



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL  
CAMPUS DE CHAPECÓ  
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

**LUCAS CARICIMI GERVÁSIO**

**DETERMINAÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA DE SÓLIDOS ATRAVÉS  
DO MÉTODO DO PROBLEMA INVERSO**

**CHAPECÓ, SC**

**2019**

**LUCAS CARICIMI GERVÁSIO**

**DETERMINAÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA DE SÓLIDOS ATRAVÉS  
DO MÉTODO DO PROBLEMA INVERSO**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao curso de Licenciatura em  
Matemática da Universidade Federal da  
Fronteira Sul, como requisito parcial para  
aprovação na disciplina de Trabalho de  
Conclusão de Curso II.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

CHAPECÓ, SC

2019

**LUCAS CARICIMI GERVÁSIO**

**DETERMINAÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA DE SÓLIDOS ATRAVÉS  
DO MÉTODO DO PROBLEMA INVERSO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito parcial para obtenção do grau Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul.

Este trabalho de conclusão de curso foi defendido e aprovado pela banca em:

\_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS  
Orientador

---

Prof. Dr. Milton Kist

---

Profa. Dra. Divane Marcon

Chapecó/SC, julho de 2019

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, que me proporcionou para todas as situações os aparatos que eu precisava para tornar esse projeto possível.

Ao professor orientador Dr. Pedro Augusto Pereira Borges, por toda a dedicação, paciência, apoio, ensinamentos e colaboração para a construção desse trabalho.

A minha mãe Olga Caricimi que sempre foi muito mais do que mãe para mim, em todas as horas, bem como a minha irmã Maria Luiza Caricimi Gervásio Masson, que assim como minha mãe, sempre foi muito mais do que uma irmã, ambas, me proporcionaram todo apoio e amparo necessário.

A Gabriela Curtarelli e Bruna Maraga, as melhores amigas e colegas que alguém pode ter, tanto nas horas boas, quanto nas horas mais difíceis.

A todos os professores da universidade que de alguma forma ajudaram-me no desenvolvimento desse projeto e/ou do conhecimento necessário para que isso fosse possível.

A UFFS por oferecer esse curso com o nível está sendo oferecido.

A Fernando Strapazon um grande colega e amigo que a universidade me proporcionou conhecer, pela ajuda no desenvolvimento do projeto.

A todos os membros da minha família que de alguma forma me deram apoio.

A Aline F. Landskron e sua família por terem contribuído muito comigo em todos os aspectos durante todo o decorrer do curso.

A todos os meus amigos e colegas que de alguma forma colaboraram.

A empresa Mieceslau Streciwik & Filhos EPP a qual possui vínculo empregatício, pelo apoio e compreensão nas horas que precisei me ausentar do trabalho, durante o período de graduação.

A todas as pessoas que de alguma maneira colaboraram com a realização desse projeto.

*“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”*

(Galileu Galilei)

## RESUMO

A difusividade térmica de materiais é um dado necessário para a solução de problemas de diferentes áreas, tais como a de alimentos, construção civil, mecânica, entre outras. Existem diferentes métodos de obtenção desse dado, escolhidos em função do tipo de sistema físico, praticidade, precisão e custo-benefício. O presente trabalho tem como objetivo determinar a difusividade térmica de amostras de metal, utilizando o Método do Problema Inverso (PI). O Problema Direto (PD) de transferência de calor por condução em uma barra, com condições de contorno de primeira espécie, foi resolvido numericamente utilizando do Método das Diferenças Finitas. Foram implementadas discretizações das variáveis espaço e tempo com os esquemas Explícito, Implícito e o Crank-Nicolson com o objetivo de avaliar seus desempenhos computacionais, visando sua utilização no PI. Esse, foi implementado com o Método de Procura em Rede, utilizando dados experimentais de temperatura por tempo, obtidos através um Sistema de Aquisição Eletrônica de Dados (SAED). Os experimentos foram realizados no Laboratório de Educação Matemática da UFFS/Chapecó (LEM) e os programas computacionais foram elaborados em linguagem Scilab. A difusividade térmica do metal pesquisado foi de  $4,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  obtida pelo PI e encontra-se na mesma ordem de grandeza de aços disponíveis na literatura. Tal aproximação não atesta a precisão do método utilizado, visto que os aços referidos na literatura, provavelmente, não tem a mesma composição das amostras analisadas. Porém, pode-se afirmar que o PI é um método: prático, porque envolve experimentos simples e rápidos; eficiente custo-benefício, porque fornece um resultado na mesma ordem de grandeza dos dados da literatura e demanda apenas de materiais eletrônicos de baixo custo e da execução computacional de um modelo matemático.

**Palavras-chave:** Difusividade Térmica, Método das Diferenças Finitas, Cálculo Numérico.

## ABSTRACT

Thermal diffusivity of materials is a necessary data for solving problems in different areas, such as food, construction, mechanics, among others. There are different methods of obtaining this data, chosen according to the type of physical system, practicality, accuracy and cost-effectiveness. The present work aims to determine the thermal diffusivity of metal samples using the Inverse Problem Method (IP). The Direct Problem (DP) of conduction heat transfer in a bar, with first kind boundary conditions, was numerically solved using the Finite Differences Method. Discretisations of the space and time variables were implemented with the Explicit, Implicit and Crank-Nicolson schemes in order to evaluate their computational performances, aiming at their use in the IP. This was implemented with the Network Search Method, using experimental time temperature data, obtained through an Electronic Data Acquisition System (EDAS). The experiments were performed at the Laboratory of Mathematical Education of UFFS / Chapecó (MEL) and the computer programs were elaborated in Scilab language. The thermal diffusivity of the researched metal was  $4,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  obtained by IP and is in the same order of magnitude of steels available in the literature. Such approximation does not confirm the accuracy of the method used, since the steels referred to in the literature probably do not have the same composition as the samples analyzed. However, it can be said that IP is a method: practical because it involves simple and fast experiments; cost-effective because it provides a result in the same order of magnitude as literature data and demands only low-cost electronic materials and the computational execution of a mathematical model.

**Keywords:** Thermal Diffusivity, Finite Differences Method, Numerical Calculus.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	9
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	11
2.1. LEI DE FOURIER.....	11
2.2. EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR.....	13
2.3. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA .....	15
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	17
3.1. MÉTODOS DE MEDIÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA .....	17
3.1.1. <i>Laser-Flash</i> .....	18
3.1.2. Método da Fonte Plana Transiente.....	18
3.1.3. Método da Tira Quente.....	19
3.1.4. Método $3\omega$ .....	19
3.1.5. Método da Sonda Agulha .....	20
3.2. PROBLEMAS INVERSOS E PROBLEMAS DIRETOS .....	20
4. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR.....	23
4.1. MÉTODOS NUMÉRICOS – SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO .....	24
4.1.1. Método Explícito .....	25
4.1.2. Método Implícito .....	27
4.1.3. Método De Crank-Nicolson .....	29
4.2. PROBLEMA INVERSO: PROCURA EM REDE .....	30
5. MÉTODOS EXPERIMENTAIS.....	32
6. DETERMINAÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA.....	40
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	44
8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	46

## 1. INTRODUÇÃO

A difusividade térmica é uma propriedade termofísica que todo material possui seja ele sólido, líquido ou gasoso, propriedade essa que expressa a taxa de transferência de energia calorífera, que ocorre do meio mais energético para o meio menos energético, em outras palavras, o calor se locomove da parte mais quente para a mais fria. A difusividade térmica será aqui denotada por  $\alpha$ .

O estudo dessa propriedade é muito importante, para vários ramos distintos. Estudo esse que visa aprimorar materiais e métodos para que custos fiquem mais baixos, para a melhoria da saúde, qualidade de vida, entre outros fatores.

A difusividade térmica é importante no ramo alimentício, para descrever situações tais como o congelamento e o resfriamento, o processamento térmico, a secagem, o aquecimento e armazenamento de alimentos, tanto no que diz respeito à produção, conservação, criação e aprimoramento de máquinas.

Para a arquitetura o estudo da difusividade térmica, tem como aplicação o conforto térmico dos ambientes que serão utilizados por pessoas e animais a fim de que as necessidades físicas, biológicas e psicológicas, sejam satisfatórias. Segundo Lamberts (1997), existem três fatores que são de fundamental importância analisar, quando se estuda o conforto térmico em ambientes. A satisfação do homem ou seu bem estar em se sentir termicamente confortável; o desempenho humano, cujas atividades intelectuais, manuais e perceptivas, geralmente apresentam um melhor rendimento quando realizadas em ambiente com conforto térmico; a economia de energia, pois devido à crescente mecanização e industrialização, as pessoas passam grande parte de suas vidas em ambientes com climas artificiais, ou seja, ambientes condicionados. Portanto, nesse caso, são desenvolvidos e instalados materiais e equipamentos que ajudam na manutenção da temperatura dos ambientes, como aquecedores, climatizadores, isolantes térmicos, entre outros.

Para além da arquitetura, nas engenharias civil e mecânica, é necessário selecionar e aprimorar materiais que serão empregados em situações específicas, analisando os riscos e benefícios, ainda na fase de projeto, com base no conhecimento que a difusividade térmica proporciona.

Esse trabalho tem como objetivo a determinação da difusividade térmica de sólidos através do Método do Problema Inverso (PI). O método consiste em estimar a difusividade, de tal forma que a distribuição de temperatura no interior do sólido, calculada pelo Problema Direto de transferência de calor por condução, seja compatível – no sentido dos mínimos quadrados – com a distribuição de temperatura obtida experimentalmente.

No segundo capítulo foi feita uma fundamentação teórica sobre o assunto apresentando a Lei de Fourier, a equação de condução do calor e é apresentado o que são condições de fronteira, bem como são dados exemplos das mesmas.

No terceiro capítulo foi feita uma revisão bibliográfica sobre alguns métodos de medição da difusividade térmica, é apresentado o que são os problemas diretos e problemas inversos bem como é apresentado algumas formas de resolve-los.

No quarto capítulo são apresentadas as formas numéricas para a solução da equação do calor, são apresentados alguns métodos para a solução do problema direto e para o problema inverso é mostrado o método de procura em rede.

No quinto capítulo é apresentado como os experimentos foram realizados passo-a-passo bem como os dados obtidos foram processados.

No sexto capítulo são apresentadas as difusividades calculadas em comparação com os dados experimentais.

Nas considerações finais, são feitas reflexões sobre os experimentos, foi feito um comparativo entre os resultados dos experimentos e o que a literatura já apresenta.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1.LEI DE FOURIER

A palavra energia vem do grego “ergos”, que significa trabalho e tem relação com a capacidade de transformar algo ou dar movimento a algo, ou seja, é tudo que pode produzir ação por qualquer corpo, em qualquer estado físico. Existem vários tipos de energia, sendo algumas delas mais conhecidas: Energia Mecânica (que tem relação com a Energia Cinética e Energia Potencial), Energia Elétrica, Energia Luminosa, Energia Sonora e Energia Térmica (calor, Energia Calorífera). Sendo essas duas últimas o foco deste trabalho.

A Energia Térmica está associada ao movimento das partículas (energia cinética) que o corpo produz, cuja unidade de medida é o Joule (pelo sistema internacional ou caloria). A temperatura é uma medida associada àquela energia, ou seja, quanto maior a temperatura, maior será a Energia Térmica do sistema.

A Energia Térmica em trânsito, seja de um corpo para outro, ou no mesmo corpo, é denominada de calor, e ocorre devido à diferença de calor. Ela pode ocorrer de três maneiras: condução (no interior de sólidos), convecção (no interior de fluídos) e radiação (através de ondas e sem a presença de massa). Pode-se notar que independentemente do modo, esse fenômeno ocorre do ponto de maior calor para o de menor calor, ou seja, pontos cuja temperatura é mais elevada para o ponto onde a temperatura é menos elevada.

No caso da condução ocorre pela interação de partículas mais energéticas para as partículas menos energéticas adjacentes, transferindo o calor, sem movimentação de massa, de umas às outras. Essa forma de transferência é comum nos sólidos e ocorre pela vibração das moléculas em uma rede e pelo transporte de energia pelos elétrons livres (Cengel, 2003). No caso de gases e líquidos a condução também ocorre pela colisão e difusão das moléculas no sistema, porém ao se movimentarem, as partículas transportam o calor de um ponto a outro. Esse processo é chamado convecção.

A lei estabelecida pelo cientista Jean-Baptista Joseph Fourier (1768-1830) em 1822, conhecida por Lei de Fourier, determina que o fluxo de calor entre dois pontos, indicado por  $q$ , é proporcional ao gradiente de temperatura  $\frac{dT}{dx}$ . Ao inserir um coeficiente

$k$ , a condutividade térmica, pode-se transformar a proporcionalidade em uma igualdade, conforme a Eq. (1). Essa equação é de caráter fenomenológico, por não ter sido originada de uma teoria fundamental, mas sim por evidências experimentais.

$$q'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Onde:

$q''$  é o fluxo de calor por condução ( $kcal/h$  no sistema métrico);

$k$  é a constante que depende do material conhecida por condutividade térmica ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$  no sistema métrico, onde  $W$  é em *Watts* e  $K$  é em Kelvin)

$\frac{dT}{dx}$  o gradiente de temperatura na seção, isto é, a razão de variação da temperatura  $T$  com a distância, na direção  $x$  do fluxo de calor ( $^{\circ}C/s$ )

O fluxo de calor é direcional e ocorre do meio mais energético para o menos energético, portanto, na direção em que a temperatura é decrescente.

Fazendo uma análise sobre o fluxo de calor  $q''$  pode-se interpretá-lo como a taxa de transferência de calor  $\dot{Q}$  por unidade de área  $A$  normal à direção de transferência de calor. Feita essa análise, podemos reescrever a Eq. (1), na forma da Eq. (2):

$$\frac{\dot{Q}}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (2)$$

Onde  $\dot{Q}$  é a taxa do fluxo de calor ( $W \cdot m^{-2}$  no sistema métrico);

$A$  é a unidade de área da superfície normal a direção da transferência de calor ( $m^2$  no sistema métrico).

Na Eq.(2) pressupõe-se que a condutividade térmica é constante para qualquer ponto do corpo na direção  $X$ . Se o corpo for homogêneo, a condutividade permanecerá constante nas demais direções (ou seja, um meio isotrópico). O fluxo de calor, no entanto, poderá variar de uma direção para outra. Assim, a Eq. (2) pode ser escrita conforme a Eq. (3):

$$\vec{q}' = -k\nabla T = -k \left( \vec{i} \frac{dT}{dx} + \vec{j} \frac{dT}{dy} + \vec{k} \frac{dT}{dz} \right) \quad (3)$$

Onde  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  são os vetores da base canônica em  $\mathbb{R}^3$ ;

$\nabla$  é o operador diferencial tridimensional e  $T(x, y, z)$  é o campo escalar de temperaturas. (Gradiente)

A lei de Fourier é a pedra fundamental da condução de calor, pois além de descrever a transferência de calor, define uma propriedade do material, sendo ele líquido, sólido ou gasoso, que é a condutividade térmica.

A lei de Fourier, nos mostra que o fluxo de calor é normal a uma isoterma, no sentido de diminuição de temperatura, por ser uma expressão vetorial.

Isso indica que a lei de Fourier representa um Gradiente de uma função. Mas o Gradiente de uma função aponta para o sentido de maior crescimento da função, a constante  $-k$  muda o sentido do vetor apontando assim para o sentido da diminuição da temperatura, ou seja, no sentido oposto ao crescimento da função. Gradiente de uma função  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\text{grad}(T) = \nabla T(x, y, z) = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (4)$$

Também pode ser reescrito como:

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{k} \quad (5)$$

## 2.2. EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR

A análise da condução do calor tem por objetivo a determinação dos campos de temperatura resultante das condições impostas a sua fronteira. Em outras palavras pode-se dizer que busca saber como é dada a distribuição da temperatura dentro da matéria. Uma vez que se tem conhecimento dos campos de temperatura, recorre-se à lei de Fourier

para determinar como se dá o fluxo de calor, em qualquer que seja o ponto do material interior ou de fronteira.

No caso de uma medição específica, deve-se analisar o material ou o meio, para que se use uma equação adequada com a geometria dos volumes a serem analisados. Os sistemas de coordenadas mais usuais são o retangular, cilíndrico e esférico e as formas gerais das equações, para meios não isotrópicos e não homogêneos de condução de calor, ou seja, aqueles os quais o calor não se conduz da mesma maneira em todos os sentidos, são apresentadas nas Eqs. 6 a 8, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k_\theta \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Onde:

$k_x, k_y, k_z, k_r, k_\varphi, k_\theta$  são as condutividades térmicas em cada sentido (em  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ , onde  $W$  é em *Watts*, e  $K$  é em Kelvin);

$x, y, z$  são as variáveis espaciais em coordenadas retangulares (em *cm*);

$x, r, \varphi$  são as variáveis espaciais em coordenadas cilíndricas (onde  $r$  e  $x$  são em *cm* e  $\varphi$  em *rad*);

$r, \varphi, \theta$  são as variáveis espaciais em coordenadas esféricas, (tal que  $r \in [0, \infty]$  *cm*,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  *rad*,  $\theta \in [0, \pi]$  *rad*);

$t$  é o tempo (em *segundos*);

$\dot{q}$  é a taxa de geração de energia por unidade de volume ( $W/m^3$  onde  $W$  é em *Watts*);

$\rho$  é massa específica (em  $kg/m^3$ );

$c_p$  é o calor específico a pressão constante (em  $kJ/kg.K$  onde  $K$  é em *Kelvin* e  $kJ$  é kilo Joule).

Particularmente, se o material é isotópico, homogêneo e as propriedades térmicas não variam significativamente, a Eq. 6 pode ser escrita na forma da Eq. 9.

$$\frac{\partial T^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial T^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial T^2}{\partial^2 z} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

Onde  $\alpha$  é uma propriedade do material denominada difusividade térmica, conforme a Eq. (10):

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (10)$$

Onde

$\alpha$  é a difusividade térmica ( $m^2/s$ );

$\rho$  é massa específica em  $kg/m^3$ ;

$c_p$  é o calor específico a pressão constante em  $kJ/kg.K$  onde  $K$  é em Kelvin.

Materiais com alto valor de difusividade térmica respondem rapidamente a mudanças térmicas em seu ambiente, enquanto materiais de pequenos valores de  $\alpha$  respondem mais lentamente, demorando a alcançar um novo estado de equilíbrio (INCROPERA E WITT, 1996, p. 188).

### 2.3. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Em problemas de equações diferenciais, as condições de fronteira são um conjunto de restrições que determinam a variação de temperatura nos contornos (em função do tempo) e nos pontos internos, no estado inicial. Desse modo, a distribuição de temperatura no interior do corpo, é uma decorrência das condições térmicas de fronteira estabelecidas.

No que diz respeito as condições de contorno, pode-se classifica-las de acordo com as informações disponíveis. Em transferência de calor, três condições são usuais: Dirichlet, Neumann e Robin, conhecidas como condições de 1ª espécie, 2ª espécie e 3ª espécie, respectivamente.

As condições de contorno de Dirichlet, denominadas assim em homenagem a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, pressupõem o conhecimento dos valores da variável principal da  $\varphi$  da EDP nos contornos, Eq. (11):

$$\begin{cases} \varphi(x_1, y_1, z_1, \dots) = \varphi_1 \\ \varphi(x_2, y_2, z_2, \dots) = \varphi_2 \\ \varphi(x, y, z, \dots) = f(x) \end{cases} \quad (11)$$

Onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são números dados, ou seja, ela estabelece valores que as funções que compõe o sistema devem ter em pontos de fronteira, e  $f(x)$  é a função que expressa a restrição de condição inicial ao qual o sistema está submetido.

As condições de contorno de Neumann, que recebem esse nome devido a Carl Neumann, especificam valores que a derivada da variável principal  $\varphi$  da EDP deve assumir no contorno do domínio. As condições de Neumann, colocam uma derivada normal à direção da variável do contorno, associadas ao fluxo. De forma simplificada podemos denotar as condições de Neumann da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1) = \varphi_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2) = \varphi_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x_n) = f(x) \end{cases} \quad (12)$$

Onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são números dados,  $n$  denota a normal ao contorno.

Designada em homenagem ao francês Victor G. Robin, as condições de Robin, também conhecidas como condições de 3ª espécie, força a condição de contorno a respeitar uma combinação de Dirichlet e Neumann, a qual podemos representar da seguinte maneira:

$$\begin{cases} -\Gamma(a) \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x} + \alpha \varphi(a) = r_a \\ -\Gamma(b) \frac{\partial \varphi(b)}{\partial x} + \alpha \varphi(b) = r_b \end{cases} \quad (13)$$

### **3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo será apresentado um breve resumo do que a literatura tem sobre os métodos de medição da difusividade térmica, sobre os problemas diretos e problemas inversos.

#### **3.1. MÉTODOS DE MEDIÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA**

A difusividade térmica pode ser medida por diferentes métodos, dependendo do regime de calor que o material está submetido. Pode-se classificá-los em duas categorias: Métodos estacionários – que medem a condutividade térmica em sistemas estacionários de troca de calor; e métodos não estacionários – onde se mede a condutividade térmica durante um regime transiente de troca de calor (Pinto, Rouver, Betini, Correa, Orlando, Passos)

Ainda os métodos não estacionários podem ser divididos em Métodos do Fluxo de Calor Periódico e Métodos do Fluxo de Calor Transiente. Nos primeiros, uma fonte de calor em uma extremidade do objeto, faz a temperatura variar periodicamente, para que, após um determinado tempo, o corpo entre em equilíbrio térmico e a difusividade térmica é determinada a partir dos dados obtidos em diferentes pontos da amostra. As principais desvantagens nesse método são: método demorado e demanda de temperatura constante do ambiente da experimentação. No segundo método, é incidido um pulso de energia de curta duração em uma das faces do corpo. A difusividade é calculada verificando-se a temperatura da face oposta à aplicação do pulso, através de um sensor infravermelho. O que mostra que é um método mais eficaz, visto que é um método mais rápido, cuja as perdas de calor são mínimas.

Alguns métodos que são utilizados para a medição da difusividade térmica, são descritos nas próximas seções:

### 3.1.1. *Laser-Flash*

Descrito pela primeira vez por Parker (1961), e conforme diz Min *et al.* (2007), o Laser-Flash é a técnica mais amplamente utilizada nas últimas décadas para determinar a difusividade térmica de vários sólidos, pós e líquidos. Para os padrões da *American Society for Testing and Materials (ASTM)*, órgão que desenvolve e torna público normatizações técnicas sobre vários tipos de materiais, usados na *Thermophysical Properties Research Laboratory, Inc. (TPRL)*, esse método (E1461-07) é o padrão para a determinação de difusividade térmica de sólidos.

O método consiste em irradiar em uma face um laser de muito rápida duração e alta intensidade, e medir através de sensores infravermelhos a variação de temperatura na face oposta da aplicação do laser. Esse método é muito eficaz e rápido, mas depende de alguns cuidados e considerações tais como a regulagem do laser, para que não gere deformações na matéria e passe para outro lado (no caso de amostras transparentes), considerar a transferência de calor como não unidirecional, portanto a teoria deve ser alterada. Para a utilização desse método, o pesquisador deve ajustar o método de acordo com cada situação de forma que os dados não sejam comprometidos, como a alteração das características físicas (exceto a temperatura) e químicas no processo.

De acordo com Czichos *et al.* (2011), a faixa de temperatura deste método é de -100 °C a 3000 °C e a incerteza de medição varia de 3 a 5%.

### 3.1.2. **Método da Fonte Plana Transiente**

Este método tem sido utilizado para medir a condutividade, assim como a difusividade térmica, de diversos tipos de sólidos e de fluidos, estes numa faixa de condutividade de 0,005 *W/m.K* a 500 *W/m.K*. Esse método tem sido utilizado numa faixa de temperatura desde as mais baixas, criogênicas, até cerca de 1500° C.

Este método consiste em chapa plana, com uma espiral dupla, que funciona como uma resistência, no meio de duas camadas de um material que não conduza bem a eletricidade, mas, conduza bem o calor, a espiral geralmente é feita de níquel. Esse espiral é submetido a uma corrente elétrica produzindo então calor, que se dissipa pela chapa.

Sobre essa chapa ficam duas amostras do material a ser analisado, uma de um lado do sensor e outra do outro lado. As características térmicas são extraídas com base nos dados obtidos de temperatura em função do tempo, as mesmas podendo ser determinadas com alta exatidão.

### 3.1.3. Método da Tira Quente

O Método da Tira Quente, é muito semelhante a um outro método, não descrito nesse trabalho, conhecido por método do Fio Quente, que ao invés de ser utilizada uma tira é utilizado um fio. O Método da Tira quente, consiste em uma tira, que pode ser de diversas espessuras e comprimentos de acordo com o tamanho da amostra a ser analisado, que interage com a amostra funcionando como uma resistência que irá fornecer calor para a amostra, como também funciona como o termômetro que irá constatar as temperaturas em relação ao tempo. Esse método quanto o do Fio Quente, por mais que possam ser utilizados em diversos pós e fluídos, não são aconselhados para líquidos que sejam condutores de energia elétrica, pois, segundo Nagasaka e Nagashima (1981) a energia elétrica iria interagir com os líquidos alterando assim a aquisição dos dados.

Esse tipo de método tem uma excelente precisão em temperaturas baixas e moderadas, menos no ponto crítico onde os dados não se comportam de forma linear, também, não é um método muito indicado pelo custo, que é muito elevado. Tanto no método do Fio Quente quanto no método da Faixa Quente, a faixa de temperatura que pode ser analisada é entre 20°C e 2000°C, com um índice de incerteza de variando de 1% a 10% (Czichos *et. al.*, 2011), métodos esses que também podem ser utilizados para nanofluidos.

### 3.1.4. Método $3\omega$

O método  $3\omega$  consiste em uma faixa metálica colocada numa amostra, que também pode ser dispensada se a própria amostra for condutora de eletricidade e se não ocorrer variação de corrente pela temperatura, que serve como instrumento de aquecimento e termômetro ao mesmo tempo. Nesse método a alternância de corrente vai

gerar uma variação de temperatura, o produto da corrente com a resistência elétrica, gerará um valor de tensão. Tensão essa que tem o nome e atribui o nome ao método de  $3\omega$ , e através desse valor é possível determinar o valor das propriedades térmicas da amostra. Esse método se apresentou bom para a determinação das propriedades térmicas de líquidos que conduzem a eletricidade.

### 3.1.5. Método da Sonda Agulha

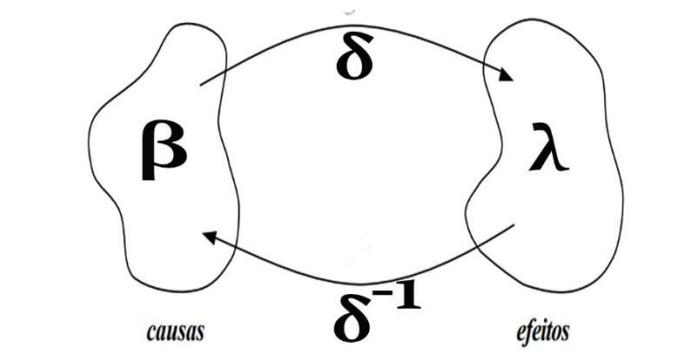
Esse método é semelhante ao da Tira Quente, mas, consiste em uma sonda no formato de uma agulha que contém uma resistência e um termômetro embutidos, que são inseridos nas amostras que serão submetidas aos testes. Esse método é considerado padrão e é tomado como base matemática, para a *ASTM* segundo a norma D5334-08 (2008), para a determinação de condutividade térmica de solos e rocha macia, o mesmo método se encontra descrito também em outra norma D5930-09 (2009), mas, tem sido utilizado em materiais como líquidos, pós, alimentos, entre outros materiais. As faixas de temperatura e os graus de precisão podem variar conforme o modelo da mesma.

## 3.2. PROBLEMAS INVERSOS E PROBLEMAS DIRETOS

Os métodos do Problema Inverso (PI) e do Problema Direto (PD), tem seus conceitos baseados na cultura de *causa e efeito*. No caso da expressão de PI pode-se atribuir ao astrofísico Viktor Amazaspovich Ambartsumian, como aquele que a moldou. Para Engl “Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados” (Engl et al., 1996).

No caso dos métodos que usam o PI, alguns fatores podem comprometer os resultados, como amostras poluídas ou incompletas, ruídos, imperícias observacionais, erros de medidas, entre outros. No que diz respeito dos PD é necessário um conhecimento mais completo e mais preciso do sistema a ser analisado, ou seja, é necessário ter o conhecimento completo das *causas* para que então seja possível estabelecer os *efeitos*.

Dado um sistema  $\delta$ , consideremos que dado uma causa  $\beta$  queremos estabelecer o efeito  $\lambda$ , logo teremos a expressão  $\delta(\beta) = \lambda$ . Por outro lado, do ponto de vista dos PI, poderemos escrever a expressão dessa forma  $\delta^{-1}(\lambda) = \beta$ . De maneira pictórica podemos então descrever essa mesma relação conforme a ilustração:



Fonte: Autor

Tomando um ponto de vista mais prático em relação aos PD e PI, podemos pensar na equação da onda, como temos a equação que descreve a onda, partindo dos PD, bastaria resolver a equação usando as condições iniciais desejadas e com as constantes desejadas, para que a partir de uma *causa* fosse possível analisar os *efeitos*, por outro lado, se tivéssemos dados de um comportamento local de um sistema de onda e queremos descobrir a sua *causa* teríamos que criar um modelo diferenciado que descrevesse essa singularidade.

Sobre os tipos de *causas* a determinar, podem ser usadas para classificar a natureza dos PI, podendo ter é claro, outras classificações, algumas classificações mais utilizadas são a **Natureza Matemática** (Explícito "Inversão Direta", Implícito); **Natureza Estatística** (Determinista, Estocástico); **Natureza da Propriedade** (Condição Inicial, Condição de Contorno, Termo de Fonte/Sumidouro, Propriedades do Sistema); **Natureza da Solução** (Beck) (Estimação de Parâmetros, Estimação de Função); **Tipo-1, Tipo-2 e Tipo-3** (Silva Neto, Moura Neto, 2005).

Nota-se que, no que diz respeito as duas primeiras classificações, os PI são de acordo com o tipo de solução empregada, sobre a terceira classificação é um típico caso de inversão classificado pela sua *causa* a determinar, para a Natureza da Solução fica evidenciado que é um método que se baseia em criar ou modificar um modelo, para se adequar a situação. Para a última forma, foi elaborada a partir da dimensão do modelo do

fenômeno físico (PD) e pela quantidade a ser estimada (PI), que pode ser finita “ $f$ ” ou infinita “ $\infty$ ”. Tipo-1 (PI- $f$  e PD- $f$ ), Tipo-2 (PD- $\infty$  e PI- $f$ ) e Tipo-3 (PI- $\infty$  e PD- $\infty$ ).

Para a matemática os PI são colocados como problemas mal-postos, pois para Hadamard, os problemas bem-postos devem satisfazer as seguintes condições:

- I) Existência - Existe solução;
- II) Unicidade - A solução é única;
- III) Estabilidade - A solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada.

Assim qualquer problema que não satisfaça qualquer uma dessas condições é classificado como mal-posto.

Os PI se tornaram uma grande nova área da ciência, visto que as suas aplicações são de grande utilidade para a sociedade no que diz respeito a qualidade de vida (empregados para o estudo na medicina, por exemplo tem aplicações nas ressonâncias magnéticas, ultrassom e tomografia computadorizada, a saber os problemas envolvendo medicina, ora podem ser PD ora podem ser PI), na ciência (construção de aparatos tecnológicos e softwares mais elaborados, como por exemplo para a reconstrução de imagens, bem como uma excelente ferramenta de estudo de fenômenos das mais diversas origens e das mais variadas dimensões, como na geofísica, que auxilia em estudos sobre o petróleo, na transferência de calor, que estão dentro dos PI clássicos, como também no aprimoramento das previsões do tempo), econômica (devido ao aprimoramento de algumas técnicas), social, política e militar (nesse contexto contém aplicações de PIs e PDs) (Campos Velho *et. al.* 2000). Entre muitas outras áreas.

Existem diversas maneiras de solução de PI, algumas delas mais utilizadas são:

- I) Inversão direta;
- II) Decomposição em valores singulares;
- III) Mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados);
- IV) Métodos de regularização;
- V) Métodos variacionais;
- VI) Outros (molificação, métodos *bayesianos*. filtros digitais, redes neurais, etc.)

#### 4. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR

Neste capítulo serão apresentados alguns métodos numéricos para a solução da equação do calor.

A distribuição de temperatura, caso transiente, em uma barra, é modelada pela conhecida Equação do Calor (Eq 14). (Incropera, 2017, p. 53).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

Onde  $T$  é a temperatura ( $^{\circ}C$ );

$k_x, k_y, k_z$  são as condutividades térmicas em cada sentido (em  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ );

$t$  é o tempo (s).

Como a face lateral da barra é isolada, pode-se considerar que os gradientes térmicos na direção X são muito maiores do que os gradientes nas direções Y e Z. Assim, a Eq. (14) pode ser escrita em apenas uma dimensão, como na Eq. (15).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (15)$$

Dessa forma, o modelo proposto para o problema é composto pela Eq. (15), com as condições de contorno de primeira espécie, conhecidas como condições de Dirichlet, Eqs (16 e 17).

$$T(0,t) = T_1(t) \text{ para } t > 0 \quad (16)$$

$$T(L,t) = T_2(t) \text{ para } t > 0 \quad (17)$$

Os dados das condições de contorno, funções  $T_1(t)$  e  $T_2(t)$ , foram obtidos experimentalmente. Para inseri-los no algoritmo do Problema Direto, foi necessário ajustar esses dados através do Método dos Mínimos Quadrados, utilizando um polinômio de terceiro grau, conforme ilustra a Eq. (18).

$$T_1(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (18)$$

Procedimento semelhante foi adotado para a condição inicial, também obtida experimentalmente que é dada pela Eq. (19)

$$T(x,0) = f(x) \text{ para } 0 < x < L. \quad (19)$$

Onde  $f(x) = b_1 t + b_0$ .

#### 4.1 MÉTODOS NUMÉRICOS – SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

Os métodos numéricos são ferramentas muito úteis na Matemática, particularmente na Matemática Aplicada, visto que tornam possíveis as soluções de problemas não lineares, com coeficientes e condições de fronteira variáveis, cuja solução analítica é inviável. Em termos de precisão, as soluções numéricas podem ser aproximadas das soluções exatas, mediante a rarefação de malhas de discretização. Nesse trabalho se usará o Método das Diferenças Finitas para o PD e o Método de Procura em Rede para o PI.

Nesse trabalho, a transferência do calor foi considerada unidirecional, em uma barra estacionária, de comprimento  $L$ . Assim, o domínio espacial do problema é  $0 \leq x \leq L$ , o qual foi discretizado com  $n$  intervalos de comprimento  $\Delta x$  (malha espacial). Dessa forma, pode-se escrever o domínio espacial como um vetor, como apresentado na Eq. (20).

$$x[i] = (i - 1)\Delta x, \text{ com } i = 1, \dots, (n + 1) \quad (20)$$

O Método das Diferenças Finitas consiste em escrever a EDP na forma de aproximações discreta das derivadas, obtidas por truncamento da Série de Taylor, para valores pontuais. De modo geral, tem-se:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} \quad (21)$$

Adotando então  $h = \Delta x$ , agora de forma aproximada, porém finito, podemos escrever:

a) Diferença Finita Progressiva:

$$u'_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad (22)$$

b) Diferença Finita Central:

$$u_i'' \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \quad (23)$$

c) Diferença Finita Regressiva:

$$u_i' \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (24)$$

Onde:

$$h = \frac{x_n - x_1}{n - 1}$$

$$x_i = x_1 + (i - 1)h$$

$$u_{i+1} = u(x_i + h)$$

$$u_i = u(x_i)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h)$$

Três esquemas de interpolação temporal são usuais no Método das Diferenças Finitas para a solução do problema direto, da equação do calor: **Método Implícito**, **Método Explícito** e o **Cranck-Nicholson**, descritos a seguir.

#### 4.1.1. Método Explícito

O esquema explícito é de fácil implementação e consiste em discretizar a EDP de tal forma que todos valores de  $T(x,t)$  da iteração temporal presente, sejam obtidos *explicitamente* de valores da iteração temporal anterior.

Para a equação do calor unidimensional, particularmente, as derivadas tem a forma das Equações (25) e (26):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (26)$$

Logo pode-se reescrever a equação Eq. (15) da seguinte maneira:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (27)$$

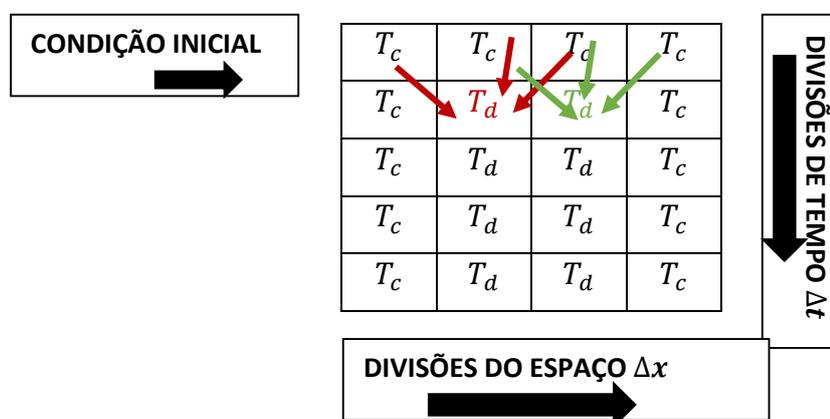
Para determinar  $T_i^{k+1}$  que é o único fator desconhecido, basta isolá-lo obtendo-se a Eq. (28):

$$T_i^{k+1} = \omega T_{i+1}^k + (1 - 2\omega)T_i^k + \omega T_{i-1}^k \quad (28)$$

Onde  $\omega = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ .

De forma mais visual, é possível explicar o método explícito, pelo seguinte esquema, onde  $T_c$  são temperaturas já conhecidas, ou seja as condições de contorno, não precisando ser necessariamente iguais, e  $T_d$  são as temperaturas desconhecidas as quais queremos calcular:

Quadro 1 - Esquema explícito



Fonte: Autor

O esquema de flechas acima se repete para a formação de cada nova linha, uma vez as primeiras temperaturas desconhecidas terem sido calculadas.

Para que o método seja estável é necessário que  $\omega \leq \frac{1}{2}$ .

#### 4.1.2. Método Implícito

O esquema implícito, ao contrário do explícito, é incondicionalmente estável. Salientando que essa estabilidade não é diretamente relacionada a precisão do método, pois, a precisão a qual deseja-se alcançar depende de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  e das condições de fronteira. Também vale dizer que esse método converge para a solução analítica da EDP (se existir), se  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , não importando a razão entre os mesmos.

Para esse método o modelo a ser utilizado para implementação, utilizando-se ainda das Diferenças Progressivas para a parte temporal e as Diferenças Centrais, para a segunda derivada na parte espacial, porém agora, a representação da derivada segunda se dará por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \quad (30)$$

Logo a equação do calor será representada por:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \quad (31)$$

Onde o que queremos calcular é  $T_i^k$ , então isolando-o na equação e assumindo  $\omega = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ , obtemos:

$$T_i^k = -\omega T_{i+1}^{k+1} + (1 + 2\omega)T_i^{k+1} - \omega T_{i-1}^{k+1} \quad (32)$$

Logo como pode-se notar na equação acima, não se consegue calcular de forma direta  $T_i^k$ , pois, dependemos de várias incógnitas, então esse método, nos retorna um conjunto de equações algébricas lineares, em cada iteração temporal.

Então considerando  $0 \leq i \leq \gamma$ , pode-se notar que tem-se  $\gamma - 1$ , equações simultâneas.

$$(1 + 2\omega)T_1^{n+1} - \omega T_2^{n+1} = T_1^n + \omega g_0(t_{n+1}) \text{ para } i = 1 \quad (33)$$

$$-\omega T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\omega)T_i^{n+1} - \omega T_{i+1}^{n+1} = T_i^n \text{ para } 2 \leq i \leq \gamma - 2 \quad (34)$$

$$(1 + 2\omega)T_{\gamma-1}^{n+1} - \omega T_{\gamma-2}^{n+1} = T_{\gamma-1}^n + \omega g_1(t_{n+1}) \text{ para } i = \gamma - 1 \quad (35)$$

Fazendo algumas simplificações nas equações a cima, pode-se reescrever o sistema, na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \lambda_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \lambda_3 & \beta_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_i & \lambda_i & \beta_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{\gamma-2} & \lambda_{\gamma-2} & \beta_{\gamma-2} & T_{\gamma-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{\gamma-1} & \lambda_{\gamma-1} & T_{\gamma-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{\gamma-2} \\ T_{\gamma-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{\gamma-2} \\ s_{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Onde:

$$\sigma = \beta = -\omega$$

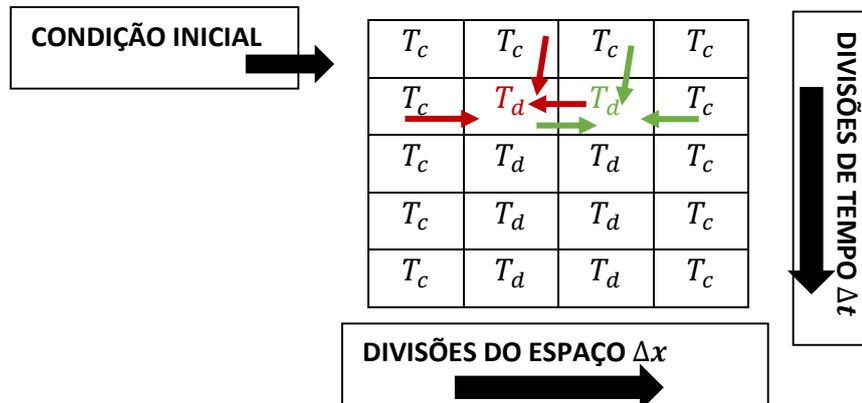
$$\lambda = (1 + 2\omega)$$

$T_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, \gamma - 1$  são temperaturas desconhecidas e  $s_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, \gamma - 1$  são temperaturas conhecidas.

Basta então implementar a solução do sistema Eq. (36), obtendo-se as temperaturas na direção X para cada iteração temporal.

De forma mais visual, podemos explicar o método implícito, pelo seguinte esquema, onde  $T_c$  são temperaturas já conhecidas, ou seja as condições de contorno, não precisando ser necessariamente iguais, e  $T_d$  são as temperaturas desconhecidas as quais queremos calcular:

Quadro 2: Esquema Implícito



Fonte: Autor

O esquema de flechas acima se repete para a formação de cada nova linha, uma vez as primeiras temperaturas desconhecidas terem sido calculadas.

#### 4.1.3. Método De Crank-Nicolson

Este método foi elaborado no século XX, por Jhon Crank e Phyllis Nicolson. Esse método usa da discretização da parte temporal da equação as diferenças centradas e da parte espacial, pelas médias das diferenças centrais nos instantes de tempo  $n$  e  $n + 1$ , além de avaliar a EDP no ponto  $(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) = (i\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t)$  (FERREIRA; QUEIROZ; MANCERA, 2007).

Em resumo, mescla elementos dos métodos implícitos e explícitos. O método é incondicionalmente estável para as equações de difusão, mas, em soluções aproximadas, quando a razão do tempo pelo espaço, for significativamente grande, geralmente superior a  $\frac{1}{2}$ , ocorrerá oscilações significativas.

Aplicando o método para a parte temporal da equação, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (37)$$

Já para a parte espacial, que é então dada pelas médias entre as aproximações de tempos  $n$  e  $n + 1$ , teremos:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{2\Delta x} [(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})] \quad (38)$$

Logo para a EDP do calor, ficaremos com:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2\Delta x} [(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})] \quad (39)$$

Isolando  $T_i^{n+1}$ , e assumindo  $\omega = \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2}$ , podemos escrever a igualdade acima como:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \omega(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + \omega(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) \quad (40)$$

Este método gera um sistema de equações semelhante ao método implícito.

## 4.2. PROBLEMA INVERSO: PROCURA EM REDE

No presente trabalho, foi utilizado o Método de Procura em Rede (SILVA NETO, 2005) como algoritmo de procura de parâmetros (Problema Inverso). O Algoritmo consiste na estimativa dos valores da difusividade, execução do problema direto e comparação da distribuição de temperatura calculada nos domínios espacial e temporal, com os dados experimentais. A estimativa que apresentar o menor erro, no sentido dos mínimos quadrados, é um potencial valor sub-ótimo do parâmetro a determinar. O algoritmo consiste nos seguintes passos (BORGES *et. al.*, 2008):

**1º Passo:** Estimar um intervalo de valores de  $\alpha$ ,  $I_1 = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  de existência da solução, considerando que nele esteja a difusividade ótima. Dividir o intervalo em  $n - 1$  subintervalos, de tal forma que  $\Delta\alpha = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{n-1}$ ;

**2º Passo:** Fazer o cálculo do Problema Direto com o valor de  $\alpha$  estimado, o que dá soluções  $T(x, t)$  e particularmente, a temperatura estimada  $T_{est} = (x_j, t)$ , onde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  são os pontos monitorados e  $t$  é o tempo em segundos;

**3º Passo:** Fazer o cálculo das diferenças entre os dados experimentais e os calculados da seguinte maneira:

$d_i = \sum_{j=1}^n \sum_{t=0}^{t_f} (T_{est}(t) - T_{exp}(t))^2$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $T_{exp}$  são temperaturas obtidas de forma experimental e  $t_f$  o tempo final;

**4º Passo:** Identificar  $d(d_{\min})$  de menor valor, entre todas as diferenças  $d_i$ . Esta diferença é o  $\alpha_{ot1}$  para o intervalo  $I_1$ , onde  $\alpha_{ot1}$  é o valor ótimo de  $\alpha$ ;

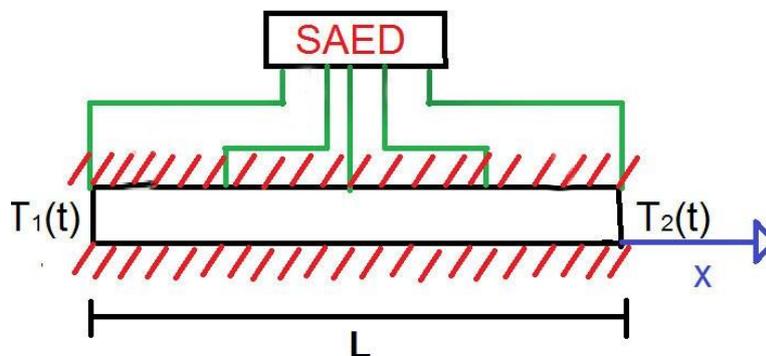
**5º Passo:** Para melhorar a solução, é necessário fazer um refinamento do intervalo  $I_1$ . Para isso é necessário definir um novo intervalo,  $I_2 = [\alpha_{min2}, \alpha_{max2}]$ ,  $\alpha_{min2} = \alpha_{ot1} - \Delta\alpha^1$  e  $\alpha_{max2} = \alpha_{ot1} + \Delta\alpha^1$ ;

**6º Passo:** Refazer os passos de 2 a 5, estimando tantos  $I_m$   $m = 1, 2, 3, \dots$ , de tal forma que  $|d_{\min}^{i+1} - d_{\min}^i| < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é o parâmetro do critério de parada.

## 5. MÉTODOS EXPERIMENTAIS

Os dados de temperatura foram coletados com o auxílio de um Sistema de Aquisição Eletrônica de Dados (SAED) (Figura - 5), equipamento elaborado pelo graduando em Ciência da Computação da UFFS João Vitor Bruniera Labres com orientação do professor mestre Adriano Sanick Padilha, equipamento esse que dispunha de cinco sensores de temperatura, em experimentos realizados no Laboratório de Educação Matemática da UFFS/Chapecó.

Figura 1 – Esquema experimental



Fonte: Autores.

Os experimentos foram realizados com três amostras cilíndricas do mesmo material, conhecido comercialmente como aço, todas com diâmetro de 0,029 m e comprimentos 0,11 m, 0,138 m e 0,19 m. O seguinte protocolo foi desenvolvido para obtenção dos dados:

1. Isolamento térmico: as barras foram isoladas termicamente com *isomanta* térmica de alumínio revestindo a amostra na superfície lateral, conforme a Figura 2, após a amostra ter recebido esse isolamento a mesma foi revestida com uma espessa camada de isopor conforme a figura 3, e por último foi revestida novamente com a *isomanta* térmica conforme a Figura 4;

Figura 2 – Amostra com o primeiro isolamento



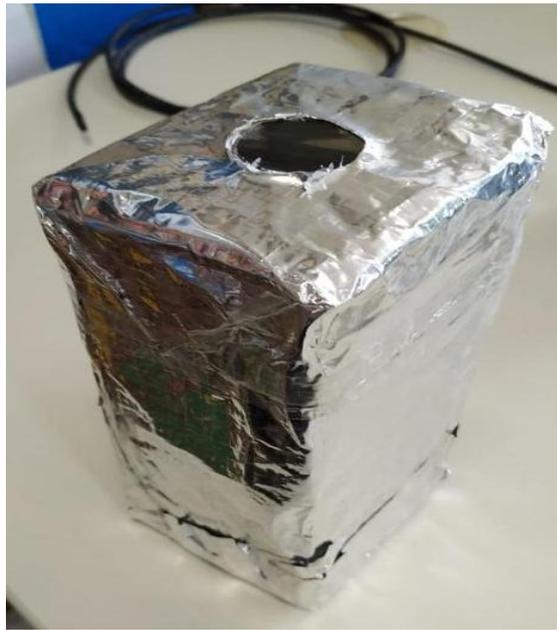
Fonte: Fernando Strapazzon

Figura 3 – Amostra com o segundo isolamento em isopor



Fonte: Fernando Strapazzon

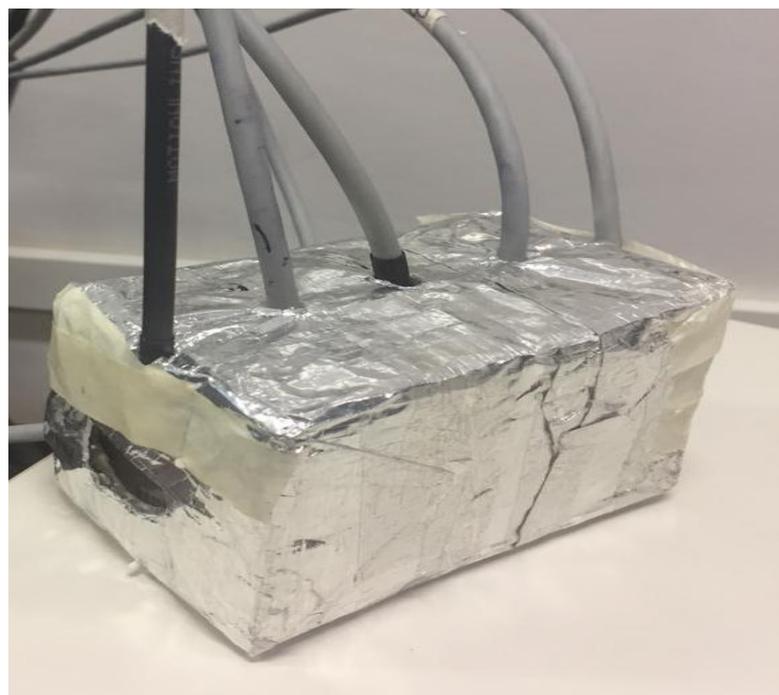
Figura 4 – Amostra totalmente isolada



Fonte: Fernando Strapazzon

2. Marcação dos pontos de medida: foram tomadas medidas para:  $x = 0\text{ m}$ ;  $x = L/4\text{ m}$ ;  $x = L/2$ ;  $x = 3L/4$  e  $x = L$ .
3. Instalação dos sensores: os sensores foram instalados e fixados nos ponto de medida conforme figura 1.

Figura 5 – Amostra com sensores acoplados



Fonte: Fernando Strapazzon

4. Instalação da fonte de calor: uma fonte de calor transiente (ferro elétrico) conforme a figura 6 foi fixada em  $x = L$ .

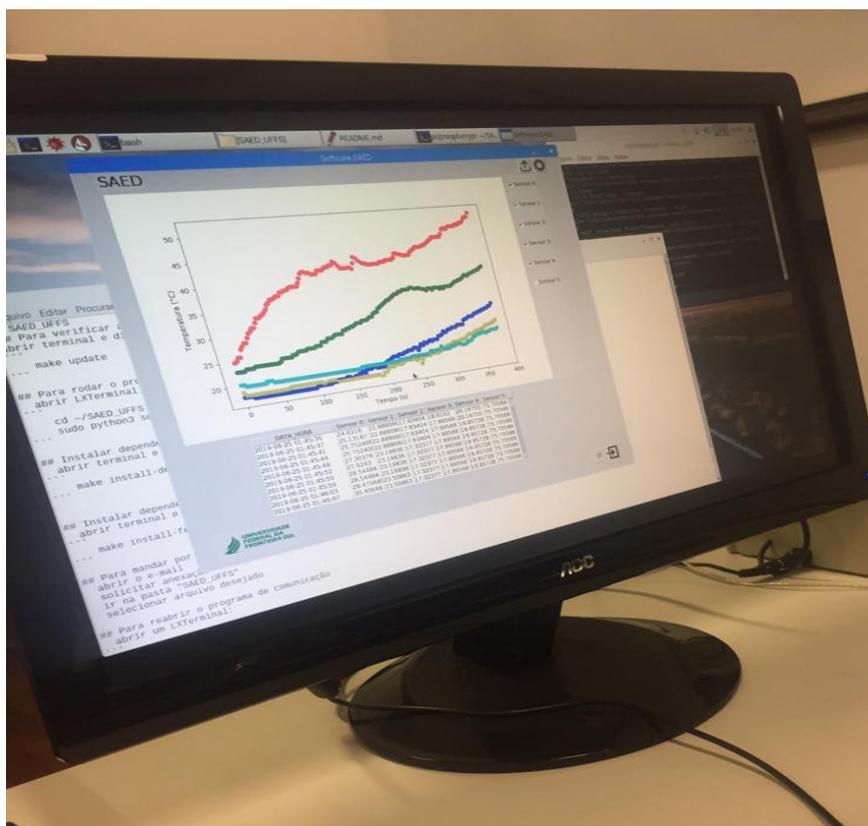
Figura 6 – Aquecimento de uma extremidade da amostra



Fonte: Os autores

5. Acionamento do SAED e fonte e monitoramento: a fonte foi acionada por conexão com o sistema elétrico e as medições de temperatura e tempo pelo teclado conectado ao SAED. Os experimentos foram monitorados com a leitura das medições em vídeo, (Figura 7).

Figura 7 – Monitoramento de dados, saída de dados real.



Fonte: Os autores

6. Dados brutos: os dados de  $T(x,t)$  foram registrados em arquivo, na forma de matriz, na qual as colunas correspondem aos sensores e as linhas às temperaturas relativas a tempos, a cada intervalo de 3 s.
7. Calibração e correção: cada sensor foi calibrado anteriormente, medindo a temperatura juntamente com um termômetro calibrado, no mesmo corpo. A diferença entre as medidas é uma característica de calibração específica para cada sensor, a qual permite o ajuste na medida final. Assim, cada medida foi ajustada conforme as medidas de calibração.
8. Tratamento dos dados: dentre toda a matriz  $T(x,t)$  de dados, foram escolhidos apenas cinco linhas para utilização no PI:  $t = 0$  s;  $t = Tf/4$  s;  $t = Tf/2$  s;  $t = 3Tf/4$  s e  $t = Tf$  s, sendo  $Tf$  o tempo final.

A Figura 1 ilustra o esquema de funcionamento do SAED. Os fios em verde são os sensores ligados na barra que serão submetidos a testes. Os traços em vermelhos representam o isolamento da barra.  $T_1(t)$  e  $T_2(t)$  são as temperaturas medidas nas

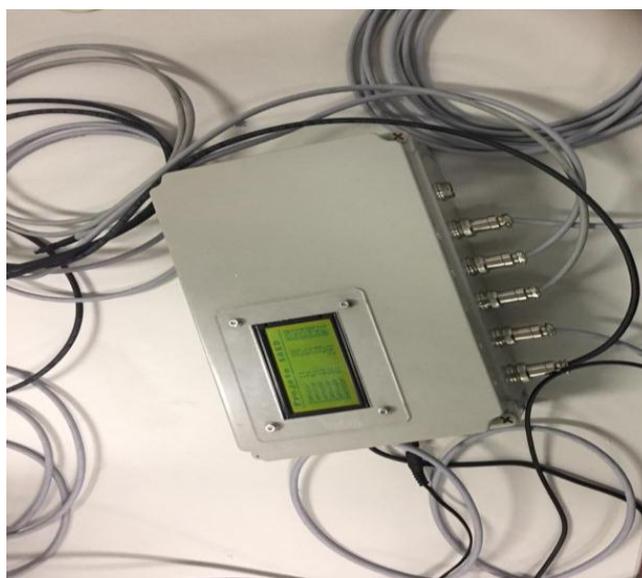
extremidades da barra, sendo que na extremidade  $x = L$  a barra será aquecida por uma fonte de calor. Pois a energia térmica passará do ponto inicial até o final.

Figura 8 – Raspberry



Fonte: Os autores

Figura 9 - Placa exteriormente com os sensores



Fonte: Os autores

Figura 10 – Placa interiormente



Fonte: Pedro Borges

Figura 11 – Bancada experimental



Fonte: Os autores



## 6. DETERMINAÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA

Para a resolução do problema direto foi escolhido o esquema implícito, pois apresentou o menor tempo computacional comparativamente aos esquemas explícito e Cranck-Nicolson, utilizando-se algoritmo em *SCILAB*, com 800 iterações temporais e 52 iterações espaciais. Além disso, o esquema implícito não apresenta os problemas de convergência, característicos desses esquemas, verificando assim o que a própria literatura aponta na comparação dos métodos.

Cada barra, do mesmo material porém com comprimentos diferentes, foi submetida aos experimentos com diferentes intervalos de tempos, conforme são apresentados na Tabela 1. A repetição das medidas com essas variações tem a função de minimizar os erros de procedimentos experimentais (problemas de instalação, posição e aderência de sensores, problemas de isolamento térmico) e de precisão (problemas de calibração, oscilações da energia elétrica, intervenção de campos elétricos ou magnéticos no sistema), relativamente pequenos, porém comuns nessa forma de medição. A avaliação individual desse tipo de erro é praticamente impossível de ser realizada individualmente, mas pode ser, ao menos, discutida a sua magnitude com o recurso de repetições e médias. A Tabela 1 apresenta os comprimentos e tempos de experimentos utilizados para a solução do problema direto. Na mesma tabela, são apresentados os valores obtidos pelo problema inverso para a difusividade térmica do material das barras (terceira coluna,  $\alpha_{cal}$ ), a média desses valores e o respectivo desvio padrão.

Tabela 1 – Dados experimentais e resultados do cálculo da difusividade

$L$ da barra ( $m$ )	Tempo de experimento ( $s$ )	$\alpha_{cal} \times 10^{-6}$ ( $m^2/s$ )	<i>Desvio padrão</i>
0,19	1464	4,9	
0,138	714	3,1	
0,11	786	4,3	
Difusividade média		4,1	0,748331

Fonte: o autor.

Na Tabela 2 são apresentados alguns valores da difusividade térmica de alguns aços. Observa-se que existem diferenças, porém os valores estão compreendidas entre  $10^{-6}$  e  $10^{-5} m^2/s$ . O objetivo de comparar esses dados com os calculados é apenas de verificar se esses tem a mesma ordem de grandeza, o que de fato ocorreu. Os valores das

difusividades calculadas e da literatura não devem, obrigatoriamente, coincidir, pois não se conhece com precisão a composição do aço das amostras.

Tabela 2 – Dados da literatura

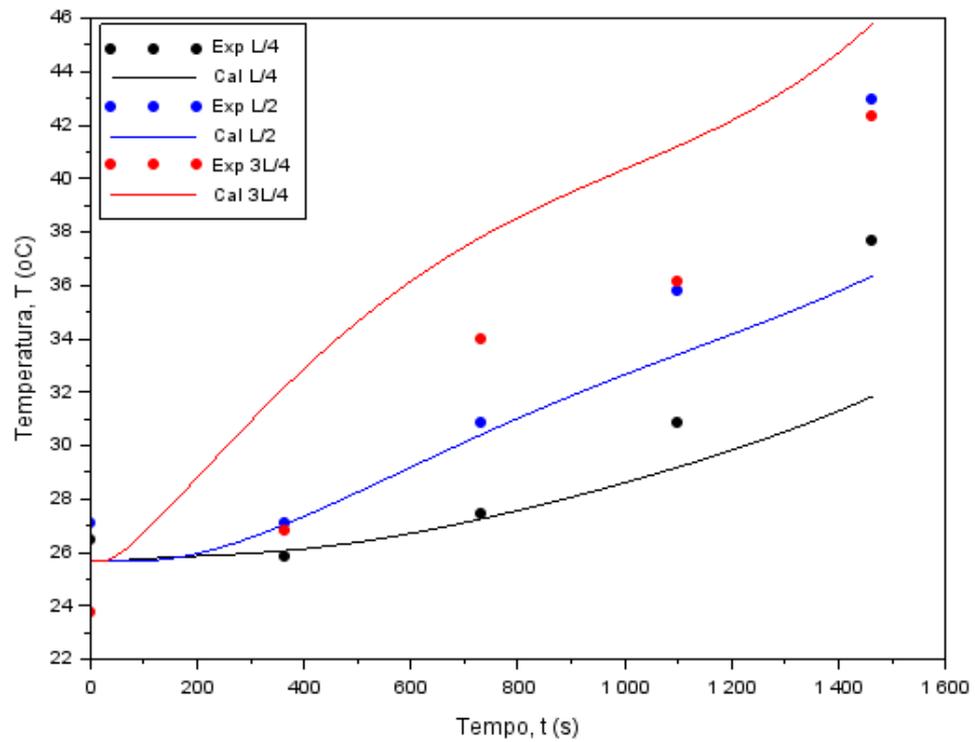
Aços	$\alpha$ <i>Difusividade térmica</i>
Aço carbono Não-ligado	$1,77 \times 10^{-5}$
Aço carbono AISI	$1,88 \times 10^{-5}$
Aço carbono Carbono-silício	$1,49 \times 10^{-5}$
Aço carbono Baixo cromo	$1,09 \times 10^{-5}$
Aço inoxidável AISI 347	$3,71 \times 10^{-6}$

Fonte: (Incropera, 1992, p. 424)

Nas Figuras 13, 14 e 15 pode-se observar a distribuição de temperatura calculada e experimental em função do tempo, nas posições  $x=0, L/4, L/2, 3L/4$  e  $L$ , nas três barras, para os valores de difusividades que minimizaram as diferenças  $|\alpha_{cal} - \alpha_{exp}|$ . Nos casos mais extremos (Figura 14), em alguns instantes de tempo e para algumas curvas, essa diferença chega até  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , correspondendo a aproximadamente  $10\%$  da temperatura medida. Apesar de ser um valor relativamente alto, deve-se considerar que essa discrepância não ocorre de modo geral e que o critério dos mínimos quadrados, utilizado para a escolha do valor ótimo no intervalo, leva em conta a diferença global das três curvas. Portanto, qualquer outra distribuição de temperatura apresentará diferenças maiores do que essas apresentadas nas figuras.

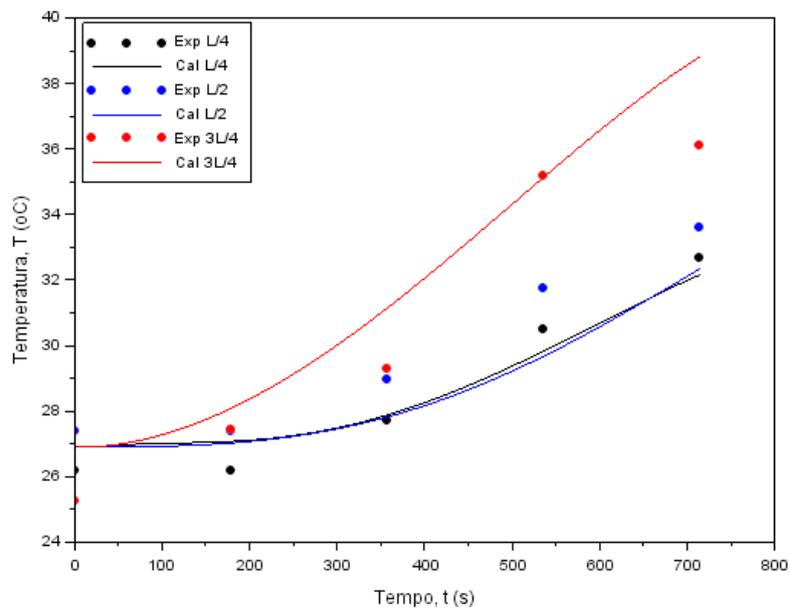
As possíveis (e prováveis) imprecisões nas medidas relativizam as discrepâncias entre as distribuições de temperatura calculadas e experimentais. Ou seja, não se pode esperar coincidência entre elas, mas apenas uma coerência entre as tendências de crescimento.

Figura 13 – Distribuição de calor na barra maior:  $L = 0,19$  m

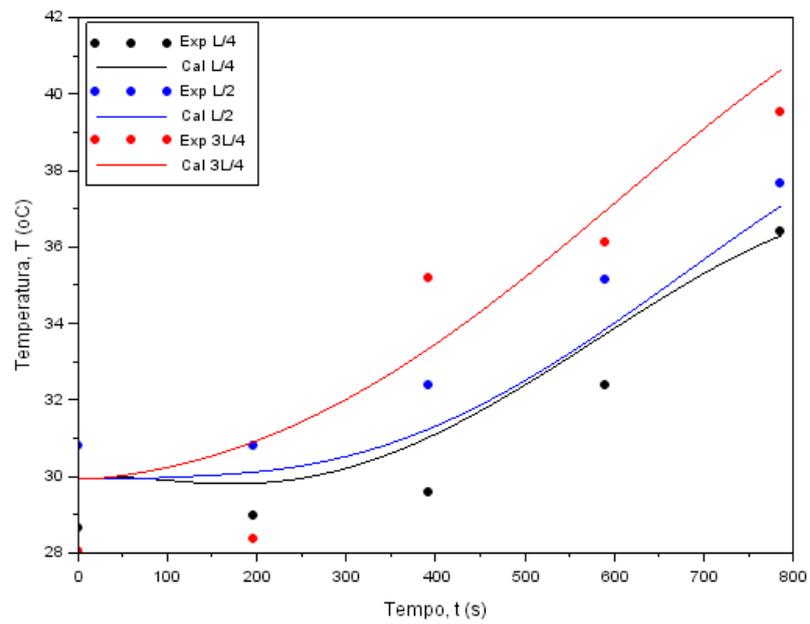


Fonte: Os autores

Figura 14 – Distribuição de calor na barra média :  $L = 0,138$  m



Fonte: Os autores

Figura 15 – Distribuição de calor na barra menor :  $L = 0,11$  m

Fonte: Os autores

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a descrição da execução do método de determinação da difusividade pode-se estabelecer as seguintes considerações:

1. *Quanto à precisão do método:* a difusividade estimada para o material das barras é da mesma ordem de grandeza da difusividade dos aços disponível na literatura, o que indica a coerência do método. O desconhecimento das propriedades do aço das barras inviabiliza uma comparação mais precisa. Por outro lado, pode-se discutir a precisão do método considerando suas próprias imprecisões, com o caso das medidas. Desse ponto de vista, o resultado de  $4,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  deve ser considerado com um desvio padrão de  $0,748331 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .
2. *Quanto a viabilidade de execução do método:* o tempo de execução é em torno de 1 h, principalmente pela dificuldade de isolar termicamente a barra. Uma vez que os dados estejam tabelados, pode-se implementar algoritmos computacionais para selecionar aqueles úteis para o modelo, e executar o PD e o PI. O tempo dessa última fase é menor do que um minuto. Os materiais de isolamento são de baixo custo e ainda podem ser reutilizados. O SAED tem um custo significativo, mas não se deteriora facilmente com o uso.
3. *Quanto aos métodos numéricos:* O esquema implícito mostrou-se eficiente na solução do Problema Direto, tanto em tempo como precisão (sem difusão numérica e problemas de convergência). O algoritmo de Procura Rede mostrou-se eficiente, visto que a procura foi restrita a apenas um parâmetro. O critério de escolha da melhor difusividade – o menor valor do quadrado das diferenças entre temperaturas calculadas e medidas em três posições e cinco instantes de tempo – é um critério global, já que não limita-se a apenas um ponto ou instante de tempo. Mostrou-se eficiente, visto que, mesmo reduzindo o intervalo de procura, não apresentou melhorias no valor da difusividade térmica.
4. Possibilidade de melhorias do método: a precisão do método depende fortemente da precisão das medidas, seja nos procedimentos ou na calibração dos sensores. A execução de mais repetições, desde que apresentem baixo desvio padrão, pode minimizar possíveis erros de medida.

Mesmo com as limitações impostas, podemos considerar a solução como satisfatória, para possíveis futuros trabalhos pode-se pensar em formas mais eficientes para aquisição de dados, para que os resultados fiquem ainda mais precisos e fidedignos.

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

LAMBERTS, R.; DUTRA, L.; PEREIRA, F.O.R. Eficiência energética na arquitetura. São Paulo: **PW Editores**, 188 p. 1997..

INCROPERA, F. P.; WITT D. P. Introduction to Heat Transfer. **John Wiley & Sons, Inc.** New York, v. 19. 1996. 704 p.

PINTO, J. N. O. ; ROUVER, A. N.; BETINI, E. G.; CORREA, L. A.; ORLANDO, M. T. D.1 ; PASSOS, C. A. C, Descrição matemática do Método Flash para determinação da difusividade térmica. **Blucher Proceedings** VI Encontro Científico de Física Aplicada. v. 2. n.1. 2015.

**Significados BR**, Significado de Energia, Disponível em :

<<https://www.significadosbr.com.br/energia>> . Acessado em: 25/02/2019

GUSTAVSSON, M.; GUSTAFSSON, S. E. On the use of transient plane source sensors for studying materials with direction dependent properties. In: DINWIDDIE, R. B. (Ed.). **Thermal Conductivity 26 / Thermal Expansion 14**. Destech Publications Inc., p. 367-377, 2005.

ENGL, H. W., HANKE, M. NEUBAUER, A., **Regularization of Inverse Problems: Mathematics and its Applications**, Kluwer Academic Publishers. 1996. P. 1-295.

NETO, A. J. S. NETO, F. D. M. Escolha de Modelos Problemas Inversos em Engenharia. – Mini-curso, Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, SBMAC, Santos.2000.

BECK, J.V., BLACKWELL, B. ST. CLAIR, C. R. JR. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. Wiley Interscience publication. 1985.

VELHO, H. F. C. **PROBLEMAS INVERSOS: CONCEITOS BÁSICOS E APLICAÇÕES**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Lab. de Computação e Matemática Aplicada. Artigo PDF *WEB*. Disponível em:  
<<http://www.lac.inpe.br/~haroldo/CursoPI/CursoPI.pdf>>. Acessado em 24/02/19.

NASCIMENTO, J. D. S. M. SILVA, T. D. **Método de diferenças finitas: aplicação na equação do calor**. Trabalho de conclusão de curso – TCC. UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ PRO-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO. Curso de Licenciatura em Matemática. 2013.

FERREIRA, V. G. QUEIROZ, R. A. B. MANCERA, P. F. A. Método das Diferenças Finitas Aplicado à Dinâmica dos Fluídos. Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP.

CHENG, A. CHENG, D. T. . Heritage and early history of the boundary element method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**.v. **29**. p.268–302. 2005.

NETO, A. J. S. NETO, F. D. M. Problemas inversos: conceitos fundamentais e aplicações. Rio de Janeiro: UERJ. 172 p. 2005.

SPECHT, L. P. BORGES, P. A. P. HELLMANN, L. “Determinação das propriedades térmicas de concretos asfálticos com diferentes tipos de ligantes”; **Rev. Tecnol.** Fortaleza. v. 29. n. 2. p.198-210.2008.

CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. **Proc. Camb. Phil. Soc.** v. 43 p. 50–67. (1947).

THOMAS, J. W. (). Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Col: Texts in Applied Mathematics. **Springer-Verlag**. v. 22. 1995.O exemplo 3.3.2.

CAMPOS VELHO, H. F., SILVA, J. D. S., NOWOSAD, A. G. & RIOS NETO, A., 2000, **Experiences with neural network in inverse problems**, Congresso Brasileiro de Matemática Aplicada e Computacional - Minisymposium on Inverse Problems on Medicine, Engineering, and Geophysics

NAGASAKA, Y.; NAGASHIMA, A. **Absolute measurement of the thermal conductivity of electrically conducting liquids by the transient hot-wire method**. Journal of Physics E: Scientific Instruments, vol. 14, n° 12, p. 1435-1440, 1981.

CZICHOS, H.; SAITO, T.; SMITH, L. E.. **Springer handbook of metrology and testing**. 2 ed. Springer Handbooks, 2011, 1500p.