, à noite, possibilitando a participação dos alunos. Em consequência desta atitude da professora, dos 21 alunos que frequentavam o componente de Cálculo B, 20 fizeram parte da população da pesquisa, sendo que, em todos os encontros, pelo menos 16 alunos iniciaram as atividades de cada bloco.

Os três encontros da pesquisadora com os alunos ocorreram nas terças-feiras, dias 03, 10 e 17 de Abril de 2018. Além destas datas, a pesquisadora também esteve presente, em sala de aula, dia 24 de Abril, noite destinada pela professora de Cálculo B para sanar dúvidas dos alunos em relação aos conteúdos da primeira prova avaliativa.

No primeiro encontro, dia 03 de Abril, foi realizada uma breve ambientação do GeoGebra e também a aplicação das atividades do Bloco 1. Esta ambientação se fez necessária, pois mesmo já conhecendo ou utilizando o software em outros componentes curriculares, serviu para os alunos relembrarem a construção de gráficos, bem como conhecerem os comandos necessários à resolução das atividades. Esta ambientação está apresentada no Apêndice 1.

No segundo encontro, dia 10 de Abril, foram aplicadas e desenvolvidas as atividades dos blocos 2 e 3 e no terceiro encontro, dia 17 de Abril, as atividades dos blocos 4 e 5.

No encontro do dia 24 de Abril, a pesquisadora realizou um *feedback* aos alunos em que foram retomadas e discutidas atividades dos blocos e apresentado os objetivos pretendidos com tais atividades. Os alunos puderam questionar e tirar dúvidas a respeito das atividades e de suas resoluções.

Buscando sintetizar as informações relativas à organização e à aplicação da sequência didática, apresenta-se a tabela:

Tabela 10: Síntese da organização e da aplicação da sequência didática

Encontro de 4h/a	**Atividades realizadas**	**Objetivos**
1	a) Ambientação ao GeoGebra; b) Bloco 1	a) Reconhecer o software e comandos necessários à resolução das atividades; b) Retomados os conceitos de soma de Riemann, área e integral definida.
2	c) Bloco 2 d) Bloco 3	c) Compreender que a integral como área de uma região, depende da posição desta região no plano cartesiano, e esta, depende do esboço de curvas; d) Identificar as curvas que limitam superior e inferiormente uma região.
3	e) Bloco 4 f) Bloco 5	e) Identificar e encontrar áreas equivalentes; f) Decidir quando integrar em relação às variáveis x ou y.
4	g) *Feedback*	g) Apresentar os objetivos de cada bloco e sanar dúvidas relativas às atividades e suas resoluções.

Fonte: Autora

A pedido da pesquisadora, a professora de Cálculo B aplicou a sequência didática e amparou os alunos, quando surgiram dúvidas acerca das atividades. A pesquisadora se manteve, na maioria do tempo como observadora, mas em alguns momentos fez intervenções junto aos alunos.

Reconhecendo a importância da discussão entre os pares para a construção de conhecimentos, os alunos tiveram a liberdade para decidir se desejavam realizar as atividades em dupla ou individualmente. A maior parte optou por trabalhar em duplas, mas em certas atividades, as discussões acabaram envolvendo o grande grupo.

Os 20 alunos, sujeitos da pesquisa, foram designados pelas notações Aluno 1, Aluno 2, ... Aluno 20, de forma aleatória, sem qualquer referência à posição que ocupavam no laboratório de informática ou à numeração dos computadores que usaram para desenvolver as atividades.

A resolução das atividades foram registradas individualmente em folhas de papel e por meio de *prints* de telas do GeoGebra gravados nos computadores utilizados pelos alunos. Mesmo aqueles que optaram pelo trabalho em dupla, fizeram seus registros individuais. No dia subsequente à aplicação das atividades, a pesquisadora retornava ao laboratório para salvar os *prints* de telas.

Além dos registros em papel e *prints* de tela, as falas dos alunos também foram consideradas para as análises. Em certos momentos, as expressões orais revelaram informações importantes acerca da maneira que os alunos pensavam e formavam seus raciocínios matemáticos. Por isso, algumas delas aparecem ao longo das análises a *posteriori.*

Durante a análise dos dados descritivos, alguns registros não foram suficientes para promover a correta interpretação sobre os mesmos, por parte da pesquisadora. Nesses casos, foi realizada entrevista semiestruturada com estes alunos, visando elucidar e ou complementar os registros produzidos.

Ainda em relação à análise dos dados, procurou-se contemplar ao máximo as respostas de diferentes alunos. Assim, sempre que os alunos apresentavam respostas similares, ora era apresentada a resposta de um, ora, do outro. Com esta atitude, pretendia-se não privilegiar aqueles que se destacassem por ‘dons matemáticos’ ou pela rapidez com que os cálculo eram efetuados, mas àqueles que, mesmo apresentando dificuldades, superavam-nas e davam conta de resolver as atividades.

Apresentada a estrutura metodológica que orienta a pesquisa empírica, seguem as análises a *priori* e a *posteriori* das atividades propostas na sequência didática.

3.4 ANÁLISES A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DAS ATIVIDADES

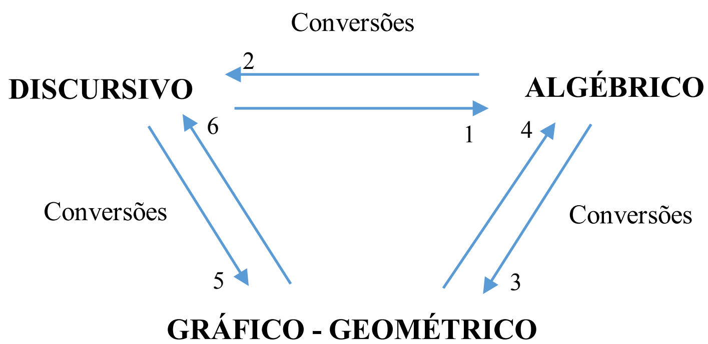
Esta seção contempla as análises a *priori* e a *posteriori* das atividades que compõem a sequência didática.

A análise a *priori,* que contém a previsão do comportamento dos alunos no que tange à resolução das atividades da sequência didática, passa a ser confrontada com a análise a *posteriori* que revela o que os alunos produziram durante a execução das referidas atividades.

Inicialmente é apresentada a análise a *priori* de cada atividade do bloco e em seguida, a sua análise a *posteriori*. A interpretação e a descrição das análises a *posteriori* ocorrem a partir de dados coletados computacionalmente, por meio de *prints* das telas do GeoGebra, de dados coletados manualmente, por meio do registro em papel, e também das falas dos alunos. Contudo, o registro em papel se constituiu a base para as análises enquanto que os *prints* e as falas serviram de complementos.

Antes de expor as análises a *priori* e a *posteriori* das atividades é conveniente relembrar que a integral no cálculo de área requer a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, e por esta razão, a Figura 19 da seção 2.4 é reapresentada:

: Conversões requeridas na integral no cálculo de área



Fonte: Autora

Ao longo das análises a *posteriori* são explicitados alguns dos sentidos de conversões mostrados neste figura, porém outros estarão implícitos. É na totalidade da execução dos cinco blocos de atividades que são contemplados todos os seis sentidos de conversão, os quais visam contribuir para a coordenação dos registros e consequentemente, para a aprendizagem da integral no cálculo de área.

3.4.1 Análises a *priori* e a *posteriori* das atividades do Bloco 1

BLOCO 1: Soma de Riemann, área e integral definida

Neste bloco são retomados os conceitos de soma de Riemann, de área e de integral definida, sem a preocupação com a construção de tais conceitos, uma vez que os sujeitos da pesquisa já os estudaram em Cálculo B. Contudo, desejando adentrar nesta construção, recomenda-se o trabalho de Cargnin (2013) voltado à conceitualização da Integral de Riemann.

O bloco contém duas atividades, das quais a primeira é desenvolvida unicamente em papel e sem auxílio do software GeoGebra. Nela, os alunos constroem somas de Riemann para diferentes quantidades de retângulos e percebem a relação entre o número de retângulos e a área da região.

A segunda atividade retoma e aprofunda a noção de soma de Riemann, explorando o GeoGebra. No final do bloco, os conceitos de soma de Riemann e de integral definida são apresentados com intuito de sistematizar os conhecimentos construídos pelos alunos.

3.4.1.1 Análise a *priori* da Atividade 1-1

Segue a primeira atividade do Bloco 1:

Atividade 1-1 - Considere a função $f(x) = x^2 - 1$ definida em [-2,2]. Esboce a curva de $f(x)$ no intervalo dado e responda as demais perguntas com base neste esboço.

a) Observe a curva no intervalo [1,2]. Divida este intervalo em 4 subintervalos de mesma amplitude Δx (mesmo tamanho) e identifique as abcissas $x_0 = 1$, x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 2$. Responda:

- Qual a amplitude Δx de cada subintervalo? Qual o valor de x_1, x_2, x_3?
- Se o intervalo [1,2] fosse dividido em 10 subintervalos, qual a amplitude de cada subintervalo? E se fossem 50 subintervalos?
- Seja um intervalo qualquer [a,b] dividido em n subintervalos. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude Δx dos subintervalos, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos n.

b) Trace retas verticais nas abcissas x_0, x_1, x_2, x_3 e x_4 até a intersecção com a curva de $f(x)$ e forme 4 retângulos R1, R2, R3 e R4 cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em x_1, x_2, x_3 e x_4 . Responda:

- A altura dos retângulos é um valor positivo ou negativo?
- Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos. Calcule o valor de cada altura.
- Qual o valor da base de cada retângulo?

c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo R1, R2, R3 e R4 em função da amplitude Δx e das alturas $f(x_1), \ldots, f(x_4)$ e em seguida calcule suas áreas.

d) Seja A a área abaixo da curva de $f(x)$ e acima do eixo *x*, definida no intervalo [1,2]. Estime o valor da área A a partir da soma das áreas dos retângulos R1, R2, R3 e R4 (arredonde o valor para duas casas decimais). Reescreva esta soma usando o símbolo do somatório $\sum$, a amplitude Δx e as alturas $f(x_1), \ldots, f(x_4)$.

- Observe o valor da estimativa da área A feita a partir da soma das áreas dos 4 retângulos e responda: O valor da área A é um valor maior, menor ou igual ao valor estimado que você encontrou? Justifique.

Esta atividade é realizada apenas no papel, sem o uso do software GeoGebra.

Inicialmente espera-se que os alunos esbocem corretamente a curva de $f(x)$ e identifiquem no intervalo [1,2] os retângulos R1, R2, R3 e R4. Em seguida, percebam que a amplitude dos subintervalos é 1/4 e que o número de partições do intervalo é inversamente proporcional à amplitude, ou seja, quanto maior a quantidade de subintervalos, menor a amplitude. Mais, que a amplitude é dada pela expressão algébrica $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Por meio da apreensão perceptiva, devem identificar os retângulos abaixo da curva de $f(x)$ e a altura como sendo positiva. Com base na percepção visual é feita a conversão da representação gráfico-geométrica da altura de cada retângulo para a escrita simbólica, chegando ao valor da função $f(x)$ nas abcissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

A área dos retângulos é calculada pela fórmula $A = (x_i - x_{i-1}).f(x_i) = \Delta x.f(x_i) = \frac{1}{4}f(x_i)$, para $i = 1,2,3,4$, já que a base dos retângulos é fixa e corresponde à amplitude 1/4. A estimativa da área é a soma das áreas dos quatro retângulos dada por $A = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4}.f(x_i) \cong 1{,}72$.

Esta atividade permite o desenvolvimento de conversões entre o registro discursivo, o registro gráfico-geométrico e o registro algébrico, bem como operações discursivas e a operação de reconfiguração intermediária.

Uma da intenções desta atividade é promover cálculos manuais, para que os alunos entendam o que há por trás dos resultados instantâneos, mostrados na tela do computador.

3.4.1.2 Análise a *posteriori* da Atividade 1-1

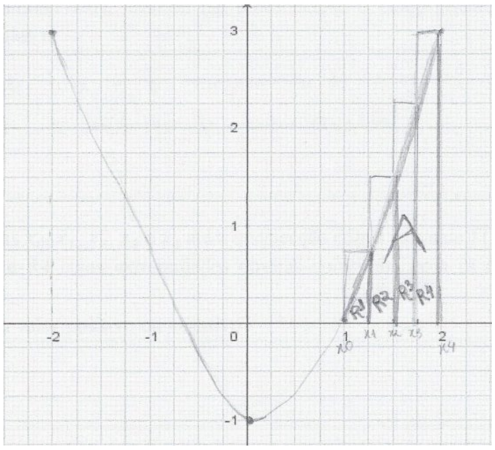
Dos 20 alunos de Cálculo B que aceitaram participar das atividades, 2 estavam ausentes neste primeiro encontro com a pesquisadora. Assim, as atividades do Bloco 1 foram aplicadas aos 18 alunos presentes na noite de 03 de Abril, no laboratório de informática da Universidade Federal da Fronteira Sul, campus Chapecó.

Esta atividade não utilizou o GeoGebra, pois pretendia-se que os alunos desenvolvessem manualmente o esboço de curvas e os cálculos.

Todos esboçaram corretamente a parábola $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo [-2,2] e observaram a curva em [1,2].

Ao dividirem o intervalo [1,2] em quatro partes iguais e formarem os retângulos R1, R2, R3 e R4, os alunos desenvolveram a operação semiótica de reconfiguração intermediária, que é uma modificação mereológica vinculada à apreensão operatória. Por meio desta modificação a figura é dividida em partes, originando a reconfiguração intermediária, que busca reorganizar as subdivisões, permitindo a aplicação de tratamentos figurais (DUVAL, 2012a). Um exemplo da reconfiguração produzida pelos alunos é apresentada abaixo:

Figura 38: Reconfiguração intermediária desenvolvida pelo Aluno 1

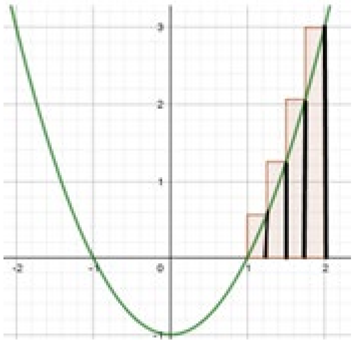


Fonte: Autora

Nesta figura, o Aluno 1 efetuou a reconfiguração intermediária dividindo a região abaixo da curva, no intervalo [1,2], em quatro partes retangulares homogêneas. Também, executou a designação pura e a categorização simples, que são operações discursivas ligadas à função referencial, que visam identificar um objeto a partir de marcas particulares e associá-las a certas categorias (DUVAL, 2012a). Neste caso, as marcas R1, R2, R3 e R4 foram associadas aos retângulos formados em [1,2] e a marca A designou a região abaixo da curva de $f(x)$ e acima do eixo x, no referido intervalo.

A primeira inquietação dos alunos surgiu quando solicitada a escrita da expressão algébrica das alturas dos retângulos R1, R2, R3 e R4. Aqui, a apreensão perceptiva os levou a reconhecerem as alturas como traços verticais dos retângulos, mas não foi suficiente para iniciar o processo de substitutividade inter registro, ou seja, para a conversão da representação gráfico-geométrica em uma representação algébrica. Isso porque, as representações gráfico-geométrica e algébrica da altura não eram semanticamente congruentes e tendo em vista que a congruência está fortemente relacionada ao processo de conversão, o não reconhecimento do objeto matemático em suas diferentes formas provocou o entrave neste processo.

Figura 39: Representações gráfico-geométrica e algébrica do objeto altura



Conversão

$\boldsymbol{f(x_i)}$, $i = 1,2,3,4$

Representação algébrica

Representação gráfico- geométrica

Fonte: Autora

A Figura 40 ilustra as representações do objeto altura nos diferentes registros e também o sentido da conversão a ser realizado pelos alunos. A conversão explorada neste momento da atividade partia da representação gráfico-geométrica para chegar à representação algébrica. No registro de partida, a altura correspondia ao traço vertical que coincidia com a extremidade direita dos retângulos, enquanto que no registro algébrico, era o valor da função nos pontos x_i, com $i = 1,2,3,4$. A não congruência semântica entre as representações se mostrou, inicialmente, um obstáculo à associação dos traços verticais aos valores da função $f(x)$ em x_1, x_2, x_3 e x_4.

Buscando respostas à inquietação, os alunos consultaram o caderno de Cálculo B que continha a teoria sobre integrais, porém o material consultado acabou confundindo-os, pois nele, o ponto médio dos retângulos havia sido usado para a altura. A confusão suscitou diversos questionamentos, dos quais um exemplo é apresentado:

Aluno 13: "Para calcular a altura devo usar o ponto médio dos subintervalos ou devo usar um dos extremos?"

A fala[11] do Aluno 13 explicita a dúvida que pairava no ar, naquele momento da atividade. Questões semelhantes a esta foram levantadas no grande grupo e um debate coletivo iniciou. Se os alunos tivessem mobilizado a apreensão discursiva, ou seja, se tivessem feito a releitura e a interpretação do enunciado da questão, perceberiam que a altura estava ligada ao

[11] Durante a aplicação da sequência didática a pesquisadora anotou falas dos alunos referente ao desenvolvimento das atividades e algumas delas aparecem nas análises a *posteriori*.

ponto extremo de cada retângulo. Para Duval (2012a), a apreensão discursiva é fundamental em atividades que envolvem figuras, pois auxilia no controle da percepção imediata, atrelando os elementos figurais às informações enunciadas.

Somente quando a professora de Cálculo B chama a atenção para o fato de que o ponto médio era uma opção para determinar a altura, mas que poderiam ser utilizados quaisquer valores pertencentes ao subintervalo $[x_{i,}x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, 4$, os alunos reconheceram as alturas em suas diferentes representações, nos traços verticais da extremidade direita dos retângulos e no valor da função $f(x)$ nos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4, conforme hipóteses enunciadas na atividade.

Superada a questão das alturas, os alunos não tiveram dificuldade em estimar a área A por meio da soma das áreas dos quatro retângulos. A reconfiguração intermediária provocou novas percepções aos alunos, permitindo-lhes associar a área da região A, abaixo da curva de $f(x) = x^2$ em [1,2], à soma das áreas dos retângulos R1, R2, R3 e R4.

Quanto à formalização da estimativa para a área A, a partir da soma das áreas dos quatro retângulos, mais da metade dos participantes conseguiu escrevê-la no registro da língua formal, chegando à expressão $A \cong \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$, conforme tabela a seguir.

Tabela 11: Formalizações corretas da estimativa da área A

<table>
<tr><th>Exemplos de respostas</th><th>Número de alunos</th></tr>
<tr><td>$A=f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+f(x_3)(x_3-x_2)+f(x_4)(x_4-x_3)$
$A=\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$
$A= 1,42$ u.a
Resposta do Aluno 13</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>$A = R1+R2+R3+R4$
$A = \frac{9}{64}+\frac{5}{16}+\frac{33}{64}+\frac{3}{4} = \frac{9+20+33+48}{64} = \frac{110}{64} \cong 1,71$ u.a
$\sum_{i=1}^{4} \Delta x \cdot f(x_i)$
Resposta do Aluno 1</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

A Tabela 11 exemplifica operações semióticas de tratamento e de conversão desenvolvidas pelos alunos que chegaram à formalização correta da estimativa da área A para quatro retângulos. Nela, o Aluno 13 realizou tratamentos no registro algébrico, enquanto que o Aluno 1 efetuou a conversão das representações produzidas no registro numérico para a língua formal, transformando a soma numérica das áreas dos retângulos em uma soma algébrica.

Dentre os alunos que não conseguiram formalizar corretamente a estimativa, alguns apresentaram incoerências em relação à notação somatório $\sum$, como se observa abaixo:

Tabela 12: Incoerências na estimativa da área A

Exemplos de respostas	**Número de alunos**
$A = \frac{9}{64} + \frac{20}{64} + \frac{33}{64} + \frac{3}{4} = \frac{9+20+33+48}{64} = \frac{110}{64} \simeq 1,72$ $\sum_{i=1}^{4} \Delta x \cdot f(x)$ Resposta do Aluno 6	6
$A = 1,72$ u.a. $\sum_{i=1}^{4} \Delta x \cdot f(x_n)$ Resposta do Aluno 2	

Fonte: Autora

De acordo com a tabela acima, o Aluno 6, ao efetuar a conversão do registro numérico para o registro da língua formal não inseriu o índice i na expressão $f(x)$. O Aluno 2 também exibe fragilidades semelhantes a do Aluno 6 quanto à utilização da referida notação, pois usou, simultaneamente os índices i e n. A confusão de índices, deste último aluno, pode ter ocorrido por conta dele ter consultado o caderno de Cálculo B, e neste material, o índice n era utilizado no estudo da soma de Riemann, em vez do índice i. Nos dois casos, infere-se que a causa das incoerências na escrita algébrica se deve à falta de compreensão, do tipo referenciação, sobre o uso da notação somatório $\sum$.

Ainda em relação à formalização da estimativa da área, apenas 2 alunos, os quais discutiam as questões em dupla, não chegaram a uma expressão com a notação somatório. A tentativa de um deles é apresentada na Figura 41.

Figura 40: Não formalizações da estimativa da área A, pelo Aluno 17

$$\sum_{i=1}^{4} = 0,25(0,5625 + 1,25 + 2,0625 + 3)$$

$$\sum_{i=1}^{4} = 0,25(6.875)$$

$$\sum_{i=1}^{4} = 1.72$$

Fonte: Autora

O Aluno 17 efetuou corretamente os tratamentos numéricos com as áreas dos quatro retângulos para chegar ao valor aproximado de 1,72 para a área A, contudo, não conseguiu realizar a conversão do registro numérico para o registro formal. Segundo Duval (2004), a conversão enfrenta o fenômeno de não-congruência entre as representações do mesmo objeto. Neste caso, não havia congruência semântica entre a soma dos valores numéricos das áreas dos retângulo e a expressão algébrica que a representa. Por esta razão, o Aluno 17 não conseguiu mudar a forma do objeto, pois precisava abandonar a representação inicial, que era numérica, para chegar à representação formal.

Dos 8 alunos que não formalizaram corretamente a estimativa da área A, 6 apresentaram incoerências no uso da notação somatório e 2 não chegaram a uma expressão formal para a soma de Riemann com quatro retângulos. Esses alunos ainda não tomaram consciência da razão pela qual a notação é empregada, o que indica a ausência da função meta-discursiva de objetivação, de acordo com Duval (2016). Outrossim, a dificuldade em efetuar conversões para o registro da língua formal vem ao encontro das palavras do autor que afirmam que a conversão não é natural e nem espontânea para os alunos, precisando ser explorada no ensino de matemática, e em particular, no Cálculo.

3.4.1.3 Análise a *priori* da Atividade 2-1

Atividade 2 -1 - Esboce a curva da função $f(x) = x^2 - 1$. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo de Entrada* a expressão $x^2 - 1$.

a) Identifique a região A **abaixo** da curva de $f(x)$, até o eixo x, no intervalo [1,2], pintando-a

b) Estime a área da região A para um **número b** de subintervalos, ou seja, um número **b** de retângulos. Use o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável < **Número de Retângulos** > por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Além da variável **b** aparece na tela do GeoGebra a **variável a** que mostra a soma das áreas dos retângulos. Teste valores para **b,** como $b = 4$, $b = 10$ e $b = 1000$.

- Que relação há entre a amplitude Δx dos subintervalos e o número de retângulos?
- Para que valor a área A se aproxima?
- O que se observa da relação entre o número de retângulos e o valor aproximado da área A?
- Por que o valor aproximado de A diminui quando o número de retângulos aumenta?

c) Atribua $b = 4$ e observe a soma das áreas dos retângulos. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.

- Qual o valor aproximado da área A para 4 retângulos? Este valor coincide com o valor encontrado na atividade 1-1?
- Qual o valor da amplitude de cada subintervalo? Escreva a altura de cada retângulo em função de $f(x_i)$, $i = 1,2,3,4$.
- Escreva uma fórmula para encontrar o valor aproximado da área A a partir da soma das áreas dos 4 retângulos, usando o símbolo $\sum$, a amplitude Δx e os valores de $f(x_i)$, $i = 1,2,3,4$.

d) Atribua $b = 10$ e observe a soma das áreas dos retângulos.

- Qual o valor aproximado da área A quando houver 10 retângulos?
- Qual o valor da amplitude de cada subintervalo?
- Escreva uma fórmula para encontrar o valor aproximado da área A a partir da soma das áreas dos 10 retângulos, usando o símbolo $\sum$, a amplitude Δx e os valores de $f(x_i)$, i: $1,2,..,10$.

e) Atribua $b = 1000$ e observe a soma das áreas dos retângulos . Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.

- Qual o valor aproximado da área A quando houver 1000 retângulos?
- Qual o valor da amplitude de cada subintervalo?
- Escreva uma fórmula para estimar o valor da área A para 1000 retângulos, usando o símbolo do somatório $\sum$.

f) Atribua $b = 1.000$. Usando o comando *Ctrl* + aumente o zoom da tela até à escala 0.01 para os eixos x e y e observe os retângulos. Com esta **grande** quantidade de retângulos é possível afirmar que a área A vale 1,72? Justifique.

f) Clique com o botão direito sobre a quantidade **b** de retângulos e altere o valor para 10.000. Atribua $b = 10.000$ e aumente o zoom da tela até à escala 0.001, observando os retângulos. Com esta quantidade **muito grande** de retângulos é possível chegar à área A? Justifique.

g) É possível considerar uma quantidade infinita de retângulos? Neste caso, chega-se à área A? Justifique.

- Para estimar a área A, abaixo do gráfico de $f(x)$ e acima do eixo *x,* no intervalo [1,2] foi utilizada uma soma finita de retângulos (primeiro para 4 retângulos, depois para 10, para 1.000 e para 10.000 retângulos), chamada **soma de Riemann de $\boldsymbol{f(x)}$**. Escreva a **soma de Riemann** de $f(x)$ para *n* retângulos num intervalo qualquer [a,b] usando o símbolo $\sum$, a amplitude Δx e $f(x_i)$, i: $1,2,..,n$.
- O que a **soma de Riemann** de $f(x)$ fornece?

<u>CONSIDERAÇÕES:</u>

- **Soma de Riemann:** Nesta atividade, em que a função $f(x) = x^2 - 1$ é **contínua** e **não negativa** no intervalo [1,2], a **soma de Riemann** representa uma boa aproximação para a área A, já que a quantidade de retângulos pode ser aumentada **quanto se queira**. Isso significa que a área A é aproximada com qualquer **grau de precisão** por uma soma de Riemann, ou seja, é possível tornar a soma das áreas dos retângulos **suficientemente próxima** da área A. Considerando estas informações e traduzindo a ideia intuitiva do termo **suficientemente próxima** para a linguagem matemática, escreva uma fórmula para a **área A** sob a curva de $f(x)$, de *a* até *b*, a partir da **soma de Riemann**.

- **Integral definida:** Seja *f* é uma função contínua definida no intervalo [a,b]. Dividindo [a,b] em *n* subintervalos de comprimentos iguais a Δx tem-se $a =$

$x_0, x_1, \dots, x_n = b$ as extremidades desses subintervalos. Se $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ existe para todas as extremidades, então este limite é chamado ***Integral Definida de f de a até b*** e denotado por $\int_a^b f(x)\, dx$. Logo, tem-se que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

em que *a* e *b* são os limites de integração, chamados respectivamente de limite inferior e limite superior.

h) No conceito de integral definida aparece a palavra ***limite***. Por que é necessário aplicar o *limite* à soma de Riemann? Justifique sua resposta.

i) Observe a expressão $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

- Na sua opinião, pode $f(x_i)$ ser um valor negativo? Por quê?
- Caso $f(x_i)$ seja negativo, como a amplitude Δx é sempre positiva, então a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ seria negativa também. Neste caso, a integral definida $\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\, dx$ representaria a área da região abaixo de $f(x)$, em [a,b]? Justifique.
- O que a expressão $\int_a^b f(x)\, dx$ representa para você?

A partir dessa atividade é inserido o recurso computacional, por meio do GeoGebra. Este software potencializa os tratamentos gráfico-geométricos, possibilita a articulação entre os registros algébrico e gráfico, além de acelerar os cálculos que seriam efetuados manualmente.

Os alunos devem identificar a região A, limitada superiormente pela curva $f(x)$, inferiormente pelo eixo x e lateralmente pela reta vertical $x = 2$.

Usar o comando *SomaDeRiemannSuperior* no GeoGebra para estimar a área A permite desenvolver a operação de reconfiguração intermediária de forma dinâmica. Isso porque a região A passa a ser dividida em *n* partes retangulares e homogêneas possibilitando a exploração da área A em função da soma das áreas dos retângulos, levando os alunos a formularem hipóteses.

Estimar a área A usando o comando *SomaDeRiemannSuperior* tende a levantar a discussão entre os alunos, a respeito da relação entre o número de retângulos, a amplitude destes e o valor estimado da área A. É esperada a compreensão de que quanto maior a quantidade de retângulos, menor a amplitude dos subintervalos e consequentemente, a soma das áreas dos retângulos aumenta, aproximando-se do valor da área A.

A sequência de valores atribuídos para os retângulos *b*, iniciando com $b = 4, b = 10$ e $b = 1000$ visa a construção da soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b-a)/n$ e espera-se que após as simulações realizadas com as diferentes quantidades de retângulos, os alunos possam concluir que a soma de Riemann é uma boa aproximação para a área A. Mais, que nesta experimentação, a integral em [a,b] representa a área sob a curva $f(x)$, de *a* até *b*.

Por fim, é apresentado o conceito de integral definida uma vez que este conceito está associado à soma de Riemann e à definição de área. Ao questionar a presença da palavra *limite,* no conceito de integral definida, espera-se que os alunos associem-na à ideia da soma de áreas de infinitos retângulos.

3.4.1.4 Análise a *posteriori* da Atividade 2-1

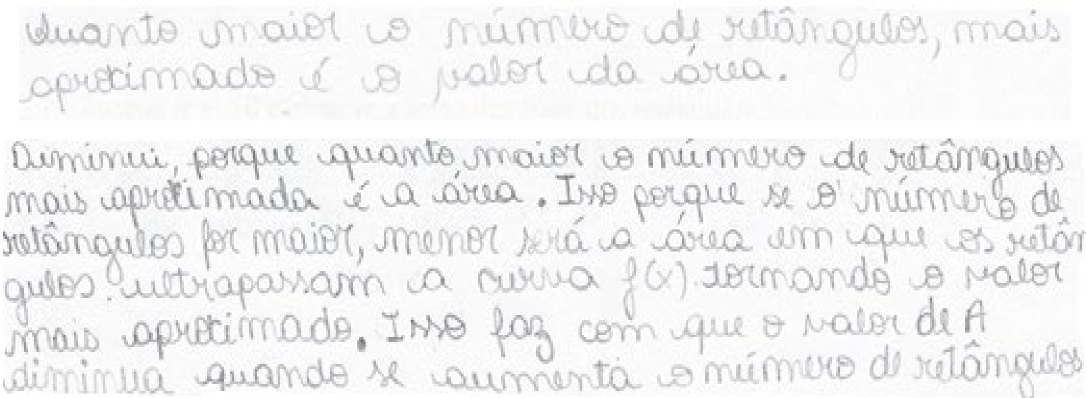
Esta atividade marcou o início da inserção do software GeoGebra.

A turma de alunos se sentiu à vontade para usar o GeoGebra, uma vez que foi realizada a ambientação ao software, antes do início das atividades deste bloco. Nesta ambientação eles testaram os comandos que seriam requeridos nas atividades e sanaram dúvidas de cunho mais geral sobre o software.

Todos esboçaram a curva de $f(x) = x^2 - 1$ e identificaram a região A limitada por esta curva e pelo eixo x, no intervalo [1,2]. O esboço da curva e a identificação da região A indica que foi realizada a conversão da representação discursiva em uma representação gráfico-geométrica.

No GeoGebra, o uso do comando *SomaDeRiemannSuperior* permitiu aos alunos a construção de conjecturas. Partindo de quatro retângulos e podendo variar a quantidade para 10 e 1.000, eles conjecturaram sobre a relação entre o número de retângulos e o valor aproximado da área A, conforme figura:

Figura 41: Conjectura do Aluno 3 sobre o número de retângulos e o valor da área A


Quanto maior o número de retângulos, mais aproximado é o valor da área.

Diminui, porque quanto maior o número de retângulos mais aproximada é a área. Isso porque se o número de retângulos for maior, menor será a área em que os retângulos ultrapassam a curva f(x) tornando o valor mais aproximado. Isso faz com que o valor de A diminua quando se aumenta o número de retângulos

Fonte: Autora

A resposta do Aluno 3 revela sua interpretação sobre como a quantidade de retângulos se relacionava com o valor da área. Questionado sobre o porquê do valor da área A diminuir, o aluno conjecturou uma relação entre o número de retângulos e as áreas destes retângulos que excedem a curva, concluindo que quanto maior o número de retângulos, menor é a área que ultrapassa a curva. Esta compreensão também foi percebida nas respostas dos outros 17 alunos, os quais indicaram que o comando *SomaDeRiemannSuperior* superestimava a área A, isto é, apresentava uma aproximação da área A, mas por excesso.

As conjecturas possibilitaram à maioria dos alunos construir a soma de Riemann superior, respectiva a 4, 10 e 1.000 retângulos, escrevendo a expressão algébrica $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, para essas quantidades. Contudo, alguns erros cometidos na Atividade 1-1, quanto à formalização da estimativa da área, via notação somatório, foram novamente identificados neste momento, os quais estão ilustrados na tabela:

Tabela 13: Formalizações da soma de Riemann para 4, 10 e 1.000 retângulos

Exemplo de respostas	**Número de alunos**
$\sum_{1}^{4} f(x_m)\Delta x$ $\sum_{1}^{10} f(x_m)\Delta x$ $\sum_{1}^{1000} f(x_m)\Delta x$ Resposta do Aluno 4	1
$A = \sum_{1}^{4} f(x_1)\Delta x$ $A = \sum_{1}^{10} f(x_1)\Delta x$ $A = \sum_{1}^{1000} f(x_1)\Delta x$ Resposta do Aluno 5	1
$\sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot (f x_1 + \dots + f(x_4))$ $\sum_{i=1}^{10} f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{10}) \cdot \Delta x_{10}$ $\sum_{i=1}^{1000} f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{1000})\, \Delta x_{1000}$ Resposta do Aluno 17	2

Fonte: Autora

De acordo com a Tabela 13, é possível perceber que o Aluno 4 designou a quantidade de retângulos pelo índice n, mas não o registrou junto à notação do somatório. O Aluno 5 cometeu o mesmo equívoco do Aluno 4, porém com o agravante de escrever a função $f(x_1)$

em vez de $f(x_i)$ ou de $f(x_n)$. As atitudes desses alunos podem ser provenientes da incompreensão acerca do que representa a referida notação

Ainda em relação à Tabela 13, o Aluno 17 escreveu acertadamente a soma de Riemann via expressão $\Delta x(f(x_1) + \cdots + f(x_n))$, para 4, 10 e 100 retângulos, mas não conseguiu escrevê-la na forma concisa. A escrita da expressão por extenso, sinaliza que o pensamento algébrico do aluno evoluiu, visto que na Atividade 1-1 ele não escreveu a soma de Riemann para quatro retângulos a partir dos termos Δx e $f(x_i), i = 1, \dots, 4$, conforme se pode observar na Figura 41, página 105. Esta evolução pode estar ligada à exploração dos diversos registros, por meio de tratamentos e de conversões, contemplados nas atividades.

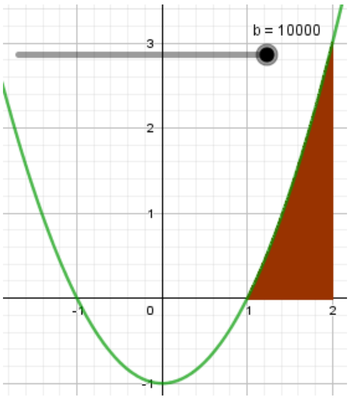
A dificuldade dos quatro alunos em expressar formalmente a soma de Riemann usando a notação somatório, conforme Tabela 13, demonstra que eles não compreenderam o significado desta notação, isto é, não tomaram consciência de que o somatório indica adição de parcelas. Diante da situação a professora de Cálculo B comentou com a pesquisadora:

> *Professora de Cálculo B: Dificuldades como esta, de escrever uma soma em linguagem formal, muitas vezes passam despercebidas para nós, quando abordamos o conteúdo em sala de aula. Por considerar algo simples, pensamos que também é simples para os alunos e acabamos não explorando essas questões....*

A fala da professora sinaliza a preocupação com o ensino e com a aprendizagem de questões que em seu entendimento parecem simples e imediatas, a exemplo da notação somatório, mas que podem se constituir em grandes desafios para os alunos. Uma alternativa para reverter esta situação é propor atividades que clarifiquem a utilização e a importância da referida notação antes de introduzir o conceito de soma de Riemann. Tendo em vista que o presente estudo busca contribuir para a aprendizagem, no Encontro 4 com os alunos, a pesquisadora aproveitou o momento do *feedback* das atividades para retomar a referida notação e sanar dúvidas sobre a sua utilização.

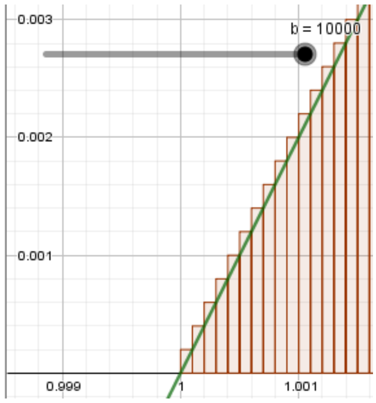
Discutida a soma de Riemann superior para até 1.000 retângulos, era hora de considerar o aumento da quantidade de retângulos para 10.000. De início, a representação visual da área A decomposta em 10.000 retângulos, parecia coincidir exatamente com a área A (Figura 43), mas a redução da escala para 0.001 (Figura 44) provocou outras percepções sobre a relação da área A com a área dos 10.000 retângulos.

Figura 42: Área A decomposta em 10.000 retângulos, usando escala 1, pelo Aluno 7



Fonte: Autora

Figura 43: Área A decomposta em 10.000 retângulos, usando escala 0.001, pelo Aluno 7



Fonte: Autora

No GeoGebra, com a redução da escala 1 para 0.001, a exemplo do Aluno 7, os demais alunos também identificaram os tratamentos figurais associados à decomposição da região A em 10.000 retângulos. Eles visualizaram os 10.000 retângulos ultrapassando a curva parabólica e por esta razão concluíram que a soma de Riemann superior superestimava a área A. Outrossim, reafirmaram as conjecturas de que a soma de Riemann e a área A estavam muito próximas uma da outra.

Neste momento da atividade, há que se ressaltar a contribuição do GeoGebra para a compreensão da noção de soma de Riemann. Partindo desse software os alunos desenvolveram as funções de simulação e de aceleração de tratamentos (DUVAL, 2011), por meio da manipulação das representações não-discursivas, as quais os levaram à percepção das alterações visuais da figura e do valor numérico da área A, decorrentes do aumento do número de partições do intervalo [1,2]. Assim, além do GeoGebra permitir a articulação dos registros algébrico e gráfico, propiciou aos alunos um ambiente de transformações dinâmicas, que não poderiam ocorrer se a atividade fosse resolvida manualmente.

Na sequência da atividade, os alunos foram questionados sobre a possibilidade de considerar uma quantia infinita de retângulos. Uma inquietação pairou no ar e por instantes os alunos debateram, não apenas em duplas, mas no grande grupo sobre o que seria somar a área de infinitos retângulos. Parte da turma sentiu-se fragilizada em redigir, no papel, as conclusões do debate coletivo, conforme comentário do Aluno 7:

Aluno 7: Eu entendo que posso dividir o retângulo ao meio, por exemplo, e ele fica cada vez mais fino. Fazendo isso sempre eu teria uma quantia infinita de retângulos, mas a área deles ainda seria maior que a área A. Como posso somar a área desses infinitos retângulos? Como escrever isso?

A dificuldade enfrentada pelo Aluno 7 estava relacionada à conversão entre o registro gráfico-geométrico e o discursivo. O aluno precisava transformar a representação visual da área A, decomposta em 10.000 retângulos, em um discurso escrito que descrevesse não o que estava sendo visualizado na tela do GeoGebra, mas para além da tela, aquilo que remetesse à noção de infinito. Neste momento, por meio da fala, a língua natural foi acionada pelo aluno que não conseguia externalizar seus conhecimentos via representações. Sobre o papel da língua natural nas atividades matemáticas, Duval e Moretti (2018) destacam que:

> [...] *a utilização da língua natural nas atividades matemáticas é radicalmente diferente daquela que é feita fora da matemática e em todos os outros domínios do conhecimento* e isso se dá, em parte, pelo fato de que a matemática afigura-se como uma prática principalmente escrita e não oral da língua (DUVAL & MORETTI, 2018, p. 97, grifos do autor).

Para os autores, a língua natural está presente nas atividades matemáticas, no entanto seu papel se revela a partir da articulação cognitiva e coordenada a um dos registros de representação semiótica. No caso do Aluno 7, a língua natural deveria estar cognitivamente articulada e coordenada ao registro das escritas simbólicas.

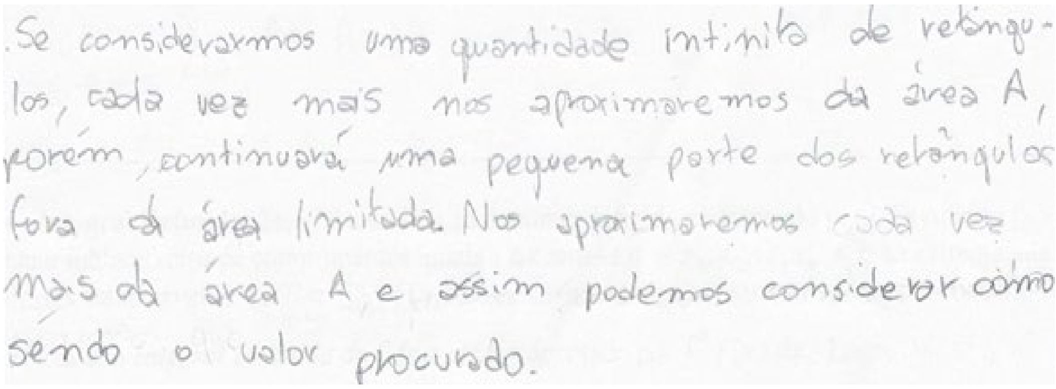
A expressão oral do Aluno 7 precisava ser substituída por uma expressão escrita que conservasse a equivalência referencial e para isso, era necessário reconhecer e associar as palavras ‘quantia infinita de retângulos’ ao conceito de limite. Sua fala chama a atenção para um dos problemas do Cálculo, que é a conceitualização de limite. As dificuldades inerentes ao ensino e a aprendizagem de limite e de noções ligadas a este conceito, como a noção de infinito, são compartilhadas por alunos em diferentes instituições de ensino.

Percebendo, no estudo em vigor, a emergência da dificuldade ligada ao conceito de limite, mas levando em consideração que sua análise foge ao escopo do trabalho, sugere-se aos interessados, as leituras de Nascimento (2001), Amadei (2005) e Olímpio Junior (2006) que contemplam a referida problemática.

Durante a aplicação da sequência didática, a língua natural, por meio da fala, foi frequentemente mobilizada pelos alunos, constituindo-se em um elemento mediador nos processos de conversão.

O debate coletivo e oral, que emergiu naturalmente para discutir a possibilidade de somar a área de infinitos retângulos, possibilitou que a fala cumprisse não só a função de comunicação, mas a função de objetivação (DUVAL, 2011b) que permitiu aos alunos tomarem consciência sobre a noção de infinito e o conceito de limite*,* levando-os a elaborarem conjecturas, como a da Figura 45.

Figura 44: Conjectura do Aluno 12 acerca da soma das áreas de infinitos retângulos


Se considerarmos uma quantidade infinita de retângu-
los, cada vez mais nos aproximaremos da área A,
porém, continuará uma pequena parte dos retângulos
fora da área limitada. Nos aproximaremos cada vez
mais da área A e assim podemos considerar como
sendo o valor procurado.

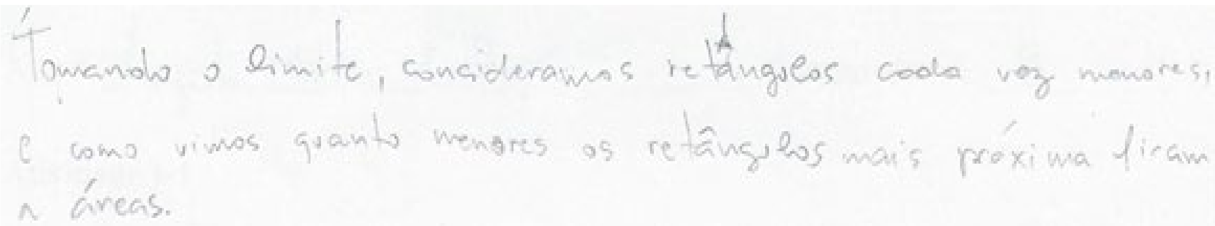
Fonte: Autora

A resposta do Aluno 12 traduz as respostas dos outros 17 alunos, os quais concordaram que era possível somar a área de infinitos retângulos e que a ‘sobra’ de áreas acima da curva de $f(x)$ poderia ser desconsiderada, uma vez que a soma das áreas dos retângulos estava suficientemente próxima da área A.

A maioria dos alunos registrou a expressão $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ para a soma de Riemann de $f(x)$ com *n* retângulos, num intervalo qualquer [a,b], concluindo que ela representava a área A. As atividades de construção de somas de Riemann, propiciaram aos alunos o desenvolvimento da operação cognitiva de formação, pela qual uma marca ou um conjunto de marcas são reconhecidas como representação de algo em determinado sistema semiótico (DUVAL, 2015). Neste caso, a expressão $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ é a marca que evoca o objeto soma de Riemann.

No final do bloco, nas Considerações, os alunos relembraram o conceito de integral definida. Questionados sobre a presença da palavra limite neste conceito, um aluno afirma que:

Figura 45: Noção de limite pelo Aluno 10


Tomando o limite, consideramos retângulos cada vez menores,
e como vimos quanto menores os retângulos mais próxima ficam
a áreas.

Fonte: Autora

Da Figura 46, infere-se que o Aluno 10 associou a soma das áreas de infinitos retângulos ao conceito de limite da função. Para ele, tomar o limite da função, quando *n* tendia ao infinito, tornava a soma de Riemann tão próxima da área da região A, quanto se desejava.

A última atividade do bloco indagava acerca da possibilidade da integral definida apresentar resultado negativo. Sobre isso, a maior parte dos alunos registrou que a função $f(x_i)$, $i = 1,2, \ldots n$ poderia ser negativa se a curva estivesse abaixo do eixo x, e neste caso, a integral definida seria negativa e não representaria a área da região.

3.4.2 Análises a *priori* e a *posteriori* das atividades do Bloco 2

<u>BLOCO 2:</u> Áreas de regiões em diferentes posições no plano cartesiano

O objetivo desse bloco consiste em dar condições para que os alunos compreendam que a integral enquanto área de uma região depende da posição desta região no plano cartesiano, e esta, por sua vez, depende do esboço de curvas.

As atividades deste bloco devem esclarecer que a soma de Riemann é positiva sempre que a região estiver posicionada acima do eixo x e neste caso, a integral definida representa a área da região. Outrossim, para regiões abaixo deste eixo, a referida soma e a integral são negativas, o que indica que não representam a área da região.

3.4.2.1 Análise a *priori* da Atividade 1-2

Atividade 1 -2 - Seja a função $f(x) = x$.

a) Esboce a curva da função $f(x)$ e identifique a área A abaixo desta curva, de 0 a 2, pintando-a. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo de Entrada* a expressão x e tecle *Enter*.

b) Determine a soma de Riemann da função $f(x)$ no intervalo [0,2], para um **número b** de retângulos. Use o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável **< Número de Retângulos >** por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Além da variável **b** aparece na tela do GeoGebra a **variável a** que mostra a soma de Riemann da função. Teste valores para **b,** como $b = 4$, $b = 10$ e $b = 1000$ e observe os valores desta soma. Para que valor a área A se aproxima?

c) Reduza a quantidade de retângulos para $b = 4$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. No intervalo [0,2], observe a posição dos retângulos e a posição da curva $f(x)$ no plano cartesiano. Com base nestas observações **justifique** suas respostas:

- A curva está posicionada acima ou abaixo do eixo *x*?
- Os retângulos estão posicionados acima ou abaixo do eixo *x*? Neste caso, a altura dos retângulos é positiva ou negativa? Quem fornece a altura?
- A área de cada retângulo é positiva ou negativa? Por quê?
- O que a soma de Riemann representa?

d) Calcule a área da região A usando conhecimentos de geometria.

e) Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* para calcular a integral da função $f(x) = x$ em [0,2] e escreva algebricamente esta integral. Compare o resultado obtido com a área A encontrada via geometria. O que se observa? O que a integral definida fornece neste caso?

Nesta atividade espera-se que os alunos identifiquem a região A, limitada superiormente pela reta $f(x) = x$, inferiormente pelo eixo x e lateralmente pela reta vertical $x = 2$.

O uso do comando *SomaDeRiemannSuperior,* no GeoGebra, auxilia na apreensão perceptiva e operatória dos alunos. Partindo destas apreensões eles devem perceber que os retângulos e a curva $f(x)$ estão posicionados acima do eixo *x* e por esta razão, a altura e a área de cada retângulo são positivas. Logo, a soma de Riemann representa a área A.

O cálculo da área A via geometria e o cálculo da integral fornecem o mesmo valor da soma de Riemann, o que deve levar os alunos a afirmarem que a integral de $f(x)$ em [1,2] representa a área da região A.

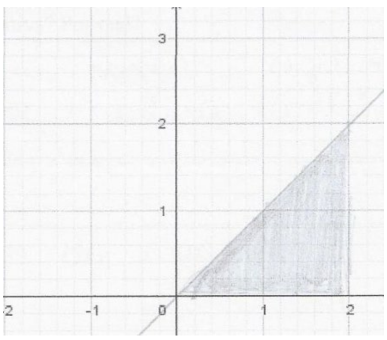
3.4.2.2 Análise a *posteriori* da Atividade 1-2

As atividades do Bloco 2 foram aplicadas aos 20 alunos, na noite de 10 de Abril.

Procurando explicitar a relação entre a integral definida e a posição da região no plano cartesiano, esta primeira atividade pretende mostrar que a soma de Riemann é positiva sempre que a região estiver posicionada acima do eixo *x.*

Com auxílio do GeoGebra os alunos esboçaram a curva $f(x) = x$ e da apreensão perceptiva, identificaram a região A com formato triangular, definida no intervalo [0,2], conforme ilustração:

Figura 46: Identificação da região A, pelo Aluno 18



Fonte: Autora

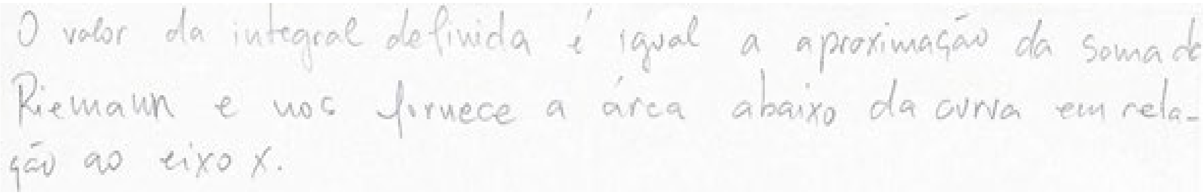
Aqui, o Aluno 18 identifica a região A, limitada pela reta $f(x) = x$, pelo eixo x e pela reta vertical $x = 2$.

Por meio do comando *SomaDeRiemannSuperior* do GeoGebra, os alunos realizaram a operação de reconfiguração intermediária. Variando a quantidade de partições do intervalo

[0,2], identificaram o posicionamento dos retângulos acima do eixo x e perceberam que suas alturas e suas áreas eram positivas.

Usando conhecimentos de geometria calcularam a área A. Aplicando o comando *Integral* no GeoGebra, chegaram ao mesmo valor encontrado para a soma de Riemann e para a área via geometria. Essa coincidência levou o Aluno 10 a afirmar:

Figura 47:Considerações do Aluno 10 sobre o que a integral fornece


O valor da integral definida é igual a aproximação da soma de Riemann e nos fornece a área abaixo da curva em relação ao eixo x.

Fonte: Autora

Ao verificar que a soma de Riemann superior da função possuía o mesmo valor da integral definida e também da área A calculada via geometria, o aluno sentiu-se à vontade para concluir que a integral definida representava a área da região A.

3.4.2.3 Análise a *priori* da Atividade 2-2

Atividade 2 -2 - Considere a mesma função $f(x) = x$.

a) Abra um novo arquivo no GeoGebra. Esboce a curva da função $f(x)$, digitando no *Campo de Entrada* do GeoGebra a expressão x. Identifique a região B sob esta curva, no intervalo [-1,0], pintando-a.

b) Determine a soma de Riemann da função $f(x)$ em [-1,0] para um **número b** de retângulos. Use o comando *SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável < **Número de Retângulos** > por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Além da variável **b** aparece na tela do GeoGebra a **variável a** que mostra a soma de Riemann da função. Teste valores para **b,** como $b = 4$, $b = 10$ e $b = 1000$. A soma de Riemann é positiva ou negativa? Por quê?

- Para que valor a soma de Riemann se aproxima? Qual a relação entre o número de retângulos e o valor desta soma?

c) Reduza a quantia de retângulos para $b = 4$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. No intervalo [-1,0], observe a posição dos retângulos e a posição da curva $f(x)$ no plano cartesiano. Com base nestas observações justifique suas respostas:

- A curva está posicionada acima ou abaixo do eixo x?
- Os retângulos estão posicionados acima ou abaixo do eixo x? Neste caso, a altura dos retângulos é um valor positivo ou negativo? Calcule a altura do maior retângulo.
- Por que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ é negativa no intervalo [-1,0]? Justifique.
- Para que valor a soma de Riemann se aproxima?

d) Calcule a área da região B usando conceitos da geometria e compare com o valor aproximado pela soma de Riemann. O que se percebe?
e) Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* para calcular a integral em [-1, 0].

- Qual o valor da integral? Este valor coincide com o valor da área obtido por meio da geometria?
- Caso os valores sejam diferentes, qual deles você considera adequado para a área B? Neste caso, a integral definida representa a área B? Caso não, o que a integral definida fornece?

f) Observando a posição da região B e a posição da curva $f(x)$ em [-1,0], ambas em relação ao eixo *x,* interprete o resultado **negativo** da integral definida.
g) Escreva uma expressão matemática (fórmula) para encontrar a área da região B, usando integral definida. Calcule o valor da área B.

Da apreensão perceptiva dos alunos, espera-se o reconhecimento da região B, limitada superiormente pelo eixo x, inferiormente pela reta $f(x) = x$ e lateralmente pela reta vertical $x = -1$.

O uso do comando *SomaDeRiemannInferior,* no GeoGebra, deverá chamar a atenção dos alunos para a soma de Riemann da função, que nesta situação assume valor negativo, diferentemente da atividade anterior em que ela era positiva e representava a soma das áreas dos retângulos. Com isso, a apreensão perceptiva deve conduzi-los a reconhecerem que os retângulos e a curva estão posicionados abaixo do eixo *x* e que, por esta razão, a soma de Riemann é negativa e não representa a área B, mas fornece o oposto desta área.

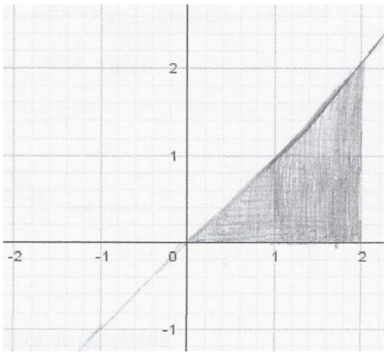
Observando o formato triangular da região B, é possível calcular sua área via geometria, chegando-se ao valor 0,5. Aplicando o comando *Integral* para $f(x) = x$ em [-1,0], aparece na tela do GeoGebra o valor $-0,5$ que coincide com a soma de Riemann, mas diverge do valor da área encontrado via geometria. Este é um momento para os alunos refletirem sobre os resultados obtidos, especialmente sobre o porquê de serem opostos. Eles devem refletir sobre o conceito de área, entendendo que enquanto grandeza, a área assume valores positivos, e portanto a integral de $f(x)$ em [-1,0] não representa a área da região B.

Quanto ao resultado negativo da integral de $f(x) = x$ em [-1,0], precisam mobilizar a apreensão perceptiva para associá-lo à posição da região B, que encontra-se abaixo do eixo *x*. Assim, devem começar a perceber que a integral só representa a área de uma região, quando ela estiver posicionada acima do eixo x. Para encontrar a área B, basta, por exemplo, tomar o módulo da integral, isto é, $B = \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| = 0,5$.

3.4.2.4 Análise a *posteriori* da Atividade 2-2

Antes da análise a *posteriori* dessa atividade, faz-se necessário mostrar a Figura 49, que representa a região A abordada na Atividade 1-2.

Figura 48: Região A abaixo de $f(x) = x$ e acima do eixo x, em [0,2], pelo Aluno 9



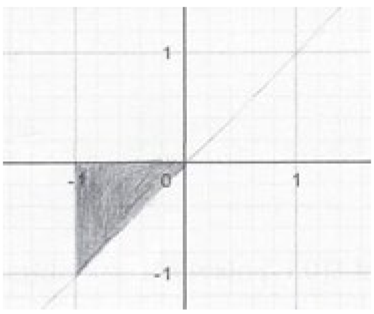
Fonte: Autora

De acordo com a figura, o Aluno 9 identifica a região A posicionada acima do eixo x. Aqui, a integral de $f(x) = x$ em [0,2] resultava em um valor positivo e portanto, a referida integral fornecia a área da região.

Nesta Atividade 2-2, os alunos são instigados a pensar a relação da integral definida com uma região posicionada abaixo do eixo x, diferentemente da Atividade 1-2 em que a região estava acima deste eixo.

Com auxílio do GeoGebra eles não tiveram dificuldades para esboçar o gráfico de $f(x) = x$ e identificar a região B acima da reta e abaixo do eixo x em [-1,0], como ilustra a figura:

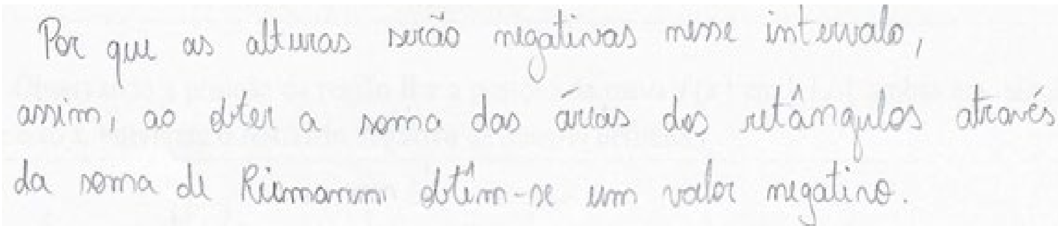
Figura 49: Região B acima de $f(x) = x$ e abaixo do eixo x, em [-1,0], pelo Aluno 9



Fonte: Autora

Considerando a representação da região B, semelhante a da Figura 50, e usando o comando *SomadeRiemannInferior,* os alunos perceberam que quanto maior o número de retângulos, mais a soma de Riemann inferior se aproximava do valor negativo -0,5. À procura de explicações para o valor negativo da soma, o Aluno 1 voltou-se à representação visual dos retângulos que decompunham a região B, mais especificamente às suas alturas, e concluiu:

Figura 50: Interpretação do Aluno 1 para o sinal negativo da soma de Riemann


Por que as alturas serão negativas nesse intervalo, assim, ao obter a soma das áreas dos retângulos através da soma de Riemann obtém-se um valor negativo.

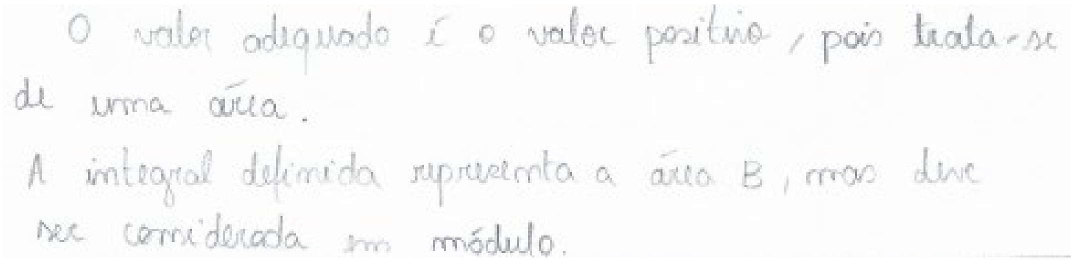
Fonte: Autora

Mobilizando as apreensões perceptiva e operatória, o Aluno 1 justificou o porquê da soma de Riemann inferior ser negativa. Observando no registro gráfico-geométrico os traços verticais, que representavam as alturas dos retângulos, percebeu que tais traços estavam posicionados abaixo do eixo x e portanto seriam negativas as alturas, as áreas dos retângulos e consequentemente, a soma de Riemann.

Apesar de as representações gráfico-geométrica e algébrica não serem congruentes, a conversão foi desenvolvida com espontaneidade pelo Aluno 1, assim como pela maioria dos colegas. Esta espontaneidade se deve ao fato de que esta conversão foi explorada nas atividades anteriores e agora, os alunos já reconheciam o objeto altura em suas distintas formas. Isso mostra que os dois registros foram coordenados e que conversão está diretamente ligada à compreensão conceitual, conforme discorre Duval (2012c, p. 282, grifos nosso) em sua hipótese fundamental: *"a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão".*

Na sequência da atividade, era necessário calcular a área B via conhecimentos de geometria. Observando o formato triangular da região B, os alunos aplicaram a fórmula da área de um triângulo e chegaram ao resultado 0,5 u. a. Também calcularam a integral de $f(x) = x$ em [-1,0] e chegaram ao mesmo valor da soma de Riemann, a saber, -0,5. Aqui, novamente eles pararam para refletir sobre os valores divergentes, obtidos via geometria e via integral, já que na Atividade 1-2 eles coincidiam e representavam a área da região A. Partindo das reflexões, o Aluno 5 apresentou seu entendimento da situação:

Figura 51: Considerações do Aluno 5 sobre o valor adequado para a área B


O valor adequado é o valor positivo, pois trata-se de uma área.
A integral definida representa a área B, mas deve ser considerada em módulo.

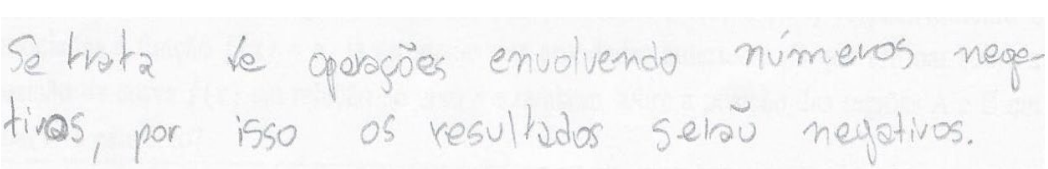
Fonte: Autora

De acordo com a Figura 52, o aluno descreve que o resultado positivo da área B, obtido via geometria, é mais adequado do que o valor negativo obtido via integral. Também afirma que para encontrar a área da região B, posicionada abaixo do eixo *x,* era preciso calcular o módulo da integral.

Ainda sobre a divergência dos valores da área A e da integral, a maioria dos alunos entendeu que a integral de $f(x) = x$ em [-1,0] não representava a área da região B, justificando que a imagem da função era negativa ou que a região estava posicionada abaixo do eixo *x*. Mais, concluíram que para calcular a área de uma região posicionada abaixo do eixo *x* era preciso considerar o valor absoluto da integral, a exemplo do Aluno 5 (Figura 52).

Dos 20 participantes, 4 não deixaram claro em suas respostas a interpretação do resultado negativo da integral, como exemplifica a Figura 53:

Figura 52: Interpretação do Aluno 6 para o resultado negativo da integral

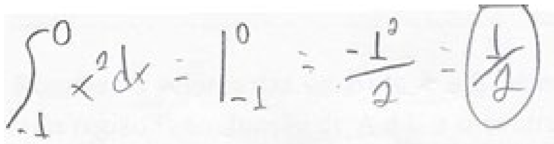

Se trata de operações envolvendo números negativos, por isso os resultados serão negativos.

Fonte: Autora

Nesta figura, o Aluno 6 relaciona o resultado negativo da integral a valores negativos, que podem se referir ao intervalo de integração ou às alturas dos retângulos. No primeiro caso, haveria o entendimento equivocado, uma vez que o sinal do resultado da integral não está atrelado aos sinais dos limites de integração. No segundo caso, seu entendimento estaria correto, já que as alturas dos retângulos são negativas no intervalo [-1,0]. Para esclarecer esta questão, a pesquisadora entrevistou o aluno, o qual confirmou que o termo 'números negativos' se referia às alturas dos retângulos.

Quando solicitado que escrevessem uma expressão para calcular a área B, já que a região estava posicionada abaixo do eixo *x*, 3 alunos não fizeram nenhuma alteração na expressão algébrica, conforme se observa:

Figura 53: Cálculo da área B, pelo Aluno 11



Fonte: Autora

Para calcular a área da região B, o Aluno 11 não acrescentou o módulo à integral. Quando questionado pela pesquisadora sobre o motivo de desconsiderar o sinal negativo que aparecia no resultado da integral, justifica que a área deve ser positiva, e que portanto, basta assumir o resultado positivo da integral. Isso indica sua compreensão de que a integral não representa a área de uma região posicionada abaixo do eixo *x*.

3.4.2.5 Análise a *priori* da Atividade 3-2

Atividade 3 -2 - Considere a mesma função $f(x) = x$.

a) Abra um novo arquivo no GeoGebra. Esboce a curva da função $f(x)$ em [-1,2] via comando *Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* e identifique a região C limitada por $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

b) Sejam B e A as sub-regiões definidas nos intervalos [-1,0] e [0,2] respectivamente e associadas à função $f(x) = x$, já estudadas nas atividades anteriores. O que afirmar sobre a posição da curva $f(x)$ em relação ao eixo *x* e também sobre a posição das regiões A e B em relação a este eixo?

c) Resgate os valores das subáreas A e B, já encontrados nas atividades 1-2 e 2-2. Escreva a área da região C em função de A e B e encontre o valor de C.

d) Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* para calcular a integral de $f(x) = x$ em [-1,2] e escreva esta integral e o valor obtido. Compare o resultado da integral com o valor da área C encontrado no item anterior: são iguais? Neste caso, a integral definida representa a área C?

e) Observe novamente a posição das subáreas A e B em relação ao eixo *x* e os seus valores. Como você interpreta o resultado da integral em [-1,2] em função das subáreas A e B? De que maneira as posições das regiões A e B no plano cartesiano estão relacionadas com a integral no cálculo de áreas? Justifique.

f) Escreva e calcule as integrais nos intervalos [-1,0] e em [0,2] anotando seus resultados. Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Também, escreva uma expressão que forneça a área da região B.

g) Escreva uma expressão para calcular a área C em função das integrais em [-1, 0] e em [0,2].

Inicialmente os alunos devem esboçar a reta $f(x) = x$, identificar a região C limitada lateralmente pelas retas $x = -1$ e $x = 2$, reconhecendo as sub-regiões A e B definidas em [0,2] e em [-1,0], nesta ordem. Em seguida, para escrever a região C em função de A e B, precisam observar a posição das sub-regiões em relação ao eixo x: a região A está acima do eixo x e abaixo da curva $f(x)$, enquanto que a região B está abaixo do eixo x e acima da curva de $f(x)$. Também, a área C é a soma das áreas A e B. Sabendo que os valores das áreas A e B, $A = 2$ e $B = 0{,}5$ já foram determinados nas atividades anteriores, devem concluir $C = 2{,}5$.

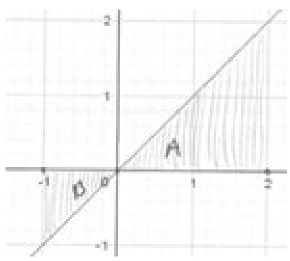
Ao calcular a integral em [-1,2], aparece na tela do GeoGebra a região C e o valor 1,5 que difere do valor 2,5 encontrado para a área C, via soma das áreas A e B. Este é outro momento de desestabilização que levará os alunos a questionarem o motivo desta diferença de valores e o que a integral representa em função das áreas A e B. Espera-se que eles interpretem o resultado da integral a partir da posição das áreas A e B e de seus respectivos valores, chegando à conclusão de que a integral pode ser entendida como a diferença das áreas A e B, isto é, $\int_{-1}^{2} f(x)dx = A - B$.

Para que a integral forneça a área C é preciso tomar o módulo da integral em [-1,0], já que neste intervalo a região A está abaixo do eixo x e o resultado da integral é negativo. Portanto, a área C pode ser calculada pela expressão $C = \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \int_{0}^{2} f(x)dx$.

3.4.2.6 Análise a *posteriori* da Atividade 3-2

Os alunos esboçaram a curva de $f(x) = x$ e identificaram a região C definida em [-1,2]. Aplicando tratamentos figurais, dividiram a região em duas sub-regiões, definidas nos intervalos [0,2] e [-1,0]. A maioria efetuou mentalmente esses tratamentos e não registrou no papel as designações das sub-regiões. Contrariamente à maioria, o Aluno 14 recorre às marcas A e B para designar e categorizar as referidas sub-regiões:

Figura 54: Decomposição da região C em sub-regiões A e B pelo Aluno 14

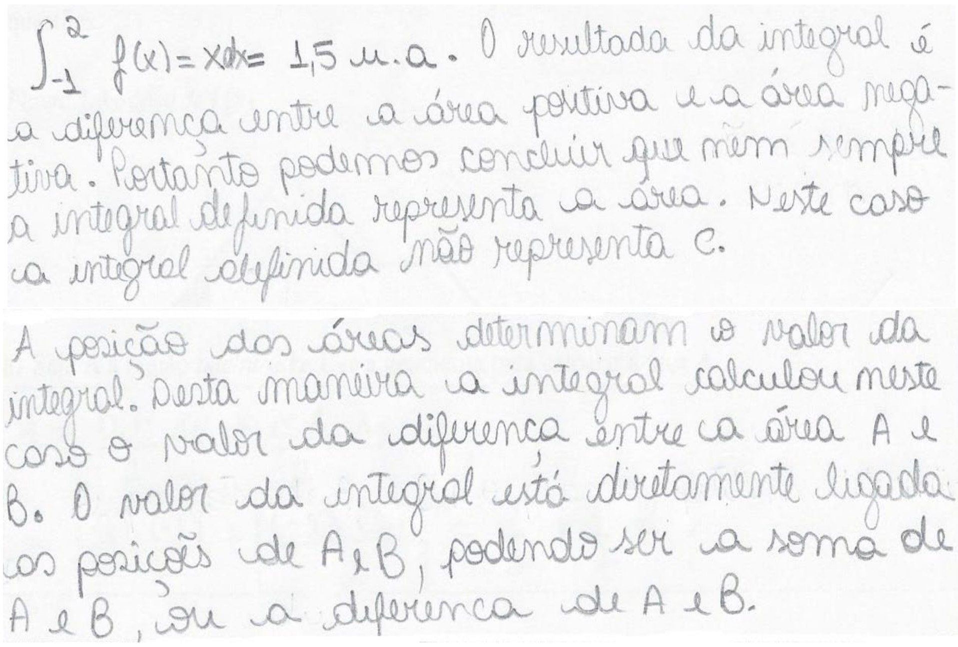


Fonte: Autora

Na Figura 55, o Aluno 14 efetuou a operação de designação pura e a categorização simples para mostrar que a região C era composta pela sub-região A, definida no intervalo [0,2], e pela sub-região B, em [-1,0]. A designação é uma operação semiótica associada à categorização e às propriedades do objeto. De fato, as marcas A e B revelam a categoria sub-região e algumas de suas propriedades, que neste caso, é a semelhança de triângulos. Como as sub-regiões possuem formato triangular, a semelhança pode ser observada por meio da proporcionalidade dos lados correspondentes de cada triângulo. Considerando que as propriedades matemáticas sempre fazem referência à relação entre duas unidades figurais, não podendo se referir a uma única unidade (DUVAL, 2004), então a semelhança entre as sub-regiões A e B decorre da relação entre os lados correspondentes de cada região triangular, que são unidades figurais de dimensão 1. Assim, as marcas A e B não se resumem apenas a 'nomes' dados às sub-regiões, mas carregam consigo, propriedades matemáticas inerentes às figuras geométricas.

Dos 20 alunos que afirmaram que a região C era a soma das sub-regiões A e B, 15 obtiveram valor 2,5 para a área C e valor 1,5 para a integral em [-1,2]. Percebendo a divergência de valores, o Aluno 4 escreve:

Figura 55: Relação entre a posição das sub-regiões e a integral, pelo Aluno 4


$\int_{-1}^{2} f(x)=x\,dx = 1,5$ u.a. O resultado da integral é a diferença entre a área positiva e a área negativa. Portanto podemos concluir que nem sempre a integral definida representa a área. Neste caso a integral definida não representa C.

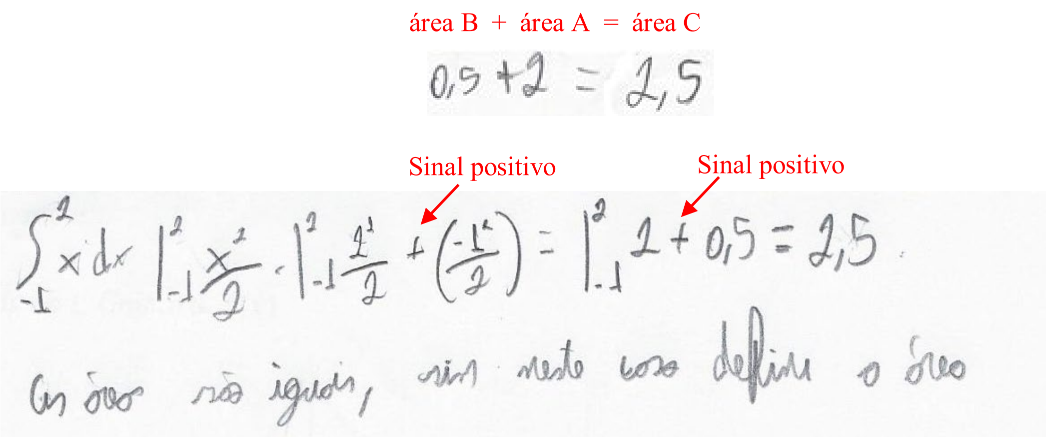
A posição das áreas determinam o valor da integral. Desta maneira a integral calculou neste caso o valor da diferença entre a área A e B. O valor da integral está diretamente ligada as posições de A e B, podendo ser a soma de A e B, ou a diferença de A e B.

Fonte: Autora

Da Figura 56, infere-se que o Aluno 4 efetuou tratamentos, sejam figurais ou algébricos, que lhe deram suporte para compreender que a integral definida é uma operação entre áreas de regiões. Mais, que a posição destas regiões no plano cartesiano determina se a operação é de adição ou subtração de áreas. A resposta do aluno fornece sinais de que compreendeu a relação da integral enquanto área e a posição da região no plano cartesiano e representa as respostas dos outros 14 alunos que chegaram à mesma compreensão.

Quanto aos outros 5 alunos, os quais também escreveram a região C a partir da soma das sub-regiões A e B, tem-se que: 1 aluno encontrou o valor 2,5 tanto para a área C quanto para a integral em [-1,2] (Figura 57); 4 encontraram o mesmo valor 1,5 para a área C e para a integral (Figura 58).

Figura 56: Cálculo da área C via geometria e cálculo da integral, pelo Aluno 11



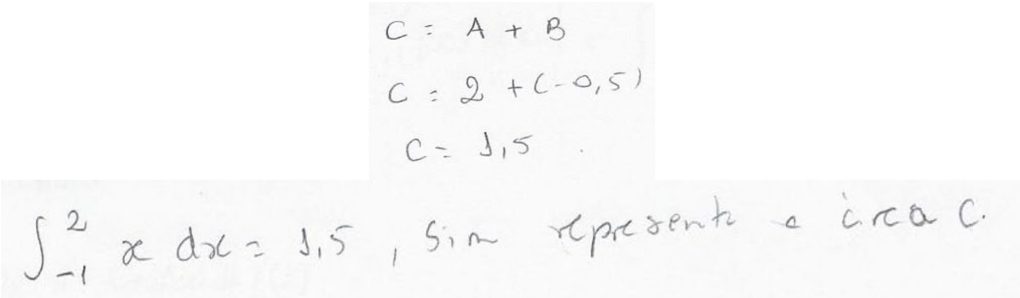
Fonte: Autora

O Aluno 11 efetuou tratamentos no registro numérico e encontrou o valor 2,5 para a área C, somando as subáreas B e A. No entanto, ao usar o Teorema Fundamental do Cálculo para desenvolver tratamentos no registro algébrico, confundiu os sinais escrevendo sinal positivo no lugar do negativo, o que resultou no valor 2,5 para integral, em vez de 1,5. Observando o valor encontrado a partir da soma das subáreas A e B, concluiu que a integral de $f(x) = x$ em [-1,2] representava a área C. Se o aluno tivesse usado o comando *Integral*, no GeoGebra, mesmo que para simples conferência do resultado, teria percebido que o resultado da integral estava equivocado. Segundo Duval (2011b), o computador não só permite a execução de tratamentos instantâneos, mas torna os cálculos mais seguros. Neste sentido, o uso do computador poderia levar o aluno a refletir sobre os diferentes resultados e sobre a sua conclusão de que a integral representava a área da região C.

Ainda em relação à Figura 57, as marcas vermelhas sobrepostas à resposta original do Aluno 11 são artifícios empregados pela pesquisadora para complementar o registro escrito ou para destacar erros incorridos por ele, no desenvolvimento da atividade, os quais são relevantes à análise em questão. Tais artifícios aparecem ao longo do trabalho, com intuito de chamar a atenção do leitor.

Os 4 alunos que chegaram ao valor 1,5 para a área C e também para a integral no intervalo [-1,2], confundiram os conceitos de área e de integral, conforme se observa:

Figura 57: Cálculo da área C via geometria e cálculo da integral, pelo Aluno 2

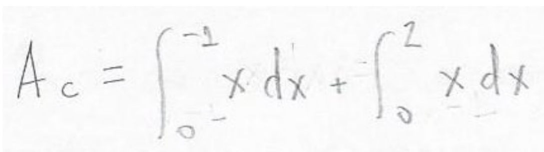


Fonte: Autora

Desta figura é possível perceber que o valor da integral coincidiu com o valor obtido para a área C, uma vez que o aluno considerou o valor negativo para a subárea B. Ele não mobilizou a apreensão discursiva para fazer a releitura do enunciado que solicitava escrever a área C em função das subáreas A e B. Se tivesse interpretado o conceito de área enquanto grandeza que assume só valores positivos, teria percebido que o valor negativo não corresponde à subárea B, mas indica que a sub-região B está posicionada abaixo do eixo *x*.

Questionados sobre a escrita de uma expressão algébrica para o cálculo da área C, em função das integrais definidas nos intervalos [-1,0] e em [0,2], a maioria escreveu a expressão algébrica $= \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \int_{0}^{2} f(x)dx$. Entretanto, a resposta do Aluno 10 diferencia-se das demais e é apresentada na Figura 59.

Figura 58: Inversão dos valores do limite, pelo Aluno 10

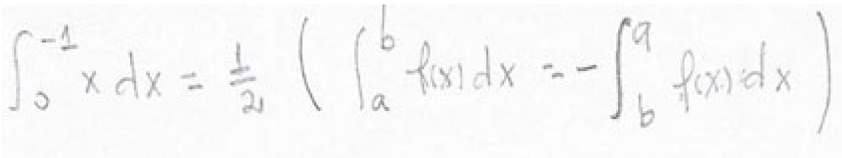


Fonte: Autora

Observa-se aqui que o Aluno 10 inverteu os limites de integração da integral $\int_{-1}^{0} x\, dx$, reescrevendo-a da forma $\int_{0}^{-1} x\, dx$. Essa atitude não foi mero descuido do aluno, mas proposital. Na atividade anterior, que requeria a escrita de uma expressão que fornecesse a subárea B, ele já havia percebido que a inversão dos limites de integração resultava em um valor positivo para a referida integral:

Figura 59: Cálculo da área B via inversão do limite de integração, pelo Aluno 10

Área B



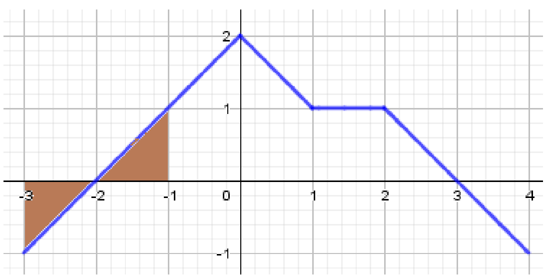
Fonte: Autora

O Aluno 10 executa tratamentos no registro algébrico, invertendo os limites de integração, para alterar o sinal do resultado da integral definida e justifica a validade do tratamento escrevendo a propriedade $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$, na qual se amparou. Em conversa com o aluno, revelou que a propriedade foi estudada em sala de aula e que neste momento, resgatou-a para mostrar que a integral pode representar a área de uma região posicionada abaixo do eixo *x*, bastando para isso, inverter os limites de integração.

3.4.2.6 Análise a *priori* da Atividade 4-2

Atividade 4-2 - Considere o gráfico da função $f(x)$ mostrado na figura a seguir e com base nele responda as questões.

Figura 60: Gráfico de $f(x)$



Fonte: Autora

a) Seja A a região *hachurada*. Use a geometria para calcular a área A.
b) Sem resolver a integral definida em [-3,-1], estime se o resultado desta integral é positivo, negativo ou nulo. Este resultado é maior, menor ou igual ao valor encontrado via geometria? Justifique.

c) Por que o valor da área A, via geometria, é diferente do valor estimado via integral definida em [-3,-1]?

d) Sem efetuar cálculos e observando o gráfico de $f(x)$, indique se o resultado de cada integral é positivo, negativo ou nulo:

- $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$
- $\int_{-2}^{0} f(x)dx$
- $\int_{0}^{3} f(x)dx$
- $\int_{3}^{4} f(x)dx$
- $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

e) Toda integral definida em [a,b] pode ser interpretada como a **área resultante** da operação entre subáreas. Assim, a integral em [-3,-1] pode ser interpretada como **área resultante** da operação entre as subáreas A1 e A2, em que A1 é a área da sub-região acima do eixo x, compreendida em [-2,-1] e A2 é a área da sub-região abaixo deste eixo, compreendida em [-3,-2]. Qual das opções abaixo representa a integral definida em [-3,-1] como área resultante:

( ) $\int_{-3}^{1} f(x)dx = A1 + A2$

( ) $\int_{-3}^{1} f(x)dx = A1 - A2$

( ) $\int_{-3}^{1} f(x)dx = A2 - A1$

f) Com base em conhecimentos de geometria, a área da região A, formada por A1 e A2, pode ser escrita em função destas subáreas como:

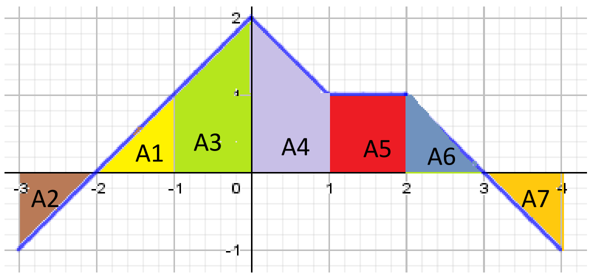
( ) $A = A1 + A2$

( ) $A = A1 - A2$

( ) $A = A2 - A1$

g) Observe as regiões demarcadas na figura a seguir.

Figura 61: Regiões abaixo do gráfico de $f(x)$



Fonte: Autora

Estime o sinal do resultado de cada integral e interprete-a como **área resultante**:

$a)\ \int_{-3}^{0} f(x)dx$ b) $\int_{0}^{2} f(x)dx$ c) $\int_{2}^{4} f(x)dx$ d)$\int_{-3}^{4} f(x)dx$

A atividade retoma e reforça elementos já estudados nas atividades anteriores, chamando a atenção para a importância da posição da região no plano cartesiano, ao mesmo tempo que apresenta a interpretação de área resultante, ou seja, apresenta a integral definida como diferença entre a área que está acima do eixo x e a área que está abaixo deste eixo.

Mobilizando a apreensão perceptiva e operatória, os alunos devem perceber que a região A é composta por duas sub-regiões, uma sub-região definida em [-2,-1] e posicionada acima do eixo x e a outra definida em [-3,-2], abaixo deste eixo. Mais, que as sub-regiões possuem a mesma área e estão posicionadas em lados opostos ao eixo x e que a área A vale 1 u.a.

Da estimativa da integral em [-3,-1], espera-se que os alunos efetuem a diferença das subáreas, concluindo resultado nulo para a integral. Neste momento, o valor da área A obtido via geometria não coincide com o valor estimado, logo, os alunos deverão repensar sobre o que a integral fornece.

Estimar os resultados das integrais definidas, propostas no item d), visa explorar tratamentos figurais. De fato, para concluir que o resultado é positivo, negativo ou nulo, os alunos precisam operar sobre a figura, decompondo-a em partes e reconhecendo as partes equivalentes entre si. Caso a região associada à integral seja composta por uma única sub-região, posicionada totalmente acima ou totalmente abaixo do eixo *x,* o resultado da integral será positivo ou negativo, respectivamente. Caso a região seja composta por mais de uma sub-região, em que uma sub-região esteja posicionada acima e a outra esteja abaixo do eixo x, há que se anular as regiões equivalentes, que têm a mesma área. Para exemplificar o último caso, a região associada à integral $\int_{-3}^{4} f(x)dx$ é composta pelas sub-regiões que estão abaixo do eixo x, definidas em [-3,-2] e em [3,4], e pela sub-região posicionada acima deste eixo e definida em [-2,3]. Logo, da apreensão perceptiva se conclui que a região acima do eixo x possui maior área que a região abaixo deste eixo e portanto, o resultado de $\int_{-3}^{4} f(x)dx$ será positivo.

Na sequência desta atividade é apresentada a definição de área resultante. Espera-se que os alunos compreendam que a área resultante é a diferença entre a área da sub-região acima do eixo x e a área da sub-região abaixo deste eixo e portanto, $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = A1 - A2$. Também, devem diferenciar o conceito de área resultante e do conceito de área no contexto da geometria. Neste último, a área da região A no intervalo [-3,-1] será a soma das subáreas A1 e A2.

Para reforçar a interpretação de área resultante é apresentada a Figura 62, porém, decomposta em sete sub-regiões. Com base nelas os alunos precisam estimar as integrais dadas e escrevê-las como área resultante. Neste momento são exploradas conversões envolvendo os registros algébrico e simbólico, sendo que o registro gráfico-geométrico serve de intermediário. Tais conversões requerem a mobilização da apreensão discursiva, para interpretar o conceito de área resultante e a mobilização das apreensões perceptiva e operatória para perceber regiões equivalentes e efetuar tratamentos entre as subáreas.

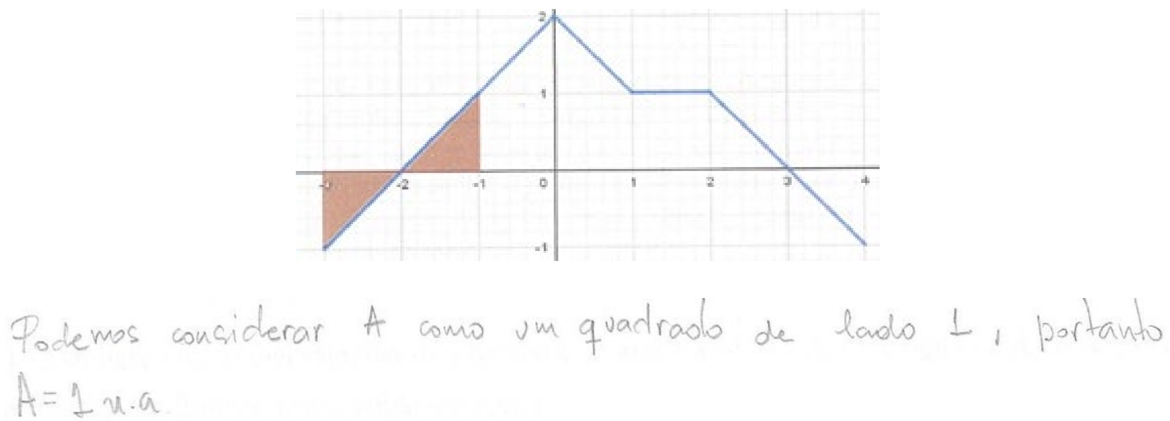
3.4.2.6 Análise a *posteriori* da Atividade 4-2

O foco desta atividade, em que participaram 20 alunos, consiste em reforçar a noção de que a integral definida é uma operação entre áreas, chegando-se à definição de área resultante.

Atendendo a uma das propostas desta pesquisa, que é contemplar os múltiplos registros de partida, conferindo a eles o mesmo grau de relevância para o ensino e para aprendizagem da integral no cálculo de área, aqui, partiu-se do registro gráfico-geométrico e explorou-a visualização da região. Seguindo as ideias de Duval (2012a, 2012b), Moretti (2013) considera a visualização resultado da conexão entre a apreensão perceptiva e a apreensão operatória.

Da apreensão perceptiva, os alunos reconheceram de imediato a região A formada por duas sub-regiões triangulares. Para o cálculo da área A, a maioria dos alunos seguiu as instruções do enunciado, que sugeria o uso de conhecimentos de geometria. Assim, calcularam a área de cada sub-região usando a fórmula da área de um triângulo e depois efetuaram a soma das subáreas. Contrariamente à maioria, o Aluno 10 apresentou outra maneira para encontrar a área A, pautada na visualização da região A.

Figura 62: Mobilização da apreensão operatória para cálculo da área A, pelo Aluno 10



Fonte: Autora

De acordo com a figura, o Aluno 10 mobilizou a apreensão perceptiva para reconhecer que a região era composta por duas sub-regiões triangulares de mesmo tamanho e por meio da reconfiguração, realizada mentalmente, justapôs as sub-regiões, formando um quadrado de lado 1. Desta forma, o cálculo da área A foi resultado da visualização do aluno, isto é, da conexão entre as operações perceptiva e operatória, em consonância com o entendimento de Moretti (2003). Outrossim, a operação de reconfiguração se mostrou com 'força' de tratamento matemático para demonstrar aquilo que o aluno visualizou sobre a figura (DUVAL, 2012a), que neste caso era a área da região A.

Quando solicitada a estimativa do resultado da integral em [-3,-1], partindo somente da visualização gráfico-geométrica da região A, a grande maioria estimou corretamente o resultado nulo para a área, porém houve estimativas positivas e negativas. Algumas conjecturas a respeito das estimativas aparecem na Tabela 14.

Tabela 14: Estimativas da integral em [-3,-1]

Exemplo de respostas	**Número de alunos**
Nulo, pois a integral irá fornecer a diferença entre a área acima do eixo x e abaixo do eixo x. Como neste caso as áreas são iguais, o resultado da integral será nulo. Resposta do Aluno 1	15
Negativo, pois está definido em um intervalo negativo. Resposta do Aluno 16	3
O resultado da integral será positivo, pois a integral pega o maior valor menos o menor. Resposta do Aluno 5	2

Fonte: Autora

Nesta tabela, o Aluno 1 estimou o valor nulo para a integral no intervalo [-3,-1] porque percebeu que as sub-regiões possuíam a mesma área e estavam posicionadas em lados opostos ao eixo *x*. Para ele, estava claro que a integral era uma operação entre as áreas das sub-regiões e esta operação dependia da posição das sub-regiões no plano cartesiano.

Ainda em relação aos dados da Tabela 14, percebe-se que a relação entre a integral e a posição das sub-regiões ainda estava obscura para outros 5 alunos. De fato, o Aluno 16 estimou resultado negativo, pois relacionou-o ao intervalo de integração em que a região estava definida. Infere-se da resposta do aluno que o resultado da integral seria positivo se estivesse definida em um intervalo positivo e negativo, caso contrário. Já o Aluno 5, que estimou resultado positivo, parece ter tomado como referência o Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que neste teorema, a integral em [a,b] é a diferença entre a primitiva aplicada no limite superior b e a primitiva aplicada no limite inferior a. Transparece que os termos 'maior valor' e 'menor valor', usados pelo Aluno 5, referem-se aos limites de integração b e a, respectivamente.

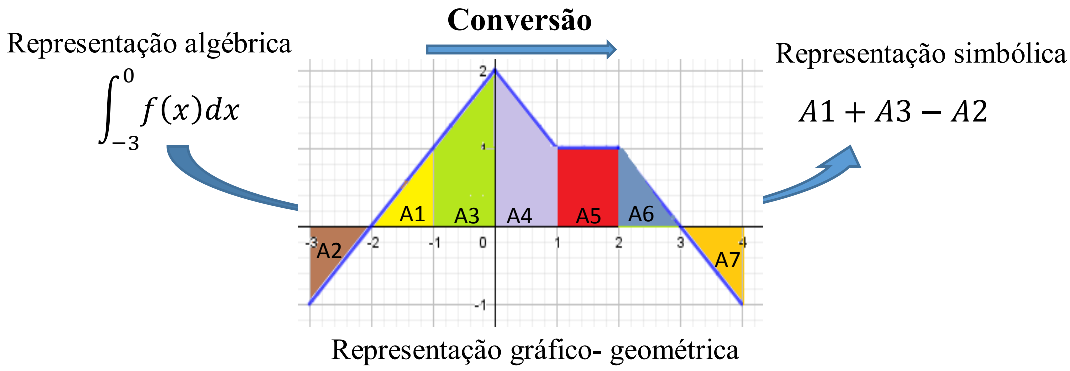
Para esclarecer a interpretação da pesquisadora, o Aluno 16 e o Aluno 5 foram entrevistados. Nela, o Aluno 16 menciona que sua resposta estava errada e afirmou que o resultado correto seria nulo, uma vez que a integral definida opera com a diferença da área acima do eixo *x* e a área sob este eixo. O depoimento do Aluno 5 reafirmou a interpretação da pesquisadora acerca da referência ao Teorema Fundamental do Cálculo, contudo, o aluno discorre que a realização das atividades seguintes clarificaram a ideia de integral enquanto operação entre áreas.

Para explicitar a relação da integral de $f(x)$ em [-3,-1] com a posição das sub-regiões no plano cartesiano foi apresentada a definição de **área resultante**. Embasados nesta definição os alunos observaram a região A e escreveram a integral em [-3,-1] em função das subáreas A1 e A2. Dos 20 participantes, 13 registraram acertadamente $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = A1 - A2$, enquanto que 6 escreveram $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = A1 + A2$.

Uma razão para os alunos terem escrito a integral como soma das subáreas A1 e A2 pode estar ligada ao termo 'área resultante', que de imediato e no contexto da Geometria, remete à adição de áreas. Contudo, no contexto do Cálculo e conforme definição apresentada anteriormente, o termo refere-se à diferença entre a área da região posicionada acima do eixo *x* e a área abaixo deste eixo. Percebe-se que a apreensão discursiva não foi mobilizada por estes alunos e o discurso foi abandonado, levando-os a somarem as áreas, em vez de subtraí-las. Segundo Duval (2012a), a atitude de abandonar o discurso é comum no ensino, especialmente quando a atividade exige a articulação da figura com o enunciado. Neste caso, os alunos não articularam a definição de área resultante com a representação das sub-regiões no registro gráfico-geométrico.

Oferecendo mais condições para clarificar e fortalecer a interpretação de área resultante, a última tarefa desta atividade explorou tratamentos figurais e o sentido de conversão contemplado na figura abaixo:

Figura 63: Conversão do registro algébrico para o simbólico

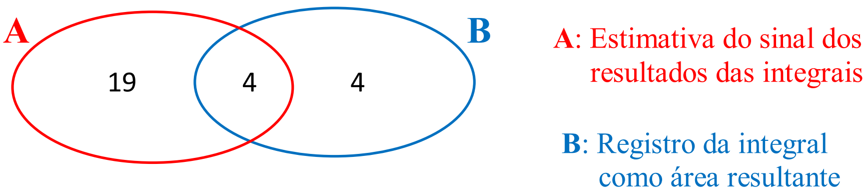


Fonte: Autora

A conversão mostrada na Figura 64 não é direta. Converter a representação da integral no registro algébrico em uma representação no registro simbólico depende do registro gráfico-geométrico.

Partindo das integrais dadas do item g), os 19 alunos que responderam esta questão exploraram o registro gráfico-geométrico para reconhecer as regiões correspondentes a cada integral. Aplicando tratamentos figurais, estimaram o sinal do resultado das integrais e escreveram-nas em função das subáreas A1, A2, ..., A7. Todos estimaram os sinais dos resultados das integrais, porém nem todos registraram no papel a integral como a área resultante, de acordo com a figura:

Figura 64: Estimativas dos resultados das integrais e interpretação como área resultante



Fonte: Autora

O conjunto A representa os alunos que estimaram o sinal do resultado das integrais e o conjunto B, os que registraram no papel a interpretação de área resultante. Observando os dados dos conjuntos, é possível concluir que 15 alunos só estimaram o sinal do resultado das integrais, nenhum aluno somente registrou a integral como área resultante e 4 realizaram as duas tarefas. A Figura 66 traz a resposta de um aluno que pertence à interseção dos conjuntos A e B.

Figura 65: Estimativa do Aluno 17

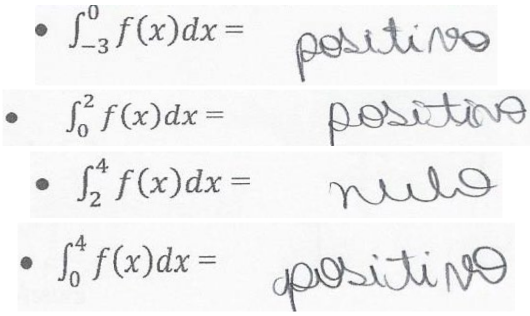
- $\int_{-3}^{0} f(x)dx =$ + A1 + A3 - A2
- $\int_{0}^{2} f(x)dx =$ + pois A4 + A5
- $\int_{2}^{4} f(x)dx =$ Nulo A6 - A7 e na figura as areas são do mesmo tamanho
- $\int_{0}^{4} f(x)dx =$ + pois A4 + A5 + A6 - A7

Fonte: Autora

Infere-se desta figura, que o Aluno 17 explorou o registro gráfico-geométrico, realizando tratamentos figurais necessários para estimar o resultado da integral e para escrever as integrais em função das subáreas A1, A2, ..., A7. Desta forma, converteu a representação da integral no registro algébrico em uma representação no registro simbólico.

Dos 15 alunos que só estimaram o sinal das integrais sem registrá-la como área resultante, 9 estimaram corretamente todos os sinais das integrais e 6 acertaram mais da metade das estimativas, conforme se observa nas Figuras 67 e 68, respectivamente.

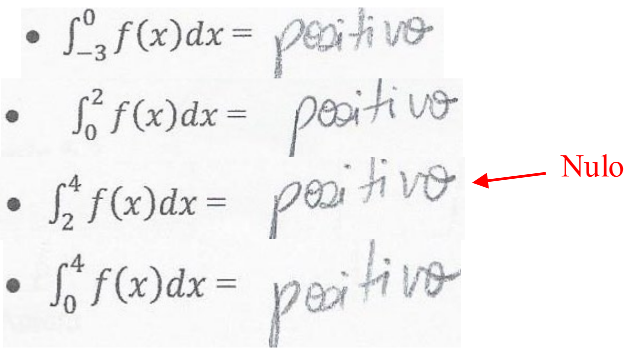
Figura 66: Estimativa do Aluno 13 para os sinais dos resultados das integrais



Fonte: Autora

O Aluno 13 é um dos alunos que estimou corretamente todos os sinais dos resultados das integrais, porém não registrou a integral em função das subáreas.

Figura 67: Estimativa do Aluno 5, para os sinais dos resultados das integrais



Fonte: Autora

Em observação à esta figura, das quatro estimativas solicitadas na atividade, o aluno acertou 75%. A conclusão de que a integral em [2,4] seria positiva sinaliza que ele não mobilizou as apreensões perceptiva e operatória para reconhecer que as subáreas A6 e A7 eram iguais e estavam em lados opostos do eixo x, o que resultaria no valor nulo para a integral.

De forma geral, os 15 alunos que somente estimaram o sinal do resultado das integrais, parecem ter interpretado corretamente o conceito de área resultante, uma vez que a estimativa do sinal resultado da integral dependia da posição das regiões A1, A2,...,A7 no plano cartesiano.

Nesta atividade, esperava-se que os alunos registrassem o sinal do resultado da integral e também escrevessem cada integral em função das regiões. Todavia, o que se percebeu é que a grande maioria esqueceu de fazer o último registro. Na tentativa de evitar tal esquecimento, sugere-se dividir o enunciado da atividade em duas partes, da seguinte maneira:

- Estime o sinal do resultado das integrais:

  $a) \int_{-3}^{0} f(x)dx$ b) $\int_{0}^{2} f(x)dx$ c) $\int_{2}^{4} f(x)dx$ d) $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

- Interprete cada integral como **área resultante**:

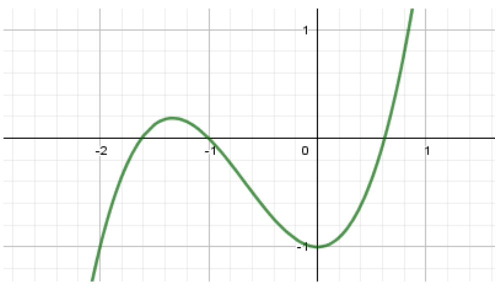
  $a) \int_{-3}^{0} f(x)dx$ b) $\int_{0}^{2} f(x)dx$ c) $\int_{2}^{4} f(x)dx$ d) $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

A separação do enunciado em partes aumenta a chance de os alunos atribuírem respostas à estimativa do sinal da integral e à interpretação de área resultante, reduzindo assim a possibilidade de não haver todos os registros escritos.

3.4.2.7 Análise a *priori* da Atividade 5-2

Atividade 5-2 - Considere o gráfico da função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Figura 68: Gráfico da função *f(x)*



Fonte: Autora

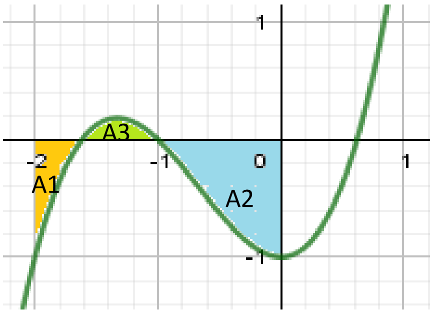
a) Identifique a região A que corresponde à integral $A = \int_{-2}^{0}(x^3 + 2x^2 - 1)dx$. Na Figura acima, demarque as sub-regiões de A, pintando-as.
b) Observe a posição das sub-regiões de A no plano cartesiano e sem fazer cálculos estime se o resultado da integral é positivo, negativo ou nulo. Justifique.
c) Calcule e anote o valor da integral $A = \int_{-2}^{0}(x^3 + 2x^2 - 1)dx$. O resultado da integral é positivo ou negativo? Este resultado está em conformidade com a estimativa anterior? Neste caso, a integral representa a área da região A?
d) Interprete e escreva a integral definida como área resultante.
e) Com base na geometria, escreva a área A em função das subáreas.

CONSIDERAÇÕES:

- Independente da posição de uma região no plano cartesiano, a integral definida sempre fornece a área desta região? Em que casos a integral definida fornece a área? Justifique.
- O que é preciso acrescentar à integral definida para que ela forneça sempre a área de uma região abaixo da curva de $f(x)$ num intervalo qualquer [a,b]?
- A integral definida pode ser interpretada como **área resultante**. Explique o que isso significa para você.

Por meio da apreensão perceptiva, os alunos devem identificar a região A composta pelas sub-regiões A1, A2 e A3, em que A1 e A2 estão posicionadas abaixo do eixo *x* e A3, acima deste eixo, de acordo com a Figura 70.

Figura 69: Sub-regiões de A



Fonte: Autora

Das apreensões perceptiva e operatória, os alunos devem reconhecer que as sub-regiões A1 e A2 estão posicionadas abaixo do eixo *x*, e portanto o resultado das integrais associadas a cada sub-região será negativa. Também, a integral associada à A3 terá resultado positivo, pois a região está acima do eixo *x*. Observando que a soma das integrais associadas à A1 e à A2 é maior que a integral associada à A3, espera-se a estimativa negativa para a integral em [-2,0].

Ao calcularem a integral em [-2,0] confirmarão o resultado negativo, concluindo que a integral não representa a área da região. Mais, devem escrever a referida integral como área resultante:

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 + 2x^2 - 1)dx = A3 - A2 - A1$$

Para obter a área A, devem somar o valor da área A3 com os valores absolutos das integrais associadas às sub-regiões A1 e A2.

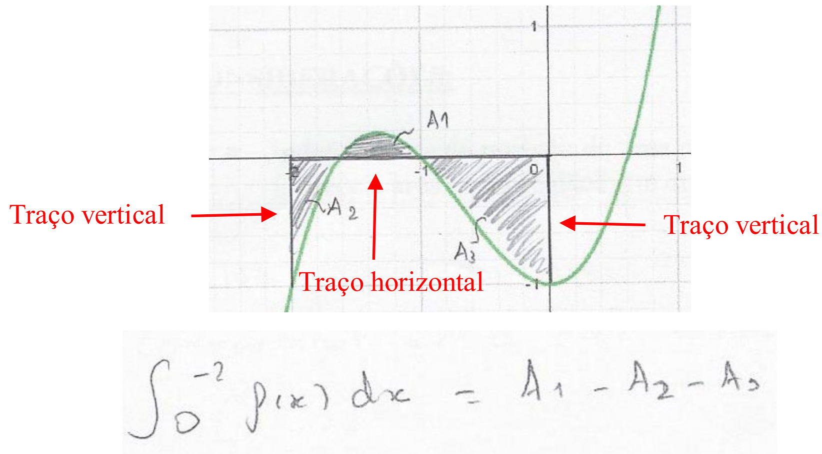
3.4.2.8 Análise a *posteriori* da Atividade 5-2

Esta atividade foi desenvolvida por 17 alunos.

De forma análoga à Atividade 4-2, buscou-se valorizar outros registros de partida que não unicamente o discursivo, frequentemente abordado em livros textos de Cálculo. Neste sentido, a atividade parte do registro gráfico.

Para identificar a região A os alunos efetuaram a conversão da representação da integral no registro algébrico para a representação gráfico-geométrico. Assim, observando a escrita algébrica $A = \int_{-2}^{0}(x^3 + 2x^2 - 1)dx$, reconheceram que os limites de integração correspondiam ao intervalo onde a região A estava definida e localizaram a região A. Em seguida, mobilizaram as apreensões perceptiva e operatória para identificar as sub-regiões ilustradas na figura:

Figura 70: Identificação das sub-regiões de A, pelo Aluno 2

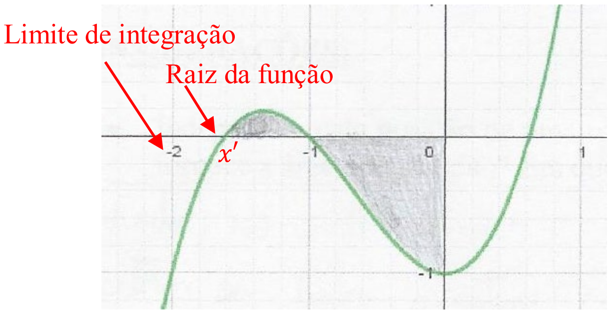


Fonte: Autora

Os traços verticais e horizontal, criados pelo Aluno 2, indicam que ele desenvolveu a operação de reconfiguração e as marcas A1, A2 e A3 categorizam as sub-regiões. Ademais, considerando que a atividade exigia apenas a visualização da região A, a reconfiguração permitiu ao aluno interpretar a integral como área resultante, convertendo a representação da integral no registro algébrico em uma representação no registro simbólico.

A exemplo do Aluno 2, outros 14 alunos também identificaram corretamente as três sub-regiões de A. Contudo, 2 alunos compartilharam a representação gráfico-geométrica da Figura 72.

Figura 71: Identificação das sub-regiões de A, pelo Aluno 9

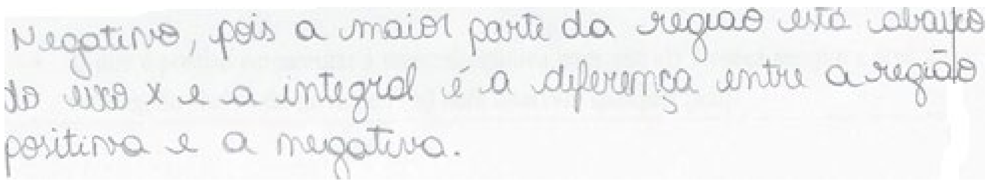


Fonte: Autora

Nessa figura, o Aluno 9 visualiza a região A formada por duas sub-regiões em vez de três. Ele confunde o limite de integração $x = -2$ com a raiz x' da função, devido à falta de atenção ou ao abandono da apreensão discursiva. No último caso, o aluno teria deixado de lado a informação sobre o valor do limite inferior de integração, apresentada no enunciado da atividade, voltando-se totalmente à figura, transparecendo que o enunciado não era mais necessário. Esse abandono representa a ausência de interpretação discursiva da figura, segundo Duval (2012a).

Quanto à estimativa do resultado da integral $A = \int_{-2}^{0}(x^3 + 2x^2 - 1)dx$, todos os 17 alunos afirmaram que seria um valor negativo. O Aluno 4 justifica sua estimativa escrevendo:

Figura 72: Estimativa da integral, com base na visualização da região A, pelo Aluno 4


Negativo, pois a maior parte da região está abaixo do eixo x e a integral é a diferença entre a região positiva e a negativa.

Fonte: Autora

Ao afirmar que o resultado da integral em [-2,0] é negativo, com base na posição das sub-regiões em relação ao eixo *x*, o Aluno 4 demonstra ter efetuado tratamentos figurais. De fato, os termos ‘região positiva’ e ‘negativa’, respectivamente, indicam que integral é a diferença entre a subárea da região acima do eixo *x* e as subáreas posicionadas abaixo deste eixo.

O fato de todos concluírem que o resultado da integral era negativo e apresentarem justificativas semelhantes à da Figura 73, indica que ao longo desse bloco as atividades deram conta de clarificar a interpretação de área resultante, a qual permanecia obscura para alguns alunos.

Nas Considerações do bloco foram retomados três pontos principais das atividades:

- O entendimento de quando a integral representa a área de uma região.
- Para calcular a área de uma região, há necessidade de considerar o valor absoluto das integrais cujas regiões correspondentes estão posicionadas abaixo do eixo *x*;
- A interpretação da integral definida como área resultante.

Quanto aos dois primeiros pontos, a maioria dos alunos compreendeu que a integral definida nem sempre representa a área de uma região. Para exemplificar segue a resposta do Aluno 18, diante da pergunta: A integral definida sempre fornece a área de uma região?

Figura 73: Resposta do Aluno 18 para: A integral sempre fornece a área de uma região?

Nem sempre, depende da posição da região
no plano. Se a região estiver abaixo do
eixo x, não fornece a área, a não ser
que seja calculada em módulo. Se a
região estiver acima do eixo x pode-se
calcular diretamente a integral definida
para encontrar a área da região.

Fonte: Autora

Esse aluno descreve sua compreensão a respeito do entendimento de quando a integral fornece a área da região e ainda afirma que é preciso acrescentar o módulo às integrais associadas a regiões posicionadas abaixo do eixo *x*, para obtenção da sua área.

Quanto ao terceiro ponto, que trata da interpretação de área resultante, os alunos associaram a integral a operações entre áreas de regiões. Neste sentido, a Figura 75 expõe uma dessas interpretações, enquanto que a Figura 76 revela que os conceitos de área resultante e de área total não se equivalem.

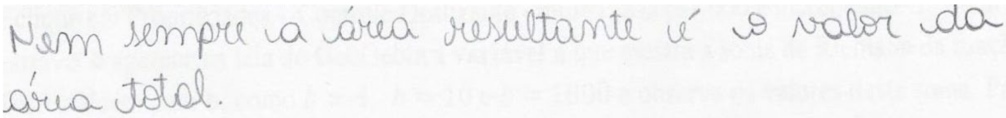
Figura 74: Interpretação do Aluno 18 para a integral definida como área resultante

Sim, se a área resultante for entendida
como a soma das integrais das partes,
considerando integral positiva e negativa.

Fonte: Autora

Na Figura 75, a palavra 'sim' afirma que a integral definida pode ser entendida como área resultante. Para o aluno, uma região dividida em 'partes' (sub-regiões) requer inicialmente o cálculo da integral em cada parte e as 'integrais das partes' podem ter resultado positivo ou negativo. Infere-se dessa resposta a correta interpretação de que a área resultante é a soma das integrais associadas às sub-regiões, as quais podem ser positivas ou negativas, dependendo da posição das sub-regiões no plano cartesiano.

Figura 75: Interpretação do Aluno 4 sobre área resultante e área total


Nem sempre a área resultante é o valor da área total.

Fonte: Autora

Percebe-se que o Aluno 4 diferencia os conceitos área total e área resultante. Infere-se da resposta que a área resultante pode ser um valor menor que a área total, uma vez que ela é a subtração entre a área posicionada acima do eixo x e a área posicionada abaixo deste eixo, diferentemente da área total, que no contexto da Geometria, é a soma das áreas, independentemente da posição ocupada pelas regiões.

Os tratamentos figurais e as conversões realizados pelos alunos, nesta atividade, foram necessários para proporcionar a eles a compreensão de que a integral é uma operação entre áreas e que nem sempre representa a área de uma região.

3.4.3 Análises a *priori* e a *posteriori* das atividades do Bloco 3

BLOCO 3: Área entre curvas

Para calcular a área de regiões limitadas entre curvas é imprescindível que a região esteja limitada por uma única curva superior e outra única curva inferior. No caso em que a região está limitada por mais de uma curva, seja superior ou inferior, é preciso decompô-la em sub-regiões, para garantir a unicidade das curvas. Portanto, as atividades do Bloco 3 devem levar os alunos a reconhecerem a necessidade de decompor ou não, uma região, para o cálculo de sua área.

3.4.3.1 Análise a *priori* da Atividade 1-3

Atividade 1-3 - Sejam as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 3$.
a) Esboce a curva de $f(x)$ e identifique a região A **abaixo** desta curva, definida no intervalo [-1,2], pintando-a. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo Entrada* a expressão $x^2 + 1$.
b) Esboce a curva de $g(x) = x + 3$. Identifique a região B **abaixo** desta curva e definida em [-1,2], pintando-a. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo Entrada* a expressão $x + 3$.
c) Esboce as curvas de $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 3$ no mesmo plano cartesiano e identifique a região C limitada pelas curvas, pintando-a. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese.** Em seguida observe a posição de cada curva, uma em relação a outra e responda:

- Que função limita superiormente a região C?
- Que função limita inferiormente a região C?
- Qual o intervalo em que a região C está definida?
- Qual das regiões possui maior área: A ou B?

d) Explique como encontrar a região C em função das regiões A e B.
e) Com base na resposta anterior, escreva a expressão para calcular a área C em função da integral de $f(x)$ e da integral de $g(x)$. Qual o significado dessa expressão para você?
f) Observe a expressão que você escreveu anteriormente. Use **duplamente** o comando *Integral,* da forma ***Integral(*** *<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)-* ***Integral(*** *<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* substituindo o termo *Função*, que representa o integrando, pelas funções $f(x)$ e $g(x)$, na **mesma ordem** da expressão que você escreveu anteriormente. Ao aplicar este comando aparecerá na tela do GeoGebra a variável **a** que mostra a área da região C. Qual o valor da área C? Este valor é positivo ou negativo?
g) Inverta a ordem das funções $f(x)$ e $g(x)$ e aplique novamente o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)- Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Qual o resultado? Ele é positivo ou negativo? Ao alterar a ordem das integrais, o que acontece com o valor da área A? Justifique.

Os alunos precisam esboçar as curvas de $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 3$ e identificar as regiões abaixo destas curvas. Em seguida, reconhecer a região C limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola.

No intervalo [-1,2] a região B, abaixo da reta, possui maior área que a região A, sob a parábola, e portanto a região C será a diferença das regiões B e A, nesta ordem, ou seja, $C = B - A$. Aqui, a apreensão perceptiva deve estar subordinada à apreensão discursiva, pois é preciso que os alunos releiam o enunciado para associar corretamente a expressão algébrica da função à sua respectiva curva. Sem a apreensão discursiva o aluno pode inverter a ordem das expressões, chegando ao resultado negativo para a área.

Reconhecendo que a região C é a diferença entre as regiões B e A, então o cálculo da área C é dado por $C = \int_{-1}^{2} g(x)dx - \int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Ao calcular a área C no GeoGebra, usando duas vezes o comando *Integral*, ou seja, digitando no *Integral (<g(x)>, <-1>, <2>) - Integral(<f(x)>, <-1>, <2>)*, obtém-se resultado positivo para a área. Contudo, a inversão da ordem das integrais produz o oposto deste valor, oriundo da diferença da área menor A pela área maior B.

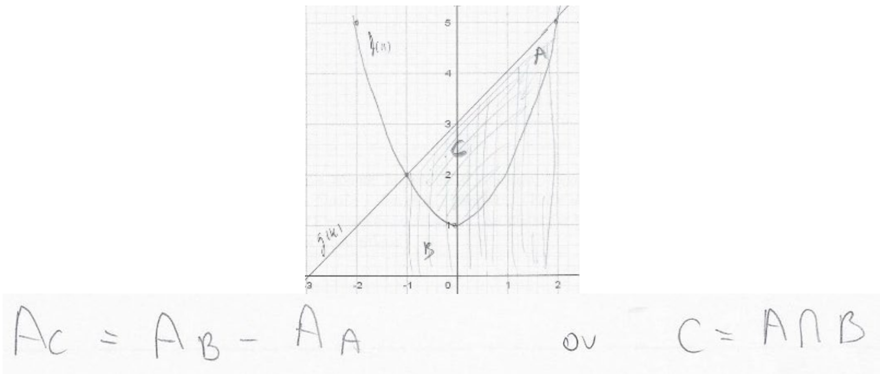
3.4.3.2 Análise a *posteriori* da Atividade 1-3

As atividades do Bloco 3 foram desenvolvidas dia 10 de Abril, logo após o término das atividades do Bloco 2, sendo que 19 alunos iniciaram as atividades.

Com ajuda do GeoGebra todos esboçaram as curvas $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 3$ identificando as respectivas regiões A e B, definidas no intervalo [-1,2]. Também não tiveram dificuldades para reconhecer que a região C estava limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola.

Para determinar a região C em função das regiões A e B, os alunos mobilizaram diferentes registros de representação, os quais são apresentados nas Figuras 77 e 78.

Figura 76: Múltiplos registros usado pelo Aluno 14 para representar a região C



Fonte: Autora

É possível observar nessa figura, que o Aluno 14 identificou a área da região C de duas formas distintas. No registro gráfico-geométrico localizou a região C, comum às regiões A e B. No registro algébrico, efetuando tratamentos, representou a região C por A_C= A_B- A_A e também por $C = A \cap B$. Ambas as representações algébricas sugerem que é possível desenvolver a função de expansão discursiva, já que elas não mostram tudo que realmente querem informar, sendo necessário explicitar o que está nas entrelinhas (DUVAL, 2004). Assim, subintende-se que ao designar e categorizar as áreas A, B e C pelas marcas A_A, A_B e A_C, respectivamente, e escrever A_C= A_B- A_Ao aluno quis dizer que a área da região C é a diferença entre a área B e a área A. Da segunda representação, subintende-se que a região C é a interseção das regiões A e B.

Na Figura 78, o Aluno 12 representa a área C no registro discursivo e no registro algébrico.

Figura 77: Registros usado pelo Aluno 12 para representar a região C


Encontrar a area de B e de A. Depois diminuir
A em B: B-A.

Fonte: Autora

De acordo com a figura, o Aluno 12 elabora um discurso para explicar o cálculo da área C em função das áreas A e B. No registro algébrico, representa a área C pela expressão $B - A$. A exemplo do Aluno 14 (Figura 77), a expressão $B - A$ possibilita a expansão do discurso, pois subintende-se que, para o Aluno 12, a área C é a área da região B subtraída a área da região A. Mais, subintende-se que a representação simbólica $B - A$ será substituída por valores numéricos correspondentes às áreas B e A, em que a diferença desses valores representará a área C.

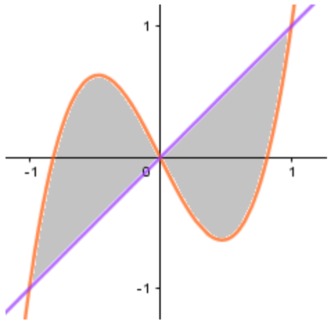
Cada registro empregado pelo Aluno14 e pelo Aluno12 mostra uma face do objeto em estudo, que neste caso é a área da região C. Assim, ao usarem dois registros para representar o mesmo objeto matemático, os alunos demonstram distinguir o objeto de sua representação, indo ao encontro das palavras de Duval (2012c, p. 270, grifos do autor) que afirmam que "**o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações**".

Para o cálculo da área C, todos os alunos registraram a escrita $C = \int_{-1}^{2} g(x)dx - \int_{-1}^{2} f(x)dx$. Orientados na atividade a inverter a ordem destas integrais, perceberam que o sinal da área C era negativo e justificaram a mudança de sinal com base na percepção do tamanho das regiões A e B, uma vez que a área B, abaixo da reta $g(x) = x + 3$, é maior que a área A, sob a parábola $f(x) = x^2 + 1$.

3.4.3.3 Análise a *priori* da Atividade 2-3

Atividade 2-3 - Considere a região A limitada pela curva $f(x) = 3x^3 - 2x$ e pela curva $g(x) = x$.

Figura 78: Região limitada entre as curvas *f(x) e g(x)*

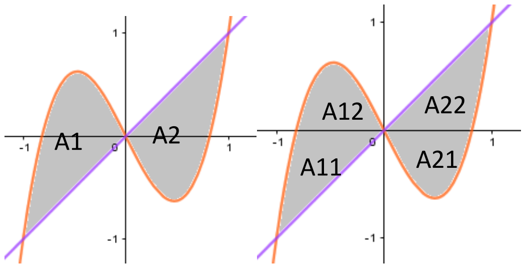


Fonte: Autora

a) Com base na figura, identifique o intervalo onde a região A está definida.
b) Sem efetuar cálculos, apenas observando a região A em [-1,1], estime o resultado da integral neste intervalo. Justifique sua resposta.
c) No GeoGebra, aplique o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* em [-1,1]. Escreva a integral e seu resultado. Que integrando você utilizou? O resultado coincide com sua estimativa?
d) Modifique a ordem das funções que compõem o integrando e aplique novamente o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* O resultado se manteve? Esta integral representa a área A?
e) Observe a posição das curvas $f(x)$ e $g(x)$. No intervalo [-1,1] existe uma única curva que limita superiormente a região A e uma única curva que limita inferiormente esta região? Para que valores de x se consegue garantir a unicidade das funções limitantes? Escreva estes valores como intervalos em *x* e para cada intervalo escreva uma integral definida.
f) Escreva a integral definida em [-1,0] e aplique o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Qual o valor da integral e o que ela fornece?
g) Escreva a integral definida em [0,1] e aplique o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Qual o valor da integral e o que ela fornece? Compare os resultados das integrais em [-1,0] e em [0,1]. Por que estes resultados são iguais?
h) Por que o resultado da integral no intervalo [-1,1] é nulo? Justifique.
i) Escreva uma expressão para calcular a área A a partir das integrais em [-1,0] e em [0,1] e em seguida calcule o valor de A.
j) É possível calcular a área A usando uma única integral definida? Caso sim, escreva esta integral. Caso não, justifique.

Partindo da visualização da região A, espera-se que os alunos identifiquem o intervalo [-1,1] em que a região está definida e estimem o resultado nulo para integral em [-1,1], justificando o resultado com base na posição das sub-regiões no plano cartesiano. Para isso a apreensão perceptiva e operatória devem conduzi-los a dividir a região A em sub-regiões A1 e A2, compreendidas em [-1,0] e em [0,1] respectivamente e a reconhecer que elas possuem a mesma área, já que as curvas possuem simetria central. Mais especificamente, podem ser divididas em sub-regiões A11, A12, A21 e A22 em que A11 e A22 são equivalentes e ocupam posições opostas em relação ao eixo *x*, da mesma forma para A12 e A21 (Figura 80).

Figura 79: Subdivisões da região A



Fonte: Autora

A integral em [-1,1] fornece valor nulo, independente do integrando. Os alunos devem reconhecer que a integral neste intervalo não representa a área já que, visivelmente, a região A possui área não nula.

Espera-se o reconhecimento de que a região A não está limitada superiormente por uma única curva e inferiormente por outra única curva, o que requer a divisão em sub-regiões A1 e A2, conforme definidas anteriormente.

Ao calcular a integral em [-1,0] aparece na tela do GeoGebra o valor 0,75 que corresponde a subárea A1, e ao calcular a integral em [0,1], aparece o valor 0,75 para a subárea A2. Assim, comprova-se que as subáreas A1 e A2 são equivalentes e que a área A será a soma destas subáreas.

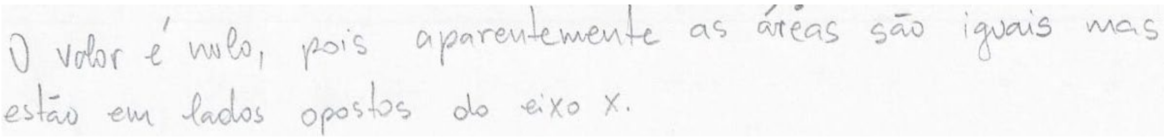
O questionamento sobre a possibilidade de escrever uma única integral definida para o cálculo da área A visa a exploração das apreensões perceptiva e operatória. De fato, busca-se observar se alunos percebem que, sendo as regiões A1 e A2 equivalentes, então basta calcular a integral em um dos intervalos [-1,0] ou [0,1] e duplicar o resultado, escrevendo, por exemplo, a expressão $A = 2.\int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx$.

3.4.3.4 Análise a *posteriori* da Atividade 2-3

Participaram da atividade 17 alunos.

Todos estimaram resultado nulo para a integral em [-1,1]. De fato, partindo da representação da região A no registro gráfico-geométrico, os alunos mobilizaram as apreensões perceptiva e operatória para perceber que a área acima do eixo *x* era igual a área abaixo deste eixo e portanto, a integral seria nula. Sobre isso, a Figura 81 apresenta a justificativa do Aluno 10 para a estimativa nula.

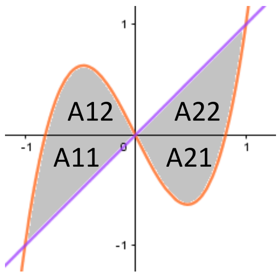
Figura 80: Estimativa do Aluno 10 para a integral em [-1,1]


O valor é nulo, pois aparentemente as áreas são iguais mas estão em lados opostos do eixo x.

Fonte: Autora

De acordo com a figura, há indícios de que o Aluno 10 mobilizou a apreensão perceptiva que lhe permitiu ver a simetria da região A, mesmo sem apresentar cálculos matemáticos para confirmar tal simetria. Por meio da apreensão operatória e de suas modificações mereológica e posicional, dividiu a região A em sub-regiões com a mesma área, de modo que estavam posicionadas em lados opostos ao eixo x. Sem ter registrado as modificações no papel, é possível que ele tenha visualizado a região de forma semelhante à da figura abaixo:

Figura 81: Inferência sobre as subdivisões da região A, pelo Aluno 10

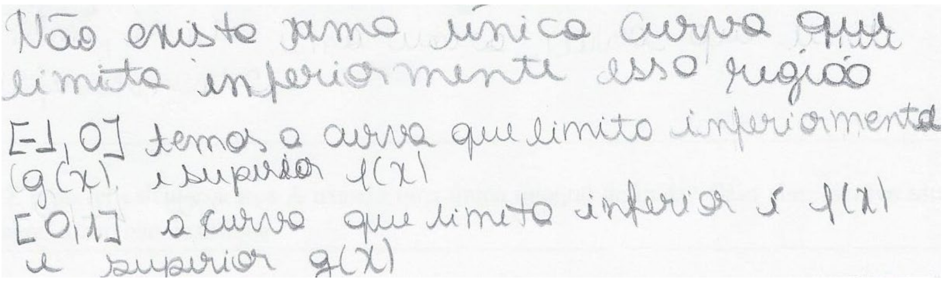


Fonte: Autora

A resposta do Aluno 10 também sinaliza que as atividades desenvolvidas no Bloco 2 alcançaram seu propósito de dar condições à compreensão da relação entre a posição da região no plano cartesiano e a integral definida. É um indicativo de que, até o momento, as atividades da sequência didática foram organizadas coerentemente, permitindo a apropriação dos conhecimentos produzidos e a sua aplicação em outras situações e contextos.

Observando a representação da região A no registro gráfico-geométrico, os alunos perceberam que ela estava limitada superiormente e inferiormente por duas curvas, ora pela curva $f(x)$, ora por $g(x)$. Com isso, dividiram o intervalo [-1,1] em sub-intervalos para garantir a unicidade das funções limitantes, como se pode perceber na Figura 83.

Figura 82: Identificação das curvas limitantes pelo Aluno 13


Não existe uma única curva que
limita inferiormente esso região
[-1, 0] temos a curva que limito inferiormenta
(g(x), e superior f(x)
[0,1] a curva que limita inferior é f(x)
e superior g(x)

Fonte: Autora

Observa-se na figura que a apreensão perceptiva do Aluno 13 lhe conduziu a efetuar tratamentos figurais. De fato, ao perceber que a região precisava estar limitada penas por uma curva inferior, dividiu o intervalo [-1,1] em subintervalos [-1,0] e [0,1] e identificou as curvas limitantes em cada subintervalo.

Neste momento da aplicação da sequência didática, próximo das 22h, a pesquisadora percebeu que alguns alunos demonstravam sinais de cansaço e requeriam maior tempo para desenvolver as atividades em comparação com as atividades anteriores. Consequentemente, nem todos os participantes finalizaram esta atividade e as duas atividades posteriores, previstas para a noite. Sob o olhar da pesquisadora, alguns fatores podem ter interferido para a não continuidade das atividades: neste estudo, diferentemente de uma aula expositiva e dialogada, os alunos são agentes ativos no processo de construção do conhecimento, num constante movimento de ações que integram reflexões, discussões e registros, o que pode ter exigido maior esforço dos alunos; o trabalho diurno, visto que a grande maioria dos alunos trabalha no contraturno das aulas; a dependência de ônibus municipal ou intermunicipal para se deslocar às suas casas, o que provocou a antecipação da saída dos alunos. A experiência da pesquisadora no magistério superior, mostra que tais fatores não são exclusivos desta pesquisa, podendo estar presentes em quaisquer atividades ligadas ao processo de ensino e de aprendizagem. Contudo, o fato de terem emergidos nesse trabalho, indica que eles devem ser mencionados, mesmo que não se tenha intenção de discuti-los ou de averiguá-los.

Diante do exposto, a atividade foi concluída por 9 alunos, dos quais, a maioria concluiu que a área A era obtida pela soma das integrais em [-1,0] e [0,1], ou seja, pela expressão $A = \int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{1}[g(x) - f(x)]dx$.

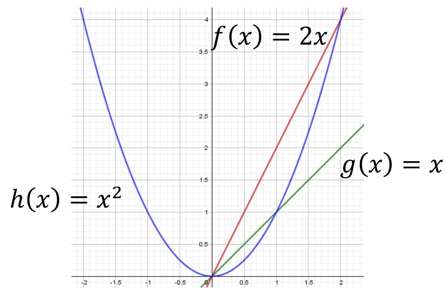
Questionados sobre a possibilidade de usar uma única integral para calcular a área A, os alunos responderam que seria impossível. A resposta unânime mostra que eles não mobilizaram a apreensão perceptiva e operatória para reconhecer que a área A poderia ser calculada a partir da integral em [-1,0] ou da integral em [0,1], bastando duplicar o seu valor, isto é, $A = 2.\int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx$ ou $A = 2.\int_{-1}^0 [f(x) - g(x)]\, dx$.

Para auxiliar os alunos a reconhecerem a área A escrita a partir de uma única integral, sugere-se modificar e acrescentar outros itens à atividade. No enunciado, por exemplo, ao invés de questionar a existência desta possibilidade, poder-se-ia afirmá-la deixando os alunos refletirem sobre a afirmação. Também poderiam ser exploradas regiões simétricas, dando indicativos da relação entre a simetria e a escrita algébrica de uma única integral.

3.4.3.5 Análise a *priori* da Atividade 3-3

Atividade 3-3 - Seja a região S limitada pelas curvas dadas na figura a seguir:

Figura 83: Região S entre três curvas

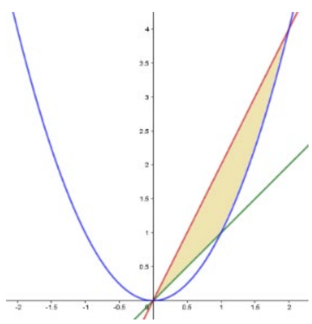


Fonte: Autora

a) Identifique a região S pintando-a. Escreva o intervalo onde ela está definida.
b) Observe a posição das curvas $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$. No intervalo onde a região S está definida, existe uma única curva que limita superiormente a região e uma única curva que limita inferiormente esta região?
c) Calcule a área S e descreva o procedimento utilizado.

Espera-se que o aluno identifique o intervalo [0,2] e a área S conforme figura abaixo:

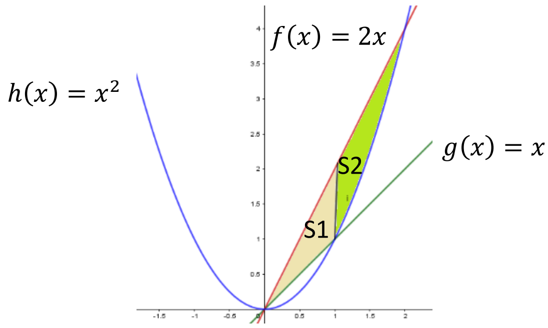
Figura 84: Região S



Fonte: Autora

No intervalo [0,2] há uma única curva limitante superior, mas há duas curvas que limitam inferiormente a região S. Neste caso as apreensões perceptiva e operatória precisam conduzir os alunos a dividirem a região em duas sub-regiões S1 e S2, em que cada sub-região contenha apenas uma curva limitante superior e outra curva limitante inferior, conforme figura:

Figura 85: As sub-regiões S1 e S2



Fonte: Autora

De acordo com a Figura 86, a região S1 está definida no intervalo [0,1] enquanto que S2 está definida em [1,2]. As integrais associadas a estas regiões são $S1 = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$ e $S2 = \int_1^2 [f(x) - h(x)]dx$ que resultam nos valores 0,5 e 0,67, respectivamente.

A área da região S será a soma das subáreas S1 e S2, ou seja, $S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_1^2 [f(x) - h(x)]dx = 0{,}5 + 0{,}67 = 1{,}17$u.a.

3.4.3.6 Análise a *posteriori* da Atividade 3-3

Dos 9 alunos que finalizaram a atividade anterior, 6 desenvolveram esta atividade e a atividade posterior. De início eles identificaram a região S, no registro gráfico-geométrico, limitada pelas curvas $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$. Entretanto, nem todos reconheceram o intervalo de integração [0,2]:

Tabela 15: Intervalo de integração relativo à região S

Intervalo de integração	Alunos
[0,2]	Aluno 10, Aluno 11, Aluno 12
[0,3/2]	Aluno 5, Aluno 13, Aluno 15

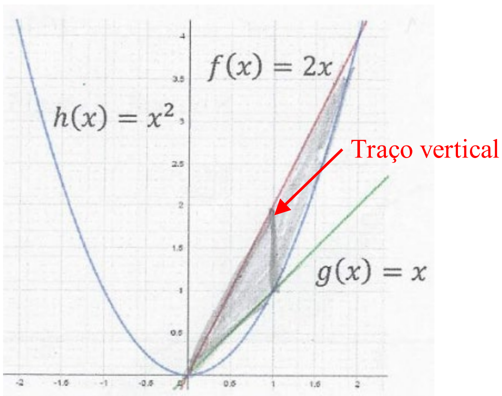
Fonte: Autora

De acordo com a Tabela 15, dos 6 participantes, 3 identificaram corretamente o intervalo [0,2] e os outros 3, o intervalo [0,3/2].

Após encontrarem o intervalo de integração, todos perceberam que a região estava limitada superiormente por uma única curva e inferiormente, por duas curvas.

Na sequência da atividade, foi solicitado que descrevessem procedimentos para o cálculo da área S. Reconhecendo a necessidade de decompor a região em sub-regiões, de modo que cada sub-região ficasse limitada inferiormente por uma única curva, todos os alunos realizaram a operação de reconfiguração intermediária. Esta operação foi registrada pelo Aluno 12:

Figura 86: Tratamento figural realizado pelo Aluno 12

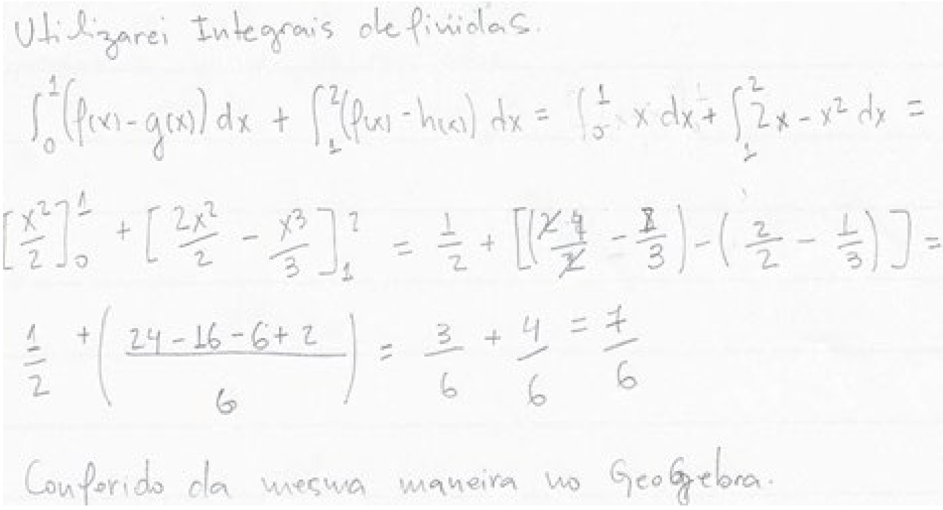


Fonte: Autora

Nesta figura, o traço vertical que representa a operação de reconfiguração mostra que o aluno operou sobre a região S, decompondo-a em duas sub-regiões. A região, antes limitada inferiormente pelas curvas $g(x) = x$ e por $h(x) = x^2$, agora pode ser visualizada como união de duas sub-regiões, definidas nos intervalos [0,1] e [1,2], cada uma limitada inferiormente por apenas uma das curvas.

Partindo da reconfiguração intermediária, seja mental ou figural, os 3 alunos que identificaram o intervalo de integração [0,2] converteram a representação da região S no registro gráfico-geométrico em uma representação no registro algébrico. Desta maneira, calcularam a área S pela expressão algébrica $S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_1^2 [f(x) - h(x)]dx$. A Figura 88 exemplifica o procedimento usado por um dos alunos.

Figura 87: Cálculo da área S pelo Aluno 10


Utilizarei Integrais definidas.

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx + \int_1^2 (f(x)-h(x))\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2x - x^2\,dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left[\left(\frac{\cancel{2}\,4}{\cancel{2}} - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{24-16-6+2}{6}\right) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

Conferido da mesma maneira no GeoGebra.

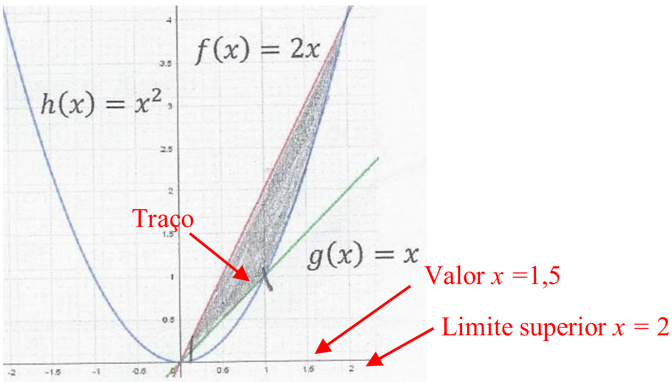
Fonte: Autora

Aqui, o aluno compreendeu que a área S era obtida pela soma das áreas das sub-regiões definidas em [0,1] e [1,2] e por esta razão escreveu uma expressão algébrica contendo as integrais definidas nestes intervalos. Ademais, para verificar o resultado obtido, usa o software, conforme descrito em língua natural “conferido da mesma maneira no GeoGebra”.

O Aluno 10, o Aluno 11 e o Aluno 12 que identificaram corretamente o intervalo de integração [0,2] não estavam próximos uns dos outros, mas desenvolveram a atividade de forma bastante semelhante: identificaram o intervalo [0,2], fizeram a decomposição da região S em duas partes, escreveram uma expressão algébrica envolvendo integrais definidas e encontraram o valor $7/6$ para a área.

Já os alunos que identificaram o intervalo [0,3/2], estavam sentados próximos uns dos outros e após discutirem em trio a questão, registraram o mesmo procedimento para calcular a área S. Tal procedimento inicia-se com a reconfiguração mostrada abaixo:

Figura 88: Reconfiguração intermediária desenvolvida pelo Aluno 13



Fonte: Autora

A Figura 89 revela que a apreensão perceptiva do Aluno 13 comandou a apreensão operatória, permitindo-lhe efetuar tratamentos. O traço indica a operação de reconfiguração e sinaliza a mesma compreensão do Aluno 10, do Aluno 11 e do Aluno 12, acerca da necessidade de decompor a região S em duas sub-regiões. A partir do traço desenhado, a região foi decomposta em duas sub-regiões, definidas em [0, 1] e em [1, 3/2], sob a condição de que cada sub-região estivesse limitada por uma única curva superior e por outra única curva inferior.

Ainda observando a figura, percebe-se que o Aluno 13 registrou, equivocadamente, o intervalo de integração [0,3/2]. Este equívoco pode estar relacionado à desatenção ou à escala gráfica escolhida. Neste último caso, se a escala fosse composta por números inteiros, talvez o aluno tivesse visualizado e registrado corretamente o intervalo [0,2]. Ademais, quando ele observa no eixo x o valor 1,5, para o limite superior de integração, mas escreve-o na forma 3/2, efetua espontaneamente a conversão do registro decimal para o registro fracionário.

Após decomposta a região S, o Aluno 13 registra a seguinte expressão algébrica para o cálculo da área:

Figura 89: Cálculo da área S pelo Aluno 13

$$\int_0^{3/2} f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx - \int_1^{3/2} h(x)\,dx$$

$$2{,}25 - 0{,}5 - 0{,}49$$

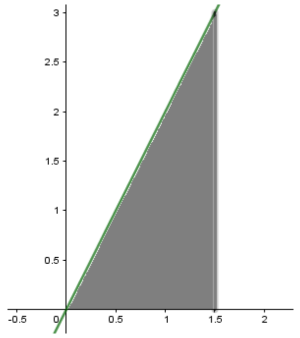
$$A = 0{,}96$$

Fonte: Autora

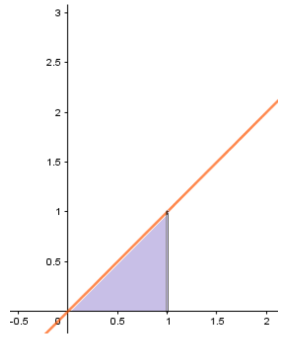
Conforme Figura 90, para calcular a área S o aluno escreve uma expressão algébrica contendo três integrais definidas, cada uma representando a área abaixo de uma determinada curva e definida em um subintervalo de [0,3/2]. Assim, a integral $\int_0^{3/2} f(x)dx$ representa a área abaixo da reta $f(x) = 2x$, em [0,3/2]; a integral $\int_0^1 g(x)dx$ representa a área da região abaixo da reta $g(x) = x$ em [0,1]; e a integral $\int_1^{3/2} h(x)dx$, a área sob a parábola $h(x) = x^2$, em [1,3/2].

Buscando interpretar e compreender o raciocínio do Aluno 13, foi criada a Figura 91 para mostrar as áreas sob cada curva e também a área S, oriunda da operação entre essas áreas.

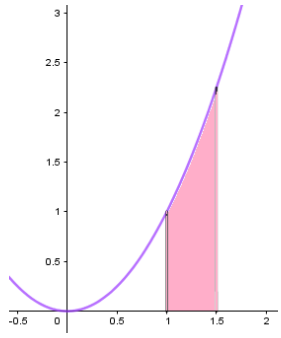
Figura 90: Interpretação da autora para o procedimento descrito pelo Aluno 13



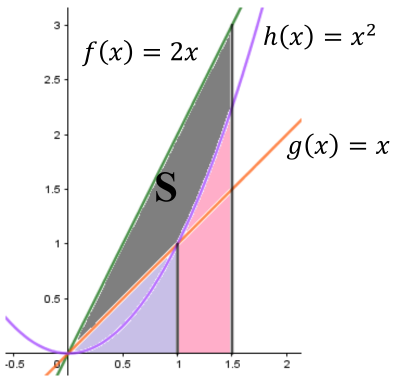
Área abaixo da curva $f(x) = 2x$, em [0,3/2]



Área abaixo da curva $g(x) = x$, em [0,1]



Área abaixo da curva $h(x) = x^2$, em [1,3/2]



Área S entre as curvas $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$em [0,3/2]

Fonte: Autora

Observando a expressão algébrica apresentada na Figura 90 e tomando por base a Figura 91, infere-se que o Aluno 13 desenvolveu tratamentos figurais para encontrar o valor da área S. Inicialmente considerou a maior área, que correspondia à região sob a curva de $f(x) = 2x$, definida em [0,3/2], e subtraiu desta, as áreas menores correspondentes às regiões sob a curva $g(x) = x$, definida em [0,1], e sob a curva $h(x) = x^2$, definida em [1, 3/2]. Com isso, o aluno chegou ao valor de 0,96 para a área.

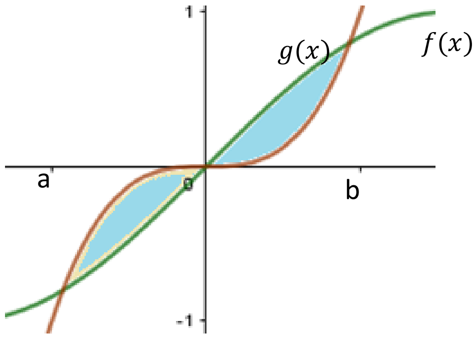
A reconfiguração desenvolvida pelo Aluno 13 foi importante para o *start* da resolução da atividade, pois lhe proporcionou antecipar tratamentos necessários ao cálculo da área. No entanto, o desenvolvimento do aluno confirma o que Flores e Moretti (2006) concluíram acerca de que a reconfiguração não garante a obtenção do resultado correto, pois há outras percepções ou cálculos envolvidos na atividade. Nesta situação, faltou reconhecer, no início da resolução, o correto intervalo de integração [0,2].

Vale ressaltar que se o Aluno 13 tivesse identificado corretamente o intervalo de integração e efetuado este mesmo raciocínio, teria encontrado o valor da área S, que corresponde a $\frac{7}{6} = 1{,}1666\ldots$ comprovando a validade do procedimento utilizado.

3.4.3.7 Análise a *priori* da Atividade 4-3

> **Atividade 4-3 -** Com base nas atividades do Atividades Tese e observando a região A limitada pelas curvas das funções $f(x)$ e $g(x)$, escreva um texto que sirva de orientação para outro aluno que conhece integrais, mas não sabe como encontrar a área de uma região limitada entre curvas no intervalo [a,b]:

Figura 91: Região A



Fonte: Autora

Esta atividade explora a conversão do registro gráfico-geométrico para o registro discursivo.

Espera-se que os alunos descrevam, usando a língua natural e a língua formal, a maneira para calcular a área da região, tendo por base a visualização da região. Assim, eles devem identificar o intervalo de integração [a,b], reconhecer a necessidade de dividir a região em duas sub-regiões definidas em [a,0] e [0,b], e apresentar a expressão algébrica $\int_a^0 [g(x) - f(x)]dx + \int_0^b [f(x) - g(x)]dx$ para o cálculo da área da região.

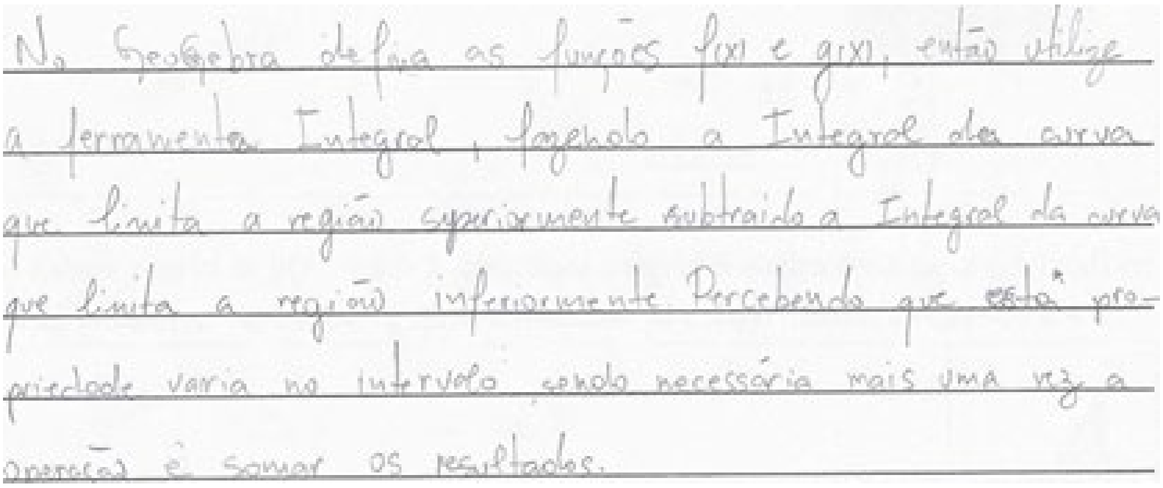
3.4.3.8 Análise a *posteriori* da Atividade 4-3

Nesta atividade, a intenção maior era propiciar aos alunos o trânsito entre os registros gráfico-geométrico e discursivo. A elaboração de um discurso faz com que os alunos não somente reflitam sobre os elementos pertinentes da representação visual, mas construam um pensamento matemático lógico e organizado de modo que o texto se torne compreensível para quem faz a sua leitura.

Os 6 participantes identificaram a região A no registro gráfico-geométrico e embasados na visualização, elaboraram um discurso que visava orientar outros alunos que conheciam o conceito de integral, mas não estudaram a integral no cálculo de área.

Para elaborar seu discurso, a Aluno 10 considerou a ideia usada na sequência didática e elaborou um texto que remetia ao uso do GeoGebra:

Figura 92: Discurso sobre o cálculo de áreas via integrais, pelo Aluno 10


Na GeoGebra defina as funções f(x) e g(x), então utilize a ferramenta Integral, fazendo a Integral da curva que limita a região superiormente subtraindo a Integral da curva que limita a região inferiormente Percebendo que esta propriedade varia no intervalo sendo necessária mais uma vez a operação é somar os resultados.

Fonte: Autora

O discurso do Aluno 10 instiga o uso de recurso computacional para esboçar as curvas da função e para calcular as integrais definidas. Está implícito em sua resposta que ele reconheceu as condições necessárias para calcular a área da região. Assim, dividiu a região em duas sub-regiões, tendo o cuidado para garantir que cada sub-região ficasse limitada superior por uma curva e inferiormente por outra curva, associou cada sub-região a uma integral definida e concluiu que a área da região era a soma das áreas das sub-regiões.

Os outros 5 alunos também conseguiram elaborar um texto no registro discursivo, de forma semelhante ao do Aluno 10, porém não se reportaram ao uso computacional.

Ao elaborar um discurso, os alunos foram desafiados a refletir e a escrever com atenção aquilo que compreenderam ou que consideraram relevante sobre o objeto em estudo. Essa tarefa visava contribuir para o desenvolvimento da autonomia do aluno, ao mesmo tempo que serviu para informar à pesquisadora as compreensões dos alunos. Atividades deste tipo, que tratam da conversão do registro gráfico-geométrico para o discursivo não são comuns em livros textos de Cálculo ou em sala de aula. Por esta razão, planejou-se a atividade para exigir um pensar de modo diferente, que vai de encontro àquele tradicionalmente apresentado em sala de aula e que tende a priorizar a passagem da escrita discursiva para a algébrica ou da algébrica para a gráfica.

3.4.4 Análises a priori e a posteriori das atividades do Bloco 4

BLOCO 4 - Área equivalente

O objetivo deste bloco de atividades é mostrar aos alunos que a região A, associada à diferença entre as integrais $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, possui a mesma área que a região B, associada a integral $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$.

Em livros textos de Cálculo, os problemas de áreas via integral partem do esboço das curvas de $f(x)$ e de $g(x)$ e da visualização da região A limitada entre tais curvas. Todavia, o cálculo algébrico utiliza a integral $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$, a qual está associada à uma outra região B, sequer apresentada nestes materiais. Assim, espera-se que os alunos explorem as regiões A e B, percebendo que apesar de terem formatos distintos, são regiões equivalentes, isto é, possuem a mesma área. Mais, que percebam a existência de inúmeras regiões equivalentes à região A e ao mesmo tempo, saibam como encontrá-las por meio de tratamentos figurais ou algébricos.

3.4.4.1 Análise a *priori* da Atividade 1-4

Atividade 1-4 - Sejam as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

a) Esboce as curvas no mesmo plano cartesiano e identifique a região C limitada por $f(x)$ e por $g(x)$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. Em seguida, observe a posição de cada curva, uma em relação a outra.
- Que função limita superiormente a região C?
- Que função limita inferiormente a região C?

b) Escreva uma expressão matemática que forneça a área C em função da **integral** de $f(x)$ e em função da **integral** de $g(x)$.

c) No GeoGebra, calcule a área C, usando **duplamente** o comando *Integral*, da forma *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>) - Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Escreva a integral definida e anote o resultado.

d) No GeoGebra, calcule novamente a área C, usando uma **única vez** o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Ao aplicar uma única vez o comando *Integral* é mostrada na tela do GeoGebra uma outra **região D** que não coincide com a região C. O valor da área C e da área D são iguais? Como o GeoGebra entendeu a **função integrando** $f(x) - g(x)$ utilizada no comando *Integral*? Justifique sua resposta. Faça um ***print*** da tela salvando-o no arquivo **Atividades Tese**.

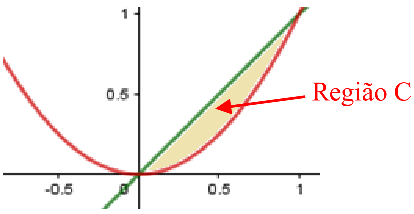
e) A região D está limitada superiormente pela curva de uma função que será chamada $h(x)$. Encontre a expressão algébrica da função $h(x)$ e descreva como a encontrou. Em seguida esboce o gráfico de $h(x)$ no GeoGebra. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.

f) A função $h(x)$ não é única. Ela pode ser escrita de diferentes maneiras por funções $F(x)$ e $G(x)$, que ao serem **subtraídas**, voltam à expressão $h(x)$. Por exemplo, $F(x) = x + 1$ e $G(x) = x^2 + 1$ formam $H(x) = (x + 1) - (x^2 + 1)$ em que a região abaixo desta $H(x)$ possui mesma área de $h(x) = x - x^2$. Encontre outras funções $F(x)$ e $G(x)$ e escreva uma nova expressão para $H(x)$, de modo que a área desta região se mantenha equivalente às áreas C e D.

g) Oculte os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ esboçados anteriormente (para isso, no GeoGebra, clique sobre a bolinha azul em frente às expressões algébricas das referidas funções). Em seguida, esboce o gráfico das funções $F(x)$ e $G(x)$ que você encontrou e identifique a região limitada por estas curvas, pintando-a. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. Escreva a integral que fornece a área desta região e calcule esta área. Como são chamadas as regiões que possuem a mesma área?

Da apreensão perceptiva os alunos devem identificar a região C e reconhecer que ela está limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola no intervalo [0,1], conforme Figura 94.

Figura 93: Região C



Fonte: Autora

Como a região C é determinada pela a diferença entre duas regiões, abaixo de $f(x) = x$ e abaixo de $g(x) = x^2$, respectivamente, então sua área é calculada pela expressão algébrica $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$.

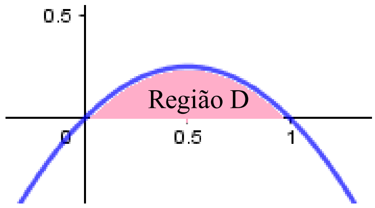
Para calcular a área C, usando duas vezes o comando *Integral*, o aluno deve inserir no GeoGebra o comando *Integral (x,0,1) - Integral (*x^2*,0,1)* que corresponde à expressão $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$. Feito isso, obtém-se o resultado 0,17 para a área C. A inversão da ordem das integrais produz o oposto da área C, visto que a área associada à $\int_0^1 g(x)dx$ é menor que a área associada à $\int_0^1 f(x)dx$.

Para calcular a área C, usando o comando *Integral* uma única vez , o aluno deve perceber que o integrando, anteriormente representado por $f(x)$ ou por $g(x)$, agora é substituído pela expressão $f(x) - g(x)$. Ao executar o comando *Integral* no GeoGebra, o software considera a diferença de $f(x)$ e $g(x)$ como uma única função $h(x)$ e mostra a região abaixo do gráfico de $h(x)$ (Figura 95).

Neste momento, em que são explorados tratamentos, é importante que os alunos percebam que operar algebricamente com funções resulta em uma outra função com características distintas das funções componentes. Atrelados aos tratamentos algébricos estão os tratamentos figurais, que acabam transformando uma dada região em outra região, com formato distinto, porém com a mesma área.

Para encontrar a expressão algébrica de $h(x)$ basta observar a propriedade da integral $C = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$ e reconhecer $h(x) = f(x) - g(x) = x - x^2$. A curva $h(x)$ e a região abaixo dela é apresentada nesta figura:

Figura 94: Curva *h(x)* e região D

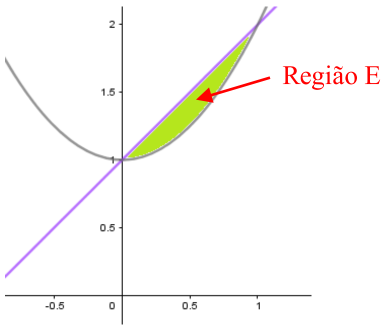


Fonte: Autora

Aqui, a curva $h(x)$ é uma parábola voltada para baixo, cujas propriedades são distintas das curvas de $f(x) = x$ e de $g(x) = x^2$. Contudo, em observação à propriedade da integral $C = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$, a área D sob a curva $h(x)$ é equivalente à área C, limitada entre $f(x)$ e $g(x)$, mostrada na Figura 94.

Para encontrar outra função $H(x)$, cuja área abaixo do gráfico seja equivalente às áreas C e D, os alunos precisam realizar tratamentos com representações de funções F e G no registro algébrico. Para exemplificar, sejam as funções $F(x) = x + 1$ e $G(x) = x^2 + 1$. Por meio de tratamentos algébricos obtém-se $H(x) = (x + 1) - (x^2 + 1)$, cuja representação gráfico-geométrica da região sob esta curva é ilustrada abaixo:

Figura 95: Outra região equivalente às regiões C e D



Fonte: Autora

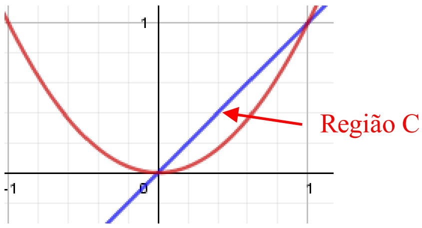
Na Figura 96, a região E limitada pelas curvas $F(x) = x + 1$ e $G(x) = x^2 + 1$ possui formato diferente das regiões C e D. Entretanto, as três regiões são equivalentes entre si.

3.4.4.2 Análise a *posteriori* da Atividade 1-4

Na noite de 17 de Abril foram aplicadas as atividades dos blocos 4 e 5 aos 16 alunos presentes.

Com auxílio do GeoGebra, converteram as representações das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no registro algébrico para representações no registro gráfico. Em seguida identificaram a região C, reconhecendo que $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, nesta ordem, limitavam superior e inferiormente a região:

Figura 96: Região C, pelo Aluno 3



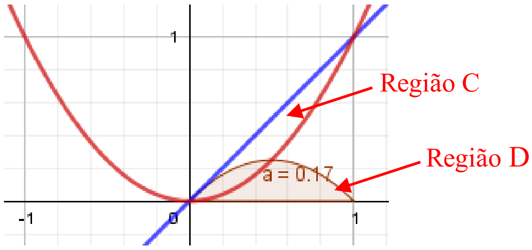
Fonte: Autora

Observando o *print* de tela feito pelo Aluno 3 é possível perceber que a região C está limitada entre as curvas $(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

Para encontrar a área C, em função da integral de $f(x)$ e da integral de $g(x)$, todos os alunos escreveram a expressão algébrica $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$. Usando duplamente o comando *Integral*, a referida expressão foi inserida no GeoGebra na forma *Integral (x, 0, 1) – Integral (*x^2 *, 0, 1).* Desta maneira, o software forneceu, na janela da álgebra, o valor 0,17 para a área e manteve inalterada a representação da região C, no registro gráfico-geométrico, conforme Figura 97.

Em seguida, a atividade orientava os alunos a aplicarem o comando *Integral* uma única vez. Nesta situação, o GeoGebra mostrou a imagem da Figura 98, capturada pelo *print* de tela feito pelo Aluno 3.

Figura 97: Regiões C e D, pelo Aluno 3

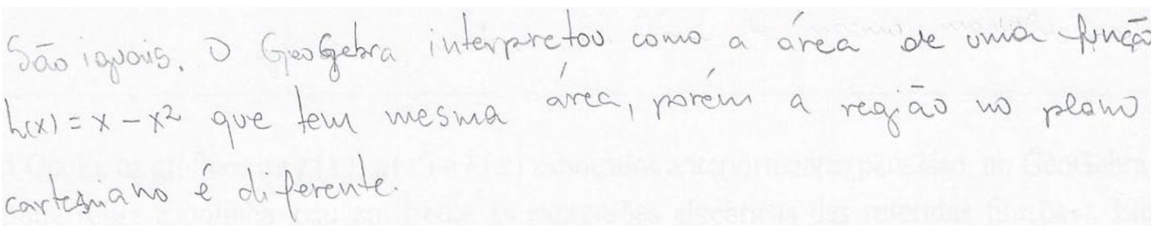


Fonte: Autora

Observando a figura, percebe-se que, ao usar uma única vez o comando *Integral*, uma outra região D foi gerada, com formato distinto da região C, porém com a mesma área 0,17. Neste momento, em que foram questionados sobre a origem da região D e sobre possíveis relações entre as regiões C e D, os alunos precisaram refletir e interpretar os dados inseridos no GeoGebra para justificarem a imagem mostrada na tela.

Comparando a integral $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$, registrada no papel, com a integral $C = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$, inserida no GeoGebra a partir da aplicação do comando *Integral* uma única vez, todos perceberam que as áreas eram iguais e que a área C estava associada à primeira expressão enquanto que a área D estava associada à segunda integral. Com isso, conjecturaram relações, sendo uma delas apresentada abaixo:

Figura 98: Conjectura do Aluno 10


São iguais. O GeoGebra interpretou como a área de uma funçã
h(x) = x − x² que tem mesma área, porém a região no plano
cartesiano é diferente.

Fonte: Autora

Questionado sobre o valor das áreas C e D, o Aluno 10 afirmou que 'são iguais', isto é, possuem a mesma área, apesar de formatos distintos. Quanto à aparição da região D na tela do GeoGebra, justificou que ao usar o comando *Integral* uma única vez, precisou escrever a função integrando da forma $L(x) = x - x^2$ e o software interpretou-o como uma nova função, apresentando a região parabólica sob a curva $L(x)$ em [0,1], denominada região D.

Na sequência da atividade, explorou-se regiões equivalentes às regiões C e D, por meio de conversões e de tratamentos. Para isso, os alunos buscaram representações de funções no registro algébrico que, ao serem convertidas para o registro gráfico-geométrico, produzissem regiões com áreas iguais a C e D. Nas Figuras 100 e 101, o Aluno 2 explicita o que pensou para encontrar uma região equivalente às regiões C e D.

Figura 99: Encontrando regiões equivalentes às regiões C e D, pelo Aluno 2

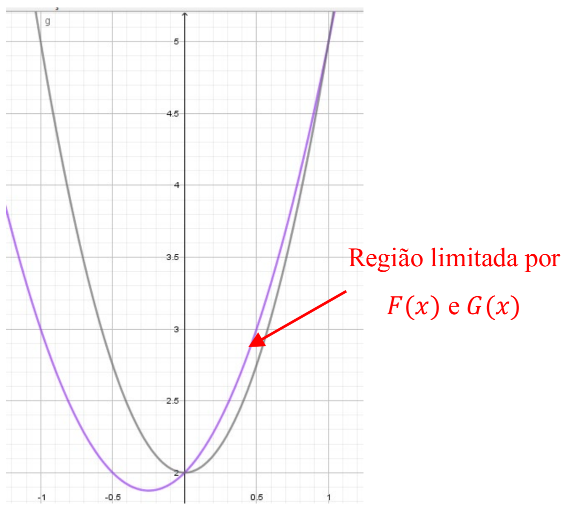
$$F(x) = 2x^2 + x + 2$$
$$G(x) = +3x^2 + 2$$
$$\begin{aligned} H(x) &= F(x) - G(x) \\ &= (2x^2 + x + 2) - (3x^2 + 2) \\ &= 2x^2 + x \cancel{+2} - 3x^2 \cancel{-2} \\ &= x - x^2 \;/\!/ \end{aligned}$$

Fonte: Autora

Nesta figura, partindo de funções polinomiais do segundo grau, o Aluno 2 realiza tratamentos no registro algébrico para verificar que a região entre as curvas $F(x)$ e $G(x)$ é equivalente às regiões C e D. De fato, ele mostra que a diferença entre as funções $F(x)$ e $G(x)$ escolhidas resulta na função integrando original, que é dada por $f(x) - g(x) = x - x^2$.

Determinadas as funções algébricas $F(x)$ e $G(x)$, com auxílio do GeoGebra o Aluno 2 realiza uma conversão para identificar a região procurada:

Figura 100: Região equivalente às regiões C e D, criada pelo Aluno 2



Fonte: Autora

O *print* de tela mostrado na Figura 101 revela que o aluno efetuou a conversão das representações das funções $F(x) = 2x^2 + x + 2$ e $G(x) = 3x^2 + 2$ no registro algébrico para o registro gráfico. Observando as curvas esboçadas é possível identificar a região equivalente às regiões C e D.

De forma semelhante ao desenvolvimento do Aluno 2, os demais alunos também encontraram representações de funções no registro algébrico e converteram-nas no registro gráfico, identificando regiões equivalentes à região inicial.

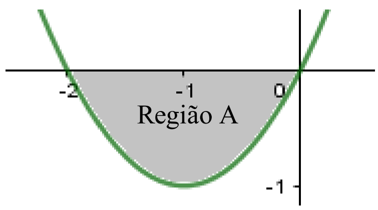
Esta atividade proporcionou aos alunos a compreensão de que é possível encontrar diversas regiões equivalentes e que a área de uma região pode ser calculada por uma expressão que contém duas integrais, da forma $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ ou por apenas uma integral, a saber, $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

3.4.4.3 Análise a *priori* da Atividade 2-4

> **Atividade 2-4 -** Considere a integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$.
> a) Seja $h(x)$ a função integrando correspondente à integral dada. Esboce a curva $h(x)$ e identifique a região A no intervalo dado. Calcule a integral por meio do comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* e anote o resultado. Escreva como encontrar a área da região A. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.
> b) Encontre uma região B que seja equivalente à região A e descreva o procedimento utilizado.
> c) Represente graficamente a região B e faça um ***print*** da tela, salvando em **Atividades Tese**.
> d) Como provar que a região B é equivalente à região A?
> e) Enuncie um problema que envolva a integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$.

Espera-se que os alunos esbocem a curva $h(x) = x^2 + 2x$ e identifiquem a região A limitada entre esta curva e o eixo *x*:

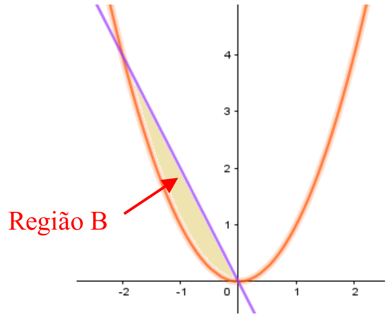
Figura 101: Região A



Fonte: Autora

Para obter uma região equivalente à região A, os alunos devem efetuar tratamentos algébricos para encontrar funções componentes de $h(x)$, lembrando que a diferença entre estas componentes deve resultar na expressão $x^2 + 2x$. Uma solução, por exemplo, é considerar as funções componentes $f(x) = -2x$ e $g(x) = x^2$, que produzem a região B abaixo:

Figura 102: Região B



Fonte: Autora

Para comprovar que as regiões A e B são equivalentes basta calcular as integrais $A = \int_{-2}^{0}(x^2 + 2x\ )dx$ e $B = \int_{-2}^{0}[(x^2) - (-2x)]dx$ e verificar que possuem o mesmo valor, porém opostos, devido à posição das regiões em relação ao eixo x.

Enunciar um problema que envolva a expressão $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$ implica em converter a representação da integral no registro algébrico em uma representação no registro discursivo. Esse sentido de conversão, não tratado em livros textos de Cálculo e também em sala de aula, possibilita explorar a variedade de discursos possíveis para um mesmo problema.

3.4.4.4 Análise a *posteriori* da Atividade 2-4

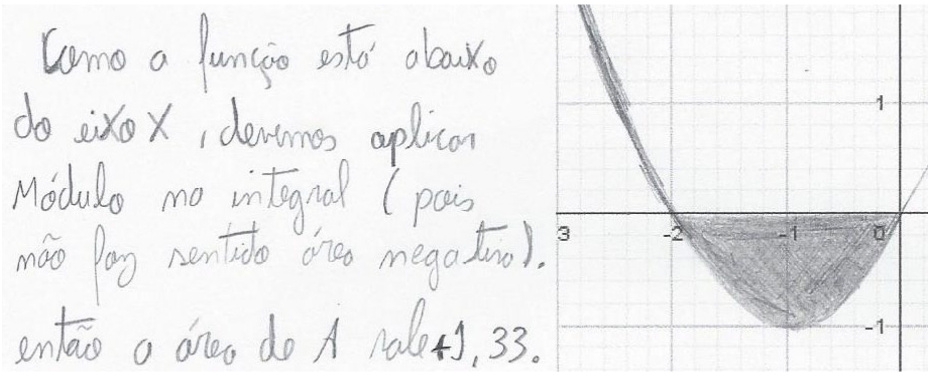
Participaram desta atividade 16 alunos.

Diferentemente das atividades de blocos anteriores, em que os registros de partida eram o registro discursivo ou o registro gráfico-geométrico, nesta atividade partiu-se do registro algébrico. Isso porque, como já mencionado, a proposta dessa pesquisa consiste em contemplar os diferentes registros de partida, considerando-os num mesmo patamar de importância para o processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo.

Partindo da integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$, todos os alunos esboçaram a curva que corresponde à função $h(x) = x^2 + 2x$ e identificaram a região A acima desta curva e abaixo do eixo x.

Para encontrar a área A, justificaram que era necessário mais do que calcular a referida integral, conforme Figuras 104 e 105.

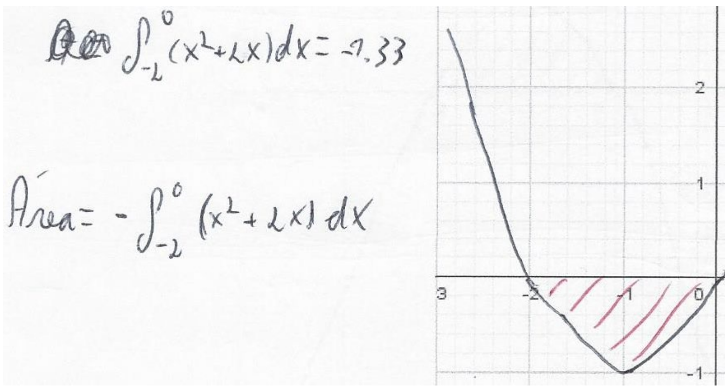
Figura 103: Identificação da região A, pelo Aluno 9



Fonte: Autora

Aqui, o Aluno 9 mobilizou a apreensão perceptiva para reconhecer que a região A estava posicionada abaixo do eixo x e consequentemente, a integral associada à região seria negativa. Reconhecendo que a área é uma grandeza não negativa, usou o registro discursivo para justificar que a área poderia ser obtida aplicando o módulo à integral.

Figura 104: Identificação da região A, pelo Aluno 16



Fonte: Autora

O Aluno 16 identificou a região A e calculou a integral de $f(x) = x^2 + 2x$ em [-2,0], encontrando resultado -1,33. Percebendo que o resultado negativo não correspondia à área da região, representou a área, no registro algébrico, pela integral multiplicada pela constante -1.

Tanto o Aluno 9 quanto o Aluno 16 usaram dois registros para representar a área A. O primeiro representou-a no registro gráfico-geométrico e no registro discursivo enquanto que o segundo utilizou o registro gráfico-geométrico e o algébrico. Mesmo não sendo congruentes as representações, a conversão não foi um problema para os alunos. Isso demonstra que eles reconheceram o objeto área em suas diferentes formas, o que é uma condição para a aprendizagem matemática, segundo Duval (2004).

Para explorar regiões equivalentes à região A, todos os alunos encontraram representações de funções no registro algébrico que, quando convertidas no registro gráfico-geométrico, produziram regiões com a mesma área A. O procedimento empregado pelo Aluno 10 é apresentado a seguir:

Figura 105: Procedimento do Aluno 10 para encontrar uma região B

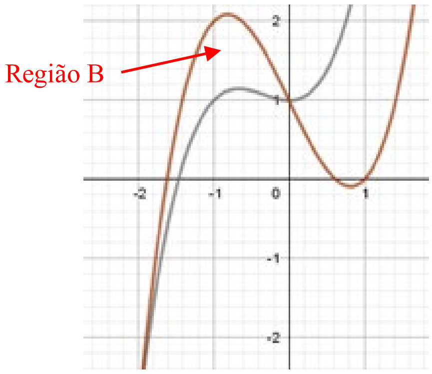
Etapa I - Representações das funções no registro algébrico

$p(x) = x^3 + x^2 + 1$

$q(x) = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow \int_{-2}^{0} (p(x) - q(x))\, dx = 1{,}33.$

Encontrei duas funções que subtraídas uma com a outra o resultado fosse igual a função dada.

Etapa II - Representações das funções no registro gráfico-geométrico



Etapa III - Equivalência entre as regiões A e B

$\text{Região A} = \int_{-2}^{0} (x^2+2x)\, dx$

$\text{Região B} = \int_{-2}^{0} (x^3+x^2+1)-(x^3-2x+1)\, dx = \int_{-2}^{0} (x^2+2x)\, dx$

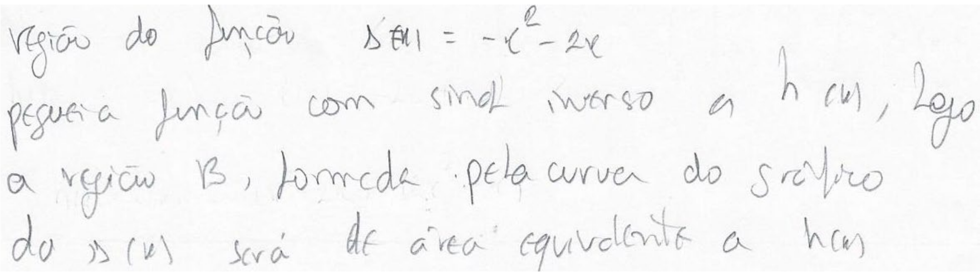
Fonte: Autora

Na Etapa I o aluno encontrou duas funções polinomiais de terceiro grau, $p(x)$ e $q(x)$, e justificou discursivamente os tratamentos efetuados no registro algébrico, afirmando que a diferença entre as funções resultaria na representação da função $h(x) = x^2 + 2x$. Fazendo isso, garantiu que a região limitada por tais funções seria equivalente à região A. Na Etapa II, converteu as escritas algébricas de $p(x)$ e $q(x)$ em representações gráficas para identificar a região B, limitada pelas curvas cúbicas. Na Etapa III, associando as regiões A e B a suas respectivas integrais e efetuando tratamentos no registro algébrico, mostrou que tais regiões estavam associadas à mesma integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$, dada no enunciado da atividade. Com isso, reafirmou a equivalência das áreas A e B.

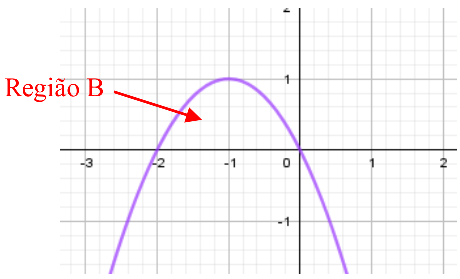
Dos 16 participantes, 11 desenvolveram procedimento semelhante ao do Aluno 10, chegando a uma região B limitada entre duas funções polinomiais. Os outros 5 alunos encontraram uma região B limitada por uma curva polinomial e pelo eixo x, conforme retrata a Figura 107.

Figura 106: Procedimento do Aluno 14 para encontrar uma região B

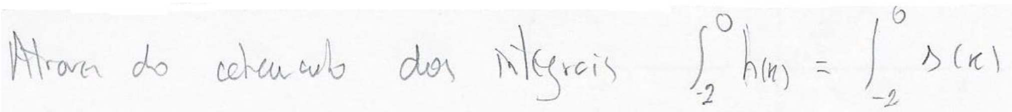
Etapa I – Representação da função no registro algébrico


região da função $\Delta(x) = -x^2 - 2x$
peguei a função com sinal inverso a $h(x)$, logo
a região B, formada pela curva do gráfico
do $\Delta(x)$ será de área equivalente a $h(x)$

Etapa II - Representação da função no registro gráfico-geométrico



Etapa III –Equivalência entre as regiões A e B


Através do cálculo das integrais $\int_{-2}^{0} h(x) = \int_{-2}^{0} \Delta(x)$

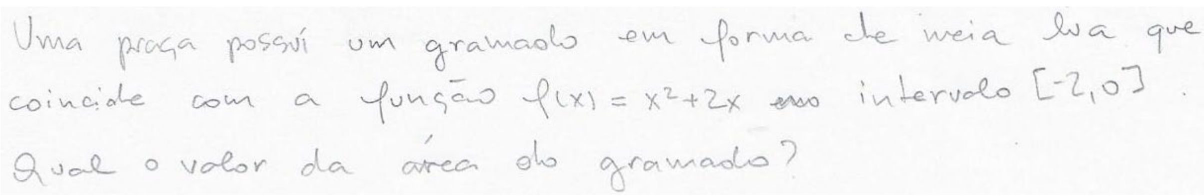
Fonte: Autora

Na Figura 107, infere-se da Etapa I que o aluno, ao considerar a função $\Delta(x) = -x^2 - 2x$, oposta à função dada $h(x) = x^2 + 2x$, percebeu que esta última curva sofreria uma rotação em torno no eixo x. Por meio do movimento de rotação, o aluno desenvolveu a modificação posicional, que está atrelada à apreensão operatória e que consiste em alterar apenas a posição e a orientação da figura inicial (DUVAL, 2012a). Posteriormente, a representação da função $\Delta x = -\, x^2 - 2x$ no registro algébrico foi convertida para o registro gráfico, possibilitando a identificação da região B, conforme Etapa II. Para verificar a equivalência das regiões, na Etapa III, o aluno recorreu ao registro discursivo para afirmar que bastava calcular as integrais das funções $h(x)$ e $\Delta(x)$, no intervalo [-2, 0].

Até esse momento da atividade, os alunos exploraram tratamentos no registro figural e no registro algébrico, bem como efetuaram conversões em diferentes sentidos. Porém, faltava explorar a conversão do registro algébrico para o discursivo, a qual foi contemplada quando a atividade propunha criar um problema envolvendo a integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$.

Partindo da representação da integral no registro algébrico, os alunos elaboraram seus discursos. A grande maioria usou termos que apareceram na sequência didática, a saber, "Calcule a área limitada por...", "Esboce as curvas e identifique a área da região...", "Encontre as funções limitantes da região...". Isso revela que eles optaram por não se arriscar a escrever algo diferente daquilo trabalhado nas atividades. Entretanto, 2 alunos elaboraram problemas, fugindo um pouco deste padrão textual. Um dos problemas é exibido na Figura 108.

Figura 107: Problema elaborado pelo Aluno 10


Uma praça possui um gramado em forma de meia lua que coincide com a função $f(x) = x^2+2x$ ~~no~~ intervalo [-2,0]. Qual o valor da área do gramado?

Fonte: Autora

De acordo com a figura, o Aluno 10 elaborou um problema envolvendo a área de uma praça e não se limitou aos termos citados anteriormente, empregados pela grande maioria dos colegas. Não era pretensão da atividade estimular a criatividade dos alunos, mas percebe-se que o aluno buscou contextualizar a situação. O problema enunciado pode ser considerado real, já que praças, muitas vezes possuem formatos geométricos cuja área não pode ser calculada pela Geometria Euclidiana, necessitando de conhecimentos do Cálculo Integral.

A conversão do registro algébrico para o discursivo não é contemplada em livros de Cálculo. Sabendo que estes materiais são, por vezes, a única ou a mais frequente ferramenta utilizada por professores e alunos no processo de ensino e de aprendizagem, acaba-se trabalhando sempre os mesmos sentidos de conversão.

Portanto, esta atividade vai na contramão das abordagens tradicionais do ensino de Cálculo que privilegiam as conversões do registro discursivo para o algébrico ou do algébrico para o gráfico.

3.4.5 Análises a *priori* e a *posteriori* das atividades do Bloco 5

BLOCO 5 – Mudança de variável

Saber quando integrar em relação à variável x ou em relação à variável y pode facilitar o cálculo da área de uma região. Assim, visando dar condições aos alunos para decidirem sobre qual variável utilizar no processo de integração, foi planejado este bloco de atividades.

A primeira atividade apresenta dois caminhos para o cálculo da área: o Caminho I que considera a integral em relação à variável x e o Caminho II que aborda a variável y.

Na segunda atividade, os alunos devem escolher um dos caminhos para calcular a área da região e justificar o porquê da escolha.

3.4.5.1 Análise a *priori* da Atividade 1-5

> **Atividade 1-5 -** Considere a região A limitada pelas curvas $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$. São apresentados dois caminhos para a resolução desta atividade. Desenvolva os procedimentos especificados em cada caminho.
>
> *Caminho I: Integrar em relação à variável x*
> No **GeoGebra**:
> a) Esboce as curvas no mesmo plano cartesiano, identifique a região A e o intervalo de integração. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo de Entrada*, as expressões $2 + x$ e $y^2 = x + 4$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.
> b) Observando a região A e sem fazer cálculos, explique de modo sucinto, como encontrar a área desta região.
> c) Calcule a integral em [-4,0] usando o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Ao usar este comando aparece na tela do GeoGebra a mensagem de erro "subtração inválida". Observe que no intervalo [-4,-3] a região A é limitada superior e inferiormente pela **mesma curva**, a cônica $y^2 = x + 4$, o que mostra que ela não é função. Esta região precisa atender a condição de ser limitada superiormente por uma **única** curva de função e inferiormente por outra **única** curva de função. Sendo assim, reescreva a cônica $y^2 = x + 4$ como duas **funções de *x***, ou seja, encontre funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de modo que esta condição seja satisfeita.
> d) Sem apagar as curvas já existentes na tela do GeoGebra, esboce as curvas de y_1 e y_2, identificando cada curva com uma cor diferente. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.
> e) Observe a posição das três curvas $y = 2 + x$, $y_1(x)$ e $y_2(x)$. No intervalo [-4, 0] existe uma única curva que limita superiormente a região A e uma única curva que limita inferiormente esta região? Caso não, observe para que valores de x se consegue garantir a unicidade das funções limitantes. Escreva estes valores como intervalos. Para cada intervalo escreva uma integral definida e calcule o valor das integrais.
> f) Calcule a integral em cada intervalo, usando o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Escreva uma expressão para calcular a área A a partir destas integrais e calcule o valor da área A.

Caminho II: Integrar em relação à y.
No **papel**:
a) Esboce novamente as curvas de $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ no mesmo plano cartesiano, identifique a região A. Observe que o eixo horizontal é o eixo da variável independente e o eixo vertical é da variável dependente. Quem é a variável independente?
b) Gire o texto 90º em sentido anti-horário. Neste caso, quem é a nova variável independente?
c) Reescreva as expressões $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ em função da nova variável independente, ou seja, encontre expressões $x_1(y)$ e $x_2(y)$.
d) Escreva a integral que fornece a área A em função da variável *y* e encontre o valor de A manualmente.

Espera-se que os alunos esbocem as curvas $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$, identifiquem a região limitada entre as curvas e o intervalo de integração [-4,0].

Ao calcularem a integral em [-4,0] o GeoGebra indicará erro. A partir desta mensagem e das orientações descritas no enunciado da atividade, os alunos devem escrever a cônica $y^2 = x + 4$ como funções de *x,* isto é, $y_1(x) = \sqrt{x+4}$ e $y_2(x) = -\sqrt{x+4}$.

Esboçadas estas curvas devem perceber que a região A precisa ser dividida em duas regiões A1 e A2, compreendidas em [-4,-3] e [-3,0] respectivamente, para que cada região contenha apenas uma curva limitante superior e outra curva limitante inferior.

A área das regiões A1 e A2 são calculadas pelas integrais $A1 = \int_{-4}^{-3}\left(\sqrt{x+4} - \left(-\sqrt{x+4}\right)\right)dx$ e $A2 = \int_{-3}^{0}\left(\sqrt{x+4} - (x+2)\right)dx$.

A área da região A é obtida somando-se as subáreas A1 e A2, isto é, $A = A1 + A2 = \int_{-4}^{-3}\left(\sqrt{x+4} - \left(-\sqrt{x+4}\right)\right)dx + \int_{-3}^{0}\left(\sqrt{x+4} - (x+2)\right)dx$, que resulta no valor 4,5 u.a.

No caminho II, após o esboço das curvas $y^2 = x + 4$ e $y = x + 2$ na folha de papel, os alunos devem girar a folha para perceber que a região A está limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola, e com isso, identificar a nova variável independente, que passa a ser a variável *y.*

Posteriormente, espera-se que as curvas $y^2 = x + 4$ e $y = x + 2$ sejam escritas em função da variável y, o que implica em obter $x_1(y) = y - 2$ e $x_2(y) = y^2 - 4$.

Para calcular a área da região A basta calcular uma única integral, a saber, a integral $A = \int_{-1}^{2}[(y-2) - (y^2-4)]dy$ cujo resultado é 4,5 u. a.

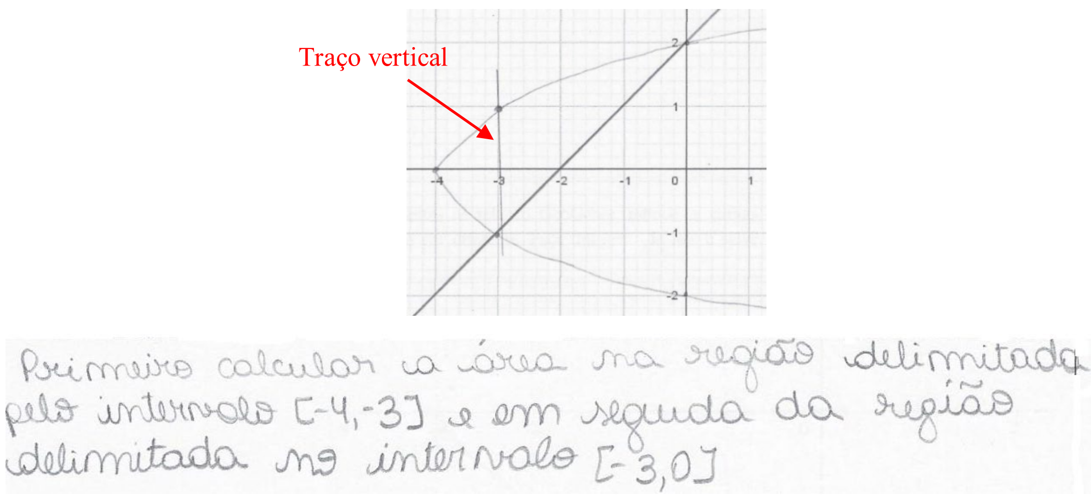
3.4.5.2 Análise a *posteriori* da Atividade 1-5

Participaram desta atividade 16 alunos.

Para o cálculo da área da região A, limitada entre $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$, foi proposto dois caminhos: o Caminho I que tratava da integral em relação à variável *x* e o Caminho II que considerava a variável *y*.

Seguindo as orientações descritas no Caminho I, os alunos esboçaram as curvas $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ e identificaram a região A. Partindo da visualização da região e sem recorrer às representações das funções no registro algébrico, descreveram, de modo sucinto, um procedimento para encontrar a área A. Nesta descrição, 7 alunos não reconheceram a necessidade de dividir a região A em duas sub-regiões; 7 reconheceram tal necessidade e apresentaram respostas semelhantes a da Figura 109 e outros 2 alunos perceberam que seria mais fácil calcular a área girando a região A, como mostrado na Figura 110.

Figura 108: Reconfiguração desenvolvida pelo Aluno 4

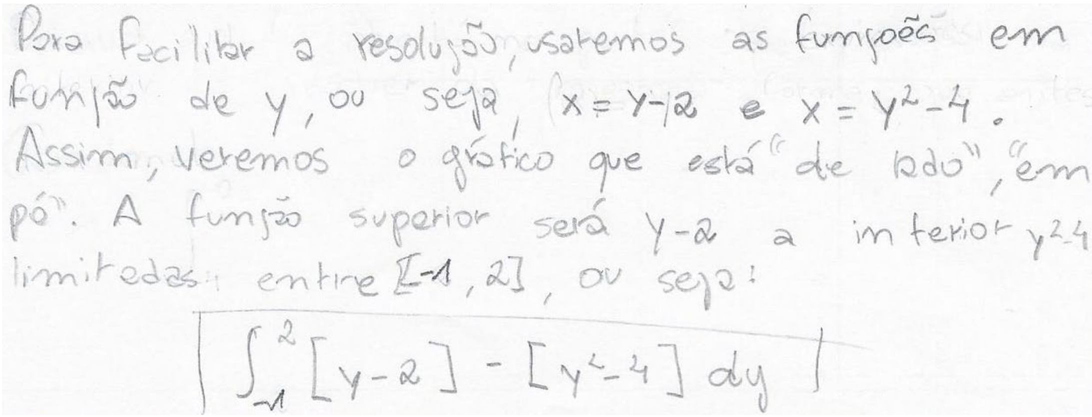


Fonte: Autora

O traço vertical desenhado pelo Aluno 4 indica que realizou a reconfiguração intermediária. Por meio desta operação, decompôs a região A em duas sub-regiões, definidas em [-4,-3] e em [-3,0], com intuito de calcular a área A a partir da soma destas subáreas. Novamente a reconfiguração intermediária, defendida por Duval (2012a), mostra-se fundamental para a resolução da atividade, pois despertou no Aluno 4 percepções que o levarão à aplicação de tratamentos relativos ao cálculo de área.

Os 2 alunos que giraram a região A, observaram após o giro, que a região estava limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola. Neste momento, esses alunos que sentavam próximos e discutiam as questões, chamaram a pesquisadora para saber se deveriam dar continuidade à atividade conforme suas observações ou se voltariam à integração em relação à variável *x*. A pesquisadora orientou-lhes que desenvolvessem a atividade com base em suas observações e um dos alunos, então, apresentou a seguinte descrição:

Figura 109: Funções de y, escritas pelo Aluno 12



Para facilitar a resolução, usaremos as funções em função de y, ou seja, x = y-2 e x = y²-4. Assim, veremos o gráfico que está "de lado", "em pé". A função superior será y-2 a inferior y²-4 limitadas entre [-1, 2], ou seja:

$$\int_{-1}^{2} [y-2] - [y^2-4]\, dy$$

Fonte: Autora

De acordo com esta figura, o giro da região A, efetuado pelo Aluno 12, comprova que a apreensão perceptiva comandou a apreensão operatória. De fato, ao girar a região A, 90º em sentido anti-horário, o aluno percebeu que seria mais fácil efetuar tratamentos no registro algébrico em função da variável *y*. Isso mostra a importância da modificação posicional, associada à apreensão operatória, para tornar a resolução da atividade mais simples ou fácil.

O movimento de rotação, aplicado pelo Aluno 12 sobre a região A inicial, produziu uma nova representação, cuja orientação e posição foram alteradas, mas o tamanho e o formato se mantiveram. Essa ação permitiu-lhe visualizar as curvas limitantes da região e aplicar tratamentos no registro algébrico para o cálculo da área.

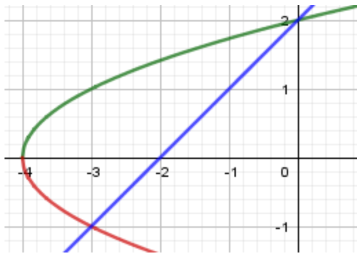
Após ter rotacionado a região A, o Aluno 12 escreve as curvas $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ em função da variável *y,* usando para isso, tratamentos no registro algébrico que resultaram nas expressões $x = y - 2$ e $x = y^2 - 4$. Percebendo que o intervalo de integração também precisava estar definido em relação a variável *y,* registra o intervalo [-1,2]. Desta forma, encerra a atividade escrevendo a integral que fornece a área A, $\int_{-1}^{2}[(y-2)-(y^2-4)]dy$.

Voltando à análise das atividades desenvolvidas pelos 14 alunos, os quais seguiam as etapas do caminho I, ao calcularem a integral em [-4,0], apareceu uma mensagem de erro na tela do computador. Neste momento, mobilizaram a apreensão discursiva para fazer a releitura do enunciado da atividade e buscar resposta para a mensagem que a apareceu na tela. Foi então que identificaram que a cônica $y^2 = x + 4$ não representava uma função e usando tratamentos no registro algébrico escreveram-na em função de *x,* a saber, $y_1(x) = \sqrt{x+4}$ e $y_2(x) = -\sqrt{x+4}$.

Ao converter as representações das funções $y = 2 + x$, $y_1(x) = \sqrt{x+4}$ e $y_2(x) = -\sqrt{x+4}$ no registro algébrico para representações no registro gráfico, os alunos identificaram que no intervalo [-4,0], a região estava limitada inferiormente pela curva $y_2(x) = -\sqrt{x+4}$ e também pela reta $y = 2 + x$. Em seguida, calcularam a área A, de modo similar ao apresentado na figura:

Figura 110: Procedimento para cálculo da área A, pelo Aluno 17

Etapa I - Identificação das curvas limitantes da região A



Etapa II - Integrais associadas a cada sub-região

Como intervalos temos [-4,-3] e [-3,0]

$$\int_{-4}^{-3} y_1 - y_2 \, dx \Rightarrow \int_{-4}^{-3} (x+4)^{1/2} + (x+4)^{1/2} \, dx \Rightarrow 1,34$$

$$\int_{-3}^{0} y_1 - f(x) \, dx \Rightarrow \int_{-3}^{0} (x+4)^{1/2} - (2+x) \, dx \Rightarrow 3,17$$

$$\int_{-4}^{-3} (y_1 - y_2) \, dx + \int_{-3}^{0} y_1 - f(x) \, dx = 1,34 + 3,17 \Rightarrow 4,51$$

Fonte: Autora

Na Etapa I da Figura 111, após o Aluno 17 esboçar as curvas, reconheceu a necessidade de decompor a região A em duas sub-regiões, definidas em [-4,-3] e em [-3, 0], de modo que cada sub-região fosse limitada inferiormente por uma única curva. Em seguida, calculou a área das sub-regiões por meio das integrais definidas em [-4,-3] e [-3,0] e somando-as encontrou o valor 4,51 para a área A.

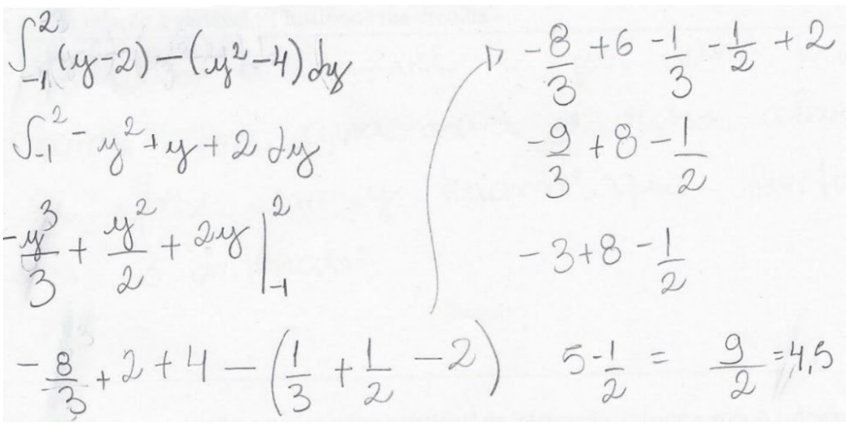
Mesmo os 7 alunos que não haviam percebido a necessidade de dividir a região em duas partes, no início da atividade, neste momento fizeram a decomposição e representaram no registro algébrico as integrais relativas a cada sub-região. Mais, obtiveram a área A pela soma das integrais, de maneira semelhante à da Figura 111.

Finalizado o procedimento do Caminho I, os alunos iniciaram as etapas do Caminho II, que visam calcular a área A a partir de funções escritas em relação à variável *y*.

Inicialmente os alunos esboçaram as curvas no mesmo plano cartesiano, no papel. Depois, orientados a realizarem o movimento de rotação do papel, 90º em sentido anti-horário, desenvolveram a modificação posicional.

Embasados na nova representação figural, produzida pela rotação, os alunos identificaram que a reta $y = 2 + x$ limitava superiormente a região e a cônica $y^2 = x + 4$, inferiormente. Também, reconheceram que a variável *y* era a variável independente e por esta razão precisavam reescrever as expressões algébricas $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ em funções de *y*. Por último, escreveram a integral que fornecia a área A, como mostrado abaixo:

Figura 111: Cálculo da área A, pelo Aluno 6



Fonte: Autora

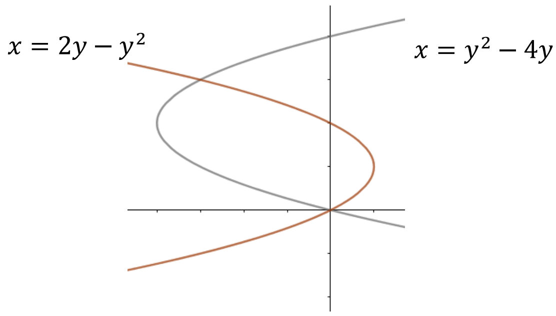
Infere-se da Figura 112, que para calcular a área A por meio da integral $\int_{-1}^{2}[(y-2) - (y^2-4)]dy$, o aluno aplicou tratamentos no registro algébrico para transformar as expressões $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ em função da variável *y*, a saber, $x_1(y) = y - 2$ e $x_2(y) = y^2 - 4$. Observando a posição destas curvas, percebeu que a região A estava limitada superiormente por $x_1(y) = y - 2$ e inferiormente por $x_2(y) = y^2 - 4$.

Tanto no Caminho I quanto no Caminho II, a atividade exigia a mobilização da apreensão perceptiva dos alunos cujo papel era comandar a apreensão operatória. Nem todos conseguiram, de imediato, ver aquilo que precisava ser visto na figura. No Caminho I, a apreensão perceptiva conduziu os alunos a operarem sobre a região, decompondo-a em sub-regiões. No Caminho II, a apreensão operatória, por meio do movimento de rotação, permitiu o cálculo da área A de uma forma mais simples em relação ao caminho anterior. Em ambos os caminhos, as apreensões geométricas foram decisivas para o desenvolvimento da atividade.

3.4.5.3 Análise a *priori* da Atividade 2-5

Atividade 2-5 - Considere a região limitada entre as curvas.

Figura 112: Região A entre curvas



Fonte: Stewart (2009, p. 395)

a) Enuncie um problema com base na figura.
b) Observe a região A: para facilitar os cálculos, você escolheria integrar em relação à variável *x* ou em relação à variável *y*? Justifique sua escolha.
c) A partir de sua escolha anterior sobre a variável de integração, calcule a área A e descreva o procedimento utilizado.

Nesta atividade pretende-se explorar, novamente, a conversão do registro gráfico-geométrico para o registro discursivo, pouco contemplada em livros textos de Cálculo. Para isso espera-se que os alunos mobilizem as apreensões perceptiva e operatória para ver a região A, limitada superiormente pela curva $x = 2y - y^2$ e inferiormente por $x = y^2 - 4y$ e optem pela integração em relação à variável y, já que o cálculo da área da região envolverá apenas a integral $\int_0^3 [(2y - y^2) - (y^2 - 4y)]dy$.

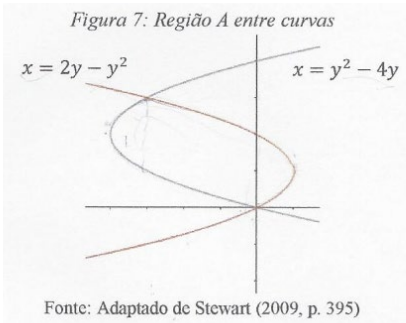
3.4.5.4 Análise a *posteriori* da Atividade 2-5

Dos 16 participantes, 2 não responderam a atividade e 2 não a concluíram.

Inicialmente foi contemplada a conversão entre os registros gráfico-geométrico e o discursivo, por meio da elaboração de um problema com base na Figura 113, dada no enunciado.

Os alunos não sentiram dificuldades em enunciar um problema. Dos 14 alunos, 3 elaboraram um problema partindo do registro gráfico e 11 partindo do registro discursivo. As Figuras 114 e 115 trazem exemplos dos referidos problemas.

Figura 113: Problema enunciado pelo Aluno 9



Um lago com determinada área, tem medidas relacionadas a intersecção das duas equações acima. utilize o conceito de integrais e calcule mais precisamente a área da figura.

Fonte: Autora

Aqui, o aluno elabora um problema que remete à figura dada. Isso significa que para resolver o problema enunciado é preciso explorar a representação da região no registro gráfico-geométrico, observando e extraindo da figura, as informações pertinentes.

Figura 114: Problema enunciado pelo Aluno 12

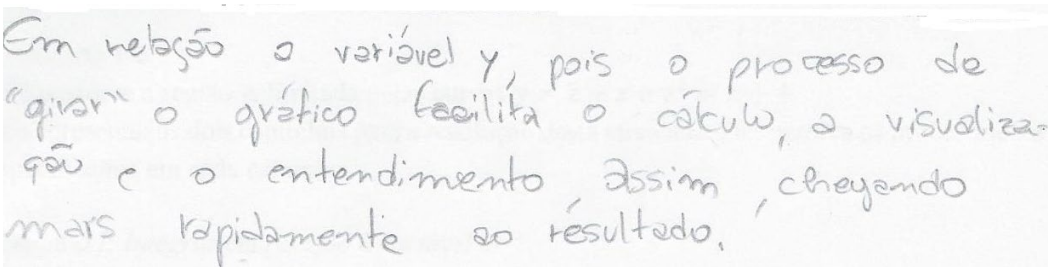
Tendo as cônicas $x = 2y - y^2$ e $x = y^2 - 4y$ encontre o valor da área da figura formada por elas.

Fonte: Autora

De acordo com a Figura 115, o aluno enuncia discursivamente seu problema. A exemplo dele, a maioria da turma também parte do registro discursivo e usa termos que apareceram nas atividades da sequência didática. Essa atitude dos alunos vem ao encontro do que foi observado nos livros textos de Cálculo, reafirmando que o registro discursivo é o registro de partida mais frequentemente utilizado no estudo da integral no cálculo de área.

Questionados sobre qual caminho usar para o cálculo da área A, todos escolheram integrar em relação à variável *y*. Na Figura 116, a justificativa do Aluno 12.

Figura 115: Decisão do Aluno 12 sobre a variável de integração



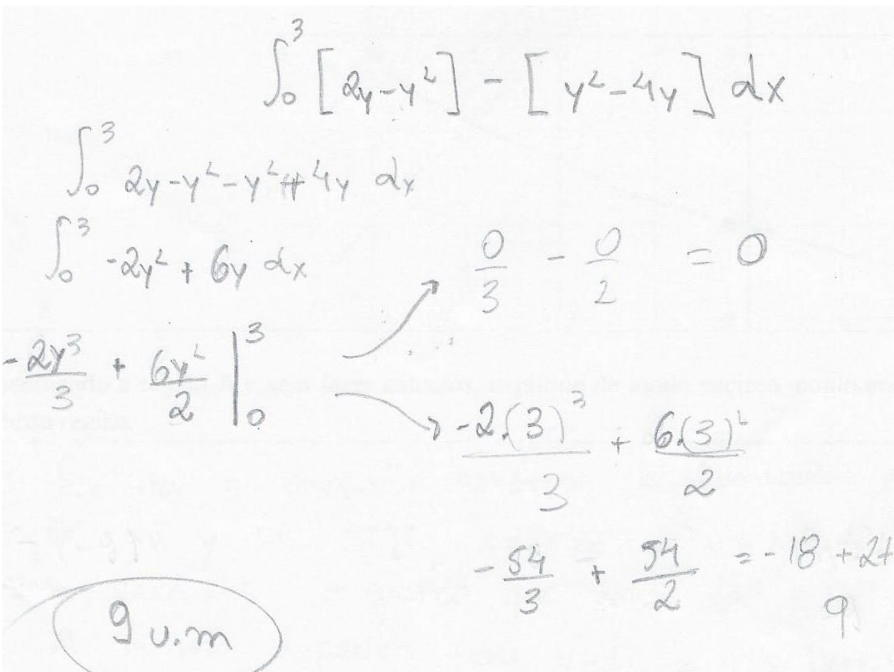
Em relação a variável y, pois o processo de "girar" o gráfico facilita o cálculo, a visualização e o entendimento assim, chegando mais rapidamente ao resultado.

Fonte: Autora

Aqui, o aluno justifica que o cálculo da área se torna mais rápido e fácil se as funções forem escritas em relação à variável y. Infere-se da resposta que as apreensões perceptiva e operatória o levaram a girar a região A, 90º em sentido anti-horário e a perceber que a região estava limitada superiormente por $x = 2y - y^2$ e inferiormente por $x = y^2 - 4y$.

Na sequência, os alunos escreveram a integral que fornece a área procurada e calcularam-na, de forma análoga a da figura:

Figura 116: Cálculo da área pelo Aluno 12



$$\int_0^3 [2y-y^2] - [y^2-4y]\,dx$$

$$\int_0^3 2y-y^2-y^2+4y\,dx$$

$$\int_0^3 -2y^2+6y\,dx$$

$$-\frac{2y^3}{3}+\frac{6y^2}{2}\Big|_0^3$$

$$\frac{0}{3}-\frac{0}{2}=0$$

$$-\frac{2(3)^3}{3}+\frac{6(3)^2}{2}$$

$$-\frac{54}{3}+\frac{54}{2}=-18+27$$

$$9$$

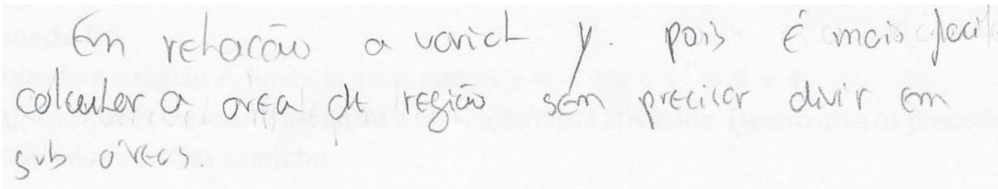
9 u.m

Fonte: Autora

A Figura 117 comprova que o aluno escolheu integrar em relação à variável y. Partindo dessa escolha ele registra que a área A é calculada pela integral $\int_0^3 [(2y - y^2) - (y^2 - 4y)]dy$.

Para integrar em relação à variável x, a região A precisaria ser dividida em sub-regiões definidas nos intervalos [-4, -3], [-3, 0] e [0,1] e as cônicas $x = 2y - y^2$ e $x = y^2 - 4y$, escritas em função de x. Com base neste argumento, o Aluno 14 justificou sua escolha pela variável y:

Figura 117: Justificativa do Aluno 14 para integrar em relação à variável y


Em relacão a varicl y. pois é mais facil calcular a area de região sem preciser divir em sub areas.

Fonte: Autora

Observando a resposta do Aluno 14, infere-se que ele realizou a reconfiguração intermediária para perceber que a região A precisava ser decomposta em sub-regiões. Entretanto, reconhecendo que este procedimento de decomposição seria mais trabalhoso ou complicado, optou por calcular a integral em relação a y.

Saber decidir quando integrar em relação à variável x ou quando integrar em relação à variável y é uma condição necessária para tornar o cálculo da integral mais rápido ou simples. A escolha da variável de integração requer inicialmente dos alunos o modo matemático de ver, pois eles precisam operar sobre a região, de tal forma que se produza uma nova representação figural capaz de revelar interpretações até então, ocultas.

CONSIDERAÇÕES

Escrever uma tese é ...

- ✓ Sair da zona de conforto para aventurar-se rumo ao desconhecido, a exemplo de um barco inicialmente à deriva no mar, que precisa da luz de um farol para seguir rumo a um porto seguro. Destarte, a sabedoria e a tranquilidade do orientador, as disciplinas cursadas no programa de Pós-Graduação e a busca da pesquisadora por conhecimentos se constituíram na luz que guiou este trabalho;
- ✓ Desenvolver, entre tantas habilidades, o poder de síntese. Afinal, como é possível escrever em algumas centenas de páginas, tudo o que foi construído e aprendido ao longo dos anos, especialmente nos últimos anos de intenso estudo e dedicação?
- ✓ Trabalhar coletivamente e ao mesmo tempo, individualmente. De fato, as conversas com o orientador, os debates com colegas de trabalho e a participação dos alunos no desenvolvimento da sequência didática alicerçaram o trabalho coletivo, porém escrito pelas mãos de uma única pessoa, a pesquisadora;
- ✓ Apresentar um estudo que não está esgotado em discussões e respostas, mas ao contrário, é *start* para novas reflexões e produções.

Escrever uma tese em Educação Matemática é tudo isso e muito mais! É sentir na pele a responsabilidade de contribuir para a qualificação da Educação brasileira. É ter consciência de que o trabalho produzido pode ser propulsor de mudanças educacionais e sociais, haja visto que é um espaço propício e fecundo para iniciar, ampliar ou aprofundar discussões ligadas ao processo de ensinar e de aprender Matemática.

Diante do exposto, buscamos discutir o processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo, uma vez que este componente curricular é fundamental para a formação científica dos alunos, servindo de base para muitos conhecimentos da Matemática.

Pesquisas voltadas ao Cálculo têm sido desenvolvidas ao longo dos anos, sob diferentes perspectivas, como apresentamos na seção 2.3, todavia, elas não trataram do ensino e da aprendizagem da integral no cálculo de área, sob o olhar da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Também mostramos na secção 2.4 que o enfoque dado a este assunto, em livros textos de Cálculo, privilegia o registro discursivo enquanto registro de partida e não explora a equivalência de áreas. Ademais, a resolução de problemas envolvendo áreas requer a mobilização de diferentes registros de representação semiótica.

Em virtude das constatações supracitadas, o objetivo principal do nosso estudo foi investigar a maneira que os alunos utilizavam operações semióticas na aprendizagem da integral no cálculo de área, num ambiente computacional.

Buscando alcançar o objetivo, organizamos o ensino da integral no cálculo de área segundo os preceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Com base em elementos da metodologia Engenharia Didática, elaboramos uma sequência didática que permitisse aos alunos explorarem, de forma dinâmica, as diferentes operações semióticas, as quais são primordiais à compreensão matemática, conforme Duval (2004).

A sequência didática estava organizada em 5 blocos de atividades. Cada bloco explorou certos conceitos e conhecimentos, que entendemos necessários à compreensão da integral no cálculo de área. Neste sentido o Bloco 1 retomou os conceitos de soma de Riemann, área e integral definida, já estudados em sala de aula. O Bloco 2 discutiu a relação entre a integral enquanto área e a posição da região no plano cartesiano. O Bloco 3 deu condições para os alunos reconhecerem quando uma região precisava ser decomposta em sub-regiões. O Bloco 4 mostrou que a equivalência de área pode ser contemplada no estudo da referida integral. E o Bloco 5 tratou da possibilidade de integrar em relação à variável x ou em relação à variável y.

Sabendo que o procedimento metodológico que adotamos serviu para a coleta dos dados e que o aporte teórico subsidiou a sua análise, apresentamos a seguir a síntese dos resultados, bem como ponderações acerca de questões relevantes para essa investigação.

No que tange ao índice de não aprovação em componentes de Cálculo, que corresponde à reprovação por nota ou por falta, ou à desistência, a Universidade Federal da Fronteira Sul, campus Chapecó, assemelha-se a outras instituições públicas de ensino superior, conforme exposto na seção 2.2. Dos quatro cursos de graduação analisados, três apresentaram taxas médias de não aprovação superior a 50%, relativas ao primeiro componente de Cálculo, denominado Cálculo I ou Cálculo A. Outrossim, nos cursos de Licenciatura em Matemática e de Ciência da Computação, as médias de não aprovação neste primeiro componente de Cálculo foram as mais altas em comparação aos outros dois cursos, permeando a faixa de 62%.

O uso do computador no ensino e também no ensino de Cálculo foi discutido na secção 2.1. Nela, Duval (2015) destaca que o computador possibilita a transformação visual de figuras e a exploração de propriedades e de relações matemáticas, tendo papel relevante para o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático. Neste sentido, os resultados da aplicação da sequência didática sinalizam que o GeoGebra permitiu aos alunos tornarem-se sujeitos ativos no processo de construção de conhecimentos. Por meio do software, realizaram tratamentos figurais e articularam os registros algébrico e gráfico-geométrico, de modo que hipóteses e conjunturas fossem criadas, comprovadas ou refutadas. O GeoGebra potencializou a aprendizagem à medida que agilizou os cálculos, as construções gráficas, evitando trabalhos tediosos e consequentemente, possibilitando maior tempo aos alunos para análises e interpretações. Em face disso e reconhecendo os aspectos históricos do Cálculo que o torna, essencialmente dinâmico, abdicar desta ferramenta no ensino, parece estar na contramão desse dinamismo.

O ensino da integral no cálculo de área envolve, entre outros, a mobilização de operações semióticas, em especial de tratamentos e de conversões. Essas operações auxiliaram os alunos na compreensão do objeto em estudo, porém percebemos que a conversão e a coordenação dos registros, por vezes, não operavam espontaneamente, mesmo abordando atividades que exploravam a diversidade de registros de representação semiótica.

Ainda em relação às conversões, nas atividades que os alunos conseguiram estabelecer correspondência direta entre as representações de partida e as de chegada, esta operação não se constituía em um problema. Entretanto, ela era fonte de dificuldades quando não se reconheciam, de imediato, tais correspondências, provocando entraves no pensamento matemático. Para exemplificar, o primeiro momento de entrave surgiu na Atividade 1-1, quando os alunos precisavam converter o objeto 'altura dos retângulos', representado inicialmente por um traço vertical no registro gráfico-geométrico, em uma representação algébrica. Nesta situação, o traço vertical não apresentava congruência semântica com o valor da função e por esta razão os alunos não conseguiam reconhecer a altura em suas diferentes representações.

Desta forma, pudemos constatar que a conversão é uma operação semiótica não neutra e não imediata para muitos alunos, pois requer o domínio e a manipulação de conhecimentos nos diferentes registros abordados. Ademais, quando explorada no ensino e realizada com espontaneidade é essencial à compreensão conceitual, indo ao encontro da hipótese fundamental enunciada por Duval (2004).

Dentre as quatro apreensões geométricas requeridas em atividades que envolvem figuras geométricas, a perceptiva, a discursiva e a operatória merecem destaque nesta pesquisa. A apreensão perceptiva assumiu papel relevante na resolução das atividades, pois não apenas possibilitava a identificação das regiões, mas também comandava a apreensão operatória, servindo de *start* para a realização de tratamentos figurais e algébricos.

A apreensão discursiva, que visa controlar a percepção imediata, por vezes, foi abandonada por alguns alunos. Na Atividade 5-2, por exemplo, a informação contida no enunciado, sobre o valor do limite inferior de integração, foi deixada de lado e tais alunos voltaram-se totalmente à figura, como se o discurso não fosse mais necessário. Esta atitude revela que não houve articulação entre figura e enunciado e também que a apreensão perceptiva, mesmo tendo importante papel na aprendizagem, deve estar subordinada à apreensão discursiva, pois é a subordinação que conduz os alunos a olharem aquilo que realmente precisa ser visto na figura e não o que se deseja que ela mostre.

A apreensão operatória, frequentemente mobilizada pelos alunos, tornou-se fundamental para o desenvolvimento das atividades, especialmente por meio da reconfiguração intermediária. A reconfiguração possibilitou a decomposição de regiões em partes de modo a suscitar nos alunos novos sentidos e interpretações, os quais permitiram o progresso do pensamento matemático necessário à resolução.

Ao longo da aplicação das atividades, percebemos que os alunos nem sempre se sentiam à vontade para descrever, por meio da escrita, o que estavam pensando ou visualizando, a exemplo da Atividade 2-1 que exigia o resgate do conceito de limite. A dificuldade do registro escrito está atrelada ao fato de que a matemática não é uma atividade oral. Ao contrário, é essencialmente escrita e por esta razão, a língua natural não pode exercer apenas a função de comunicação e de objetivação, mas deve servir à construção de conhecimentos matemáticos, devendo, para isso, estar articulada cognitiva e coordenadamente a um registro de representação (DUVAL; MORETTI, 2018).

A dificuldade relatada acima geralmente é acentuada por práticas tradicionais de ensino de Cálculo que enfatizam os mesmos sentidos de conversão, a saber, do discursivo para o algébrico ou do algébrico para o gráfico, sem explorar os sentidos inversos. Desta forma, sugerimos a proposição de atividades matemáticas que abarquem todos os sentidos de conversão.

Um aspecto marcante da pesquisa diz respeito ao comprometimento e à maturidade dos alunos. Dos 21 matriculados em Cálculo B, 20 participaram das atividades, sendo que em nenhum encontro entre a pesquisadora e os alunos, tivemos menos de 16 participantes. Durante a execução das atividades, percebemos a seriedade e a responsabilidade dos alunos refletidas no empenho, na assiduidade e na preocupação com a apresentação de resoluções corretas e completas. Demonstraram estar comprometidos com a aprendizagem. Outrossim, a possibilidade do trabalho em dupla mostrou a maturidade dos alunos, pois cada membro da dupla buscou registrar no papel a sua compreensão e a sua resolução, com base nas discussões. Algumas duplas apresentaram resoluções distintas para um mesmo problema e poucos foram os casos em que as resoluções eram idênticas.

Outro aspecto está relacionado à postura da professora de Cálculo B que se dispôs a aplicar as atividades e a acompanhar a resolução das mesmas, auxiliando os alunos quando necessário. Em consequência, pude exercer meu papel de pesquisadora e observadora, sem demasiadas intervenções.

A entrevista semiestruturada, realizada apenas com alunos que apresentaram resoluções ambíguas ou que geraram dúvidas de interpretação à pesquisadora durante a análise, permitiu-nos registrar com maior fidelidade e clareza a maneira que os alunos construíam e organizavam seus pensamentos ao resolver as atividades.

Nas análises a *posteriori*, utilizamos marcas vermelhas sobrepostas à resposta original dos alunos para complementar os registros ou destacar erros incorridos por eles, no desenvolvimento das atividades. Foi um artifício da pesquisadora para chamar a atenção do leitor.

Buscamos informar o número de alunos que apresentavam desenvolvimentos matemáticos semelhantes aos previstos nas análises a *priori* e o quantitativo daqueles que não correspondiam às previsões, pois entendemos que os dados quantitativos se somam aos qualitativos. Paralelamente, ao longo das análises a *posteriori* vamos interpretando os dados e apontando sugestões às atividades com vistas a melhorar a proposta didática.

Como mencionado no início destas considerações, reforçamos o entendimento de que escrever uma tese em Educação Matemática implica em contribuir para a melhoria da qualidade da nossa Educação. Neste sentido, a presente pesquisa mostrou a relevância e a necessidade de explorar os diferentes registros de representação semiótica no ensino e na aprendizagem de Cálculo. Ademais, respaldados na análise de dados, afirmamos que a equivalência de áreas pode ser um novo elemento a ser inserido no estudo da integral; que a conversão é uma operação semiótica capaz de criar novos conhecimentos; e que a sequência didática alcançou o objetivo de subsidiar a compreensão da integral no cálculo de área, uma vez que os alunos desenvolveram com autonomia as atividades propostas.

Vislumbramos a continuidade do estudo, não apenas pensando na possibilidade de estendê-lo para funções não polinomiais ou para integrais impróprias. Vislumbramos o repensar do estudo, complementando-o com outras metodologias ou atividades, por exemplo a modelagem matemática ou a proposição de atividades que retratem problemas reais.

Propendendo a difundir e a discutir os resultados obtidos, bem como a teoria de Duval, almejamos apresentar esse estudo a estudantes de cursos de Matemática, a professores universitários e da Educação Básica, a partir de palestras, grupos de estudo, etc.

Esperamos ter contribuído para suscitar novas inquietações que desafiem o ensino, sob diferentes perspectivas, com vistas a qualificar o processo de ensinar e de aprender Cálculo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMADEI, F.L. **O infinito**: um obstáculo no estudo da Matemática. 2005. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Sáo Paulo – SP, 2005.

ANDRADE FILHO, B. M. D. **Os registros de representação semiótica: uma proposta de aplicação no estudo das integrais definidas**. 2011. Monografia (Especialista em Educação Matemática). Universidade do Sul de Santa Catarina. Santa Catarina, 2011.

ANDRÉ, S. L DA C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Paraná, 2004.

BARBOSA, S M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia.** 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2009.

BARUFI, M. C, B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – FEE. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BICUDO, I (trad. e org.). **Os Elementos.** São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

BORBA, M de C; PENTEADO, M G. **Informática e educação matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção tendências em educação matemática; 2)

BOGDAN, R., BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos . Porto: Porto Editora, 1991.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BRANDT, C. F; MORETTI, M. T.; BASSOI, T. S. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.16, n.2, 2014.

CABRAL, T. C. B; BALDINO, R. R. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

CAMPOS, R. P. **A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real**: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2013.

CORRÊA, M. O. S; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. In: BRANDT, C. F; MORETTI, M. T (Orgs.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. Unijuí, 2014, p. 39-65.

DA SILVA, C. A. **A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica. 2004**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DE CARVALHO, J. P. **Equivalência e aplicação de área na matemática grega**. 2006. Disponível em: www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/pitombeira.pdf. Acesso em maio de 2017.

DO NASCIMENTO, J. C. **O conceito de limite em Cálculo:** obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. 2003. Tese (Doutorado em Psicologia), Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2003.

DUVAL, R**. Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang. 1995.

__________ **Semiosis y pensamiento humano** - Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: Myrian Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

__________ Les conditions conitives de l"apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

__________ Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v.6, n.2, p. 96-112, UFSC: 2011a.

___________ **Ver e ensinar a matemática de outra forma: e**ntrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

__________ Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n.1, p. 118-138, 2012a.

__________Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência1. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.97-117, 2012b.

__________Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012c.

__________ Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v.10, n. 1, p. 1-23, 2015.

__________ Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 2-78, 2016.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Temas do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica: significado do que é “fazer matemática". In: CUSTÓDIO, J. F.; COSTA, D. A.; FLORES, C. R.; GRANDO, R. C. (Orgs.). **Programa de pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica:** contribuições para a pesquisa e ensino. São Paulo: Ed. LF, 2018.

DZIEDZIC, M. et al. Nivelamento em matemática para os cursos de engenharia do UNICENP. In: Congresso brasileiro de ensino de engenharia. Porto Alegre. **Anais do XXIX Congresso brasileiro de ensino de engenharia**. Porto Alegre: PUC, 2001.

EDWARDS JUNIOR., C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer, 1979. Disponível em:

http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/pluginfile.php/131819/mod_resource/content/1/The%20historical%20development%20of%20the%20calculus.pdf.
EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. DOMINGUES, H. H. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004.

FERRÃO, H. S. **Mapas conceituais digitais como elemento sinalizador de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2007.

FLORES BOLDA, C. **Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração**. Dissertação (Mestrado em Educação - Centro de Ciências da Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

FLORES, C. R; MORETTI, M. T. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Pernambuco. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Pernambuco: UFP, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais

__________As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **Revemat**, Florianópolis, v 1.1, p. 5 -13, UFSC: 2006.

FRANCHI, R. H. de O. Enfrentando as falhas na formação básica dos alunos ingressantes. In: Congresso brasileiro de ensino de engenharia. Porto Alegre. **Anais do XXXI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. Rio de Janeiro: 2003.

GODOY, L. F. S. **Registros de representação da noção de derivadas e o processo de aprendizagem.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

HSIA, Y. W. **A utilização do livro didático pelo aluno ao estudar integral.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

JUNQUEIRA, S. M. da S.. **Experiências de estudantes na construção do conhecimento de derivada em aulas de Cálculo 1**. 2014. 213 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**.3ed. São Paulo: Harbra, 1994. v1.
LIMA, E. L. **Matemática e Ensino.** 3a Ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática- SBM, 2007.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LUIZ, L. dos S. **Esboço de curvas no ensino superior:** uma proposta baseada na interpretação global das propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MELO, E. G. S. **Uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria.** 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

MENONCINI L; MORETTI, M.T. A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. **Educação Matemática em Revista.** v. 1, n.18, p. 126 – 134. Canoas, 2017.

MEYER, C. **Derivada/reta tangente: imagem conceitual e definição conceitual**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MORAIS, C. D. P. **Nuevos estudios sencillos de leo brouwer:** a utilização da teoria da Gestalt no processo de elaboração da performance instrumental, 2017. 163 f. Dissertação (Mestrado em Música) - Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2017.

MORETTI, M. T. A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 1 ed. Campinas: Papirus, v. 1, p. 149-160, 2003.

______________. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiæ**, Canoas, v. 15, n. 2, p. 289-303, 2013.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, A. G.; FERREIRA, G. G. Estudo da conversão entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Quadrante**. v. XVII, n, 2. Lisboa: APM, 2008.

NASCIMENTO, J. L., Uma abordagem para o estudo de limites com uso de pré-conceitos do cálculo diferencial e integral. In: **Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. Porto Alegre. Anais do XXIX Congresso brasileiro de ensino de engenharia. Porto Alegre: PUC, 2001.

OLÍMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. 264 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2006.

OLIVEIRA, A. **A noção de integral no contexto das concepções operacional e estrutural**. São Paulo, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

OTERO-GARCIA, S. C. **Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue.** 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

PALARO, L. A. **A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006

PASA, B. C. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

PICONE, D. F.B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003.Tese (Doutorado em Educação) – FEE. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. F.. **Tópicos de história da matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012, 452 p. (Coleção Profmat; 3)

SILVA, M. O. **Esboço de curvas:** uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

SOUZA JUNIOR, A. J. **Trabalho Coletivo na Universidade:** trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado. FE/Unicamp, Campinas, 2000.

STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v1.

SUCUCUGLIA, R. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2006.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL. Pró-Reitoria de Graduação. Diretoria de Políticas de Graduação. **Formulário de inscrição de proposta de projeto de monitoria UFFS:** Apoio à aprendizagem de Matemática, 2015.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de alunos universitários de cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1999.

APÊNDICE 1 – AMBIENTAÇÃO AO GEOGEBRA

1. Esboce as curvas no GeoGebra, digitando diretamente na janela de álgebra cada expressão:
   a) $f(x) = x$
   b) $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$
   c) $h(x) = 2 - x^2$

2. Esboce a curva $f(x) = 2x - 3$ em [0,3], usando o comando *Função (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Em seguida use o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável **< Número de Retângulos >** por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Qual o valor da soma de Riemann para $b = 10$? E para $b = 80$?

3. Esboce a curva $f(x) = x^2 + 3x - 1$, digitando diretamente na janela de álgebra a expressão $x^2 + 3x - 1$. Em seguida, no intervalo [-4,1], use o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável **< Número de Retângulos >** por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Qual o valor da soma de Riemann para $b = 50$? E para $b = 150$?

4. Esboce as curvas abaixo. Em seguida, aplicando o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)*, calcule as integrais:
   a) $f(x) = -3x + 4$, em [-2,2]
   b) $g(x) = 4x^2 - 5x + 2$, em [1,4]
   c) $h(x) = 5x - 3x^2$, em [-1,1]

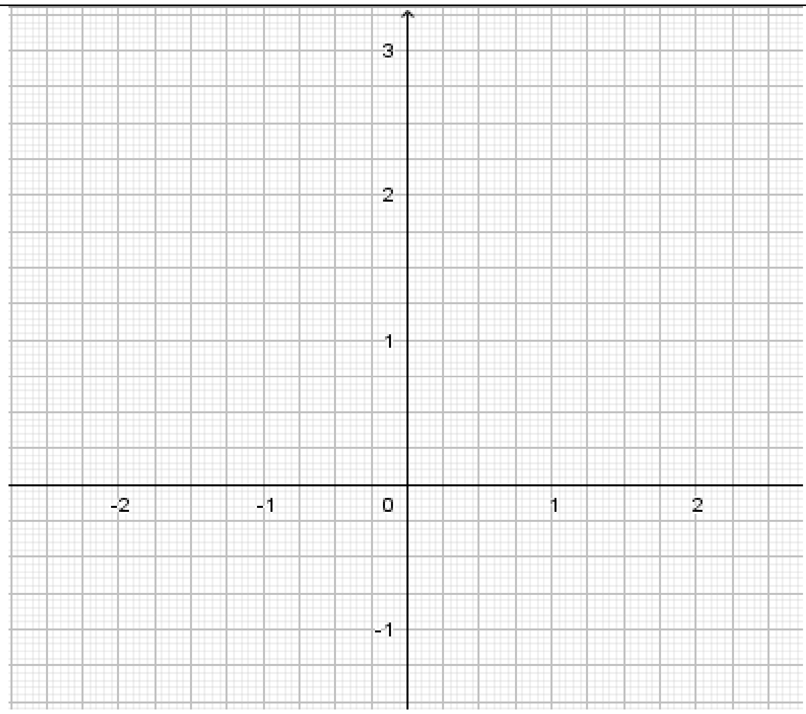
APÊNDICE 2 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA

BLOCO 1:

Aluno: ____ Computador nº: ____________

Atividade 1-1

1. Considere a função $f(x) = x^2 - 1$ definida em [-2,2]. Esboce a curva de $f(x)$ no intervalo dado e responda as demais perguntas com base neste esboço.



a) Observe a curva no intervalo [1,2]. Divida este intervalo em 4 subintervalos de mesma amplitude Δx (mesmo tamanho) e identifique as abcissas $x_0 = 1$, x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 2$. Responda:

- Qual a amplitude Δx de cada subintervalo? Qual o valor de x_1, x_2, x_3?

- Se o intervalo [1,2] fosse dividido em 10 subintervalos, qual a amplitude de cada subintervalo? E se fossem 50 subintervalos?

- Seja um intervalo qualquer [a,b] dividido em n subintervalos. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude Δx dos subintervalos, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos n.

b) Trace retas verticais nas abcissas x_0, x_1, x_2, x_3 e x_4 até a intersecção com a curva de $f(x)$ e forme 4 retângulos R1, R2, R3 e R4 cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em x_1, x_2, x_3 e x_4. Responda:

- A altura dos retângulos é um valor positivo ou negativo?

- Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos. Calcule o valor de cada altura.

- Qual o valor da base de cada retângulo?

c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo R1, R2, R3 e R4 em função da amplitude Δx e das alturas $f(x_1), \ldots, f(x_4)$ e em seguida calcule suas áreas.

d) Seja A a área **abaixo** da curva de $f(x)$ e acima do eixo x, definida no intervalo $[1,2]$. Estime o valor da área A a partir da soma das áreas dos retângulos R1, R2, R3 e R4 (arredonde o valor para duas casas decimais). Reescreva esta soma usando o símbolo do somatório $\sum$, a amplitude Δx e as alturas $f(x_1), \ldots, f(x_4)$.

- Observe o valor da estimativa da área A feita a partir da soma das áreas dos 4 retângulos e responda: O valor da área A é um valor maior, menor ou igual ao valor estimado que você encontrou? Justifique.

Aluno: ____ Computador nº: ____________

Orientações iniciais:

✓ Crie uma pasta na **Área de Trabalho** com o nome **Tese** seguido do seu **nome**. Por exemplo: Tese-Ana. Nesta pasta serão inseridos os *prints* das telas do GeoGebra.

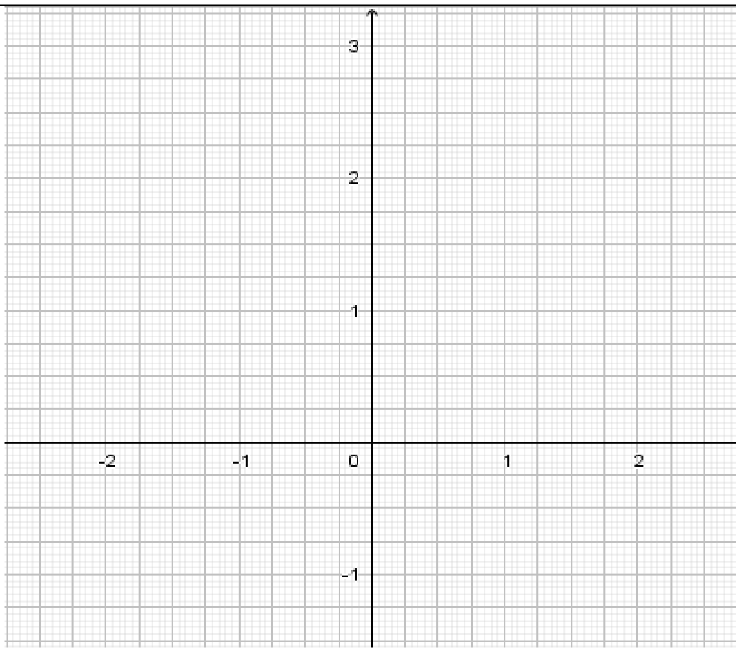
✓ Abra o LibreOffice, crie um **arquivo** com o nome **Atividades Tese** e salve na pasta que você criou.

✓ Para executar um *print* da tela do Geogebra, clique em *Alt+PrintScreen* e depois cole e salve no arquivo **Atividades Tese**.

Atividade 2 -1

2. Esboce a curva da função $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 1$. Usando o software GeoGebra, digite diretamente no *Campo de Entrada* a expressão $x^2 - 1$ e tecle *Enter*.

a) Identifique a região A **abaixo** da curva de $f(x)$, até o eixo x, no intervalo [1,2], pintando-a.



b) Estime a área da região A para um **número b** de subintervalos, ou seja, um número **b** de retângulos. Use o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável **< Número de Retângulos >** por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Além da variável **b** aparece na tela do GeoGebra a **variável a** que mostra a soma das áreas dos retângulos. Teste valores para **b,** como $b = 4$, $b = 10$ e $b = 1000$.

- Que relação há entre a amplitude Δx dos subintervalos e o número de retângulos?

- Para que valor a área A se aproxima?

- O que se observa da relação entre o número de retângulos e o valor aproximado da área A?

- Por que o valor aproximado de A diminui quando o número de retângulos aumenta?

c) Atribua $b = 4$ e observe a soma das áreas dos retângulos. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.

- Qual o valor aproximado da área A para 4 retângulos? Este valor coincide com o valor encontrado na atividade 1-1?

- Qual o valor da amplitude de cada subintervalo? Escreva a altura de cada retângulo em função de $f(x_i)$, $i = 1,2,3,4$.

- Escreva uma fórmula para encontrar o valor aproximado da área A a partir da soma das áreas dos 4 retângulos, usando o símbolo $\sum$, a amplitude Δx e os valores de $f(x_i)$, $i = 1,2,3,4$.

d) Atribua $b = 10$ e observe a soma das áreas dos retângulos.

- Qual o valor aproximado da área A quando houver 10 retângulos?
- Qual o valor da amplitude de cada subintervalo?
- Escreva uma fórmula para encontrar o valor aproximado da área A a partir da soma das áreas dos 10 retângulos, usando o símbolo $\sum$, a amplitude Δx e os valores de $f(x_i)$, i: $1,2,..,10$.

e) Atribua $b = 1000$ e observe a soma das áreas dos retângulos . Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.

- Qual o valor aproximado da área A quando houver 1000 retângulos?
- Qual o valor da amplitude de cada subintervalo?
- Escreva uma fórmula para estimar o valor da área A para 1000 retângulos, usando o símbolo do somatório $\sum$.

f) Atribua $b = 1.000$. Usando o comando *Ctrl* + aumente o zoom da tela até à escala 0.01 para os eixos x e y e observe os retângulos. Com esta **grande** quantidade de retângulos é possível afirmar que a área A vale 1,72? Justifique.

g) Clique com o botão direito sobre a quantidade **b** de retângulos e altere o valor para 10.000. Atribua $b = 10.000$ e aumente o zoom da tela até à escala 0.001, observando os retângulos. Com esta quantidade **muito grande** de retângulos é possível chegar à área A? Justifique.

h) É possível considerar uma quantidade infinita de retângulos? Neste caso, chega-se à área A? Justifique.

- Para estimar a área A, abaixo do gráfico de $f(x)$ e acima do eixo *x,* no intervalo [1,2] foi utilizada uma soma finita de retângulos (primeiro para 4 retângulos, depois para 10, para 1.000 e para 10.000 retângulos), chamada **soma de Riemann de $f(x)$**. Escreva a **soma de Riemann** de $f(x)$ para *n* retângulos num intervalo qualquer [a,b] usando o símbolo $\sum$, a amplitude Δx e $f(x_i)$, $i: 1,2,..,n$.

- O que a **soma de Riemann** de $f(x)$ fornece?

CONSIDERAÇÕES:

- **Soma de Riemann:** Nesta atividade, em que a função $f(x) = x^2 - 1$ é **contínua** e **não negativa** no intervalo [1,2], a **soma de Riemann** representa uma boa aproximação para a área A, já que a quantidade de retângulos pode ser aumentada **quanto se queira**. Isso significa que a área A é aproximada com qualquer **grau de precisão** por uma soma de Riemann, ou seja, é possível tornar a soma das áreas dos retângulos **suficientemente próxima** da área A. Considerando estas informações e traduzindo a ideia intuitiva do termo **suficientemente próxima** para a linguagem matemática, escreva uma fórmula para a **área A** sob a curva de $f(x)$, de *a* até *b*, a partir da **soma de Riemann**.

- **Integral Definida:** Seja *f* é uma função contínua definida no intervalo [a,b]. Dividindo [a,b] em *n* subintervalos de comprimentos iguais a Δx tem-se $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ as extremidades desses subintervalos. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ existe para todas as extremidades, então este limite é chamado ***Integral Definida de f de a até b*** e denotado por $\int_a^b f(x)\,dx$. Logo, tem-se que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

em que *a* e *b* são os limites de integração, chamados respectivamente de limite inferior e limite superior.

i) No conceito de integral definida aparece a palavra ***limite***. Por que é necessário aplicar o *limite* à soma de Riemann? Justifique sua resposta.

j) Observe a expressão $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

- Na sua opinião, pode $f(x_i)$ ser um valor negativo? Por quê?

- Caso $f(x_i)$ seja negativo, como a amplitude Δx é sempre positiva, então a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ seria negativa também. Neste caso, a integral definida $\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,dx$ representaria a área da região abaixo de $f(x)$, em [a,b]? Justifique.

- O que a expressão $\int_a^b f(x)\,dx$ representa para você?

BLOCO 2

Aluno: ____ Computador nº: _________

Orientações iniciais:

✓ Abra o **arquivo** com o nome **Atividades Tese**.

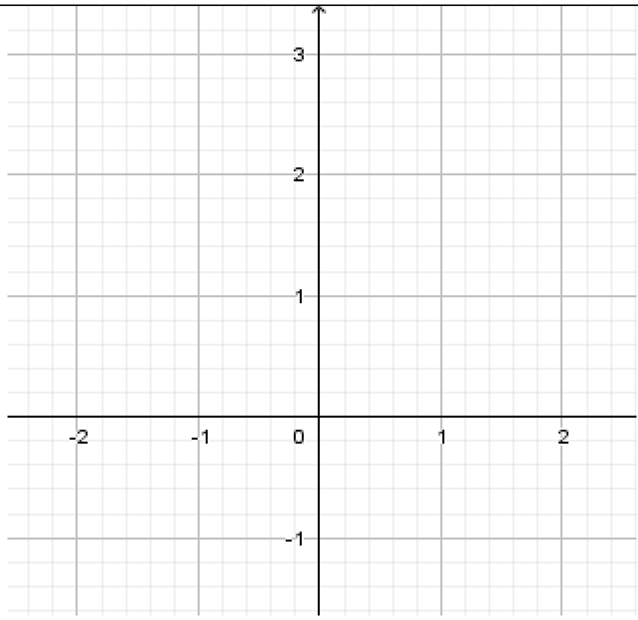
✓ Para executar um *print* da tela do Geogebra, clique em *Alt+PrintScreen* e depois cole e salve no arquivo **Atividades Tese**.

✓ Abra um novo arquivo no GeoGebra.

Atividade 1 -2

1. Seja a função $f(x) = x$.

a) Esboce a curva da função $f(x)$ e identifique a área A abaixo desta curva, de 0 a 2, pintando-a. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo de Entrada* a expressão x e tecle *Enter*.



b) Determine a soma de Riemann da função $f(x)$ no intervalo [0,2], para um **número b** de retângulos. Use o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável **< Número de Retângulos >** por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Além da variável **b** aparece na tela do GeoGebra a **variável a** que mostra a soma de Riemann da função. Teste valores para **b,** como $b = 4$, $b = 10$ e $b = 1000$ e observe os valores desta soma. Para que valor a área A se aproxima?

c) Reduza a quantidade de retângulos para $b = 4$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. No intervalo [0,2], observe a posição dos retângulos e a posição da curva $f(x)$ no plano cartesiano. Com base nestas observações **justifique** suas respostas:

- A curva está posicionada acima ou abaixo do eixo x?

- Os retângulos estão posicionados acima ou abaixo do eixo x? Neste caso, a altura dos retângulos é positiva ou negativa? Quem fornece a altura?

- A área de cada retângulo é positiva ou negativa? Por quê?

- O que a soma de Riemann representa?

d) Calcule a área da região A usando conhecimentos de geometria.

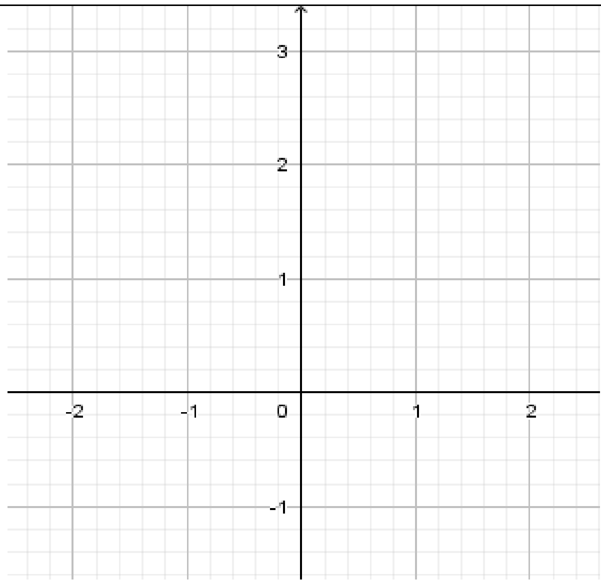
e) Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* para calcular a integral da função $f(x) = x$ em [0,2] e escreva algebricamente esta integral. Compare o resultado obtido com a área A encontrada via geometria. O que se observa? O que a integral definida fornece neste caso?

Aluno: ____ Computador nº:_____________

Atividade 2 -2

2. Considere a mesma função $f(x) = x$.

a) Abra um novo arquivo no GeoGebra. Esboce a curva da função $f(x)$, digitando no *Campo de Entrada* do GeoGebra a expressão x. Identifique a região B sob esta curva, no intervalo [-1,0], pintando-a.



b) Determine a soma de Riemann da função $f(x)$ em [-1,0] para um **número b** de retângulos. Use o comando *SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* substituindo a variável **< Número de Retângulos >** por **b**. Clique em Criar Controle Deslizante. Clique com o botão direito sobre **b** e clique em Propriedades – Controle Deslizante - min=1, Max=1.000 e incremento=1. Além da variável **b** aparece na tela do GeoGebra a **variável a** que mostra a soma de Riemann da função. Teste valores para **b,** como $b = 4$, $b = 10$ e $b = 1000$. A soma de Riemann é positiva ou negativa? Por quê?

- Para que valor a soma de Riemann se aproxima? Qual a relação entre o número de retângulos e o valor desta soma?

c) Reduza a quantia de retângulos para $b = 4$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. No intervalo [-1,0], observe a posição dos retângulos e a posição da curva $f(x)$ no plano cartesiano. Com base nestas observações justifique suas respostas:

- A curva está posicionada acima ou abaixo do eixo *x*?

- Os retângulos estão posicionados acima ou abaixo do eixo *x*? Neste caso, a altura dos retângulos é um valor positivo ou negativo? Calcule a altura do maior retângulo.

- Por que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ é negativa no intervalo [-1,0]? Justifique.

- Para que valor a soma de Riemann se aproxima?

d) Calcule a área da região B usando conceitos da geometria e compare com o valor aproximado pela soma de Riemann. O que se percebe?

e) Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* para calcular a integral em [-1, 0].

- Qual o valor da integral? Este valor coincide com o valor da área obtido por meio da geometria?

- Caso os valores sejam diferentes, qual deles você considera adequado para a área B? Neste caso, a integral definida representa a área B? Caso não, o que a integral definida fornece?

f) Observando a posição da região B e a posição da curva $f(x)$ em [-1,0], ambas em relação ao eixo *x,* interprete o resultado **negativo** da integral definida.

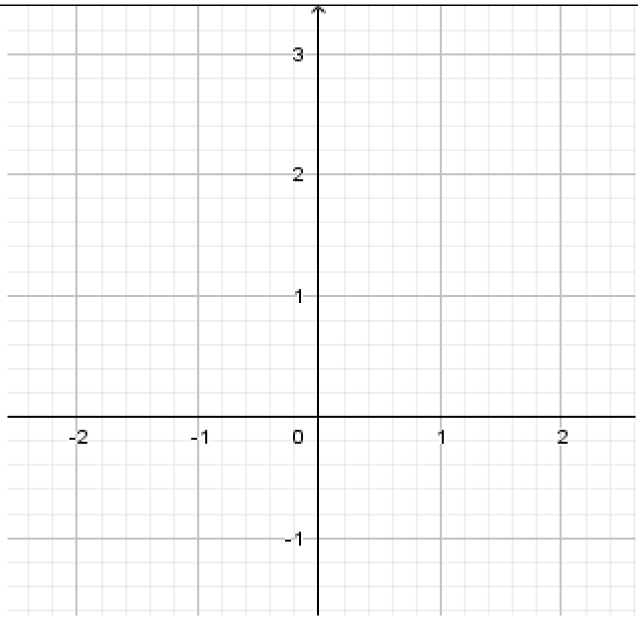
g) Escreva uma expressão matemática (fórmula) para encontrar a área da região B, usando integral definida. Calcule o valor da área B.

Aluno: ____ Computador nº:_____________

Atividade 3 -2

3. Considere a **mesma função** $\boldsymbol{f(x) = x}$**.**

a) Abra um novo arquivo no GeoGebra. Esboce a curva da função $f(x)$ em [-1,2] via comando *Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* e identifique a região C limitada por $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.



b) Sejam B e A as sub-regiões definidas nos intervalos [-1,0] e [0,2] respectivamente e associadas à função $f(x) = x$, já estudadas nas atividades anteriores. O que afirmar sobre a posição da curva $f(x)$ em relação ao eixo x e também sobre a posição das regiões A e B em relação a este eixo?

c) Resgate os valores das subáreas A e B, já encontrados nas atividades 1-2 e 2-2. Escreva a área da região C em função de A e B e encontre o valor de C.

d) Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* para calcular a integral de $f(x) = x$ em [-1,2] e escreva esta integral e o valor obtido. Compare o resultado da integral com o valor da área C encontrado no item anterior: são iguais? Neste caso, a integral definida representa a área C?

e) Observe novamente a posição das subáreas A e B em relação ao eixo x e os seus valores. Como você interpreta o resultado da integral em [-1,2] em função das subáreas A e B? De que maneira as posições das regiões A e B no plano cartesiano estão relacionadas com a integral no cálculo de áreas? Justifique.

f) Escreva e calcule as integrais nos intervalos [-1,0] e em [0,2] anotando seus resultados. Use o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Também, escreva uma expressão que forneça a área da região B.

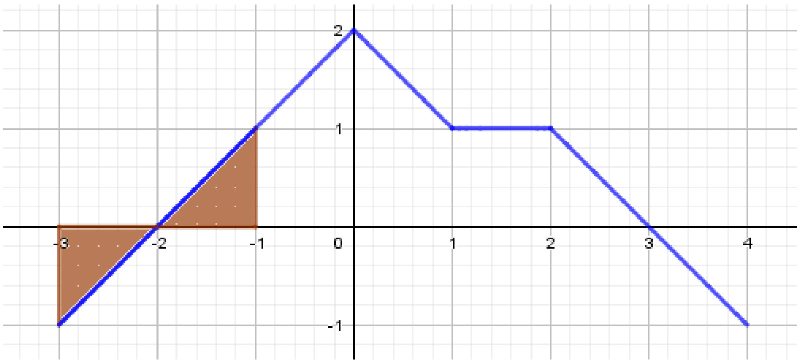
g) Escreva uma expressão para calcular a área C em função das integrais em [-1, 0] e em [0,2].

Aluno: ____ Computador nº:__________

Atividade 4-2

4. Considere o gráfico da função $f(x)$ mostrado na figura abaixo e com base nele responda as questões:

Figura: Gráfico de $f(x)$



Fonte: Autora

a) Seja A a região *hachurada*. Use a geometria para calcular a área A.

b) Sem resolver a integral definida de $f(x)$ em [-3,-1], estime se o resultado desta integral é positivo, negativo ou nulo. Justifique sua resposta.

c) Por que o valor da área A via geometria é diferente do valor estimado via integral definida em [-3,1]?

d) Sem efetuar cálculos, apenas observando o gráfico de $f(x)$, indique se o resultado de cada integral é positivo, negativo ou nulo:

- $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$ Resposta: ______________________________
- $\int_{-2}^{0} f(x)dx$ Resposta: ______________________________
- $\int_{0}^{3} f(x)dx$ Resposta: ______________________________
- $\int_{3}^{4} f(x)dx$ Resposta: ______________________________
- $\int_{-3}^{4} f(x)dx$ Resposta: ______________________________

d) Toda integral definida em [a,b] pode ser interpretada como a **área resultante** da operação entre subáreas. Assim, a integral em [-3,-1] pode ser interpretada como **área resultante** da operação entre as subáreas A1 e A2, em que A1 é a área da região acima do eixo x, compreendida em [-2,-1] e A2 é a área da região abaixo deste eixo, compreendida em [-3,-2]. Qual das opções abaixo representa a integral definida em [-3,-1] como área resultante:

( ) $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = A1 + A2$

( ) $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = A1 - A2$

( ) $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = A2 - A1$

e) Com base em conhecimentos de geometria, a área da região A, formada por A1 e A2, pode ser escrita em função destas subáreas como:

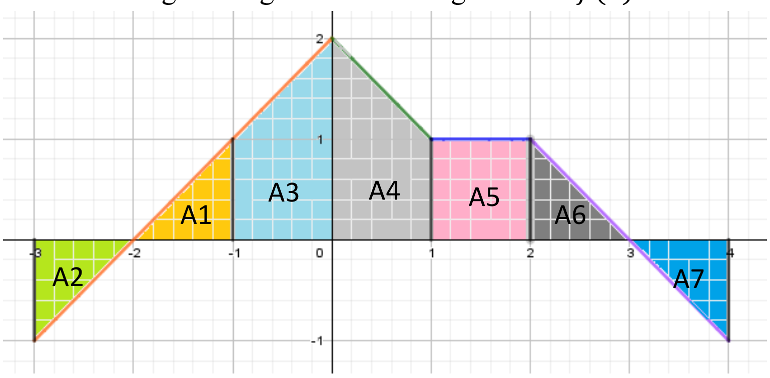
( ) $A = A1 + A2$

( ) $A = A1 - A2$

( ) $A = A2 - A1$

f) Observe as regiões demarcadas na figura a seguir.

Figura: regiões abaixo do gráfico de $f(x)$



Fonte: Autora

Estime o sinal do resultado de cada integral e interprete-a como área resultante:

- $\int_{-3}^{0} f(x)dx =$

- $\int_0^2 f(x)dx =$

- $\int_2^4 f(x)dx =$

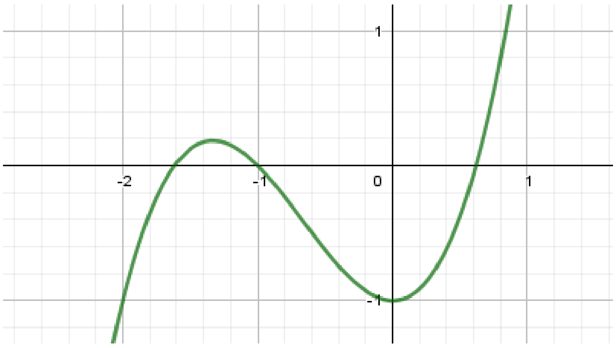
- $\int_0^4 f(x)dx =$

Aluno: ____ Computador nº:__________

Atividade 5-2

5. Considere o gráfico da função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$:

Figura: Gráfico da função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$



Fonte: Autora

a) Identifique a região A que corresponde à integral $A = \int_{-2}^{0}(x^3 + 2x^2 - 1)dx$. Na Figura 3, demarque as sub-regiões de A, pintando-as.

b) Observe a posição das sub-regiões de A no plano cartesiano e sem fazer cálculos estime se o resultado da integral é positivo, negativo ou nulo. Justifique.

c) Calcule e anote o valor da integral $A = \int_{-2}^{0}(x^3 + 2x^2 - 1)dx$. O resultado da integral é positivo ou negativo? Este resultado está em conformidade com a estimativa anterior? Neste caso, a integral representa a área da região A?

d) Interprete e escreva a integral definida como área resultante.

e) Com base na geometria, escreva a área A em função das subáreas.

CONSIDERAÇÕES:

- Independente da posição de uma região no plano cartesiano, a integral definida sempre fornece a área desta região? Em que casos a integral definida fornece a área? Justifique.

- O que é preciso acrescentar à integral definida para que ela forneça sempre a área de uma região abaixo da curva de $f(x)$ num intervalo qualquer [a,b]?

- A integral definida pode ser interpretada como **área resultante**. Explique o que isso significa para você.

BLOCO 3

Aluno: ____ Computador nº: _______________

Orientações iniciais:

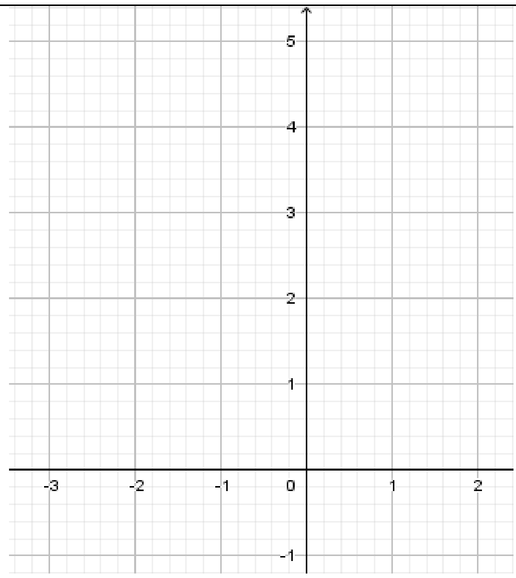
✓ Abra o **arquivo** com o nome **Atividades Tese**.

✓ Para executar um *print* da tela do Geogebra, clique em *Alt+PrintScreen* e depois cole e salve no arquivo **Atividades Tese**.

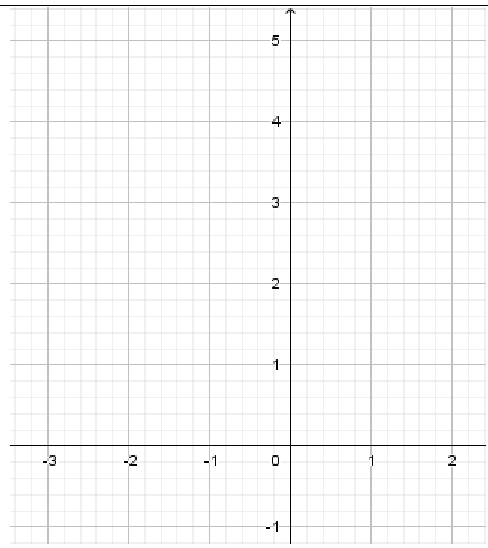
Atividade 1-3

1. Sejam as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 3$.

a) Esboce a curva de $f(x)$ e identifique a região A **abaixo** desta curva, definida no intervalo [-1,2], pintando-a. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo Entrada* a expressão $x^2 + 1$.

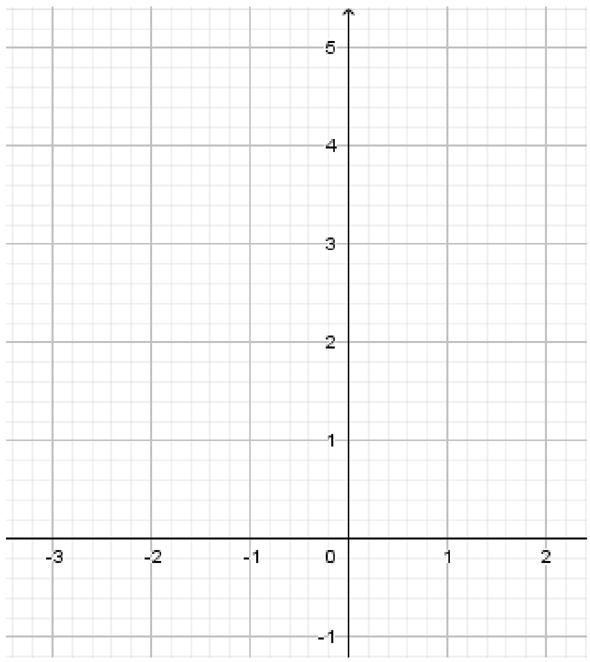


b) Esboce a curva de $g(x) = x + 3$. Identifique a região B **abaixo** desta curva e definida em [-1,2], pintando-a. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo Entrada* a expressão $x + 3$.



c) Esboce as curvas de $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 3$ no mesmo plano cartesiano e identifique a região C limitada pelas curvas, pintando-a. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese.** Em seguida observe a posição de cada curva, uma em relação a outra e responda:

- Que função limita superiormente a região C?
- Que função limita inferiormente a região C?
- Qual o intervalo em que a região C está definida?
- Qual das regiões possui maior área: A ou B?



d) Explique como encontrar a região C em função das regiões A e B.

e) Com base na resposta anterior, escreva a expressão para calcular a área C em função da integral de $f(x)$ e da integral de $g(x)$. Qual o significado dessa expressão para você?

f) Observe a expressão que você escreveu anteriormente. Use **duplamente** o comando *Integral,* da forma ***Integral(*** *<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)-* ***Integral(*** *<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* substituindo o termo *Função*, que representa o integrando, pelas funções $f(x)$ e $g(x)$, na **mesma ordem** da expressão que você escreveu anteriormente. Ao aplicar este comando aparecerá na tela do GeoGebra a variável **a** que mostra a área da região C. Qual o valor da área C? Este valor é positivo ou negativo?

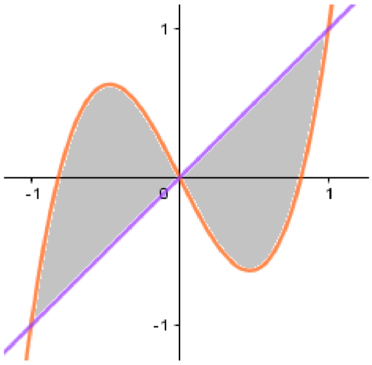
g) Inverta a ordem das funções $f(x)$ e $g(x)$ e aplique novamente o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)- Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Qual o resultado? Ele é positivo ou negativo? Ao alterar a ordem das integrais, o que acontece com o valor da área A? Justifique.

Aluno: ____ Computador nº:___________

Atividade 2-3

2. Considere a região A limitada pela curva da função $f(x) = 3x^3 - 2x$ e pela curva $g(x) = x$.

Figura: Região limitada entre as curvas $f(x) = 3x^3 - 2x$ e $g(x) = x$.



Fonte: Autora

a) Com base na figura, identifique o intervalo onde a região A está definida.

b) Sem efetuar cálculos, apenas observando a região A em [-1,1], estime o resultado da integral neste intervalo. Justifique sua resposta.

c) No GeoGebra, aplique o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* em [-1,1]. Escreva a integral e seu resultado. Que integrando você utilizou? O resultado coincide com sua estimativa?

d) Modifique a ordem das funções que compõem o integrando e aplique novamente o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* O resultado se manteve? Esta integral representa a área A?

e) Observe a posição das curvas $f(x)$ e $g(x)$. No intervalo [-1,1] existe uma única curva que limita superiormente a região A e uma única curva que limita inferiormente esta região? Para que valores de x se consegue garantir a unicidade das funções limitantes? Escreva estes valores como intervalos em x e para cada intervalo escreva uma integral definida.

f) Escreva a integral definida em [-1,0] e aplique o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Qual o valor da integral e o que ela fornece?

g) Escreva a integral definida em [0,1] e aplique o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Qual o valor da integral e o que ela fornece? Compare os resultados das integrais em [-1,0] e em [0,1]. Por que estes resultados são iguais?

h) Por que o resultado da integral no intervalo [-1,1] é nulo? Justifique.

i) Escreva uma expressão para calcular a área A a partir das integrais em [-1,0] e em [0,1] e em seguida calcule o valor de A.

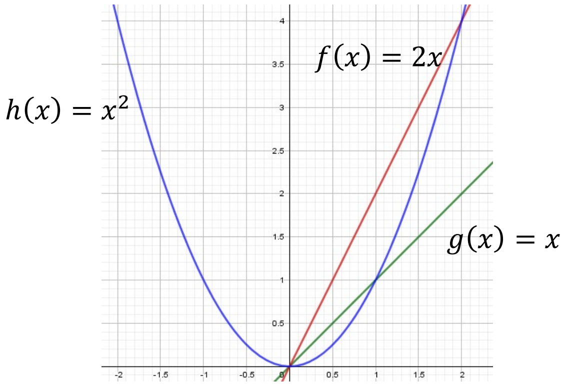
j) É possível calcular a área A usando uma única integral definida? Caso sim, escreva esta integral. Caso não, justifique.

Aluno: ____ Computador nº:__________

Atividade 3-3

3. Seja a região S limitada pelas curvas dadas na figura a seguir.

Figura: Região S



Fonte: Autora

a) Identifique a região S pintando-a. Escreva o intervalo onde ela está definida.

b) Observe a posição das curvas $f(x)$ e $g(x)$. No intervalo onde a região S está definida, existe uma única curva que limita superiormente a região e uma única curva que limita inferiormente esta região?

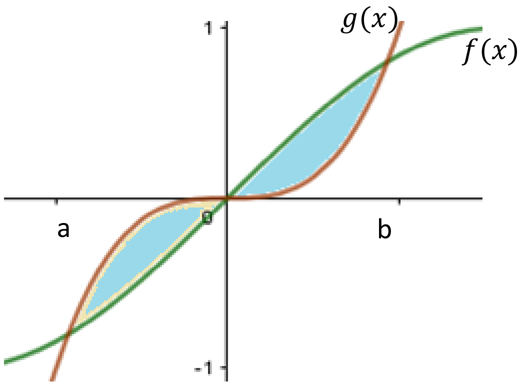
c) Calcule a área S e descreva o procedimento utilizado.

Aluno: ____ Computador nº:__________

Atividade 4-3

4. Com base nas atividades do Atividades Tese e observando a região A limitada pelas curvas das funções $f(x)$ e $g(x)$, escreva um texto que sirva de orientação para outro aluno que conhece integrais, mas não sabe como encontrar a área de uma região limitada entre curvas no intervalo [a,b]:

Figura: Região A



Fonte: Autora

Resposta:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

BLOCO 4

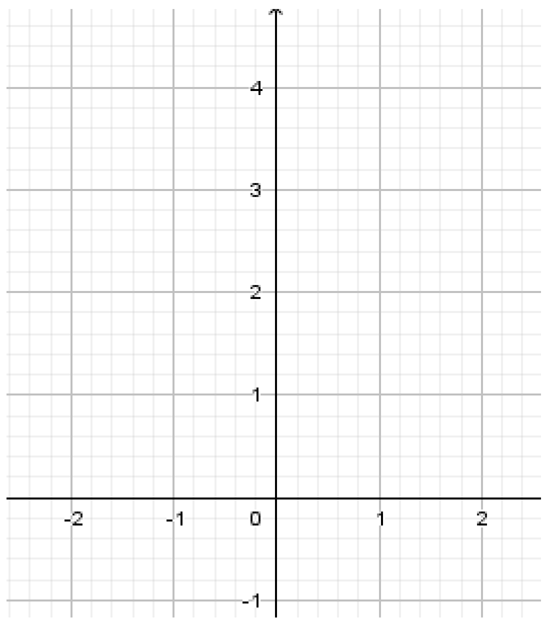
Aluno: ____ Computador nº:___________

Atividade 1-4

1. Sejam as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

a) Esboce as curvas no mesmo plano cartesiano e identifique a região C limitada por $f(x)$ e por $g(x)$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. Em seguida, observe a posição de cada curva, uma em relação a outra.

- Que função limita superiormente a região C?
- Que função limita inferiormente a região C?



b) Escreva uma expressão matemática que forneça a área C em função da **integral** de $f(x)$ e em função da **integral** de $g(x)$.

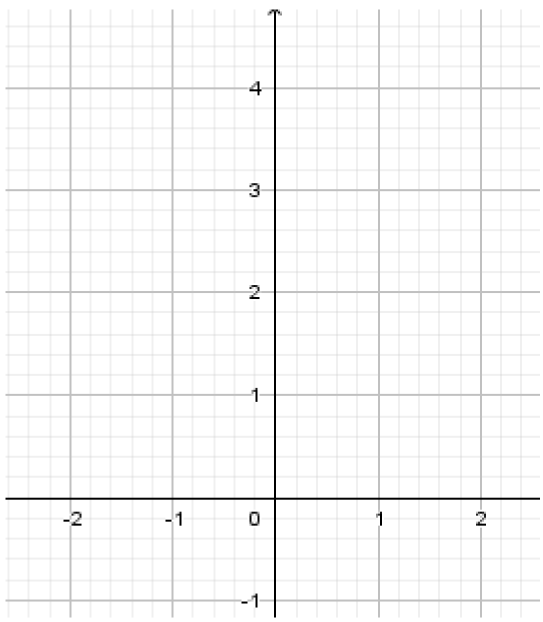
c) No GeoGebra, calcule a área C, usando **duplamente** o comando *Integral*, da forma *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>) - Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)*. Escreva a integral definida e anote o resultado.

d) No GeoGebra, calcule novamente a área C, usando uma **única vez** o comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)*. Ao aplicar uma única vez o comando *Integral* é mostrada na tela do GeoGebra uma outra **região D** que não coincide com a região C. O valor da área C e da área D são iguais? Como o GeoGebra entendeu a **função integrando** $f(x) - g(x)$ utilizada no comando *Integral*? Justifique sua resposta. Faça um ***print*** da tela salvando-o no arquivo **Atividades Tese**.

e) A região D está limitada superiormente pela curva de uma função que será chamada $h(x)$. **Encontre a expressão algébrica da função $\boldsymbol{h(x)}$** e descreva como a encontrou. Em seguida esboce o gráfico de $h(x)$ no GeoGebra. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.

f) A função $h(x)$ não é única. Ela pode ser escrita de diferentes maneiras por funções $F(x)$ e $\mathrm{G}(x)$, que ao serem subtraídas, voltam à expressão $h(x)$. Por exemplo, $F(x) = x + 1$ e $G(x) = x^2 + 1$ formam $H(x) = (x + 1) - (x^2 + 1)$ em que a região abaixo desta $H(x)$ possui mesma área de $h(x) = x - x^2$. Encontre outras funções $F(x)$ e $\mathrm{G}(x)$ e escreva uma nova expressão para $H(x)$, de modo que a área desta região se mantenha equivalente às áreas C e D.
Nota: Lembre-se de verificar se a subtração destas funções resulta na expressão $h(x)$.
Nota: lembre-se de verificar se estas regiões são equivalentes a C e D.

g) Oculte os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ esboçados anteriormente (para isso, no GeoGebra, clique sobre a bolinha azul em frente às expressões algébricas das referidas funções). Em seguida, esboce o gráfico das funções $F(x)$ e $G(x)$ que você encontrou e identifique a região limitada por estas curvas, pintando-a. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. Escreva a integral que fornece a área desta região e calcule esta área. Como são chamadas as regiões que possuem a mesma área?



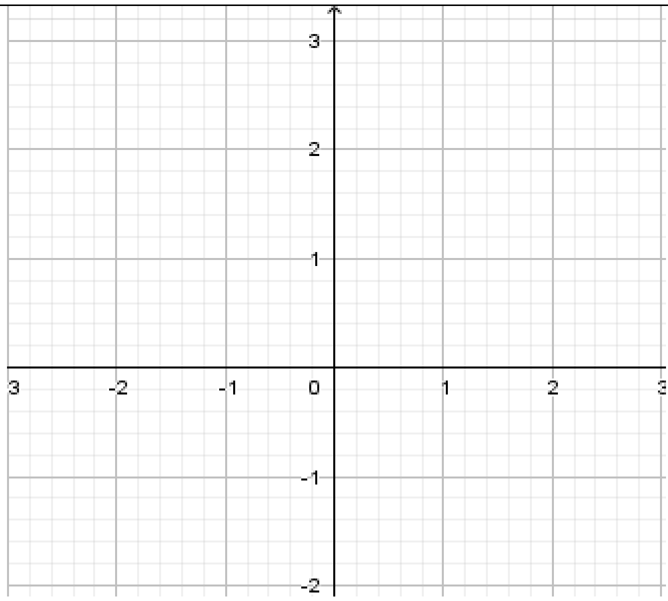
Aluno: ____ Computador nº:__________

Atividade 2-4

Limpe a tela do GeoGebra.

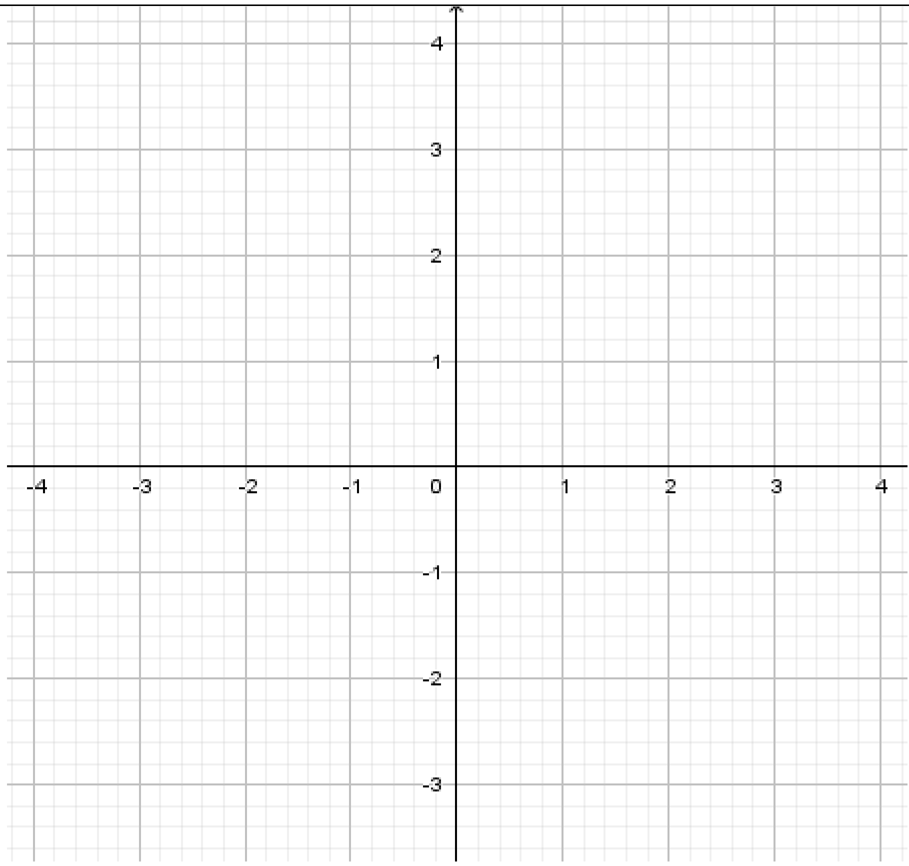
2. Considere a integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$.

a) Seja $h(x)$ a função integrando correspondente à integral dada. Esboce a curva $h(x)$ e identifique a região A no intervalo dado. Calcule a integral por meio do comando *Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)* e anote o resultado. Escreva como encontrar a área da região A. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.



b) Encontre uma região B que seja equivalente à região A e descreva o procedimento utilizado.

c) Represente graficamente a região B e faça um ***print*** da tela, salvando em **Atividades Tese**.



d) Como provar que a região B é equivalente à região A?

e) Enuncie um problema que envolva a integral $\int_{-2}^{0}(x^2 + 2x)dx$.

BLOCO 5

Aluno: ____ Computador nº:_________

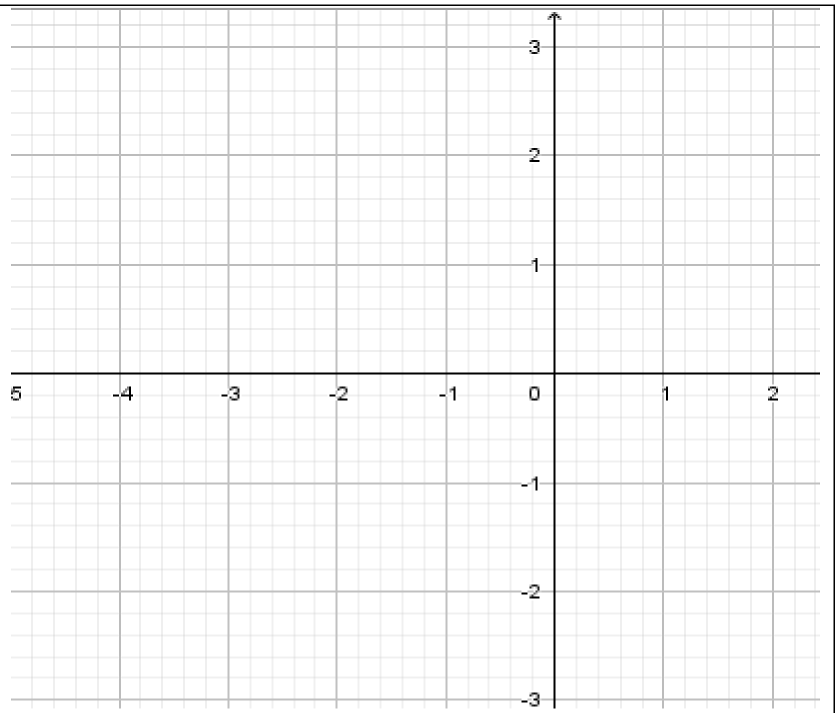
Atividade 1-5

1. Considere a região A limitada pelas curvas $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$.

São apresentados dois caminhos para a resolução desta atividade. Desenvolva os procedimentos especificados em cada caminho.

Caminho I: Integrar em relação à variável x

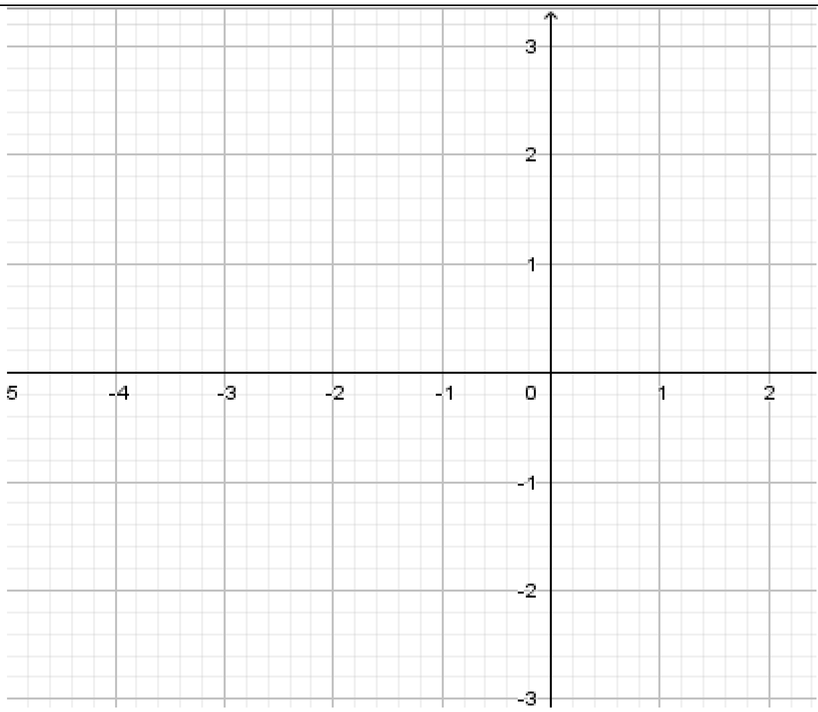
a) Esboce as curvas no mesmo plano cartesiano, identifique a região A e o intervalo de integração. No GeoGebra, digite diretamente no *Campo de Entrada*, as expressões $2 + x$ e $y^2 = x + 4$. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.



b) Observando a região A e sem fazer cálculos, explique de modo sucinto, como encontrar a área desta região.

c) Calcule a integral em [-4,0] usando o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)*. Ao usar este comando aparece na tela do GeoGebra a mensagem de erro "subtração inválida". Observe que no intervalo [-4,-3] a região A é limitada superior e inferiormente pela **mesma curva**, a cônica $y^2 = x + 4$, o que mostra que ela não é função. Esta região precisa atender a condição de ser limitada superiormente por uma **única** curva de função e inferiormente por outra **única** curva de função. Sendo assim, reescreva a cônica $y^2 = x + 4$ como duas **funções de x**, ou seja, encontre funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de modo que esta condição seja satisfeita.

d) Sem apagar as curvas já existentes na tela do GeoGebra, esboce as curvas de y_1e y_2, identificando cada curva com uma cor diferente. Faça um ***print*** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.



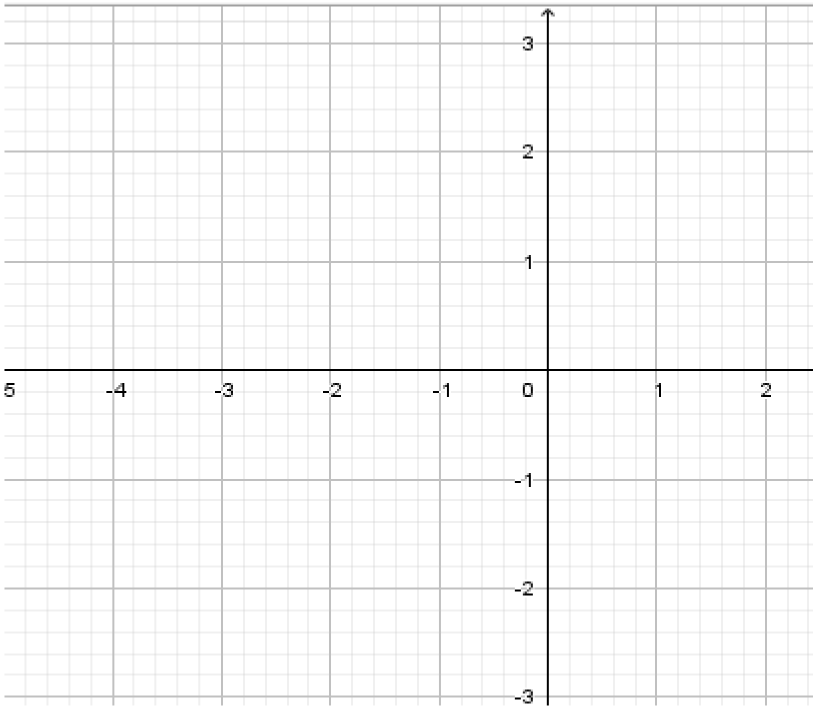
e) Observe a posição das três curvas $y = 2 + x$, $y_1(x)$ e $y_2(x)$. No intervalo [-4, 0] existe uma única curva que limita superiormente a região A e uma única curva que limita inferiormente esta região? Caso não, observe para que valores de x se consegue garantir a unicidade das funções limitantes. Escreva estes valores como intervalos. Para cada intervalo escreva uma integral definida e calcule o valor das integrais.

f) Calcule a integral em cada intervalo, usando o comando *Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).* Escreva uma expressão para calcular a área A a partir destas integrais e calcule o valor da área A.

Caminho II: Integrar em relação à variável y.

a) Esboce novamente as curvas de $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ no mesmo plano cartesiano, identifique a região A. Observe que o eixo horizontal é o eixo da variável independente e o eixo vertical é da variável dependente.

Quem é a variável independente?



b) Gire o texto 90º em sentido anti-horário. Neste caso, quem é a nova variável independente?

c) Reescreva as expressões $y = 2 + x$ e $y^2 = x + 4$ em função da nova variável independente, ou seja, encontre expressões $x_1(y)$ e $x_2(y)$.

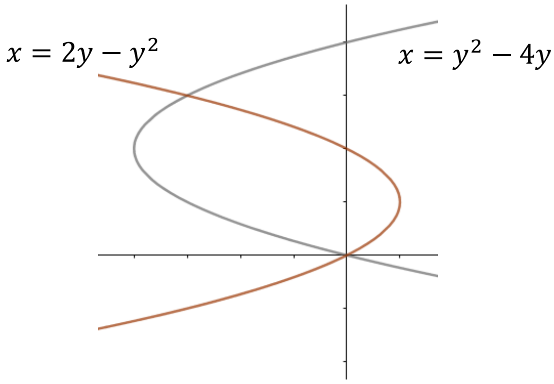
d) Escreva a integral que fornece a área A em função da variável *y* e encontre o valor de A manualmente.

Aluno: ____ Computador nº:_________

Atividade 2-5

2. Considere a região limitada entre as curvas.

Figura: Região A entre curvas



Fonte: Adaptado de Stewart (2009, p. 395)

a) Enuncie um problema com base na figura acima.

b) Observe a região A: para facilitar os cálculos, você escolheria integrar em relação à variável x ou em relação à variável y? Justifique sua escolha.

c) A partir de sua escolha anterior sobre a variável de integração, calcule a área A e descreva o procedimento utilizado.