



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS DE CHAPECÓ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FERNANDO LUIS STRAPAZZON

**DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR ATRAVÉS DO PROBLEMA
INVERSO**

CHAPECÓ

2019

FERNANDO LUIS STRAPAZZON

**DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR ATRAVÉS DO PROBLEMA
INVERSO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

CHAPECÓ, SC

2019

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Strapazzon, Fernando Luis
DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR ATRAVÉS DO PROBLEMA
INVERSO / Fernando Luis Strapazzon. -- 2019.
34 f.:il.

Orientador: Doutor Pedro Augusto Pereira Borges.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Matemática-Licenciatura, Chapecó, SC , 2019.

1. Modelagem Matemática. 2. Fluxo de Calor. 3.
Problema Inverso. I. Borges, Pedro Augusto Pereira,
orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III.
Título.

FERNANDO LUIS STRAPAZZON

**DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR ATRAVÉS DO PROBLEMA
INVERSO**

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

Este trabalho de conclusão de curso foi defendido e aprovado pela banca em:
____/____/____

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

Prof. Dr. Milton Kist

Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

“Aos meus pais.”

AGRADECIMENTOS

Ao professor Pedro Augusto Pereira Borges, pela orientação, ensinamentos, paciência, dedicação e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Milton Kist e a professora Rosane Rossato Binotto, por fazerem parte da banca avaliadora e contribuições finais dadas ao trabalho.

Ao acadêmico Lucas Caricimi Gervásio pelo apoio durante a construção do presente trabalho.

À minha família, pelo apoio durante a graduação.

Aos professores da Universidade Federal Fronteira Sul, pelos ensinamentos na trajetória do curso.

Aos professores que organizaram e implantaram o curso de Licenciatura em Matemática.

À UFFS por disponibilizar o curso.

RESUMO

A modelagem matemática da transferência de calor em sólidos tem se mostrado um recurso técnico, que permite estimar parâmetros e simular condições de contorno de sistemas, com custo reduzido. O objetivo do presente trabalho é estimar o fluxo de calor e a temperatura na extremidade direita de barras metálicas. O problema foi modelado com a equação diferencial parcial unidimensional do calor, considerando a difusividade térmica do material e a temperatura na extremidade esquerda conhecidas. Foram realizadas medições de temperatura, com auxílio de um Sistema de Aquisição Eletrônica de Dados (SAED), nas extremidades e em três pontos internos. O fluxo de calor foi obtido resolvendo o problema inverso, através do Método de Procura em Rede, com base nas medidas de temperatura da extremidade esquerda e de três pontos internos. As medidas de temperatura da extremidade direita foram utilizadas apenas para a verificação do modelo. Foram consideradas duas hipóteses para estimar o fluxo de calor na extremidade $x = L$: fluxo constante e fluxo variável (modelo exponencial) em função do tempo. Pode-se concluir que o modelo exponencial não acrescenta maior precisão significativamente, em relação ao modelo de fluxo constante.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Fluxo de Calor, Problema Inverso.

ABSTRACT

Mathematical modeling of the heat transfer in solids has proven to be a technical resource that allows estimating parameters and simulating system boundary conditions at reduced cost. The objective of the present work is to estimate the heat flux and temperature at the right end of metal bars. The problem was modeled with the one-dimensional partial differential equation of heat, considering the thermal diffusivity of the material and the known left extremity temperature. Temperature measurements were performed with the aid of an Electronic Data Acquisition System (SAED) at the extremities and at three internal points. The heat flux was obtained by solving the inverse problem through the Network Search Method, based on the left end temperature measurements and the three internal points. Right extremity temperature measurements were used for model verification only. Two hypotheses were considered to estimate the heat flux at the $x = L$ end: constant flux and variable flux (exponential model) as a function of time. It can be concluded that the exponential model does not add significantly higher precision than the constant flow model.

Keywords: Mathematical Modeling, Heat Flow, Inverse Problem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
2	MODELO MATEMÁTICO.....	11
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	16
3.1	PROBLEMA DIRETO: MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS.....	16
3.1.1	<i>Métodos Explícitos.....</i>	17
3.1.2	<i>Métodos Implícitos.....</i>	18
3.1.3	<i>Método de Crank-Nicolson.....</i>	20
3.1.4	<i>Escolha do método de Diferenças Finitas.....</i>	20
3.1.5	<i>Discretização do Método das diferenças finitas na forma implícita e dependente do fluxo.....</i>	21
3.2	PROBLEMA INVERSO.....	22
4.	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	24
5	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DO MODELO	26
5.1	SOBRE A DIFUSIVIDADE TÉRMICA E A EXECUÇÃO COMPUTACIONAL DOS PROBLEMAS DIRETO E INVERSO	26
5.2	ESTIMAÇÃO DO FLUXO DE CALOR E DA TEMPERATURA NA FRONTEIRA	27
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
	REFERÊNCIAS	34

1 INTRODUÇÃO

A determinação de parâmetros em problemas de Engenharia é um tema recorrente de pesquisa de Matemática Aplicada, devido a necessidade do conhecimento das propriedades dos materiais e das condições de troca de calor, específicas de cada novo projeto. No entanto, esses procedimentos implicam em tempo, demanda de equipamentos e custos. Nesse sentido, a otimização dos métodos é um problema recorrente na ciência. A modelagem matemática contribui nessa tarefa, principalmente devido ao baixo custo dos processos de simulação. A modelagem matemática “[...] consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual [...]” (BASSANEZI, 2002, p. 24).

No presente trabalho, modela-se matematicamente em escala laboratorial, um processo de transferência de calor. A transferência de calor é a energia térmica em trânsito, devida uma diferença de temperaturas no espaço. A transferência ocorre por três tipos diferentes: condução, convecção¹ e radiação térmica².

O objetivo geral é determinar o fluxo de calor e as temperaturas, em função do tempo, na extremidade direita de barras metálicas, submetidas a aquecimento.

Os objetivos específicos são:

1. Elaborar um modelo matemático sobre a difusão do calor em barras para calcular parâmetros de condições de fronteira de segunda espécie (Neumann).³
2. Dominar os processos de medição de temperatura em bancada experimental, com o uso de um Sistema de Aquisição Eletrônica de Dados (SAED).
3. Monitorar a temperatura em pontos internos e nas fronteiras de barras aquecidas em uma das extremidades.

¹ Transferência de calor que ocorre em fluidos que apresentam diferenças de temperatura em seu conteúdo. Quando é fornecido calor a um fluido, formam-se correntes convectivas, que transmitem o calor até que todo o fluido entre em equilíbrio térmico.

² Transferência de calor realizada por meio de ondas eletromagnéticas. Todo corpo que se encontra em temperaturas diferentes do zero absoluto troca calor em forma de ondas eletromagnéticas constantemente com suas vizinhanças.

³ A condição de contorno de Neumann estabelece o valor da derivada da variável com relação à direção normal ao contorno, ou seja, um fluxo.

4. Calcular o fluxo de calor q'' ⁴ usando os dados experimentais, como a solução do Problema Inverso.
5. Verificar a variação dos resultados considerando diferentes amplitudes da variação da temperatura nas fronteiras.
6. Avaliar a precisão do método comparando os resultados calculados em $T(L,t)$, com os dados experimentais.

Onde,

T é a temperatura em função do espaço e tempo.

L é a posição no espaço.

t é o tempo.

O presente trabalho é composto por cinco capítulos, sendo que no segundo contém as equações do problema de transferência de calor em sólidos e o modelo utilizado.

No terceiro capítulo é descrito o método numérico de resolução de Equações Diferenciais Parciais, o Método das Diferenças Finitas, com os esquemas de discretização espaço-temporais Explícito, Implícito e Crank-Nicolson e Método de Procura em Rede, utilizado para a determinação do fluxo de calor, através do Método do Problema Inverso.

No quarto capítulo apresenta-se os materiais e os procedimentos experimentais, iniciando com a montagem do equipamento (SAED), a preparação das amostras e concluindo com a coleta dos dados.

No quinto capítulo destaca-se os resultados obtidos com o método, o fluxo de calor e as temperaturas em $x = L$.

⁴ Notação: o símbolo q'' representa o fluxo de calor.

2 MODELO MATEMÁTICO

Muitos fenômenos que ocorrem na ótica, na ondulatória, na mecânica, no magnetismo etc., podem ser descritos através de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes x, y, z, t, \dots e as derivadas parciais de uma função $u = u(x, y, z, t, \dots)$.

Segundo Cengel (2003) a transferência de calor ocorre por condução, convecção e radiação. No caso da condução ocorre pela interação de partículas mais energéticas para as partículas menos energéticas adjacentes. No caso de gases e líquidos a condução ocorre pela colisão e difusão das moléculas no sistema, já nos sólidos ocorre pela vibração das moléculas em uma rede e do transporte de energia pelos elétrons livres.

A lei proposta por Jean-Baptista Joseph Fourier (1768-1830) em 1822, conhecida por Lei de Fourier, determina que o fluxo de calor, indicado por q'' , é proporcional ao gradiente de temperatura $\frac{dT}{dx}$. Inserindo um coeficiente de proporcionalidade k , transforma-se a proporcionalidade em uma igualdade, como mostrado na Eq. (1). Essa equação é de caráter fenomenológico, por não ter sido originada de uma teoria fundamental, mas sim, por evidências experimentais.

$$q'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Onde:

q'' é o fluxo de calor por condução (W/m^2)

k é a condutividade térmica ($W/m^{\circ}C$)

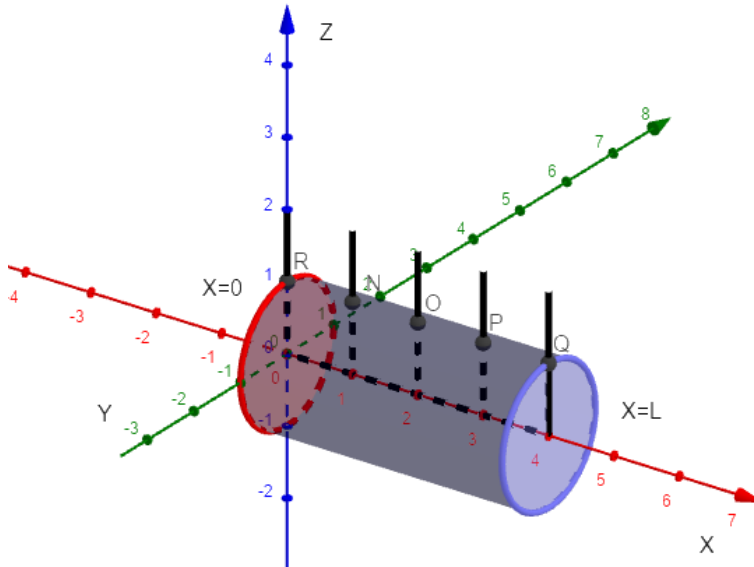
$\frac{dT}{dx}$ o gradiente de temperatura na seção, na direção x ($^{\circ}C/m$).

O fluxo de calor recebe o sinal negativo para indicar a direção da transferência de calor, que ocorre do meio mais energético para o menos energético, portanto, na direção onde a temperatura é decrescente.

Neste trabalho será modelada a transferência de calor em barras aquecidas, considerando o caso unidimensional, ou seja, caso em que o calor se desloca apenas em

uma dimensão. Em específico, determinaremos $T(L,t)$, estimando valores para o fluxo q'' . A Figura 1 ilustra as barras a serem estudadas.

Figura 1 – Barra de aço aquecida em $x = L$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A distribuição de temperatura, caso transiente⁵, em uma barra isotrópica⁶ e homogênea⁷, é modelada pela conhecida Equação do Calor (Eq. 2) segundo (INCROPERA, 2017, p. 53).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2)$$

Onde:

- T é a temperatura ($^{\circ}C$);
- α_x , α_y e α_z são as difusividades térmicas nas direções x , y , e z , respectivamente (m^2/s);
- x , y e z são as variáveis espaciais nas direções x , y e z (m), respectivamente;
- t é o tempo (s).

⁵ Um sistema diz-se em estado transiente quando pelo menos uma variável do processo se encontra ainda em mudança, não tendo por isso o sistema atingido o estado estacionário.

⁶ Possui propriedades físicas que são idênticas em todas as direções.

⁷ Formada por uma mistura de substâncias que contém somente uma fase (monofásica) quando são misturados dois ou mais elementos.

Como as faces paralelas aos planos xy e xz são isoladas, só haverá gradientes térmicos na direção x . Com isso, pode-se considerar que as variações térmicas nessas direções são muito pequenas em relação às variações na direção x e a Eq. (2) pode ser escrita em apenas uma dimensão, como na Eq. (3):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3)$$

A condição de fronteira em $x = 0$ é de 1ª espécie (Dirichlet) e assim obtém-se a Eq. (4):

$$T(0,t) = T_1(t) \text{ para } t > 0. \quad (4)$$

Os dados da condição de contorno, função $T_1(t)$, foram obtidos experimentalmente. Para inserí-los no algoritmo do Problema Direto, foi necessário ajustar esses dados através do Método dos Mínimos Quadrados, utilizando um polinômio de terceiro grau, conforme ilustra a Eq. (5):

$$T_1(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0. \quad (5)$$

A condição de fronteira em $x = L$ é de 2ª espécie (Neumann) e assim obtemos a Eq. (6):

$$q''(L, t) = k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \text{para } t > 0, \quad (6)$$

Onde:

k é a condutividade térmica do material da barra (W/mK);

q'' é o fluxo de calor (W/m^2).

Procedimento semelhante a $T_1(t)$ foi adotado para a condição inicial, também obtida experimentalmente e dada pela Eq. (7)

$$T_o(x,0) = T_o(t) = b_1 t + b_0 \text{ para } 0 < x < L. \quad (7)$$

Onde b_0 e b_1 são coeficientes reais.

A solução de problemas de transferência de calor com condições de contorno pode ser implementada por diferentes métodos: Método da Transformada de Laplace (Carslaw; Jaeger, 1959); Funções de Green (Chang; Huang, 1980); Método dos Elementos Finitos (Beckett; Chu, 1973); Método Híbrido: Transformada de Laplace e Elementos Finitos (Chen; Lin, 1991). Todos esses métodos apresentam vantagens e desvantagens. Os

métodos analíticos proporcionam soluções exatas e rápidas para qualquer tempo e espaço, mas a obtenção das inversas das transformadas (no caso da Transformada de Laplace) e a identificação de funções apropriadas (no caso da Função de Green) tornam a aplicação de tais métodos limitada.

Em alguns casos (condições de fronteira e parâmetros variáveis) é muito difícil de se encontrar uma solução analítica, recorrendo-se aos métodos numéricos para obter uma solução aproximada. Segundo Zill e Cullen (2001), para certos fins, é perfeitamente justificável aceitar uma aproximação numérica da equação da onda, pois, para condições iniciais ou de contorno com temperaturas variáveis, o método de separação de variáveis pode não ser conveniente, ou sequer aplicável. Na verdade, um processo numérico pode ser a única maneira de abordar um problema de contorno.

Os métodos numéricos, tais como o Método Elementos Finitos, Volumes Finitos e Diferenças Finitas (Chen; Lin, 1991), têm sido amplamente utilizados com sucesso em problemas unidimensionais, com condições de contorno lineares e dependentes do tempo.

Os métodos do Problema Inverso (PI) e do Problema Direto (PD), tem seus conceitos baseados na cultura de *causa* e *efeito*. A expressão PI pode-se atribuir ao astrofísico Viktor Amasaspovich Ambartsumian, como aquele que a moldelou.

O PI sujeita-se a alguns fatores que podem comprometer os resultados, como amostras poluídas ou incompletas, ruídos, imperícias observacionais, erros de medidas, entre outros. No que diz respeito ao PD é necessário um conhecimento mais completo e mais preciso do sistema a ser analisado, ou seja, é necessário ter o conhecimento completo das *causas* para que então seja possível estabelecer os *efeitos*.

Um ponto de vista mais prático em relação aos PD e PI, pode-se pensar na equação do calor partindo do PD, bastaria resolver a equação usando as condições iniciais desejadas e com as constantes desejadas, para que a partir de uma *causa* fosse possível analisar os *efeitos*; por outro lado, contendo dados de um comportamento local de um sistema de calor, é possível descobrir a sua *causa* criando um modelo diferenciado que descreve essa singularidade.

Existem diversas maneiras de solução de PI, algumas das mais utilizadas são: Inversão direta, Decomposição em valores singulares, Mínimos quadrados e variantes

(mínimos quadrados ponderados), Métodos de regularização, Métodos variacionais, entre outras (molificação, métodos *bayesianos*, filtros digitais, redes neurais, etc).

Os PI se tornaram uma nova área da ciência, visto que as suas aplicações são de utilidade para a sociedade no que diz respeito a qualidade de vida. Eles são empregados para estudos na medicina, por exemplo, têm aplicações nas ressonâncias magnéticas, ultrassom e tomografia computadorizada (a saber os problemas envolvendo medicina, ora podem ser PD ora podem ser PI)

Para estudos na construção de aparatos tecnológicos e softwares mais elaborados, como por exemplo para a reconstrução de imagens, bem como na geofísica, que auxilia em estudos sobre o petróleo, na transferência de calor, no aprimoramento das previsões do tempo e também são utilizados na econômica devido ao aprimoramento de algumas técnicas, social, política e militar.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, é feita a discretização do método de diferenças finitas: Explícito, Implícito, Crank-Nicolson. Seguido pela escolha do melhor método e discretização do mesmo dependente do fluxo. Finalizando com o método de Procura em Rede.

3.1 PROBLEMA DIRETO: MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas consiste em discretizar uma equação diferencial contínua, como por exemplo, a função $f(x) = x$, tem a sua representação discreta, no intervalo $[0,5]$ o conjunto $Imf = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sendo um espaçamento entre os elementos do domínio de 1, ou seja, $\Delta x = 1$, obtém-se assim uma função com relação a um domínio discreto, cujo o conjunto que o representa é $Df = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

O objetivo desse trabalho, é a determinação do fluxo de calor de alguns sólidos. Para tanto considera-se o caso da equação do calor, unidirecional, em uma barra, cuja região a determinar está entre $0 \leq x \leq L$, considerando o início e o fim da barra. Mas esse domínio, ou seja, esse intervalo está numa forma contínua. Para discretizá-lo, deve-se dividi-lo em vários pontos, substituindo-o por um número finito de pontos, criando assim, uma malha. Convenientemente é adota-se um mesmo espaçamento entre esses pontos, ou seja, deve-se adotar um Δx , de forma conveniente, para a precisão do método. Nesse caso quanto maior o número de Δx , mais aproximada a solução será, mas, é necessário levar em consideração que como serão utilizados métodos computacionais para a aplicação do método, quanto maior for o número de Δx , maior será a demora no processamento dos dados.

Como pode-se notar o domínio sempre terá $(n + 1)$ elementos, considerando n como o número de divisões do intervalo de solução. Então pode-se representar por:

$$x[i] = (i - 1)\Delta x, \text{ com } i = 1, \dots, (n + 1). \quad (8)$$

Portanto o método das diferenças finitas tem como função a localização, de equações algébricas que se aproximem da solução em cada ponto $x[i]$, para isso existem vários métodos, os quais devem ser definidos de acordo com a natureza dos dados a serem

estudadas, condições de contorno e a precisão a qual deseja-se alcançar. Essas aproximações sempre são dadas em função de uma aproximação em série de Taylor.

No caso das derivadas, o método das diferenças finitas, consiste em discretizar o seu valor, ou seja, escrever o seu operador diferencial, em função dos seus valores pontuais. Partindo-se da definição de derivada no ponto de uma função $u: I C R \rightarrow R$ então tem-se:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} . \quad (9)$$

Adotando então $h = \Delta x$, de forma aproximada, porém finito, escreve-se:

$$\text{Diferença Finita Progressiva: } u'_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} ; \quad (10)$$

$$\text{Diferença Finita Central: } u''_i \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} ; \quad (11)$$

$$\text{Diferença Finita Regressiva: } u'_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} ; \quad (12)$$

Onde:

$$h = \frac{x_n - x_1}{n-1}; \quad (13)$$

$$x_i = x_1 + (i - 1)h; \quad (14)$$

$$u_{i+1} = u(x_i + h) ; \quad (15)$$

$$u_i = u(x_i); \quad (16)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h). \quad (17)$$

Na sequência serão apresentados três métodos de se usar as diferenças finitas para a solução do problema direto da equação do calor, que serão: o *Implícito*, *Explícito* e o *Cranck-Nicholson*, também serão feitas comparações da eficácia entre eles e a solução analítica.

3.1.1 Métodos Explícitos

Os métodos explícitos são métodos de fácil implementação, cuja discretização temporal depende sempre de uma condição de estabilidade, para que assim seja possível obter uma equação estável.

A equação do calor, particularmente, que é dada pela Eq. (3) tem do lado esquerdo uma parte temporal, ou seja, depende do tempo t e do lado direito uma parte espacial, ou seja, depende do espaço x . Para a parte temporal será utilizada as Diferenças Progressivas e para a parte espacial será utilizada as Diferenças Centrais para a aproximação das derivadas segundas, podendo então serem reescritas da seguinte maneira, respectivamente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} . \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} . \quad (19)$$

Logo, pode-se reescrever a equação do calor da seguinte maneira:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} . \quad (20)$$

Neste caso pretende-se determinar T_i^{k+1} que é o único fator desconhecido, portanto, precisa-se isolar ele na equação acima, logo, o modelo que é necessário implementar, de forma *explicita*, considerando, $\omega = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ será:

$$T_i^{k+1} = \omega T_{i+1}^k + (1 - 2\omega)T_i^k + \omega T_{i-1}^k . \quad (21)$$

3.1.2 Métodos Implícitos

Os métodos implícitos, ao contrário dos explícitos, são incondicionalmente estáveis, em outras palavras, a discretização do tempo não depende da solução espacial da grade aderida. Salientando que essa estabilidade não é diretamente relacionada a precisão do método, pois, a precisão a qual deseja-se alcançar depende de Δx , Δt e as condições de fronteira. Também vale dizer que esse método converge para a solução da EDP, se $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, não importando a razão entre eles.

Para esse método o modelo a ser utilizado para implementação, utilizando-se ainda das Diferenças Progressivas para a parte temporal e as Diferenças Centrais, para a segunda derivada na parte espacial, porém agora, a representação da derivada segunda se dará por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} . \quad (22)$$

Logo a equação do calor será representada por:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} , \quad (23)$$

Onde o deve-se calcular T_i^k , então isolando-o na equação e assumindo $\omega = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$,

obtem-se:

$$T_i^k = -\omega T_{i+1}^{k+1} + (1 + 2\omega)T_i^{k+1} - \omega T_{i-1}^{k+1} . \quad (24)$$

Logo como pode-se notar na equação acima, não se consegue calcular de forma direta T_i^k , pois, depende-se de várias incógnitas, então esse método, retorna um conjunto de equações, em cada ponto temporal.

Então considerando $0 \leq i \leq \gamma$, pode-se notar que se tem $\gamma - 1$, equações simultâneas.

Onde,

$$T_{i-1,n+1} = T_{0,n+1} = g_0(t_{n+1}) \text{ para } i = 1 . \quad (25)$$

$$T_{i+1,n+1} = g_1(t_{n+1}) \text{ para } i = \gamma - 1 , \quad (26)$$

e

$$(1 + 2\omega)T_1^{n+1} - \omega T_2^{n+1} = T_1^n + \omega g_0(t_{n+1}) \text{ para } i = 1 . \quad (27)$$

$$-\omega T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\omega)T_i^{n+1} - \omega T_{i+1}^{n+1} = T_i^n \text{ para } 2 \leq i \leq \gamma - 2 . \quad (28)$$

$$(1 + 2\omega)T_{\gamma-1}^{n+1} - \omega T_{\gamma-2}^{n+1} = T_{\gamma-1}^n + \omega g_1(t_{n+1}) \text{ para } i = \gamma - 1 . \quad (29)$$

Fazendo algumas simplificações nas equações acima, pode-se reescrever o sistema, na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \lambda_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \lambda_3 & \beta_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_i & \lambda_i & \beta_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{\gamma-2} & \lambda_{\gamma-2} & \beta_{\gamma-2} & T_{\gamma-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{\gamma-1} & \lambda_{\gamma-1} & T_{\gamma-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{\gamma-2} \\ T_{\gamma-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{\gamma-2} \\ s_{\gamma-1} \end{bmatrix} . \quad (30)$$

Basta então implementar a solução do sistema acima, que serão obtidas as temperaturas em cada ponto.

3.1.3 Método de Crank-Nicolson

Em resumo este método mescla elementos dos métodos implícitos e explícitos, para as equações de difusão ele é incondicionalmente estável, mas, em soluções aproximadas, quando a razão do tempo pelo espaço, for significativamente grande, geralmente superior a $\frac{1}{2}$, ocorrerão oscilações significativas.

Aplicando o método para a parte temporal da equação, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad . \quad (31)$$

Já para a parte espacial, que são as médias entre as aproximações de tempos n e $n + 1$, tem-se:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{2\Delta x} [(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})] \quad . \quad (32)$$

Logo para a EDP do calor, tem-se:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2\Delta x} [(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})] \quad . \quad (33)$$

Isolando T_i^{n+1} , e assumindo $\omega = \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2}$, pode-se escrever a igualdade acima como:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \omega(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + \omega(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) \quad . \quad (34)$$

Este método gera um sistema de equações semelhante ao sistema obtido nos métodos implícitos.

3.1.4 Escolha do método de Diferenças Finitas

A escolha de qual método utilizar leva em consideração o tempo de compilação do programa, a aproximação com o método analítico e a convergência do método.

Na Tabela 1 estão os dados de execução dos três métodos estudados. O “Tempo de execução” tem malha: $tempo = 150\text{ s}$; $divisões\ de\ tempo\ 150$; $divisões\ em\ x = 30$ intervalos.

Tabela 1 – Métodos Problema direto

Método	Explícito	Implícito	Crank-Nicolson
Tempo execução	0.082 s	0.351 s	0.914 s

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar do método explícito apresentar o melhor tempo de execução, possui problemas de convergência, exige que $\Delta F < \frac{1}{2}$, da Eq. (21), o que implicaria em possíveis ajustes de malha na execução do problema inverso. Logo, como o método implícito apresentou o segundo melhor resultado quanto ao tempo, superando o Crank-Nicolson e não possui problema de convergência, ele foi escolhido para ser usado no problema inverso.

3.1.5 Discretização do Método das diferenças finitas na forma implícita e dependente do fluxo

Discretizando a EDP da Eq. (3) para o Método Implícito tem-se:

$$\frac{T_i^{(1)} - T_i^{(0)}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^{(1)} - 2T_i^{(1)} + T_{i+1}^{(1)}}{\Delta x^2}, \quad \text{para } i=2,3,4,5,\dots,n-2. \quad (35)$$

onde n corresponde ao último ponto da malha, na extremidade direita.

$$\text{Fazendo } \Delta F = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}, \quad (36)$$

e substituindo na Eq. (36) e na Eq. (35) obtém-se:

$$-\Delta F T_{i-1}^{(1)} + (1 + 2\Delta F) T_i^{(1)} - \Delta F T_{i+1}^{(1)} = T_i^{(0)}, \quad (37)$$

Sendo que para $i = n-1$, $T(n)$ não é conhecida. Porém, o fluxo de calor em $x = L$ será estimado pelo problema inverso, portanto é um valor conhecido a cada iteração temporal.

Discretizando a condição de fronteira em $x = L$, tem-se,

$$\frac{q''}{k} = \frac{T_{n-1}^{(1)} - T_n^{(1)}}{\Delta x} \quad . \quad (38)$$

Assim, obtém-se o valor de $T(n)$:

$$T_n^{(1)} = \frac{q''}{k} \Delta x + T_{n-1}^{(1)} \quad . \quad (39)$$

Substituindo a Eq. (39) na equação de discretização geral, Eq. (37) para $i = n-1$, tem-se:

$$-\Delta F T_{n-2}^{(1)} + (1 + 2\Delta F) T_{n-1}^{(1)} - \Delta F \left(\frac{q''}{k} \Delta x + T_{n-1}^{(1)} \right) = T_{n-1}^{(0)} \quad (40)$$

Agrupando os termos com $T_{n-1}^{(1)}$, tem-se:

$$-\Delta F T_{n-2}^{(1)} + (1 + \Delta F) T_{n-1}^{(1)} = T_{n-1}^{(0)} + \Delta F \frac{q''}{k} \Delta x \quad . \quad (41)$$

As Eqs 37 e 41, assim como a condição de fronteira em $x = 0$ e a condição inicial foram utilizadas para elaborar um programa computacional em Scilab, o qual calcula a distribuição de temperatura em pontos internos da barra em função do tempo.

3.2 PROBLEMA INVERSO

O Método de Procura em Rede (MPR) é um método que não tem problemas de convergência, pois busca por inspeção direta a solução que apresenta a menor diferença em conjunto de soluções finitas. Por esse motivo pode ser considerado um método de soluções subótimas, porém, para um número suficientemente grande de divisões, em que o coeficiente de correlação não apresenta variações significativas, os resultados tendem a soluções ótimas. O método tem a vantagem de não necessitar de cálculo de derivadas, porém sua execução computacional tende a ser mais demorada que outros métodos, como Levenberg-Marquardt e Gradientes Conjugados, apresentados em Silva Neto e Moura Neto (2005), na medida que aumenta o número de parâmetros a serem estimados. Mesmo assim, mostra-se um método eficiente para o presente problema. O referido método, descrito em Borges et al. (2008), foi implementado computacionalmente e adaptado para a estimação do fluxo q'' , de acordo com o seguinte algoritmo:

1º Passo: Estimar um intervalo de valores de q'' , $I_1 = [q''_{\min}, q''_{\max}]$ de existência da solução, considerando que nele esteja a difusividade ótima. Dividir o intervalo em $n - 1$ subintervalos, de tal forma que $\Delta q'' = \frac{q''_{\max} - q''_{\min}}{n-1}$;

2º Passo: Fazer o cálculo do Problema Direto com o valor de q'' estimado, o que dá soluções $T(x, t)$ e particularmente, a temperatura estimada $T_{est} = T(x_j, t)$, onde $j = 1, 2, 3, \dots, n$ são os pontos monitorados e t é o tempo em segundos;

3º Passo: Fazer o cálculo das diferenças entre os dados experimentais e os calculados da seguinte maneira:

$d_i = \sum_{j=1}^n \sum_{t=0}^{t_f} (T_{est}(t) - T_{exp}(t))^2$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, T_{exp} são temperaturas obtidas de forma experimental e t_f o tempo final;

4º Passo: Identificar $d(d_{\min})$ de menor valor, entre todas as diferenças d_i . Esta diferença é o q''_{ot1} para o intervalo I_1 , onde q''_{ot1} é o valor ótimo de q'' ;

5º Passo: Para melhorar a solução é necessário fazer um refinamento do intervalo I_1 . Para isso é necessário definir um novo intervalo, $I_2 = [q''_{\min2}, q''_{\max2}]$, sendo $q''_{\min2} = q''_{ot1} - \Delta q''^1$ e $q''_{\max2} = q''_{ot1} + \Delta q''^1$;

6º Passo: Refazer os passos de 2 a 5, estimando tantos I_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, de tal forma que $|d_{\min}^{i+1} - d_{\min}^i| < \varepsilon$, onde ε é o parâmetro do critério de parada.

4. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Os dados foram obtidos com o auxílio do SAED, em experimentos realizados pelo próprio autor deste trabalho no período de 2019/01, no Laboratório de Ensino de Matemática da UFFS, Chapecó.

Foi feita a montagem da bancada experimental: amostras de metal e SAED. As amostras consistem em três barras cilíndricas de aço: Barra 01, Barra 02 e Barra 03 com tempo de duração do experimento de 1464, 714 e 786 segundos respectivamente, assim como, respectivamente 19, 13.8 e 11 cm de comprimento cada, perfuradas nas duas extremidades (fronteiras) e três pontos interiores com mesmo espaçamento. As barras foram perfuradas nos pontos R , N , O , P e Q para instalar os sensores, conforme Figura 1.

Para o isolamento das amostras há a utilização de uma camada de manta térmica laminada, uma de isopor e outra de manta novamente, conforme Figura 2.

Figura 2 – Amostra



Fonte: Elaborado pelo autor.

Aquecendo com um ferro elétrico em $x = L$, conforme Figura 1, em cada uma das barras determina-se o fluxo q'' e com isto, a temperatura da face paralela a $x=L$, no exemplo acima $L = 4$.

Já o SAED consiste em um *Raspberry* (computador de tamanho reduzido), que está conectado a: um monitor de computador ou TV, um mouse e um teclado padrão e em uma placa criada para receber os valores de temperatura. Esta placa possui 6 entradas, onde são conectados cabos que vão até a amostra e na ponta destes cabos há um sensor que suporta temperaturas de até aproximadamente $150\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Os sensores recebem as variações térmicas que alteram os valores de corrente e tensão elétricas. Essas diferenças são convertidas para uma escala de temperatura em graus Celsius, por um algoritmo computacional. A calibração dos sensores foi implementada com o auxílio de um termômetro de bulbo calibrado, submetendo-os (sensores e termômetros) ao mesmo ambiente, anotando as diferenças para cada sensor e inserindo na programação do SAED. A Tabela 2 apresenta essas diferenças.

Tabela 2 – Valores obtidos na calibração em $^{\circ}\text{C}$

Sensor 0	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3	Sensor 4
7.5	0.82	9.46	7.86	6.21

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 3 mostra o SAED montado e acoplado na amostra, durante a realização dos experimentos.

Figura 3 – SAED e amostra



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DO MODELO

Uma descrição da aplicação do Método de Procura em Rede e a discussão sobre a eficiência do modelo proposto na tarefa de determinar o fluxo de calor são apresentadas nesse capítulo.

5.1 SOBRE A DIFUSIVIDADE TÉRMICA E A EXECUÇÃO COMPUTACIONAL DOS PROBLEMAS DIRETO E INVERSO

O valor da difusividade térmica das amostras pesquisadas foi determinado em Gervásio (2019, pg. 41) utilizando a metodologia do problema inverso, com base nos mesmos dados experimentais do presente trabalho, porém, considerando o problema de transferência de calor com condições de fronteira de primeira espécie, conhecidas experimentalmente, em ambas as extremidades das barras. A difusividade térmica é estimada como a média das três barras, visto que se tratam de amostras do mesmo material, porém com comprimentos e condições de aquecimento diferentes. Assim, o valor adotado nesse trabalho é de $4,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Tabela 3 – Dados experimentais e resultados do cálculo da difusividade

L da barra (m)	Tempo de experimento (s)	$\alpha_{cal} \times 10^{-6}$ ($m^2/2$)	<i>Desvio padrão ($\times 10^{-6}$)</i>
0,19	1464	4,9	
0,138	714	3,1	
0,11	786	4,3	
Difusividade média		4,1	0,748331

Fonte: Gervásio (2019).

O Problema Direto foi resolvido pelo Método de Diferenças Finitas, com o esquema Implícito em malha de 200 iterações temporais e 52 espaciais.

O Método de Procura em Rede foi aplicado com partição de 50 pontos para o parâmetro q ". Cada execução computacional utilizou em torno de 4,22 s, em um notebook Ideapad 330S Intel Core i5-8250U, 8 GB DE RAM. Para cada execução do PI, o aumento

no número de divisões dos intervalos, além de 150 divisões, não implicou em melhoria do coeficiente de determinação, com isto foram adotados os resultados descritos no item 5.2. Devido ao Método de Procura em Rede ser subótimo, deve-se considerar a existência de outras soluções, porém, pelos testes realizados, não devem apresentar parâmetros muito diferentes dos encontrados nesse trabalho.

5.2 ESTIMAÇÃO DO FLUXO DE CALOR E DA TEMPERATURA NA FRONTEIRA

O fluxo de calor em $x = L$ não é constante já que a diferença entre as temperaturas da fonte de calor em $T(L,t)$ são diferentes, visto que é um processo de aquecimento. No início do aquecimento essa diferença tende a ter o maior valor, diminuindo ao longo do tempo, tendendo para um valor fixo, o que caracteriza o regime estacionário do sistema, ou seja, quando não ocorrem mais mudanças de temperatura. Mesmo com essa análise, foram consideradas duas hipóteses para estimar o fluxo de calor na extremidade $x = L$: fluxo constante e fluxo variável em função do tempo. É evidente que a primeira hipótese é uma simplificação do fenômeno, porém pode ser uma aproximação que simplificaria o algoritmo de procura do problema inverso.

Para modelar a hipótese de fluxo variável, foi utilizada uma função exponencial do tipo

$$q''(t) = Ae^{-bt} + B, \text{ onde } A, b \text{ e } B \text{ são parâmetros reais e positivos.} \quad (42)$$

Na Eq. (42), para $t \rightarrow \infty$ o fluxo tende a ser B e para $t = 0$, $q''(0) = A + B$. Desse modo, A é a variação entre o fluxo inicial e o fluxo do estado estacionário B . Os resultados da aplicação do algoritmo para as três barras, com essas hipóteses, são apresentados na Tabela 4.

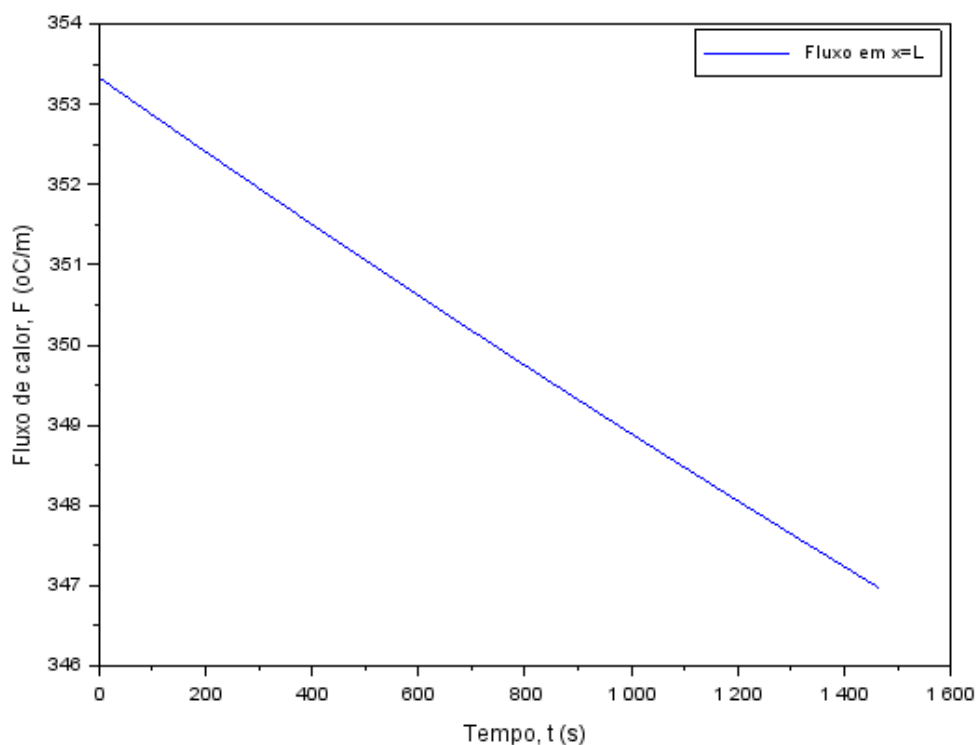
Tabela 4 – Dados do fluxo de calor em $x = L$.

Hipóteses		Barra 01	Barra 02	Barra 03
Fluxo constante		295	250	157,14
Fluxo variável	A (W/m)	50	44,5	26,66
	b (s^{-1})	0,001	0,001	0.001
	B (W/m)	302,5	250	166,66

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observou-se que a influência do coeficiente b da Eq. (42), o qual tem relação com a curvatura da função exponencial, não é significativo na determinação da variação do fluxo. Na Tabela 4 foi anotado o mesmo valor para as três barras, porque o algoritmo de procura do problema inverso indicou valores menores do que $10^{-3} s^{-1}$, ou seja, o parâmetro b tende a zero, indicando que o fluxo não tem um comportamento exponencial, mas linear, o que é ilustrado na Figura 4. Os gráficos dos fluxos das demais barras são semelhantes.

Figura 4 – Fluxo de calor para a barra 01



Fonte: Elaborado pelo autor.

O fluxo constante pode ser entendido como um valor intermediário entre o fluxo inicial (máximo) e o estacionário (mínimo), no processo de aquecimento. Ou seja, $B < \text{fluxo constante} < B + A$. A Tabela 4 confirma essa análise.

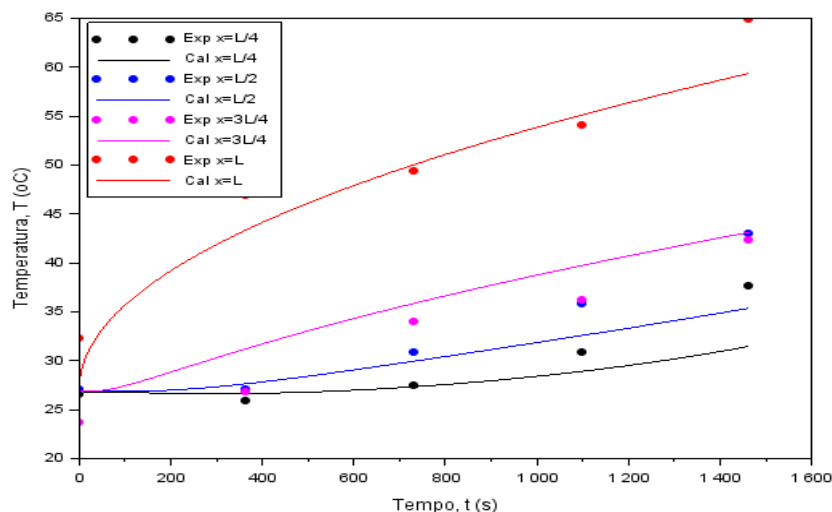
As temperaturas $T(L,t)$ foram determinadas com os valores de $\frac{q''}{k}$ da Tabela 4 e com a Eq. (38) e são apresentadas na forma de gráfico nas Figuras 4 a 10, para as três barras. Observa-se que os valores estimados de $T(L,t)$ (curvas contínuas) descrevem a tendência de crescimento, com taxas maiores na primeira metade do tempo de experimento, com redução dessa taxa na segunda metade, tendendo, talvez, para um valor

nulo para tempo infinito, no qual o sistema poderia entrar em equilíbrio térmico. Esse comportamento não é observável nos dados experimentais (pontos discretos), ao menos no intervalo de tempo de medição. A tendência das curvas de temperatura experimental para um valor estacionário também é provável, mas não observável no intervalo de medição.

As diferenças entre as curvas de temperatura experimentais e estimadas indicam que o modelo proposto descreve com relativa precisão o comportamento dos dados experimentais, como pode-se observar analisando a distribuição de temperaturas de $T(L,t)$, nas Figuras 04 a 10. Evidentemente, o modelo não contempla oscilações nas medições de temperatura, como pode-se observar em $T(L, 1464)$ na Figura 4 e em alguns outros pontos nas demais figuras.

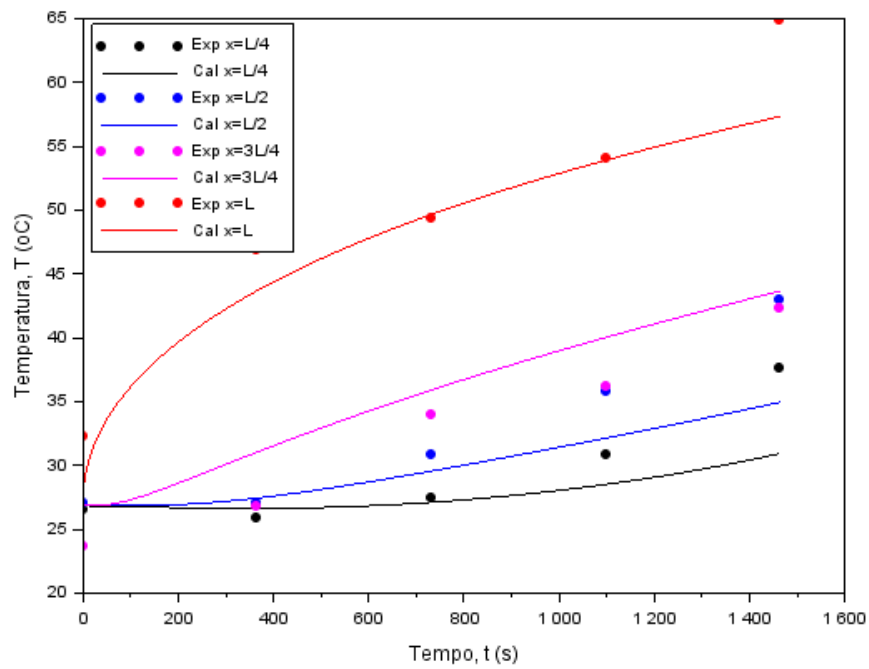
Comparando os resultados das curvas com fluxo constante e variável, para as mesmas barras (Figura 5 com a Figura 6, Figura 7 com a Figura 8 e Figura 9 com a Figura 10) pode-se concluir que o modelo exponencial não acrescenta maior precisão significativamente em relação ao modelo de fluxo constante.

Figura 5 – Distribuição de temperatura na barra 01, fluxo constante.
(exp = Temperatura experimental; cal = Temperatura calculada.)



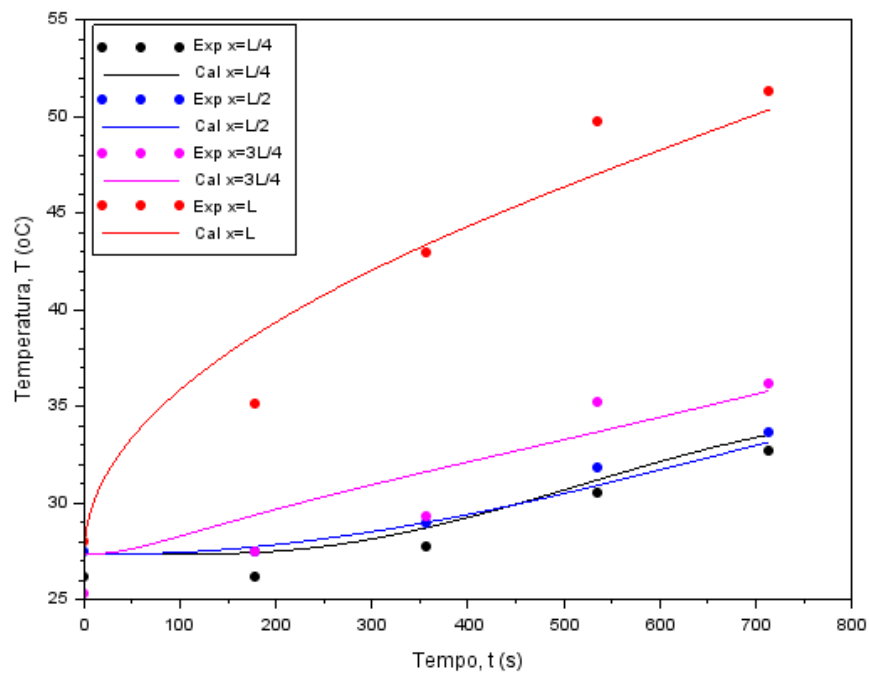
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 – Distribuição de temperatura na barra 01, fluxo variável.



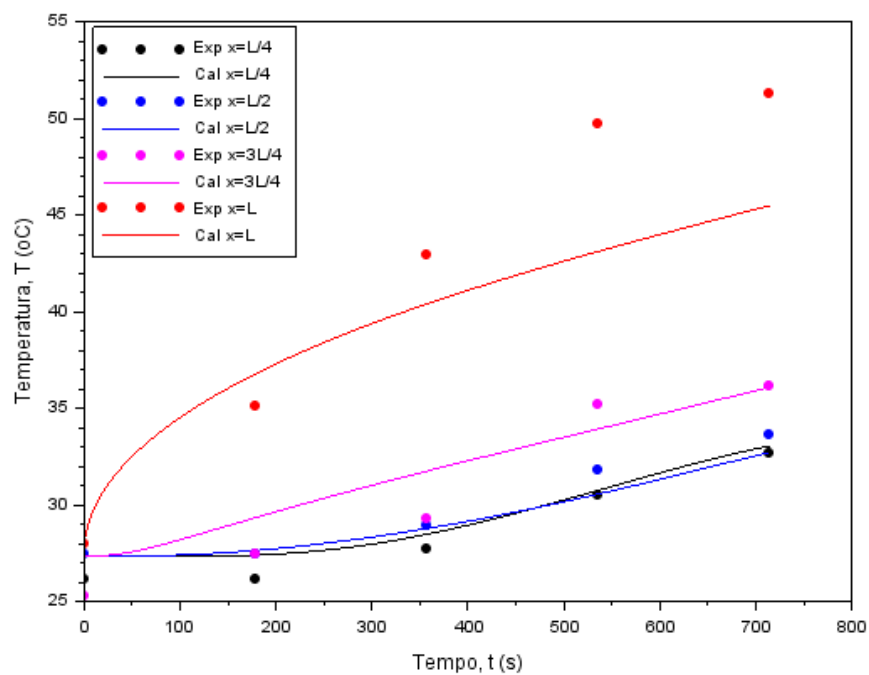
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Distribuição de temperatura na barra 02, fluxo constante.



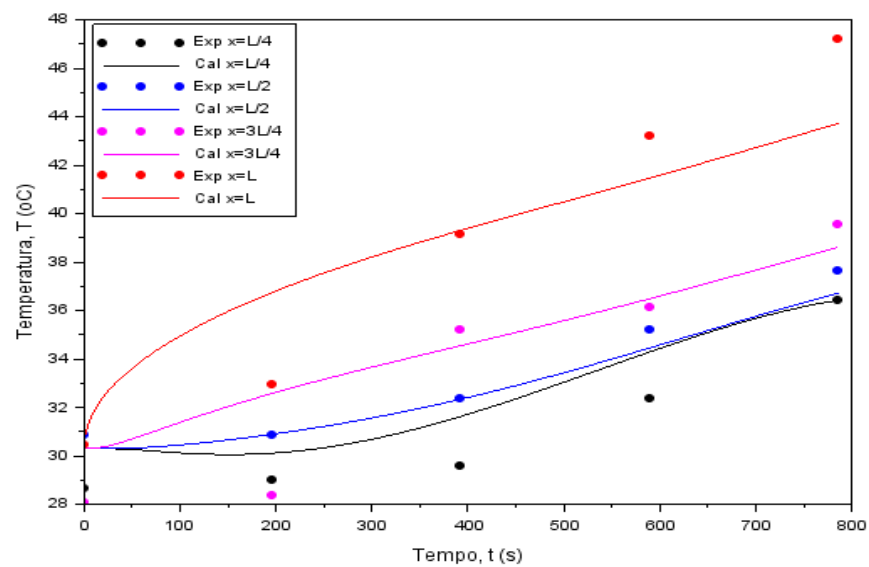
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8– Distribuição de temperatura na barra 02: fluxo variável.

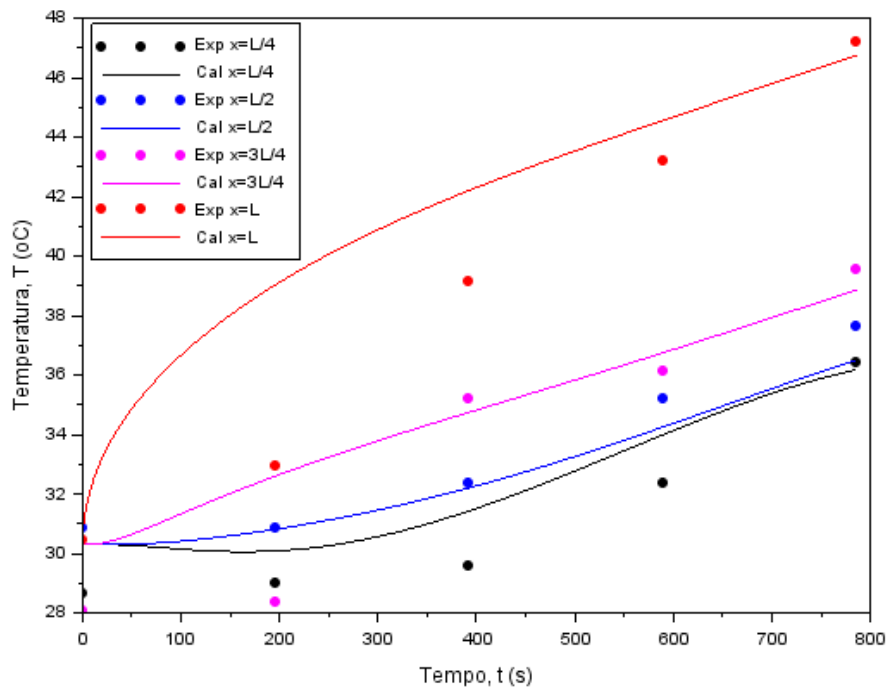


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9– Distribuição de temperatura na barra 03: fluxo constante.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10– Distribuição de temperatura na barra 03: fluxo variável.

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando os procedimentos e os resultados obtidos, cabem as seguintes considerações:

1. *Sobre a imprecisão dos dados experimentais e limitações do modelo:*

As medidas efetuadas podem ter erros de calibração e processos, porém considerando os procedimentos de calibração e repetições em três barras, esses erros não alteram significativamente o comportamento geral da distribuição de temperatura. No entanto, deve-se considerar a possibilidade de simplificações do modelo, em relação à complexidade do fenômeno, tais como a difusão de calor em duas ou mais direções e trocas de calor com o material de isolamento.

2. *Sobre a forma das curvas de temperatura em $x = L$ e a análise das trocas de calor:*

Considerando as diferenças de temperatura entre a fonte de calor e de $T(L,t)$, o fluxo de calor deve ser maior nos primeiros instantes, tendendo a um valor constante, na medida que o sistema entra em equilíbrio térmico. Essa análise reforça o formato das curvas estimadas pelo modelo.

3. *Sobre a hipótese de fluxo constante ou variável:*

A hipótese de fluxo de calor constante é uma simplificação do fenômeno real, já que a diferença entre a temperatura da fonte e em $x = L$ não é constante, porém, tende para um valor constante. Mesmo assim, ficou evidente que a variação de fluxo não foi significativa na distribuição de temperatura e que o modelo de fluxo constante é uma aproximação, no mínimo, razoável.

Em futuros trabalhos, o modelo poderá ser melhorado com novas hipóteses de variação do fluxo e medição de períodos de tempo que incluam o início do estágio estacionário.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BECKETT, R. E.; CHU, S. C. **Finite Element Method Applied to Heat Conduction in Solids with Nonlinear Boundary Conditions**. Journal of Heat Transfer, v. 95, p. 126-129, 1973.
- BORGES, P. A. P.; CERVI, A.; VIONE, M.T. Determinação dos parâmetros da equação de Van Genuchten usando problema inverso em um problema de evaporação. **In: VIII ERMAC 2008**, Pelotas, v. 1. p. 23-30, 2008.
- CAMPOS VELHO, H. F. **Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Lab. de Computação e Matemática Aplicada. Artigo PDF WEB. Disponível em: <http://www.lac.inpe.br/~haroldo/CursoPI/CursoPI.pdf>. Acessado em 24/02/19.
- CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of Heat in Solids**. 2. ed. London: Oxford University Press, 1959.
- ÇENGEL, Y. A. y Boles, M. A. **Termodinâmica**. México: McGraw-Hill, p. 829, 2003.
- CHANG, Y. P.; HUANG, S. C. **Heat Conduction in Unsteady, Periodic and Steady States in Laminated Composites**. Journal of Heat Transfer, v. 102, p. 742-748, 1980.
- CHEN, H. T.; LIN, J. Y. **Application of the Hybrid Method to Transient Heat Conduction in OneDimensional Composite Layers**. Computer & Structures, v. 39, n 5, p. 451-458, 1991.
- ENGL, H. W., Hanke, M. & Neubauer, A. **Regularization of Inverse Problems: Mathematics and its Applications**, Kluwer, 1996.
- GERVÁSIO, L. **Determinação da difusividade térmica de sólidos através do método do problema inverso**. TCC (Licenciatura em Matemática) – UFFS. Chapecó, p.49. 2019.
- INCROPERA, F. P.; WITT D. P. **Introduction to Heat Transfer**. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- INCROPERA, F.P, et al. BERGMAN, T. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- LAMBERTS, R.; DUTRA, L.; PEREIRA, F.O.R. **Eficiência energética na arquitetura**. São Paulo: PW Editores, p. 188, 1997.
- SILVA NETO, A. J. & MOURA NETO, F. D. **Escolha de Modelos – Problemas Inversos em Engenharia–Mini-curso**, Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, SBMAC, Santos (SP), Brasil, 2000.
- ZILL, D. G. CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Volume 1. São Paulo: Pearson 2001.