BÁRBARA CRISTINA PASA

A NOÇÃO DE INFINITÉSIMO NO ESBOÇO DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO: POR UMA ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de doutor em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pasa, Bárbara Cristina
A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma abordagem de interpretação global das propriedades figurais / Bárbara Cristina Pasa ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2017.
311 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Esboço de curvas. 3. Registros de representações semióticas. 4. Interpretação global. 5. Noção de infinitésimo. I. Moretti, Méricles Thadeu. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma interpretação global de propriedades figurais"

Tese submetida ao Colegiado do Curso de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM 14 de dezembro de 2017

Dr. Méricles Thadeu Moretti (Orientador - PPGECT/UFSC): ________________
Dra. Célia Finck Brandt (Examinadora - PPGE/UEPG): ________________
Dra. Lisani Geni Wachholz Coan (Examinadora - IFSC/Florianópolis): ________________
Dra. Cintia Rosa da Silva (Examinadora - UFSC/Blumenau): ________________
Dr. David Antônio da Costa (Examinador Suplente - PPGECT/UFSC): ________________

Prof. Dr. José Francisco Custódio Filho
Coordenador do PPGECT

____
Bárbara Cristina Pasa
Florianópolis, Santa Catarina, 2017

Dedico este trabalho aos professores educadores que, no exercício de sua profissão, *fazem a diferença* na construção de uma sociedade menos desigual e vivem da esperança de valorização e vida digna.

AGRADECIMENTOS

Quem caminha sozinho pode até chegar mais rápido, mas aquele que vai acompanhado com certeza chegará mais longe e terá a indescritível alegria de compartilhar, alegria esta que a solidão nega a todos que a possuem…
(Clarice Lispector)

Sozinhos, nada somos... Tudo o que sonhamos, planejamos, executamos, construímos, sempre tem um pouco de cada um que caminha ao nosso lado, que nos inspira, aconselha, auxilia, empurra, puxa, derruba, acalenta, acolhe, liberta, solta, ama... Ou que apenas caminha... Na construção do meu Ser e na tese elaborada durante o doutorado, tem um toque de cada um que caminhou ao meu lado, sem os quais nada seria do jeito que é... E a cada um, minha profunda gratidão.

Gratidão, primeiramente, à Força Maior, criadora e impulsionadora de tudo, que para mim tem o nome de Deus, pela oportunidade desta existência, a qual me proporciona experienciar tantos aprendizados e de infinitas formas. Este doutorado é uma destas experiências, desafiadora, impulsionadora, enriquecedora, que me possibilitou não apenas escrever uma tese, mas iluminou os caminhos na busca e construção de mim mesma. Gratidão à Sua presença nesta caminhada, confortando, consolando, iluminando e dando forças!

O doutorado, contudo, não teria sido possível não fossem os familiares, amigos, colegas, parceiros.

Profunda gratidão...

Ao meu orientador Méricles Thadeu Moretti, por aceitar o desafio de orientar este trabalho e fazê-lo com tamanha sabedoria, leveza e atenção, sempre apontando o caminho a ser trilhado com tranquilidade e confiança, sem cobranças, permitindo a construção da autonomia e respeitando meu espaço e tempo!

Aos meus amados pais, Ivo e Delires e irmã Suelem, pela educação, orientação, acolhimento, amparo, compreensão, testemunho e amor. Gratidão pelo incentivo a esta conquista, pelas caronas para a rodoviária ou aeroporto de Chapecó, pelas comidinhas gostosas sempre a minha espera, pelas roupas cheirosas e amorosamente lavadas... Pela espera... Pela paciência... Por serem minha base... Amo vocês!

Ao meu querido companheiro André, pelo amor, incentivo, paciência, companheirismo, inspiração e, principalmente, por me dar o maior presente: nosso filho.

Aos professores do PPGECT que, em suas disciplinas ou conversas de corredor, iluminaram caminhos ainda obscuros da pesquisa e possibilitaram um aprendizado significativo.

Aos colegas de turma de doutorado e amigos que, nas mesas de bar ou da biblioteca, aguentaram os lamentos em momentos difíceis, se solidarizaram diante das condições de realização do doutorado, dando caronas, pouso ou oferecendo um mate para aquecer o coração depois de onze horas de viagem para cursar disciplinas.

À professora Lisane Severo, que permitiu o desenvolvimento da sequência didática em suas turmas, sempre entusiasta, acolhendo a proposta e confiando no trabalho.

Aos estudantes do Colégio Estadual Professor Mantovani, que participaram da sequência didática desenvolvida, por aceitarem conhecer algo novo e se disporem fora do horário de aula.

Ao estudante do Programa Mentores, pela disposição, prontidão e interesse constante pelo aprender. Estudantes como você inspiram e motivam os professores na caminhada da docência!

Aos professores que participaram da banca de qualificação e de defesa, pelas contribuições e enriquecimento desta tese!

Aos queridos amigos Rejane e Ângelo Paludo, pela amizade, generosidade e confiança ao me possibilitarem morar um tempo em seu apartamento em Florianópolis durante uma etapa fundamental do doutorado! Gratidão imensa, vocês estão no meu coração e nas minhas orações!

À minha querida mestra Leo, pelo aprendizado e despertar! Por me auxiliar nesta caminhada me fazendo crer que *tudo está certo*!

Ao meu colega e amigo Aníbal, pela disponibilidade de organizar a tese nas normas, sempre me inspirando enquanto professor que guia e incentiva.

A todos os colegas da UFFS, especialmente aos da área da Matemática, pelo aprendizado, generosidade e compreensão em momentos de ausência.

Aos amigos, por ouvirem as lamentações e darem força! Pelos momentos de diversão e relaxamento, pela paciência e espera...

Amo todos vocês!

E conhecereis a verdade e a verdade vos libertará.
Jesus Cristo, João 8:32

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.
Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

Esboçar e compreender curvas são atividades que perpassam diversas ações e áreas da vida humana. Tais atividades permitem a representação de fenômenos e situações cotidianas, estando presentes, em âmbito escolar, no ensino fundamental, médio e superior, em diferentes disciplinas. Contudo, o cenário educacional e pesquisas na área de Educação Matemática apontam dificuldades no esboço de curvas e na compreensão do fenômeno que uma curva representa, de estudantes em todos os níveis de ensino. Visando problematizar o esboço de curvas de algumas funções no ensino médio, apresentamos um caminho alternativo e analisamos suas possibilidades e limitações relacionadas ao ensino e à aprendizagem à luz da abordagem de interpretação global das propriedades figurais da teoria dos registros de representação semiótica, preconizada por Raymond Duval. A abordagem de interpretação global é resultado de estudos realizados pelo referido autor com a função linear/afim, no sentido de analisar a congruência entre os registros algébrico e gráfico que perpassa a discriminação das unidades significativas próprias a cada registro e as transformações implícitas exigidas para a mudança de registro. Duval realizou suas análises levando em conta os parâmetros do registro algébrico da função afim e os efeitos da variação destes, no registro gráfico. No caso de funções polinomiais de segundo e terceiro graus, analisar as variações de parâmetros torna-se impraticável por conta da quantidade de possibilidades de variações. Por isso, visando manter o compromisso com a interpretação global, utilizamos como recurso as taxas de variação da função compreendidas a partir da noção de infinitésimo, sem a formalização e o rigor requeridos no trabalho com conceito de limites. Trilhamos este caminho alternativo de esboço de curvas em sala de aula com estudantes do terceiro ano do ensino médio, a partir da elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática, organizada de acordo com elementos da Engenharia Didática. As reflexões suscitadas nos permitiram concluir que o trabalho nesta perspectiva possibilita o reconhecimento de unidades básicas simbólicas, relativas à variabilidade e de unidades básicas gráficas e, mais do que isso, as conversões entre elas, sem a necessidade de obtenção da expressão algébrica da função. Compreendemos, a partir da aplicação da sequência didática e da análise dos diálogos e resoluções dos estudantes quanto às funções do discurso mobilizadas, o processo de apropriação do conhecimento pelos estudantes e os gestos intelectuais mobilizados no caminho alternativo que possibilitaram a compreensão ampla do conceito de funções no que se refere à sua variabilidade. Em relação ao ensino, evidenciamos limitações provenientes de um ensino de esboço de curvas unicamente permeado de uma abordagem ponto a ponto, a qual restringe o olhar do estudante quanto ao movimento, à transformação e ao dinamismo presentes no conceito de funções, não proporcionando a tomada de consciência das conversões entre registros de representação semióticas necessárias, tampouco dos tratamentos. Sinalizamos, desta forma, que se promova, no contexto do ensino médio, um ensino de funções e esboço de curvas em sintonia com as possibilidades de aprendizagem dos estudantes, permitindo olhares diferenciados a uma curva e ao que ela representa e, mais do que isso, um ensino que estimule a comunicação escrita e oral das conclusões na resolução de problemas matemáticos.

Palavras chave: Interpretação global. Esboço de curvas. Registros de representações semióticas. Noção de infinitésimo.

ABSTRACT

Sketching and understanding curves are activities that permeate several actions and areas of human life. Such activities allow the representation of everyday facts and situations, being present in elementary, middle and higher education, in different subjects. However, the educational scenario and research in Mathematics show the difficulties students, from all levels of education, have in delineating curves and in understanding the phenomenon that a curve represents. In order to problematize the understanding of curves of some functions in secondary education, we introduce an alternative path and analyze its possibilities and limitations, related to teaching and learning, in light of the global interpretation approach of the figurative properties of the semiotic registers of representation theory, recommended by Raymond Duval. The global interpretation approach is a result of studies carried out by the author with the linear/affine function, in order to analyze the congruence between the algebraic and graphical registers that permeate the discrimination of the significant units of each record and the implicit transformations required for the change of record. Duval performed his analyzes taking into account the parameters of the algebraic register of the affine function and the effects of their variation, in the graphic record. In the case of second and third degrees polynomial functions, analyzing the parameters variations becomes impracticable due to the amount of possible variation. Therefore, in order to maintain the commitment to the global interpretation, we use as a resource, the variation rates of the function comprised from the notion of infinitesimal, without the formalization and accuracy required in the work with limits concept. We traced this alternative path of sketching curves in the classroom with third year of high school students, from the elaboration and development of a didactic sequence, organized according to elements of Didactic Engineering. The reflections have allowed us to conclude that the work in this perspective allows the recognition of basic symbolic units, related to variability and basic graphic units and, more than that, the circulation between them, without the need to obtain the algebraic expression of the function. We understand, from the application of the didactic sequence and the analysis of the dialogues as well as the students resolutions regarding the organized functions of the speech, the process of knowledge appropriation by the students and the intellectual gestures mobilized in the alternative way that made possible the wide comprehension of the concept of functions in terms of their variability. In relation to teaching, we show limitations from teaching curves drawing permeated by a point-to-point approach, which limits the students' observation on the movement, transformation and dynamism present in the concept of functions, not providing the consciousness of the conversions among necessary semiotic registers, nor of the treatments. In this context, we suggest that, in secondary education, the teaching of functions and the sketching of curves should be promoted in harmony with the students' learning possibilities, allowing a differentiated look at a curve and what it represents and, more than that, a teaching that stimulates the written and oral communication of the conclusions in the resolution of mathematical problems.

Keywords: Global interpretation. Curves sketching. Semiotic representation record. Notion of infinitesimal.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE MOMENTOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI – Cálculo Diferencial e Integral
ED – Engenharia Didática
EM – Ensino Médio
EPM – Estudante do Programa Mentores
NCTM – National Council of Teachers of Mathematics
OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública
PIC – Programa de Iniciação Científica
PM – Programa Mentores
RT – Reta Tangente
TMV – Taxa Média de Variação
TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TVI - Taxa de Variação Instantânea
$TVI(x)$ – Taxa de Variação Instantânea
$TVI_1(x)$ - Taxa de Variação Instantânea de primeira ordem
$TVI_2(x)$ - Taxa de Variação Instantânea de segunda ordem

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática, enquanto movimento que objetiva impulsionar e sistematizar discussões sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, tornou-se um campo de estudos e pesquisas, em âmbito internacional, na primeira metade do século XX. Atualmente, as dimensões filosófica, epistemológica, histórica e cultural permeiam as diversas pesquisas desenvolvidas e em desenvolvimento no Brasil neste campo. Mais recentemente, questões relacionadas à Educação Matemática passaram a ter maior evidência no cenário escolar e acadêmico devido à crescente demanda por cidadãos com habilidades e conhecimentos científicos que lhes permitam acompanhar o desenvolvimento tecnológico e lidar com situações complexas diárias (DUVAL, 2003). O ser humano está vivendo em uma sociedade, chamada por Pozo (2002) de *sociedade da aprendizagem*, cuja cultura é definida, entre outras coisas, pela demanda por aprendizagens contínuas e massivas. Capacidades como interpretação, argumentação, reflexão, resolução de problemas da realidade, utilização de modelos matemáticos em situações diversas, e conhecimentos sobre diferentes tecnologias estão sendo cada vez mais exigidos dos cidadãos desta sociedade (POZO, 2002).

Neste cenário, a Matemática é imprescindível uma vez que estrutura inúmeras ações relacionadas a processos e fenômenos físicos das ciências naturais e humanas. A compreensão da Matemática e da sua relação com os objetos do universo material possibilitam a construção, demonstração, exploração e verificação de teorias científicas, bem como a descrição e o entendimento de processos que fazem parte do mundo físico cotidiano, permitindo, assim, o estudo de soluções viáveis do ponto de vista técnico-científico. O rigor e a precisão da linguagem matemática e sua gramática consistente e estruturada, construídas ao longo de séculos de ciência, fazem dela a base sobre a qual se originam objetos matemáticos abstratos, sendo a maior parte destes objetos não acessível perceptivamente ou instrumentalmente como por microscópio, telescópio, aparelhos de medida (DUVAL, 2003).

Em virtude da impossibilidade de acesso perceptível e instrumental a um objeto matemático, sua apreensão ocorre por meio de suas distintas representações. Por isso, foi criada, ao longo da história humana, uma variedade significativa de formas de representá-los. Contudo, uma representação não é o objeto e torna-se essencial, para a compreensão de um objeto matemático, jamais confundi-lo com suas representações (DUVAL, 2003). Estas características tornam o ensino e a aprendizagem matemática peculiares e distintos de outras áreas da ciência.

Por outro lado, mesmo com a urgência devido à demanda crescente no que tange aos conhecimentos relativos à Matemática, o contexto escolar é permeado por diversos problemas relacionados à aprendizagem dos estudantes, desafiando professores e pesquisadores. No âmbito da educação básica, os desafios podem ser percebidos nos resultados de diversos processos de avaliações nacionais e internacionais, bem como de pesquisas que apontam que, apesar dos esforços na área da pesquisa e investimentos em políticas públicas, os problemas decorrentes do processo de ensino e aprendizagem ainda são vistos na prática da sala de aula.

Neste contexto de demandas, dificuldades e peculiaridades, as *representações gráficas*, enquanto formas de comunicação com capacidade de facilitar a compreensão de fenômenos ou de situações cotidianas, são cada vez mais utilizadas, tanto diariamente, em jornais e revistas, como em pesquisas científicas nas diversas e distintas áreas do conhecimento. Por isso, no âmbito escolar, o ensino e a aprendizagem das formas de representação gráfica são primordiais. Dentre essas diversas formas, *o esboço de curvas*, enquanto imagem geométrica de uma função real de variável real é o cerne das reflexões aqui suscitadas.

De acordo com a teoria cognitiva de Raymond Duval, base teórica desta tese, a compreensão de um objeto matemático está vinculada à articulação de diferentes registros de representação semiótica deste objeto. Nesta perspectiva, compreender as dificuldades que grande parte dos estudantes demonstra na percepção de um mesmo objeto sob diferentes formas de representação, nos instiga a pensar o ensino e a aprendizagem da Matemática de forma a valorizar as representações semióticas e, mais do que isso, as conversões entre elas.

Especificamente para o esboço de curvas, pesquisas enfatizam que as dificuldades de aprendizagem se originam de um enfoque, praticamente único, dado no ensino, à construção de gráficos a partir da abordagem “ponto a ponto”, a qual não permite a compreensão da operação cognitiva de conversão entre representações semióticas da função, característica esta fundamental para a aprendizagem de acordo com a teoria de Raymond Duval. Este autor (2011a) propõe especificamente para o ensino da função afim e esboço do seu gráfico, a *abordagem de interpretação global das propriedades figurais* como forma de compreensão integral deste objeto. Esta abordagem perpassa a análise da congruência entre registro algébrico e gráfico com base nas unidades significativas de cada representação, a partir dos parâmetros do registro algébrico e a relação destes com unidades significativas gráficas.

Assim, diante das dificuldades que os estudantes apresentam na interpretação e no esboço de curvas e tendo como escopo a compreensão a partir da interpretação global de uma curva, a proposta desta tese é problematizar o ensino e a aprendizagem do esboço de curvas de funções polinomiais do segundo ($y = ax^2 + bx + c$) e terceiro ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) graus, no ensino médio (EM). Contudo, diante da impossibilidade de realizar reflexões a partir da análise dos parâmetros do registro algébrico, principalmente da função polinomial do terceiro grau, ocasionada pela grande quantidade de parâmetros, o compromisso com a interpretação global, ficou, nas discussões desta tese, por conta do cálculo e análise das taxas de variação das funções.

As taxas de variação, ainda que vastamente utilizadas no EM, são somente trabalhadas com profundidade no ensino superior, mais especificamente em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), e com rigor e formalização inapropriados para o trabalho no EM. Assim, a fim de proporcionar a interpretação global a partir de unidades visuais significativas e possibilitar ao estudante deste nível de ensino a compreensão de variabilidade necessária não só para esboço de curvas, mas para a compreensão de fenômenos e análises de situações, utilizamos a *noção de infinitésimos* no cálculo das taxas de variação.

Algumas considerações iniciais com relação à escrita desta tese são essenciais. Primeiramente, ela está escrita, quase na sua totalidade, na primeira pessoa do plural, se referindo assim, a mim, Bárbara, e a meu orientador, quem me autoriza e respalda. É um plural simples que representa a relação que se estabelece entre orientador e orientanda e as decisões tomadas por ambos no âmbito da pesquisa. Na seção que apresenta as transcrições do trabalho em sala de aula, contudo, o plural se refere a mim e aos estudantes. Em outras, estão na primeira pessoa do singular por expor parte da minha trajetória profissional que culminou na escolha do tema do doutorado.

Outra consideração importante é com relação ao uso (abundante) do itálico, o qual é feito com distintas funções: realçar uma palavra ou frase, identificar a fala dos estudantes nos dados da pesquisa empírica e identificar palavras em latim.

Elucidadas essas questões, vamos para a organização da tese. A tese está organizada em seis capítulos, além da introdução, referências e apêndices. No capítulo primeiro, contextualizamos o problema de pesquisa e a pesquisa, pontuando as questões que a envolvem, delimitando seus objetivos, enfatizando a relevância e explicitando os caminhos metodológicos trilhados.

No capítulo segundo, apresentamos os aspectos teóricos que ancoram o caminho alternativo para o trabalho de esboço de curvas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, caracterizando pontos importantes da *teoria dos registros de representação semiótica* (TRRS) e da *abordagem de interpretação global das propriedades figurais*, ambos de Raymond Duval.

No capítulo terceiro, abordamos questões relacionadas às *funções* e ao *Cálculo*. No âmbito científico, pontuamos sobre a evolução histórica destes conceitos, chegando às suas formas atuais, ressaltando o papel da *noção de infinitésimo* e das diferentes representações semióticas na construção do conhecimento. No âmbito pedagógico, refletimos sobre o ensino atual de funções, mais especificamente da representação gráfica de funções; e sobre o ensino de Cálculo, o qual perpassa a compreensão das dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

No capítulo quarto, apresentamos o *caminho alternativo* para esboçar curvas no EM partindo da compreensão de variabilidade. Inicialmente, destacamos trechos e ideias que emergem de alguns documentos balizadores da Educação quanto às questões que abrangem a pesquisa. Na sequência, explicitamos pesquisas sobre o esboço de curvas que se ancoram na abordagem de interpretação global das propriedades figurais de Raymond Duval. Por fim, elucidamos o cálculo e análise das taxas de variação das funções polinomiais do segundo e terceiro graus que culminam no esboço da curva.

O capítulo quinto é dedicado ao esclarecimento da metodologia de coleta dos dados empíricos, norteada por elementos da Engenharia Didática (ED), necessários para analisar e discutir sobre o caminho alternativo sugerido no âmbito pedagógico. Neste capítulo, explicitamos o cenário de pesquisa e a sequência didática elaborada para aplicação em sala de aula, construímos análises *a priori* de variáveis fundamentais que *interagem na* e *emergem da* prática de esboçar curvas na perspectiva deste trabalho, detalhamos a aplicação da sequência didática, bem como apresentamos as análises *a posteriori* das variáveis evidenciadas na análise *a priori*.

As discussões e interpretações a nível cognitivo, matemático e pedagógico são apresentadas no capítulo sexto, baseadas nas análises *a posteriori*. Neste capítulo também apresentamos perspectivas futuras de trabalhos sobre o caminho alternativo de esboço de curvas em termos pedagógicos e de pesquisa.

Esquema da tese

Capítulo 1: Elucidação do problema, dos caminhos percorridos e da relevância da pesquisa - Visão geral do trabalho: delimitação do problema, questão de pesquisa, objetivos, aspectos metodológicos, relevância da pesquisa.

⇩ ⇩

Capítulo 2: A teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) - Esboço de curvas – Aspectos importantes da semiótica de Peirce, Saussure e Frege que constituem a TRRS, de Duval. Apresentação da TRRS como pressuposto teórico que embasa a pesquisa. O esboço de curvas a partir da abordagem de interpretação global das unidades figurais. As funções discursivas de uma língua na resolução de problemas matemáticos: possibilidades para análise dos dados.

Capítulo 3: Funções e Cálculo: âmbito científico e pedagógico - História da construção do conceito de Função e de suas formas de representação. Desafios e possibilidades do atual ensino de Funções.
História da construção do Cálculo a partir dos infinitésimos. Desafios e possibilidades do seu atual ensino.

⇩ ⇩

Capítulo 4: A noção de infinitésimo no estudo de funções polinomiais do 2º e 3º graus – O que abordam os documentos (PCN, PCNEM, NCTM) sobre elementos da TRRS, a aprendizagem e a variação de funções. Pesquisas sobre o esboço de curvas com base na *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*. Discussões sobre o cálculo de taxas de variação instantânea ($TVI(x)$) de uma curva, calculadas a partir da noção de infinitésimo. Discussões sobre o esboço de curvas de funções, tendo como recurso a taxa de variação instantânea de primeira ordem ($TVI_1(x)$) e a de segunda ordem ($TVI_2(x)$).

⇩

Capítulo 5: Pesquisa empírica: atividades em sala de aula – Justificativa e aspectos da pesquisa empírica. Elementos da ED que nortearam a pesquisa empírica. Constituição do material de análise (coleta de dados). Análises preliminares. Análises *a priori* de variáveis que serão analisadas na pesquisa levando em conta aspectos matemáticos e cognitivos. Descrição das atividades desenvolvidas com discussões iniciais. Análises *a posteriori*.

⇩

Capítulo 6: Discussões finais e perspectivas futuras - Reflexões sobre o caminho alternativo a partir da análise dos dados coletados, discussões finais e perspectivas futuras.

1 ELUCIDAÇÃO DO PROBLEMA, DOS CAMINHOS PERCORRIDOS E DA RELEVÂNCIA DA PESQUISA

Neste capítulo apresento[1] considerações sobre a minha trajetória profissional e acadêmica que culminou na delimitação do tema da tese, bem como os caminhos percorridos até seu formato final. Este percorrer demonstra a fluidez, o movimento da pesquisa, tomando novos rumos a cada experiência e/ou leitura. Também apresentamos[2] aspectos relativos ao objeto de estudo *esboço de curvas*, os quais ressaltam a relevância da pesquisa no âmbito educacional. Neste percurso, revela-se a questão diretriz, os objetivos da pesquisa e a base teórica escolhida, a partir dos quais apontamos encaminhamentos e um desenho da metodologia utilizada.

1.1 INQUIETAÇÃO E BUSCA

Os aspectos fundamentais relacionados à pesquisa originaram-se de dúvidas emergentes da minha própria prática pedagógica diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes de EM e superior. Após a formação inicial em Licenciatura em Matemática e o trabalho como bolsista de iniciação científica em projeto de Matemática Aplicada à Engenharia Química, mais especificamente com a secagem de grãos e folhas, ingressei no Mestrado em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS. Ao findar o mestrado, iniciei a carreira docente, ministrando aulas para diversos cursos superiores e Matemática para o EM. Foi no início da carreira docente que as questões relacionadas a esta pesquisa começaram a ser desenhadas. As dificuldades na prática pedagógica, na compreensão das dificuldades dos estudantes, nas formas de avaliação, na psicologia necessária para as relações professor e estudantes e para a apreensão dos conceitos, marcaram o início da trajetória com, inicialmente frustrações e sentimentos de incapacidade e, ao passar dos anos, com inquietações impulsionadoras.

---

[1] Parte deste capítulo está escrito na primeira pessoa do singular, pois aborda a trajetória profissional da autora da tese.

[2] Em primeira pessoa do plural por ser uma construção conjunta orientanda e orientador.

Questões como: Por que, mesmo com explicações tão claras, aplicação de diferentes metodologias nas aulas, momentos de trabalhos de resoluções de problemas, utilização das tecnologias, investigações matemáticas, entre outros, ainda assim, as avaliações demonstram o fracasso do processo? Será que os processos de apreensão cognitivos são iguais em todas as disciplinas? Por que é sempre em Matemática que os estudantes ficam em recuperação e necessitam cada vez mais de reforços?

Seguramente, estas perguntas e o desejo de buscar embasamento teórico para elas fazem parte da rotina de muitos professores de Matemática em qualquer nível de ensino e comigo não foi diferente. Com o passar do tempo, mesmo com anos de prática, envolvida com muitas aulas e cursos distintos, o desconforto gerado pelas questões supracitadas ainda era sentido. A possibilidade de aprofundar o estudo sobre estas questões surgiu somente quando, trabalhando em uma universidade federal, com uma carga horária de sala de aula reduzida, foi possível dedicar tempo e receber incentivo para realizar o doutorado, que, sem dúvidas, teria como pano de fundo o ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesta busca, disciplinas optativas foram cursadas em diferentes programas de pós-graduação oportunizando leituras e estudos de diversas teorias de aprendizagem. Contudo, foi a partir do contato com a teoria cognitiva de Raymond Duval, em disciplina optativa com o professor orientador desta tese, Méricles Thadeu Moretti, sobre os processos de apreensão de objetos matemáticos e os registros de representação semiótica, que algumas questões relacionadas à aprendizagem matemática puderam ser clarificadas, fazendo-me repensar, no âmbito do ensino, as práticas e avaliações desenvolvidas até então, e, no âmbito da pesquisa, as ideias que culminaram nesta tese.

Esta tese é, portanto, o resultado do meu desejo de vincular a experiência docente no EM à experiência no ensino superior, trabalhando um assunto abrangente nos dois níveis de ensino (funções) e embasando os estudos na teoria de aprendizagem de Raymond Duval, a qual responde a diversos questionamentos meus enquanto educadora.

1.2 OBJETO DE ESTUDO, ASPECTOS BALIZADORES E RELEVÂNCIA DA PESQUISA

Na perspectiva da TRRS, de Raymond Duval, a qual é esmiuçada no capítulo posterior, o objeto matemático, cujo ensino e aprendizagem são problematizados nesta tese, é o *esboço de curvas*. Primeiramente, pois este objeto matemático, fundamental em diversas atividades humanas, está presente, do ponto de vista escolar, no ensino fundamental, médio e superior. Além disso, pois a atividade envolvida no esboço de curvas é considerada de suma importância nos tempos atuais, “por tornar possível a representação de diversos fenômenos e situações” (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 39). E ainda, pois, apesar da importância e abrangência, “muitos estudos apontam dificuldades de leitura e de interpretação das representações gráficas cartesianas” (DUVAL, 2011a, p. 97).

No âmbito escolar, o que se verifica em livros didáticos, apostilas e no ensino de modo geral é um trabalho com o esboço de curvas de funções a partir do seguinte processo: substituição de valores na lei da função representada na expressão algébrica, organização de uma tabela de pares ordenados de números reais, localização no plano cartesiano dos pontos oriundos destes pares ordenados e, por fim, traçado do gráfico, unindo os pontos no plano cartesiano. Este procedimento, além de mecânico e repetitivo, por ser comumente utilizado, pode gerar a crença de que esta é a única maneira possível para obtenção do gráfico a partir da lei da função ou expressão algébrica. Ademais, este procedimento pode não possibilitar a compreensão da relação entre a expressão algébrica e o esboço da curva, como se não houvesse ligação entre álgebra e geometria. E, para além do esboço da curva, este procedimento não permite uma compreensão em termos de variabilidade do fenômeno que está sendo representado.

Segundo a TRRS de Duval (2004), a aprendizagem matemática está relacionada à diversidade dos registros de representação semiótica de um objeto matemático e, além disso, exige do sujeito aprendente, a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Ainda, segundo este autor, especificamente em relação ao ensino e à aprendizagem de gráficos, somente uma *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* possibilita a compreensão integral da curva e do que ela representa (DUVAL, 2011a). Nesta perspectiva, a compreensão de um gráfico não se limita no fazer um desenho ou imagem geométrica de uma sentença algébrica que representa uma função, mais do que isso, a abordagem baseada na interpretação global das propriedades figurais, "possibilitará reconhecer quais modificações na expressão algébrica refletem em modificações na expressão gráfica da curva e vice-versa, o que contribuirá para uma melhor aprendizagem" (CORRÊA; MORETTI, 2014, p.44). Desta forma, faz-se necessário identificar, em uma função, variáveis visuais, pertinentes ao registro de representação gráfico e unidades simbólicas significativas, pertinentes ao registro de representação algébrico (simbólico), e coordená-las.

Para que o estudo sobre o traçado de curvas promova ou se aproxime da interpretação global de propriedades figurais é necessário realizar uma análise das propriedades peculiares de partes constituintes da curva (MORETTI, FERRAZ, FERREIRA, 2008). Duval (2011a) realiza este tipo de análise para o caso específico da função polinomial do primeiro grau ($y = ax + b$) ressaltando a importância da análise qualitativa no sentido de perceber no coeficiente angular a, o sentido da inclinação da reta, por exemplo. Isto significa que, para que haja uma compreensão integral do esboço de uma curva segundo este autor, é necessário conhecer regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro de representação algébrica, e que a falta deste conhecimento é que pode gerar as dificuldades de aprendizagem (DUVAL, 2011a).

A partir deste estudo de Duval (2011a), a *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* vem inspirando pesquisadores (Correa e Moretti (2014); Luiz (2010); Moretti (2003); Moretti e Luiz (2010); Moretti, Ferraz e Ferreira (2008); Silva (2008)) na busca por recursos e/ou elementos que permitam esta associação entre variáveis visuais e unidades significativas algébricas. Moretti (2003), por exemplo, reflete sobre como manter a relação entre variável visual de representação e unidade significativa da escrita algébrica da função quadrática, usando o recurso da *translação*. Silva (2008) e Corrêa e Moretti (2014) estudam o esboço de curvas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, utilizando como recursos a *translação* e a *simetria em paralelo* com as unidades significantes da expressão algébrica (CORRÊA; MORETTI, 2014).

Para funções do ensino superior, supostamente mais complexas, os cursos de CDI propõem como fundamental para o estudo de conversões entre representações de funções de uma variável real, o uso de limites e derivadas, principalmente quando a relação entre expressão analítica da função e o seu gráfico não são prontamente percebidas. Assim, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) apoiam-se em um conjunto de *elementos do Cálculo* para orientar a conversão entre o registro algébrico e gráfico destes tipos de funções. Enquanto Moretti e Luiz (2010) utilizam o *procedimento informático* aliado ao uso de elementos do Cálculo a fim de refletir sobre o esboço dessas funções a partir da interpretação global. Estes trabalhos que se ancoram na abordagem de interpretação global são detalhados na seção 4.2 do capítulo quarto.

Desta excursão pelos trabalhos que utilizam a abordagem de interpretação global, vislumbramos a possibilidade de traçar um *caminho alternativo* para o ensino e a aprendizagem de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, mais especificamente o esboço de curvas destas funções, no EM, com o compromisso da interpretação global. Porém, uma análise dos parâmetros como a realizada por Duval (2011a), a fim de compreender a correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica, se torna impraticável para estas funções devido à quantidade de parâmetros e de possibilidades. Por isso, a ideia que empregamos se aproxima da ideia de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), no sentido de utilizar elementos do Cálculo como orientadores de conversão, identificando, assim, unidades básicas gráficas e simbólicas que possibilitem intermediar as conversões, mas que possam ser calculadas e compreendidas no âmbito do EM, sem o rigor e formalização de limites e derivadas.

Com base nisso, as *taxas de variação* da função foram escolhidas como recurso mediador da análise. Primeiramente, por serem elementos que carregam informações valiosas para o esboço e a compreensão da curva de uma função. Além disso, pelo fato de a compreensão do conceito de taxa de variação, bem como dos objetos matemáticos envolvidos nele e a sua relação com os objetos do universo material, perpassarem o entendimento de diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, matemáticos, etc., permitindo estudar, explicar e predizer o comportamento destes fenômenos, obtendo conclusões acerca destes. Ademais, a compreensão de taxas de variação possibilita dar significado ao estudo das funções no EM, o que é reconhecido pelos documentos balizadores da educação básica de Matemática como os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) e os *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* – PCNEM (BRASIL, 2000a, 2000b).

Todavia, as taxas de variação de funções e sua relação com a compreensão e o esboço de curvas, são somente trabalhadas de forma mais aprofundada no ensino superior, especificamente nos cursos de CDI. A propósito, atualmente, estes cursos são foco de inúmeras pesquisas (Barufi (1999), Cavasotto (2010), Cury (2007), Oliveira e Raad (2012), Rezende (2003), Sarubbi e Soares (2009)) devido aos altos índices de reprovações e dificuldades no ensino e aprendizagem, as quais são causadas, de acordo com diversos autores (André (2008), Ávila (1991, 2006), De Souza *et al.* (2013), Duclos (1992), Oliveira (2010), Pereira (2009), Rezende (2003)), pela ausência do estudo e compreensão de noções do Cálculo no EM.

A partir dessas compreensões, o caminho alternativo apresentado e discutido nesta tese consiste em esboçar curvas no EM, numa perspectiva de interpretação global, a partir das taxas de variação da função sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada. Após a leitura de diversos trabalhos, alguns dos quais anteriormente referenciados, encontramos na *noção de infinitésimo* uma possibilidade de trabalho neste sentido e uma maneira de abordar a variabilidade de funções neste nível de ensino. A noção de infinitésimo foi então utilizada de forma intuitiva para o cálculo e compreensão da variação instantânea de funções polinomiais do segundo e terceiro graus. Esta noção se mostra um recurso interessante e frutífero no contexto deste trabalho devido, entre outros fatores, ao fato de ela proporcionar uma compreensão intuitiva sobre a variabilidade de funções, favorável ao entendimento de fenômenos no EM e ao aprendizado de CDI em nível superior. Aliás, pesquisas como Cornu (1983); Giraldo (2004); Giraldo e Carvalho (2002); Tall (1980, 1982); Tall e Vinner (1981) sinalizam que o estudante, mesmo do ensino superior, tem dificuldade para entender a derivada, definida a partir do conceito de limite.

A escolha pela noção de infinitésimo vai ao encontro da ideia de Cabral e Baldino (2006), quando defendem o uso de infinitésimos para a construção das noções iniciais de CDI para não matemáticos profissionais. Apesar de o foco de suas pesquisas serem estudantes do ensino superior, os autores afirmam que os infinitésimos fazem parte das concepções espontâneas destes e referem-se às concepções provisórias ou temporárias construídas pelos estudantes sobre a ideia de infinitésimo como, “mesmo que matematicamente instáveis, são necessárias para o aluno passar das concepções espontâneas para as definições matemáticas” (CABRAL, BALDINO, 2006, p. 13). Neste sentido, o uso de infinitésimos apresenta-se como um recurso interessante de ensino na compreensão de taxas de variação de funções no EM.

Em suma, levando em conta a importância da compreensão do esboço de curvas no EM numa perspectiva de interpretação global; a importância e abrangência da compreensão de taxas de variação de funções no EM e a necessidade de abordar neste nível de ensino noções do CDI que colaborem com a compreensão de funções num sentido mais amplo, relacionado à variabilidade; é essencial pensar o ensino do objeto matemático *esboço de curvas* a partir de um *caminho alternativo*. Assim *suscitamos reflexões a nível cognitivo e pedagógico sobre as possibilidades e as limitações do esboço de curvas de algumas funções do EM, numa perspectiva de interpretação global de propriedades figurais, a partir da análise da taxa de variação, calculada e compreendida a partir da noção de infinitésimos.*

Para atingir tal objetivo, algumas investigações foram necessárias, com relação:

- ao desenvolvimento do conceito e das distintas formas de representação de *função* ao longo da história, bem como dos processos de ensino e aprendizagem, em particular, relacionados ao cálculo de taxas de variação e esboço de curvas;

- ao desenvolvimento do CDI e o papel das *noções infinitesimais* ao longo da história, bem como dos atuais processos de ensino e aprendizagem relacionados;

- à forma como o esboço de curvas é atualmente abordado no EM e as possibilidades alternativas, evidenciando a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, preconizada por Raymond Duval;

- às ideias de Raymond Duval no que tange à aprendizagem matemática e ao esboço de curvas, mais especificamente com relação às unidades básicas gráficas e simbólicas baseadas nas taxas de variação enquanto elementos que intermediam as conversões entre representações gráficas e algébricas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus.

As referidas investigações nos inspiraram a construir um caminho alternativo enquanto um trabalho diferenciado para o esboço de curvas de funções polinomiais de segundo e terceiro graus, o qual foi desenvolvido em formato de uma sequência didática baseada em elementos da ED e aplicado a estudantes do EM. Nesta sequência didática trabalhamos o esboço de curvas por meio das taxas de variação das retas tangentes às funções, calculadas a partir da noção de infinitésimo.

Os trabalhos de investigação, a construção do caminho alternativo e o posterior desenvolvimento em sala de aula proporcionaram reflexões sobre o ensino do esboço de curvas na abordagem utilizada na sequência didática e, além disso, sobre a aprendizagem dos estudantes à luz da TRRS de Raymond Duval. Estas reflexões perpassaram a elucidação das possibilidades cognitivas e pedagógicas que este *caminho* viabiliza, bem como, de suas limitações.

Considerando que, em se tratando de funções polinomiais de grau n, o cálculo da taxa de variação instantânea resulta em uma função polinomial de grau $n-1$, problematizamos as funções polinomiais do segundo e do terceiro graus somente, e sinalizamos um possível futuro trabalho com as funções seno e cosseno. Isto, pois, ao encontrar uma expressão para a taxa de variação instantânea, é necessário analisar o sinal desta, e dificuldades podem surgir no cálculo das raízes de funções que representam as taxas de variação. Além do que, não é intenção investigar, de forma exaustiva, o esboço de todas as funções tratadas no EM, mas sim, de refletir sobre o "gesto intelectual" (DUVAL, 2011b, p. 41) envolvido e necessário para o esboço de curvas, baseado numa análise qualitativa que leva em conta sua variabilidade.

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS: PROCEDIMENTOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

As investigações realizadas, bem como todas as ações que fazem parte da tese foram embasadas em uma perspectiva qualitativa de pesquisa. A opção pela pesquisa qualitativa se justificou por privilegiar análises de resolução de problemas, descrição de experiências, relatos de compreensões, entrevistas com sujeitos e relatos de observações que possibilitam análises de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais e de acontecimentos (BICUDO, 2010). Na pesquisa qualitativa, conforme evidencia Alves (1991),

> [...] não se pode, no processo de investigação, deixar de valorizar a imersão do pesquisador no contexto, em interação com os participantes, procurando apreender o significado por eles atribuído aos fenômenos estudados. É também compreensível que o foco do estudo vá sendo progressivamente ajustado durante a investigação e que os dados dela resultante sejam predominantemente descritivos e expressos através de palavras (ALVES, 1991, p. 55).

Partindo da premissa apontada na citação, a elaboração da tese foi dividida em cinco momentos dinâmicos e não lineares.

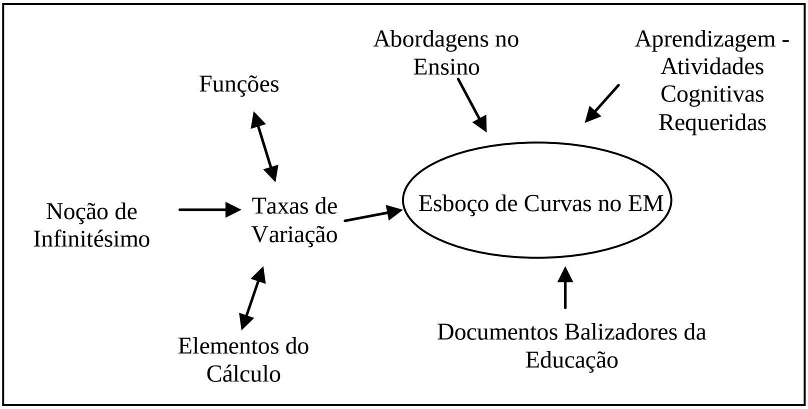
O *primeiro* momento foi caracterizado por uma profunda investigação bibliográfica em teses, dissertações e periódicos da área, dos aspectos relacionados à pesquisa: construção histórica do conceito de função e de elementos do Cálculo, ensino e aprendizagem do esboço de curvas e do conceito de taxas de variação no EM, TRRS de Raymond Duval e de noções infinitesimais no ensino. Nesta investigação buscamos em teses, dissertações e artigos dos periódicos Bolema, Zetetikè, Alexandria, Revemat e Revista Educação Matemática Pesquisa, sobre a temática do projeto, assim como em anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), do Congresso Internacional de Educação Matemática (CIEM) e do Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). A escolha por estas fontes se deu pela abrangência e importância destas para a área de Educação Matemática, porém, a leitura destas nos levou continuamente a outras fontes relacionadas ao trabalho.

O aprofundamento destes aspectos, nesta etapa inicial, foi fundamental para refletir e determinar as etapas seguintes, contudo, é importante enfatizar que esta foi uma etapa que permeou todas as outras pelo fato de a pesquisa estar constantemente em construção.

No *segundo* momento realizamos uma pesquisa exploratória sobre as ideias relacionadas à tese em documentos (Parâmetros Curriculares Nacionais, Diretrizes Curriculares Nacionais, Princípios e Normas para a Matemática Escolar, Leis de Diretrizes e Bases) sobre as propostas de organização dos processos relacionados ao ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos envolvidos no esboço de curvas no EM. Esta exploração também avançou no âmbito das outras etapas uma vez que esta perpassou a compreensão de quem são os sujeitos da pesquisa empírica, no caso os estudantes, e o contexto educacional destes. Este reconhecimento ocorreu a partir de observações realizadas antes e durante a aplicação da sequência didática. Segundo Alves (1991), a fase exploratória tem como objetivo principal "proporcionar, através da imersão do pesquisador no contexto, uma visão geral e não enviesada do problema considerado, e contribuir para a focalização das questões e a identificação de informantes e outras fontes de dados" (p. 58).

A partir da revisão bibliográfica de aspectos teóricos e metodológicos relacionados ao tema e da exploração dos documentos, ocorridas nas duas primeiras fases, foram elencados aspectos relacionados ao esboço de curvas de acordo com a perspectiva de interesse de abordagem. A seguir, na figura 1, apresentamos os aspectos que foram referências da investigação. Além disso, estes primeiros momentos permitiram elaborar um inventário de conhecimentos e compreensões sobre as questões evidenciadas, o que influenciou a organização do terceiro momento da pesquisa.

Figura 1 - Aspectos relevantes relacionados ao esboço de curvas.



Fonte: Os autores.

De acordo com a figura 1, o esboço de curvas no EM foi problematizado quanto às atividades cognitivas requeridas e às taxas de variação, tendo por base os documentos balizadores da educação e a abordagem de interpretação global das propriedades figurais. As taxas de variação, por sua vez, são intrínsecas às funções e ao Cálculo e, no caso desta tese, discutida na perspectiva dos infinitésimos.

Tendo por base esses estudos, no *terceiro* momento construímos e detalhamos o caminho alternativo para esboçar curvas no EM que utiliza como recurso para a interpretação global de propriedades figurais, as taxas de variação da função, calculadas a partir da noção de infinitésimos. A pesquisa empírica que deu subsídios para as reflexões acerca das possibilidades e limitações desta abordagem foi baseada em elementos da ED de Michèle Artigue (1996), detalhada no capítulo quinto e por meio da qual foi elaborada e aplicada uma sequência didática, cujo ensino foi organizado sob a perspectiva de Duval no que se refere à TRRS.

Os sujeitos envolvidos na pesquisa empírica foram estudantes do terceiro ano do EM de uma escola estadual de Erechim/RS, cuja sequência didática foi aplicada em 2016; e um estudante, também do terceiro ano do EM, de Barra do Rio Azul/RS, participante do Programa Mentores do Programa de Iniciação Científica - PIC da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública – OBMEP, aplicada em 2017. A opção pelo terceiro ano se deu devido ao fato de, neste ano, os estudantes já terem estudado alguns conceitos que envolvem taxa de variação, cálculo de raízes e estudo do sinal de funções, inequações, bem como o estudo de funções polinomiais. Além disso, optou-se por uma escola de Erechim, RS, devido ao contexto de atuação profissional da pesquisadora. Os detalhes e motivos da escolha dos sujeitos, são apresentados no capítulo quinto.

Ainda neste terceiro momento da pesquisa foram realizadas análises *a priori* de variáveis (objetos matemáticos) que supostamente *interferem no* e/ou *emergem do* esboço de curvas como: estudo do sinal das funções afim e quadrática, taxa média de variação, taxa de variação instantânea de primeira ordem ($TVI_1(x)$) e de segunda ordem ($TVI_2(x)$), variação de funções, pontos máximos e mínimos, pontos de inflexão, concavidade. Nestas análises *a priori* especificamos as situações-problema em que ocorrerão a apreensão dos conceitos, os conceitos envolvidos e as propriedades, procedimentos e argumentos necessários para a compreensão de cada variável. Para a elaboração de análises *a posteriori*, durante a aplicação da sequência didática foram coletados os dados empíricos da pesquisa constituídos essencialmente das resoluções dos estudantes e de áudios dos encontros.

Os dados emergentes da sequência didática foram analisados no *quarto* momento da pesquisa sob à luz da TRRS de Duval (2011a) no que tange à conversão entre registro algébrico e gráfico, e evidenciados aspectos das funções do discurso de Duval (2004) e Brandt, Moretti e Bassoi (2014), e confrontados com as análises *a priori*.

Por fim, o *quinto* momento foi dedicado às conclusões com base na interpretação e análise dos dados, bem como à promoção de reflexões a respeito das práticas desenvolvidas e do aprendizado dos conceitos trabalhados apontando as possiblidades e limites desta abordagem.

A partir desse breve esclarecimento sobre aspectos fundamentais da pesquisa, apresentamos, no capítulo a seguir, a TRRS com objetivo de consolidar as referências desta tese.

2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA - ESBOÇO DE CURVAS

As ideias relacionadas à pesquisa apresentadas no capítulo anterior se justificam pela importância de compreender o esboço de uma curva; pelas dificuldades que os estudantes de todos os níveis de ensino enfrentam nesta atividade e na compreensão dos fenômenos representados; pelas reflexões acerca das abordagens utilizadas no ensino deste objeto matemático; bem como, pela peculiaridade do acesso aos objetos matemáticos. Com relação a esta última justificativa, neste capítulo explicitamos a teoria base assumida na pesquisa: a teoria dos registros de representação semiótica (TRRS).

De acordo com Raymond Duval, filósofo e psicólogo interessado nas questões que envolvem a Matemática, as dificuldades relacionadas à aprendizagem matemática não são encontradas em outras áreas do conhecimento, sendo a questão primordial relativa à aprendizagem ou às dificuldades desta, de ordem epistemológica e cognitiva (DUVAL, 2011b) e não estão somente relacionadas à organização pedagógica e didática. Isto, pois os objetos matemáticos não são acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente e sua apreensão não pode ser mais do que conceitual.

Nas outras áreas do conhecimento, os objetos são acessíveis pela percepção, diretamente (relativo ao meio ambiente) ou indiretamente (com uso de instrumentos como telescópio, microscópio e aparelhos de medida) (DUVAL, 2011b). No caso da Matemática, na perspectiva da TRRS, o acesso aos objetos matemáticos ocorre necessariamente a partir de suas representações (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural). Para este autor (2003, p. 21) “[...] isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversidade de registros de representação”. As representações semióticas, além de cumprirem o papel de estarem no lugar dos objetos matemáticos e de evocá-los, sem com isso “o serem”, são a única forma de acessá-los. Elas não são produções feitas naturalmente apenas pela percepção e pertencem a sistemas semióticos que, por sua vez, são “[...] um conjunto de signos que possui convenções e regras próprias de formação” (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 41).

Neste sentido, não é só importante considerar a natureza dos objetos matemáticos, como também a forma como os objetos nos são apresentados e como temos acesso a eles. Para este autor, o ponto crucial da aprendizagem matemática está no fato de considerar ou não a *semiósis* no processo. De acordo com esta teoria, os registros de representação semiótica dos objetos matemáticos tem papel fundamental na aprendizagem.

Mas, o que são *representações semióticas*? E o que elas representam na atividade matemática?

Para responder a essas questões e compreender minimamente a ideia de semiótica a fim de localizar as representações semióticas em meio às teorias semióticas que surgiram mais sistematicamente a partir do fim do século XIX, voltemos um pouco na história.

As teorias consideradas modelos de análise dos signos que fundamentam a semiótica e apareceram quase ao mesmo tempo, de maneira independente são os modelos de: *Peirce*, entre os anos 1890-1910, nos Estados Unidos; *Saussure*, publicado em 1916 na antiga União Soviética e *Frege*, entre os anos de 1892 e 1894, na Europa Ocidental. Segundo Duval (2011b), todos os trabalhos posteriores têm como base estes três autores e, mesmo que esses modelos apresentem diferenças entre si, foi neles que Raymond Duval buscou inspiração para a criação da TRRS.

2.1 UM POUCO DA SEMIÓTICA DE PEIRCE, SAUSSURE E FREGE

A semiótica é considerada por Santaella (2012), a “ciência dos signos” ou a “ciência de todas as linguagens” e não é, de forma alguma, trivial. Uma das grandes dificuldades na conceituação da semiótica consiste nas semelhanças e oposições entre o conceito de linguagem, a distinção entre língua e linguagem e linguagem verbal e não verbal.

Nossa comunicação e orientação ocorrem por meios distintos como pela língua, imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes, objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro, tato, através do olhar, do sentir e do apalpar (SANTAELLA, 2012). Contudo, a consciência dessa diversidade de formas de comunicação é prejudicada pela dominância da língua. De acordo com esta autora, existe uma ilusão relacionada à unicidade e exclusividade da língua como forma de linguagem, que faz com que acreditemos que “as únicas formas de conhecimento, de saber e de interpretação do mundo são aquelas veiculadas pela língua, na sua manifestação como linguagem verbal oral ou escrita” (SANTAELLA, 2012, p. 15).

Assim como existe a linguagem verbal, de sons, articulada ao sistema fonador e que recebeu uma tradução visual alfabética, chamada de linguagem verbal, também existe uma enorme variedade de outras linguagens que se constituem em sistemas sociais e históricos de representação do mundo. À *linguagem* está relacionada uma vasta e intrincada rede de formas sociais de comunicação e de significação que inclui a linguagem verbal articulada e tantos outros sistemas de produção de sentido propiciados e difundidos pelo desenvolvimento dos meios de reprodução de linguagem.

Diante desta vastidão de linguagens, Santaella (2012) define Semiótica como a "ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido" (p. 18). Enquanto que, para Nöth (2008), mesmo considerando as variadas definições, Semiótica é a "ciência dos signos e dos processos significativos (semiose) na natureza e na cultura" (p. 17).

Não é de interesse nesse trabalho detalhar a história da Semiótica, mas sim destacar algumas ideias relacionadas à proliferação das linguagens e meios de comunicação da pós Revolução Industrial, que permearam a construção da teoria de Duval. Cabe ressaltar que os estudos sobre os signos não são recentes e o que nos é relevante da história da semiótica, teve como base uma construção anterior, que inicia no período grego-romano antigo, com filósofos como Platão (427-347) e Aristóteles (384-322), perpassa a Idade Média, o Renascimento, os séculos XVII e XVIII, a qual se desenvolveu no ambiente do racionalismo, do empirismo e iluminismo, até o século XIX.

No século XX, a Semiótica teve três origens quase simultâneas no tempo, mas distintas no espaço e na paternidade. Este surgimento síncrono se deve à proliferação das linguagens e meios de reprodução e difusão de informações pós Revolução Industrial. Este cenário possibilitou o surgimento do que Santaella (2012) chamou de "consciência semiótica".

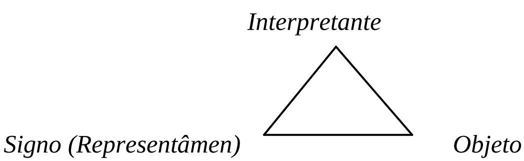
Um dos precursores destas ideias, o norte-americano *Charles Sanders Peirce* (1839-1914) teve uma formação bastante diversificada e é tido como o mais importante fundador da moderna semiótica geral (NÖTH, 2008). Peirce era cientista e seu maior interesse estava ligado à compreensão da Lógica das Ciências e dos métodos de raciocínio empreendidos na construção das ciências e ao exercício de encontrar pontos em comuns entre eles.

Durante sessenta anos Peirce lutou pela consideração da Lógica como uma ciência, concebendo-a como fazendo parte de uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signos, em que as “cognições, as ideias e até o homem são entidades semióticas” (NÖTH, 2008, p. 61). A visão pansemiótica do universo evidencia o caráter universal do signo para este autor. Por outro lado, apesar da abrangência deste caráter, Peirce desenvolveu uma fenomenologia de apenas três categorias para os signos: primeiridade, secundidade e terceiridade (NÖTH, 2008).

A *primeiridade* é a categoria do sentimento e percepção imediatos presentes nas coisas, sem reflexão e que não tem relação com outros fenômenos (NÖTH, 2008). A *secundidade* inicia quando um fenômeno primeiro é relacionado a um segundo qualquer, levando a uma comparação, uma dependência ou efeito. A *terceiridade*, por sua vez, é a categoria que relaciona um fenômeno segundo a um terceiro, considerada a categoria da mediação, da continuidade, da síntese, da representação, da semiose, dos signos (NÖTH, 2008).

A partir da divisão das partes que interagem na constituição do signo, Peirce estabeleceu classificações triádicas dos tipos possíveis de signo, resultando em dez tricotomias que resultam em 64 classes de signos. Dentre todas essas tricotomias, há três mais gerais: tomando-se a relação do signo consigo mesmo; a relação do signo com seu objeto e a relação do signo com seu interpretante. No caso desta tese, apresentamos apenas uma dessas classes, a que relaciona o signo ao seu objeto, a qual foi esquematizada por Moretti e Thiel (2012), a seguir.

Figura 2 - Esquema triádico da representação de signo para Peirce.



Fonte: Moretti e Thiel (2012), a partir de Peirce (2005).

Segundo este esquema, o *signo* funciona como mediador entre o *objeto* e o *interpretante*. O signo não é uma classe de objetos, mas a função do objeto no processo da semiose (NÖTH, 2008). Segundo Peirce (2005),

> signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente da pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, o seu *objeto*. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei *fundamento* do *representâmen* (p. 46).

Peirce classifica os tipos de signo em três elementos, de acordo com a relação entre *representâmen* e objeto: o *ícone*, o *índice* e o *símbolo*. O ícone é um signo que se baseia na semelhança entre objeto e *representâmen*. Essa semelhança não necessariamente está vinculada à aparência dos objetos, mas pode consistir apenas das relações entre suas partes. Como exemplos de ícones, têm-se as pinturas abstratas, os retratos, as figuras, diagramas, gráficos lógicos e fórmulas algébricas.

O índice é um signo que estabelece relações diádicas entre objeto e *representâmen*, ou seja, o índice é um signo que como tal funciona porque indica outra coisa com a qual ele está atualmente ligado (SANTAELLA, 2012). Estas relações podem ser de causalidade, espacialidade e temporalidade. São exemplos: o girassol, uma fita métrica, uma fotografia, um dedo apontando em uma direção, um grito de socorro, entre outros (NÖTH, 2008).

O símbolo, por sua vez, é o signo que não tem semelhança alguma com o objeto. Alguns exemplos de símbolos são as palavras, uma insígnia, uma senha, um credo religioso etc. Um mesmo signo pode ser considerado sob vários aspectos e pertencer a mais de uma categoria, exemplo disso são as palavras que ora assumem o papel de símbolos pelos aspectos de arbitrariedade e convencionalismo, ora são índices, como é o caso dos pronomes, uma vez que se referem a indivíduos particulares. Segundo Moretti e Thiel (2012), a aprendizagem matemática, em geral, trata de símbolos, como exemplos, o conceito de função e um problema formulado na língua natural.

Devido à formação generalizada de Peirce e sua semiótica concebida como lógica, este autor se dedicou a “configurar conceitos sígnicos tão gerais que pudessem servir de alicerce a qualquer ciência aplicada” (SANTAELLA, 2012, p.84), se posicionando, portanto, a favor de uma teoria geral de todas as possíveis espécies de signo.

Uma vantagem da definição de signo em Peirce que é apontada por Dionísio e Brandt (2012), é que a representação pode ser distinguida do objeto representado, sendo a função do signo apenas representar o objeto, produzindo na mente do intérprete alguma coisa, que seria outro signo, que também se relaciona com o objeto, mas com a diferença de ser mediada pelo signo. Todavia, com relação à representação triádica de Peirce, Duval (1999), pontua que, em razão da generalidade, ela não faz diferença entre o que é mental (por exemplo, lembrar-se de...) e o que é material (fotografias tomadas com ajuda de autofoco), valendo para ambas.

Segundo Duval (2011b), “a novidade do modelo de análise de Peirce é a classificação de todos os tipos de representação podendo preencher uma função cognitiva” (p. 32), contudo, a partição tricotômica (ícone, índice e símbolo) das representações em função de sua relação com o objeto que elas evocam, é pouco discriminatória. O conhecimento sobre a presença de similaridade entre objeto e signo serve somente para distinguir, muito genericamente, entre linguagem e imagem, e isso, na Matemática, pode ser problemático uma vez que não podemos confundir os enunciados em língua natural com as expressões simbólicas, como equações, fórmulas ou linguagem formal (DUVAL, 2011b). Além disso, corre-se o risco de considerar as palavras de uma língua, os sinais das operações, as letras de uma equação, os algarismos na escrita de um número, por exemplo, surgindo do mesmo tipo de representação.

Sumarizando, para Duval (2011b), a definição de signo em Peirce tem um caráter pouco discriminante que, segundo ele, se “limita à propriedade comum às representações e aos signos (‘se colocar no lugar de...’), e ela ignora a propriedade específica dos signos (sua relação com o objeto é uma relação de referência e não de efeito e causa)” (p. 34). Ademais, seu esquema triádico de análise sugere a prioridade cognitiva e epistemológica do objeto sobre a representação, o que reflete uma visão pragmática do que é o conhecimento. A Matemática, no entanto, é uma área do conhecimento em que quase sempre existe prioridade das representações sobre o objeto, sendo a distinção entre o objeto e suas diversas representações, uma das principais dificuldades de compreensão na aprendizagem (DUVAL, 2011b).

Outro nome importante para a semiótica é *Ferdinand de Saussure* (1857-1913), considerado o fundador da linguística moderna. Iniciou suas investigações desenvolvendo ideias sobre a teoria geral da linguagem e dos sistemas sígnicos, mais precisamente conceitos teóricos capazes de descrever e analisar as leis articulatórias da língua. A linguística de Saussure, de acordo com Santaella (2012), é uma “teoria que tem por objeto os mecanismos linguísticos gerais, isto é, o conjunto das regras e dos princípios de funcionamento que são comuns a todas as línguas” (p. 119). A partir deste olhar, a língua só existe e adquire seu valor e função por oposição a todos os outros, e, diante disto, Saussure se dedicou a distinguir língua e fala, mas levando em conta que estas são inseparáveis. Esta preocupação demonstrou que o objetivo dele não era formular conceitos gerais que servissem de base para outras áreas além da linguística, mas sim fundar uma ciência da linguagem verbal (SANTAELLA, 2012).

O modelo sígnico elaborado por Saussure, portanto, tinha apenas a finalidade de analisar a natureza do signo linguístico que também foi transferido para o não linguístico (NÖTH, 2005). Segundo Nöth (2005), os aspectos fundamentais desta teoria do signo são a “estrutura bilateral, sua concepção mentalista, a exclusão da referência e a concepção estrutural da significação” (p. 28) e, diferentemente das estruturas triádicas de Peirce, a maioria dos modelos de Saussure são baseados em díades, na qual há a exclusão do objeto de referência.

Saussure define o signo como uma “entidade inseparável diádica que põe em oposição o significado (um conceito, uma imagem mental) do significante (imagem acústica)” (MORETTI; THIEL, 2012, p.382). Para melhor entender esta estrutura, Saussure afirma que

> a língua é também comparável a uma folha de papel: o pensamento é o anverso e o som o verso; não se pode cortar um sem cortar, ao mesmo tempo, o outro; assim tampouco, na língua, se poderia isolar o som do pensamento, ou o pensamento do som (2008, p. 382).

A definição de signo de Saussure enfatiza a ideia comum de evocação de alguma coisa, mas também e principalmente no âmbito deste trabalho, a substituição da noção de sistema semiótico pela de signo (DUVAL, 2011b). Segundo este autor, a verdadeira contribuição de Saussure para a TRRS, se encontra na ideia de que

> os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com outros signos no interior de um sistema: Saussure os denomina ‘valores de oposição’ e são eles que constituem o sentido do signo. Em outros

> termos, *o signo e seu 'sentido' são uma única e mesma coisa*. O que leva a afirmar que é apenas no interior de um sistema semiótico que alguma coisa pode funcionar (DUVAL, 2011b, p. 30, grifo do autor).

Duval (2011b) também ressalta a questão presente na teoria de Saussure de não confundir signo e sua ocorrência, e um signo e o objeto ao qual ele se refere. A primeira distinção, segundo este autor, é importante não só em linguística, como em álgebra, por exemplo, e "aponta para o fato de que *não é o signo que é material, mas sua ocorrência*" (DUVAL, 2011b, p. 31, grifo do autor). A segunda, tão importante quanto, está relacionada com o fato de que o "*sentido de um signo está associado ao sistema no qual ele funciona como signo*. Ao contrário, *a referência a um objeto depende de uma operação intencional de designação*" (DUVAL, 2011b, p. 31, grifo do autor). Para Duval (2011b), o limite da teoria de Saussure se encontra na eliminação da diversidade de enunciados que a língua permite produzir, assim como, as operações discursivas que isto requer.

Outro importante nome da semiótica foi *Friedrich Ludwig Gottlob Frege* (1848 - 1925). Alemão, matemático, lógico e filósofo, Frege trabalhou na fronteira entre a Filosofia e a Matemática e é considerado um dos principais criadores da lógica matemática moderna. Diferentemente de Peirce e Saussure, não propôs a definição de signo, mas se interessou diretamente pela produção semiótica com valor de prova e de descoberta em Matemática, o que o fez primeiramente, escrever uma ideografia conceitual (DUVAL, 2011b).

Frege introduz a diferença entre *sentido* de uma expressão e a *referência* dessa expressão. Distinção esta que reflete as duas faces da significação e a diferença entre significante e significado. Como exemplo desta diferenciação, podemos tomar as expressões: $(2 + 4)$, (3×2), $(\frac{18}{3})$, entre outras que tem sentidos diferentes, mas representam o mesmo objeto.

Esta distinção entre sentido e referência se mostra importante para a Matemática uma vez que a relação entre conceito e ideias ocorre a partir da manipulação de signos, símbolos ou expressões. Conforme assinala Duval (2012a), esta ideia de Frege "induziu a separar com clareza a significação, que depende do registro de descrição escolhido, da referência que depende dos objetos expressos ou representados" (p. 99). Ademais, é esta distinção entre sentido e referência que fundamenta o processo de substituição, essencial em procedimentos de cálculo e demonstrações, em que duas expressões com mesma referência podem ser trocadas uma pela outra, sem que com isso, mude o valor verdade (DUVAL, 2012a). Por exemplo, as maneiras distintas de realizar a operação $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$, ou trabalhando com soma de fração, em que se mantém o sistema semiótico de representação, ou com soma de decimais, em que há uma mudança no sistema de representação. Nestes casos, é mantida a referência. De acordo com Duval (2011b), o limite da contribuição de Saussure se deu por considerar apenas as escritas simbólicas utilizadas em álgebra e análise, não dando importância aos outros sistemas semióticos da Matemática.

2.2 OS TRÊS MODELOS SEMIÓTICOS E A ATIVIDADE MATEMÁTICA

Embora a existência de uma consciência semiótica evidenciada nos três modelos de análise brevemente apresentados, relacionados com três origens distintas, Duval (2011b) é enfático ao afirmar que eles não têm nada em comum, nem a definição de signo, nem os critérios de análise e nem mesmo a descrição do funcionamento cognitivo os quais possibilitam. Enquanto para Peirce, os domínios de referência para análise dos signos se baseiam nas ciências em geral e na lógica, para Saussure se baseia na linguística, e, para Frege, na Matemática, mais precisamente na análise e aritmética.

Cada um destes três modelos de análise dos signos considerou uma ideia essencial para poder analisar o papel deles e das representações no conhecimento em geral, sendo a noção de signo diferenciada em cada uma destas teorias. Aliás, com relação ao funcionamento da atividade matemática e seu aprendizado, Duval (2011b) afirma que nenhum deles é apropriado para pensar uma abordagem semiótica de análise. É a partir da comparação dos três modelos que se torna possível, de acordo com este autor (2011b), extrair a noção de representação semiótica com a peculiaridade essencial de não reduzir o papel dos signos no funcionamento cognitivo do pensamento a uma simples codificação de informação ou de conceitos.

Assim sendo, Duval (2011b) propõe reformulações nas questões diretrizes dos três modelos (Peirce, Sassure e Frege) a fim de descrever processos de compreensão e causas das dificuldades especificamente da atividade matemática. A reformulação da questão de Peirce ficaria: "*Em* *função de quais critérios podemos classificar todos os tipos de representação utilizáveis em matemática e no ensino de matemática?*" (p. 36, grifo do autor); da questão de Saussure: "*Quais processos de discriminação permitem RECONHECER AS UNIDADES DE SENTIDO MATEMATICAMENTE PERTINENTES em uma expressão ou em uma representação semiótica*?" (p. 36, grifo do autor) e, por fim, de Frege: "*Quais são os mecanismos de substituição ou de transformação próprios a cada tipo de representação utilizada em matemática*?" (p. 36, grifo do autor).

A partir desses apontamentos, é possível retornar às questões: Mas, o que são representações semióticas? E o que elas representam na atividade matemática?

2.3 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

As questões reformuladas por Duval (2011b) são algumas que formam a base da TRRS, preconizada por este autor. Outras distinções são importantes para situarmos as representações semióticas em relação às teorias sígnicas já vistas. Uma delas é entre *representações* e *signos*. Apesar de, na atividade de conhecimento, as duas cumprirem a função comum de "se colocar no lugar de" e surgirem da mesma exigência fundamental de jamais serem confundidas com o objeto, a distinção entre elas se encontra na natureza da relação com o próprio objeto. A relação entre signo e objeto não contém interação, ou seja, é apenas uma relação de referência que depende do sistema semiótico utilizado, como uma língua ou um sistema de numeração (DUVAL, 2011b).

As representações semióticas apresentam duas características que não são encontradas nas definições de signos. Uma destas características é que a organização interna é diferente de uma representação semiótica para outra, como exemplos podemos tomar a organização de uma frase que é diferente da organização de uma equação e a organização de um gráfico é diferente da organização de uma figura geométrica. A outra característica é que nas representações semióticas "existem sempre maneiras de distinguir as unidades de sentido ou os níveis de organização" (DUVAL, 2011b, p. 38). Isto quer dizer que as representações semióticas podem ser exemplificadas com as frases na língua natural, equações, figuras, esquemas e gráficos, enquanto os signos são as palavras, algarismos, letras, pontos e traços.

Além da distinção entre representação e signo, outra fundamental para a TRRS é com relação às representações semióticas e as não semióticas. Segundo Duval (2011b), a primeira é o resultado de uma produção intencional a partir da mobilização de um sistema semiótico, enquanto a segunda resulta de uma produção automática, não intencional, ou seja, efeito do objeto agindo diretamente nos sistemas receptores.

De modo geral, para este autor (2011b), a ideia de "evocar o que está ausente" e a de "comunicar" um pensamento que realmente importa sobre o objeto é o potencial que as representações semióticas possuem. Segundo ele, a necessidade de representações semióticas na atividade matemática, reside em duas características fundamentais: a de referência a um objeto e a de transformação em outras representações semióticas. A primeira, relacionada à questão epistemológica de acesso aos objetos matemáticos e a segunda, à questão cognitiva e metodológica da natureza da atividade matemática e funcionamento do pensamento. Metodológica, pois a maneira de trabalhar ou os "gestos intelectuais" (DUVAL, 2011b, p. 41) exigidos são descritos e analisados em termos de transformações de representações semióticas.

Na análise da questão epistemológica, Duval (2011b) afirma que, quando o acesso a um objeto é direto e imediato, acontece uma justaposição do objeto às suas representações. Por outro lado, em não sendo imediato, como no caso dos números naturais, a apreensão "passa obrigatoriamente por representações semióticas extremamente variadas, que vão das denominações verbais mais rudimentares aos sistemas de numeração mais complexos" (DUVAL, 2011b, p. 46). Isto torna o acesso aos objetos matemáticos, semiótico e não empírico o que leva a consequências cruciais nos processos de ensino e aprendizagem. Outro ponto fundamental é a exigência epistemológica de jamais confundir o objeto representado com as suas representações. Esta exigência evidencia o fato, possível fonte de dificuldades, que duas representações diferentes não representam a mesma "coisa" do objeto que representam. Quando o objeto é acessível de forma empírica, essa dificuldade é ultrapassada de forma simples uma vez que o objeto é acessível fora das suas representações.

Diferentemente, na Matemática, onde os objetos só são acessíveis pelas suas representações, a justaposição somente pode ocorrer entre as suas representações, jamais entre um objeto e sua representação. Desta forma, é preciso sempre dispor de, no mínimo, duas representações de conteúdos distintos para que não ocorra a confusão de um objeto com sua representação, como pontuado anteriormente.

Perante isso, Moretti e Thiel (2012) propõem um esquema triádico que se baseia nas ideias de Peirce e Saussure e leva em conta os polos constitutivos de toda a representação concebida por Duval (2011b).

Figura 3 - Esquema constitutivo dos polos de representação.

Fonte: Moretti e Thiel (2012, p. 383).

Neste esquema, é possível observar que o signo "se reveste de uma entidade que possui um conteúdo próprio (um conceito), que não é o mesmo do objeto representado" (MORETTI; THIEL, 2012, p. 383), como na concepção de Saussure (2008), e de uma forma que leva em conta o sistema no qual ele foi produzido. Ou seja, a representação triádica utiliza-se da analogia da folha de papel de Saussure, que congrega de forma inseparável, de um lado, o conteúdo da representação e, do outro lado, a forma da representação; e referencia Peirce com relação ao fato de o objeto representado não ser o mesmo do conteúdo do registro (MORETTI; THIEL, 2012).

No esquema da figura 3, Moretti e Thiel (2012) também evidenciam a noção de referência em Frege relacionada ao fato de que, para um mesmo objeto, a mudança de forma de uma representação implica na mudança de conteúdo da representação, não necessariamente na mudança de registro. Ou seja, a informação imediata do objeto que o registro apresenta está relacionada à sua forma e é o conteúdo explícito (MORETTI, THIEL, 2012).

A noção de representação semiótica, então, perpassa a consideração de sistemas semióticos distintos e de uma operação cognitiva de "mudança de forma", mais precisamente, uma conversão das representações de um sistema semiótico para outro. Os trabalhos atuais que evocam as representações semióticas, contudo, não evidenciam o papel fundamental destas nas atividades cognitivas (DUVAL, 2009). Primeiro, pois esses trabalhos somente apontam a função de comunicação das representações semióticas, deixando de lado as funções de tratamento e de objetivação. Segundo, pois o emprego das representações semióticas fica reduzido à função de expressão, subordinado ao funcionamento das representações mentais, isso é, as representações semióticas são vistas como um suporte para as representações mentais, sendo possível passar, espontaneamente, da forma do representante ao conteúdo representado. Esta última ideia pode ser facilmente desconstruída quando observamos as dificuldades dos estudantes quando solicitados a mudar a forma de uma representação, ou seja, ao realizar conversões. Essa dificuldade aponta para a questão geral da semióse no funcionamento do pensamento e também para a questão das condições de diferenciação entre representante e representado, conforme pontua Duval (2009):

> O fenômeno importante para compreender o papel da *semiósis* no modo como funciona o pensamento e na maneira como se desenvolvem os conhecimentos não é o emprego deste ou daquele tipo de signos, mas a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados. A *semiósis* é inseparável de uma diversidade inicial de tipos de signos disponíveis (p.35).

A importância deste fenômeno foi reconhecida por Peirce em seus estudos sobre ícones, índices e símbolos, contudo, as ideias de Peirce são muito gerais e não evidenciam as relações possíveis entre sistemas semióticos e a possibilidade de converter uma representação formada dentro de um sistema em uma representação de outro sistema (DUVAL, 2009).

A partir destas compreensões e com base nelas, a seguir evidenciamos outros aspectos fundamentais da TRRS.

2.4 A HIPÓTESE FUNDAMENTAL DA APRENDIZAGEM

Dentre os diversos tipos de sistemas semióticos, têm-se os que são, segundo Duval (2009), sistemas semióticos de representação por cumprirem as três atividades cognitivas inerentes a toda representação. São elas:

> Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (p. 36-37).

A citação se refere às atividades cognitivas fundamentais que um registro[3] de um sistema semiótico deve permitir além da função de *comunicação*: a *formação de uma representação*, o *tratamento* e a *conversão*. Neste caso, a linguagem natural, as linguagens simbólicas, as representações gráficas e as figuras geométricas são exemplos de sistemas semióticos que cumprem a função de representação.

Ao se referir às representações semióticas, Duval (2009) enfatiza três atividades cognitivas as quais elas devem permitir. A primeira está relacionada com a *formação* de uma representação em um sistema determinado. A segunda, denominada de *tratamento*, consiste em transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, ou seja, é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro. Para exemplificar as operações de tratamento, podemos citar a resolução de uma equação, a resolução de uma expressão numérica sem mudar a forma de representação dos números, modificações na equação de uma parábola usando a técnica de completar quadrados e na lei de uma função utilizando propriedades de potenciação ou do fator comum em evidência.

A *conversão*, por sua vez, baseia-se em converter as representações de um sistema em representações de outro sistema, ou, como Duval (2003) afirma: "são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica" (p.16). Neste caso há mudança de registro,

---

[3] Duval (2003, p.14) usa o termo "registro" de representação, para designar diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática.

pois cada uma das formas de representação (escrita algébrica e representação gráfica) possui regras próprias de transformação, internas ao sistema semiótico, conservando, contudo, o objeto, mesmo havendo a mudança de registro. A todos os sistemas que possibilitam essas três atividades, Duval (2009) nomeou de *registros de representação semiótica*, sendo que, a relação entre *semiósis* e *noésis*, só é válida para esses registros.

Em síntese, para Duval (2009) toda a análise de aquisição e construção de conhecimentos matemáticos perpassa três fenômenos estreitamente ligados: a *diversificação dos registros de representação semiótica*, a *diferenciação entre representante e representado* ou entre forma e conteúdo de uma representação semiótica e a *coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica*. Neste último fenômeno, a coordenação não depende apenas do conhecimento de regras de correspondência entre os sistemas semióticos, mas também, e é justamente a maior fonte de dificuldades, dos fenômenos de não congruência entre representações produzidas.

Na aprendizagem matemática, as atividades cognitivas de conceitualização, raciocínio, resolução de problemas e compreensão de textos requerem, além da linguagem natural ou das imagens, outros sistemas de expressão e representação, como por exemplo, os distintos sistemas de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, entre tantos outros (DUVAL, 2009).

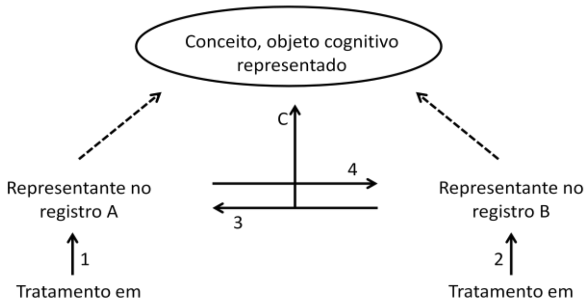
De fato, para este autor, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, mas tem papel fundamental na atividade matemática. Por isso, a distinção do objeto de suas representações, a ideia errônea que as representações semióticas são somente o meio que o indivíduo utiliza para exteriorizar suas representações mentais e as *variações de congruência semântica* entre registros de representação semióticas distintos, enquanto fenômenos que se manifestam mais intensamente nas operações de conversão são os principais aspectos causadores das dificuldades na aprendizagem matemática.

O entendimento das variações de congruência semântica é fundamental para a compreensão da aprendizagem, pois, a partir dele pode-se concluir a respeito do custo cognitivo de uma conversão. Ao observar dois registros de representação em que houve uma conversão, duas situações podem ocorrer: “ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência" (DUVAL, 2003, p.19). Ou seja, existirá congruência quando dois registros de representação semiótica distintos representam, ao menos parcialmente, o mesmo objeto, ou ainda, quando obedecerem a três critérios de congruência:

> (1°) Possibilidade de uma correspondência "semântica" entre os elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar.
> (2°) Univocidade semântica terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significante elementar no registro de representação de chegada.
> (3°) Organização das unidades significantes: As organizações respectivas das unidades significantes das duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações (DUVAL, 2009, p. 69-70).

São as variações da congruência semântica, analisadas com base nos critérios supracitados, que possibilitam entender as dificuldades dos estudantes na atividade cognitiva de conversão. Diante destas considerações, a aprendizagem matemática na perspectiva da TRRS reside na seguinte hipótese: "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão" (DUVAL, 2012b, p. 282). Ademais, cada registro de representação utilizado para representar um objeto matemático evidencia alguma característica ou propriedade deste objeto que não estará tão evidente em outro registro. Conforme Moretti (2002), "de um ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados" (p. 347), por isso a necessidade de várias representações para a compreensão de um objeto. A figura 4 a seguir representa a hipótese fundamental de aprendizagem para Duval (2012b).

Figura 4 - Hipótese Fundamental da Aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.



Fonte: Duval (2012b, p. 282)

Na figura 4, as flechas **1** e **2** correspondem às transformações internas a um registro, os *tratamentos*, e as flechas **3** e **4** às transformações externas, ou seja, às mudanças de registro por *conversões*, as quais são imediatas ou não, dependendo das variações de congruência semântica. A flecha **C** representa a compreensão integral de uma representação supondo uma coordenação de dois registros. As flechas pontilhadas demonstram a distinção entre representante e representado.

Com base nas ideias fundamentais apresentadas da TRRS, Duval (2011a) se dedicou à exploração do objeto de estudo deste trabalho: o esboço de curvas. A seguir, apresentamos aspectos importantes desta exploração.

2.5 O ESBOÇO DE CURVAS NA PERSPECTIVA DA TRRS

De acordo com elementos da TRRS de Raymond Duval, brevemente exposta anteriormente, a aprendizagem matemática está relacionada, entre outras coisas, à coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica. Esta coordenação (conversão) pode ser fonte das dificuldades de compreensão devido aos aspectos vinculados às questões de não congruência entre os registros de representação semiótica. Estas dificuldades estão presentes em certa medida em todas as áreas da Matemática e aparecem de forma abundante no *esboço de curvas*.

Sobre este objeto matemático especificamente, Duval (2011a) credita as dificuldades dos estudantes à articulação entre os registros gráfico e algébrico. Se esta atividade de conversão, do registro algébrico para o gráfico, for realizada somente associando pares ordenados de números a pontos no plano cartesiano, ela será uma simples codificação e possibilitará apenas uma leitura pontual da representação gráfica, gerando uma apreensão superficial e dificuldades de compreensão do objeto. Mesmo identificando inúmeros pontos de uma mesma curva no plano cartesiano a partir da associação de pares de números, Silva (2008) enfatiza que “o procedimento não é suficiente para garantir o traço contínuo que representa a curva graficamente e muito menos a compreensão deste processo” (p.30). Isto, pois o conceito de continuidade, o qual poderia dar essa garantia, não é trabalhado no EM.

Uma apreensão global e qualitativa do esboço de curvas, no entanto, torna-se possível desde que, nesta atividade de conversão, se consiga levar em conta tanto os valores escalares das equações (coeficientes) enquanto registros de saída, quanto as variáveis visuais próprias da representação gráfica (inclinação, concavidade, intersecção com os eixos) enquanto registro de chegada. Isto, pois, segundo Duval (2003), para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, é fundamental a articulação entre as variáveis cognitivas que são particulares do funcionamento de cada um dos dois registros e que determinam quais as unidades de significado pertinentes em cada um dos dois registros.

Levando em conta a necessidade que ocorra a conversão entre registros, e que a abordagem comumente utilizada no ensino e nos livros didáticos atualmente não possibilita esta atividade[4], mas somente a passagem da expressão algébrica para a gráfica, então, de acordo com Duval (2011a), as dificuldades no esboço de curvas se encontram na “falta de conhecimento das *regras de correspondência semiótica* entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica” (p. 97, grifo nosso). Esta falta, por sua vez, pode ser provocada por um ensino que se atém à passagem do registro algébrico para o gráfico através de uma abordagem ponto a ponto, o que, segundo este autor (2011a), constitui um obstáculo para a aprendizagem. Duval (2009)

---

[4] No terceiro capítulo são apresentadas pesquisas que afirmam que um ensino cujo esboço de curvas pautado unicamente na abordagem ponto a ponto, não possibilita a conversão entre registros.

ressalta que, se a conversão ocorre no sentido *escrita algébrica de uma equação → gráfico*, nenhuma dificuldade específica parece surgir, contudo, quando o sentido é inverso, os estudantes apresentam mais dificuldades. Isto ocorre, pois as unidades significativas de um gráfico não são determinadas em relação aos pontos encontrados e sim por valores visuais do gráfico, destacado pelos dois eixos orientados. *Unidades significativas* da expressão algébrica correspondem a *variáveis visuais* gráficas e, "o aluno que não as discrimine é como cego para a conversão inversa da que é classicamente ensinada. Isso quer dizer que ele tem poucas chances de fazer uma "leitura correta" dos gráficos" (DUVAL, 2009, p. 79).

No ensino de representações gráficas são possíveis abordagens distintas, as quais não consideram os mesmos dados visuais. São elas:

- *abordagem ponto a ponto*: consiste em, tendo como referência os eixos graduados, encontrar alguns pontos particulares (pares de números) e marcá-los no plano referencial. Esta é a abordagem mais utilizada, senão a única, no ensino tradicional. Ela pode favorecer o traçado da função afim ou de intervalos de outras funções.

- *abordagem de extensão do traçado*: corresponde às atividades de interpolação e extrapolação de representações gráficas. De acordo com Duval (2011b), essa abordagem se mantém puramente mental e se apoia em um conjunto infinito de pontos e, como a anterior, não considera as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica, se mantendo na busca por pontos particulares não relacionando com a expressão algébrica.

- *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*: sendo o objeto representado pela imagem formada no conjunto traçado/eixos e também por uma expressão algébrica, esta abordagem consiste em perceber as modificações que a mudança do gráfico gera na expressão algébrica e vice e versa e identificar as variáveis visuais pertinentes relacionadas às modificações. Ou seja, é a identificação das variáveis visuais pertinentes que permite a articulação entre registros, o que é essencial para a compreensão. Para tanto, a análise da congruência entre os registros faz-se necessário.

Com a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, "não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica"" (DUVAL, 2011b, p. 99, grifo do autor). Isto significa que "a curva não é vista apenas como a ligação de alguns pontos previamente determinados” (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 44), não se limitando no fazer um desenho ou imagem geométrica que representa uma equação. Mais do que isso, a abordagem que permite a *interpretação global das propriedades figurais,* possibilita a identificação de quais modificações na expressão algébrica refletem em modificações na expressão gráfica da curva, e vice e versa, contribuindo para uma melhor aprendizagem (CORRÊA; MORETTI, 2014). Ou seja, é necessário um reconhecimento de variáveis visuais, pertinentes ao registro de representação gráfico, e de unidades simbólicas significativas, pertinentes ao registro de representação algébrico (simbólico). Contudo, não basta apenas conhecer as variáveis visuais e as unidades simbólicas significativas, faz-se necessário *coordená-las*.

A abordagem de interpretação global preconizada por Duval é base teórica de algumas pesquisas na área de Educação Matemática, principalmente relacionadas ao estudo de funções. Essas pesquisas serão apresentadas no quarto capítulo devido à relevância de seus resultados na construção deste trabalho.

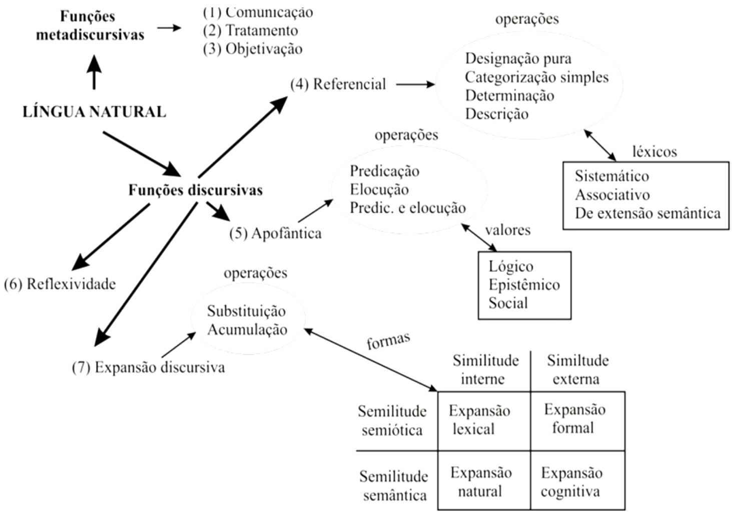
A seção a seguir apresenta aspectos da teoria de Duval relacionados às funções e operações que um discurso pode ou deve assumir na resolução de problemas matemáticos.

2.6 AS FUNÇÕES DO DISCURSO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Além das questões anteriormente referenciadas, Duval (2004) se dedicou a estudar as diferentes funções e operações do discurso e uso de uma língua no funcionamento do pensamento. Segundo ele, os diferentes símbolos científicos criados, o desenvolvimento de línguas formais e a divergência entre os distintos empregos da língua natural têm despertado grande interesse sobre o papel de uma língua no funcionamento do pensamento e sobre a aprendizagem em sala de aula. Uma língua permite um discurso e a “prática de um discurso é inseparável de um certo funcionamento cognitivo” (DUVAL, 2004, p. 86).

Assim, as funções que um discurso assume são variadas e podem ser classificadas em duas: as funções meta-discursivas e as discursivas. Um esquema das funções de um discurso proposto por Brandt, Moretti e Bassoi (2014), com base em Duval (2004), está apresentado na figura a seguir.

Figura 5: Funções metadiscusivas e discursivas no uso de uma língua.



Fonte: Brandt, Moretti e Bassoi (2014, p. 480) com base em Duval (2004, p. 89).

As funções metadiscursivas são comuns a todos os registros de representação linguísticos, simbólicos e figurativos, e permitem comunicar uma informação. São elas: *a comunicação, o tratamento e a objetivação*. A *comunicação* é a função necessária a qualquer sistema semiótico de representação. O *tratamento* é a função de transformação que ocorre internamente a um registro. Esta transformação possibilita extrair do registro outras informações, ou melhor, o discurso não somente comunica uma informação, mas também permite transformá-las. A *objetivação*, por sua vez, está relacionada com o tomar consciência de algo antes que um trabalho de exteriorização com fins de organização ocorra. Este tipo de exteriorização pode acontecer não apenas na língua, mas por outros meios, como por exemplo, por um simples desenho (BRANDT, MORETTI, BASSOI, 2014). Contudo, a influência das funções metadiscursivas sobre a organização de um discurso é indireta e dependerá das *funções discursivas* que predominam e da utilização de algumas *operações*.

As funções discursivas são as funções cognitivas que um sistema semiótico deve cumprir para que um discurso seja possível. São quatro as funções discursivas e estão relacionadas com: designar objetos (*função referencial*), dizer alguma coisa sobre os objetos designados a partir de uma proposição enunciada (*função apofântica*), vincular a proposição enunciada com outras de forma coerente (*função de expansão discursiva*) e marcar o valor, o modo e o estatus para uma expressão (*função de reflexividade*). A cada uma dessas funções discursivas, operações estão relacionadas. Sobre isso, Duval (2004) afirma que um discurso não pode ser analisado somente com base nas suas formas linguísticas de expressão, mas que é necessário levar em consideração as funções discursivas que este discurso cumpre e as operações mobilizadas para cumpri-las. Assim, a análise de um discurso se embasa na análise funcional das operações que permitem cumprir as quatro funções discursivas.

No caso da função referencial, conforme o esquema da figura 5, tem-se:

- *Designação pura*: consiste na identificação de um objeto.
- *Categorização simples*: identificação de um objeto por uma de suas características.
- *Determinação*: torna preciso o campo de aplicação da operação de categorização.
- *Descrição*: consiste em identificar um objeto pelo cruzamento de diversas operações de categorização; é uma operação de categorização mais complexa, por meio da qual se pode nomear qualquer objeto, uma vez da impossibilidade de cada objeto ou classe de objeto ter um nome – limitação lexical.

As operações de categorização simples e de descrição não são suficientes por si só para designar um objeto, por isso, para tanto, elas devem estar combinadas com a operação de determinação. Esta combinação ocorre a partir de um conjunto de elementos (signos, palavras ou símbolos), chamados léxicos. Para a função de designação, um léxico pode ser de natureza associativa, sistemática e de extensão semântica.

> Por exemplo, seja AB o segmento de reta; seja AB o lado do triângulo ABC. Nesses casos, o léxico AB é associado ao segmento de reta e também ao lado do triângulo. O sistema posicional decimal de numeração é um exemplo claro de léxico sistemático, uma vez que qualquer número é designado a partir da posição e da combinação de dez signos iniciais. Já o procedimento por extensão semântica permite que novos objetos sejam criados por metonímia, metáfora, sinédoque

> etc (BRANDT, MORETTI, BASSOI, 2014, p. 482).

Os exemplos da citação clarificam a função dos léxicos da função referencial. A designação de objetos, contudo, não é suficiente para permitir uma atividade discursiva. Quando uma língua ou um sistema de signos cumprirem apenas esta função, ela ou ele se reduz a um código. Uma língua deve permitir dizer algo, em forma de proposição, sobre os objetos que designa, ou seja, uma língua deve permitir a <u>função apofântica</u>. São duas as operações que podem ser efetuadas de forma isolada ou em conjunto: *predicação* e *elocução*. A predicação consiste em vincular uma propriedade, relação ou ação, com uma expressão que designe objetos. Isto implica o recurso a expressões referenciais e o enunciado formado a partir disso pode ter um *valor epistêmico* e um *valor lógico* ou um dos dois. A elocução está relacionada com o engajamento do locutor àquilo que ele quer dizer, consiste em conferir ao enunciado produzido um *valor social* que compromete o locutor ou o destinatário. Assim, é o ato de elocução que permite a uma expressão que provêm de uma operação de predicação, seu valor de asserção, declaração, pergunta ou de ordem, etc.

Uma unidade apofântica depende, então, de um ato de elocução ou predicação, ou de elocução e predicação ao mesmo tempo. Este enunciado pode ter um valor social, epistêmico ou lógico, em geral não explícito. No caso em que o valor lógico sobressai sobre os demais, como no discurso científico, a função de comunicação está presente, mas também, mesmo implícita, está a função de tratamento, que é fundamental para a expansão discursiva.

Ademais, uma língua não deve somente permitir expressar enunciados completos (função apofântica), mas também deve permitir vincular estes enunciados a inferências, possibilitando assim relatos, descrições, explicações, argumentações, entre outros. É a <u>função de expansão discursiva</u> que permite “ao interlocutor fazer inferências, tornando explícito o que, no discurso, está implícito” (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, P.483). A expansão do discurso ocorre por meio das operações discursivas as quais são caracterizadas pelo modo como ocorre a progressão do discurso: *lógico* ou *natural*. Para um discurso caracterizado pela expansão lógica, Brandt, Moretti e Bassoi (2014) apresentam o seguinte exemplo: “se ΔABC é isósceles com $\hat{A} = \hat{B}$, ΔDEF é isósceles com $\hat{E} = \hat{F}$ e se Â ≡ Ê, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes” (p. 483). Para um discurso com expansão do tipo natural, os autores utilizam o exemplo: “a soma de dois números ímpares é um número par” (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 483).

As formas de operação da função de expansão discursiva são: por *substituição* ou *acumulação*. Quando se observa que a progressão do discurso ocorre pela substituição das preposições pelo resultado das novas inferências, ou seja, quando, ao se fazer uma substituição de uma preposição por uma inferência, esta preposição pode ser esquecida sem prejuízo para o desenvolvimento posterior do discurso, temos a expansão discursiva por substituição, como em um cálculo (DUVAL, 2004), por exemplo. Para o autor, as inferências de um discurso desenvolvido nesse modelo requerem que se note cada vez mais a aplicação da regra utilizada, a qual pode ser explícita ou implícita ao discurso. Contudo, na maioria das vezes, em um relato, uma descrição ou explicação, por exemplo, a progressão do discurso não ocorre desta forma. Ela ocorre através da acumulação de informações e recursos novos. A compreensão deste tipo de discurso ocorre a partir da apreensão abrangente de todas as frases e as relações que existem entre elas.

As operações da função de expansão discursiva dependem das unidades apofânticas (proposição ou frase) que as compõem. Essas unidades apofânticas podem ser consideradas de acordo com seu *conteúdo* ou seu *estatuto*. A expansão discursiva por substituição depende do estatuto dos respectivos enunciados, que podem estar prévia e explicitamente fixados desde o começo, de acordo com o marco teórico e com as hipóteses que fundamentam o enunciado; ou apenas no momento em que ele aparece, durante o discurso. Assim, esse estatuto faz parte do sentido do enunciado (DUVAL, 2004). Quando a expansão discursiva acontece por acumulação, a evolução do enunciado depende do conteúdo expresso. O estatuto é quase sempre esquecido, pois se imagina que as informações expressadas têm o mesmo valor epistêmico e estão relacionadas ao mesmo assunto.

Duval (2004) e Brandt, Moretti e Bassoi (2014) salientam as quatro formas que possibilitam o reconhecimento do propósito que há na unidade de uma série de frases: a *expansão lexical*, a *expansão formal*, a *expansão natural* e *expansão cognitiva*. A utilização do discurso pode ser feita por meio de uma dessas formas ou por mais de uma, combinadas em um texto, contanto que sejam “respeitadas as regras de coerência e a gramática textual” (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 484). Assim, para pensar a aprendizagem da produção escrita dos estudantes, bem como a compreensão de texto, é preciso considerar as capacidades de distinção dessas quatro formas de expansão discursiva.

A expansão lexical é a recuperação dos distintos sentidos do que aparece com a mesma unidade lexical, por exemplo: o pelo do cachorro é preto; vou pelo lado de dentro (BRANDT, MORETTI, BASSOI, 2014, p. 484). A expansão formal é a aplicação de regras de substituição que se baseiam em símbolos que representam variáveis e proposições, por exemplo: $\forall\, x\; e\; y\; \in\; R$, se $x > y$ e $y > z \rightarrow\; x > z$ (BRANDT, MORETTI, BASSOI, 2014, p. 484). A expansão cognitiva se caracteriza pelo emprego especializado da língua natural, por exemplo: Um número ímpar excede um número par em uma unidade, logo, a soma de dois ímpares resulta num número par (BRANDT, MORETTI, BASSOI, 2014, p. 485). De acordo com estes autores, esse vocabulário utilizado neste tipo de expansão,

> vai expressar significações estabelecidas pelas definições, pelos enunciados das demonstrações, por observações, experiências etc. São associados a essa expansão discursiva as descrições, as explicações técnicas e teóricas, além de algumas demonstrações. Em relação às demonstrações, o que as difere da forma de expansão formal está no fato de que as regras de substituição, baseadas apenas na forma do símbolo, já não são relevantes (BRANDT, MORETTI, BASSOI, 2014, p. 485).

E, por fim, a expansão natural se caracteriza pelo emprego comum da língua, utilizando a rede semântica natural e os conhecimentos pragmáticos próprios do meio sociocultural dos locutores (DUVAL, 2004).

A função de expansão discursiva está ligada às diferentes formas pelas quais uma unidade apofântica pode transformar-se em continuidade discursiva a partir de outra unidade apofântica. A relação de continuidade de duas unidades apofânticas se baseia na existência de similaridade entre elas (DUVAL, 2004) (similaridades semióticas e semânticas ou similaridades internas ou externas). Segundo Brandt, Moretti e Bassoi (2014),

> quando há uma repetição dos mesmos significantes de um enunciado a outro, temos uma similaridade semiótica. Por exemplo, a palavra

> "razão" (significante) pode ser empregada em duas expressões referenciais não equivalentes: "a razão entre duas grandezas é..." ou "ele tem razão ao afirmar que...". Se expressões referenciais equivalentes são empregadas em enunciados diferentes, provocando uma invariância referencial, enquanto que a diferença de sentido entre elas permite que a segunda tenha um progresso discursivo em relação à primeira, então estamos falando de uma similaridade semântica. Por exemplo, "o produto de dois números é positivo" ou "$x.y > 0$" (p. 485).

Os exemplos da citação deixam claro o significado de similaridades semióticas e semânticas. A função de reflexividade, por sua vez, está relacionada com o dever de uma língua para com a explicitação no enunciado da maneira como o locutor emprega a língua para dizer o que quer. Ou melhor, está relacionada ao vínculo entre o ato intencional de produção de um enunciado e suas condições de interpretação, também chamado de enunciação. Esta função requer a possibilidade de fazer aparecer no enunciado, marcas da sua enunciação. Estas marcas, não são somente importantes para situações de comunicação social, mas também são para as formas de discurso com fins científicos. Quando Duval (2004) explicita a função de reflexividade, ao invés de uma função elocutória, chama a atenção para a diferença entre o ato de fala realizado e a explicitação linguística do ato de fala realizado. Devido ao fato de um enunciado depender de um ato de predicação ou de elocução, este tem um valor social, epistêmico ou lógico não explícito. Explicitar o valor de um enunciado é integrar este enunciado em um novo enunciado que declara este valor, possibilitando assim, a modificação do valor de um enunciado inicial e, assim, modificar o sentido do enunciado (DUVAL, 2004).

A partir da compreensão das ideias expostas sobre as funções discursivas e as operações as quais cumprem, realizamos reflexões analíticas da resolução dos estudantes de determinadas atividades no plano do discurso. As análises e reflexões perpassaram a *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*, a qual pressupõe as operações de *tratamento* e *conversão* e, além disso, as formas discursivas utilizadas (narração, descrição explicação e raciocínio), as quais possibilitaram ao estudante fazer inferências ou explicitações, tendo em vista as *funções de expansão discursiva, referencial e apofântica*.

O capítulo a seguir é o resultado de uma revisão bibliográfica que aborda questões históricas e de ensino relativas ao Cálculo, à noção de infinitésimos na construção do Cálculo e às funções. Como as reflexões que permeiam este trabalho se baseiam no desenvolvimento da noção de infinitésimo no âmbito do EM de forma intuitiva, é relevante o entendimento das questões históricas da construção destes conceitos e das abordagens atuais no ensino.

3 FUNÇÕES E CÁLCULO: ÂMBITO CIENTÍFICO E PEDAGÓGICO

O conceito de função e suas distintas representações percorreram um longo caminho, por diversos anos, para chegarem ao que consta atualmente nos livros didáticos. Sua origem é baseada nas ideias de relação e variação entre grandezas e seu conceito é considerado um dos mais importantes na Matemática por ser o alicerce da Análise Matemática e por constituir o objeto a partir do qual é possível compreender fenômenos diversos, em todas as áreas da ciência e vida humana.

A noção de infinitésimo, por sua vez, considerada inconsistente durante muito tempo aos olhos dos matemáticos, permeou o desenvolvimento, ao longo de séculos de pesquisas na área, das ideias relacionadas ao entendimento do movimento e da variação de funções, ou seja, dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Por isso, dentre as questões relacionadas à construção de um caminho alternativo para esboçar curvas de funções na perspectiva deste trabalho, torna-se importante aprofundar as compreensões sobre: as funções e suas distintas representações; a noção de infinitésimo e seu papel na construção do pensamento variacional e as concepções atuais de ensino. Este aprofundamento se deu em relação à história da construção dos conceitos e ao atual ensino, a partir de uma revisão em trabalhos de revistas, eventos, teses e dissertações da área.

3.1 FUNÇÕES

3.1.1 Construção Histórica

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática por constituir o fundamento da Análise Matemática, a qual é teoria base do desenvolvimento da mesma. A seguir, são expostas duas definições de funções de livros didáticos muito utilizados em salas de aula, citados por Fonseca, Santos e Nunes (2013, p. 2), sob a forma de uma sentença que relaciona grandezas.

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in$ A existe um só $y \in$ B tal que $(x, y) \in f$ (IEZZI, 2004, p.81)[5].
>
> Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ (DANTE, 2007, p.59)[6].

Estas definições, em tal estado de formalismo matemático, foram construídas ao longo de vários séculos. A compreensão dos caminhos históricos pelos quais esta construção percorreu é fundamental neste trabalho uma vez que esta compreensão perpassa inevitavelmente a questão da *dependência entre grandezas* e a *variabilidade*. A elaboração do conceito de função teve como pilar o estudo das variações quantitativas presentes nos fenômenos naturais (REZENDE, 2010) e o seu desenvolvimento ocorreu em três etapas até a metade do século XIX: a Antiguidade, a Idade Média e o Período Moderno.

3.1.1.1 Antiguidade

De acordo com Fonseca, Santos e Nunes (2013), noções primitivas de funções podem ser encontradas em relatos de povos antigos relacionados à contagem, enquanto correspondência entre um conjunto de objetos e uma sequência de números naturais, e às quatro operações aritméticas elementares. Em registros de um dos povos mais antigos, os *Babilônios*, é possível encontrar sinais de que este povo teria uma ideia, ainda que muito primitiva, sobre função, por volta de 2000 a.C. As tábuas sexagesimais de quadrados, de cubos e de raízes quadradas utilizadas por esse povo, na antiguidade, revelam a ideia de correspondência funcional (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013).

Os povos *Egípcios*, cujo campo de pesquisas históricas matemáticas é considerado o mais rico entre os povos antigos, também por volta de 2000 a.C., deixaram muitos registros em papiros de problemas do cotidiano os quais podiam ser resolvidos por equações de

---

[5] IEZZI, G. e MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*: Conjunto e Funções. Ed. São Paulo-SP: Atual, 2004.

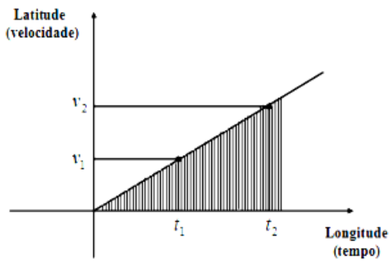
[6] DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações*. Rio de Janeiro – RJ. Editora Ática, 2007.

primeiro grau. A forma como este povo resolvia as equações, pelo Método da Falsa Posição[7], demonstra o domínio da ideia de relação funcional entre duas grandezas.

3.1.1.2 Idade Média

O estudo e a tipificação dos movimentos dos corpos, realizados pelos filósofos no século XIV, representam um marco histórico no processo de construção do conceito de função. Um dos exemplos e contribuições mais notáveis no desenvolvimento da representação gráfica da noção de função foi dado pelo Bispo Nicolau de Oresme (1323-1382), o qual desenvolveu uma teoria geométrica das latitudes e longitudes das formas, que apresentam diferentes graus de intensidade e extensão (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013). Nesta teoria, considerada como precursora na representação gráfica de uma função, Oresme percebeu que poderia trabalhar com duas variações ao mesmo tempo, desenvolvendo algumas ideias gerais sobre a variável dependente e independente de certas quantidades. Para tanto, ele apresentou uma representação gráfica da velocidade em relação ao tempo de um móvel que se move com aceleração constante. Representou por um ponto cada instante de tempo (longitude) numa reta e, a cada instante de tempo, traçou um segmento vertical (latitude) cujo comprimento representava a velocidade nesse instante (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013), conforme consta na figura 6.

Figura 6 - Representação gráfica descrita por Oresme.



Fonte: Fonseca, Santos e Nunes (2013, p. 6).

[7] Ver MEDEIROS, A. e MEDEIROS C. O método da falsa posição na história e na educação matemática. Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 545-557, 2004.

As extremidades dos segmentos da figura 6 estão alinhadas e formam um segmento de reta que representa a velocidade em função do tempo. Esta representação, de acordo com Rezende (2010),

> é duplamente significativa: por um lado, mostra duas grandezas relacionadas entre si e, por outro lado, ilustra a variação entre elas por meio de um gráfico. O conceito de função se estabelece, implicitamente, por meio da curva (uma reta) que ilustra que a taxa com que uma grandeza varia em relação à outra é constante. Surge então uma nova forma de se fazer ciência (p. 2).

Oresme é considerado o primeiro a utilizar coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Segundo Boyer (1992), ao realizar as conexões entre as extremidades das perpendiculares, Oresme obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo, o que pode ser considerado um dos mais antigos exemplos na história da Matemática, do gráfico de uma função.

3.1.1.3 Período Moderno

A ideia de função está presente, mesmo que implicitamente, em todas as teorias relacionadas ao desenvolvimento do cálculo algébrico. A partir do final do século XVII é que ocorreu um desenvolvimento mais intenso, com o progresso da noção de expressão algébrica e seguindo com a da noção de correspondência entre variáveis dependentes e independentes, aproximando da formalização que conhecemos atualmente.

Considerado o maior matemático francês do século XVI, François Viète (1540-1603) apresentou notáveis contribuições ao desenvolvimento da noção de função estabelecendo o uso de vogais para representar incógnitas e de consoantes, para representar constantes. Contudo, mesmo que a notação proposta por Viète tenha possibilitado a representação de uma equação algébrica e de expressões envolvendo números desconhecidos, em termos de avanço do conceito de função, essa descoberta foi pouco utilizada. Porém, foi o seu conceito de variável que Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), e depois Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716), iriam utilizar no estudo de curvas.

O primeiro a utilizar as primeiras letras do alfabeto para representar constantes e as últimas para representar incógnitas, foi

Descartes (1596-1650), em 1637. Filósofo e matemático, Descartes também propôs a utilização de um sistema de eixos para a localização de pontos e representação gráfica de equações. Foi em um de seus trabalhos que afirmou que uma equação em duas variáveis (x e y) geometricamente representa uma curva e indica a dependência entre quantidades variáveis. Apesar de ter o mesmo objetivo de Viète, o de resolver problemas de construção geométrica, Descartes foi mais longe, propondo ferramentas algébricas inovadoras com um simbolismo equivalente ao usado atualmente.

Newton (1642-1727) também contribuiu muito para o estudo de funções ao desenvolver a análise matemática. Em seu trabalho publicado em 1736, *Method of fluxions*, os termos *fluente* e *fluxo de fluente* são os que hoje chamamos de variáveis dependentes e taxas de variação, respectivamente. Mesmo não usando o termo *função*, Newton já considerava a existência de uma relação entre variável dependente e variável independente. Segundo Eves (2004), em *Method of fluxions*, Newton considerou uma curva como sendo gerada pelo movimento contínuo de um ponto, sendo a abscissa e a ordenada deste ponto, quantidades variáveis.

Foi Leibniz quem usou primeiro o termo *função*, praticamente no mesmo sentido em que é usada atualmente em 1673. Porém não é ele o responsável pela moderna notação para função (BOYER, 2010). O termo foi utilizado para designar um segmento de reta cujo comprimento depende da posição que ocupa um certo ponto sobre uma curva dada. Outros termos que foram introduzidos por Leibniz e até hoje são muito utilizados são *constante*, *variável* e *parâmetro* (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013).

Tanto o emprego do termo *função* em sentido mais próximo do atual, como também a definição das funções de uma grandeza variável, são creditados a Johann Bernoulli (1667-1748). A definição de função no sentido de expressão analítica foi publicada em 1718 nas *Acta Eruditorum Lipsiae*, em que Johann Bernoulli define função de uma grandeza variável, de acordo com Youschkevitch (1981[8] apud FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013, p. 9) como “as quantidades compostas dessa grandeza variável e de constantes”.

---

[8] YOUSCHKEVITCH, A. P. *Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIXe siècle*. In:Fragments d´historie des Mathématiques. Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7- 67, 1981.

Outro nome que contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função foi Leonhard Euler (1707-1783). No trabalho *Introductio in analysin infinitorum*, publicado em 1748, Euler definiu uma função de uma quantidade variável como sendo "qualquer expressão analítica composta formada de alguma maneira por essa quantidade variável e com números ou quantidades constantes" (BOYER, 1992, p.24). Em outros escritos, Euler também apresenta a distinção entre as funções explícitas das implícitas, as algébricas das transcendentes.

Enquanto Euler, em seus trabalhos, se preocupou com detalhes e liberdade de intuição, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) se preocupou com o rigor matemático. Apesar de não ter alcançado seu objetivo por cometer erros em não atentar para a convergência e divergência, que se baseiam na ideia de limite, suas ideias produziram a "primeira teoria de funções de variável real" (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013, p. 10). Em suas obras é possível encontrar a proposta de representação de uma função $f(x)$ por uma série de Taylor, bem como a notação $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ para derivadas de 1ª, 2ª, ..., *n-ésima* ordem, muito utilizada atualmente. Ou seja, foi com os trabalhos de Euler (1707-83) e Lagrange (1736-1813) que o conceito de função tornou-se o elemento central do campo semântico do Cálculo.

Na busca por uma definição mais abrangente e rigorosa do conceito de função, Lejeune Dirichilet (1805-1859) chegou à seguinte:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada **variável independente** e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada **variável dependente**. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o **campo de definição** da função e os valores assumidos por y constituem o **campo dos valores** da função (EVES, 2004, p. 661, grifo do autor).

Esta citação revela que a definição de Dirichilet era muito próxima das atuais. Porém, foi somente a partir dos estudos de Georg

Cantor (1845-1918), sobre um conjunto de pontos e após, com o desenvolvimento da teoria de conjuntos, que se tornou possível definir uma função em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente numéricos (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013).

3.1.2 Funções: interdependência e fluência

O desejo do homem de dominar a natureza o levou a observar os fenômenos, suas causas e encadeamento (CARAÇA, 1951). Os resultados destas observações formam o que chamamos hoje de Ciência e consiste na formação de quadros ordenados e explicativos dos fenômenos naturais[9]. Porém, este autor afirma que a realidade que o homem tenta, há muito tempo, compreender apresenta duas características que tornam o processo de compreensão bem difícil. São elas: a *interdependência* entre todas as coisas, onde os compartimentos da realidade são vivos e se comunicam entre si e a *fluência* das coisas, caracterizada pela permanente evolução de todas elas, permitindo que, a todo o momento, se transformem.

Estas duas características da realidade trazem para o estudo de fenômenos naturais uma complexidade que pode ser contornada mediante a tomada de algumas decisões com relação ao fenômeno em estudo. Uma delas é que, sendo impossível levar em conta todas as relações existentes num fenômeno, é necessário realizar recortes na realidade, o que Caraça (1951) chama de *isolado*. Assim, “explicar um fenômeno, é explicar um isolado” (CARAÇA, 1951, p. 119).

Diante disso, ao estudar uma variação de quantidade, por exemplo, faz-se necessário, primeiramente definir um evento isolado e, a partir disso, procurar uma regularidade do fenômeno, chamada de *lei quantitativa*. Esta lei, por sua vez, é a forma como a correspondência entre duas ou mais variáveis se realiza. O conceito de função então, no campo da Matemática, surge como instrumento para o estudo das leis quantitativas. De acordo com Caraça (1951), a definição analítica de função é:

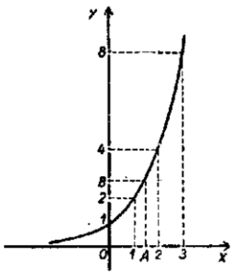
---

[9] Caraça (1951, p. 119) traz exemplos de fenômenos naturais: o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a ação do calor, a passagem de uma corrente elétrica por um condutor, a germinação de uma semente, entre outros.

> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se, entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca[10] no sentido $x \to y$. A x chama-se variável independente, a y, variável dependente (p. 129).

Além da definição analítica de uma função, este autor aborda a definição geométrica, exposta na figura 7.

Figura 7 - Definição geométrica de função.



Fonte: Caraça (1951, p. 134).

Assim, sendo um sistema de referência cartesiano e uma curva (C) (figura 7) que não seja cortada em mais de um ponto por uma paralela ao eixo Oy, essa curva permite definir uma função $y(x)$ da seguinte maneira:

> Seja P um ponto qualquer da curva e tiremos, por ele, perpendiculares aos eixos, as quais os encontram nos pontos A e B; sejam a e b os números reais (relativos) iguais, respectivamente, às medidas algébricas de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Suponhamos feita uma construção análoga para cada ponto da curva e façamos corresponder a cada número a o número b obtido pela construção indicada. Fica assim definida uma correspondência do conjunto dos aa – variável x – ao conjunto dos bb – variável y – fica, portanto, definida uma função $y(x)$ (CARAÇA, 1951, p. 133).

[10] Correspondência entre dois conjuntos, na qual a cada elemento do primeiro corresponde um só elemento do segundo.

As ideias de Caraça sobre funções clarificam o que Duval enfatiza em seus estudos, pontuado anteriormente, no capítulo segundo: a definição analítica e a definição geométrica não são excludentes, pelo contrário, elas se complementam e são fundamentais para a compreensão de funções e o esboço de curvas. Porém, assim como no Cálculo a nível superior, o ensino de funções no EM e superior, passa por dificuldades. Estas dificuldades estão relacionadas com a falta de uma compreensão ampla, profunda e significativa do conceito de função. Apresentamos na próxima seção pesquisas que abordam reflexões, em âmbito escolar, sobre o ensino de funções.

3.1.3 Pesquisas sobre o ensino de funções e o esboço de curvas

A teoria que norteia este trabalho enfatiza que as perspectivas analítica e geométrica devem ser consideradas no trabalho com funções também no âmbito escolar. Contudo, pesquisas expõem e mobilizam discussões a respeito das dificuldades dos estudantes na compreensão de funções e de suas representações.

Em pesquisa apresentada por Matos Filho e Menezes (2010), por exemplo, cujo objetivo era identificar os procedimentos utilizados pelos estudantes do primeiro ano do EM na construção e na interpretação de gráficos das funções polinomiais de primeiro e segundo graus, foi observado que os estudantes apresentam dificuldades para localizar pontos no plano cartesiano. Estas dificuldades, de acordo com os autores, podem refletir nas questões ligadas à construção e à interpretação gráfica e pode ter consequências na compreensão de outros conceitos ligados ao estudo das funções, como por exemplo, no estudo dos zeros da função (MATOS FILHO, MENEZES, 2010).

Neste mesmo trabalho, questões relacionadas à identificação de variáveis dependentes e independentes de uma função a partir da leitura gráfica, evidenciaram que a observação gráfica não é a estratégia mais utilizada pelos alunos na resolução de questões. Os autores observaram que boa parte do grupo pesquisado procurava justificar a resposta dada à questão através de um cálculo, necessitando de justificativas algébricas ou aritméticas na resolução dos problemas. Ademais, o esboço dos gráficos se deu a partir de pontos obtidos em tabelas, o que, segundo estes autores, na grande maioria das vezes, impede que os alunos percebam a transformação, o movimento e o dinamismo existente nesse conceito.

Para Rezende (2003, 2007), as dificuldades da aprendizagem de CDI no ensino superior são o reflexo de uma falta de compreensão de funções e outros elementos no EM. Em sua tese de doutorado (REZENDE, 2003) o autor afirma que existe um único lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo: o *escondimento* ou *evitação das ideias do Cálculo* no ensino de Matemática em sentido amplo, principalmente no que diz respeito ao ensino básico.

Diante dessas ideias, Botelho (2005) e Rezende (2007) realizaram um mapeamento do ensino de funções reais no EM, por meio da análise de livros didáticos cuja escolha foi feita com base nos critérios: popularidade; atualidade e qualidade. A pergunta norteadora do mapeamento foi: "Como os livros didáticos abordam cada um dos problemas construtores do cálculo, isto é, como os livros didáticos abordam o ensino das funções reais tendo como pano de fundo as ideias e conceitos inerentes do cálculo (variabilidade e processos infinitos e/ou infinitesimais)?".

Este mapeamento muito nos interessa, uma vez que, a partir dele podemos ter uma ideia de como os livros didáticos estão abordando funções e, mais do que isso, a variabilidade delas. Assim, para o mapeamento do problema da variabilidade de funções, foram consideradas as funções polinomiais do primeiro e do segundo graus e as funções exponenciais e logarítmicas, com base em quatro livros do ensino fundamental (8ª série) e seis livros do EM (1ª série)[11].

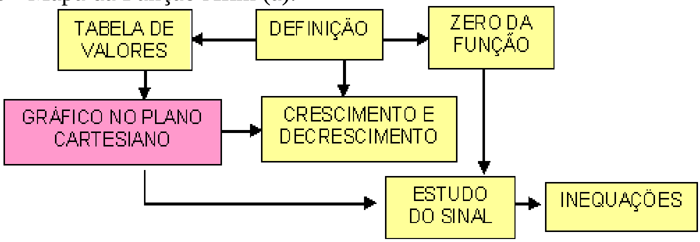
Para um entendimento efetivo dos mapas, é importante ressaltar que, em cada mapa, os tópicos usados para o ensino das funções estão representados no interior de retângulos coloridos, que estão interligados a outros através de linhas ou setas. As setas indicam o caminho utilizado pelo autor do livro para desenvolver os tópicos ou introduzir algum conceito. Associado a isso está a escolha da escala no sentido que, em uma escala maior, por exemplo, um tópico poderia estar relacionado com todos os outros através de setas, mas como o objetivo, no caso específico das funções reais, é observar se a função foi (e como foi) caracterizada a partir do seu comportamento variacional, algumas setas são insignificantes. Além disso, outro recurso utilizado foram as distintas cores (amarelo (álgebra), rosa (geometria) e azul (cálculo)) as quais auxiliaram na caracterização do tipo de abordagem (se ela é mais

---

[11] Os livros utilizados se encontram em Rezende (2007, p. 7).

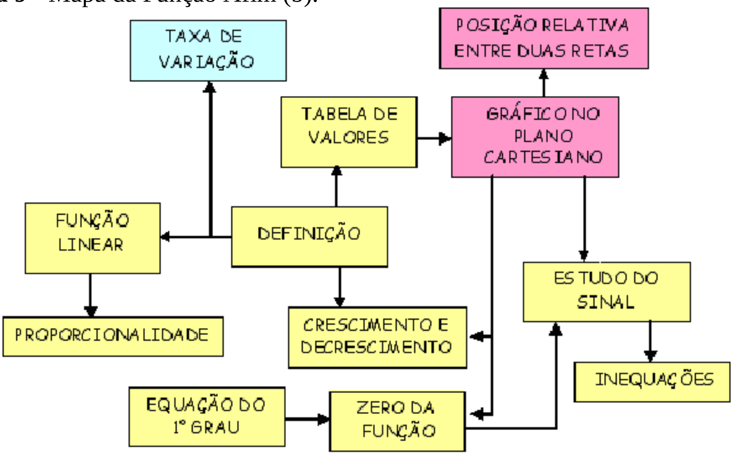
algébrica, mais geométrica ou característica do Cálculo) predominante no desenvolvimento de cada tópico. Nas figuras 8 e 9, são apresentados mapas da função afim e na figura 10, da função quadrática.

Figura 8 - Mapa da Função Afim (a).



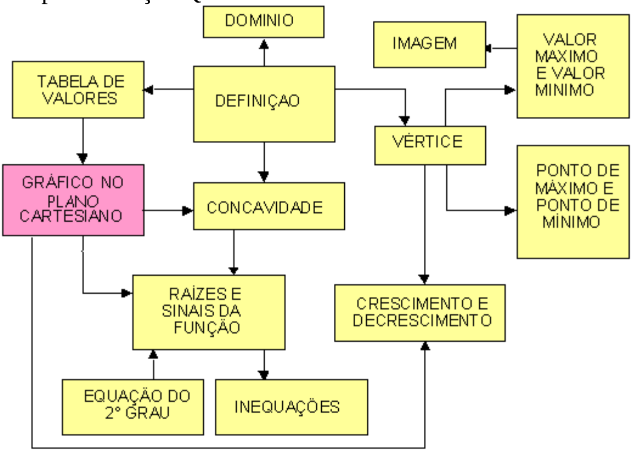
Fonte: Botelho (2005, p. 31), adaptado por Rezende (2007, p. 8).

Figura 9 - Mapa da Função Afim (b).



Fonte: Botelho (2005, p. 29), adaptado por Rezende (2007, p. 8).

Figura 10 - Mapa da Função Quadrática.



Fonte: Botelho (2005, p. 39), adaptado por Rezende (2007, p. 8).

O mapa da figura 8 apresenta o que consta na maioria dos textos pesquisados em relação ao tópico *função afim*. Esta função é definida e caracterizada algebricamente, após são estudados os elementos e as propriedades algébricas da função afim: domínio, imagem, zeros, sinal da função, injetividade e sobrejetividade e, por fim, o gráfico da função é esboçado mediante uma tabela de valores e sua representação é caracterizada intuitivamente como uma reta. Apenas dois dos textos pesquisados fazem referência à taxa de variação da função afim (veja mapa de um dos textos na figura 9).

A figura 10 descreve o mapa da função quadrática e representa o procedimento da quase totalidade dos textos com relação ao tema. Apenas um dos textos analisados foge à regra e comenta a respeito da taxa de variação deste tipo de função. O assunto é desenvolvido predominantemente, como no caso da função afim, no âmbito algébrico. Estudam-se os elementos e as propriedades algébricas e o gráfico da função é elaborado mediante uma tabela de valores. A curva que descreve o traço do gráfico é caracterizada de forma indutiva como uma parábola.

Com base nos mapas construídos[12] e apresentados em Rezende (2007) é possível constatar:

[12] Foram apresentados os mapas das funções Afim e Quadrática, os das funções Exponenciais e Logarítmicas podem ser vistos em: SOUZA SÁ, S.L. *Um*

- a predominância da abordagem algébrica e estática do conceito de função;

- não é abordado o crescimento ou decrescimento da função, ou melhor, o quanto e como cresce/decresce o valor de uma função em relação à sua variável independente;

- os zeros das funções são encontrados, mas não se discute sobre os pontos críticos;

- uma função é estabelecida em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y” e não no contexto da variabilidade;

- o gráfico da função é, em geral, esboçado a partir de uma tabela de valores notáveis;

- a curvatura das curvas que compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo acréscimo de mais pontos;

- a noção de “taxa de variação” só foi considerada em dois textos e, mesmo assim, no caso das funções polinomiais;

- a associação do estudo de funções reais com o estudo de sequências (PA e PG) raramente é feita e, quando é realizada, restringe-se apenas à resolução de situações problemas em particular;

- os exercícios resolvidos ou sugeridos nos textos já apresentam a expressão da função que modelam o problema, ou seja, a função “é dada pronta”, sem o aluno ser instigado a descobrir qual é a relação funcional que modela o problema a partir de dados que quantifiquem a variação de uma grandeza em relação à outra.

Estas constatações evidenciam, nos livros didáticos, a ausência de tópicos que analisam o comportamento das funções sob o ponto de vista da variabilidade, levando a crer que o objetivo principal do estudo de funções reais é a aprendizagem de técnicas algébricas de resolução de equações e inequações polinomiais e exponenciais.

De acordo com Rezende (2007), o cenário exposto em sua pesquisa representa, efetivamente, um desvio e uma limitação de natureza epistemológica do conceito de função. Este autor enfatiza o que já nos referimos anteriormente, que se, de acordo com Caraça (1951), o conceito de função se estabelece como uma ferramenta da Matemática que ajuda o homem a entender os processos de *fluência* e de *interdependência* que são intrínsecos às coisas e aos seres do nosso Universo, então,

---

Mapeamento do Ensino das Funções Exponencial e Logarítmica na Educação Básica. Monografia de Pós-gradução. Niterói: UFF, 2005.

> saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudamos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação (REZENDE, 2007, p. 12).

O trecho citado revela a importância do entendimento de como e quanto uma função varia. Os trabalhos e ideias apresentados validam as justificativas desta tese quando reconhecem a importância de identificar o que varia e em função do que varia como primeiro passo para a compreensão de funções e, no caso deste trabalho, para o esboço de curvas.

Para os estudantes do EM, aqueles que provavelmente jamais estudarão derivadas e integrais, a importância em se desenvolver um estudo qualitativo e quantitativo da variabilidade das funções reais se encontra nos problemas do cotidiano ou em problemas das ciências que abordam quantidades variáveis, como o tempo, o lucro, a temperatura, o peso, a população, o preço ou qualquer outra grandeza. Rezende (2007) também reforça a ideia que, no exercício da cidadania, não adianta apenas ter conhecimento que "o preço da gasolina vai subir" ou que "as taxas de juros no varejo caíram" (p.13). Este exercício envolve também compreender *como* e *o quanto* variam as grandezas presentes em problemas cotidianos. Além disso, este autor complementa que "resgatar o estudo da variabilidade das funções reais no ensino básico é, sobretudo, um compromisso com o verdadeiro sentido do conceito de função" (REZENDE, 2010, p. 6-7).

Nesta perspectiva, como um caminho natural para o estudo das funções reais na educação básica, é preciso estabelecer uma verdadeira conexão do conceito de função e sua origem histórica, a partir da caracterização das funções conforme a "maneira que variam". A seguir, trazemos citações de outros autores que enfatizam a importância da compreensão das taxas de variação.

> Identificar quando a representação gráfica de uma função cresce, decresce ou é constante deve ser uma tarefa trivial para qualquer cidadão que tenha concluído a Educação Básica, entretanto, para perceber o quão rápido essa representação gráfica

> cresce ou decresce, ou seja, qualificar seu crescimento e decrescimento é necessário um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação (SILVA, 2012, p.3).

> No mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto esta está crescendo/decrescendo. [...]. Isso mesmo, com o desenvolvimento das relações econômicas e sociais, tornando-se estas cada vez mais complexas, faz-se necessário e urgente uma revisão e ampliação das metas da 'formação básica para o exercício pleno da cidadania' (REZENDE, 2003, p. 33).

> A mais fundamental concepção de função é a de uma relação entre magnitudes variáveis. Se isto não é desenvolvido, representações com equações e gráficos perdem seu significado e se tornam isoladas umas das outras. [...] Introduzir funções para jovens estudantes pela sua definição moderna elaborada é um erro didático - uma inversão anti-didática (SIERPINSKA (1988)[13] apud GIRALDO, (2004, p. 20)).

Os trabalhos e citações apresentados reforçam a relevância de refletir sobre o esboço de curvas no EM partindo da compreensão das taxas de variação de uma função. Isso, com o objetivo principal de proporcionar aos estudantes do EM uma efetiva compreensão de gráficos em qualquer área do conhecimento e uma maior significação do conceito de função.

3.2 DAS NOÇÕES INFINITESIMAIS AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Afinal, por que incluir o Cálculo na discussão deste trabalho?

---

[13] SIERPINSKA, A. Epistemological remarks on functions. *Proceedings of the 12th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vesprem, Hungary, 568-575, 1988.

Primeiramente, porque esta tese suscita reflexões sobre o cálculo de taxas de variação instantâneas de uma função para o esboço de uma curva a partir da noção de infinitésimo, a qual é alicerce da construção do Cálculo. Além disso, porque o estudo de funções e o esboço de curvas perpassam a compreensão de elementos do Cálculo, não sendo possível desvincular a compreensão de funções da compreensão de variabilidade. Essa desvinculação, que normalmente ocorre no EM e superior, é causadora de diversos problemas de compreensão no âmbito dos dois níveis de ensino.

Nesta seção, apresentamos um panorama da construção histórica de conceitos do Cálculo, no sentido de compreender os percalços na caminhada pelo entendimento do *movimento*, proporcionando maior compreensão do desenvolvimento do pensamento infinitesimal.

3.2.1 Um pouco da história da ciência

O final do século XVII é considerado o marco de invenção do CDI com os resultados de pesquisas de Isaac Newton e Gottfried Wilhem Leibniz. Porém, as sementes destas descobertas foram lançadas muito antes, ainda na Grécia do século V a.C.. A invenção do Cálculo foi tão significativa para a Matemática que a possibilitou, de acordo com Eves (2004) passar para "um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou" (p. 417).

A ordem do desenvolvimento histórico do Cálculo, porém, é contrária a dos textos e cursos básicos sobre o assunto. Primeiro surgiu a ideia de integração, originada de processos somatórios relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos e muito tempo depois é que o cálculo diferencial foi inventado como resultado de problemas de retas tangentes a curvas e de máximos e mínimos. Somente mais tarde ainda é que a integração e a diferenciação foram relacionadas como operações inversas. Nesse processo de construção, muitos foram os percalços.

As atividades humanas exigem conhecimentos completos de tudo que as envolve, por isso, além de conhecer os fenômenos, é imprescindível compreendê-los de todas as formas possíveis, suas razões e ligações com outros fenômenos. Corroborando Caraça (1951), "a inteligibilidade do universo, considerando o termo universo no seu significado mais geral – mundo cósmico e mundo social – é, por consequência, uma condição necessária da vida humana" (p. 64). Desta forma, desde há muito tempo, o homem realiza esforços neste sentido.

A teoria da ciência se dedica à inteligibilidade do universo há milênios e os esboços científicos sobre isto surgiram a partir de observações da natureza e esforços de reflexão por parte do homem em momentos específicos, cujas condições possibilitaram ao homem viver e pensar sobre as coisas. Estes momentos só apareceram pela primeira vez na história humana nas colônias gregas entre os séculos VII e VI a.C., com o surgimento do comércio e da necessidade de viajar e ter contatos com outros povos. Duas foram as questões fundamentais como ponto de partida para a produção científica de um modo geral e, mais especificamente, do Cálculo:

> 1ª - A natureza apresenta-nos diversidade, pluralidade: de aspectos, formas, propriedades, etc. *Existe*, no entanto, *para além dessa diversidade aparente, um princípio único, ao qual tudo se reduza?*
> 2ª – *Qual é a estrutura do Universo? Como foi criado? Como se movem os astros e por quê?* (CARAÇA, 1951, p. 65)

Para a primeira pergunta, várias foram as tentativas de respostas de distintos povos e, dentre elas, a da escola pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos, filósofo que viveu entre 580 e 504 a.C., creditou o motivo essencial da explicação racional das coisas no *número* e na *harmonia*. Segundo esta escola, “todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem ele” (CARAÇA, 1951, p. 69). Para os filósofos desta escola, a compreensão do universo consistia no estabelecimento de relações entre números, de leis matemáticas – *ordenação matemática do Cosmos*, as quais traduzem a harmonia universal. Para legitimar sua teoria, os pitagóricos apresentaram diversas justificativas, entre elas, o conhecido teorema de Pitágoras da Geometria.

Contudo, da afirmação da existência de uma ordenação matemática do Cosmos fez-se outra afirmação, grave e difícil de verificar: *as coisas são números*, e, para comprovar essa ideia, os pitagóricos procuraram uma estrutura da matéria idêntica à estrutura numérica, o que resultou na afirmação de que:

> a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reunidos em certa quantidade e ordem, produziam

> os corpos; cada um de tais corpúsculos – *mônadas* – era assimilado a unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por *quantidade* e *arranjo de mônadas* como os números se formavam por quantidade e arranjo de unidades (CARAÇA, 1951, p. 72-73, grifos do autor).

A afirmação da citação, baseada numa noção primitiva de infinitésimos, porém, foi considerada a essência do lado negativo das ideias pitagóricas uma vez que, quando a realidade não se mostrava de acordo com as propriedades numéricas, eram realizadas torções forçadas. Ou seja, o lado negativo das respostas pitagóricas é formado por tudo que se atribui aos números fora da sua propriedade fundamental de traduzir relações de quantidade (CARAÇA, 1951).

Além disso, o lado positivo das ideias desta escola, representado pelo teorema de Pitágoras, foi utilizado por alguns pensadores para desmentir as conjecturas desta mesma escola. Através de tentativas de encontrar a razão dos comprimentos de dois segmentos de retas, mais precisamente da hipotenusa e de um cateto do triângulo retângulo, se comprovou a incomensurabilidade de segmentos[14] e, assim, colocou-se por terra a *teoria das mônadas*. Isto, pois, uma vez que,

> a ser ela verdadeira, a recta, como toda a figura geométrica, seria formada por mônadas postas ao lado umas das outras e, então, ao procurar a parte alíquota comum a dois segmentos, ela encontrar-se-ia sempre, *quanto mais não fosse quando se chegasse, por subdivisões sucessivas, às dimensões da mônada* – se um segmento tivesse *m*, outro *n* vezes o comprimento da mônada, a razão dos comprimentos seria *m/n*. (CARAÇA, 1951, p. 74)

Nesse período histórico, questões relacionadas com a divisão de grandezas impulsionaram a criação de escolas preocupadas com o seguinte raciocínio: “É válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis?” (EVES, 2004, p. 417).

Para tentar responder a esta questão e fugir de impasses, uma possibilidade foi considerar o número de mônadas que formam o

[14] Para aprofundar a compreensão, ver Caraça (1951), capítulo III.

segmento de reta como infinito (considerado primeiramente como um número muito grande e não como o infinito moderno). Além desta, outras conjecturas vindas da *escola eleática,* apontaram problemas importantes para a história da filosofia e da ciência. Em 450 a.C., o filósofo *Zenão de Eléia*, um dos mais críticos das ideias pitagóricas relacionadas às mônadas, evidenciou dificuldades lógicas contidas nesta questão através de seus paradoxos[15], os quais tiveram grande importância no desenvolvimento da Matemática por evidenciar a primeira grande crise da História da Matemática no século V a.C.. Sua crítica tinha como objetivo principal "mostrar que a teoria pitagórica das mônadas, que aspirava ser a matriz duma interpretação geral do universo era inadequada a tal fim e era uma fonte de incapacidades e contradições" (CARAÇA, 1951, p. 213).

Todas essas ideias e contradições de alguma forma estavam relacionadas com o entendimento do *movimento* e, sobre isto, Zenão era enfático ao afirmar que "não se trata de saber se há ou não há movimento no mundo, mas de saber se ele é compreensível, isto é, compatível com a explicação racional que damos do Universo" (CARAÇA, 1951, p. 78). Os argumentos utilizados por Zenão proporcionaram uma análise sobre as dificuldades do fenômeno da incomensurabilidade que envolve o *infinito* e os *infinitésimos* (movimento) e provaram primeiro que a afirmação da Escola Pitagórica de que todas as coisas tem um número (organização matemática do Cosmos), era inconsistente em face da teoria das mônadas e que esta não fornecia base suficiente para a compreensão do movimento.

Desses argumentos, resulta que, sendo o movimento, uma sucessão de estados de um móvel, ele também era incompreensível, sendo esta sucessão finita ou infinita. E, assim, Zenão ficou marcado na história da Ciência, ao mostrar que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares, uma vez que, ao ser considerado desta forma, equivale abordá-lo pelo método estático, o que é incompreensível e paradoxal. Ou seja, no cenário científico construído até então, as ideias relacionadas aos infinitésimos, as quais, mesmo que de forma implícita, estavam relacionadas à ideia de "contínuo" nos problemas sobre o movimento, foram colocadas por terra pela escola eleática, a partir dos argumentos de Zenão.

[15] Um maior entendimento dos paradoxos de Zenão se encontra em Eves (2004, p. 418) e Caraça (1951, p.78-79).

Nesse momento da história da ciência e da crise da compreensão do movimento, ou se renunciava à compreensão do movimento, ou se procurava obter uma teoria quantitativa, da qual resultassem métodos de cálculo que permitissem fazer previsões (CARAÇA, 1951). Várias foram as tentativas neste sentido.

Em 370 a.C., em uma destas tentativas de resposta aos paradoxos de Zenão, os infinitésimos ressurgiram no *método da exaustão*, creditado a Eudoxo, como forma de resolver questões relacionadas ao cálculo de área, volume e comprimento de arcos. Este método

> admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (EVES, 2004, p. 419, grifo do autor).

O método apresentado na citação foi muito utilizado por Arquimedes, um século depois de Eudoxo, em sua obra *O método*, considerado uma antecipação das ideias de limites, diferenciais e integrais, que seriam desenvolvidas no final do século XVII (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006).

Contudo, após tantas críticas e tentativas de resolver os impasses relacionados ao *movimento* e, devido a aspectos relacionados às novas atividades do homem da Grécia Antiga, em que o foco do pensamento se voltou aos interesses do imperialismo de Atenas, os problemas anteriormente levantados continuaram a ser debatidos, porém, não foram solucionados e, neste aspecto, ocorreu uma hibernação por longos anos das ideias relacionadas ao movimento, devido às incoerências da noção de infinitésimo. Durante este tempo, ocorreu uma cristalização de ideias relacionadas à crítica de Zenão: a incapacidade numérica para resolver os problemas da incomensurabilidade, a exclusão do conceito quantitativo de infinito e o abandono das concepções dinâmicas (movimento).

3.2.1.1 Séculos XVI e XVII

Após a crise sobre a compreensão do movimento, a "mentalidade grega encerrou-se numa atitude finitista" (CARAÇA, 1951, p. 216), numa concepção de universo "finito, geocêntrico, formado por uma sucessão de esferas centradas na Terra, esferas nas quais todos os astros se deslocavam em movimentos circulares" (CARAÇA, 1951, p. 216), a qual perdurou por longo tempo. O ano de 1453 é considerado o início da ciência moderna pela obra de Copérnico (1473-1543) sobre o movimento dos corpos celestes. Porém, suas ideias heliocêntricas de universo não foram consideradas de imediato, sendo levadas a sério somente no século seguinte com as descobertas de Galileu. Esta desconsideração ocorreu devido ao fato de que o sistema geocêntrico parece, inclusive ainda hoje, mais natural para explicar as observações que fazemos do nascer e do pôr do sol diariamente.

Como cada época tem seus problemas dominantes, a partir do século XVI, um dos problemas que tornou necessário pensar na criação de uma teoria quantitativa para o movimento, está relacionado com o estudo dos movimentos dos astros, com fins de navegação. Problemas relacionados ao movimento foram, então, retomados.

Foi Johannes Kepler quem comprovou, contrariamente a essa ideia geocêntrica de mundo, em 1609, a sua 1ª Lei, na qual afirma que as *órbitas planetárias são elipses das quais o Sol ocupa um dos focos*. Assim, o círculo deixa de fazer parte da concepção de universo e diversas dúvidas voltam a assolar os pensadores da época, principalmente relacionadas à causa física do movimento.

Para refletir sobre essas dúvidas, tiveram que ser deixados de lado diversos preconceitos que pudessem supor a explicação da natureza íntima do movimento dentro de quadros racionais prefixados (CARAÇA, 1951). Assim, ainda como forma de resolver a questão levantada por Zenão séculos antes, sobre a natureza do movimento, foi necessário compreender que não é possível tomar cada ponto isolado dos outros. O entendimento do que se passa em cada instante perpassa a "interdependência com o que se passa em instantes e pontos que o precedem e seguem" (CARAÇA, 1951, p. 218), sendo que entre dois pontos há uma infinidade de possibilidades que fazem parte da interdependência. Ou seja, existe uma infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer.

A partir deste entendimento, para desenvolver um raciocínio que permitisse a compreensão do movimento, não era possível trabalhar com números, mas deveria ser possível representar qualquer dos números, surgindo assim, o instrumento matemático: *variável* (CARAÇA, 1951). Esta variável deveria ter no seu domínio números arbitrariamente pequenos em módulo. Assim surgiu, de forma explícita, o *conceito de* *infinitésimo*. A ideia de infinitésimo, como uma grandeza muito próxima de zero, de forma que às vezes pode ser desprezada; mas ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que podemos dividir por ela mesma quando for conveniente, era a grande contradição relacionada a este conceito e que só foi solucionada um século e meio depois, com o surgimento do conceito de limite.

Um dos primeiros europeus a desenvolver ideias relativas aos infinitésimos foi Johannes Kepler, com objetivo de calcular áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e volumes envolvidos em seu trabalho sobre a capacidade de barris de vinho (EVES, 2004). Contudo, estes números indefinidamente pequenos, os infinitésimos[16], continuaram sendo foco de questões conflitantes dos domínios da Matemática, da Física, da Lógica e da Filosofia, devido às aparentes inconsistências e contradições da concepção de magnitudes infinitesimais e de magnitudes infinitas (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006).

Ainda assim, os infinitésimos integraram a Matemática mais efetivamente nos trabalhos de Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642) e Evangelista Torricelli (1608-1647), os quais aplicaram o método infinitesimal à Física e à Matemática. Galileu utilizou as propriedades dos infinitésimos no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, sugerindo a "existência de objetos compostos por *partículas minúsculas de dimensões infinitesimais*, unidas entre si por uma infinidade de *pequenos vazios*" (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006, p. 17, grifo dos autores). Galileu também foi o pioneiro na utilização do termo indivisível, que mais tarde foi usado por Cavalieri (1598-1647). Este, por sua vez, utilizou o *método da exaustão* mesclado com o método infinitesimal de Kepler para o cálculo geométrico de áreas e volumes. Sua obra foi esclarecida, tempos depois, por Torricelli que, em 1644, apresentou os conceitos de derivada e integral (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006).

A diferenciação teve origem em problemas de retas tangentes e de máximos e mínimos de funções. Os primeiros sinais do método diferencial se encontram nas ideias de Fermat, em 1629, o qual utilizou a ideia de Kepler sobre os incrementos infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo (EVES, 2004).

Até esse momento da história, o desenvolvimento do Cálculo já havia avançado de forma considerável e ainda era embasado na noção, mesmo que inconsistente, de infinitésimos. Muitas integrações tinham

[16] Uma definição mais detalhada pode ser encontrada em Caraça (1951, p. 219).

sido feitas e o processo de diferenciação havia aflorado, possibilitando a construção de inúmeras retas tangentes. Além disso, a ideia de limite também já havia sido concebida. O que faltava era a "criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais" (EVES, 2004, p. 435). E foi neste aspecto que Newton e Leibniz, trabalhando independentes, deram sua contribuição.

3.2.1.2 Newton (1642-1726)

Isaac Newton nasceu na região leste da Inglaterra e seus estudos se apoiaram em obras de Euclides, Kepler, Viète, Wallis, Galileu, Fermat, Huygens, entre outros. Suas primeiras descobertas, em 1665, estavam relacionadas a representar funções por meio de séries infinitas e ao cálculo de taxas de variação (fluxo) de quantidades variáveis continuamente (fluentes). Combinando esses dois problemas, Newton criou seu Cálculo - Método dos Fluxos (BOYER, 2010).

Entre os anos de 1665 e 1666, Newton fez suas principais descobertas: o teorema binomial, o Cálculo (método dos fluxos), a lei da gravitação e a natureza das cores (BOYER, 2010). Porém, ataques às primeiras publicações de Newton sobre a teoria das cores fizeram com que suas descobertas no campo do Cálculo fossem divulgadas somente muito mais tarde. Este fato teve desdobramentos importantes na história da Matemática, principalmente com relação à polêmica que envolveria Leibniz, tempos mais tarde, sobre a prioridade de criação do Cálculo (EVES, 2004).

Uma das publicações de Newton, o *Method of Fluxions*[17] (Método dos Fluxos), escrito em 1671 e publicado somente em 1736, baseava-se na ideia de que uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Nela, Newton demonstrava preocupação com dois aspectos relacionados a fluentes e fluxos: um envolvendo diferenciação, ao estabelecer relações envolvendo os fluentes e seus fluxos a partir de uma relação entre fluentes e outro relacionado a encontrar uma relação entre os fluentes conhecendo uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, ou seja, o problema inverso que equivale a resolver uma equação diferencial.

Neste trabalho, Newton utilizou as quantidades infinitesimais trabalhadas cinematicamente de "tal modo que as variações infinitesimais da variável *tempo* tornam-se parte do processo que gera magnitudes geométricas" (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006, p.

[17] Detalhes do Método dos Fluxos em Eves (2004, p. 439).

19). Ou seja, Newton tentou dar consistência lógica e formal ao seu cálculo infinitesimal a partir de intuições geométricas conjugadas com elementos algébricos e com o objetivo de possibilitar um suporte matemático à construção de um sistema natural baseado em leis naturais universais (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006). Para tanto utilizou e aperfeiçoou o conceito cinemático de infinitésimos desenvolvido por Barrow e Fermat, chamado de *momentary increments* (momentos). Porém, por se tratarem de quantidades ao mesmo tempo não finitas e não nulas, não conseguiu evitar as inconsistências, o que confirmam Carvalho e D'Ottaviano (2006) quando afirmam que

> é possível que Newton tenha tido a intuição incompleta das propriedades da moderna teoria de limites, suficientes, porém, de seu ponto de vista, para permitir que operasse com a divisão por "momentos", desconsiderando-os na seqüência dos cálculos, como se fossem nulos. Tendo assim procedido sem maiores explicações, sujeitou-se às críticas daqueles que consideraram ter ocorrido, nos referidos cálculos, de alguma forma, a divisão por zero (p. 18-19).

3.2.1.3 Leibniz – (1646-1716)

Considerado o grande rival de Newton na invenção do Cálculo, *Gottfried Leibniz* nasceu na Alemanha e iniciou seus estudos ainda muito jovem sendo que com 12 anos de idade já dominava todo o conhecimento da época sobre Matemática, Filosofia, Teologia e Leis. Aliás, foi o aprofundamento deste último que permitiu que Leibniz se engajasse no serviço diplomático, o qual lhe proporcionou tempo para se dedicar aos seus estudos prediletos, relacionados à Matemática. Em 1672, em missão diplomática em Paris, Leibniz conheceu Huygens, com quem teve aulas de Matemática. Em 1673, em uma missão política a Londres, tornou-se membro da Royal Society, mesmo ainda iniciando seu aprofundamento na Matemática. Segundo Boyer (2010) foi entre esta e a visita a Londres, em 1676, que seu cálculo diferencial tomou forma. Foi nesta época que Leibniz descobrira o *teorema fundamental do cálculo*, chegando à mesma conclusão que Newton chegara vários anos antes: como sendo um método importante pela sua generalidade. Além disso, desenvolveu notações sobre o assunto e estabeleceu muitas fórmulas de diferenciação (EVES, 2004), sempre com uma percepção acentuada da importância das notações como ajuda ao pensamento (BOYER, 2010).

Leibniz, assim como Newton, tentou encontrar um modo de quantificar fenômenos que variam uniformemente com o tempo, porém seus objetivos eram outros. A posição de Leibniz sobre a composição do *continuum* geométrico, ou da reta, era a mesma de Aristóteles. Segundo Carvalho e D'Ottaviano (2006) o *continuum* geométrico para Leibniz,

> Trata-se de uma entidade que não pode ser resultante da composição de pontos, meros constituintes das extremidades de segmentos. E como extensão possível de segmentos, não pode ser, ela própria, considerada uma "u-nidade". Mais que isso, o continuum geométrico é considerado por Leibniz uma entidade "ideal", em razão de suas propriedades aparentemente contraditórias ou inconsistentes. [...] Igualmente caracterizadas por propriedades "inconsistentes", do ponto de vista da lógica clássica, são as magnitudes infinitesimais associadas ao espaço e ao tempo. Leibniz atribui à matéria, em contrapartida, um caráter "discreto", e define suas unidades constituintes como as mônadas – os átomos da matemática (p. 20-21).

Sua primeira exposição foi a publicação do trabalho intitulado Nova *methodus pro maximus et minimis*, *itemque tangentibus*, *quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur*, *et singulare pro illis calculi genus* em 1684, onde Leibniz formaliza o cálculo diferencial e expõe as fórmulas para produtos, quocientes e potências com aplicações geométricas. Nesta obra, Leibniz utiliza os infinitésimos como "instrumentos úteis", embora "ficcionais" e introduz, sob a notação dx, a noção de diferencial para designar uma "quantidade infinitamente pequena" de uma variável x. Além disso, as diferenciais são tratadas como segmentos, dos quais são obtidos os quocientes diferenciais $\frac{dy}{dx}$, sendo a nomenclatura utilizada distinta da de Newton, mas com conceitos correspondentes (CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006).

Em outro trabalho de Leibniz, intitulado *Nova methodus*, são obtidas e apresentadas fórmulas como $d(xy) = xdy + ydx$ e $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, utilizadas atualmente. Nessas obtenções, "os termos como

$dxdy$ são "negligenciados" por serem infinitesimais – uma falta de rigor da qual Leibniz não seria poupado, mesmo não interferindo na correção do resultado final" (CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006, p.21). Leibniz foi o primeiro a utilizar o $\int$ alongado como símbolo da integral indicando uma soma de indivisíveis, em 1675. A partir daí, escreveu símbolos de diferenciais e derivadas que utilizamos até hoje em livros sobre o assunto.

3.2.1.4 O fim temporário dos infinitésimos na Matemática

As concepções de infinitésimos que Newton e Leibniz introduziram são distintas. Para Leibniz estão fortemente associados com a lógica e a metafísica, enquanto que para Newton são fortemente motivadas pela física e fenômenos naturais (CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006). Desde as descobertas destes dois pesquisadores, o Cálculo vem se constituindo pela luta entre justificações diferentes: "uma justificação no campo semântico contínuo geométrico, centrada na noção de infinitésimo, e outra no campo semântico discreto-numérico, centrada na noção de limite" (BALDINO, 1995, p. 8). Na época de Leibniz era a ideia de infinitésimos que predominava. Sendo dx um acréscimo infinitesimal a x do qual resulta um acréscimo infinitesimal, dy, a y. O quociente desses infinitésimos, era a taxa de variação instantânea de y.

Contudo, ainda faltava uma explicação sólida e consistente do conceito de infinitésimos. Sem isso, suas inconsistências fizeram com que, em fins do século passado, a concepção discreta-numérica começasse a levar vantagem no debate matemático, ocasionando, a utilização da construção rigorosa e formal, via limites, para a compreensão do cálculo. A formalização dos infinitésimos viria muito tempo depois.

Um dos críticos mais notórios do cálculo infinitesimal foi George Berkeley (1685-1753). Em *The analyst*, de 1734, ele concentra discussões profundas sobre as inconsistências do método infinitesimal. Contudo, assim como várias foram as críticas, vários também foram os divulgadores do cálculo infinitesimal. Entre eles, os irmãos Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748) e o Marquês Guillaume F. A. de l'Hospital (1661-1704). Este último publicou, em 1696, seu primeiro livro sobre o cálculo infinitesimal onde, segundo Carvalho e D'Ottaviano (2006) é "dado o melhor tratamento, até então, ao caráter inconsistente das quantidades infinitesimais" (p. 23). Alguns postulados contidos na obra e citadas por estes autores (2006, p. 23) são:

• *Pode-se tomar, indiferentemente, qualquer uma de duas quantidades que diferem entre si por uma quantidade infinitamente pequena.*

• *Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal.*

Contudo, nem todo esforço de Newton e Leibniz no tratamento formal dos infinitésimos e os avanços obtidos com a obra de L'Hospital foram suficientes para garantir a adequação dos infinitésimos como base segura para a construção do Cálculo. Diversas foram as discussões que vieram posteriormente e os debates se estenderam até 1706, terminando apenas após uma ação conciliatória de uma comissão, especialmente criada pela Academia de Paris para tal fim. Nesta ação, considerou-se que não fora apresentada uma justificativa rigorosa para existência dos infinitésimos (CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006).

Foi neste cenário, com a teoria de limites despontando no horizonte e os infinitésimos sendo banidos da Matemática que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fez uma das últimas tentativas para legitimar o Cálculo via infinitésimos, considerando-os não mais como variáveis tendendo a um limite, mas como quantidades fixas. No entanto, esta foi mais uma tentativa infrutífera e Cauchy passou a focar seus trabalhos no desenvolvimento da teoria de limites, introduzindo resultados que, segundo Carvalho e D'Ottaviano (2006), o tornaram um dos mais importantes precursores do CDI moderno.

Além de Cauchy, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) também deu sua contribuição na definição de contornos do CDI, sanando problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy. A definição rigorosa de limite através dos *épsilons* e *deltas*, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins são creditadas a Weierstrass.

A partir deste período, os infinitésimos foram banidos das produções matemáticas, permanecendo nos trabalhos de físicos, engenheiros, matemáticos aplicados e cientistas tecnológicos, nos quais o rigor matemático era irrelevante. Foi e é ainda importante ferramenta para a criação e o estudo de novos modelos matemáticos, onde o rigor matemático é bem menos necessário e importante (físicos e engenheiros) (REZENDE, 2003). Na Matemática, porém, a compreensão do Cálculo ficou embasada apenas no rigor e formalização via limites.

3.2.1.5 O retorno dos infinitésimos na Matemática

O retorno dos infinitésimos na Matemática acontece com a apresentação de uma nova teoria para a análise matemática por Abraham Robinson (1918-1974), baseada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos. Um esboço desta teoria foi apresentado em 1960 em um seminário realizado na Universidade de Princeton, Estados Unidos, e depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da *Association for Symbolic Logic*, quando é, então, publicada nos *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam* (ver Robinson (1961)), sob o título *Non-Standard Analysis*. Após, em 1966, esta publicação foi editada como livro e sua segunda edição revisada por Robinson lançada em 1974, versão que é reeditada em 1996 (ver Robinson (1996)). De acordo com Carvalho e D’Ottaviano (2006), o tratamento dispensado neste trabalho por Robinson às quantidades infinitesimais reflete de forma precisa, segundo Stroyan e Luxemburg (1976), as ideias originais de Leibniz. Neste trabalho, Robinson

> estabelece um modelo não-standard de ordem superior para a aritmética e um modelo não-standard para a análise, os quais preservam suas operações e propriedades usuais. O primeiro baseia-se numa extensão não standard do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, denotada por $^*\mathbb{N}$, cujos elementos, que incluem números naturais infinitos, são chamados números hipernaturais. O segundo baseia-se numa extensão do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, denotada por $^*\mathbb{R}$, que inclui números reais infinitos e infinitésimos, denominados números hiper-reais (CARVALHO, D’OTTAVIANO, 2006, p. 24-25).

Na perspectiva desta nova teoria[18], o cálculo infinitesimal pressupõe, como estrutura básica, os números hiper-reais, $^*\mathbb{R}$, os quais são constituídos pelos reais, $\mathbb{R}$, acrescido dos infinitésimos ($\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$, cujo módulo é menor que todos os reais positivos), dos infinitos ($\Omega \in {}^*\mathbb{R}$, cujo módulo é maior que todos os reais positivos) e das mônadas. Sendo que a “mônada de um $x \in \mathbb{R}$ é constituída por todos os

---

[18] Aprofundamento sobre esta teoria pode ser encontrado em Keisler (1986) e Pinto (2000).

$y \in {}^*\mathbb{R}$ que estão infinitamente próximos de x, ou seja, pelos y tais que $y - x$ é infinitésimo" (BALDINO, 1995, p.11).

O panorama histórico a respeito da noção de infinitésimo demonstra o caráter não linear da ciência, enquanto construção humana permeada de percalços e retrocessos. O pensamento infinitesimal fez parte de todo o processo de construção de conceitos do Cálculo, mas as inconsistências relacionadas a ele fizeram com que fosse criada a estrutura via limites, formal e rigorosa. Atualmente, na Matemática, os infinitésimos são legitimados pela Análise Não-Standard, a qual lhe dá consistência, possibilitando assim, enquanto noção intuitiva, tirar conclusões importantes sobre a variabilidade de funções no âmbito do EM.

Além destes apontamentos sobre o panorama histórico, é importante observar como estão acontecendo o ensino e a aprendizagem da disciplina de CDI, que atualmente ocorre somente em cursos superiores. Estas observações dão suporte e evidenciam elementos importantes para construção do trabalho desta tese.

3.2.2 Ensino e aprendizagem de CDI: dificuldades e possibilidades

O estudo das taxas de variação de funções é realizado profundamente e amplamente no ensino superior, nas disciplinas de CDI, presentes em diversos cursos. O CDI enquanto disciplina, se dedica, entre outras coisas, ao estudo de taxas de variação de grandezas (inclinação de uma reta) e de acumulação de quantidades (área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Estas compreensões permeiam diversas áreas da atividade humana.

Contudo, os processos de ensino e aprendizagem destas disciplinas passam por dificuldades. A quantidade de reprovações é preocupante e as desistências e evasões são as consequências imediatas. Este cenário faz parte da rotina dos professores desta disciplina e é estudado por Rezende (2003) e Barufi (1999), que, em suas teses de doutorado, revelam dados alarmantes com relação aos índices de reprovação nas disciplinas de CDI na Universidade de São Paulo e na Universidade Federal Fluminense. Na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS[19], campus Erechim, RS, os dados se assemelham aos

[19] Universidade em que a autora trabalha há sete anos e ministra disciplinas de CDI nos cursos de Agronomia e Engenharia Ambiental e Sanitária.

evidenciados nos trabalhos de Rezende (2003) e Barufi (1999). As tabelas 1 e 2 apresentam esta situação para os cursos de Engenharia ambiental e Sanitária e de Agronomia da UFFS, campus de Erechim, de 2011 a 2016.

Tabela 1 - Matrículas e reprovações em CDI1 - Engenharia Ambiental e Sanitária.

Ano/Semestre	Matrículas	Reprovações	Reprovação (%)
2011/1	30	14	46,7
2012/1	41	13	31,7
2013/1	41	20	48,8
2014/1	51	28	54,9
2015/1	53	8	15,1
2016/1	33	12	36,4
2016/2	39	15	38,5

Fonte: Secretaria acadêmica da UFFS, campus de Erechim, RS (Jul/2017).

Tabela 2 - Matrículas e reprovações em CDI1 - Agronomia.

Ano/Semestre	Matrículas	Reprovações	Reprovação (%)
2011/1	27	12	44,4
2011/2	33	17	51,5
2012/2	37	16	43,2
2013/2	52	27	51,9
2014/2	44	16	36,4
2015/2	51	35	68,6
2015/2*	46	20	43,5
2016/2	48	22	45,8

*Turma especial de Cálculo 1.

Fonte: Secretaria acadêmica da UFFS, campus de Erechim, RS (Jul/2017).

No curso de Engenharia Ambiental e Sanitária da UFFS de Erechim, de 2011 a 2016, a média de reprovações foi de 38,9% e no curso de Agronomia de 48,2%. Infelizmente, este cenário de reprovações reflete as dificuldades pelas quais passa o ensino e a aprendizagem desta disciplina, sendo motivo de frustrações para estudantes e professores e causa de elevada evasão, apesar das inúmeras pesquisas e ações realizadas nas universidades com o propósito de melhorias no ensino e aprendizagem.

3.2.2.1 Quais os motivos de tantas dificuldades de aprendizagem em CDI?

As razões pelas quais o ensino e a aprendizagem de Cálculo estão passando por dificuldades são diversas e distintas, e justificam inúmeros trabalhos de pesquisa. Cavasotto (2010); Cury e Cassol (2004); Irias *et al* (2011); Oliveira e Raad (2012) e Sarubbi e Soares (2009) apontam na direção de lacunas na aprendizagem de tópicos de Matemática do ensino fundamental e médio, como a álgebra, aritmética, geometria, funções e interpretação de dados. Especificamente o trabalho de Cury e Cassol (2004) revela que os estudantes não têm domínio de conteúdos como álgebra e geometria do ensino fundamental e trigonometria e geometria espacial, no EM. De acordo com os autores (2004), a falta de domínio destes conteúdos, aliada às dificuldades de abstração e generalização, ocasionam as reprovações e evasões. O distanciamento metodológico que ocorre na transição do EM para o ensino superior também é elencado como uma das causas e discutida por De Souza *et al*. (2013) e evidenciada por Nascimento (2001).

Outro ponto de vista com relação às causas das dificuldades nas disciplinas de Cálculo é apontado por Barufi (1999) e Cabral e Baldino (2006) como sendo a predominância da sequência de organização didática de “Cauchy-Weierstrass”. Esta forma de organização consiste em fundamentar os conceitos básicos do CDI nas ideias de limite e número real, trabalhando os conceitos, predominantemente, de acordo com a sequência: limites, continuidade, derivadas e integrais, ou seja, na direção oposta à construção histórica dos conhecimentos. Sobre a sequência comumente trabalhada, Cabral e Baldino (2006) afirmam que esta é o resultado da suposição de que se está ensinando Matemática a partir de um ponto matematicamente elementar para alcançar pontos mais elaborados, como se isso fosse garantia de compreensão. Esta necessidade de certezas que permeia a Matemática é refletida nos livros didáticos quando os autores buscam tornar acessível aos estudantes iniciantes o rigor matemático.

De acordo com Rezende (1994), as dificuldades de aprendizagem relacionadas especificamente à operação de limite estão associadas mais às suas dificuldades de manipulação algébrica do que à sua interpretação analítica. Isto, principalmente, pois no ensino de CDI, ocorre a prevalência da técnica sobre o significado, a partir de uma exacerbada algebrização dos conceitos com demonstrações, a fim de convencer o estudante da verdade, como se o significado do resultado estivesse, assim garantido, o que enfatiza a priorização do significado lógico dos resultados em relação aos seus sentidos.

A partir da leitura e trabalhos e nos limites dos trabalhos encontrados com esta temática, concluímos que muitas dificuldades de aprendizagem de Cálculo se relacionam à falta de conhecimentos matemáticos básicos, advindos do ensino fundamental e médio. Assim, buscamos compreensões, nestes mesmos trabalhos e em outros, de como estão sendo pensadas possíveis soluções para tal problema nos processos de ensino e aprendizagem de CDI.

3.2.2.2 Quais são as soluções evidenciadas para as dificuldades de aprendizagem de CDI?

Primeiramente, é importante ressaltar que o problema de aprendizagem do Cálculo não está necessariamente associado ao problema cultural e sócio econômico da sociedade brasileira. Conforme Rezende (2003) ressalta, nas sociedades "desenvolvidas" a situação não é muito diferente e também merece atenção.

Pesquisadores como David Tall, por exemplo, em trabalhos como Tall e Vinner (1981) e Tall (1980, 1982) tem sido um dos principais articuladores da área de pesquisa *pensamento matemático avançado*, cujas questões norteadoras giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem dos conceitos básicos de Cálculo. David Tall embasa seus estudos na psicologia cognitiva, procurando compreender como os estudantes concebem as operações do Cálculo. Para este pesquisador, o aprendizado é um processo de realizar sucessivas aproximações, a partir dos *conceitos-imagem* dos estudantes com relação ao objeto matemático, até chegar aos *conceitos-científicos*. Nesta caminhada, Tall e Vinner (1981) identificam um enorme distanciamento entre os conceitos-imagem dos estudantes, dos conceitos-científicos.

Outro exemplo internacional desta preocupação com o ensino do Cálculo foi o movimento denominado *Calculus Reform*, iniciado na década de 80, cujo objetivo era deflagrar uma reforma no ensino destas disciplinas. Este movimento teve como características: o incentivo ao uso das tecnologias (softwares e calculadoras gráficas); incentivo a um ensino em que todos os tópicos e problemas devem ser trabalhados com foco numérico, geométrico e analítico; preocupação em mostrar a aplicabilidade do Cálculo e pouca exigência da competência algébrica por parte dos estudantes.

Nas universidades brasileiras, os reflexos deste movimento podem ser percebidos pelo grande número de trabalhos de pesquisa com este foco. Ao refletir sobre este cenário de ensino, Cabral e Baldino (2006), elencam algumas formas de resolver tal situação relacionadas à reorganização da estrutura acadêmica; às modificações no modo de o professor apresentar os objetos matemáticos e também ao uso, em sala de aula, de instrumentos mais atrativos, que possam motivar o aluno a aprender.

De um modo geral, as leituras realizadas apontam como soluções para o problema exposto, ações relacionadas:

- à resolução de listas de exercícios;

- à utilização de computadores e tecnologias nas atividades de ensino;

- à mudança na ordem da sequência dos conteúdos;

- a um ensino baseado em práticas que evitam o aprofundamento e as manipulações algébricas exacerbadas;

- à promoção de cursos ou disciplinas que antecedem ou são concomitantes ao estudo de Cálculo como forma de superar a "falta de base" dos estudantes e preencher lacunas na aprendizagem de Matemática básica, minimizando as dificuldades na transição do EM para o ensino superior.

Porém, De Souza *et al*. (2013) e Rezende (2003) atentam para o fato de que propor cursos preparatórios não basta, eles não resolvem o problema do Cálculo pelo fato de "o campo semântico das noções básicas de cálculo ter muito mais a ver com conceito de 'infinito', 'infinitésimos' e 'variáveis', do que com 'fatoração de polinômios', 'relações trigonométricas' e 'cálculos algébricos'" (REZENDE, 2003, p.18). Com relação a isso, De Souza *et al.* (2013) afirmam que

> parte dos problemas do Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", de "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre as grandezas envolvidas no problema ou os elementos da figura (p. 5).

Nesta perspectiva, Rezende (2003) atribui os obstáculos epistemológicos[20] que surgem no ensino superior de Cálculo, à ausência

---

[20] Rezende (2003) realizou um mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de cálculo, a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, elaborou o que o referido autor definiu como **macro-espaços de natureza epistemológica.**

das ideias e problemas essenciais ao Cálculo no ensino básico de Matemática, o que, além das implicações pedagógicas, é um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático. Para ele, fazer emergir o conhecimento do Cálculo no ensino básico é, sem dúvida, “o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior” (p.402). E ainda, enfatiza que

> o *mapeamento dos problemas construtores do Cálculo que se encontram camuflados no ensino básico de matemática* foi concebido segundo três linhas diretrizes, a saber: o **problema da variabilidade** (funções reais); o **problema geométrico da medida** (áreas e volumes de corpos redondos); e o **problema aritmético da medida** (número real). Todos estes são, efetivamente, problemas fundamentais do Cálculo que têm raízes no ensino básico de matemática (REZENDE, 2007, p.4, grifo do autor).

Essas ideias possibilitam justificar a proposta de pesquisa aqui exposta e refletir sobre os conteúdos trabalhados no EM e em como os estudantes estão ingressando no ensino superior. Corroboramos Rezende (2003) quando defende que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo e sugere que um trabalho no EM, sobre a variabilidade de funções, pode facilitar a aprendizagem desta disciplina. Nas palavras de De Souza *et al.* (2013), “é necessário desenvolver ações que gerem a prontidão para o estudo de cálculo ao longo do Ensino Médio” (p. 15).

Apesar da necessidade de trabalho com noções do Cálculo no EM devido às dificuldades de aprendizagem relacionadas a esta disciplina no ensino superior, esta não é a justificativa predominante para o trabalho na perspectiva apresentada nesta tese. A elaboração de um caminho alternativo para esboçar curvas por meio da variabilidade da função, partindo da compreensão das taxas de variação de funções num sentido mais amplo no EM, se apoia na importância destas ideias neste nível de ensino. As taxas de variação aparecem amplamente e de diferentes formas no âmbito escolar nas distintas disciplinas e estão relacionadas a diversos conceitos como: inclinação de uma reta, razão de uma progressão geométrica, velocidade de um móvel, crescimento populacional ou epidêmico, velocidade de uma reação química, entre outros.

A seguir, são apresentadas ideias de distintos autores, citadas por André (2008, p.3), as quais revelam a preocupação com o entendimento da variação de funções no EM.

> O desejo de inserir o ensino de conceitos de cálculo no Ensino Básico, também, pode ser observado nos fragmentos de textos abaixo relacionados por:
>
> 1. Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações (ÁVILA, 1991, p.8). [...]
>
> 3. A capacidade de analisar e interpretar gráficos é muito importante em qualquer domínio científico. É, portanto, necessário levar os estudantes à compreensão desse tema. Esta foi uma das conclusões do grupo que discutiu o ensino de Matemática para as Biociências (Medicina e Biologia, incluindo Física e Química) na 1ª reunião de Didática da matemática do Cone Sul, realizada em Montevidéu, em abril de 1992. Nessa ocasião, os professores do 2º grau presentes reivindicaram de seus colegas, professores universitários, material didático adequado às aplicações da Matemática às outras ciências. Estes são analisados com ênfase na identificação e interpretação dos pontos críticos. Seu conteúdo pode ser explorado no 2º grau com o auxílio das noções intuitivas de evolução contínua, velocidade e aceleração, que fazem parte do cotidiano do aluno (CARNEIRO, 1992, p. 32)[21].
>
> 4. Queria saber por que os alunos aprendem ou não aprendem funções, como desenvolvem o pensamento variacional, quando e como constroem conceitos como: variável, dependência, taxa de variação e limite; queria investigar de que maneira situações do cotidiano contribuem para a

[21] CARNEIRO, V.C. A Matemática aponta pontos críticos de outras ciências. *Revista do Professor de Matemática*, nº 22, p. 32. 1992.

> construção da concepção de função. Observava que os estudantes universitários que já estudaram funções no Ensino Médio não possuem uma boa concepção de função. Esta deficiência não lhes permite entender as relações entre variáveis, interpretar gráficos e integrais e usar a matemática como ferramenta (SCHREINER, 2004)[22].
>
> 5. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade (REZENDE, 2003 p.37).

3.2.2.3 Abordagem de ensino com base nos infinitésimos

Na perspectiva das considerações anteriores, no que tange à compreensão e ao esboço de curvas no EM, torna-se significativo considerar e refletir sobre o potencial didático dos infinitésimos, não no sentido de seu rigor e formalização, mas no de possibilitar o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas. As informações e resultados apresentados a seguir se referem ao trabalho com os infinitésimos no ensino superior não tendo investigações em âmbito de EM.

De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), o uso dos infinitésimos no ensino de Cálculo, "em diversos aspectos, é bem mais natural e instigante" (p. 34). Dentre as vantagens para o estudante de trabalhar com infinitésimos neste nível de ensino, Keisler (1986[23] apud CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006, p. 34) da Universidade de Wisconsin, afirma que uma delas é sua maior afinidade com aspectos intuitivos que conduziram à criação do CDI e também a possibilidade de tornar mais fácil a compreensão dos conceitos de derivada e integral.

---

[22] SCHREINER, I.V. Construção do conceito de função: o pensamento variacional e a alfabetização funcional. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, vol. eletrônico, UFP, Recife, Brasil. 2004.

[23] KEISLER, H. J. *Elementary Calculus*: an infinitesimal approach. 2nd ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1986.

Admitindo que as inconsistências matemáticas relacionadas à noção de infinitésimos estão superadas e que a abordagem via limites, única utilizada no ensino atual, ocasiona dificuldades de aprendizagem já elencadas neste trabalho, alguns pesquisadores apostam no ensino de Cálculo via infinitésimos ou utilizando limites e infinitésimos, como Baldino (1998) e Oliveira (1993).

Grande defensor de concepções infinitesimais no ensino de Cálculo, principalmente para não matemáticos, Roberto Baldino tem diversos trabalhos publicados em que questiona principalmente a demasiada ênfase dada às demonstrações e rigor no ensino de Cálculo. O referido autor afirma que o que importa

> em um curso de cálculo, é desenvolver o pensamento diferencial que pode ser conceituado nos seguintes termos: é a preferência por justificar a avaliação das grandezas através da integração de uma decomposição infinitesimal. É a ideia originada com Cavalieri e explorada sistematicamente por Leibniz, ideia que os físicos nunca abandonaram. (BALDINO, 2000, p. 74)

O que acontece, segundo Cabral e Baldino (2006), é que os professores sabem das dificuldades dos estudantes e, na tentativa de tornar o conteúdo acessível dedicam mais tempo das aulas à teoria e às abstrações. Contudo, de acordo com a teoria de David Tall, a falta de domínio do pensamento matemático avançado, justifica a dificuldade do estudante em abstrair os conceitos matemáticos. Desta forma, torna-se necessário trazer os conceitos de forma mais intuitiva para o aluno e modificar o enfoque dado à disciplina. Cabral e Baldino (2006) mostraram, por meio de uma análise crítica do ensino de Cálculo ministrando aulas em cursos de Engenharia, que os infinitésimos fazem parte das concepções espontâneas dos alunos e que o ensino via limite cria dificuldades e exclusão. Segundo eles, a forma como os conceitos do Cálculo são trabalhados, a partir da sequência de Cauchy-Weierstrass, encontrada nos livros normalmente adotados, foca demasiadamente na teoria e nas abstrações, como forma de torná-las acessíveis. Porém, essa abordagem não tem como referência o estudante e seu processo de aprendizagem, gerando obstáculos de ordem pedagógica (CABRAL, BALDINO, 2006).

Como já pontuado anteriormente, por consequência da aspiração por modelos expositivos e rigorosos, os infinitésimos perderam legitimidade na Matemática e também no seu ensino. No entanto, os infinitesimais permaneceram em disciplinas na Engenharia e na Física, especialmente em áreas como mecânica e eletricidade, nas quais sempre foram usados, sendo comum fazer referência aos elementos infinitesimais de tempo, dt, de deslocamento, ds, referidos como "elementos" de uma grandeza. De acordo com Cabral e Baldino (2006), já no primeiro ano de um curso de engenharia, os alunos têm contato com infinitésimos, mesmo os professores de matemática os evitando e privilegiando o ensino via limites.

É importante salientar que Cabral e Baldino (2006) não consideram que os raciocínios pela via dos infinitésimos devam excluir a noção de limite. A luta destes autores é, no que tange às práticas em salas de aula de Cálculo, que o professor, valendo-se de sua margem de liberdade, tente assegurar ao aluno a validade de suas concepções espontâneas sobre infinitésimos e os estimule em seu relacionamento com o objeto de ensino. Sobre isso, Milani (2004) afirma que a ideia de trabalhar com limite e infinitésimos juntos tem validade para cursos de Cálculo cujo objetivo é trabalhar com os conceitos a partir das concepções espontâneas dos alunos visando à aplicação desses conceitos nas diversas áreas e não sua formalização. Ideias que

> misturam infinitésimos com o processo de aproximar, relacionado ao conceito de limite, são concepções que funcionam em um curso de Cálculo com tal objetivo. Se os conceitos de limite e infinitésimo apareceram misturados não há problemas, pois formalizar tais concepções é uma tarefa dos cursos de Análise, sejam Standard ou não. (MILANI, 2004, p.10-11)

De acordo com estas ideias, deixando as formalizações no âmbito do ensino superior, mais precisamente nos cursos de Análise, torna-se possível utilizar as reflexões apresentadas sobre a noção de infinitésimo para compreender fenômenos e esboçar gráficos, no âmbito do EM. Pensando um EM que promova a formação cidadã, desenvolvendo compreensões sobre a realidade em que o estudante está inserido, e assim, possibilitando a ação sobre ela, modificando-a, e ainda, construindo uma base de pensamento variacional, possibilitando compreensões de conceitos em diversas áreas e, além disso, projetando um bom aprendizado no ensino superior, na decisão de dar continuidade aos estudos, questionamos: *por que não pensar no cálculo de taxas de* *variação de funções no EM, a partir de noções intuitivas infinitesimais? Quais seriam as possibilidades e as limitações de um trabalho nesta perspectiva?*

4 A NOÇÃO DE INFINITÉSIMO NO ESTUDO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS

Este capítulo é destinado à exploração de elementos específicos do caminho alternativo para esboçar curvas que nos propomos a pesquisar e refletir. Inicialmente apresentamos resultados da investigação realizada em documentos balizadores da Educação a fim de, perante eles, fundamentar nossas ideias. Na sequência, são expostas pesquisas especificamente sobre o esboço de curvas na perspectiva da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, das quais são extraídos elementos para construção do caminho sugerido nesta tese. Por fim, detalhamos o caminho alternativo de esboço de curvas no EM que perpassa o cálculo das taxas de variação da função.

4.1 DOCUMENTOS BALISADORES DA EDUCAÇÃO E ASPECTOS RELACIONADOS À TESE

O mundo atual vive tempos de mudanças marcantes e rápidas. Novas ideias, conhecimentos, ferramentas, formas de procedimentos e comunicação da Matemática vem emergindo e evoluindo continuamente. A necessidade de compreender e de utilizar a Matemática na vida cotidiana nunca foi tão presente e tende a crescer. Neste cenário de mudanças, “aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir os seus futuros” (NCTM, 2008, p.5).

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* é um documento extenso que abrange toda a escolarização, da pré-escola ao 12º ano. Foi elaborado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), organização profissional internacional empenhada na excelência do ensino e aprendizagem da Matemática para todos os estudantes. Este documento é um recurso orientador para todos os responsáveis pelas decisões que afetam a Educação Matemática, permeado pela importância da compreensão na aprendizagem e baseado na ideia de que todos os estudantes devem apreender conceitos e processos matemáticos relevantes para a compreensão. Este documento evidencia a relevância dos aspectos apresentados nesta tese, relacionados ao trabalho com funções, com as taxas de variação e, no que tange ao ensino e à aprendizagem, com a importância das representações matemáticas.

São seis os *Princípios* que descrevem características de uma Educação Matemática de elevada qualidade: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. Enquanto são dez as *Normas* que constituem uma perspectiva orientadora aos educadores: números e operações, álgebra, geometria, medida, análise de dados e probabilidades, resolução de problemas, raciocínio e demonstração, comunicação, conexões e representação.

Questões relativas ao ensino são abordadas no *Princípio do Ensino*. Este orienta, entre outras coisas, que para um ensino eficaz, os professores necessitam de diversos tipos de conhecimentos matemáticos: conhecimentos gerais, conhecimento profundo e flexível dos objetivos curriculares, conhecimento dos desafios que os alunos podem encontrar no percurso da aprendizagem, conhecimento das formas como as ideias matemáticas podem ser representadas e ainda, conhecimentos acerca do modo como os alunos podem ser avaliados (NCTM, 2008). Segundo as orientações, os professores precisam *compreender as diferentes representações de uma ideia matemática, as forças e fraquezas relativas de cada uma e a forma como se relacionam umas com as outras*, bem como reconhecer *quais são as noções em que os alunos sentem, frequentemente, mais dificuldades e possam auxiliá-los a superar algumas destas incompreensões*.

Tais atividades nada triviais para o professor estão estreitamente relacionadas ao que Duval considera em sua teoria, exposta no segundo capítulo. Um trabalho em sala de aula na perspectiva da TRRS possibilita uma tomada de consciência, por parte do professor, da importância de reconhecer os diferentes registros de representação semiótica de um objeto matemático, de compreender as questões de congruência e não congruência entre estes registros, o que influencia diretamente no custo cognitivo de aprendizagem de conceitos e, a partir disto, reconhecer onde se encontram as dificuldades dos estudantes.

No *Princípio da Aprendizagem* é apresentada a visão da matemática escolar, baseada na aprendizagem matemática com compreensão e capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos para, assim, construir novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios (NCTM, 2008). Na perspectiva da TRRS esta compreensão é obtida a partir de conversões entre registros de representação semiótica distintos de um mesmo objeto matemático e da ênfase necessária dada no ensino aos diversos pontos de vista (cognitivo, matemático, pedagógico e psicológico) a serem considerados no trabalho com a Matemática (DUVAL, 2012c).

As Normas pontuadas no documento são descrições daquilo que o ensino de Matemática deve habilitar os alunos “a saber” e “a fazer”, os níveis de compreensão, o conhecimento e as capacidades que estes deverão adquirir durante todo o trajeto escolar. Relacionadas ao nosso interesse de pesquisa, as normas de Álgebra dão ênfase à importância de trabalhar as *relações entre quantidades*, incluindo as *funções*; as *formas de representar relações matemáticas* e a *análise da variação de funções*. De acordo com este documento e, remetendo novamente a elementos da TRRS, é necessário que os alunos compreendam os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica e o modo como os símbolos podem ser utilizados para registrar ideias e tirar conclusões face às diversas situações (NCTM, 2008).

A necessidade de ampliação do repertório de *funções* e a aprendizagem de suas diversas características, especificamente para os estudantes do 9º ao 12º anos, é aspecto presente neste documento. Nesta necessidade, repousa a ideia de os alunos serem capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos, bem como de avaliar as vantagens e desvantagens de cada forma de representação de funções, incluindo numéricas, gráficas e simbólicas, possibilitando “desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções” (NCTM, 2008, p. 40).

Aliás, sobre funções, dois aspectos são fortemente enfatizados: a importância de o estudante ser capaz de *usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas*, e de *analisar a variação em diversos contextos*. Esta análise objetiva a compreensão de funções de um modo geral e também de situações relacionadas ao cotidiano em revistas e jornais. Ademais, é salientado que se as noções de variação forem priorizadas já nos primeiros anos de escolaridade, talvez os alunos ingressem no ensino superior, nos cursos de Cálculo, com bases mais sólidas que possibilitem a compreensão dos conceitos neste nível.

A *Norma Representação*, por sua vez, orienta que as representações utilizadas em Matemática, resultantes de um processo de aperfeiçoamento cultural ocorrido ao longo de vários anos, são essenciais à aprendizagem e à produção de Matemática, auxiliando os estudantes a organizarem seu raciocínio e aumentando significativamente a capacidade de pensar matematicamente. De acordo com a TRRS, as representações essenciais para a compreensão matemática são as semióticas, as quais permitem as operações cognitivas de tratamento e conversão. O tratamento é a transformação que ocorre intrarregistro, praticamente a única evidenciada no ensino atualmente. O *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) também atenta para isto quando afirma que as distintas formas de representação como diagramas, gráficos e expressões simbólicas, têm sido ensinadas e aprendidas como finalidades, em si mesmas, e não como elementos essenciais no apoio à compreensão de conceitos e à comunicação, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados, e na aplicação da Matemática a problemas cotidianos.

Sobre isto, Duval (2012b) afirma que a grande maioria dos estudantes, em todos os níveis de ensino, não reconhece o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes. O que ocorre é um “isolamento de registros de representação” (DUVAL, 2012b, p. 283), o qual “subsiste, mesmo após um ensino de conteúdos matemáticos que tenha tido estes diferentes registros amplamente utilizados” (DUVAL, 2012b, p. 283). Segundo este autor, a ausência de coordenação entre representações de objetos matemáticos pode possibilitar uma compreensão parcial, porém,

> esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito (p. 283).

Sumarizando, as preocupações sinalizadas no *Princípios e Normas* vem ao encontro de questões fundamentais da TRRS, mesmo não referenciando-a. O documento destaca que representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações ou conceitos complexos. Isto faz com que os alunos necessitem de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão (NCTM, 2008), orientando sobre a importância da utilização de múltiplas representações ao longo da trajetória escolar. Esta ideia novamente nos remete a Duval (2012b), quando sinaliza para a importância de diversas representações para a compreensão e afirma que “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados” (p. 280).

As características evidenciadas são abordadas no documento como fundamentais em todos os níveis de ensino, com diferenças de profundidade e abordagem entre eles. Especificamente para os alunos do EM, é destacada a importância de o aluno ser capaz de *analisar a variação em diversos contextos* no sentido de aproximar e interpretar taxas de variação com base em dados gráficos e numéricos.

No Brasil, recentemente, o ensino da Matemática vem tomando novos rumos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 2000, apresentaram novos objetivos de abordagem do estudo da Matemática com base na Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9.394/96 (BRASIL, 2000a)) e na Resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE) de 1998, que organizou as áreas de conhecimento. Ao instituir as diretrizes curriculares nacionais para o EM, os PCN, “apontam de que forma o aprendizado de Ciências e Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio” (BRASIL, 2000b, p. 6).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM, bem como as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000a), evidenciam como objetivos do ensino: a) o aprofundamento dos saberes disciplinares, com procedimentos científicos pertinentes aos seus objetos de estudo, com metas formativas particulares, até mesmo com tratamentos didáticos específicos; b) a articulação interdisciplinar destes saberes, propiciada por várias circunstâncias, dentre as quais se destacam os conteúdos tecnológicos e práticos a serem tratados desde uma perspectiva integradora (BRASIL, 2000b).

Na esteira dessas mudanças curriculares, o conhecimento escolar ficou dividido em três grandes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias. A partir disso, o currículo de Matemática foi revisto e sistematizado em três eixos ou temas estruturadores que podem ser desenvolvidos, simultaneamente, nas três séries do EM. De acordo com as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL, 2002, p. 120), estes eixos estruturadores correspondem a “um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos". São eles: Álgebra - Números e Funções; Geometria e Medidas; Análise de Dados. Para o desenvolvimento do tema "Álgebra: Números e Funções" são propostas duas unidades temáticas: *variação de grandezas* e trigonometria.

Os PCN+ destacam que as *funções* constituem um conceito fundamental a ser estudado na disciplina de Matemática do EM e enfatizam a necessidade de aquisição da linguagem algébrica, necessária para expressar relações entre grandezas, resolver problemas, modelar situações e fenômenos. Segundo o documento, "a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções" (BRASIL, 2002, p.121). Inclusive, são sinalizados caminhos para o trabalho pedagógico com funções também são sinalizados: as atividades de descrição de situações de dependência entre duas grandezas; situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente; problemas de aplicação e exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

Em suma, é possível identificar nestes documentos a preocupação e indicação de se trabalhar de forma interdisciplinar com variação de grandezas. Com relação ao trabalho pedagógico, além da seleção de temas e conteúdos, os documentos orientam que a forma de tratá-los, a organização das atividades em sala de aula, os materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino são decisivos para um trabalho simultâneo dos conteúdos e competências (BRASIL, 2002).

Na perspectiva de nossa pesquisa, a forma de tratar o conteúdo matemático, mais especificamente o esboço de curvas, perpassa suas representações semióticas, sendo necessário compreender suas interligações e ainda, de que maneira modificações em uma dessas formas, podem implicar em modificações na outra. Esta ideia também é contemplada nos Parâmetros Curriculares Nacionais da área de Ciências da Natureza - Matemática e suas Tecnologias, quando apontam para a necessidade deste tipo de compreensão, tendo em vista que uma das competências que se espera ser adquirida pelos estudantes de nível médio, é: "Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas" (BRASIL, 2002, p.114).

Apesar de considerar a forma de tratar os temas e conteúdos como decisivos, os PCN não fazem referência a quais metodologias podem ou devem ser utilizadas pelo professor para alcançar as competências indicadas. Porém, corroboramos Silva (2008) ao afirmar que a indicação presente no documento de transformação de linguagens, implicitamente sinaliza a necessidade do uso de diversas representações como condição para a aprendizagem matemática, conforme sugere Duval (2003).

Diante das ideias apontadas nos documentos e das pesquisas e resultados expostos no capítulo terceiro, fundamentamos o caminho alternativo de esboço de curvas com relação:

- à importância do trabalho com as diferentes formas de representação de funções, mais precisamente do esboço de curvas;

- ao recurso utilizado para pensar este objeto - taxas de variação da função;

- à base teórica utilizada: TRRS.

Na próxima seção apresentamos detalhadamente pesquisas que se ancoram na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, das quais são destacados elementos que, juntamente com o que já foi evidenciado, norteiam a sugestão de trabalho com o esboço de curvas.

4.2 ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS EM PESQUISAS

Os resultados das pesquisas expostas no capítulo terceiro, relativos às dificuldades de compreensões de funções e de Cálculo, legitimam propostas de ensino destes conceitos a partir de abordagens distintas da usualmente utilizada pelos livros didáticos. Tendo como referência o exposto na seção 2.5 do capítulo segundo, sobre a abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Duval (2011a), explicitamos resultados de trabalhos que foram citados nesta seção e que mobilizam discussões sobre o esboço de curvas de funções nesta perspectiva, a partir de distintos recursos e elementos.

4.2.1 Função polinomial do primeiro grau

Em artigo publicado em 1988 em francês e posteriormente traduzido para o português em 2011, intitulado *Gráficos e Equações: a articulação de dois registros*, Duval (2011a) sugere o estudo do esboço do gráfico especificamente da função polinomial do primeiro grau a partir da abordagem de interpretação global das propriedades figurais. Segundo este autor (2011a), as dificuldades relacionadas ao esboço de gráficos destas funções especificamente, se encontram "na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica" (p. 97).

De acordo com este estudo, a análise da congruência entre os registros algébrico e gráfico perpassa a discriminação das unidades significativas próprias a cada registro e as transformações implícitas exigidas para a mudança de registro. Nas expressões algébricas, as unidades significativas são todos os símbolos explícitos e implícitos, por exemplo, na expressão $y = -5x$, estão explícitos o sinal "$-$" e o coeficiente "5", o que não é o caso da função $y = x$, em que o sinal "$+$" e o coeficiente "1" estão implícitos. Na tabela 3 constam dados discutidos por Duval.

Tabela 3 - Variáveis visuais e unidades simbólicas para *y=ax+b*.

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido da inclinação	Ascendente	Coeficiente > 0	Ausência de sinal
	Descendente	Coeficiente < 0	Presença do sinal -
Ângulos com os eixos	Partição simétrica	Coef. Variável = 1	Coef. não escrito
	Ângulo menor	Coef. Variável < 1	Coef. Escrito
	Ângulo maior	Coef. Variável > 1	Coef. Escrito
Posição sobre o eixo	Corta acima	Acrescenta constante	Sinal +
	Corta abaixo	Subtrai constante	Sinal -
	Corta na origem	Sem correção aditiva	Ausência de sinal

Fonte: Duval (2011a, p. 101)

Na representação gráfica de uma reta, Duval (2011a) destaca as variáveis visuais como sendo: o sentido da inclinação (podendo assumir dois valores), os ângulos do traçado com os eixos (podendo assumir três valores) e a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical (podendo assumir três valores). Uma breve leitura da tabela 3 deixa claro que cada um dos oito valores das variáveis visuais do gráfico corresponde a uma unidade significativa na expressão algébrica da reta. A partir da tabela e tendo clareza das relações existentes entre as unidades significativas de cada registro, diversas análises podem ser feitas. Todavia, no ensino tradicional atual, esta abordagem de articulação e análises não é estimulada e a discriminação das variáveis visuais e sua vinculação com as unidades simbólicas correspondentes, comumente são ignoradas. Sobre isso, Duval (2011a) pontua,

> Não pode haver utilização correta das representações gráficas cartesianas sem a discriminação explícita das variáveis visuais pertinentes e sem uma correspondência sistematicamente estabelecida entre os valores dessas variáveis e as unidades significativas da expressão algébrica. Ignorando a especificidade e a importância da abordagem de interpretação global, o professor não consegue atingir o objetivo de uma utilização correta dos gráficos cartesianos para a maioria dos alunos do primeiro ano do ensino médio (15 a 16 anos) (p. 104).

A citação revela a importância desta abordagem para o trabalho com estudantes de EM. A partir deste estudo de Duval, a abordagem de interpretação global para aprendizagem de esboço de curvas vem inspirando outros pesquisadores, como Luiz (2010), Moretti (2003), Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), Moretti e Luiz (2010) e Silva (2008) a investigar recursos e/ou elementos que permitam a associação entre variáveis visuais gráficas e unidades significativas do sistema algébrico.

4.2.2 Função polinomial do segundo grau

A parábola é estudada no EM, em dois momentos:

- como uma curva obtida pelo lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto F, chamado de foco, e de uma reta diretriz, d, onde as parábolas são apresentadas por meio destes elementos (vértices, foco e reta diretriz);

- como uma curva obtida por meio das funções polinomiais do segundo grau, onde ela é genericamente vista como $y = ax^2 + bx + c$.

Os livros didáticos, porém, pouco relacionam estes dois momentos, o que pode fazer com que os estudantes tenham dificuldades de associá-los e identificá-los como sendo o mesmo objeto, podendo gerar dificuldades no esboço do gráfico.

Diante destas questões, Moretti (2003) analisa a possibilidade de manter a relação entre variável visual de representação e unidade significativa da escrita algébrica da função quadrática, usando como recurso a *translação*. Assim, sendo uma parábola posicionada com vértice na origem do plano cartesiano, com foco em $(0, p/2)$ e reta diretriz de equação $y = -p/2$, com $p \neq 0$ e p sendo o parâmetro da parábola ou a distância entre o foco e a reta diretriz, obtém-se a equação:

$$y = \frac{1}{2p}\ x^2$$

Relacionando $y = \frac{1}{2p}\ x^2$ e $y = ax^2$, é possível perceber que o sinal de a depende do sinal da razão $\frac{1}{2p}$. Este caso, com vértice na origem, pode ser relativamente fácil para os estudantes reconhecerem as relações entre unidades significativas da expressão algébrica e unidades simbólicas gráficas. As análises dificultam quando se tem parábolas com equações gerais $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, b e c constantes reais. Isto, pois os registros algébricos e gráficos não possuem congruência.

Se a parábola[24]

$$y = 2x^2 - 8x - 10 \qquad (1)$$

for escrita na forma

$$y + 18 = 2(x - 2)^2 \qquad (2)$$

ou ainda

$$y - (-18) = 2(x - (+2))^2, \qquad (3)$$

fica claro que (3) foi obtida por dois movimentos de translação de $y = 2x^2$: horizontal à direita em duas unidades e vertical para baixo em dezoito unidades. Desta forma, o vértice passa da origem para (2,0) e, em seguida, para $(2, -18)$ (MORETTI, 2003). Este mesmo procedimento é feito para obtenção do foco e da reta diretriz.

De acordo com Moretti (2003) a expressão (3) tem um maior grau de congruência semântica com as translações descritas a nível gráfico. Essa congruência é nos dois sentidos, por exemplo, a parábola de vértices $(-2, -3)$ pode ser representada pela sentença algébrica $y + 3 = (x + 2)^2$. Isto significa que, para conversões entre registro algébrico e gráfico de funções polinomiais do segundo grau, a transformação por translação pode minimizar os problemas de não

[24] A transformação da sentença (1) para (3) pode ser obtida por tratamento no interior do registro algébrico com utilização do método de completar quadrados: $y = 2(x^2 - 4x + 4 - 4 - 5) \rightarrow y = 2\left(x - 2\right)^2 - 18 \rightarrow y + 18 = 2\left(x - 2\right)^2$. Os valores -18 e $+2$ correspondem ao y_v (y do vértice) e x_v (x do vértice) ou aos sentidos e valores dos módulos dos vetores que realizam a translação na horizontal e na vertical de qualquer ponto da parábola.

congruência. O maior custo cognitivo talvez seja o tratamento que leva a equação (1) à (3), chamado de complementação de quadrados. Contudo, este tratamento é exigido em outras situações matemáticas e o seu uso no EM pode trazer diversos benefícios como fornecer as raízes reais de uma equação.

O esboço de parábolas utilizando a translação pode contribuir para que o aluno perceba o conjunto traçado/eixo como uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica na perspectiva discutida por Duval (2011a), ou seja, percebendo as implicações de variações do registro algébrico no registro gráfico e vice-versa.

4.2.3 Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

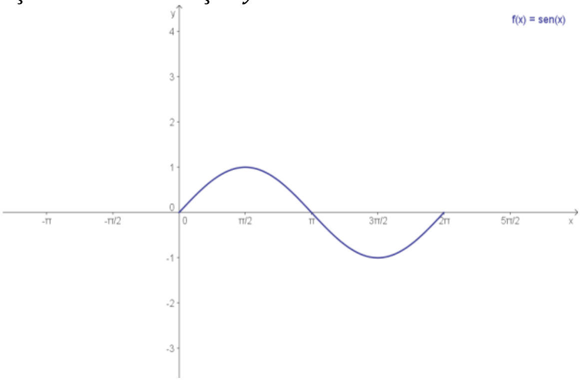
O esboço de curvas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas é estudado profundamente na dissertação de mestrado de Silva (2008) e alguns resultados são publicados em Corrêa e Moretti (2014). Nestes estudos, é discutida a proposta de esboçar curvas destas funções, utilizando variáveis visuais como a *amplitude* e o *período*, e recursos como a *translação* e a *simetria em paralelo* com as unidades significantes da expressão algébrica (CORRÊA; MORETTI, 2014).

A proposta de Corrêa e Moretti (2014) se baseia na aplicação da operação cognitiva de *tratamento* nos registros algébrico e figural de maneira separada e paralela de uma curva base, por exemplo, no caso das senoides, $y = \operatorname{sen} x$, com o objetivo de, desta forma, chegar aos registros figural e algébrico da curva a ser esboçada. Este procedimento resulta na *conversão* de uma representação a outra,

> evidenciando características do objeto matemático que transparecem e mantêm uma relação das duas representações entre si, as quais, embora pertencentes a sistemas semióticos diferentes, fazem referência a um mesmo objeto (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 45).

Nesta perspectiva, é preciso perceber quais modificações nos coeficientes da expressão algébrica da curva refletem modificações no gráfico. Assim, tomando como exemplo as senoides, cuja equação algébrica genérica é definida por $y = \pm a + b \operatorname{sen}(kx \pm c)$, é necessário analisar primeiramente a função $y = \operatorname{sen} x$, de domínio real. Esta função é periódica com período de 2π, representada na figura 11.

Figura 11- Esboço da curva da função y=$sen\ x$.



Fonte: Silva (2008, p. 86)

A partir deste esboço e reconhecendo as propriedades figurais, é possível esboçar diversas curvas com coeficientes distintos como $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $y = 3 + \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, entre outras. Na tabela 4 consta o estudo da relação entre unidades significantes da escrita algébrica e variáveis visuais da curva da função $y = \operatorname{sen} x$, o qual é utilizado para esboçar a curva da função $y = \pm a + b\operatorname{sen}(kx \pm c)$, apresentado na tabela 5.

Tabela 4 - Características da curva base y=$sen\ x$.

Coeficiente	Unidades algébricas	Curva (variáveis visuais)
$b = 1$	O coeficiente não aparece	Amplitude 2, intervalo de imagem $[-1,1]$
$k = 1$	O coeficiente não aparece	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a 2π
$a = 0$ e $c = 0$	Os coeficientes não aparecem	Não há translações. O ponto (0,0) pertence à curva. A curva é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano.

Fonte: Silva (2008, p.109)

Tabela 5 - Características das curvas senoides de expressão *y=±a+b.sen(kx±c)*.

Coeficiente	Expressão (unidades de escrita algébrica)	Curva (variáveis visuais)
b	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude $2b$, intervalo imagem $[-b, b]$.
	Negativo: Presença do sinal $-$; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude $\|2b\|$, intervalo imagem $[-b, b]$, curva simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta coeficiente b positivo.
k	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{k}$.
	Negativo: Presença do sinal $-$; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{\|k\|}$; Curva simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta coeficiente k positivo.
a	Positivo: ^{+}a (presença do coeficiente com sinal +)	Translação do eixo y de a unidades para cima em relação à senoide onde $a = 0$. Modificações do intervalo imagem para $[-b + a, b + a]$ se $b > 0$ ou para $[b + a, -b + a]$ se $b < 0$.
	Negativo: ^{-}a (presença do coeficiente com sinal $-$)	Translação do eixo y de a unidades para baixo em relação à senoide onde $a = 0$. Modificações do intervalo imagem para $[-b - a, b - a]$ se $b > 0$ ou para $[b - a, -b - a]$ se $b < 0$.
c	Positivo: ^{+}c (presença do coeficiente com sinal +)	Translação no eixo x de $\left\|\frac{c}{k}\right\|$ unidades para a direita em relação à senoides onde $c = 0$.
	Negativo: ^{-}c (presença do coeficiente com sinal $-$)	Translação no eixo x de $\left\|\frac{c}{k}\right\|$ unidades para a esquerda em relação à senoides onde $c = 0$.

Fonte: Silva (2008, p. 109).

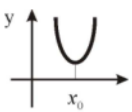
Este tipo de análise favorece a *conversão* no sentido inverso, a qual se mostra mais difícil para os estudantes quando utilizada a *abordagem ponto a ponto*, e, desta forma, possibilita uma leitura correta do gráfico (CORRÊA; MORETTI, 2014). Esta mesma análise pode ser realizada para as outras funções trigonométricas, lembrando que a curva base, em se tratando de EM, pode ser construída facilmente utilizando a abordagem ponto a ponto, e, a partir dela, tirar as conclusões. No estudo das funções exponenciais e logarítmicas, também é possível aplicar as propriedades figurais de simetria e translação com o objetivo de reforçar a relação entre o esboço gráfico e sua expressão algébrica e não simplesmente entre curva e alguns pontos.

4.2.3 Funções do ensino universitário

No âmbito do ensino universitário, observações nos parâmetros da expressão algébrica da função não são suficientes para descrever características da curva correspondente no plano cartesiano, devido à complexidade das funções trabalhadas. Diversos tratamentos matemáticos precisam ser realizados e aplicados na forma simbólica, como derivadas, limites, resolução de equações e inequações, entre outros. Assim sendo, o número de variáveis visuais aumenta significativamente e sem correspondência única com uma variável simbólica (MORETTI; FERRAZ; FERREIRA, 2008). Diante da dificuldade de trabalhar nesta perspectiva, os autores Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) elaboraram um conjunto de elementos, semelhantes ao que Duval (2011a) apresentou para o caso da função afim, como meio de orientar a conversão entre registro algébrico e gráfico das funções trabalhadas no ensino universitário, na perspectiva de interpretação global. Estes elementos orientadores são unidades significativas das representações da função: *unidades básicas gráficas* e *unidades básicas simbólicas*.

Sob esta ótica, são definidos de antemão elementos básicos com uso de tratamentos do Cálculo. Alguns destes elementos são: a variabilidade e concavidade, retas assintóticas e pontos importantes como extremos relativos, pontos de inflexão e continuidade. De acordo com Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), sem o recurso do Cálculo, seria impossível o estudo da conversão de diversas funções no ensino universitário com tratamento global. Na tabela 6, consta um exemplo de unidade básica.

Tabela 6 - Unidades gráficas, linguísticas e simbólicas de um ponto crítico de uma função.

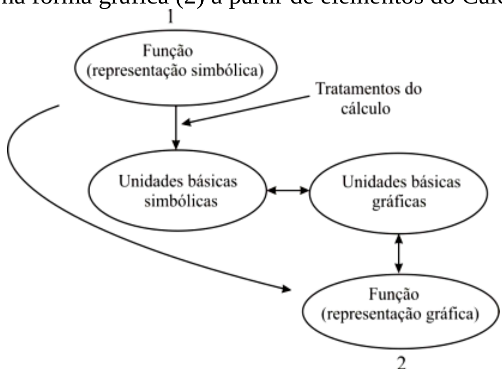
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo em x_0. Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x_0) < 0, x \in V^{-}(x_0) \\ y'(x_0) > 0, x \in V^{+}(x_0) \end{cases}$

Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 106).

A tabela 6 apresenta uma unidade básica referente a um ponto crítico de uma função, mais especificamente um ponto de mínimo relativo. A unidade básica gráfica visualizada no esboço da curva de uma função é relacionada com a unidade básica simbólica correspondente, a qual é caracterizada pela derivada primeira da função igual a zero e a mudança de sinal de negativo para positivo na vizinhança de x_0 ($V^-(x_0)$ ou $V^+(x_0)$).

De acordo com Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), a representação simbólica da função produz características algébricas, denominadas de unidades básicas simbólicas cujos elementos se relacionam aos elementos de características gráficas denominadas unidades básicas gráficas. Assim, as conversões entre as representações de uma função, tanto em um sentido como em outro, tem a intermediação de unidades básicas. A figura 12, a seguir, apresenta uma descrição dos tipos de conversões possíveis na proposta destes autores.

Figura 12 - Tipos de associação entre a função registrada na forma simbólica (1) e o seu registro na forma gráfica (2) a partir de elementos do Cálculo.

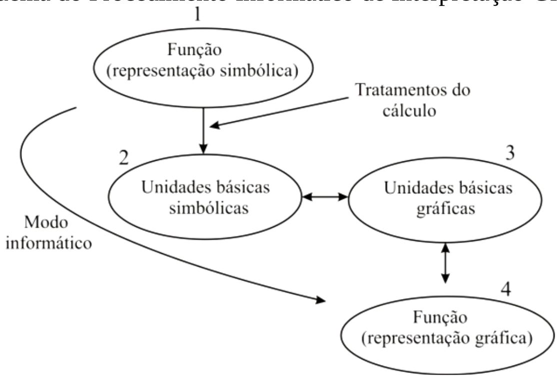


Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 110).

A conversão direta no sentido 1→2, associada à conversão 2→1, ocorre para um grupo restrito de funções, como as estudadas em Duval (2011a), Moretti (2003) e Silva (2008). Em alguns casos, a conversão no sentido 1→2 pode até ser agilizada e facilitada quando utilizada a abordagem ponto a ponto ou programas informáticos para esboço da curva. Contudo, na maioria das funções, a associação simultânea entre representação simbólica e gráfica não é possível, tornando obrigatória a passagem pelas unidades básicas simbólicas e gráficas, conforme preconizam Moretti; Ferraz e Ferreira (2008).

Também pensando nas funções trabalhadas do ensino universitário, Luiz (2010) e Moretti e Luiz (2010, 2014), propõem o *procedimento informático de interpretação global*, que alia a abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Duval (2011a) ao procedimento de esboço da forma gráfica com o uso de programas computacionais. Nesta perspectiva, é imprescindível o uso de elementos do Cálculo, os quais irão dar as formas básicas da curva, denominadas de unidades básicas gráficas. O procedimento informático de interpretação global, apoiado em softwares, possibilita algumas vantagens relacionadas à rapidez de visualização da curva e de mudança de escalas e parâmetros. Ao esquema da figura 12 é acrescentado o modo informático, como visto na figura 13, a seguir.

Figura 13 - Esquema do Procedimento Informático de Interpretação Global.



Fonte: Moretti e Luiz (2010, p. 531).

No esquema da figura 13, levando em conta a complexidade das funções no ensino universitário, a conversão no sentido 1→4, associada à conversão 4→1, ocorre para um grupo limitado de funções e pretender um procedimento de conversão que permite acompanhar modificações simultâneas entre as representações simbólica e gráfica é praticamente impossível. Isto justifica a utilização do modo informático para a conversão no sentido de 1→4 e a volta, partindo do esboço gráfico, levando em conta as unidades básicas simbólicas, sem preocupação primordial com a forma algébrica em si, mas com as características desta forma, ou seja, no sentido 4→3↔2←1.

Resumindo, tanto Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) como Luiz (2010) e Moretti e Luiz (2010, 2014) tratam das unidades básicas das funções, ora percebidas globalmente na curva, ora destacadas e relacionadas com a expressão algébrica. Mesmo não sendo possível visualizar a relação direta entre as representações gráfica e simbólica de funções no ensino universitário, é possível estudar a relação entre as unidades básicas gráficas e simbólicas (MORETTI; LUIZ, 2010) como forma de compreender o esboço de curvas e o fenômeno a qual representa, de acordo com as prerrogativas de Raymond Duval.

Diante do exposto, a seguir, esclarecemos elementos de um caminho alternativo de esboço de curvas, cuja premissa se aproxima da de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), porém em âmbito de EM.

4.3 TAXAS DE VARIAÇÃO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Os documentos balizadores da educação brasileira bem como os *Princípios e Normas*, propostos pelo NCTM, apontam para a importância do ensino e da aprendizagem de *variação de grandezas*. Por outro lado, pesquisas sinalizam para as dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão deste conceito, o que impossibilita significar de forma ampliada a noção de função, tão importante em todas as áreas do conhecimento.

Assumindo que as taxas de variação são, na maioria das vezes, expressas como números racionais, alguns autores como Catto (2000), Merlini (2005), Teixeira (2008), Santos (2005) e Romanatto (1997), associam as dificuldades de compreensão neste conceito aos diversos significados que o número racional pode assumir e às suas diferentes representações semióticas. Os significados a eles associados são: medida (parte-todo); quociente; razão; operador multiplicativo; probabilidade; número na reta numérica e, acrescentado por Gomes (2010), porcentagem. A taxa de variação, enquanto relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de grandezas diferentes, mas dependendo uma da outra, por exemplo, a velocidade de um móvel (relação entre distância e tempo) (SILVA, SANTIAGO, SANTOS, 2013), pertence ao significado *razão*.

De todo o modo, existe a necessidade de uma compreensão efetiva do conceito “taxa de variação de funções” e é desafiador e não é novidade refletir sobre a possibilidade de estudar elementos do Cálculo, mais precisamente a variabilidade de funções, no EM, conforme Ávila (1991), Duclos (1992), Rezende (2003, 2007) e Silva, Andrade e Azevedo (2013) sinalizam. Contudo, os trabalhos existentes nesta perspectiva abordam a derivada de funções e muitos utilizam a tecnologia para possibilitar essa construção. A nossa ideia, porém, perpassa a compreensão de taxas de variação, calculadas e analisadas a partir da noção intuitiva de infinitésimos a fim de discutir sobre o esboço das curvas de funções do EM.

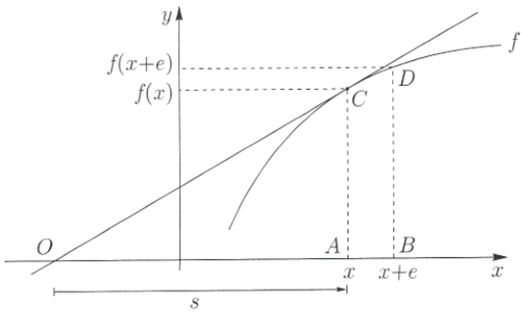
4.3.1 A noção de infinitésimo

A noção de infinitésimo, como mencionado na seção 3.2 do capítulo terceiro, mesmo com suas inconsistências teóricas e diferentes concepções, permeou a construção do Cálculo ao longo da história. Nesta seção, apresentamos algumas destas concepções e precisamos a que será utilizada no cálculo das taxas de variação para os objetivos deste trabalho.

Um dos pioneiros a tratar e estudar as retas tangentes a uma curva foi Fermat (1601-1665), na primeira metade do século XVII. Suas ideias são consideradas embriões do conceito de derivadas, surgidas no contexto dos problemas concretos tratados na época, abordados no terceiro capítulo, seção 3.2.1.

De acordo com Ávila (2003), em seus estudos, Fermat considerou dois pontos da curva da função $y = f(x)$, infinitamente próximos um do outro, $(x, f(x))$ e $(x + e, f(x + e))$, de acordo com a figura a seguir.

Figura 14 - Reta tangente de Fermat a partir da semelhança de triângulos.



Fonte: Ávila (2003, p. 88).

A ideia de *infinitamente próximos* significa que a grandeza *e* é um número muito próximo de zero, de forma que às vezes pode ser desprezado; mas, ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que podemos dividir por ele mesmo quando isso for conveniente. Assim, para *e* infinitamente próximo de zero, podemos dizer que os triângulos

OAC e OBD da figura 14 são semelhantes, de forma que podemos escrever:

$$\frac{f(x+e)}{s+e}=\frac{f(x)}{s}$$

Resolvendo a igualdade em s, obtemos:

$$s=\frac{e.f(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

$$s=\frac{f(x)}{[f(x+e)-f(x)]/e}$$

Através da ideia de limite, para saber o valor de s, faríamos $e\rightarrow 0$ e obteríamos $s=\frac{f(x)}{f'(x)}$. Contudo, Fermat e seus contemporâneos procediam concretamente, caso a caso, substituindo funções. Por exemplo, para a função $f(x)=x^2$, era feito: $s=\frac{x^2}{[(x+e)^2-x^2]/e}=\frac{x^2}{2x+e}$. Fermat, simplesmente considerava e insignificante, fazendo $e=0$ e, assim, determinava $s=\frac{x}{2}$. Com este valor, podia-se determinar o ponto O e, com ele, a tangente OC.

No livro *Calculus Made Easy*, Thompson (1914) aborda o Cálculo ignorando o uso rigoroso de limites e utilizando o método infinitesimal de aproximação, semelhante ao que Leibniz utilizou em suas descobertas. Neste livro, são realizadas reflexões a respeito dos diferentes graus de "pequenez" de grandezas, ou seja, de valores pequenos de diferentes ordens. De acordo com o autor, ao fixarmos uma fração numérica como proporção de alguma quantidade relativamente pequena (infinitésimo), podemos facilmente encontrar outras frações de "um grau maior de pequenez" (THOMPSON, 1914, p. 3). Por exemplo, se por alguma razão tomamos um por cento (1/100) como uma fração pequena, então um por cento de um por cento (1/10000) é chamada por este autor de uma fração pequena de 2ª ordem e 1/1000000, fração pequena de 3ª ordem e assim por diante. A reflexão deste autor é que, sendo uma quantidade que em si já é pequena, a quantidade pequena de 2ª ordem (ou 3ª, 4ª,...) referente a ela, torna-se insignificante e em muitos cálculos é possível excluir estas quantidades pequenas de ordem superior. Ou seja, o cálculo infinitesimal de Thompson está baseado na ideia de desprezar somente infinitésimos de ordem superior a um.

A diferença dos procedimentos envolvendo o infinitésimo de Thompson (1914) e de Fermat, abordada por Ávila (2003), é que Thompson exclui os infinitésimos de ordem superior, atentando para o fato de que pequenas quantidades multiplicadas por algum fator, em alguma expressão, não podem ser excluídos caso o fator seja um número "grande". Isto quer dizer que, por exemplo, sendo x uma quantidade e $\varDelta x$ um pequeno incremento adicionado a ela, então o quadrado de $x + \varDelta x$, é $x^2 + 2x.\varDelta x + (\varDelta x)^2$ e nesta expressão, o terceiro termo pode ser excluído por ser insignificante devido ao "grau de pequenez". Porém, o segundo termo, por $\varDelta x$ estar multiplicado por uma quantidade que não é pequena (ou não se conhece), não deve ser excluído. Geometricamente, isto significa que quando um quadrado de lado x tem seus lados aumentados $\varDelta x$, a área aumenta dois retângulos de área $x.\varDelta x$ e um pequeno quadrado de área $(\varDelta x)^2$. Supondo $\varDelta x$ ainda menor, claramente $(\varDelta x)^2$ é insignificante e somente é considerado o incremento $\varDelta x$ (THOMPSON, 1914).

Assim, no cálculo infinitesimal de Thompson (1914) só podem ser excluídos os infinitésimos de ordem superior a um, diferentemente do procedimento de Fermat. Provavelmente Thompson trabalhou desta forma, pois, no ano de 1914, não tendo ainda uma teoria que embasasse os infinitésimos, prevaleciam os paradoxos a eles relacionados e, assim, a "divisão por zero" era evitada. Fato este, com o qual Fermat e vários matemáticos antigos não se preocuparam inicialmente, mas sofreram grandes críticas ao longo da história. Atualmente, os infinitésimos são embasados rigorosamente na Análise Não-Standard, que surgiu somente na década de 60 do século XX, com estudos de Abraham Robinson.

Na tese de Rêgo (2000), o autor defende o uso dos infinitésimos no ensino de Cálculo, argumentando que a construção dos conceitos centrais é mais intuitiva do que a obtida utilizando limites. Isto, pois os infinitésimos utilizam uma simbologia mais simples, não recorrendo a processos infinitos, evitando muitas dificuldades de aprendizagem. Para saber o comportamento de uma função próximo a um ponto este autor se ancora no conjunto dos números hiper-reais, calculando a aproximação infinitesimal de uma função numa vizinhança infinitesimal deste ponto, ou seja: toma um infinitésimo $\varDelta x$, obtendo um número infinitamente próximo a x, $x + \varDelta x$; calcula $f(x + \varDelta x)$ e toma o real mais próximo do número hiper-real obtido. Tomar o real mais próximo significa desconsiderar Δx, já que, nesta perspectiva, só os valores reais interessam, o que equivale a fazer $\Delta x = 0$.

A fim de exemplificar o procedimento de Rêgo (2000), pode-se tomar a função $f(x) = x^2$ e verificar o que ocorre com ela para valores próximos de $x = 3$, fazendo:

$$f(3 + \varDelta x) = (3 + \varDelta x)^2 = 9 + 6\varDelta x + (\varDelta x)^2.$$

O real mais próximo desse número (fazendo $\Delta x = 0$) é 9. Então, para valores de x *próximos a 3*, $f(x)$ *se aproxima de 9*.

O interesse deste trabalho não é aprofundar a teoria da Análise Não-Standard, nem o conjunto dos Números Hiper-Reais, do qual os infinitésimos fazem parte. As discussões suscitadas não se alicerçam na formalização e rigor dos infinitesimais, mas na noção intuitiva. Portanto, os cálculos expostos na sequência são embasados na noção de infinitésimo e vão ao encontro da ideia de Fermat, no sentido intuitivo, desconsiderando o incremento Δx, já que ele é tão pequeno quanto necessário, e da ideia de Rêgo (2000), na medida em que embasa essa exclusão na Análise Não Standard.

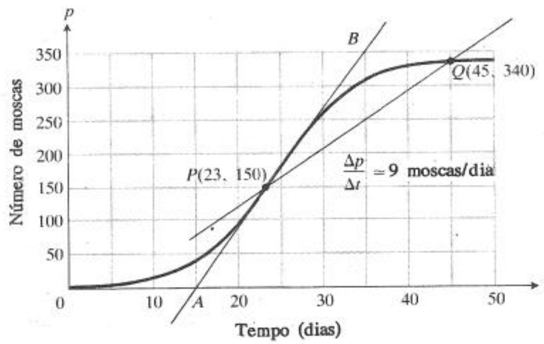
Em Ávila (2003) o incremento de x é identificado como e, outras obras utilizam h ou Δx. Nas discussões deste trabalho utilizamos Δx como a notação para representar um incremento infinitesimal e calcular as taxas de variação. No decorrer da aplicação da sequência didática concluímos que esta notação não foi a melhor escolha para o trabalho com o EM devido à semelhança de Δx com x, o que, nos cálculos dos estudantes, acarretou inúmeros erros.

4.3.2 Taxa média de variação e taxa de variação instantânea

As taxas médias de variação (TMV) são utilizadas nas diversas áreas do conhecimento sob diferentes formas. Como exemplos, tem-se a velocidade média, que é a distância percorrida dividida pelo tempo gasto para percorrê-la, podendo ser expressa em *km por hora*; as taxas de crescimento de populações, expressas normalmente em *percentagem por ano* e a precipitação mensal média de chuva, expressa em *centímetros por mês*. Nestes exemplos, a “taxa média de variação de uma quantidade, no decorrer de um certo período, é a variação sofrida pela quantidade, dividida pelo tempo em que tal variação levou para processar” (THOMAS Jr; FINNEY, 1988, p. 67).

No livro *Cálculo com Geometria Analítica*, de Thomas Jr. e Finney (1988), são apresentadas explicações iniciais intuitivas sobre taxas de variação instantânea e problemas resolvidos a partir do cálculo das taxas médias de variação, sem a formalização e rigor matemático presentes na ideia de limites. Este trabalho é feito a partir da ideia de retas secantes infinitamente próximas à reta tangente. O gráfico da figura 15 apresenta o crescimento de uma população de moscas, em um laboratório em condições controladas em um período de 50 dias.

Figura 15 - Crescimento do número de moscas durante um período de 50 dias.

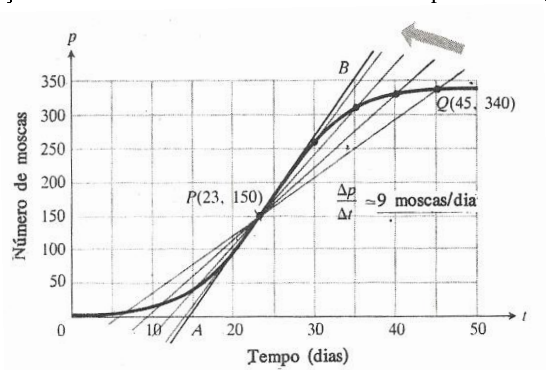


Fonte: Lotka (1956[25] apud THOMAS Jr. e FINNEY, 1988, p. 67).

O gráfico revela que no 23º dia havia 150 moscas e no 45º, 340 moscas. Isso corresponde a um aumento de 190 moscas em 22 dias. Portanto, a TMV da população, do 23º ao 45º dia foi de: $TMV = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340-150}{45-23} = \frac{190}{22} \approx 9\, moscas/dia.$

Uma reta que intersecta uma curva em dois pontos é chamada de *reta secante* e a TMV calculada a partir destes pontos é a declividade ou coeficiente angular da reta secante.

Figura 16 - Esboço da curva e de retas secantes à curva no ponto P e Q.



Fonte: Lotka (1956 apud THOMAS Jr.; FINNEY, 1988, p. 67).

[25] LOTKA, A.J. Elements of Mathematical Biology. Dover, New York, 1956.

No caso da figura 16, a reta que passa pelos pontos P e Q é uma reta secante. Outros períodos podem ser analisados para calcular a TMV. No gráfico da figura 16 constam quatro intervalos: do 23º ao 45º, do 23º ao 40º dia, do 23º ao 35º dia e do 23º ao 30º dia, bem como as quatro retas secantes à curva, passando pelo ponto P e, na sequência, a tabela 7 com as declividades destas retas.

Tabela 7 - Declividade das quatro retas secantes.

Q	TMV de PQ = declividade da reta secante à curva em P e Q
(45,340)	(340-150)/(45-23) ≈ 9
(40,330)	(330-150)/(40-23) ≈ 13
(35,310)	(310-150)/(35-23) ≈ 15
(30,265)	(265-150)/(30-23) ≈ 16,4

Fonte: Lotka (1956 apud THOMAS Jr.; FINNEY, 1988, p. 67).

Sendo P o ponto (23, 150), as TMV deste ponto ao ponto Q, ou as declividades das retas secantes que passam por P e Q, expressas na tabela 7, se aproximam da declividade da reta tangente à curva no ponto P. O trabalho nesta perspectiva possibilita a compreensão de que a variação média de uma função, em um intervalo, é a declividade da reta secante à curva nos pontos extremos do intervalo. Assim, no caso de calcular a velocidade de crescimento exatamente no 23º dia, podemos determiná-la analisando a declividade da reta secante PQ, quando Q retroceder, ao longo da curva, até P, ou melhor, quando P e Q forem infinitamente próximos. O gráfico da figura 16 mostra este retrocesso para quatro pontos Q.

Geometricamente, quando Q se aproxima de P, ao longo da curva, temos: a secante PQ se aproxima da reta tangente AB, determinada visualmente em P. Isto significa que as declividades das secantes tendem à declividade da tangente, calculada a partir das coordenadas $A(17{,}0)$ e $B(35{,}350)$, determinadas pelo problema. Sendo a declividade da reta tangente à curva em P, $m = \frac{350-0}{35-17} = 17\, moscas/dia$.

Com relação à variação da população de moscas, quando Q se aproxima de P (isso significa que P e Q são pontos cuja distância é infinitesimal) temos: as taxas médias de crescimento, durante os intervalos de tempo, tendem à taxa de variação instantânea em P, ou melhor, à declividade da reta tangente à curva, no ponto P, que é $17\, moscas/dia$. A declividade da reta tangente é, portanto, a taxa segundo a qual a população de moscas varia no dia $t = 23$ (THOMAS Jr., FINNEY, 1988).

É desta forma que os autores discutem as relações entre a TMV, taxa de variação instantânea (TVI), declividade da reta secante e declividade da reta tangente, a partir da noção de pontos infinitamente próximos. Estas ideias são muito frutíferas para a visualização geométrica da variabilidade de funções no EM e compreensão da TVI.

A semelhança de triângulos, utilizada por Fermat (ÁVILA, 2003), e a ideia de reta secante infinitamente próxima à reta tangente, de Thomas e Finney (1988), se baseiam na mesma concepção de infinitésimo. Contudo, a apresentação de Thomas e Finney (1988), por parecer ser mais intuitiva para o estudante, é a que utilizamos para abordar as taxas de variação instantâneas na construção de um caminho alternativo de esboço de curvas, lembrando que serão tratadas apenas funções contínuas polinomiais de segundo e terceiro graus.

Assim, por exemplo, seja a função cuja representação algébrica é $f(x) = 2x - 3$. A TMV da função para valores de $x \in [0,2]$, é:

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2$$

Isto significa que, para o referido intervalo, a função $f(x) = 2x - 3$ tem uma TMV de duas unidades. Para o cálculo da TVI em um ponto específico, dar um acréscimo infinitesimal Δx à x na função e calcular a TMV neste intervalo. Assim, para encontrar a variabilidade da função $f(x) = 2x - 3$ em $x = 5$, calculamos a TMV para $x \in [5,5 + \Delta x]$ e tomamos $\Delta x = 0$.

$x = 5 \ \rightarrow \ f(x) = 2x - 3 \ \rightarrow \ f(5) \ = \ 7$

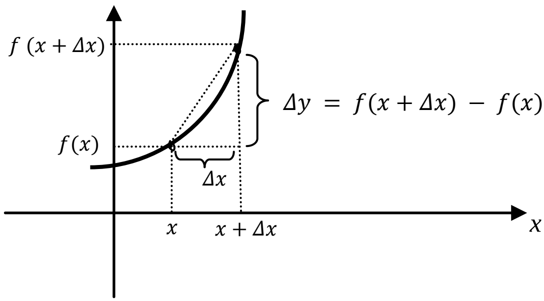
$x = 5 + \Delta x \ \rightarrow \ f(5 + \Delta x) = 10 + 2\Delta x - 3 = 7 + 2\Delta x$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \frac{(7 + 2\Delta x) - 7}{\Delta x} = 2$$

Em $x = 5$, a função tem uma variação de 2 unidades ($TVI(5) = 2$). No caso da função afim, *a variabilidade é constante para qualquer valor de* x.

O gráfico a seguir apresenta elementos geométricos da TMV de uma função em um intervalo de $x \in [x, x + \Delta x]$.

Figura 17 - Elementos geométricos da taxa média de variação de uma função.



Fonte: Os autores.

A partir da figura 17, obtém-se que a taxa média de variação no referido intervalo é:

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Para o caso da função quadrática $f(x) = x^2$, ao calcular a TMV para $x \in [0,1]$, $x \in [0,3]$ e $x \in [-3,0]$, encontra-se as declividades (coeficiente angular) das retas secantes que passam pelos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$; $(0,0)$ e $(3,9)$; $(-3,9)$ e $(0,0)$. Assim, tem-se:

- $x \in [0,1] \rightarrow TMV = 1$
- $x \in [0,3] \rightarrow TMV = 3$
- $x \in [-3,0] \rightarrow TMV = -3$

Estes valores revelam que a TMV da função quadrática em questão é diferente em intervalos distintos. Esta informação é relevante para ter ideia da representação gráfica desta função. Ou seja, no intervalo $x \in [0,3]$, a função $f(x) = x^2$ tem uma taxa de crescimento maior (declividade da reta secante) que no intervalo $x \in [0,1]$. E ainda, no intervalo de $x \in [-3,0]$, a função decresce com a velocidade que cresce no intervalo de $x \in [0,3]$.

Em precisando saber a TMV da função $f(x) = x^2$ em $x = 2$, ou seja, a $TVI(2)$, faz-se:

$x = 2 \rightarrow f(x) = x^2 \rightarrow f(2) = 4$

$x = 2 + \Delta x \rightarrow f(2 + \Delta x) = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

Sendo $\mathit{\Delta} x$ um infinitésimo, a taxa de variação média próxima a $x = 2$ é em torno de 4, sendo este, portanto, o valor que será considerado como a TVI em $x = 2$ ($TVI(2) = 4$) Alguns autores como Milani (2002, 2004) utilizam a notação ≈ para expressar o "aproximadamente" ou o "próximo de". Neste trabalho, contudo, a fim de não tornar estas palavras repetitivas, será utilizado simplesmente a igualdade $TVI(2) = 4$, mesmo por que, é assim que será representado no ensino superior, no caso de o estudante optar por cursos da área.

Voltando ao exemplo anterior, é possível encontrar a $TVI(x)$ genérica da função $f(x) = x^2$ para um valor qualquer de x. Assim, sendo $\mathit{\Delta} x$ um infinitésimo e $f(x + \mathit{\Delta} x) = (x + \mathit{\Delta} x)^2 \rightarrow f(x + \mathit{\Delta} x) = x^2 + 2x\mathit{\Delta} x + (\mathit{\Delta} x)^2$, então:

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$
$$TVI(x) = 2x$$

Esta expressão torna possível o cálculo das $TVI(x)$ da referida função em qualquer ponto de seu domínio, bem como a localização de pontos em que a função tem taxa de variação igual a zero, o que significa reta tangente constante.

Para funções polinomiais do 3º grau, por exemplo, $y = x^3 - 3x + 3$, o cálculo da $TVI(x)$ genérica é:

$$TVM = \frac{[(x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x) + 3] - [x^3 - 3x + 3]}{\Delta x}$$
$$TVM = \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x}$$
$$TVM = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$TVM = 3x^2 - 3 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$TVI(x) = 3x^2 - 3$$

Esta mesma ideia pode ser utilizada para o cálculo da $TVI(x)$ genérica de todas as funções polinomiais no EM. Contudo, para funções polinomiais de grau n, a forma genérica da $TVI(x)$ é uma função polinomial de grau $n - 1$ e por isso, para funções polinomiais de grau maior que 3, e dificuldades no cálculo das raízes de $TVI(x) = 0$ podem aparecer neste nível de ensino. Além disso, para funções logarítmicas e exponenciais, os contratempos ocorrerão no cálculo da própria taxa de variação instantânea.

O nosso interesse não é validar esta ideia para todas as funções trabalhadas no EM, mas sim, discutir possibilidades a partir da variabilidade e da interdependência entre as variáveis para aquelas funções que não exigem muito além do que o estudante trabalha neste nível de ensino. O interesse está, portanto, na análise qualitativa da perspectiva supracitada, no sentido de refletir sobre os "gestos intelectuais" (DUVAL, 2011b, p. 41) que constituem o trabalho com o esboço de curvas.

Para fins de organização de nomenclatura, utilizou-se $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ como a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função. O índice "1" se faz necessário quando se acrescenta às análises a ideia de *variação da taxa de variação instantânea*, a qual será representada por $TVI_2(x)$, ou, taxa de variação instantânea de segunda ordem da função, relacionada à concavidade de uma curva. A opção por esta nomenclatura se deu por ela não contradizer àquela que é usada no ensino superior.

4.4 ESBOÇO DE CURVAS A PARTIR DAS TAXAS DE VARIAÇÃO

O que as taxas de variação instantâneas informam a respeito da curva de uma função?

Thomas Jr. e Finney (1988) sugerem o esboço de curvas a partir de uma *envoltória* formada pelas retas tangentes à curva, como a seguir explicitado:

> No traçado de gráficos, às vezes recorremos à fórmula que fornece a declividade da curva a fim de traçarmos algumas de suas tangentes, antes de construirmos a curva propriamente dita. Com este procedimento, obtemos uma "envoltória" dentro da qual a curva ficará contida e que nos indica o formato desta última, depois de marcados alguns de seus pontos (p. 73).

O procedimento de esboço de uma curva apresentado na citação, a partir da *envoltória*, apesar de importante no sentido que utiliza diversos conhecimentos matemáticos relacionados com esta tese, pode exigir um esforço demasiado no traçado de retas tangentes, impedindo a interpretação global. Por isso, o caminho sugerido neste trabalho permite o esboço de uma curva a partir da análise (estudo do sinal) da $TVI(x)$ da função e da utilização de unidades básicas já elaboradas e utilizadas em Duval (2011a) e Moretti, Ferraz e Ferreira (2008). De acordo com estes trabalhos, os elementos orientadores para o esboço de uma curva são as unidades básicas gráficas e as unidades básicas simbólicas, as quais funcionam como unidades significativas das representações da função.

No estudo de uma função polinomial do 1º grau, realizado por Duval (2011a), as variáveis visuais são: *o sentido da inclinação* (podendo assumir dois valores), *os ângulos do traçado com os eixos* (podendo assumir três valores) e a *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical* (podendo assumir três valores), mostradas na tabela 3. Neste trabalho, Duval (2011a) deixa claro que cada variável visual do gráfico corresponde a uma unidade significativa na expressão algébrica da reta e diversas análises podem ser feitas quando se tem clareza das relações existentes entre as unidades significativas de cada registro.

Reflexões sobre a variabilidade da função polinomial do 2º grau, conforme mostrado anteriormente em alguns exemplos, demonstram que a $TVI(x)$ genérica destas funções é uma função polinomial do 1º grau ($TVI(x) = ax + b$). Assim, com relação à variável visual *sentido da inclinação* e apoiada na tabela 3, a tabela 8 apresenta dados das variáveis visuais da reta tangente à curva da função polinomial.

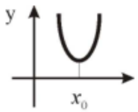
Tabela 8 - Relação entre as variáveis visuais da reta tangente a uma curva e suas unidades simbólicas.

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**
Sentido da declividade da reta tangente	Ascendente	$TVI(x) > 0$
	Descendente	$TVI(x) < 0$
	Constante	$TVI(x) = 0$

Fonte: Duval (2011a, p. 101), modificada pelos autores.

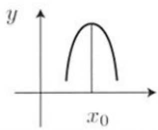
Nas tabelas a seguir Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) apresentam outras unidades básicas que foram modificadas por nós para o trabalho com o EM.

Tabela 9 - Variáveis visuais e simbólicas de um mínimo relativo.

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo em x_0. Taxa de variação instantânea de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} TVI(x_0) = 0 \\ TVI(x_0) < 0, x \in V^-(x_0) \\ TVI(x_0) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 106), modificada pelos autores.

Tabela 10 - Variáveis visuais e simbólicas de um máximo relativo.

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Máximo relativo em x_0. Taxa de variação instantânea de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} TVI(x_0) = 0 \\ TVI(x_0) > 0, x \in V^-(x_0) \\ TVI(x_0) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

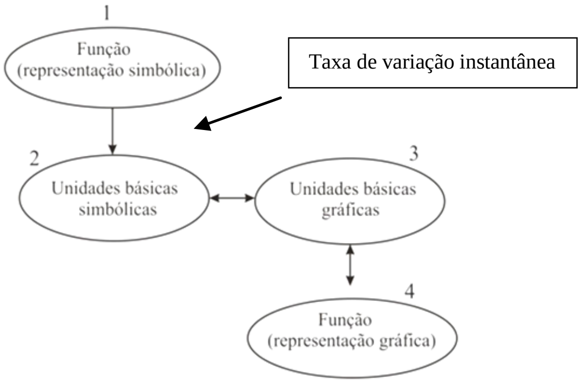
Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 106), modificada pelos autores.

Na tabela 9 consta uma unidade básica referente a um extremo relativo de uma função, neste caso um ponto de mínimo. A unidade básica gráfica visualizada no esboço da curva de uma função é relacionada com a unidade básica simbólica correspondente, a qual denota a taxa de variação instantânea ou declividade da reta tangente da função igual a zero e a mudança de sinal de negativo para positivo para valores muito próximos de x_0. Na tabela 10, verifica-se um ponto de máximo relativo.

Nas pesquisas de Luiz (2010) e Moretti e Luiz (2010, 2014), o procedimento de interpretação global de propriedades figurais de Duval (2011a) envolve a utilização de elementos do Cálculo aliada ao procedimento de esboço da forma gráfica com o uso de programas computacionais. No esquema apresentado na figura 13, a conversão de 1→4, associada à conversão de 4→1, ocorre para algumas funções simples. A interpretação global ocorre a partir da utilização do modo informático para a conversão no sentido de 1→4 e a volta levando em conta as unidades básicas simbólicas, *sem preocupação primordial com a forma algébrica em si*, mas dando ênfase às características desta forma, ou seja, no sentido 4→3↔2←1.

No caso deste trabalho, a sugestão vai ao encontro das ideias desses autores uma vez que o objetivo é criar um esquema que possibilite a compreensão e o esboço de curvas de funções no EM, a partir do estudo da relação entre as unidades básicas gráficas e simbólicas da função, sem a preocupação exclusiva com a forma algébrica, mas a partir da compreensão da variabilidade da função. O esquema a seguir apresenta a ideia.

Figura 18- Esquema do caminho alternativo para o esboço de curvas.



Fonte: Os autores, a partir de Moretti e Luiz (2010, p. 531).

Neste esquema, baseado na abordagem de interpretação global das propriedades figurais, não é nosso interesse acompanhar modificações simultâneas entre as representações simbólica e gráfica. Nossa atenção está voltada para reflexões sobre a conversão no sentido de 1→2↔3↔4 por meio do estudo das taxas de variação da função.

A fim de elucidar o caminho alternativo, apresentamos alguns exemplos de esboço de curvas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, fundamentados nas ideias anteriormente expostas.

Exemplo 1 - Seja a função $y = -x^2 + 4x - 3$. O esboço da curva da função inicia com o cálculo da $TVI_1(x)$ em um ponto genérico a partir da noção de infinitésimos.

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

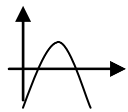
$$= \frac{-x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 3 - (-x^2 + 4x - 3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(-2x - \Delta x + 4)}{\Delta x} = -2x + 4 - \Delta x$$

$$TVI_1 = -2x + 4$$

A declividade das retas tangentes à curva da função $y = -x^2 + 4x - 3$ em um valor de x genérico se comporta de acordo com a função afim $TVI_1(x) = -2x + 4$. A partir do estudo do sinal[26] desta função e das tabelas 8 e 10, obtemos a tabela a seguir que apresenta o esboço da curva desta função.

Tabela 11 - Esboço da curva da função *y=-x*^{2}*+4x-3* com base no estudo da *TVI(x)*.

Unidades básicas simbólicas		**Unidades Básicas gráficas**		
Valores de x	**Sinal da $TVI\ (x)$**	**Reta tangente**	**Esboço da curva**	**Ponto crítico**
$x < 2$	> 0	Crescente		Máximo absoluto em (2,1)
$x = 2$	$= 0$	Constante		
$x > 2$	< 0	Decrescente		

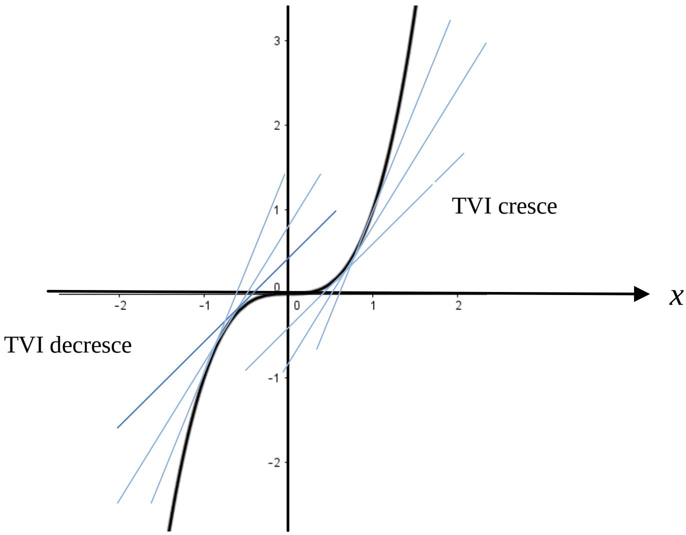
Fonte: Os autores.

Quando a variação for nula, ou seja, $TVI_1(x) = 0$, a curva apresenta um ponto crítico, neste caso é o *ponto máximo da curva* e é $(2,1)$. Portanto, $y \leq 1$ são os valores que a função assume em seu domínio. A identificação dos *pontos mínimos* ou *máximos* e classificação em *absolutos* e/ou *relativos* é também um trabalho importante tanto para o EM quanto para o ensino superior. No caso de uma função quadrática, o ponto crítico será absoluto, pois, efetivamente, para todo o domínio da função, aquele será o valor máximo ou o valor mínimo, o que não ocorre nas funções polinomiais de grau maior, como será abordado mais adiante.

Outra análise importante para o esboço de curvas é da *concavidade de uma curva*, principalmente para funções polinomiais de terceiro grau. Para tal análise, tomemos o exemplo que consta em Weir, Hass e Giordano (2009), em que o autor utiliza a o gráfico da figura 19 para a compreensão da ideia de concavidade.

[26] Estudar o sinal de uma função significa determinar para que valores de x do domínio da função, a imagem $f(x)$ será positiva ($f(x) > 0$), negativa ($f(x) < 0$) ou nula ($f(x) = 0$).

Figura 19 - Comportamento das retas tangentes à curva da função *y*=*x*[3].



Fonte: Weir, Hass e Giordano (2009, p. 292).

Conforme a figura 19, a curva $y = x^3$ é crescente em todo seu domínio, contudo, ela se curva de maneira diferente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Ao percorrer a curva, a partir da esquerda, na direção da origem, percebemos que ela se volta para a nossa direita e suas tangentes ficam todas acima dela. Neste caso, os coeficientes angulares das retas tangentes são decrescentes no intervalo $(-\infty, 0)$. Ao continuar percorrendo a curva para a direita, ela se volta para esquerda e suas tangentes estão abaixo da curva. Os coeficientes angulares das retas tangentes, no intervalo $(0, \infty)$, são crescentes. Ao comportamento de inclinação das retas tangentes a uma curva, chamamos de *concavidade da curva* (WEIR, HASS, GIORDANO, 2009).

Assim, a concavidade para cima e a concavidade para baixo estão relacionadas com o crescimento ou o decrescimento dos coeficientes angulares das retas tangentes, ou seja, das $TVI_1(x)$(taxas de variação instantânea de primeira ordem da função). Em Weir, Hass e Giordano (2009, p. 293) encontramos algumas definições que foram modificadas por nós para adaptação ao trabalho:

A função tem *concavidade para cima* em um intervalo aberto I, se a $TVI_1(x)$ *é crescente* neste intervalo.

A função tem *concavidade para baixo* em um intervalo aberto I, se a $TVI_1(x)$ *é decrescente* neste intervalo.

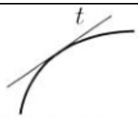
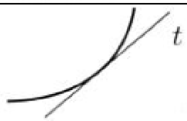
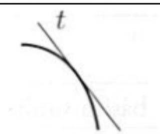
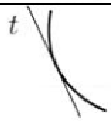
Diante do exposto, a análise da concavidade se dá por meio da análise da variação da $TVI_1(x)$, a qual será denominada de taxa de variação instantânea de segunda ordem da função, ou $TVI_2(x)$. Então:

a) A $TVI_1(x)$ é crescente, se a $TVI_2(x) > 0$, no intervalo, e, sendo assim, a *concavidade da curva é para cima*.

b) A $TVI_1(x)$ é decrescente, se a $TVI_2(x) < 0$, no intervalo, e, sendo assim, a *concavidade da curva é para baixo*.

O ponto onde a $TVI_2(x)$ é nula, chamado de *ponto de inflexão*, é onde ocorre a mudança de concavidade. A tabela a seguir, apresenta as unidades básicas gráficas e suas respectivas unidades simbólicas referentes à concavidade de uma curva, relacionado à inclinação da reta tangente, ao crescimento ou decrescimento da função.

Tabela 12 - Unidades básicas gráficas e simbólicas da concavidade da curva de uma função.

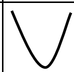
Unidade Básica Gráfica	Unidade Básica Linguística	Unidade Básica Simbólica
	t é uma tangente	$t: y = ax + b, a > 0$
	Função crescente	$TVI_1 > 0$
	Concavidade negativa	$TVI_2 < 0$
	t é uma tangente	$t: y = ax + b, a > 0$
	Função crescente	$TVI_1 > 0$
	Concavidade positiva	$TVI_2 > 0$
	t é uma tangente	$t: y = ax + b, a < 0$
	Função decrescente	$TVI_1 < 0$
	Concavidade negativa	$TVI_2 < 0$
	t é uma tangente	$t: y = ax + b, a < 0$
	Função decrescente	$TVI_1 < 0$
	Concavidade positiva	$TVI_2 > 0$

Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 115) modificada pelos autores.

Sintetizando, tomando uma função polinomial do 2º grau genérica na forma $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, a taxa de variação instantânea de primeira ordem em um valor qualquer de x será $TVI_1(x) = 2ax + b$. Utilizando o mesmo processo, encontramos a taxa de variação instantânea de segunda ordem $TVI_2(x) = 2a$, ou seja, a concavidade de uma parábola depende do sinal do parâmetro a da função.

Utilizando a taxa de variação de uma função quadrática, calculada a partir da noção de infinitésimo, são analisadas diversas variáveis importantes a respeito da função. Genericamente, apresentamos na tabela 13, dados sobre as variáveis visuais gráficas e as unidades simbólicas da função quadrática tendo por base a $TVI_1(x)$, a $TVI_2(x)$ e as tabelas 8, 9, 10 e 12, que culminam no esboço da curva.

Tabela 13 - Unidades simbólicas e gráficas de uma função polinomial do segundo grau.

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas			
TVI_1	**Valor de a**	**TVI_1**	**Valor de x**	**Reta Tangente**	**Concavidade (TVI_2)**	**Ponto crítico**	**Esboço curva**
$2ax + b$	$a > 0$	< 0	$x < -b/2a$	Decrescente	Para cima (positiva)	Mínimo absoluto em $x = -b/2a$	
		$= 0$	$x = -b/2a$	Constante			
		> 0	$x > -b/2a$	Crescente			
	$a < 0$	< 0	$x > -b/2a$	Crescente	Para baixo (negativa)	Máximo absoluto em $x = -b/2a$	
		$= 0$	$x = -b/2a$	Constante			
		> 0	$x < -b/2a$	Decrescente			

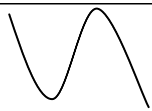
Fonte: Os autores.

Na reflexão propiciada pela tabela 13, não interessa, como já mencionado anteriormente, a conversão direta da representação gráfica para algébrica, mas sim, a conversão que permita uma compreensão global de propriedades fundamentais relacionadas à variabilidade: crescimento, decrescimento, valor máximo e mínimo, concavidade. Este olhar diferenciado para o esboço de curvas proporciona uma aprendizagem de funções condizente com os objetivos atuais do ensino.

Exemplo 2 – Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$. O procedimento de esboço desta curva consiste em primeiro descobrir uma expressão para as declividades das retas secantes e, a partir disso, determinar a declividade das tangentes ($TVI_1(x)$) e a variação da declividade das retas tangentes ($TVI_2(x)$), pela noção de infinitésimos. Assim, temos que $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x + 9$ e $TVI_2(x) = -6x - 6$. Neste caso, os valores de x que anulam a $TVI_1(x)$ são $x = -3$ e $x = 1$.

A tabela 14 a seguir apresenta o esboço da curva da função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$ com base no estudo do sinal da $TVI_1(x)$, indicando os pontos críticos da curva, obtidos a partir da $TVI_2(x)$.

Tabela 14 - Esboço da curva da função $y=-x^3-3x^2+9x+6$ a partir da análise da *TVI(x)*.

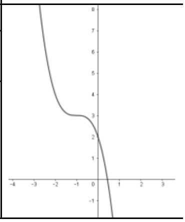
Unidades básicas simbólicas		**Unidades básicas gráficas**		
Valores de x	**$TVI_1(x)$**	**Reta Tangente**	**Esboço da curva**	**Pontos críticos**
$x < -3$	< 0	Decrescente		Mínimo relativo em (-3,-21). Máximo relativo em (1,11).
$x = -3$	$= 0$	Constante		
$-3 < x < 1$	> 0	Crescente		
$x = 1$	$= 0$	Constante		
$x > 1$	< 0	Decrescente		

Fonte: Os autores

A concavidade, analisada a partir do estudo da $TVI_2(x) = -6x - 6$, é voltada para cima em $x < -1$ e para baixo em $x > -1$. Os pontos críticos ocorrem em $x = -3$, um mínimo relativo igual a $y = -21$ e, em $x = 1$, um máximo relativo, igual a $y = 11$.

Exemplo 3 – Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, a fim de esboçar sua curva, encontramos a $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x - 3$ e a $TVI_2(x) = -6x - 6$. Nesta função, a $TVI_1(x)$ é negativa, exceto em $x = -1$. Isto quer dizer que a declividade da reta tangente é decrescente para todos os valores do domínio diferentes de -1. Assim, a curva da função não possui ponto máximo ou mínimo e sim um ponto onde ocorre a mudança de *concavidade*, o *ponto de inflexão*. Para valores de $x < -1$, a concavidade é para cima e para valores $x > -1$, a concavidade é para baixo, conforme a tabela 15 apresenta.

Tabela 15 - Esboço da curva da função $y=-x^3-3x^2-3x+2$ a partir da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$.

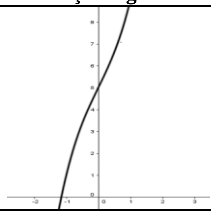
Unidades básicas simbólicas			**Unidades básicas gráficas**		
Valores de x	**$TVI_1(x)$**	**$TVI_2(x)$**	**Reta Tangente**	**Concavidade**	**Esboço da curva**
$x < -1$	< 0	> 0	Decrescente	Para cima	
$x = -1$	$= 0$	$= 0$	Constante	Ponto Inflexão	
$x > -1$	< 0	< 0	Decrescente	Para baixo	

Fonte: Os autores.

Antes de realizar uma análise genérica para as funções polinomiais do terceiro grau, abordamos mais um exemplo, o qual justifica a importância de trabalhar com a TVI_2.

Exemplo 4 - Seja a função $y = x^3 + 3x + 5$, cujas taxas de variação instantânea de primeira e de segunda ordem genéricas em x são $TVI_1(x) = 3x^2 + 3$ e $TVI_2(x) = 6x$. Neste caso, a $TVI_1(x)$ não possui raízes reais, sendo ela sempre positiva e, portanto, *a concavidade é a única característica que promove a compreensão da curva e seu esboço*. A partir disto, analisemos o esboço da curva a partir do estudo da concavidade, expressos na tabela a seguir.

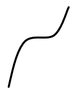
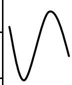
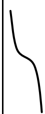
Tabela 16 - Esboço da curva da função $y=x^3+3x+5$ a partir da análise da $TVI_2(x)$.

Unidades básicas simbólicas			Unidade básica gráfica	
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	$\boldsymbol{TVI_2(x)}$	**Valor de x**	**Concavidade**	**Esboço do gráfico**
> 0	> 0	> 0	Positiva – para cima	
	$= 0$	$= 0$	Mudança de concavidade – ponto de inflexão	
	< 0	< 0	Negativa – para baixo	

Fonte: Os autores.

Generalizando, sendo a função polinomial $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as taxas de variação instantâneas de primeira e de segunda ordem, calculadas a partir da noção de infinitésimo, são $TVI_1(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $TVI_2(x) = 6ax + 2b$. O esboço da curva, a partir da $TVI_1(x)$ da função é analisado na tabela 17 a seguir.

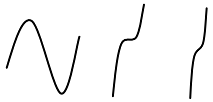
Tabela 17 - Esboço de curvas de funções polinomiais de 3º grau a partir da análise da *TVI₁(x)*.

Unidades básicas simbólicas					Unidades básicas gráficas		
$\boldsymbol{TVI_1}$	**Coef. $\boldsymbol{a}$**	**NR***	$\boldsymbol{TVI_1}$	**Valores de $\boldsymbol{x}$**	**RT****	**Esboço curva**	**Pontos críticos**
$3ax^2+2bx+c$	>0	2	<0	$\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x)=0$). Ponto Inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			$=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Const		
			>0	$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x>\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$=0$	$x=\frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			>0	$x<\frac{-b}{3a}$ e $x>\frac{-b}{3a}$	Cresc		
		0	>0	$x\in R$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - tabela 18.	Cresc		Ponto inflexão ($\boldsymbol{TVI_2(x)=0}$)
	<0	2	<0	$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x>\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x)=0$). Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			$=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Const		
			>0	$\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$=0$	$x=\frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			<0	$x<\frac{-b}{3a}$ e $x>\frac{-b}{3a}$	Decres		
		0	<0	$x\in R$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - tabela 18.	Decres		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)

*NR = Número de Raízes
**RT = Reta Tangente
Fonte: Os autores.

A tabela 17 expõe a relação entre as unidades básicas simbólicas, referentes à variabilidade da função, mais especificamente à $TVI_1(x)$, e as unidades básicas simbólicas, referentes à reta tangente, aos pontos críticos e ao esboço da curva. A próxima tabela apresenta ao esboço da curva a partir da análise da concavidade - $TVI_2(x)$.

Tabela 18 - Análise da concavidade de curvas de funções polinomiais do 3º grau.

<table>
<tr><th colspan="4">Unidades básicas simbólicas</th><th colspan="2">Unidades básicas gráficas</th></tr>
<tr><th>TVI_2</th><th>Coef. a</th><th>Sinal da TVI_2</th><th>Valor de x</th><th>Concavidade</th><th>Possíveis esboços da curva</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$6ax + 2b$</td><td rowspan="3">$a > 0$</td><td>< 0</td><td>$x < -b/3a$</td><td>Negativa – para baixo</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$= 0$</td><td>$x = -b/3a$</td><td>Local de Inflexão</td></tr>
<tr><td>> 0</td><td>$x > -b/3a$</td><td>Positiva – para cima</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a < 0$</td><td>> 0</td><td>$x < -b/3a$</td><td>Positiva – para cima</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$= 0$</td><td>$x = -b/3a$</td><td>Local de Inflexão</td></tr>
<tr><td>< 0</td><td>$x > -b/3a$</td><td>Negativa – para baixo</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores.

As tabelas 13, 17 e 18 se constituem em uma referência do caminho alternativo para funções polinomiais do segundo e terceiro graus, apontando elementos essenciais para o esboço na perspectiva deste trabalho.

4.5 POSSIBILIDADES PARA O ESBOÇO DA CURVA DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

A fim de esboçar as curvas das funções dos tipos senoide e cossenoide na perspectiva da abordagem de interpretação global, Silva (2008) considerou propriedades figurais das curvas associando as variáveis visuais, como amplitude, período e simetria, aos coeficientes das expressões algébricas, evidenciando as alterações na curva provocadas por variações nos coeficientes de suas expressões. Para isso, utilizou informações como paridade das funções, translação e uma curva base, por exemplo, $y = sen\,x$ para o esboço das funções $y - \pm a = b.sen(kx - \pm c)$.

No caso da curva base das senoides, $f: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $y = sen\,x$, Silva (2008) a esboça a partir de uma tabela de pontos para o intervalo $[0,2\pi]$ e simetria em relação à origem do sistema cartesiano para conhecê-la em $[-2\pi, 0]$ obtendo-a em todo o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. As tabelas 4 e 5 expõem as características da função base e das senoides, respectivamente. A explicação detalhada pode ser obtida em Silva (2008, p. 109).

No limite deste trabalho, algumas discussões sobre o esboço da curva das funções $y = sen\,x$ e $y = cos\,x$ são fomentadas na perspectiva da compreensão da variabilidade destas. Salientamos que a ideia não é generalizar para todas senoides e cossenoides, apenas vislumbrar possibilidades futuras.

Exemplo 5 - Seja a função $y = sen\ x$, a TMV para um intervalo $[x, x + \Delta x]$ é

$$TMV = \frac{sen(x + \Delta x) - sen\ x}{\Delta x}.$$

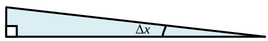
Utilizando o seno da adição de dois arcos:

$$sen(x + \Delta x) = sen\ x.cos\ \Delta x + \ sen\ \Delta x.cos\ x,$$

tem-se

$$TMV = \frac{sen\ x.cos\ \Delta x + \ sen\ \Delta x.cos\ x - sen\ x}{\Delta x}.$$

A análise de $cos\ \Delta x$ e $sen\ \Delta x$ é feita levando em conta que Δx é um infinitésimo e utilizando a ideia geométrica a partir do triângulo retângulo

Cateto oposto 

Cateto adjacente

$$sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} \qquad \text{e} \qquad cos\ \Delta x = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa}$$

conclui-se que $cos\ \Delta x = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa} = 1$ pois o cateto adjacente e a hipotenusa tem tamanhos infinitamente próximos.

Para analisar o $sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$, sendo o ângulo Δx um infinitésimo, o cateto oposto também será um infinitésimo que, dividido pela hipotenusa, resulta em um infinitésimo, assim,

$$sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} = \Delta x.$$

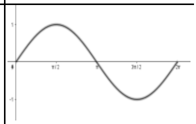
Voltando para o cálculo da TVI_1, tem-se

$$TVI_1 = \frac{sen\ x.1 + \Delta x.cos\ x - sen\ x}{\Delta x}$$

$$TVI_1 = \frac{\Delta x.cos\ x}{\Delta x} \rightarrow TVI_1 = cos\ x$$

A tabela a seguir apresenta o esboço da curva da função $y = sen\ x$ com base no estudo do sinal da taxa de variação instantânea de primeira ordem, $TVI_1(x) = cos\ x$.

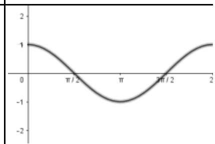
Tabela 19 - Esboço da curva da função *y=sen x* no domínio de [0,2π].

Unidades básicas simbólicas		Unidades básicas gráficas		
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	**Valor de x**	**Reta tangente**	**Ponto crítico**	**Esboço da curva**
> 0	$0 < x < \pi/2$ $3\pi/2 < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(3\pi/2, -1)$ Máximo absoluto em $(\pi/2{,}1)$	
$= 0$	$x = \pi/2\ e$ $x = 3\pi/2$	Constante		
< 0	$\pi/2 < x < 3\pi/2$	Decrescente		

Fonte: Os autores.

Exemplo 6 - No caso da função $y = cos\, x$, o cálculo da $TVI_1(x)$ é análogo ao da função $y = sen\ x$: encontra-se a TMV para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, $TMV = \frac{cos(x+\Delta x)-cos\ x}{\Delta x}$ e, utilizando o cosseno da soma de dois arcos: $cos(x + \Delta x) = cos\ x. cos\ \Delta x - \ sen\ x. sen\ \Delta x$, tem-se $TMV = \frac{cos\ x.cos\ \Delta x-\ sen\ x.sen\ \Delta x - cos\ x}{\Delta x}$. Sendo $cos\ \Delta x = 1$ e $sen\ \Delta x = \Delta x$, então a função $y = cos\ x$ possui $TVI_1(x) = -sen\ x$ e o esboço está apresentado na tabela 20.

Tabela 20 - Esboço da função *y=cos x* no domínio de [0,2π].

Unidades básicas simbólicas		Unidades básicas gráficas		
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	**Valor de x**	**Reta tangente**	**Ponto crítico**	**Esboço da curva**
> 0	$\pi < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(\pi, -1)$ Máximo absoluto em $(0{,}1)$ e $(2\pi, 1)$	
$= 0$	$x = 0\ e$ $x = \pi$	Constante		
< 0	$0 < x < \pi$	Decrescente		

Fonte: Os autores.

As tabelas 19 e 20 não abordam a taxa de variação instantânea de segunda ordem ($TVI_2(x)$) por ela não ser necessária no esboço das referidas curvas. Porém, o cálculo e análise da $TVI_2(x)$ são análogos aos realizados para encontrar a $TVI_1(x)$. Ressaltamos que as funções *seno* e *cosseno* não são foco de discussão desta tese e, por isso, não foram trabalhadas com os estudantes na sequência didática.

No capítulo quinto, apresentamos aspectos da pesquisa empírica e análises iniciais sobre o ensino e a aprendizagem do esboço de curvas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus por meio do caminho alternativo apresentado neste capítulo.

5 PESQUISA EMPÍRICA: ATIVIDADES EM SALA DE AULA

O caminho alternativo para esboçar curvas foi trilhado em sala de aula com estudantes do EM de escolas estaduais por meio da aplicação de uma sequência didática. O propósito desta aplicação foi refletir sobre as potencialidades e limitações do trabalho na perspectiva exposta, bem como sinalizar um roteiro de trabalho pedagógico. Neste capítulo, apresentamos aspectos relacionados à organização metodológica da pesquisa empírica, às etapas para o planejamento e realização da sequência didática, à constituição do material de análise, aos procedimentos de coleta e análise de dados, e, por fim, algumas discussões iniciais.

5.1 METODOLOGIA DA PESQUISA EMPÍRICA: ORGANIZAÇÃO E APLICAÇÃO

A pesquisa é de natureza qualitativa e interpretativa que analisa, à luz da literatura, dados produzidos a partir de interações entre os sujeitos envolvidos e o objeto matemático. Trata-se de uma pesquisa que envolve o contato do pesquisador no ambiente e na situação que está sendo investigada, participando dos espaços interativos em que os sujeitos se manifestam acerca do objeto em estudo (LÜDKE; ANDRÉ, 1986), como professor e também como pesquisador. Nesta perspectiva, durante a pesquisa empírica a pesquisadora assumiu duas funções distintas: professora, ao organizar o ensino, propor atividades e avaliar a aprendizagem dos estudantes; e pesquisadora no sentido de organizar o ensino frente ao quadro teórico base e inferir a respeito deste ensino e de sua viabilidade, compreendendo as relações que se estabelecerão entre as unidades visuais gráficas e simbólicas ou dificuldade apresentadas pelos alunos para o estabelecimento dessas relações. Ou seja, enquanto pesquisadora, a ênfase das análises esteve na aprendizagem do objeto matemático a partir da proposta de ensino apresentada no que diz respeito às operações cognitivas de conversão e as dificuldades oriundas do fenômeno de não congruência semântica.

A coleta do material de análise da pesquisa empírica ocorreu a partir de situações de ensino e resolução de problemas desenvolvidos em uma sequência didática, organizada a partir da ED, de Michèle Artigue. As reflexões a respeito do trabalho desenvolvido com o esboço de curvas no EM e da aprendizagem dos estudantes, estão alicerçadas na hipótese fundamental de apreensão de um objeto matemático, baseada nas funções cognitivas de tratamento e conversão e que exige a coordenação de no mínimo dois registros de representação (figura 4); e na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, centrada na operação cognitiva de conversão ao identificar as unidades básicas simbólicas e gráficas dos dois registros de representação e na variação das unidades de um registro para identificação da variação no outro registro (figura 18), abordadas nos capítulos segundo e quarto, respectivamente. Além disso, nas discussões serão levadas em conta as funções do discurso de Duval (2004, p. 81-124) e Brandt, Morettti e Bassoi (2014), expostas na seção 2.6 do capítulo 2. Iniciamos apresentando ideias fundamentais da ED.

5.1.1 Engenharia Didática – ED

A Engenharia Didática - ED teve início na década de 1980, proposta primeiramente por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Segundo Saddo e Silva (2013), a ED “foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica” (p. 26). A ED evoluiu desde sua criação e atualmente ela é utilizada por alguns pesquisadores como metodologia de pesquisa científica, por outros como metodologia envolvendo diversos processos e procedimentos para a formação profissional e/ou a elaboração de objetos de aprendizagem (SADDO; SILVA, 2013).

O nome Engenharia Didática é uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro em relação à concepção, planejamento e execução de um projeto. Esta analogia remete ao entendimento que o trabalho de pesquisa em didática necessita de uma visão geral que envolve a criação inicial de ideias, bem como sua execução prática em sala de aula (PAIS, 2011). Pais (2011) reforça a necessidade de que, além de um suporte referencial teórico,

> a realização prática da pesquisa seja submetida a um controle sistemático, visando a preservar as condições de confiabilidade da atividade científica, o que, segundo nosso entendimento, torna possível somente através da aplicação de um

> certo método, fundamentado em uma clara concepção mais de mundo (2011, p. 100).

De acordo com a citação e segundo a pesquisadora matemática francesa, Michèle Artigue (1996), a ED representa a “possibilidade de uma ação racional sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos pré-estabelecidos” (p. 195) e, por outro lado, a possibilidade de “realização didática na sala de aula como prática de investigação” (p.195). A autora (1996) também afirma, mais especificamente, que a ED “caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em «realizações didáticas» na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino” (p. 196).

Nesta tese, foram utilizados elementos da ED como uma forma de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa empírica que contempla a dimensão teórica e experimental, possibilitando uma análise mais criteriosa do caminho alternativo. O objetivo, ao conduzir a pesquisa didática por este caminho, é, conforme refletido por Pais (2011), sistematizar metodologicamente a prática da pesquisa e interligar o plano teórico, da racionalidade, ao experimental, da prática educativa.

São quatro as fases de execução de uma investigação quando se opta pela ED como metodologia: análises preliminares; concepção e análises *a priori*; aplicação de uma sequência didática e, por fim, análises *a posteriori* e avaliação.

A *análise preliminar* é constituída do referencial teórico utilizado para pesquisa e consiste em levantamento de constatações empíricas, das concepções dos sujeitos envolvidos, bem como na compreensão da realidade sobre a qual a pesquisa será realizada. Nesta etapa ocorre a descrição das dimensões (epistemológica, cognitiva, pedagógica etc.) que definem o fenômeno a ser estudado (PAIS, 2011).

A *concepção* e *análise a priori* é a etapa em que ocorre a definição e caracterização das variáveis do sistema de ensino que supostamente interferem no fenômeno, ou seja, das variáveis sobre as quais se pode exercer algum controle ao relacionar o conteúdo estudado com as atividades que serão desenvolvidas para a apreensão dos conceitos em questão. De acordo com Artigue, o objetivo desta fase é

> determinar de que forma permitem as escolhas efectuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, funda-se em hipóteses; será a validação

> dessas hipóteses que estará, em princípio, indirectamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (1996, p. 205).

Assim, os levantamentos realizados na análise *a priori* serão confrontados com dados da análise *a posteriori*. Realizadas as duas etapas anteriores, parte-se para a *aplicação da sequência didática*, a partir da qual é possível fazer a aproximação dos resultados práticos da análise teórica realizada. Segundo Pais (2011), uma sequência didática é "formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem" (p. 102). As atividades elaboradas para a sequência didática são apresentadas na seção 5.2.3.

Por fim, na análise *a posteriori* ocorre o tratamento dos dados e informações obtidos na sequência didática. É uma análise da produção dos estudantes que busca desvelar os procedimentos de raciocínio. A validação dos resultados, a fim de garantir o caráter científico da pesquisa, ocorre na confrontação dos dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*.

As análises *a posteriori* dos dados coletados e as reflexões a respeito das potencialidades, possibilidades e limitações do caminho alternativo para o esboço de curvas, no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, serão realizadas a partir dos dados coletados na sequência didática, com base nos critérios da TRRS. Estes critérios estão relacionados à hipótese fundamental da aprendizagem (figura 4), à abordagem de interpretação global de propriedades figurais (figura 18) e às funções discursivas empregadas nas resoluções, preconizadas por Duval (2004) e apresentadas na seção 2.6 do capítulo 2.

Na seção seguinte, explicitamos particularidades do material de análise da pesquisa empírica: pontos de vista levados em conta, de acordo com Duval (2012c); composição do material coletado para análise e detalhamento da metodologia, destacando as variáveis conceituais relevantes no esboço de curvas que serão posteriormente analisadas.

5.1.2 Constituição do material de análise

As pesquisas que envolvem o ensino da Matemática, de acordo com Duval (2012c), são muito fragmentadas devido a fatores como: heterogeneidade dos grupos de alunos; diversidade de áreas distintas entre si como os números, a geometria, a análise, álgebra, entre outros; necessidade de renovação dos métodos e instrumentos didáticos; bem como, a constante evolução das expectativas sociais com relação à formação dos indivíduos, o que atinge diretamente o ensino, justificando reformas educacionais. Além desta fragmentação, Duval (2012c) enfatiza a complexidade destas pesquisas, causada pelos diversos e divergentes pontos de vista que as permeiam: matemático, epistemológico, cognitivo, dos alunos, dos professores, da instituição, entre outros.

Alguns pormenores destes distintos pontos de vista que permeiam a atividade matemática são essenciais, por isso detalhamos três deles que terão atenção nesta tese:

- *ponto de vista matemático*: a compreensão começa com uma explicação que se baseia na utilização de propriedades matemáticas, sendo a finalidade do ensino, portanto, transmitir o conhecimento destas propriedades. Duval (2012c) afirma que, sob este ponto de vista, "a compreensão deve responder à exigência epistemológica de prova que é comum a todo conhecimento científico" (p. 309), no sentido de ser necessário, ao menos, "explicitar as propriedades utilizadas que "explicam" como se chega à solução de um problema e por que "isto dá certo", ou por que outras soluções "não podem dar certo", mesmo quando elas são aparentemente evidentes" (p. 309).

- *ponto de vista cognitivo*: a compreensão é relacionada ao acesso aos objetos matemáticos, passando pela produção de representações semióticas que não devem jamais ser confundidas com os objetos que elas representam, ou seja, "do ponto de vista cognitivo, compreender em Matemática é, antes de tudo, reconhecer os objetos matemáticos representados" (DUVAL, 2012c, p. 310). Neste ponto de vista, alguns paradoxos cognitivos podem surgir ocasionados pela falta de compreensão na Matemática e geradas pelas questões:

> como reconhecer que duas representações semióticas diferentes são representações do mesmo objeto, se não se tem um acesso não semiótico àquilo que é representado?

> Inversamente, como reconhecer que duas representações semióticas diferentes cujos conteúdos são quase equivalentes representam ou não representam dois objetos diferentes, se somente se dispõe destas representações? (DUVAL, 2012c, p. 310)

Isto quer dizer que, do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática exige “atitudes intelectuais” não estão necessariamente relacionadas a um conteúdo específico e que não são necessárias em outras disciplinas (DUVAL, 2012c).

- *ponto de vista psicológico*: relacionado ao tempo de reação ou resposta dos estudantes, ou seja, a espontaneidade de resposta e a possibilidade de transferência e aplicação a outros contextos distintos dos que aquele no qual se fez o aprendizado. Sob este ponto de vista, a compreensão está vinculada à capacidade de “aprender a aprender” e à capacidade de ter iniciativa e controle diante situações novas para o sujeito, que ocorre, por exemplo, na resolução de problemas (DUVAL, 2012c).

A leitura e compreensão dos diversos pontos de vista relacionados à atividade matemática demonstram a complexidade de um trabalho que os levem em conta de forma efetiva. Neste trabalho, priorizamos discussões sobre o ponto de vista *cognitivo* ao possibilitar reflexões pontuais para os objetivos propostos. Isto não significa o abandono dos outros pontos de vista, pelo contrário, a autonomia necessária nas atividades e a espontaneidade de resposta dos estudantes (ponto de vista psicológico) farão parte das análises e estarão implícitas nas atividades, com foco nos processos matemáticos com implicações cognitivas.

Além disso, Duval (2012c) afirma que os trabalhos dos estudantes podem fornecer dados que permitem extrair as variáveis cognitivas e as condições que devem ser consideradas para verificar se houve aprendizado da matemática. Para a pesquisa empírica, portanto, os trabalhos dos estudantes foram coletados a partir da aplicação de uma sequência didática, a qual foi elaborada levando em conta os aspectos relacionados:

- ao esboço de curvas por meio da análise das taxas de variação da função;
- às atividades cognitivas fundamentais para a compreensão em uma abordagem de interpretação global (ponto de vista cognitivo);

- aos conceitos, argumentos e procedimentos necessários para realização das atividades (ponto de vista matemático).

O material de análise foi composto pelos trabalhos e resoluções dos estudantes nas atividades propostas e áudios das aulas dialogadas (professora/pesquisadora e estudantes) feitos com um gravador de voz digital. Inicialmente, o objetivo era utilizar áudios e fotos das resoluções das atividades em duplas feitos pelos estudantes com smartphones e o aplicativo de mensagens instantâneas WhatsApp a fim de serem enviados para colegas e professora/pesquisadora como forma de compreender mais precisamente os caminhos utilizados pelos estudantes durante as resoluções. Contudo, na prática, não foi possível a operacionalização devido às dificuldades com internet na escola e o fato de muitos estudantes não possuírem smartphones.

Com relação ao material de análise e de interesse de estudo desta tese, a análise dos dados coletados foi realizada considerando o valor de prova de natureza epistêmica relacionada aos conceitos e, de natureza lógica, ao valor de verdade; os gestos intelectuais relacionados aos argumentos e procedimentos necessários para a realização das atividades; bem como a compreensão em que os sucessos se manifestam e as fontes de incompreensão.

O critério de análise da compreensão do sucesso em uma perspectiva de aprendizado será alicerçado no *critério cognitivo*, cujo objetivo é identificar se os "alunos reconhecem um mesmo objeto matemático através das representações diferentes que podem ser dadas e se eles podem reconhecer aquilo que é matematicamente diferente quando se modifica alguma coisa no conteúdo de uma representação" (DUVAL, 2012c, p.317). No caso, a tarefa que permite estudar o reconhecimento dos objetos representados é a tarefa de *conversão de registros de representação semiótica*.

A próxima seção é dedicada à apresentação das etapas iniciais da ED: análise preliminar e análise *a priori*. A *análise preliminar*, etapa fundamental da ED conforme pontuado na seção 5.1.1, é formada pelo inventário teórico exposto nos capítulos segundo e terceiro, do qual foi possível esquematizar o caminho alternativo de esboço de curvas, apresentado no capítulo quarto.

Nas análises *a priori*, estão explicitados aspectos fundamentais dos objetos matemáticos que culminam no esboço de curvas. Para tanto, as análises estão organizadas de forma que expõem as *situações-problema* propostas, as *definições* e *propriedades* mobilizadas, os *argumentos* e os *procedimentos* necessários.

As variáveis conceituais que foram analisadas a priori são:

- estudo do sinal das funções afim e quadrática;
- $TMV(x)$ de uma função em um intervalo determinado;
- $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$ de funções polinomiais do segundo e do terceiro graus, a partir da noção de infinitésimos;
- variação de funções;
- pontos máximos e mínimos, relativos ou absolutos;
- concavidade e ponto de inflexão;
- esboço da curva.

As atividades da sequência didática foram organizadas em seis Momentos que constam na seção 5.2.3.

5.2 CONFIGURAÇÕES DO CENÁRIO DE PESQUISA E DE VARIÁVEIS CONCEITUAIS FUNDAMENTAIS

5.2.1 Análises preliminares

O referencial teórico utilizado para esta pesquisa, no que se refere à aprendizagem matemática dos estudantes, é a TRRS de Raymond Duval, apresentada no segundo capítulo e aprofundada, com relação ao esboço de curvas, na seção 4.2 do quarto capítulo. Na perspectiva desta teoria, o acesso aos objetos matemáticos só é possível a partir de suas representações semióticas, e, mais do isto, a partir da *conversão de registros de representação semiótica*. As conversões nem sempre são espontâneas e diretas, dependendo do grau de congruência semântica entre os registros, elas podem se tornar bastantes difíceis para os estudantes.

No que tange ao esboço de curvas, sob a luz desta teoria, Duval (2011a) sugere pensar o ensino e a aprendizagem deste objeto matemático a partir de uma *abordagem de interpretação global das propriedades figurais*, a qual consiste na identificação das variáveis visuais pertinentes que permitem a articulação entre registros gráfico e algébrico. Entretanto, no ensino atual, de acordo com Duval (2012b) e as pesquisas expostas no terceiro capítulo, a maior ênfase é dada à atividade cognitiva de *tratamento*, a qual é fundamental na atividade matemática, porém, não é suficiente para uma compreensão integral dos objetos matemáticos. Estas pesquisas evidenciam que as conversões são pouco valorizadas no ensino, consideradas muitas vezes como atividade lateral e evidente. Ademais, o esboço de curvas é trabalhado em sala de aula a partir de uma abordagem repetitiva e mecânica, chamada por Duval (2011a) de “abordagem ponto a ponto”, a qual não permite uma interpretação global da curva e do que ela representa.

A fim de refletir a respeito do esboço do gráfico de determinadas funções com o compromisso da interpretação global de propriedades figurais, investigações foram desenvolvidas utilizando como recursos: os parâmetros da expressão algébrica, a translação, a simetria, os elementos do Cálculo e o procedimento informático. Estas pesquisas, apresentadas na seção 4.2 do quarto capítulo, inspiraram e, sobretudo, fundamentaram a construção do caminho alternativo para esboçar curvas, o qual é apresentado nas seções 4.3, 4.4 e 4.5 do mesmo capítulo.

O referido caminho sugere o esboço de curvas de funções polinomiais do segundo e do terceiro graus, no EM, utilizando como recurso para a interpretação global de propriedades figurais, *o estudo das taxas de variação instantâneas da função*, calculadas a partir da *noção intuitiva de* infinitésimos. Um trabalho nesta perspectiva, para além do esboço de curvas, permite uma compreensão do comportamento variacional das funções, possibilitando dar amplo sentido ao estudo destas neste nível de ensino, o que vai ao encontro do que os documentos balizadores da educação, relacionados à Matemática, preconizam, apresentado na seção 4.1 do capítulo quarto.

Para além do EM, esta forma de compreensão de curvas é respaldada pelas inúmeras pesquisas que demonstram as dificuldades dos estudantes do ensino superior relacionadas à aprendizagem de CDI. Os conceitos relacionados ao Cálculo são apoiados no entendimento da variabilidade de funções e na noção intuitiva de grandezas infinitamente próximas – os infinitésimos, abordados no capítulo terceiro, seção 3.2, e capítulo quarto, seção 4.3.

A hipótese de que um ensino na perspectiva sugerida possibilita uma compreensão abrangente do esboço de curvas, é discutida com base na aplicação de uma sequência didática a um grupo de estudantes do terceiro ano do EM de uma escola estadual de Erechim, RS, e a um estudante do Programa Mentores da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública - OBMEP; elaborada a partir das análises preliminares e *a priori*. A cidade, Erechim, foi escolhida em função de ser onde reside e trabalha a pesquisadora; a escola, por ter possibilitado um diálogo frutífero entre pesquisadora e a professora regente da turma. A escolha pelo terceiro ano se deve ao fato de os estudantes já terem desenvolvido e, supostamente aprendido, conceitos básicos para tal trabalho, como é o caso de declividade de retas, função afim, estudo do sinal de funções afim e quadrática, resolução de equações e inequações, entre outros; não que isso seja condição necessária. Ademais, a professora regente de Matemática do terceiro ano se mostrou, nos primeiros contatos, aberta e empenhada para que o processo fluísse.

Além do trabalho com a turma, o qual ocorreu do ano de 2016, a sequência didática foi também trabalhada de forma individual em 2017 com um estudante do terceiro ano no EM de uma escola pública de Barra do Rio Azul, RS. Este estudante participou do Programa Mentores do Programa de Iniciação Científica - PIC da Olimpíada Brasileira da Escola Pública – OBMEP no ano de 2017, cujo detalhamento consta na seção 5.2.2. Optou-se por desenvolver essa sequência didática na perspectiva deste trabalho devido à possibilidade do Programa Mentores, aos anseios do estudante e da professora mentora, no caso, a autora desta tese e também a fim de trazer mais elementos de discussão sobre o caminho alternativo.

As etapas e procedimentos realizados da pesquisa empírica foram:

- Elaboração de análises preliminares baseadas na teoria e no trabalho com esboço de curvas sugerido. Estas análises foram complementadas durante os momentos seguintes, com o conhecimento do perfil e contexto dos estudantes e foram fundamentais para organização da sequência didática.

- Elaboração de análises *a priori* das variáveis que emergem e intervém do esboço de curvas, construídas a partir da elaboração da sequência didática.

- Contato com a direção da escola e com a professora regente de Matemática do terceiro ano, realizado em junho de 2016, para convite e encaminhamento relativo à ação em parceria colaborativa, que proporcionou o espaço para o desenvolvimento do processo de ensino, envolvendo estudantes do 3º ano do EM, em contraturno.

- Contato com a 15ª Coordenadoria Regional de Educação para apresentação do projeto e solicitação de ciência e autorização para execução, realizado em junho de 2016 (Apêndice I).

- Observações das aulas de Matemática e aplicação de questionário aos estudantes (Apêndice II) a fim de conhecer o perfil dos mesmos e o contexto de realização da sequência didática, os conteúdos que os estudantes estão trabalhando e, a partir disto, traçar discussões coerentes com as aulas em execução. Estas ações foram realizadas em outubro de 2016.

- Contato em contexto escolar para negociações e encaminhamentos relativos aos registros (gravação de áudio) das interações dos sujeitos e ao termo de consentimento livre e esclarecido, exposto no Apêndice III. Ação realizada no primeiro encontro da aplicação da sequência didática com a turma, em 19 de outubro de 2016 e com o estudante do PM, em 13 de maio de 2017.

- Realização dos encontros previstos na sequência didática com os estudantes da turma, ministrados pela pesquisadora que assumiu também o papel de professora. Os seis Momentos previstos foram trabalhados em 8 encontros, um por semana, de aproximadamente 1 hora e 20 minutos cada. Todos os encontros aconteceram no contraturno escolar, ou seja, à tarde. O horário e dia variaram, mas a maioria ocorreu às 17 horas nas quartas-feiras, com início dia 19 de outubro de 2016 e término em 12 de dezembro do mesmo ano.

- Realização dos encontros previstos na sequência didática com o estudante participante do Programa Mentores de maio a setembro de 2017, um encontro por mês, de duração entre duas horas e trinta minutos a três horas, nas dependências da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. O horário e dia variaram, o início foi dia 13 de maio de 2017 e término em 27 de setembro do mesmo ano.

- Análises *a posteriori* dos dados coletados a partir do confronto com as análises a priori das variáveis conceituais que emergiram e interviram na atividade de esboçar curvas.

5.2.2 Uma breve descrição do cenário da pesquisa

Alguns dados sobre a escola

A escola estadual onde ocorreu a aplicação da sequência didática está localizada no município de Erechim, RS, bairro Centro e, no turno diurno, possui aproximadamente 1300 estudantes matriculados na educação básica. Regionalmente é uma escola consolidada, reconhecida pela seriedade, comprometimento e aprofundamento científico. Um perfil socioeconômico e cultural dos estudantes, elaborado pela escola em 2013 e presente no Projeto Político Pedagógico (PPP), vigência 2014-2015, revela algumas particularidades:

- aproximadamente 45% dos pais dos estudantes possuem ensino fundamental incompleto enquanto apenas 4% possui terceiro grau completo;

- 85% dos estudantes moram em casa própria;

- 44% dos estudantes possui um irmão apenas;

- a renda familiar da maioria, 79%, varia de 3 a 5 salários mínimos.

De acordo com este levantamento, a comunidade, representada pelas famílias dos estudantes, considera a escola organizada e comprometida com a função pedagógica; engajada com o bem estar e segurança da comunidade escolar e com boa infraestrutura, oferecendo qualidade para a prática educacional com diversidade de material didático. Além disso, as famílias consideram a direção, os setores internos, professores e funcionários integrados com a comunidade escolar, sempre primando pelo diálogo.

A escola tem como filosofia "o compromisso de uma educação de formação integral, contínua e democrática baseada nos princípios de fraternidade, solidariedade e respeito à individualidade, visando a uma prática consciente, responsável e transformadora da sociedade" (PPP, 2014, p. 7). O EM, no ano da aplicação da sequência didática, era permeado pela Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico, em curso desde 2011 no Rio Grande do Sul. Esta proposta foi implantada com base no Plano de Governo do Rio Grande do Sul para o período 2011/2014, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96) e na Resolução sobre Diretrizes Curriculares para Educação Básica emitida pelo Conselho Nacional de Educação (CNE/CEBnº5/2012).

O ensino politécnico no RS teve como principal objetivo criar uma identidade de EM consistente e, assim, reverter os altos índices de evasão escolar e reprovações, além de favorecer a "construção de projetos de vida pessoais e coletivos, a inserção social e a cidadania" (MAIA; TOMAZETTI, 2014, p. 6). De acordo com a Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico, 2011-2014 (PEM/RS), a educação politécnica buscou resgatar o pensamento crítico sobre a posição do estudante no mundo, no trabalho e em suas relações, com potencial para ressignificar estes mesmos aspectos, estabelecendo uma educação horizontal, emancipatória e democrática.

O EM Politécnico tinha como eixo orientador o Trabalho como Princípio Educativo e a relação teoria e prática era trabalhada a partir da interdisciplinaridade, a qual é considerada, na proposta de reestruturação do EM gaúcho, um meio eficiente e eficaz de articular o estudo da realidade e a produção de conhecimento. Neste cenário, surgiram os Seminários Integrados enquanto espaços de interdisciplinaridade, cujo objetivo era o enfoque crítico investigativo a fim de garantir ensino e aprendizagem contextualizados e interdisciplinares, propiciando a "articulação das áreas do conhecimento, a partir de experiências e vivências" (RIO GRANDE DO SUL, 2011, p. 25). Os Seminários Integrados foram pensados como espaços planejados, de comunicação, socialização, planejamento e avaliação de vivências e práticas; integrados por professores e estudantes. Foi considerado também um meio de superar as dificuldades dos estudantes e uma oportunidade para o professor refletir sobre suas práticas (MAIA; TOMAZETTI, 2014).

O EM politécnico da escola do qual fazem parte os estudantes participantes da sequência, tem como finalidades, de acordo com o PPP (2014):

- a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental;
- a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando a fim de continuar aprendendo;
- o aprimoramento do educando enquanto pessoa humana, formação ética e desenvolvimento da autonomia intelectual e pensamento crítico;
- a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos, relacionando teoria com a prática.

No ano de 2017 o EM Politécnico foi extinto das escolas gaúchas e um novo EM está sendo discutido. Algumas particularidades e características dos estudantes do terceiro ano, convidados a participar da pesquisa, são apresentadas a seguir.

Os estudantes do terceiro ano do EM diurno

Os estudantes que participaram da sequência didática cursavam o terceiro ano de EM diurno, politécnico. Os objetivos deste ensino, como pontuado anteriormente, estavam embasados na LDB, Art. 35 e 36, as quais indicam que, atendida a formação geral do educando, o EM poderá prepará-lo para o exercício de profissões técnicas.

Para conhecer um pouco mais sobre os sujeitos da pesquisa, suas concepções quanto à escola, à disciplina de Matemática, aos objetivos profissionais, num sentido de compreender a realidade na qual a pesquisa iria se realizar, foi aplicado um questionário semiestruturado à maioria dos estudantes das três turmas, apresentado no Apêndice II. Só não responderam ao questionário os estudantes que não estavam presentes na aula em que o mesmo foi aplicado.

De acordo com os dados coletados, os estudantes são todos moradores de Erechim, em diferentes bairros da cidade, com maior concentração no Centro, Bela Vista, Linho e na zona rural. A maioria deles, 90%, tinham idade entre 17 e 18 anos, 65% trabalhavam no turno da tarde, de 4 a 6 horas por dia, e 70% moravam com os pais. Dentre as profissões dos pais e/ou responsáveis estão: vendedor, mestre de obras, operador de máquinas, professor, metalúrgico, agricultor, empregada doméstica, assistente social e comerciante.

Os motivos pelos quais estudavam na referida escola são relacionados à qualidade da educação, por ser “ótimo o ensino”, de qualidade, reconhecido na região como uma das melhores escolas públicas da cidade, com bons e dedicados professores, por mostrar diversos caminhos para o futuro; e, relacionados à localização, por ser perto de suas casas.

A maioria dos estudantes pretendia ingressar na universidade e os cursos escolhidos variavam muito, mas os mais cogitados eram medicina, direito, arquitetura e nutrição. Além da escola, a maioria estava se preparando para os vestibulares por meio de cursinhos particulares, aulas particulares e estudos em casa com vídeo aulas e em grupos. Dos 46 estudantes que responderam o questionário, 41 afirmaram ter dificuldades para aprender Matemática por variados motivos, porém, alguns recorrentes relacionados a dificuldades na interpretação dos problemas, nos cálculos básicos, devido às lacunas no ensino fundamental, na falta de concentração e na complexidade da disciplina que requer raciocínio lógico. As observações realizadas antes e durante a aplicação da sequência didática confirmaram as dificuldades relacionadas à Matemática, entretanto, possibilitaram também perceber características destes estudantes que auxiliaram no trabalho em sala de aula, como o comprometimento, dedicação e motivação.

Os estudantes participantes da sequência didática

Os estudantes do terceiro ano do EM politécnico diurno tinham aulas no turno da manhã e à tarde participavam dos seminários integrados. Considerou-se, portanto, desenvolver a sequência didática no contraturno a fim de não interferir no programa e cronograma da disciplina de Matemática. No contraturno, porém, muitos estudantes trabalhavam, e assim, a formação do grupo de trabalho se deu a partir de um *convite* aos estudantes que tivessem disponibilidade. A professora de Matemática da turma, então, organizou o dia e horário que contemplasse a maioria dos estudantes que desejava participar, o qual foi na quarta-feira, das 17 horas às 18 horas e 20 minutos, e repassou à pesquisadora os contatos dos estudantes a fim de uma comunicação mais direta.

O incentivo aos estudantes para que participassem das atividades, para além da possibilidade do aprender, foi baseado no fato de que, como o objetivo da sequência era trabalhar com esboço de gráficos e diversos conceitos a isto relacionados, a sequência didática permitiria a revisão de diversos conteúdos para o ENEM e para os vestibulares. Ou seja, a própria proposta de trabalho fez com que muitos estudantes se interessassem e participassem dos encontros.

O primeiro encontro, realizado em 19 de outubro de 2016, em uma sala de aula da escola equipada com projetor e computador, contou com a presença de 12 (doze) estudantes. Apesar de termos acordado com os estudantes com relação ao comprometimento de iniciar o trabalho e seguir até o fim, esse número oscilou durante a sequência didática.

O estudante do Programa Mentores

Durante o ano de 2017, 1 (um) estudante do terceiro ano do EM de uma escola pública de Barra do Rio Azul, RS, participou do Programa Mentores do Programa de Iniciação Científica (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública (OBMEP), do qual a pesquisadora foi tutora. O Programa Mentores é destinado aos estudantes do terceiro ano do EM medalhistas da OBMEP e que já foram medalhistas nos anos anteriores. Nele, o estudante trabalha sob a orientação de um professor universitário na pesquisa de algum assunto avançado de interesse de ambos. Diante desta oportunidade, optou-se pelo trabalho com funções e esboço de curvas, com vistas a expandir o pensamento variacional do estudante, estudar conteúdos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e também complementar as reflexões desta tese. Assim, de maio a setembro de 2017, a sequência didática foi trabalhada com este estudante em encontros mensais com duração entre 2 horas e 30 minutos a 3 horas, ocorridos nas dependências da Universidade Federal da Fronteira Sul.

5.2.3 Análises *a priori* das variáveis que intervêm no esboço de curvas de funções polinomiais de 2º e 3º graus

A análise *a priori* é a fase da pesquisa em que ocorre a definição das variáveis do sistema de ensino que supostamente interferem no esboço de curvas, ou seja, das variáveis sobre as quais é possível exercer algum controle ao relacionar o esboço de curvas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, com as atividades que serão desenvolvidas para a apreensão dos conceitos em questão. A análise *a priori* das variáveis fundamentais para o esboço de curvas na perspectiva da interpretação global, foi organizada partindo de situações-problema que permitem promover a articulação de conceitos, argumentos e propriedades de modo a enfatizar aspectos cognitivos.

Assim, na análise *a priori*, os objetos matemáticos relevantes para o esboço de curvas que interagem e emergem deste processo, nomeados por nós de variáveis, foram pensados a partir de *situações-problema* que permitam atingir os *objetivos* de compreensão de tal objeto. Nestas situações foram destacados os conceitos relacionados, os quais tornaram possível elencar *propriedades* que se associam e possibilitam *procedimentos* e *argumentos* que legitimam as atividades inerentes ao esboço de curvas e dão conta do ponto de vista matemático. As variáveis analisadas *a priori* foram: estudo do sinal de funções, taxa média de variação, taxa de variação instantânea de primeira ordem, pontos críticos, variação de funções, taxa de variação instantânea de segunda ordem e esboço de curvas.

Estudo do sinal de funções

Inicialmente, supôs-se que os estudantes do terceiro ano do EM já tivessem trabalhado e apreendido como analisar o sinal de funções, contudo, ainda assim, o Momento 1 foi planejado para retomar ideias sobre o estudo do sinal, uma vez que este entendimento é essencial para a análise das taxas de variação instantâneas. O estudo do sinal da função afim e quadrática esteve presente em várias atividades da sequência. O objetivo de trabalhar com este objeto é que os estudantes reconheçam o sinal de uma função associado aos valores de x do domínio. Para atingir tal objetivo, utilizamos como situações-problema as tarefas de, a partir de representações gráficas e algébricas de funções afim e quadrática, estudar o sinal das funções.

A seguir, as atividades organizadas para trabalhar o estudo do sinal de funções afim e quadrática.

Momento 1

Atividade 1- A partir da observação do gráfico a seguir, o qual representa uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$, responda as questões que seguem:

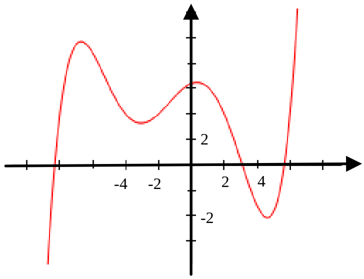
a) O que é a imagem de uma função? Qual é a imagem desta função?

b) Em que ponto(s) a curva intercepta (corta) o eixo x?

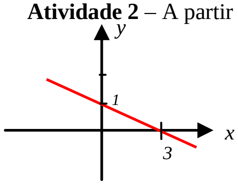
c) Em que ponto(s) a curva intercepta (corta) o eixo y?

d) Esta função possui um valor máximo? O que significa um valor máximo? Quais são os valores máximos (relativos ou absolutos) que a

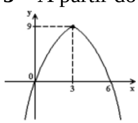
função assume? Explicar o que significa “valor relativo” e “valor absoluto”.
e) Esta função possui um valor mínimo? O que significa um valor mínimo? Quais são os valores mínimos (relativos ou absolutos) que a função assume?
f) O que é domínio de uma função? Para quais intervalos do domínio a função é positiva?
g) Para quais intervalos do domínio a função é negativa?
h) Analise o sinal da função.
i) Conjecture sobre o crescimento e o decrescimento da função.



Atividade 2 – A partir do gráfico, analise o sinal da função.



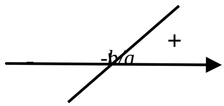
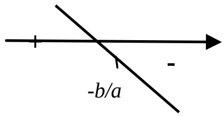
Atividade 3 – Estude o sinal das funções $y = 3x$ e $y = -3x$.
Atividade 4 – Estude o sinal das funções $y = 2x - 6$ e $y = -2x - 6$.
Atividade 5 – A partir do gráfico, analise o sinal da função.



Atividade 6 – Estude o sinal da função $y = -x^2 + 3x$. OBS: utilize a fatoração do polinômio quando possível.
Atividade 7 – Estude o sinal da função $y = x^2 - 2x - 3$. OBS: utilize a fatoração do polinômio quando possível.
Atividade 8 – Estude o sinal da função $y = -x^2 + 6x - 9$. OBS: utilize a fatoração do polinômio quando possível.

Para a compreensão do estudo do sinal são necessários alguns conceitos como o conhecimento do plano cartesiano, das raízes de funções, o esboço, crescimento e decrescimento de retas e a fatoração de polinômio de grau dois, os quais permitem a explicitação de *propriedades* básicas fundamentais, apresentadas tabela 21.

Tabela 21 - Propriedades para o estudo do sinal da função afim *y=ax+b*.

Valores de a	**Esboço**	**Estudo**
$a > 0$		$x = -b/a \rightarrow f(x) = 0$ $x < -b/a \rightarrow f(x) < 0$ $x > -b/a \rightarrow f(x) > 0$
$a < 0$		$x = -b/a \rightarrow f(x) = 0$ $x < -b/a \rightarrow f(x) > 0$ $x > -b/a \rightarrow f(x) < 0$

Fonte: Os autores.

Ao relacionar as propriedades apresentadas na tabela 21, emerge o *procedimento* de encontrar os pontos do domínio da função cuja imagem $y = f(x)$ é nula, positiva e negativa, o que necessita do *argumento* de que, para a função afim, ela é nula para valores de $x = -b/a$ e ser positiva ou negativa, dependerá se a reta cresce ou decresce.

Para o estudo da função quadrática foi proposta a fatoração do polinômio e o trabalho com a análise do produto de dois binômios. Neste caso, havia necessidade de fatorar polinômios de grau dois e estudar o sinal dos fatores separadamente para, em seguida, multiplicar o sinal e concluir a respeito da função quadrática.

A tabela a seguir apresenta as ideias enfatizadas anteriormente de forma sucinta. As análises *a priori* das outras variáveis serão apresentadas somente no formato de tabela.

Tabela 22 - Análise *a priori* do estudo do sinal de funções afim e quadrática.

Objetivo		Reconhecer o sinal de uma função associado a valores de x.
Situações-problema		A partir de representações gráficas e expressões algébricas de funções afim e quadrática, analisar o sinal (ver atividades de 1 a 8 do Momento 1).
Conceitos		Plano cartesiano; raízes de funções; esboço, crescimento e decrescimento de retas; fatoração de polinômio de grau 2.
Propriedades	**Função Afim**	Tabela 21.
	Função Quadrática	Tabela 21 e multiplicação de sinais.

Procedimento	**Função Afim**	Encontrar pontos do domínio em que a imagem é nula, positiva e negativa.
	Função Quadrática	Encontrar pontos do domínio em que a imagem é nula, positiva e negativa partir da fatoração da função quadrática, cada fator é analisado como função afim e o resultado do sinal da função quadrática será o produto do sinal de seus fatores.
Argumentos	**Função Afim**	A imagem é nula para $x = -b/a$. Se $a > 0$, $f(x) > 0$ para $x > -b/a$ e $f(x) < 0$ para $x < -b/a$. Se $a < 0$, $f(x) < 0$ para $x > -b/a$ e $f(x) > 0$ para $x < -b/a$.
	Função Quadrática	A imagem é nula para os valores de x que anulam os fatores. Se o resultado do produto do sinal dos fatores for positivo, a $f(x) > 0$. Se o resultado do produto do sinal dos fatores for negativo, a $f(x) < 0$.

Fonte: Os autores.

Como a intenção não era esgotar as discussões sobre fatoração de polinômios de grau dois, o trabalho foi realizado somente com polinômios que pudessem ser fatorados com agilidade, sem aprofundar neste sentido.

Taxa média de variação

A taxa média de variação (TMV) de uma função em um determinado intervalo real também é um conceito que provavelmente já foi estudado, mas, devido à sua importância para a compreensão das taxas de variação instantâneas (TVI), este objeto foi planejado para ser trabalhado no Momento 2, cujas atividades estão apresentadas a seguir.

Momento 2

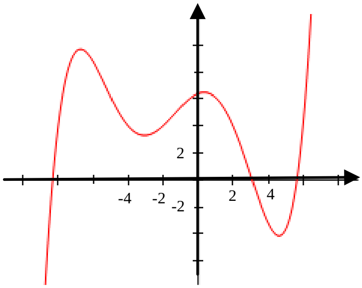
Atividade 1- A partir da observação do gráfico a seguir, o qual representa uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$, responda as questões que seguem:

a) Explique, com suas próprias palavras, a variabilidade da função, ou seja, o crescimento e o decrescimento.

b) Em que pontos acontecem as mudanças de variação, ou seja, onde a curva está crescendo e passa a decrescer e vice e versa?

c) Escreva com linguagem matemática os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

d) Como fazemos para calcular a taxa de variação média da função nos seguintes intervalos de x: $[-8,-7]$, $[-2,0]$, $[2,3]$ e $[-6,-4]$?



Atividade 2 – Calcule a TMV da função $y = -2x + 3$ nos intervalos solicitados e explique com suas palavras o resultado encontrado:

a) $[0,5]$

b) $[-3,1]$

c) $[5,6]$

d) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.

Atividade 3 – Calcular a TMV da função $y = x^2 - 8x + 16$ nos intervalos solicitados e explique o resultado encontrado:

a) $[0,2]$

b) $[-2,0]$

c) $[-2,2]$

d) $[5,6]$

e) $[-5,-3]$

f) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.

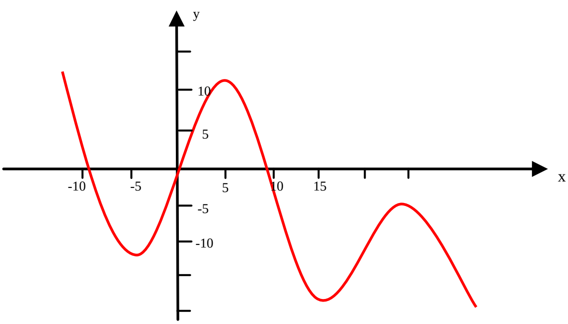
Atividade 4 – Calcular a TMV da função $y = 2x^3 - x^2 + 16$ nos intervalos solicitados e explique o resultado encontrado:

a) $[1,3]$

b) $[-2,0]$

c) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.

Atividade 5 – A partir do gráfico, a seguir, responda:



a) Explique, com suas próprias palavras, a variabilidade da função, ou seja, o crescimento e o decrescimento.

b) Em que pontos acontecem as mudanças de variação, ou seja, onde a curva está crescendo e passa a decrescer e vice e versa?
c) Escreva com linguagem matemática os intervalos de crescimento e decrescimento da função.
d) Calcular a taxa de variação média aproximada da função nos seguintes intervalos de x: [0, 9], [5, 15], [-5, 0] e [12, 17].
Atividade 6 – Calcule a TMV da função $y = 3x - 2$ nos intervalos solicitados e explique o resultado encontrado:
a) $[0,5]$
b) $[-3,1]$
c) $[5,6]$
d) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.
Atividade 7 – Calcular a TMV da função $y = -x^2 + 2x$ nos intervalos solicitados e explicar o resultado encontrado:
a) $[0,2]$
b) $[-2,0]$
c) $[-2,2]$
d) $[5,6]$
e) $[-5,-3]$
f) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x+\Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.

As propriedades para o trabalho com a TMV de funções em intervalos reais foram organizadas na tabela 23.

Tabela 23 - Propriedades da *TMV* de uma função em um intervalo.

Valores da TMV	**Comportamento da função**	**Reta Secante TMV = coeficiente angular**
$TMV > 0$	Crescimento médio	Crescente
$TMV < 0$	Decrescimento médio	Decrescente
$TMV = 0$	Valores da função nos extremos do intervalo são iguais.	Constante

Fonte: Os autores.

Na tabela 24, organizamos os objetivos de se trabalhar com esta variável, as situações-problema a fim de cumprir com estes objetivos, bem como os conceitos, procedimentos e argumentos necessários.

Tabela 24 - Análise *a priori* da *TMV* de uma função em um intervalo real.

Objetivo	- Calcular a TMV de uma função em determinado intervalo real, enquanto razão entre grandezas relacionadas que informa a variabilidade média. - Relacionar a TMV ao coeficiente angular de uma reta secante à curva da função.

Situações-problema	A partir somente do gráfico ou somente da representação algébrica de funções ou de ambas, que apresentam (ou não) alguma situação cotidiana, calcular a TMV em um intervalo definido e interpretá-la algebricamente e geometricamente.
Conceitos	Intervalos reais; valor da função nos extremos de um intervalo real; razão entre a variação da função e variação de x $(\Delta y/\Delta x)$; média aritmética; reta secante a uma curva; coeficiente angular de retas secantes.
Propriedades	A razão das variações de y e x, num determinado intervalo da função e, geometricamente, à declividade da reta secante à função nos pontos extremos do intervalo - Tabela 21.
Procedimento	Calcular e interpretar a TMV de uma função em diferentes intervalos.
Argumentos	O sinal da TMV está relacionado com o crescimento ou decrescimento da função; o valor da TMV, com a variação média da função e todos eles relacionados à declividade de retas secantes.

Fonte: Os autores.

Taxa de variação instantânea de primeira ordem

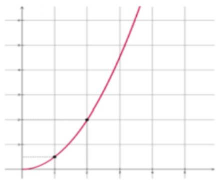
O Momento 3 foi organizado para o trabalho com a taxa de variação instantânea de primeira ordem ($TVI_1(x)$) de uma função. A seguir, as atividades previstas.

Momento 3

Atividade 1 –
- Levantamento das ideias pesquisadas pelos estudantes sobre infinitésimos. Investigação inicial sobre a ideia que os alunos têm de infinitésimos.
- Questionamento: 0,99999... ___ 1. Menor? Igual?
- Interpretação da definição: Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo. Falar dos números hiper-reais.

Atividade 2 – Seja a função $y = x^2 - 2$.
a) Calcule a TMV da função para os intervalos $[2, 3]$, [2; 2,1], [2; 2,01], [2; 2,001], [2; 2,0001].
b) O que está acontecendo com os intervalos do item a?
c) Conjecture a respeito dos valores da TMV da função nestes intervalos.
d) Encontre uma fórmula para a TMV em um intervalo infinitesimal $[x, x + \Delta x]$.
e) Encontre a TVI genérica.
f) Calcule a TVI para valores de x iguais a -3, -1, 0, 1, 3 e 5. Explique os resultados encontrados.

Atividade 3- (SILVA, ANDRADE E AZEVEDO, 2013, p. 8 - Adaptada)
A função $y = \frac{1}{2}x^2$, com domínio $x \in [0, \infty[$, está descrita no gráfico a seguir.



Sabendo que os pontos $(0; 0)$, $(1;\ 0,5)$ e $(2; 2)$ pertencem ao gráfico acima, analisemos o intervalo $0\ \leq\ t\ \leq\ 3$.

a) Determine a TMV da função $v(t)$ nos intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $[1, 3/2]$ e $[1,9/8]$.

b) Trace no gráfico acima, as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a, nomeando as retas.

c) Determine o coeficiente angular das retas.

d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c.

e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de qual valor? Se tomarmos valores mais próximos, por exemplo, $[1,17/16]$ e $[1,33/32]$, o que ocorre com a taxa média de variação para valores de x próximos a $x = 1$?

f) Encontre uma fórmula para a TMV em um intervalo infinitesimal $[1, 1 + \Delta x]$. O que esta TMV representa?

g) Encontre uma fórmula para a TMV em um intervalo infinitesimal $[x, x + \Delta x]$.

h) Conjecture a respeito da taxa de variação instantânea e calcule-a para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Atividade 4 – Seja a função $y = x^2 - 4x - 5$:

a) Calcule a taxa média de variação nos intervalos: $[3, 4]$, $[3;\ 3,5]$, $[3;\ 3,1]$, $[3;\ 3,01]$ e $[3;\ 3,001]$ e analise o que está acontecendo.

b) Calcule a taxa média de variação nos intervalos: $[2, 3]$, $[2;\ 2,5]$, $[2;\ 2,1]$, $[2;\ 2,01]$ e $[2;\ 2,001]$ e analise o que está acontecendo.

c) Calcule a taxa média de variação para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.

d) Sendo Δx um acréscimo infinitesimal, calcule a taxa de variação instantânea genérica da função.

e) Calcule a TVI da função em $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ e $x = 5$. Explique o que a TVI representa em cada valor de x.

f) A partir da taxa de variação instantânea genérica da função, analise a variação (crescimento e decrescimento) da função com base no resultado encontrado.

Atividade 5 – Seja a função polinomial do 2º grau, $y = x^2 - 3x + 3$.

a) Encontre uma fórmula genérica para a taxa de variação instantânea – TVI.

b) Calcule a taxa de variação instantânea em $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

c) Conjecture a respeito do crescimento e decrescimento da função com base nos cálculo do item b.

Na tabela a seguir, expomos os objetivos do trabalho com esta variável e as situações-problema que possibilitarão a compreensão de conceitos, propriedades e argumentos necessários para a compreensão da $TVI_1(x)$ de uma função.

Tabela 25 - Análise *a priori* da variável $TVI_1(x)$ de uma função polinomial.

Objetivos	- Introduzir a noção intuitiva de infinitésimos, baseado em um intervalo Δx, muito próximo de zero. - Introduzir a ideia de TVI a partir da TMV, calculada em um intervalo infinitamente pequeno (Δx). - Relacionar a TVI da função em um ponto à declividade da reta tangente à curva neste ponto. - Compreender a relação entre TVI da função e a variabilidade desta (crescimento e decrescimento).
Situações-problema	- A partir de uma situação que envolve *espaço* e *tempo*, calcular a velocidade média de um móvel em diferentes intervalos de tempo. - Encontrar a TVI de funções a partir da sua expressão algébrica, em diferentes intervalos.
Conceitos	TMV em um intervalo genérico [x, x+Δx]; noção de infinitésimo; coeficiente angular de uma reta; esboço de retas; retas secantes e retas tangentes.
Propriedades	- Δx é um infinitésimo, logo, é uma grandeza muito próxima de zero, podendo ser divisora e tomada como $\Delta x = 0$, quando necessário. - A TMV de uma função em um intervalo $[x, x + \Delta x]$ é, a partir da noção de infinitésimos, a TVI em x. - A reta secante a uma curva em pontos infinitamente próximos como $(x, f(x))$ e $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ é a reta tangente à curva no ponto $(x, f(x))$. - A TVI da função em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente à curva neste ponto. - A TVI de uma função em um ponto está relacionada com a variabilidade da função naquele ponto. - $TVI(x) > 0$ → reta tangente crescente → a curva da função é crescente em x (conforme tabela 8). - $TVI(x) < 0$ → reta tangente crescente → a curva da função é decrescente em x (conforme tabela 8). - $TVI(x) = 0$ → reta tangente constante → a curva tem variação nula em x (conforme tabela 8).
Procedimentos	- Geometricamente: traçar retas secantes e retas tangentes a uma curva e observar o crescimento, decrescimento e invariabilidade das funções. - Algebricamente: calcular a TMV para diversos intervalos reais próximos, até um intervalo infinitamente pequeno e genérico $[x, x + \Delta x]$.
Argumentos	- A $TVI(x)$ pode ser calculada a partir da $TMV(x)$ em um intervalo $[x, x + \Delta x]$. - A reta secante a uma curva em pontos infinitamente próximos $(x, f(x))$ e $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ é a reta tangente no ponto $(x, f(x))$. - A $TMV(x)$ é o coeficiente angular da reta secante enquanto a $TVI(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente. - A $TVI(x)$ é a variação da função em um ponto específico.

Fonte: Os autores.

Pontos críticos

A conceituação de pontos críticos perpassa a identificação dos pontos do domínio da função em que a $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$ se anulam. Para atingir tal compreensão, utilizou-se como *situações-problema* representações gráficas e algébricas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, para, a partir delas, associar, inicialmente, o comportamento das retas tangentes ao valor da $TVI_1(x)$ da função.

Os pontos críticos, principalmente os máximos e mínimos relativos e/ou absolutos, foram organizados para serem trabalhados em todos os momentos da sequência didática: nas atividades 1, 5, 6, 7 e 8 do Momento 1; nas atividades 1, 3, 4, 5 e 7 do Momento 2, e em todas as atividades dos Momentos 3, 4, 5 e 6.

Para a compreensão dos pontos de inflexão de uma função é necessário que o estudante tenha ideia de *variação de funções* e de *concavidade*, por isso, os pontos críticos permearam toda a sequência didática em menor ou maior profundidade, dependendo do que era necessário em cada momento. Os pontos de máximo e mínimo foram, no planejamento da sequência didática, desde o primeiro encontro, bastante evidenciados, enquanto os pontos de inflexão, somente a partir do esboço de funções polinomiais do terceiro grau, em que a concavidade se fez necessária.

Tabela 26 - Análise *a priori* da variável Pontos Críticos de uma função.

Objetivo	- Identificar os pontos do domínio da função em que a $TVI_1(x)$ e a $TVI_2(x)$ se anulam. - Reconhecer que estes pontos são candidatos a máximos ou mínimos, relativos ou absolutos da função; ou ainda, no caso da $TVI_2(x)$, pontos de inflexão. - Compreender a relação entre a $TVI_1(x)$ ser nula e reta tangente horizontal.
Situações-problema	A partir de representações gráficas e algébricas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, associar o comportamento das retas tangentes ao valor da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$ da função.
Conceitos	Valor da função, máximo/mínimo relativo e absoluto, reta tangente, reta constante, coeficiente angular, concavidade, $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$.
Propriedades	**Máximos e mínimos:** - Se a reta tangente à curva de uma função é constante, o ponto da curva pelo qual ela passa é um ponto crítico (máximo ou mínimo) desta função. - O coeficiente angular da reta tangente, neste ponto, é zero. - A $TVI_1(x)$ da função neste ponto é zero - Tabelas 9 e 10. **Pontos de inflexão** - Se as retas tangentes à curva são crescentes e passam a decrescer, neste ponto ocorre a inversão da concavidade. - A $TVI_2(x)$ da função neste ponto é zero.

Procedimento	**Máximos e Mínimos** 1º) Resolver a equação $TVI_1(x) = 0$, a qual fornece os pontos do domínio da função candidatos a máximos e mínimos. 2º) Estudar o sinal da $TVI_1(x)$ para classificar os pontos em máximos ou mínimos, absolutos ou relativos. **Pontos de inflexão** Resolver a equação $TVI_2(x) = 0$, a qual fornece os pontos do domínio nos quais a função inverte a concavidade.
Argumentos	Os pontos em que a $TVI_1(x)$ da função se anula são candidatos a extremos (máximo relativo ou absoluto e mínimo relativo ou absoluto). Os pontos em que a $TVI_2(x)$ da função se anula são pontos de inflexão.

Fonte: Os autores.

Variação de Funções

As atividades relacionadas com esta variável foram previstas em todos os momentos, mais especificamente no Momento 4, a seguir exposto, e Momento 5 da sequência didática.

Momento 4

Atividade 1 - Seja a função $y = -3x + 4$.
a) Calcule a TVI a partir da TMV em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.
b) A TVI varia?
Atividade 2 - Seja a função $y = -x^2 + 4x - 3$.
a) Calcule a TVI_1 a partir da TMV em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.
b) Analise a variabilidade da função a partir do estudo do sinal da TVI_1. Ela pode ser zero? O que isso significa?
c) A TVI_1 varia? Calcular a TVI_2. O que essa variação informa sobre o gráfico?
d) Elabore conjecturas sobre o esboço da curva com base nas taxas encontradas.
Atividade 3 - Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 3$.
a) Calcule a TVI_1 a partir da TMV em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.
b) Analise a variabilidade da função a partir do estudo do sinal da TVI_1.
c) A TVI_1 varia? Calcular a TVI_2. O que essa variação informa sobre o gráfico?
d) Elabore conjecturas sobre o esboço da curva com base nas taxas encontradas.

A tabela 27 expõe a análise a priori da variação de funções.

Tabela 27 - Análise *a priori* da variável Variação de funções.

Objetivo	Relacionar o sinal da $TVI_1(x)$ da função à variabilidade desta e, consequentemente, com o gráfico da função.
Situações-problema	Partindo de representações gráfica e algébrica de funções polinomiais de 2º e 3º graus, identificar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função a partir da observação do gráfico, da análise da $TVI(x)$ e da inclinação das retas tangentes.

Conceitos	Estudo do sinal de funções afim e quadrática; cálculo da $TVI_1(x)$ de uma função; reta crescente, decrescente e constante.
Propriedades	- A função é crescente num intervalo, o que significa que os coeficientes angulares das retas tangentes, neste intervalo, são positivos, ou seja, a $TVI_1(x)$ da função neste intervalo é positiva. - A função é decrescente num intervalo, o que significa que os coeficientes angulares das retas tangentes, neste intervalo, são negativos, ou seja, que a $TVI_1(x)$ da função neste intervalo é negativa.
Procedimento	Encontrar a TVI_1 de funções e estudar o sinal e, assim, relacionar ao crescimento e decrescimento.
Argumentos	- Intervalos em que $TVI_1(x) > 0$, a função é crescente. - Intervalos em que $TVI_1(x) < 0$, a função é decrescente. - Valores em que a $TVI_1(x) = 0$, a função possui um ponto crítico (máximo ou mínimo).

Fonte: Os autores.

Taxa de variação instantânea de segunda ordem

A análise da concavidade é importante para o esboço de funções polinomiais do terceiro grau, cujas $TVI_1(x)$ são funções quadráticas sem raízes reais. Nestes casos, a concavidade é a única informação que possibilita esboçar o gráfico. O trabalho com a concavidade inicia no Momento 4, apresentado anteriormente, e aprofunda no Momento 5.

Momento 5

Atividade 1- Seja a função $y = x^3 - 3x + 3$.
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.
Atividade 2- Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$.
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.
Atividade 3- Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 2$:
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.
Atividade 4- Seja a função $y = x^3 + 3x + 5$:
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

A $TVI_2(x)$ da função quadrática $y = ax^2 + bx + x$ é $TVI_2 = 2a$, ou seja, está diretamente ligada ao sinal do coeficiente a. No caso da função polinomial do terceiro grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as propriedades estão apresentadas na tabela 28 e as análises *a priori*, na tabela 29, a seguir.

Tabela 28 - Propriedades da concavidade de uma função polinomial do 3º grau.

$\boldsymbol{TVI_2(x)}$	**Coeficiente $\boldsymbol{a}$**	**Sinal da $\boldsymbol{TVI_2(x)}$**	**Concavidade**
$6ax + 2b$	$a > 0$	< 0	Negativa – para baixo
		$= 0$	Local de Inflexão
		> 0	Positiva – para cima
	$a < 0$	> 0	Positiva – para cima
		$= 0$	Local de Inflexão
		< 0	Negativa – para baixo

Fonte: Os autores.

Tabela 29 - Análise *a priori* da variável Concavidade da curva de uma função.

Objetivo	Compreender a concavidade de uma curva como o comportamento dos coeficientes angulares das retas tangentes, ou seja, o comportamento da variação de uma função. Compreender a taxa de variação instantânea de primeira e segunda ordem (unidades básicas simbólicas) e, com base nisto, a compreender o crescimento, decrescimento, pontos críticos (máximos e mínimos) e concavidade da curva (unidades básicas gráficas).
Situações-problema	Questionamentos sobre a inclinação das retas tangentes a uma curva: O que está acontecendo com os coeficientes angulares das retas tangentes para pontos em que os valores de x estão em ordem crescente? Como calcular a variação da taxa de variação? O que isso pode informar sobre o gráfico? Além do levantamento destas questões, foi proposto o cálculo da $TVI_2(x)$ para algumas funções.
Conceitos	Estudo do sinal de funções afim e quadrática; cálculo da $TVI_1(x)$ de uma função; resolução de equações do 1º e 2º graus; reta crescente, decrescente e constante e cálculo da $TVI_2(x)$ de uma função.
Propriedades	- Para a função quadrática - Tabelas 12 e 13. - Para a função polinomial do 3º grau - Tabelas 12 e 18. Geometricamente, a concavidade para cima e a concavidade para baixo estão relacionadas com o crescimento e o decrescimento dos coeficientes angulares das retas tangentes, respectivamente. - Analiticamente, uma função tem *concavidade para cima* em um intervalo aberto I, se a $TVI_1(x)$ é crescente, isso quer dizer que a $TVI_2(x) > 0$ no intervalo; e concavidade para baixo se a $TVI_1(x)$ é decrescente, isso quer dizer que a $TVI_2(x) < 0$, no intervalo. - A concavidade muda de sentido no ponto onde a $TVI_2(x)$ é zero, chamado de *ponto de inflexão.* - A análise da concavidade da função quadrática está diretamente ligada ao sinal do coeficiente a. Assim, sendo $a > 0$, a concavidade é para cima, $a < 0$, concavidade para baixo. - A análise da concavidade da função polinomial do 3º grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as propriedades estão apresentadas na tabela 21.

Procedimento	- Encontrar a $TVI_1(x)$ a partir da noção de infinitésimos e, na sequência, encontrar a $TVI_2(x)$ também via infinitésimos. - Estudar o sinal da $TVI_2(x)$.
Argumentos	- $TVI_2(x) > 0 \rightarrow$ Concavidade da curva para cima. - $TVI_2(x) = 0 \rightarrow$ Mudança de concavidade – ponto de inflexão. - $TVI_2(x) < 0 \rightarrow$ Concavidade da curva para baixo.

Fonte: Os autores.

Esboço de curvas

Os esboços das curvas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus ocorrem por intermédio do cálculo e compreensão das variáveis anteriores. As *propriedades*, *conceitos*, *argumentos* e *procedimentos* necessários para a *situação-problema* de esboçar curvas na perspectiva deste trabalho encontram-se nas tabelas 13, para polinomiais do segundo grau, e 17 e 18 para polinomiais do terceiro grau.

O Momento 6 foi organizado para trabalhar especificamente o esboço de curvas com base em todas as variáveis anteriormente expostas.

Momento 6

Atividade – Esboce o gráfico das seguintes funções polinomiais a partir da análise da variabilidade:
a) $y = 2x^2 - 4x + 3$
b) $y = -2x^2 + 18$
c) $y = -x^2 + 2x - 1$
d) $y = x^2 - 2x + 4$
e) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
f) $y = x^3 + 3x$
g) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$

A seguir, apresentamos as etapas do caminho alternativo para esboço de curvas.

Função Polinomial do 2º grau

1º) encontrar a $TMV(x)$ da função para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$;

2º) utilizando a ideia de infinitésimo, encontrar a $TVI_1(x)$ genérica;

3º) estudar o sinal da $TVI_1(x)$, ou seja, encontrar o valor de x onde a $TVI_1(x)$ se anula e analisá-la para valores maiores e menores que este;

4º) relacionar o sinal da $TVI_1(x)$ à variação da função, ou seja, $TVI_1(x) < 0$, a função decresce; $TVI_1(x) > 0$, a função cresce e em $TVI_1(x) = 0$, ponto de máximo absoluto ou mínimo absoluto;

5º) traçar o esboço da curva.

Funções polinomiais do 3º grau cuja TVI possui duas raízes reais e distintas

1º) encontrar a $TMV(x)$ da função para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$;

2º) utilizando a ideia de infinitésimo, encontrar a $TVI_1(x)$ genérica;

3º) a partir da fatoração da $TVI_1(x)$, estudar seu sinal, ou seja, encontrar os valores de x, neste caso distintos, onde a $TVI_1(x)$ se anula e analisá-la para valores menores, maiores e interpostos;

4º) relacionar o sinal da $TVI_1(x)$ à variação da função, ou seja, $TVI_1(x) < 0$, a função decresce; $TVI_1(x) > 0$, a função cresce e em $TVI_1(x) = 0$, pontos de máximo relativo ou mínimo relativo;

5º) traçar o esboço da curva.

Funções polinomiais do 3º grau cuja TVI possui duas raízes reais e iguais

1º) encontrar a $TMV(x)$ da função para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$;

2º) utilizando a ideia de infinitésimo, encontrar a $TVI_1(x)$ genérica;

3º) a partir da fatoração da $TVI_1(x)$, estudar seu sinal, ou seja, encontrar o valor de x, onde a $TVI_1(x)$ se anula e analisá-la para valores menores e maiores;

4º) neste caso, com exceção do ponto onde $TVI_1(x) = 0$, a função vai ser sempre crescente ou decrescente, não possuindo máximos e mínimos.

5º) o ponto onde $TVI_1(x)$ é chamado ponto de inflexão e é onde a curva inverte sua concavidade;

6º) traçar o esboço da curva, não sendo fundamental a análise da concavidade para esboço do gráfico.

Funções polinomiais do 3º grau cuja TVI não possui raízes reais

1º) encontrar a $TMV(x)$ da função para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$;

2º) utilizando a ideia de infinitésimo, encontrar a $TVI_1(x)$ genérica;

3º) a $TVI_1(x)$ não possui raízes reais, então, encontra-se e $TVI_2(x)$ para ter informações sobre o esboço;

4º) estudar o sinal da $TVI_2(x)$, ou seja, encontrar o valor de x, onde a $TVI_2(x)$ se anula e analisá-la para valores menores e maiores;

5º) relacionar o sinal da $TVI_2(x)$ com a concavidade: $TVI_2(x) > 0$, concavidade voltada para cima; $TVI_2(x) < 0$, concavidade voltada para baixo;

6º) neste caso, a função também é sempre crescente ou decrescente e não possui máximos e mínimos.

7º) o ponto onde $TVI_2(x) = 0$ é chamado ponto de inflexão e é onde a curva inverte sua concavidade;

8º) traçar o esboço da curva.

As análises *a priori* detalhadas foram confrontadas com as análises *a posteriori*, elaboradas após a aplicação das sequências didáticas e apresentadas no capítulo sexto. A tabela 30 apresenta os Momentos e as variáveis planejadas.

Tabela 30 - Momentos planejados e variáveis matemáticas envolvidas.

Momento	Atividade	Enunciado	Variáveis matemáticas
M1	1, 2 e 5	A partir da observação de gráficos, revisar elementos de uma função: domínio, imagem, interceptação com os eixos coordenados, crescimento, decrescimento e estudar o sinal.	- Estudo do sinal. - Variação de funções. - Esboço de curvas.
	3,4,6,7 e 8	A partir da expressão algébrica de funções, revisar elementos de uma função: domínio, imagem, interceptação com os eixos coordenados, crescimento, decrescimento e estudar o sinal.	- Estudo do sinal. - Variação de funções. - Esboço de curvas.
M2	1 e 5	A partir da observação do gráfico, explicar a variabilidade da função, os intervalos de crescimento e decrescimento, os locais de mudanças de variação e o cálculo de taxas médias de variação.	- TMV. - Variação da função. - Pontos críticos.
	2, 3, 4, 6 e 7	A partir da expressão algébrica de funções, calcular a taxa média de variação em intervalos numéricos solicitados e em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx um acréscimo de x.	- TMV.

Momento	Atividade	Enunciado	Variáveis matemáticas
M3	1	Ideias dos estudantes sobre infinitésimos, definição.	- Variação instantânea (noção de infinitésimo).
	2, 4 e 5	Calcular e analisar a TMV em diferentes intervalos, infinitamente pequenos, próximos de um valor específico de x. Encontrar a TMV genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx um acréscimo infinitesimal de x e, a partir disso, discutir sobre a TVI em x. Calcular a TVI para diferentes valores de x e conjecturar sobre o esboço da curva.	- Estudo do sinal da função afim e quadrática. - TMV. - TVI_1 a partir da noção de infinitésimos genérica e em pontos específicos. - Pontos críticos. - Variação da função. - Esboço de curvas.
	3	Relacionar TMV com o coeficiente angular da reta secante à função. Relacionar a TVI_1 com o coeficiente angular da reta tangente à função	- TMV. - TVI_1 a partir da noção de infinitésimos genérica e em pontos específicos. - Pontos críticos. - Variação da função. - Esboço de curvas.
M4	1, 2 e 3	Encontrar a TVI genérica da função e analisar a variação desta.	- Estudo do sinal da função afim e quadrática. - TMV no intervalo $[x, x + \Delta x]$. - TVI_1 a partir da noção de infinitésimo. - Pontos críticos. - Variação da função. - Esboço de curvas.
	2 e 3	Analisar a TVI das funções quadrática e polinomial do 3º grau e relacionar com a concavidade, enquanto variação da TVI ou variação de ordem 2 da função (TVI_2). Encontrar pontos críticos e pontos de inflexão. Analisar os sinais da TVI_1 e da TVI_2 e conjecturar a respeito do esboço dos gráficos.	- Estudo do sinal da função afim e quadrática. - TMV no intervalo $[x, x + \Delta x]$. - TVI_1 a partir da noção de infinitésimo. - Pontos críticos. - Variação da função. - TVI_2 (concavidade). - Esboço de curvas.
M5	1, 2, 3 e 4	Com base na TVI_1 e TVI_2, encontrar pontos críticos e pontos de inflexão e esboçar os gráficos das funções polinomiais do 3º grau.	- Estudo do sinal de funções quadráticas. - TMV no intervalo $[x, x + \Delta x]$. - TVI_1 a partir da noção de infinitésimo. - Pontos críticos e de inflexão. - Variação de funções. - TVI_2 (concavidade). - Esboço de curvas.
M6	1	Esboçar o gráfico de funções quadráticas e polinomiais do 3º grau analisando a variabilidade e a concavidade, quando necessário.	Todas.

Fonte: Os autores.

Algumas atividades destes Momentos, que apresentamos nesta seção, serão expostas novamente nas discussões da seção a seguir.

5.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

As atividades planejadas, apresentadas na seção 5.2.3 e, resumidamente, na tabela 30, foram trabalhadas com os estudantes do terceiro ano do EM de uma escola estadual de Erechim, RS, do dia 19 de outubro de 2016 até 11 de dezembro de 2016, em encontros semanais (um encontro por semana). A mesma sequência didática foi desenvolvida com o estudante do Programa Mentores (PM) do PIC, da OBMEP, em 2017, em encontros que ocorreram de maio a setembro de 2017, um encontro por mês. Nesta seção, detalhamos os encontros com a turma e com o estudante do PM e apresentamos alguns diálogos significativos, transcritos dos áudios feitos.

Foram planejados seis Momentos, os quais podem ser localizados na Lista de Momentos. O detalhamento dos encontros em que os Momentos foram desenvolvidos se deu por variável considerada na análise *a priori*, na seção 5.2.3. Antes disso, entretanto, faz-se necessário esclarecer alguns encaminhamentos relativos ao modo como os dados estão apresentados. Nas transcrições, a pesquisadora está identificada como professora/pesquisadora **-** PP, enquanto os estudantes da turma foram codificados como E1, E2, E3,..., e EPM, nos diálogos com o estudante do PM; preservando, assim, suas identidades. Além disso, como as variáveis foram trabalhadas em dois ou três encontros, organizamos a apresentação da seguinte forma: **Nome da variável trabalhada** – *Nº do encontro e identificação dos sujeitos.* A identificação dos sujeitos se refere à turma de terceiro ano e/ou ao estudante do Programa Mentores (EPM).

5.3.1 Estudo do sinal de funções

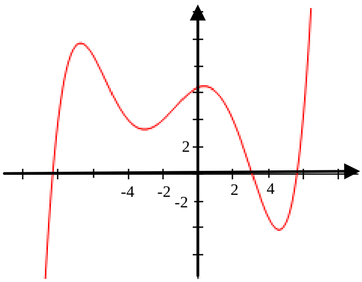
Estudo do sinal de funções: *1º encontro com a turma*

O primeiro encontro da sequência didática aconteceu dia 19 de outubro de 2016 em uma sala de aula da escola equipada com computador e projetor. Inicialmente, foi explicado minuciosamente aos estudantes sobre a metodologia de trabalho e sobre o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice III), o qual os estudantes levaram para casa e trouxeram assinado pelos pais e/ou responsáveis no encontro seguinte.

Após os comentários de cunho metodológico, foi discorrido sobre aspectos relacionados à aprendizagem matemática: a importância das representações; exemplos de representações algébricas, gráficas e linguísticas; as funções afim e quadrática e suas representações, finalizando com uma ideia geral sobre a TRRS de Raymond Duval.

Na sequência, os estudantes foram convidados a refletirem a respeito da atividade 1 do Momento 1, mostrada a seguir, a qual tinha como objetivo revisar alguns conceitos como domínio e imagem de uma função, raiz de uma função, intervalos reais e o estudo do sinal de uma função a partir do esboço de seu gráfico. As transcrições expostas são de momentos importantes relacionados com as variáveis em questão, conforme apresentadas anteriormente.

Atividade 1- A partir da observação do gráfico a seguir, o qual representa uma função contínua de domínio R, responda as questões que seguem:



a) O que é a imagem de uma função? Qual é a imagem desta função?
b) Em que ponto(s) a curva intercepta (corta) o eixo x?
c) Em que ponto(s) a curva intercepta (corta) o eixo y?
d) Esta função possui um valor máximo? O que significa um valor máximo? Quais são os valores máximos (relativos ou absolutos) que a função assume? Explicar o que significa "valor relativo" e "valor absoluto".
e) Esta função possui um valor mínimo? O que significa um valor mínimo? Quais são os valores mínimos (relativos ou absolutos) que a função assume?
f) O que é domínio de uma função? Para quais intervalos do domínio a função é positiva?
g) Para quais intervalos do domínio a função é negativa?
h) Analise o sinal da função.
i) Conjecture sobre o crescimento e o decrescimento da função.

O objetivo desta atividade era que os estudantes respondessem as questões apenas observando o gráfico e utilizando valores e pontos aproximados. Iniciou-se o trabalho questionando e esperando respostas dos estudantes.

PP*: O que é o domínio de uma função?*
E1*: É o* x*.*
PP*: Ok... os valores que* x *pode assumir... e a imagem, o que é?*
E1*: É a ordenada!*
PP*: Isso... os valores de* y *que a função assume, então, neste gráfico, quais os valores de* y*?*
E1*: O y pode ser qualquer valor positivo ou negativo!*
PP*: Isso, pois existe gráfico para qualquer valor de* y*.*

Neste momento, uma parábola voltada para cima com valor mínimo igual a 2 é esboçada e questiona-se a fim de identificar a imagem.

PP*: Quais os valores que y assume, sendo o domínio desta função os* $\mathbb{R}$*?*
E1*: Reais positivos maiores que zero.*
E2*: Só os positivos maiores que zero.*
PP*: Mas tem gráfico em* $y = 0$*?*
E1*: Positivos maiores que zero.*
E2*: Maior ou igual a* 2*.*
PP*: Concordam?*

Diante da resposta positiva dos estudantes, é feito o esboço da curva a fim de confirmar a resposta de E2.

PP*: Isso,* y *assume valores maiores ou iguais a* 2*. Assim, o domínio é* $\mathbb{R}$*, mas a imagem é* $[2, +\infty)$*. E neste caso (fazendo referência ao gráfico da atividade 1), quais os valores que* y *assume?*
E1*: Tanto positivos como negativos.*
PP*: Qualquer valor de* y*? Qual é a imagem? Todos os reais?*

Todos os estudantes concordam e a partir disso seguiram discussões sobre como escrever intervalos reais. Aliás, isso teve que ser retomado inúmeras vezes durante os encontros devido às dificuldades demonstradas pelos estudantes.

PP*: Em quais pontos a curva intercepta o eixo x?*

Como o gráfico não especifica os valores foi necessário utilizar aproximações. Os estudantes auxiliaram na indicação dos pontos e foi enfatizado que nestes pontos o $y = 0$.

PP*: Esses valores onde a curva corta o eixo x são também chamados como?*
E1*: Par ordenado?*
PP: Não...

***E1**: Raiz da função!*
***PP**: Isso... Ou zero da função... É a mesma coisa. Então, agora, onde a função intercepta eixo y?*
***E2**: No 6,2.*
***PP**: Muito bem, concordam? Revisadas as ideias iniciais, vamos lá, essa função, só a partir da observação do gráfico, possui algum valor máximo?*
***Estudantes**: Não!*

Neste momento, questionou-se e discutiu-se sobre o significado de valor máximo de uma função e abordou-se a diferença entre máximo absoluto e relativo. Os estudantes demonstraram dúvidas ao observar o gráfico devido à dificuldade para perceber a continuidade deste. Por isso, a explicação com outros gráficos de funções fez-se necessária. Voltando a fazer referência ao gráfico da atividade 1, os estudantes foram convidados a refletirem sobre quais são os máximos e se são relativos ou absolutos.

***E1**: 9,9 e 6,2, relativos.*
***PP**: Concordam? Passando o dedo pelo gráfico, iniciando da esquerda para a direita, o que está acontecendo com o gráfico?*
***E1**: Tá crescendo!*
***PP**: Muito bem... Cresce, cresce... E ...*
***E1**: Começa a decrescer.*
***PP**: Muito bem, então tem alguns pontos que apontam para a mudança de variabilidade...*

A ideia, neste momento, era fazer com que os estudantes refletissem sobre a variabilidade da função. Para tanto foram utilizados exemplos de funções, diante do que um estudante perguntou.

***E1**: Como eu sei na quadrática quando ela cresce e quando decresce?*

A fim de responder a questão, foi utilizado um exemplo com este tipo de função e os estudantes concluíram que a função quadrática tem crescimento e decrescimento. É discutido também sobre a concavidade e a taxa de crescimento e decrescimento das parábolas. A partir destas compreensões, o domínio de uma função é retomado e, como o interesse foi trabalhar com o estudo do sinal da função esboçada, questionou-se.

***PP**: Para quais intervalos do domínio a função é positiva*? (Após um tempo e espera sem respostas). *A função ser positiva significa quem ser positivo?*
***E1**: O y, maior que 2.*
Utilizando caneta com outra cor para evidenciar a parte do gráfico acima do eixo x, perguntou-se novamente para quais valores de x a função é

positiva. Vários estudantes falam ao mesmo tempo, mas a resposta a seguir se sobressai.
***E2**: Do -8,2 até o 3.*
***PP**: -8,2<x<3, mais algum intervalo?*
***E1**: 5,1 até o 6.*
***E2**: Até o infinito...*

Após a confirmação da resposta, mostrou-se as diferentes maneiras de escrever o intervalo real $[5{,}8; +\infty)$.

***PP**: E agora, quais os intervalos onde a função é negativa?*
***E1**: Para baixo do eixo x.*
***E3**: Do* 3 *até o* 8*...*

Após deixar os estudantes refletirem, questionou-se sobre a letra h da atividade.

***PP**: Analise o sinal da função! Analisar o sinal da função é então analisar o sinal de y. Então, para que valores de x, $y = 0$, $y < 0$ e $y > 0$? Vamos lá, para que valores de x, $y = 0$?*
***Estudantes**:* $-8{,}2$; 3 *e* $5{,}8$.
***PP**:* $y > 0$ *para que valores de* x*?*
***E2**: De* $-8{,}2$ *até* 3 *e de* $5{,}8$ *até* $+\infty$.
***PP**: E agora,* $y < 0$ *para quê valores de* x*?*
***E1** (apontando para o quadro): de* $-\infty$ *até* $-8{,}2$.
***PP**: Agora, conjecturem a respeito do crescimento e decrescimento deste gráfico.*
***E1**: Sempre levando em conta os valores de* x*?*
***PP**: Sim, você vai utilizar os intervalos de* x *para especificar onde a função cresce e decresce.*

O primeiro encontro finalizou com os estudantes falando suas hipóteses e auxiliando na construção de suas conjecturas. Alguns pontos que se sobressaíram neste encontro estão relacionados às dificuldades dos estudantes com os símbolos matemáticos, conceitos básicos envolvendo funções e a participação de apenas alguns estudantes. A turma, apesar de demonstrar compromisso, quase não participou dos questionamentos e discussões, o que demonstra a fragilidade da educação no sentido de instigar e desafiar o estudante enquanto protagonista de seu aprendizado.

Algumas questões pontuais sobre o trabalho deste encontro:

- Estudantes sabem o que é e identificam o domínio e a imagem de uma função, porém, não fazem uso da linguagem formal, utilizando, por exemplo, "é o x" e "é o y" quando questionados sobre o domínio e imagem, respectivamente.

- Na identificação da imagem da função a partir do esboço do gráfico, muitas dúvidas decorrentes da dificuldade de visualizar o gráfico em todo o seu domínio.

- Dificuldades com a escrita e leitura de intervalos reais.

- Em questionamento sobre valores máximos e mínimos, as dúvidas oriundas da dificuldade de visualização da continuidade da função aparecem novamente, sendo necessária a explicação a partir do esboço de outras funções.

- A fim de refletir sobre a variabilidade da função foi questionado sobre os intervalos de crescimento e decrescimento da função esboçada na atividade 1 e de outros tipos de funções. Para refletir sobre a variabilidade da função quadrática utilizou-se exemplos deste tipo de função para esclarecer que as funções quadráticas possuem variação positiva para algum intervalo de x e variação negativa, para outro intervalo. Além disso, foi discutido sobre a concavidade e as distintas taxas de variação da parábola.

- A ideia de domínio de uma função foi retomada e, como o interesse era trabalhar com o estudo do sinal da função esboçada, foi questionado sobre os intervalos do domínio em que a função é positiva. Diante da reação silenciosa dos estudantes, demonstrando que não sabem ou não entenderam a pergunta, uma caneta com outra cor foi utilizada para evidenciar a parte do gráfico acima do eixo x e novamente perguntado para que valores de x a função é positiva. Mesmo os estudantes terem respondido corretamente após esta ação, a ideia de intervalos reais foi retomada.

O último diálogo do encontro, sobre os intervalos onde a função é negativa, positiva e uma análise completa do sinal da função, demonstra que, apesar da dinâmica realizada e de já terem estudado, ainda a análise do sinal não é tarefa compreendida ou realizada com espontaneidade. Alguns pontos que se sobressaíram neste encontro estão relacionados às dificuldades dos estudantes com os símbolos matemáticos e com conceitos básicos envolvendo funções e a pouca participação dos estudantes nos questionamentos. A turma, apesar de demonstrar compromisso, quase não participa dos questionamentos e discussões. De acordo com Lorenzato (2006), a presença dos porquês e das perguntas na prática pedagógica é fundamental, pois revela as dificuldades de aprendizagem dos estudantes. Contudo, “o fazer perguntas é uma habilidade a ser permitida, desejada, estimulada e cultivada pelo professor” (p. 97).

Neste sentido, constata-se a fragilidade do ensino no sentido de instigar e desafiar o estudante enquanto protagonista de seu aprendizado. Outro ponto importante a ser destacado é o pequeno rol de representações semióticas de conhecimento dos estudantes. Para ocorrer a conversão, é necessário que se conheçam as distintas representações semióticas de um objeto matemático, e, mais do que isso, as formas de tratamento de tais representações. Neste primeiro encontro ficou visível o pouco conhecimento de símbolos matemáticos e de representações semióticas.

Estudo do sinal de funções*: 2º encontro com a turma*

O segundo encontro com a turma ocorreu dia 28 de outubro de 2016 e foi breve devido a compromissos de formatura dos estudantes. Ele baseou-se na resolução das atividades sobre estudo do sinal de funções, continuação do Momento 1. Mais uma vez pode-se evidenciar a dificuldade com os símbolos matemáticos relacionados aos intervalos reais e com a leitura de um gráfico.

Estudo do sinal de funções: *1º encontro com EPM*

Com o estudante do PM, um encontro específico sobre estudo do sinal foi realizado dia 13 de maio de 2017. Nele, foram conferidas as atividades do Momento 1, realizadas pelo EPM em casa. Este encontro não foi gravado.

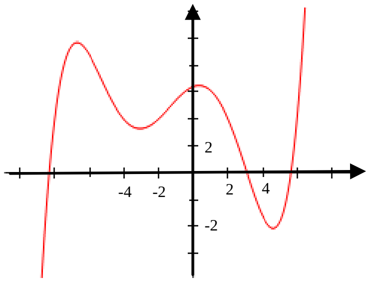
5.3.2 Taxa Média de Variação

Taxa Média de Variação: *3º encontro com a turma*

O terceiro encontro com a turma ocorreu no dia 04 de novembro de 2016 e nele foram trabalhadas as atividades do Momento 2 relacionadas às taxas médias de variação de funções a partir do gráfico ou da expressão algébrica. O encontro iniciou com a retomada de aspectos do último encontro, questionando a respeito da variabilidade da função em distintos intervalos da curva da atividade 1 do Momento 2, a seguir exposta. Para tanto, algumas ideias e símbolos de intervalos reais e pares ordenados foram revisados, e, na sequência, questionado sobre o quanto a função varia, ou seja, as taxas de variação.

> **Atividade 1**- A partir da observação do gráfico a seguir, o qual representa uma função contínua de domínio R, responda as questões que seguem:
> a) Explique, com suas próprias palavras, a variabilidade da função, ou seja, o crescimento e o decrescimento.

b) Em que pontos acontecem as mudanças de variação, ou seja, onde a curva está crescendo e passa a decrescer e vice e versa?
c) Escreva com linguagem matemática os intervalos de crescimento e decrescimento da função.
d) Como fazemos para calcular a taxa de variação média da função nos seguintes intervalos de x: [-8,-7], [-2,0], [2,3] e [-6,-4]?



A partir da análise do esboço da função, foi questionado se a taxa média de variação é constante para algum tipo de função. Diante do silêncio dos estudantes, optou-se por deixar a pergunta para mais a diante, quando, em determinado momento, um estudante se pronuncia com relação à pergunta anterior e o seguinte trecho explicita o diálogo.

E1*: Então na função do primeiro grau a taxa de variação é nula!*
PP*: Será? Vamos pegar o exemplo da função y=2x+3, será que a variação desta função é nula? Variação nula significa não variar... Será que ela não varia?*
E4*: A variação será sempre a mesma!*
PP*: Isso mesmo! A cada x que aumenta uma unidade, a função aumenta quanto?*
E4*: 2.*

Parece que este estudante se deu por conta da característica da função afim com relação à sua variação. Foi explicado então sobre a função constante, a qual não varia e confirmei que a função afim é a função cuja variação é constante. A aula continua com discussões e reflexões a respeito do crescimento e decrescimento.

PP*: Bem, entendido que o gráfico* (da atividade 1) *tem crescimento e decrescimento, mas e se eu quiser calcular uma variação média?*

Com a ajuda dos estudantes, definimos alguns intervalos, ainda para a atividade 1 do Momento 2, com valores aproximados, localizou-se os pontos no gráfico e realizou-se o cálculo da taxa média de variação para tais intervalos. A seguir, trechos que marcaram o início do trabalho com as TMV de uma função.

> ***PP**: Só pela observação do gráfico, a taxa média de variação (TMV) neste intervalo* (apontando para intervalo $[-8,-7]$) *é positiva ou negativa?*
> ***E2**: Positiva por que está crescendo.*
> ***PP**: Isso mesmo! O resultado da TMV será positivo, pois neste intervalo a função cresce.*
> ***E1**: A variação é analisada em x ou em y?*
> ***PP**: Pois é... Estamos falando de variação da função, então é a variação de y!*
> ***E1**: Então a variação será 3! Cresce uma unidade em x, a variação de y será 3.*
> ***PP**: Muito bem! Isso mesmo! A TMV é o quanto o y varia quando x aumenta 1 unidade! Neste caso, o intervalo em x aumenta 1 unidade, mas e quando não for, por exemplo, calcular para o intervalo* $[-2,0]$*?*

Para este intervalo, são definidos os pontos extremos, aproximadamente $(-2,4)$ e $(0;\ 6,2)$ e questionado sobre como calcular a TMV.

> ***E2**: Essa variação ela vai dar o resultado para cada 1 unidade de x?*
> ***PP**: Isso aí!*
> ***E2**: Então vou ver quanto varia o y e divido por 2, então 2,2 divido por 2, que dá 1,1.*
> ***PP**: Isso! O y aumentou 2,2 enquanto o x aumentou 2, então a TMV será a $\Delta y/\Delta x$, ou seja, 1,1.*

Esta fórmula foi relacionada à velocidade média de um móvel ($v_m = \Delta s/\Delta t$) e utilizou-se um exemplo para mostrar que a velocidade média é a taxa média de variação do espaço em função do tempo.

> ***PP**: O próximo intervalo tem extremos* $(2,4)$ *e* $(3,0)$, *então, sem cálculo, o x foi do 2 para o 3, aumentou 1 unidade, o que aconteceu com o y?*
> ***E3**: Diminuiu 4.*
> ***PP**: Então, nem preciso de fórmula para concluir que a $TMV = -4$ neste intervalo. Mas, em querendo utilizar a fórmula?*

Estudantes ficam em silêncio, talvez pensando em qual fórmula utilizar ou deduzindo uma generalização. A partir disso, a ideia de velocidade média foi retomada e utilizada para encontrar a $TMV = -4$.

> ***PP**: O que significa a TMV ser -4?*
> ***E2**: Que decresceu.*

***PP**: Que no intervalo que vai de $x = 2$ até $x = 3$ a função está decrescendo em média...*
***E3**: 4 unidades.*
***PP**: Isso aí! A TMV é -4 ou a função está decrescendo em média 4 unidades no referido intervalo!*
***E1**: Não dá para falar que está decrescendo -4, né?*

Após essas discussões, os estudantes calcularam a TMV para o último intervalo da atividade 1 e conferiram seus resultados. Falou-se brevemente da relação entre velocidade média e instantânea, introduzindo a possibilidade de se conhecer a taxa de variação em algum ponto específico da curva.

Na sequência, os estudantes foram convidados a responderem a atividade 2 do Momento 2, somente a partir de cálculos mentais.

Atividade 2 – Calcule a TMV da função $y = -2x + 3$ nos intervalos solicitados e explique com suas palavras o resultado encontrado:
a) $[0,5]$
b) $[-3,1]$
c) $[5,6]$
d) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx , um acréscimo de x qualquer.

Os estudantes resolvem a primeira questão da atividade e solicitam confirmação de seus resultados.

***E3**: -2?*
***PP**: Como calculou?*
***E3**: Fiz um esboço do gráfico e concluí.*

Este estudante partiu do esboço da reta para verificar a variabilidade, outros resolveram pela fórmula, mas todos chegaram ao resultado correto, $TMV = -2$. Perguntou-se então da necessidade de fazer o cálculo para todas as letras, uma vez que é função afim. Porém, diante da incerteza dos estudantes, a forma reduzida genérica da equação da reta ($y = ax + b$) foi utilizada e esclarecida a relação entre o coeficiente angular (coeficiente a) e a taxa de variação, ideias já trabalhadas nos encontros anteriores.

Para introduzir a ideia da letra d, intervalos reais foram revisados.

***PP**: Quando se tem um intervalo, por exemplo,* $[0,5]$, *o 2º elemento (extremo à direita) é o 1º (extremo à esquerda) mais um acréscimo, neste caso o acréscimo é 5 unidades. No caso do intervalo* $[-3,1]$, *o 2º elemento (extremo à direita) é o 1º (extremo à esquerda) mais 4 unidades,*

> *logo o acréscimo é 4. No caso de* $[5,6]$*, o extremo à direita é o extremo à esquerda mais um acréscimo de 1 unidade.*

Estas ideias serviram para que os estudantes compreendessem que $[x, x + \Delta x]$ é um intervalo genérico e, assim, para a função da atividade 2, letra *d*, a resposta também é -2.

Em seguida passou-se à resolução da atividade 3 do Momento 2, a seguir exposta.

> **Atividade 3** – Calcular a TMV da função $y = x^2 - 8x + 16$ nos intervalos solicitados e explique o resultado encontrado:
> a) $[0,2]$
> b) $[-2,0]$
> c) $[-2,2]$
> d) $[5,6]$
> e) $[-5,-3]$
> f) encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.

As letras a, b, c, d, e e desta atividade foram resolvidas pelos estudantes em duplas e realizada a conferência com as respostas dos colegas. A letra *f*, contudo, foi feita no quadro, juntamente com os estudantes, a fim de enfatizar a ideia de TMV genérica.

> ***PP****: Então a taxa de variação genérica dessa função é* $TMV(x) = 2x - 8 + \Delta x$*, e aí? Para quê serve? Em querendo saber a* $TMV(x)$ *para o intervalo, por exemplo,* $[6,8]$*? Como faço utilizando a fórmula genérica? Quanto vale* Δx*?*
> ***E1****: 2.*
> ***PP****: Isso aí! Então a* $TMV(6) = 2.6 - 8 + 2$*, que dá 6. E se quisermos saber a variação especificamente em* $x = 6$*? Não mais num intervalo, mas em* $x = 6$*? Não poderíamos pegar um* Δx *muito próximo de zero?*

Sem respostas a esses questionamentos, foi comentado, sem aprofundar, sobre a TMV e a taxa de variação instantânea ($TVI(x)$), apenas indicando uma ideia para o próximo encontro, encerrando o encontro com a turma da escola.

Taxa Média de Variação*: 4º encontro com a turma*

O 4º encontro ocorreu dia 09 de novembro de 2016 e, devido a pouca quantidade de estudantes presentes, nele foi retomada a TMV e discutidas as atividades 5, 6 e 7 do Momento 2, a fim de revisar e fixar, bem como a atividade 3 do Momento 3, sem aprofundar a $TVI(x)$.

Como tarefa de casa, foi solicitado que os estudantes fizessem as atividades 2 e 4 do Momento 3, com o objetivo de aprofundá-las no encontro de 16 de novembro. Lembrando que todas as atividades indicadas neste parágrafo estão expostas na seção 5.2.3 e possuem uma lista de referência.

Taxa Média de Variação*: 2º Encontro com o EPM*

O Momento 2 foi trabalhado no dia 14 de junho de 2017, nas dependências da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, campus Erechim, RS. Em encontro anterior foi solicitado ao estudante que tentasse resolver as atividades em casa para que as resoluções fossem discutidas neste dia.

Conforme evidenciado anteriormente, o Momento 2 é um trabalho que visa compreender a TMV de funções, porém, com este estudante, foi possível ir além e trabalhar brevemente a noção de infinitésimos e de $TVI(x)$. A seguir, são apresentados trechos significativos dos diálogos iniciando com a discussão da atividade 1 do Momento 2.

> ***PP****: Bem, variabilidade de uma função está relacionada a quê?*
> ***EPM****: Crescimento e decrescimento.*
> ***PP****: Então, como você respondeu a letra a da atividade 1?*
> ***EPM****: Taxa de variabilidade é o quociente obtido da diferença entre as ordenadas de dois pontos quaisquer pela diferença das abscissas destes dois pontos. É igual ao coeficiente angular. Se a taxa é positiva, a função é crescente, se é negativa, é decrescente.*
> ***PP****: Ok! Isso aí! Então quando eu falar em variabilidade estou falando em decrescimento e crescimento! Vamos para a letra b: em que pontos ocorrem mudanças de variação?*
> ***EPM****: Fui vendo pelo gráfico, nos pontos* $(-7, 10)$, $(-3;\ 3{,}6)$, $(0, 6)$ *e* $(4, alguma\ coisa;\ -4)$.
> ***PP****: Agora, escreva em linguagem matemática os intervalos de crescimento e decrescimento.*

Ao escrever em linguagem matemática os intervalos de crescimento e decrescimento, o estudante se confundiu e deu a resposta com intervalos de y. Assim, corrigimos a atividade, sendo necessário revisar a ideia de intervalos reais. A TMV foi exemplificada por meio da velocidade média de um móvel, que é a variação do espaço dividido pela variação do tempo e, por meio desta compreensão, o estudante revisou seus cálculos da letra d. A seguir, o diálogo sobre o cálculo de alguns intervalos.

***EPM**: Eu olhei no gráfico e achei os y's relacionados, quando $x = -8$, o y é 4 e quando $x = -7$, o y é 10, então eu usei o $(-7{,}10)$ como primeiro ponto e $(-8{,}4)$... Não sei se inverti e o sinal vai ficar trocado... Eu peguei o valor final menos o inicial.*
***PP**: Não importa qual ponto pegaste primeiro, o importante é que tanto as ordenadas como as abscissas devem estar na mesma ordem. Outra forma de pensar é assim: do ponto $(-8{,}4)$ ao ponto $(-7{,}10)$ o que aconteceu com o x?*
***EPM**: Aumentou.*
***PP**: Quanto?*
***EPM**: Uma unidade.*
***PP**: Certo... E o que aconteceu com o y?*
***EPM**: Cresceu 6 unidades.*
***PP**: Isso ai! Então o y cresce 6 unidades para cada unidade de x. Isso é a taxa média de variação, a variação do y dividida pela variação do x. Ou seja, a TMV informa o quanto a função varia em média em um intervalo para cada unidade que aumenta de x. Neste intervalo* (apontando para $[-8, -7]$) *a função tem um crescimento médio de 6 unidades.*

Na conferência da resolução do estudante, são encontrados equívocos de sinal que causaram erros nas respostas finais. No trabalho com a atividade 2 do Momento 2, o estudante expressa seu raciocínio.

***EPM**: Eu fiz todas* (se referindo ao cálculo da TMV para os intervalos das letras *a*, *b*, *c* e *d*)*, mas era evidente que iam dar todas igual a -2 por que é uma função afim.*
***PP**: O que significa esse -2?*
***EPM**: Que a cada unidade de x que aumenta, o y decresce 2.*
***PP**: Então, resumindo, a taxa de variação de uma função afim é...*
***EPM**: Constante.*
***PP**: Independente do intervalo! E a letra d?*

A letra d desta atividade solicita uma fórmula para a TMV da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$. Antes que o estudante expusesse seu raciocínio, foi explicado que $[x, x + \Delta x]$ é um intervalo genérico, pois qualquer intervalo real tem a seguinte característica: o elemento à direita é o elemento à esquerda mais um acréscimo, designado de Δx.

Para encontrar a TMV genérica, o estudante achou confuso utilizar o Δx e optou, por conta própria, por utilizar a letra k (nos encontros seguintes o EPM utilizou h), o que não influenciou no resultado. Ficou evidente a compreensão do estudante com relação ao fato de que para esta função, independente do valor de Δx, a variação média será sempre -2 devido ao imediatismo e espontaneidade com que este chega a tal conclusão. Ao se expressar sobre isso, EPM fala:

> ***EPM**: Por que é uma função afim. Por que é uma reta. Mais a frente tem uma função do 2º grau daí já não é constante!*

Ao conferir a atividade 3 do Momento 2, resolvida pelo EPM, foram realçadas as distintas TMV obtidas nos intervalos diferentes.

> ***PP**: Então o que percebemos é que na função quadrática, em alguns intervalos ela tem decrescimento alto* (apontando para a resposta da letra *b* ($TMV = -10$)), *em outros tem decrescimento menor* (apontando para a resposta da letra a ($TMV = -6$)), *em outros ela cresce, ou seja, o gráfico é crescente em alguns "lugares" e decrescente em outros.*
> ***EPM**: Interessante... Se aqui é decrescente* (apontando para o intervalo $[-2,2]$) *e aqui ela é crescente* (apontando para o intervalo $[5,6]$), *então no meio deste intervalo tem o vértice?!*
> ***PP**: Isso aí! E no vértice, a função cresce ou decresce?*
> ***EPM**: Ela não faz nada* (demonstrando dúvida)... *Depende... Se tu pega um ponto antes ou um ponto depois para calcular a TMV...* (continua demonstrando dúvida).

Neste momento, foi importante a introdução da ideia de retas tangentes e da relação entre elas e a variabilidade da função. Para tanto, um gráfico foi esboçado como exemplo e também diversas retas tangentes a este gráfico, sempre questionando o estudante sobre suas inclinações. Diante disso, o EPM concluiu que quando a função está crescendo, as inclinações das retas tangentes também são crescentes e quando a função decresce, as inclinações das retas tangentes são decrescentes.

> ***PP**: Então, neste ponto* (apontando para o vértice), *qual é a inclinação da reta tangente?*
> ***EPM**: Ela é horizontal... É zero! Então dá pra dizer que a taxa de variação no ponto é zero?*
> ***PP**: Isso mesmo... Daí não estamos mais falando de TMV... Agora estamos falando de taxa de variação instantânea! Enquanto estamos analisando a variabilidade em um intervalo, temos a TMV, mas eu posso analisar a função exatamente em um ponto.*

Estas atividades e percepções do estudante clarificam a atividade cognitiva de conversão, uma vez que foi necessário, para tal compreensão, realizar as análises das variações tanto no registro gráfico como no algébrico, conjecturar e estabelecer hipóteses. Como exemplo, novamente as ideias de velocidade média e instantânea de um móvel foram abordadas. Na sequência, a resolução da letra *f* foi verificada, cuja resposta estava correta: $TMV = 2x - 8 + k$. A partir desta fórmula, são calculadas as TMV para os intervalos $[5,6]$ e $[-2,2]$, cujas respostas são, respectivamente, 3 e -8.

Neste encontro, a partir dos diálogos construídos, percebeu-se que podíamos ir além e foi proposto então que o estudante calculasse a TMV da referida função para os intervalos $[1; 2]$, $[1;\ 1{,}1]$, $[1;\ 1{,}01]$, $[1;\ 1{,}001]$ e $[1;\ 1{,}0001]$, ou seja, para intervalos cada vez menores e valores extremos à direita próximos de 1, para os quais o estudante encontra como resultado, respectivamente, os valores: -5, $-5{,}9$, $-5{,}99$, $-5{,}999$.

> ***PP**: Nestes intervalos reais, cada vez mais o número à direita se aproxima de?*
> ***EPM**: De 1.*
> ***PP**: Então, cada vez mais esse intervalo diminui e o valor da direita se aproxima de 1... Conforme o x se aproxima de 1, a TMV se aproxima de quanto?*

A partir deste questionamento, as discussões giraram em torno de compreender que, conforme o intervalo diminui, o valor à direita se aproxima de 1 e a TMV se aproxima de -6. Foi explicado então que este tipo de abordagem permite concluir a respeito da taxa de variação instantânea (TVI) no ponto onde $x = 1$.

> ***PP**: Então, conforme eu "pego" intervalos em que os valores de x se aproximam, a variação de x* (me referindo a Δx) *é quanto?*
> ***EPM**: Cada vez mais a variação de x se aproxima de zero!*
> ***PP**: Isso! O Δx está se aproximando de zero. Então, para eu conhecer a TVI em um ponto específico, eu posso utilizar a TMV genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, só que com Δx igual a?*
> ***EPM**: Zero!*
> ***PP**: Então, isto significa que, em $x = 1$, a função tende a decrescer* 6 *unidades.*
> ***EPM**: E daí esse -6 é o coeficiente angular de uma reta que tangencia a função naquele ponto* (apontando para $x = 1$)*!?*
> ***PP**: Muito bem! Isso mesmo!*

Na sequência, a atividade 4 do Momento 2 foi conferida.

> **Atividade 4** – Calcular a TMV da função $y = 2x^3 - x^2 + 16$ nos intervalos solicitados e explique o resultado encontrado:
> a) $[1,3]$
> b) $[-2,0]$
> c) Encontre uma fórmula para a taxa média de variação da função em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx, um acréscimo de x qualquer.

Na resolução foram encontrados equívocos de sinal nos cálculos das letras a e b. Na letra c, a qual solicitava a TMV para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, o EPM encontra a resposta correta $TMV = 6x^2 - 2x + k$.

> ***PP**: E se eu quiser calcular a TVI eu uso essa fórmula* (apontando para $TMV = 6x^2 - 2x + k$)*, mas o k vai ser o quê?*
> ***EPM**: A diferença de x_2 para x_1* (se referindo genericamente aos extremos de um intervalo).
> ***PP**: Mas se eu quiser calcular a TVI em um ponto específico?*
> ***EPM**: Tu usa $k = 0$!*
> ***PP**: A TMV é $6x^2 - 2x + k$! Se eu quero saber a TVI em um ponto específico?*
> ***EPM**: Tu usa como intervalo a variação de x igual a zero. Então $k = 0$.*
> ***PP**: O k pode ser tão pequeno quanto se deseja, não é zero, mas tende a zero! Ele é um infinitésimo! Os infinitésimos são muito úteis para a compreensão de alguns conceitos matemáticos.*
> ***EPM**: O nome infinitésimo é só por que ele é um número grandão?*
> ***PP**: Não! Ao contrário! Por que é pequeno!*
> ***EPM**: Sim... Quis dizer que tem muitas casas decimais, mas pequeno em valor!*

A atividade 6 do Momento 2 foi realizada plenamente pelo estudante e na resolução da atividade 7 deste mesmo momento foram encontrados erros no cálculo da TMV genérica.

5.3.3 Taxa de variação instantânea de primeira ordem, Pontos críticos, Variação de funções

Nesta seção, reunimos as variáveis Taxa de Variação Instantânea, Pontos Críticos e Variação de Funções, pois elas estão fortemente relacionadas e foram trabalhadas, em maior ou menor profundidade e formalismo, simultaneamente.

Taxa de variação instantânea de primeira ordem, Pontos críticos, Variação de funções*: 5º encontro com a turma*

O encontro com a turma em que a TVI_1 foi estudada ocorreu no dia 16 de novembro de 2016. Os estudantes tinham que entregar as resoluções das atividades 2 e 4 do Momento 3, porém, como muitos faltaram no encontro anterior, ocorrido em 09 de novembro, optou-se por revisar a TMV a partir do gráfico e da expressão algébrica. Para tanto, foram construídos gráficos de uma função afim e de uma função quadrática pela abordagem *ponto a ponto* e analisada a variação das funções. Foi esclarecido sobre as diferentes maneiras de esboçar curvas, enfatizando o objetivo da sequência didática, que é a partir da compreensão da variação da função.

Como os estudantes demonstraram dúvidas e insegurança para entregar a atividade 4 do Momento 3, a seguir exposta, resolvemos juntos ela no quadro. Neste momento, fez-se necessário revisar novamente intervalos reais.

> **Atividade 4** – Seja a função $y = x^2 - 4x - 5$:
> a) Calcule a taxa média de variação nos intervalos: $[3,4]$, $[3;\ 3{,}5]$, $[3;\ 3{,}1]$, $[3;\ 3{,}01]$ e $[3;\ 3{,}001]$ e analise o que está acontecendo.
> b) Calcule a taxa média de variação nos intervalos: $[2,3]$, $[2;\ 2{,}5]$, $[2;\ 2{,}1]$, $[2;\ 2{,}01]$ e $[2;\ 2{,}001]$ e analise o que está acontecendo.
> c) Calcule a taxa média de variação para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.
> d) Sendo Δx um acréscimo infinitesimal, calcule a taxa de variação instantânea genérica da função.
> e) Calcule a TVI da função em $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ e $x = 5$. Explique o que a TVI representa em cada valor de x.

Para a letra a desta atividade foi encontrada uma $TMV = 3$, para o intervalo $[3{,}4]$.

> ***PP**: O que significa "esse 3"?*
> ***E2**: Que neste intervalo a variação da função é 3 unidades!*
> ***PP**: Isso, significa que a função $y = x^2 - 4x - 5$, no intervalo* $[3{,}4]$ *cresce em média 3 unidades!*

Resolvem então para os outros intervalos encontrando:

- $[3;\ 3{,}5] \to TMV = 2{,}5$
- $[3;\ 3{,}1] \to TMV = 2{,}1$
- $[3;\ 3{,}01] \to TMV = 2{,}01$
- $[3;\ 3{,}001] \to TMV = 2{,}001$

Os valores dos intervalos foram localizados na reta real e foi questionado:

> ***PP**: O que está acontecendo com os intervalos?*
> ***E2**: Diminuindo.*
> ***PP**: Qual é a variação de cada intervalo?*
> ***E2**: Do primeiro é* 1*, do segundo é* 0,5*;* 0,1*;* 0,01 *e* 0,001...
> ***PP**: Ou seja, os intervalos estão diminuindo... O valor à direita está se aproximando de* 3 (do à esquerda) *e a taxa média de variação?*

> ***E2**: Se aproximando de* 2.

Após, o gráfico foi construído e a TMV foi analisada cada intervalo, evidenciando que conforme o valor da direita do intervalo se aproxima de 3, a variação do intervalo se aproxima de 0 e a TMV de 2. Assim, e utilizando o exemplo de velocidade média e instantânea, foi introduzida a ideia de $TVI(x)$ e de sua importância para o esboço e compreensão de gráficos. A seguir, apresentamos o diálogo sobre a resolução da letra b.

> ***PP**: Olhando para os intervalos* $[2,3]$, $[2;\ 2,5]$, $[2;\ 2,1]$, $[2;\ 2,01]$ *e* $[2;\ 2,001]$, *percebe-se que o valor maior se aproxima de quanto?*
> ***E2**: De* 2.
> ***PP**: Isso, o valor maior do intervalo está tendendo a* 2. *Fazendo isso eu chego a qual conclusão?*
> ***E2**: Que a taxa de variação é* 2.
> ***PP**: Será? Não seria a taxa de variação em* $x = 2$*? Fazendo isso eu tenho uma ideia de como a função está se comportando em* $x = 2$. *Sendo, então uma taxa instantânea.*

Este equívoco do estudante fez com que as TMV fossem calculadas no quadro para todos os intervalos solicitados e refletiu-se sobre o fato de os intervalos estarem diminuindo, o extremo maior se aproximando de 2 e a TMV se aproximando de zero!

- $[2,3] \rightarrow TMV = 1$
- $[2;\ 2,5] \rightarrow TMV = 0,5$
- $[2;\ 2,1] \rightarrow TMV = 0,1$
- $[2;\ 2,01] \rightarrow TMV = 0,01$
- $[2;\ 2,001] \rightarrow TMV = 0,001$

Concluindo assim que, em $x = 2$, a função $y = x^2 - 4x - 5$ tem variação nula. Uma análise do gráfico da parábola construída a partir da abordagem conhecida dos estudantes, encontrando alguns pontos específicos, também foi realizada, questionando-se sobre a variação instantânea em diversos pontos da curva ao que os estudantes respondem corretamente, inclusive no vértice.

> ***PP**: Então, em* $x = 2$ *já sabemos que é o vértice da parábola, pois é onde a variação é nula. Assim, para os diversos tipos de gráficos de funções expostos a variação é zero nos pontos máximos e mínimos.*

Este comentário não é aprofundado e continuamos com as atividades. A letra c solicitava a TMV genérica para o intervalo $[x, x + \Delta x]$ e foi resolvida no quadro com a ajuda dos estudantes os quais demonstraram bastantes dificuldades no quadrado da soma e nos sinais. O diálogo a seguir se refere à $TVI(x)$.

> ***PP**: Bem, a TVI é o que está acontecendo com a função em um ponto específico, assim, como é o Δx?*
> ***E2**: Número pequeno, próximo de zero!*
> ***PP**: Δx tem que ser um infinitésimo, é tão pequeno quanto se quer, não é zero, mas depois de ter a fórmula genérica para a TMV, posso ignorá-lo para compreensão da TVI. Assim, para $x = 2$ encontramos $TVI = 0$.*
> ***E2**: Então aí é o vértice!*
> ***PP**: Isso aí! É o vértice da parábola!*

Na letra *e* da atividade 4 do Momento 3, os estudantes precisavam encontrar os valores da $TVI(x)$ para $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$ e $x = 5$.

> ***PP**: Para valores menores que 2, o que está acontecendo com a função?*
> ***Estudantes**: Decrescendo.*
> ***PP**: Então, "antes do 2"* (se referindo a $x < 2$) *a função tem $TVI < 0$, ou seja, decresce. Assim, aqui em $x = 2$ ela tem um ponto de?*
> ***E2**: Mínimo.*
> ***PP**: Isso, e "depois do $x = 2$"* (se referindo a $x > 2$)*?*
> ***E2**: Ela decresce!*

A partir disso, fez-se um esboço da parábola no quadro sem utilizar valores, apenas o estudo do sinal da $TVI(x)$ e, na sequência, os estudantes foram solicitados a resolver a atividade 2 do Momento 4, a seguir exposta.

> **Atividade 2** - Seja a função $y = -x^2 + 4x - 3$.
> a) Calcule a TVI_1 a partir da TMV em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$,
> b) Analise a variabilidade da função a partir do estudo do sinal da TVI_1. Ela pode ser zero? O que isso significa?
> c) A TVI_1 varia? Calcular a TVI_2. O que essa variação informa sobre o gráfico?
> d) Elabore conjecturas sobre o esboço da curva com base nas taxas encontradas.

A resposta da letra *a* foi exposta no quadro e os estudantes verificaram suas respostas e muitos se pronunciaram dizendo que erraram sinal. Para fechamento do encontro e retomada do que foi trabalhado, a TMV genérica encontrada na letra *a*, foi verificada e foi questionado sobre como os estudantes encontraram a TVI, os quais responderam que fizeram $\Delta x = 0$. Após, estudaram o sinal:

- para $x = 2$, a $TVI = 0$ (vértice);
- para $x < 2$, a $TVI > 0$ (cresce);
- para $x > 2$, a $TVI < 0$ (decresce);

e esboçaram a curva, concluindo que o vértice é também o ponto de máximo absoluto da função. As taxas de variação instantâneas de ordem um ($TVI_1(x)$) e de ordem dois ($TVI_2(x)$) não foram abordadas neste encontro.

Taxa de variação instantânea de primeira ordem, Pontos críticos, Variação de funções: *6º encontro com a turma*

Este encontro ocorreu no dia 23 de novembro de 2016 e teve como objetivo aprofundar as ideias sobre as TVI, por isso, foram retomados aspectos importantes que envolveram a atividade 2 do Momento 4: a $TVI(x)$ de uma função quadrática a partir da TMV em um intervalo $[x, x + \Delta x]$ e elaboração de conjecturas a respeito do gráfico da referida função com base na $TVI(x)$.

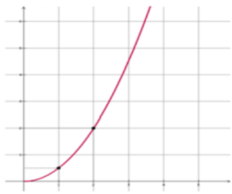
A atividade 3 do Momento 4, exposta e discutida profundamente no encontro seguinte, foi brevemente abordada e questionado a respeito da $TVI(x)$ de uma função polinomial do terceiro grau a partir da TMV em um intervalo $[x, x + \Delta x]$ e elaboração de conjecturas a respeito do gráfico da referida função com base na $TVI(x)$.

O encontro foi curto devido a compromissos dos estudantes e com pouca participação destes.

Taxa de variação instantânea de primeira ordem, Pontos críticos, Variação de funções: *3º encontro com EPM*

Com o EPM, o Momento 3 foi trabalhado no encontro de 08 de julho de 2017 a partir da discussão das atividades por ele resolvidas como tarefa em casa. Na atividade 3 do Momento 3, a seguir exposta, trabalhamos com o cálculo das TMV para os intervalos [1,3], [1,2], $[1,3/2]$ e $[1,9/8]$.

Atividade 3- (SILVA, ANDRADE E AZEVEDO, 2013, p. 8 - Adaptada) A função $y = \frac{1}{2}x^2$, com domínio $x \in [0, \infty[$, está descrita no gráfico a seguir.



Sabendo que os pontos $(0;0)$, $(1;\ 0{,}5)$ e $(2;2)$ pertencem ao gráfico acima, analisemos o intervalo $0\ \leq\ t\ \leq\ 3$.

a) Determine a TMV da função $v(t)$ nos intervalos: [1,3], [1,2], $[1{,}3/2]$ e [1,9/8].

b) Trace no gráfico acima, as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a, nomeando as retas.

c) Determine o coeficiente angular das retas.

d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c.

e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de qual valor? Se tomarmos valores mais próximos, por exemplo, $[1{,}17/16]$ e $[1{,}33/32]$, o que ocorre com a taxa média de variação para valores de x próximos a $x = 1$?

f) Encontre uma fórmula para a TMV em um intervalo infinitesimal $[1, 1 + \Delta x]$. O que esta TMV representa?

g) Encontre uma fórmula para a TMV em um intervalo infinitesimal $[x, x + \Delta x]$.

h) Conjecture a respeito da taxa de variação instantânea e calcule-a para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

O objetivo com esta atividade era reforçar o que foi trabalhado no encontro anterior, aprofundando a noção de TVI. Os resultados obtidos foram, para:

- $x \in [1{,}3]\ \rightarrow\ TMV = 2$,
- $x \in [1{,}2] \rightarrow\ TMV =\ 1{,}5$,
- $x \in [1, 3/2] \rightarrow\ TMV =\ 1{,}25$,
- $x \in [1, 9/8] \rightarrow\ TMV =\ 1{,}0625$.

Diante disso, foi solicitado que o estudante refletisse sobre a TMV quando x tende a 1 por valores à direita, concluindo, sem obstáculos, que a TMV tende a 1.

Na letra b, era necessário esboçar retas que passassem pelos pontos extremos dos intervalos da letra a, porém, o estudante interpretou que era para construir as retas tangentes nos pontos onde $x = 3, 2, 3/2$ e $9/8$. Inclusive a letra c foi resolvida com base na ideia da reta tangente. Por isso, essas letras foram resolvidas novamente neste encontro.

PP*: Qual é o coeficiente angular de uma reta secante?*
EPM*: É a TMV do intervalo.*
PP*: Então o coeficiente angular é a $\Delta y/\Delta x$?*

O estudante, desde as primeiras atividades calculou a TMV genérica no início das atividades e depois usou a fórmula resultante para resolver as outras questões. Assim, a TMV encontrada por ele em um intervalo genérico foi $TMV = x + \frac{\Delta x}{2}$ e esta foi utilizada para encontrar as taxas médias para as outras questões da atividade. O estudante elaborou conjecturas a respeito da $TVI(x)$, solicitada na letra h, a qual foi lida por ele.

> ***EPM**: A TVI é igual à TMV de um ponto até ele mesmo! Isso ficou estranho... Ou melhor, quando $\Delta x = 0$. A TVI em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente à parábola, à curva, naquele ponto. Se calcula pela genérica* (apontando para a TMV) *e substitui os valores de x.*

Falou-se sobre a variação infinitesimal Δx, enfatizando que para saber o que acontece em um ponto específico da curva, é necessário pensar na variação de x da fórmula genérica da TMV, tendendo a zero. Os infinitesimais são definidos como números menores do que qualquer número, muito próximos de zero, porém, não sendo zero. Essas ideias foram abordadas a partir da fórmula da TMV genérica, em que, sendo o Δx igual a zero, teríamos problema na divisão, uma vez que a divisão por zero é indeterminada. Assim, para o cálculo da TMV o Δx não é tomado como zero, ele é um infinitesimal, mas quando é analisada a TMV no sentido de encontrar a $TVI(x)$ em um ponto específico, é possível assim desconsiderá-lo.

Voltando a dialogar sobre a letra h da atividade, falamos dos valores encontrados para as $TVI(x)$ e as retas tangentes, relacionando com o crescimento e decrescimento e com o sinal dos coeficientes angulares.

Para resolver a atividade 4 do Momento 3, exposta anteriormente, o EPM calculou a TMV genérica para o intervalo $[x, x + \Delta x]$ e após calculou as TMV nos intervalos solicitados na letra a concluindo corretamente que quando o extremo direito se aproxima do esquerdo, que é 3, a TMV tende a 2. Da mesma forma, na letra b, quando o extremo direito do intervalo se aproxima de 2, a TMV se aproxima de zero.

> ***PP**: Então, já posso concluir que a TVI desta função em $x = 3$ é 2 e em $x = 2$ é zero! Ou seja, calculamos várias TMV para intervalos infinitamente próximos para concluir sobre a TVI.*

Com a intenção de refletir sobre o significado de $TVI(x) = 0$, encontramos os zeros da função $y = x^2 - 4x - 5$, (5 e -1), localizamo-los no plano cartesiano e fizemos um esboço da parábola. Isso, para que o estudante refletisse sobre as retas tangentes e os valores da $TVI(x)$ encontrados anteriormente. Assim, em $x = 3$ a $TVI(x)$ é 2, ou seja, a reta tangente à curva neste ponto é crescente e a taxa de crescimento é 2. E em $x = 2$ a $TVI(x)$ é zero.

> ***PP****: O que significa a* TVI *ser zero?*
> ***EPM****: Que a reta tangente é horizontal, é o vértice...*
> ***PP****: Então, em qualquer outro ponto não será zero? Será zero aonde?*
> ***EPM****: No vértice!*

A fim de ampliar o entendimento para outras funções, o gráfico de uma função polinomial de grau superior a dois foi esboçado e questionado sobre a $TVI(x)$ em diversos pontos da curva ao que o estudante respondeu sem dificuldades que, em pontos onde a função está crescendo, a $TVI(x)$ é positiva, onde está decrescendo, ela é negativa e nos pontos máximos e mínimos, ela é zero. Diante disso, máximos e mínimos absolutos e relativos foram revisados. Retomando a atividade, a letra f solicitava para, a partir da $TVI(x)$, analisar a variação da função. O diálogo a seguir expõe o raciocínio utilizado pelo estudante.

> ***EPM****: Então, eu calculei para quando a* TVI *é zero.*
> ***PP****: Por quê?*
> ***EPM****: Para analisar o que acontece com a função... Se ela cresce ou decresce, em valores maiores e menores que o encontrado.*
> ***PP****: Mas por que zero?*
> ***EPM****: Por que a* TVI *é zero no vértice, onde a reta tangente é horizontal, constante. E aí encontrei que a* TVI *é zero para* $x = 2$*, para* $x < 2$ *ela é decrescente e para* $x > 2$*, ela é crescente.*
> ***PP****: Então, para analisar o crescimento e o decrescimento de uma função somente a partir da expressão algébrica, sem o gráfico, eu posso utilizar essas ideias?*
> ***EPM****: Mas tu tem que achar o vértice.*
> ***PP****: E como se encontra o vértice?*
> ***EPM:*** *Tu encontra a* TMV *para um intervalo e faz* Δx *tender a zero.*

Após estas discussões, passamos à conferência da atividade 5 do Momento 3, a seguir exposta.

Atividade 5 – Seja a função polinomial do 3º grau, $y = x^3 - 3x + 3$.

a) Encontre uma fórmula genérica para a taxa de variação instantânea – TVI.
b) Calcule a taxa de variação instantânea em $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.
c) Conjecture a respeito do crescimento e decrescimento da função com base nos cálculo do item *b*.

Novamente o estudante primeiro encontrou a TMV genérica para $[x, x + \Delta x]$ e depois considerou $\Delta x = 0$ para encontrar as $TVI(x)$. Foi reforçado que em qualquer ponto da curva desta função a $TVI(x)$ é dada por $3x^2 - 3$, ou seja, se comporta de acordo com esta função. Então, no caso de saber a variabilidade em $x = 0$ ou $x = 5$ ou $x = 10$, é possível utilizar esta fórmula.

O restante da atividade foi conferido e os diálogos giraram em torno do crescimento e decrescimento em pontos distintos da função. Antes de iniciar o trabalho com o Momento 4, o estudante interveio questionando:

> ***EPM****: Me bateu umas ideias... É possível saber a lei da função tendo como informação o gráfico ou a TVI? Por que assim, olhando nos exercícios, a TVI tem alguma coisa a ver com a função, mas não consegui encontrar uma relação... Algo me diz que tem, mas não cheguei a lugar nenhum.*
> ***PP****: Vou te responder em partes... Sim... Tem como encontrar a lei da função conhecendo a TVI.*
> ***EPM****: Sem o gráfico?*
> ***PP:*** *Sim, só com a TVI é possível!*
> ***EPM****: É verdade que o grau da lei da função define quantos são os intervalos de crescimento e decrescimento?*

Nesta pergunta, o que o estudante quis dizer é que o grau da função está relacionado com a quantidade de intervalos em que a função cresce e decresce.

> ***EPM****: Por que eu coloquei no GeoGebra algumas funções de graus 2, 3 e 5 e a de grau 3 deu dois pontos, um mínimo relativo e um máximo relativo, com duas subidas* (se referindo ao crescimento) *e uma descida* (se referindo ao decrescimento).

Falou-se sobre a importância destas conclusões e foram utilizados exemplos de funções afim e quadrática com o objetivo de concluir que, para essas funções, a ideia do EPM se confirma; de funções polinomiais do terceiro grau em que isso também se verifica e outras, também de terceiro grau, em que isso não se verifica. O EPM também questionou sobre o termo independente da expressão algébrica, concluindo sozinho que este termo informa a altura do gráfico. Melhoramos a ideia a partir de exemplos das funções $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$. A "altura do gráfico" se refere à translação da função $y = x^2$ no eixo das ordenadas e os termos independentes se referem ao ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas e é também o vértice da parábola se considerarmos o formato $y - 1 = x^2$ ou $y - 2 = x^2$.

Após estas discussões, neste mesmo encontro, iniciamos o trabalho com a atividade 1 do Momento 4, a seguir exposta, cujo objetivo era introduzir a ideia de taxa de variação instantânea de segunda ordem ($TVI_2(x)$).

> **Atividade 1** - Seja a função $y = -3x + 4$.
> a) Calcule a TVI a partir da TMV em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.
> b) A TVI varia?
>
> ***EPM***: *Bem, na letra a, a TMV... Isso é uma função afim, então a TMV vai ser constante para qualquer intervalo. De cara dá para saber que, como a função é afim, a TMV é -3, por que é reta! Eu fiz toda a conta, mas nem precisava! Tá, então a TVI vai ser também -3 por que nem tem Δx* (se referindo à fórmula da TMV do intervalo $[x, x + \Delta x]$). *Então, pensando bem, tu tem a reta* ($y = -3x + 4$) *e pega um ponto dela, a reta tangente a ela neste ponto tem coeficiente angular igual a essa TVI* (apontando para o -3) *e vai ser uma reta que passa sobre a função. Então é -3!*
> ***PP***: *E esse -3 está associado a que na expressão algébrica da função?*
> ***EPM***: *Ao coeficiente angular.*

Com base neste diálogo, foi enfatizado que o coeficiente angular está explícito na equação reduzida da reta ($y = ax + b$) e que quando a equação não estiver nesta forma, é preciso tomar cuidado. Com relação à $TVI(x)$, o estudante conclui que ela é -3 para qualquer ponto da função, ou seja, a $TVI(x)$ é constante e a função, por isso, não possui máximos e mínimos.

A atividade 2 do Momento 4, anteriormente exposta, introduz a ideia de $TVI_2(x)$. Os diálogos iniciaram com o estudante questionando sobre o "unzinho" que aparece na $TVI_1(x)$. Diante disso, explicou-se que, para algumas funções será necessário diferenciar as duas taxas de variação que serão calculadas: a taxa de variação instantânea de primeira ordem, que é a que foi calculada até então, e a taxa de variação instantânea de segunda ordem. O estudante resolve a letra a, encontrando $TVI_1(x) = -2x + 4$. Os diálogos a seguir se relacionam à

$TVI_1(x)$ e sua relação com o crescimento e decrescimento da função e à compreensão inicial da $TVI_2(x)$.

> ***PP**: Na letra b está pedindo para estudar o sinal da TVI_1, como se estuda o sinal?*
> ***EPM**: Tu diz para que valores de x a função é positiva, negativa e zero.*
> ***PP**: Então... Eu preciso fazer essa análise para a TVI_1. O que isso me informa sobre a função, ou melhor, sobre a curva da função?*
> ***PP**: Tu encontrou uma função que representa a TVI... A TVI é positiva quando a função...*
> ***EPM**: Ela cresce.*
> ***PP**: E negativa...*
> ***EPM**: Decresce.*
> ***PP**: E ela é zero?*
> ***EPM**: No vértice.*
> ***PP**: Isso, em pontos onde a reta tangente é constante! O que a análise da TVI_1 me permite concluir sobre essa função* (apontando para $TVI_1 = -2x + 4$)*?*
> ***EPM**: Analisando isso aqui* (apontando para a TVI_1) *a gente consegue saber para que valores de x a função cresce, decresce e onde é zero!*
> ***PP**: Isso aí! Agora* (questionando sobre a letra *c*)*, a TVI_1 que você acabou de encontrar, varia?*
> ***EPM**: Não... Depende... Se for para funções afim, não...*
> ***PP**: Estou perguntando desta função* (apontando para a TVI_1 da função da atividade 2).
> ***EPM**: A fórmula genérica da TVI_1 não varia, mas as TVI pontuais sim.*
> ***PP**: Então, para $x = 1$ a TVI é um certo valor, para $x = 2$ é outro, para $x = 3$ é outro... Então, para valores de x distintos, a TVI é diferente, então, qual é a resposta para a pergunta da letra c?*
> ***EPM**: Sim!*
> ***PP**: Calcule, então, a TVI de ordem 2, ou seja, se a TVI_1 varia, encontre a variação dela, que é a TVI_2.*
> ***EPM**: -2!*
> ***PP**: Muito bem!*
> ***EPM**: Pois é... Então, o que essa variação informa sobre a função? O gráfico é uma parábola...*

Diante do silêncio do estudante, esboçou-se a parábola, encontrando as intersecções com os eixos x e y.

> ***PP**: Bem, essa TVI_2 é como está se comportando a TVI_1. A TVI_1 informa sobre o coeficiente angular...*
> ***EPM:** Da reta tangente.*
> ***PP**: Então...*

Esboçando várias retas tangentes à parábola, foi questionado sobre o que está ocorrendo com as retas, se estão crescendo ou decrescendo e o quanto. A ideia era fazer com que o estudante concluísse que as retas tangentes têm coeficientes angulares que estão diminuindo conforme x aumenta. Portanto, outro exemplo de parábola é utilizado, mas com a concavidade voltada para cima de modo que o estudante percebesse que para coeficientes angulares crescentes, a $TVI_2(x) > 0$ e a concavidade é voltada para cima; coeficientes angulares decrescentes, a $TVI_2(x) < 0$ e a concavidade voltada para baixo.

> ***PP****: Então, para esta função* (apontando para o exemplo de concavidade para cima) *o que está acontecendo com os coeficientes angulares das retas tangentes?*
> ***EPM****: Estão aumentando.*
> ***PP****: Então a TVI_2 é positiva! E aqui* (apontando para o exemplo de concavidade para baixo – atividade 2 do Momento 4)*?*
> ***EPM****: Diminuindo.*
> ***PP****: A que taxa?*
> ***EPM****: -2.*
> ***PP****: Muito bem! O que isso tem a ver com o gráfico da função?*
> ***EPM****: Concavidade! Concavidade voltada para baixo, os coeficientes das retas tangentes diminuem; para cima, aumentam... E isso tem a ver com o sinal da TVI_2.*
> ***PP****: Então, na letra d, elabore conjecturas, ou seja, se tu tivesses que esboçar a curva com base na TVI_1 e TVI_2...*
> ***EPM****: Tu tendo a função, tu calcula a TVI de 1ª ordem, com isso, tu vai saber como varia a função, para quais valores de x ela é constante. Tá, a partir daí, tu pode saber, pela TVI de 2ª ordem se ela tem concavidade para cima ou para baixo.*
> ***PP****: Então, para esboçar o gráfico de uma função quadrática, saber a concavidade é essencial?*
> ***EPM****: Não, tu sabendo a TVI_1 já...*

O encontro foi encerrado com o estudante elaborando suas conjecturas sobre o esboço da curva desta atividade. A ideia de concavidade foi retomada e aprofundada no encontro seguinte.

5.3.4 Taxa de variação instantânea de segunda ordem

Taxa de variação instantânea de segunda ordem: *6º Encontro com a turma*

O encontro em que foi trabalhada a ideia de variação da taxa de variação instantânea, ou taxa de variação de segunda ordem, relacionada à concavidade da curva, ocorreu no dia 07 de dezembro de 2016.

Iniciamos retomando a atividade 2 do Momento 4, anteriormente exposta.

> ***PP**: Bem, calculamos no encontro anterior a TMV para um intervalo $[x, x+\Delta x]$ que deu $TMV = -2x + 4 + \Delta x$. Para encontrar a TVI em um ponto específico assumimos $\Delta x = 0$. Assim, para a função $y = -x^2 + 4x - 3$, obtivemos $TVI = -2x + 4$. A TVI informa como a função está variando, por isso se estuda o sinal da TVI, para saber onde ela é positiva, crescente, ou negativa, decrescente.*

Com estas informações, analisamos novamente o estudo do sinal e esboçamos a curva. Sobre a letra c desta atividade, a qual problematiza sobre a variação da $TVI(x)$, o "unzinho" que aparece junto à $TVI_1(x)$ foi relacionado com a ideia de velocidade instantânea de um móvel e a aceleração.

> ***PP**: O que é a aceleração de um móvel?*
> ***E2**: É a variação da velocidade.*
> ***PP**: Isso mesmo! A velocidade é a variação do espaço com relação ao tempo; a aceleração é a variação da velocidade, ou seja, a variação da variação do espaço. Então, a TVI_2 é a variação de ordem dois, que é a variação da variação instantânea.*

A partir destas questões, foi discorrido sobre as retas tangentes a uma curva, esboçando um gráfico qualquer e traçando várias tangentes a fim de que os estudantes visualizassem as inclinações. No gráfico construído, as inclinações das retas tangentes decrescem para valores menores de um determinado x, ocasionando uma concavidade voltada para baixo e, para valores maiores, crescem, ocasionando uma concavidade voltada para cima.

> ***PP**: Então, se eu preciso analisar a concavidade de uma curva, é necessário analisar a variação da TVI, e, para esta função* (apontando para $y = -x^2 + 4x - 3$) *qual é a TVI_2?*
> ***E2**: -2, pois a TVI da função é $TVI = -2x + 4$ e a variação desta é -2, sempre negativa, concavidade voltada pra baixo!*

A tarefa de casa era que os estudantes terminassem de resolver a atividade 3 do Momento 4, a seguir, para a conferência e discussão neste encontro.

> **Atividade 3** - Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 3$.
> a) Calcule a TVI_1 a partir da TMV em um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$.
> b) Analise a variabilidade da função a partir do estudo do sinal da TVI_1.

c) A TVI_1 varia? Calcular a TVI_2. O que essa variação informa sobre o gráfico?
d) Elabore conjecturas sobre o esboço da curva com base nas taxas encontradas.

Os estudantes então conferem seus resultados para a $TVM = -3x^2 - 6x + 9 + (\Delta x)^2$, e $TVI = -3x^2 - 6x + 9$.

***PP**: A primeira coisa a ser feita é analisar onde a TVI é zero, para isso, é preciso resolver a equação $-3x^2 - 6x + 9 = 0$, a qual tem soluções $x = -3$ e $x = 1$. O que ocorre então nestes pontos?*

Estudantes ficam em silêncio demonstrando dúvida, mas uma estudante responde.

***E2**: Máximo e mínimo?*
***PP**: Por quê?*
***E2**: Não sei... Falei no chute.*

Diante da resposta do estudante, a ideia de $TVI(x)$ foi retomada a partir de um gráfico exemplo, traçando retas tangentes, concluindo que nos pontos máximos e mínimos a $TVI(x) = 0$, e analisado o sinal da $TVI(x)$ a partir do esboço de seu gráfico. É importante enfatizar que a ideia inicial era estudar o sinal de funções quadráticas a partir da fatoração, contudo, diante das dificuldades demonstradas pelos estudantes na fatoração, foi optado por encontrar os zeros da função e fazer o estudo a partir do esboço da parábola.

Esboçada a curva da função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 3$, questionou-se.

***PP**: Para esta função, com o esboço pronto, eu posso concluir sobre a concavidade?*
***E3**: Sim.*
***PP**: Então para essa função eu não preciso calcular a TVI_2.*

Como exemplo, foi utilizada a função que possui como taxa de variação $TVI(x) = x^2 + 1$, sempre positiva, mas seu crescimento não é constante.

***E2**: Ela vai crescer variando!*

Diante da resposta correta do estudante, foi solicitado que os mesmos fizessem a atividade 2 do Momento 5, a seguir exposta.

Atividade 2- Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$:
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

Durante o tempo em que resolveram, os estudantes discutiram bastante a respeito do desenvolvimento algébrico, procuraram entender o porquê de seus resultados distintos, encontraram seus erros, corrigiram e uma estudante questionou.

***E3**: Profe, nós não vamos chegar numa Bhaskara! Como a gente chega numa Bhaskara? Eu cheguei até aqui, mas daqui, como chego na Bhaskara?*

Ao analisar o cálculo do estudante E3, foi possível perceber que este tinha parado na TMV para intervalo genérico e não havia tomado Δx como um infinitésimo. Percebendo a dificuldade dos estudantes, no quadro, o sinal da $TVI(x)$ foi analisado, construindo um esboço da parábola que a representa, novamente não optando pela fatoração do polinômio.

***PP**: Essa função* (apontando para a TVI) *representa a variação da função e ela é zero para $x = -1$ e para qualquer outro valor de x ela é negativa. Como ela nunca é positiva, então em momento algum ela cresce. Assim, essa função* (apontando para $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$) *é decrescente para $\mathbb{R} - \{-1\}$. Assim, em $x = -1$ temos um ponto crítico que, como a função é sempre decrescente, ele não é nem de máximo nem de mínimo.*

Este encontro terminou com a discussão das ideias anteriormente transcritas sobre pontos críticos e de tarefa de casa ficou a atividade 1 do Momento 5, bem como a letra *b* da atividade 3.

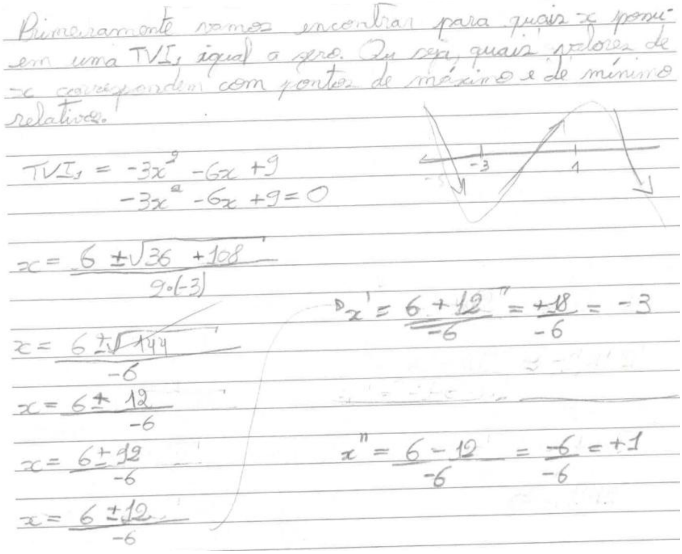
Taxa de variação instantânea de segunda ordem: *4º encontro com o EPM*

O encontro com o EPM ocorreu dia 05 de agosto de 2017 e foram trabalhados os Momentos 4 e 5. Iniciamos com a conferência das respostas do estudante da atividade 3 do Momento 4, anteriormente exposta. A $TVI_1(x)$ foi encontrada corretamente, $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x + 9$, porém o estudante afirmou não ter compreendido a última parte da pergunta *c* relacionada à $TVI_2(x)$. A fim de retomar essas ideias, as atividades 1 e 2 do Momento 4, anteriormente expostas, foram revistas e juntos concluímos que a $TVI_2(x)$ informa a variação da $TVI_1(x)$, ou seja, a concavidade da curva. Para responder a letra b da atividade 3 do Momento 4, o estudante explicou como se organizou.

> ***EPM**: Eu achei os zeros da TVI_1 e daí eu fui testando, valores um pouquinho abaixo e pouquinho acima disso. Eu achei onde ela inverte, onde ela tem um ponto de máximo e peguei um ponto abaixo para ver se ela crescia ou decrescia e depois um acima, o que não era preciso por que se o ponto a baixo crescia, o à cima ia inverter e daí, mais ou menos eu cheguei a isso aqui.*

A figura 20 a seguir apresenta a resolução do EPM e a forma como este organizou seu raciocínio a fim de explicar seu procedimento, revelando o movimento do pensamento do estudante transitando entre o registro gráfico e simbólico para fazer suas conjecturas.

Figura 20: Localização dos pontos críticos da função $y=-x^3-3x^2+9x-3$.



Primeiramente vamos encontrar para quais x possui em uma TVI_1 igual a zero. Ou seja, quais valores de x correspondem com pontos de máximo e de mínimo relativos.

$TVI_1 = -3x^2 - 6x + 9$

$-3x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2 \cdot (-3)}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{-6}$

$x = \frac{6 \pm 12}{-6}$

$x' = \frac{6+12}{-6} = \frac{+18}{-6} = -3$

$x'' = \frac{6-12}{-6} = \frac{-6}{-6} = +1$

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

A fim de concluir a respeito da variabilidade da função, o estudante encontrou os valores de x que zeram a $TVI_1(x)$ ($x = -3$ e $x = 1$) e utilizou valores de x menores que -3, um valor entre -3 e 1 e um maior que 1 para substituir na $TVI_1(x)$, construiu uma tabela com estes valores e, a partir do sinal do resultado, tirou suas conclusões. Assim, para

- $x = -5 \rightarrow TVI_1(-5) = -36$;
- $x = -4 \rightarrow TVI_1(-4) = -15$;
- $x = 0 \rightarrow TVI_1(0) = 9$;
- $x = 2 \rightarrow TVI_1(2) = -15$.

Esta maneira de estudar a $TVI_1(x)$ demonstra a natureza lógica de raciocínio utilizada pelo EPM, fazendo uso de um procedimento pragmático, porém, não inválido, pelo contrário, as distintas formas de solucionar um problema devem ser instigadas. Apesar disso, foi enfatizado o estudo do sinal da função que representa a $TVI_1(x)$ como outro caminho para a análise sem a substituição de valores pontuais.

> ***PP****: Então, tu encontraste a $TVI_1 = -3x^2 - 6x + 9$, analisar o sinal desta função é analisar onde a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 3$ está crescendo, decrescendo e onde a TVI_1 é zero! Isso é uma parábola* (apontando para a TVI_1), *encontrou os zeros da função, os quais são -3 e 1, aí eu tenho duas maneiras de estudar o sinal: fatorando, $y = (-x - 3)(x - 1)$, analisando o sinal de cada função afim e, por fim, multiplicando os sinais; ou esboçando a parábola e analisando o sinal da função quadrática, da parábola. Então, se o sinal da TVI_1 (função quadrática) para $x < -3$ é negativo, a função, para esses valores, decresce; para $-3 < x < 1$, ela cresce e para $x > 1$ ela decresce novamente. Agora é possível afirmar que aqui* (apontando para $x = -3$) *eu tenho que ponto?*
> ***EPM****: Mínimo relativo.*
> ***PP****: E em $x = 1$?*
> ***EPM****: Máximo relativo.*
> ***PP****: Como eu faço para encontrar o valor mínimo relativo? Ou seja, o menor valor que a função assume nesta região* (apontando para valores próximos a $x = -3$)*? E o maior valor?*

Estas questões foram respondidas corretamente pelo estudante, o qual encontrou o ponto onde ocorre o valor mínimo $(-3, -24)$, o valor máximo (1,2) e onde a curva corta eixo y; localizou tais pontos no plano cartesiano e esboçou a curva. Foi evidenciada a existência de três zeros distintos uma vez que o mínimo relativo é negativo e o máximo relativo é positivo e utilizada como exemplo uma curva com valores de máximo relativo e mínimo relativo negativos, o que resulta em um gráfico com somente um intercepto x, ou seja, um zero real.

O diálogo a seguir foi instigado a partir da resolução do estudante, a fim de fazer com que o mesmo refletisse sobre a letra *c* desta atividade.

***PP**: E aí? Essa TVI_1 varia?*
***EPM**: Sim.*
***PP**: Mas como ela varia?*
***EPM**: Conforme a TVI_2.*
***PP**: Então eu calculo a variação da TVI_1... Foi isto que fizeste e o resultado $TVI_2 = -6x - 6$ está correto. O que isso me informa?*(O estudante fica em silêncio, não responde).
***PP**: Vamos pensar juntos... Antes* (se referindo à Atividade 2 do Momento 4) *a TVI_2 deu -2, então, a concavidade era voltada para baixo. Se a TVI_2 tivesse dado um número positivo, a concavidade seria para cima. Só que neste caso não é sempre positiva ou negativa, a TVI_2 varia... Para eu definir a concavidade do gráfico da função, tenho que analisar o sinal da função que representa a TVI_2!*

A partir desse entendimento, resolvemos a letra *c*, na qual concluímos que:

- $TVI_2(-1) = 0$;
- $TVI_2(x) > 0$ para $x < -1$;
- $TVI_2(x) < 0$ para $x > -1$;
- em $x = -1$, tem-se o ponto de inflexão (mudança da concavidade).

Uma questão importante levantada pelo estudante neste momento do diálogo é sobre a necessidade da $TVI_2(x)$ para esboçar o gráfico, demonstrando sua compreensão de tudo que foi estudado até então. Foi dialogado que, para esta função, a $TVI_2(x)$ não é essencial, mas para algumas funções polinomiais do terceiro grau ela será uma informação importante, senão a única.

Na sequência, iniciamos o Momento 5 com a conferência das resoluções das questões feitas em casa pelo estudante. A atividade 1 do Momento 5, a seguir exposta, é explicada por ele no diálogo a seguir.

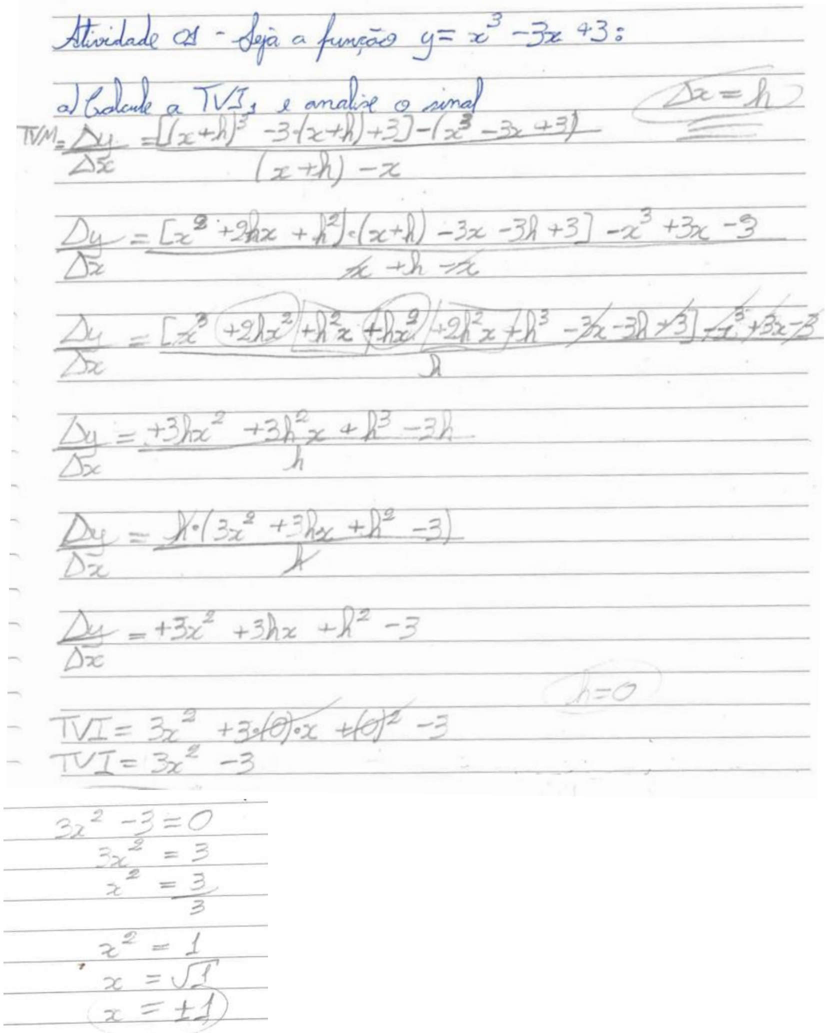
Atividade 1- Seja a função $y = x^3 - 3x + 3$:
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

***EPM**: Encontrei a TMV para um intervalo genérico, usei h para não dar problema com expoentes e daí usa intervalo igual a 0* ($h = 0$) *e encontra os zeros da TVI. Através deles tu sabe para quais valores de x a função possui variação zero, onde inverte o crescimento ou o decrescimento.*
***PP**: Como são as retas tangentes nestes pontos* (se referindo aos pontos onde $TVI_1 = 0$)*?*
***EPM**: Constantes... Daí testei valores abaixo e acima* (se referindo a menores e maiores)*:* $x = -2, -1, 0, 1$ *e* 2.

***PP**: Precisava testar para zero?*
***EPM:** Não... Mas testei.*

Na figura 21, apresentamos o desenvolvimento do estudante para calcular a $TVI_1(x)$ e analisá-la.

Figura 21: Análise da $TVI_1(x)$ da função $y=x^3-3x+3$.



Atividade 01 - Seja a função $y = x^3 - 3x + 3$:

a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal $\Delta x = h$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3 - 3(x+h) + 3] - (x^3 - 3x + 3)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[x^2 + 2hx + h^2]\cdot(x+h) - 3x - 3h + 3] - x^3 + 3x - 3}{\cancel{x} + h - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\cancel{x^3} + 2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3 - \cancel{3x} - 3h + \cancel{3}] - \cancel{x^3} + \cancel{3x} - \cancel{3}}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 3h}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(3x^2 + 3hx + h^2 - 3)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = +3x^2 + 3hx + h^2 - 3$$

$h = 0$

$TVI = 3x^2 + 3\cdot(0)\cdot x + (0)^2 - 3$

$TVI = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{3}$

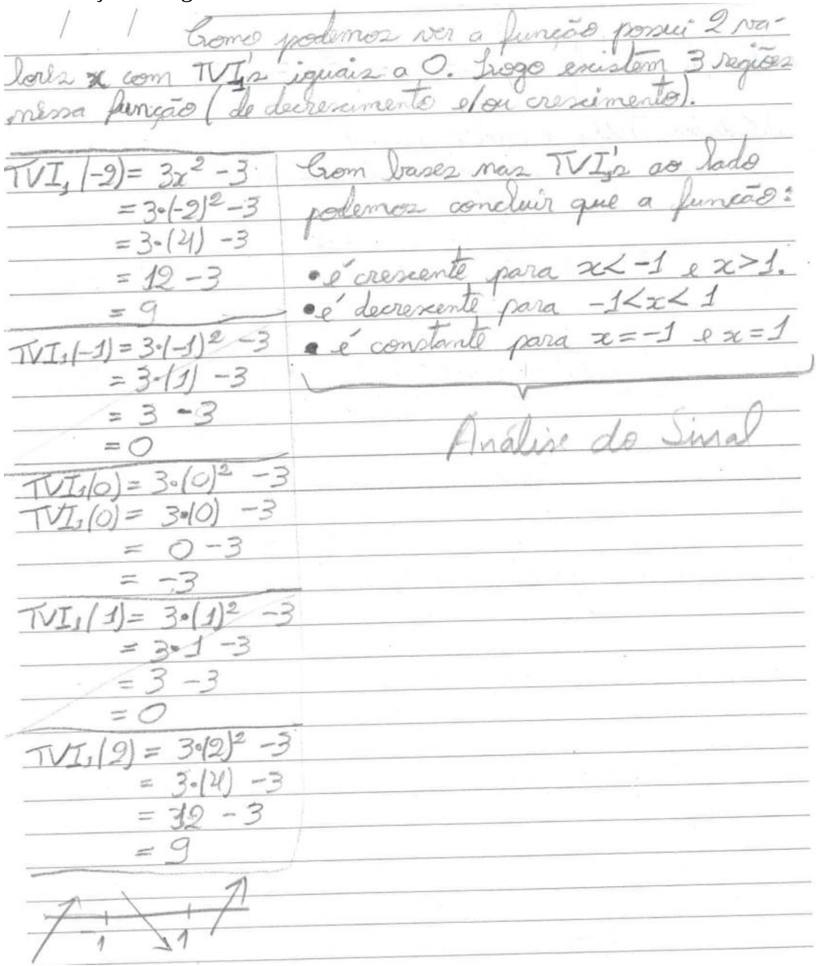
$x^2 = 1$

$x = \sqrt{1}$

$x = \pm 1$

Continua na próxima página.

Continuação da figura 21.



Como podemos ver a função possui 2 valores x com TVI₁'s iguais a 0. Logo existem 3 regiões nessa função (de decrescimento e/ou crescimento).

$TVI_1(-2) = 3x^2 - 3$
$= 3\cdot(-2)^2 - 3$
$= 3\cdot(4) - 3$
$= 12 - 3$
$= 9$

$TVI_1(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 3$
$= 3\cdot(1) - 3$
$= 3 - 3$
$= 0$

$TVI_1(0) = 3\cdot(0)^2 - 3$
$TVI_1(0) = 3\cdot(0) - 3$
$= 0 - 3$
$= -3$

$TVI_1(1) = 3\cdot(1)^2 - 3$
$= 3\cdot 1 - 3$
$= 3 - 3$
$= 0$

$TVI_1(2) = 3\cdot(2)^2 - 3$
$= 3\cdot(4) - 3$
$= 12 - 3$
$= 9$

Com bases nas TVI₁'s ao lado podemos concluir que a função:

- é crescente para $x < -1$ e $x > 1$.
- é decrescente para $-1 < x < 1$
- é constante para $x = -1$ e $x = 1$

Análise do Sinal

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Novamente o estudante utilizou uma tabela com valores de x e as $TVI_1(x)$ relacionadas para esboçar a curva, demonstrando sua compreensão na leitura das unidades significantes da linguagem algébrica em relação ao comportamento da curva em linguagem gráfica sem construir o gráfico. Sobre isso ele esclareceu:

> ***EPM****: Achei mais lógico* (se referindo a usar valores), *mas a análise do sinal da TVI_1 não é difícil, só que não lembrei na hora.*

Analisamos então o sinal da função que representa a $TVI_1(x) = 3x^2 - 3$ a partir da fatoração deste polinômio e chegamos ao mesmo esboço. Após a conferência do resultado da $TVI_2(x)$, o diálogo a seguir expõe a reflexão realizada em torno desta variável e de sua informação a respeito do esboço.

> ***EPM****: A* TVI_2 *deu* $6x$... (fica pensando...).
> ***PP****: A* TVI_2 *é como se comportam as retas tangentes. O coeficiente angular das retas tangentes está crescendo? Decrescendo?*
> ***EPM****: Não pode ser sempre crescente...*
> ***PP****: Não, pois em* $x = -1$*, por exemplo, a* $TVI_2 = -6$.
> ***EPM****: Então preciso fazer o estudo do sinal da* TVI_2*. Bem, isso zera em* $x = 0$*, a* TVI_2 *é positiva para* $x > 0$ *e negativa, pra* $x < 0$*. Em* $x = 0$ *é o negócio onde divide as concavidades que esqueci o nome.*
> ***PP****: Ponto de inflexão.*
> ***EPM****: A concavidade é para baixo para* $x < 0$ *e para cima para* $x > 0$*. Tem duas concavidades. Eu preciso saber quantas vezes a função corta o eixo* x*?*
> ***PP****: Para fazer um esboço interessante, sim!*
> ***EPM****: A função possui um máximo relativo quando* $x = -1$ *e um mínimo relativo para* $x = 1$ *e não possui máximo e mínimo absolutos, pois ela cresce indefinidamente* (apontando para $x > 1$) *e decresce indefinidamente* (apontando equivocadamente para a função em $x < -1$).

Diante disso, o estudante encontrou os pontos $(-1, 5)$ e $(1, 1)$, esboçou a curva e localizou também o ponto de inflexão $(0, 3)$. Na figura 22 apresentamos o cálculo da $TVI_2(x)$, a análise desta e o esboço da curva da função $y = x^3 - 3x + 3$.

Figura 22: Análise da *TVI₂(x)* e esboço da curva da função $y=x^3-3x+3$.

b) Calcule a TVI_2, o que isso significa

$TVI_1 = 3x^2 - 3$ $\qquad h = \Delta x$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x+h)^2 - 3] - (3x^2 - 3)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) - 3] - 3x^2 + 3}{x + h - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\cancel{3x^2} + 6hx + 3h^2 - \cancel{3}] - \cancel{3x^2} + \cancel{3}}{h}$$

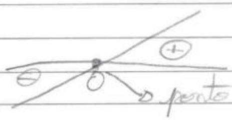
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6hx + 3h^2}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(6x + 3h)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3h \Rightarrow TMV \qquad h = 0$$

$TVI_2 = 6x + 3\cdot(0)$

$TVI_2 = 6x$

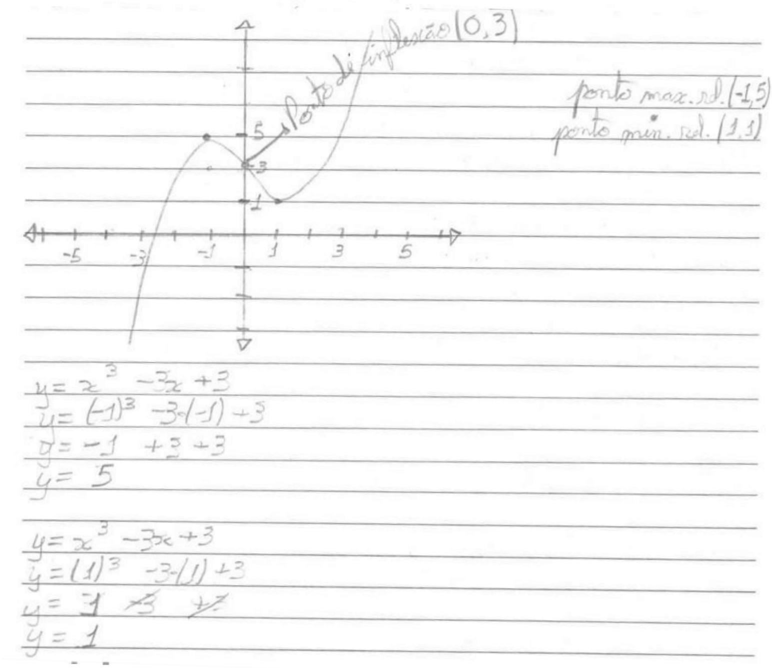


→ ponto de inflexão

os coeficientes angulares da função decrescem (concavidade para baixo) para $x < 0$;
e os coeficientes " " " crescem (concavidade para cima) para $x > 0$.

Continua na próxima página.

Continuação da figura 22.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Na conferência da atividade 2 do Momento 5, anteriormente exposta, resolvida pelo estudante em casa, é verificado, como já aconteceu em outras atividades, um equívoco no cálculo da $TVI_1(x)$. Na atividade 3 do Momento 5, a seguir exposta, o estudante chegou corretamente à expressão $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x - 3$, encontrou o ponto onde a $TVI_1(x)$ é zero, ou seja, $x = -1$, atribuiu um valor menor que -1 e um valor maior e concluiu que para $x < -1$ a função decresce e para $x > -1$ ela decresce também.

Atividade 3- Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 2$:

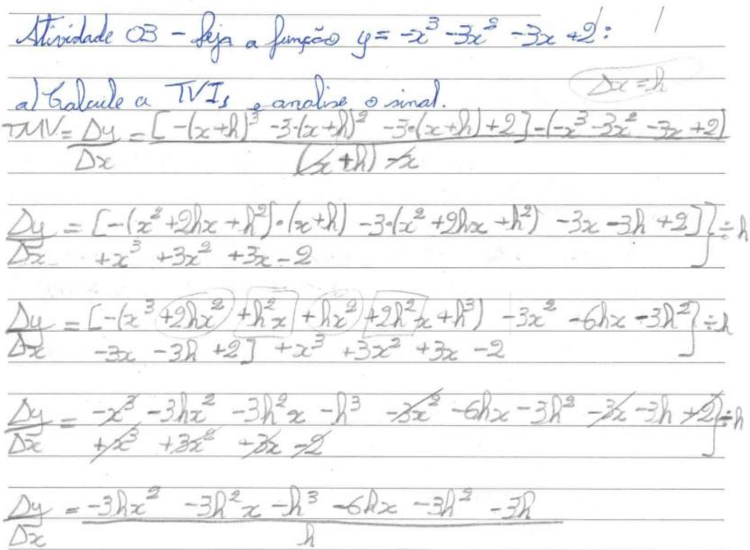
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

***PP**: Qual tua conclusão a partir da TVI_1?*

***EPM**: Que só tem um ponto em que a TVI_1 é zero, ou seja, são duas regiões, uma para cima e outra para baixo* (equivocado, mas fomos adiante).
***PP**: A análise do sinal que você fez está correta, então, fazendo esboço, antes do $x=-1$ a curva decresce e depois continua decrescendo... Será que ela será uma reta?*
***EPM**: Isso não me chamou a atenção quando fiz, mas... Se ela é de grau* 3, *acredito que não.*
***PP**: Não! Pois para ser uma reta ela deveria ter a TVI de qual ordem?*
***EPM**: Constante... De grau zero!*
***PP**: Isso, e ela não tem! Ela tem isso de TVI_1* (apontando para a função $-3x^2-6x-3$), *ou seja, ela vai mudando para valores de x distintos. Só que ela é decrescente antes e depois do $x=-1$. Aí você pergunta, o que isso significa? Significa isso mesmo, mas o decrescimento é diferente em cada ponto. Aqui ela decresce de um jeito* (apontando para um ponto da curva e se referindo à taxa) *aqui ela decresce de outro... Então, como desenhar o gráfico? Neste caso, com a TVI_1 não basta, ela não me diz muita coisa, só que ela decresce antes e depois de $x=-1$. Uma opção é atribuir valores maiores e menores que $x=-1$ e calcular a TVI_1 para saber exatamente a taxa no qual ela decresce.*

A seguir, apresentamos os procedimentos de esboço da curva da função $y=-x^3-3x^2-3x+2$ realizados pelo EPM na atividade 3.

Figura 23: Esboço da curva da função *y=-x*[3]*-3x*[2]*-3x+2*.


Atividade 03 - Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 2$:

a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal. $\Delta x = h$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[-(x+h)^3 - 3\cdot(x+h)^2 - 3\cdot(x+h) + 2] - (-x^3 - 3x^2 - 3x + 2)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [-(x^2+2hx+h^2)\cdot(x+h) - 3\cdot(x^2+2hx+h^2) - 3x - 3h + 2] + x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \div h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [-(x^3 + 2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3) - 3x^2 - 6hx - 3h^2 - 3x - 3h + 2] + x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \div h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cancel{-x^3} - 3hx^2 - 3h^2x - h^3 \cancel{-3x^2} - 6hx - 3h^2 \cancel{-3x} - 3h \cancel{+2} \cancel{+x^3} \cancel{+3x^2} \cancel{+3x} \cancel{-2} \div h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3hx^2 - 3h^2x - h^3 - 6hx - 3h^2 - 3h}{h}$$

Continua na próxima página.

Continuação da figura 23.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(-3x^2 - 3hx - h^2 - 6x - 3h - 3)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3x^2 - 3hx - h^2 - 6x - 3h - 3 \Rightarrow TMV$$

$$TVI_1 = -3x^2 \cancel{-3\cdot(0)x} \cancel{-(0)^2} - 6x \cancel{-3(0)} - 3 \Rightarrow TVI_1$$

$$TVI_1 = -3x^2 - 6x - 3$$

$$+3x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} \qquad x = \frac{-6 \pm 0}{6}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} \qquad x' = \frac{-6 + 0}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{6} \qquad x'' = \frac{-6 - 0}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Como podemos ver a função possui apenas um ponto com $TVI_1 = 0$.

$TVI_1 = -3x^2 - 6x - 3$

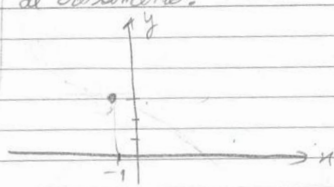
$TVI_1(-2) = -3\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2) - 3$
$= -3\cdot(4) + 12 - 3$
$= -12 \cancel{+12} - 3$
$= -3$

$TVI_1(-1) = -3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) - 3$
$= -3\cdot(1) + 6 - 3$
$= -3 + 6 - 3$
$= 0$

$TVI_1(0) = -3\cdot(0)^2 - 6\cdot(0) - 3$
$= -3\cdot(0) - 0 - 3$
$= -0 - 0 - 3$
$= -3$

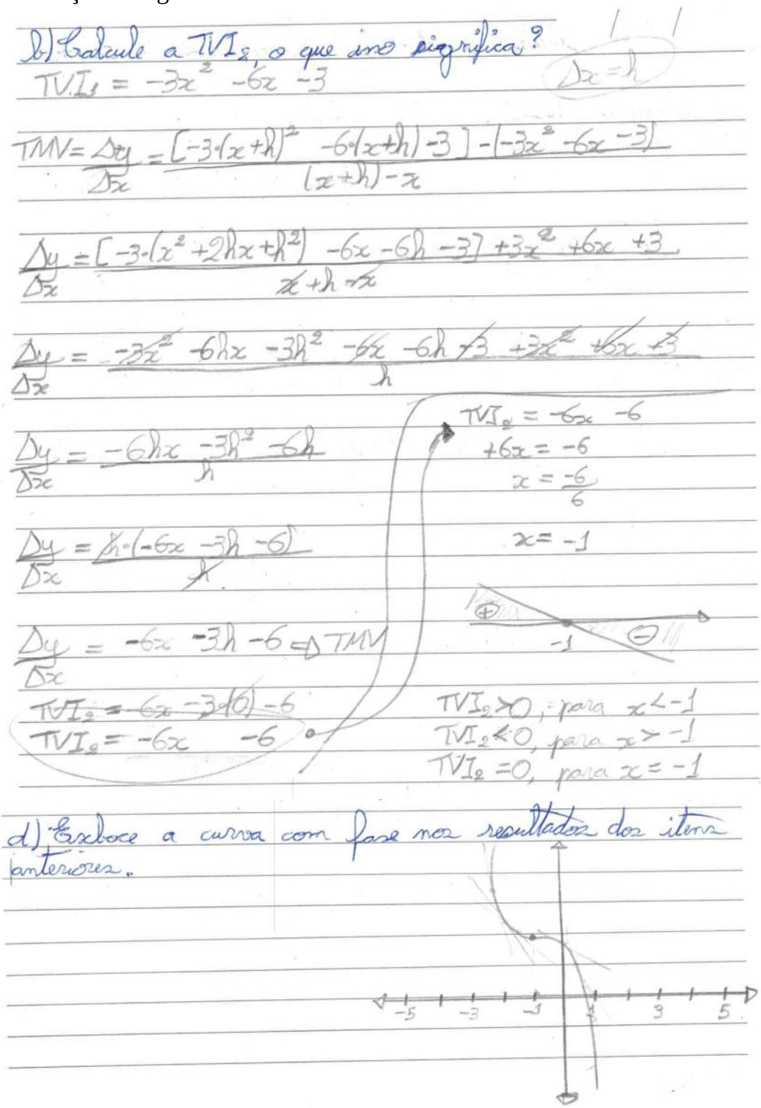
A função $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ é:

- decrescente para $x < -1$ e $x > -1$ (ou ainda $x \neq -1$);
- constante para $x = -1$;
- sem intervalos ou pontos de crescimento.



Continua na próxima página.

Continuação da figura 23.



b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?

$TVI_1 = -3x^2 - 6x - 3$ $\quad \Delta x = h$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[-3\cdot(x+h)^2 - 6\cdot(x+h) - 3] - [-3x^2 - 6x - 3]}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[-3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) - 6x - 6h - 3] + 3x^2 + 6x + 3}{\cancel{x} + h - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{-3x^2} - 6hx - 3h^2 \cancel{-6x} - 6h \cancel{-3} \cancel{+3x^2} \cancel{+6x} \cancel{+3}}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6hx - 3h^2 - 6h}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(-6x - 3h - 6)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -6x - 3h - 6 \Rightarrow TMV$$

~~$TVI_2 = -6x - 3(0) - 6$~~

$TVI_2 = -6x - 6$

$TVI_2 = -6x - 6$

$+6x = -6$

$x = \frac{-6}{6}$

$x = -1$

$\oplus$ $\quad -1 \quad$ $\ominus$

$TVI_2 > 0$, para $x < -1$

$TVI_2 < 0$, para $x > -1$

$TVI_2 = 0$, para $x = -1$

d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Com relação à taxa de variação de segunda ordem, o EPM demonstrou dúvidas.

> ***EPM**: Isso* (apontando para a $TVI_2(x) = -6x - 6$) *me informa como estão variando os coeficientes angulares das retas tangentes, então, para valores de $x < -1$, a curva seria para cima* (se referindo à concavidade)... *Mas é meia concavidade para cima, então podemos dizer que é uma concavidade inteira para cima?*

A fim de esclarecer a dúvida do estudante, foram traçadas retas tangentes para que o estudante visualizasse que para valores $x < -1$ elas possuem coeficientes angulares crescentes e para $x > -1$, decrescentes. Assim, a concavidade é voltada para cima em $x < -1$ e para baixo em $x > -1$.

A atividade 4 do Momento 5, é também um caso particular de função polinomial do 3º grau. O diálogo sobre esta atividade ocorreu após a conferência do resultado encontrado pelo estudante para a $TVI_1(x)$.

> **Atividade 4**- Seja a função $y = x^3 + 3x + 5$:
> a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
> b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
> c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
> d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

> ***PP**: E quando você analisou o sinal da TVI_1, o que aconteceu?*
> ***EPM**: Deu problema, pois não existe raiz de número negativo. Não existe um valor de x onde a TVI_1 é zero. Ainda pode-se concluir que a função é sempre crescente para qualquer ponto ou intervalo escolhido.*
> ***PP**: Isso mesmo, pois sempre a TVI_1 será positiva!*
> ***EPM**: Por que para qualquer valor negativo que tu colocar, quando elevado ao quadrado, dá positivo! E se for zero, tem o $+3$ que torna a TVI_1 também positiva. Então a curva seria mais ou menos isso* (apontando para o gráfico esboçado).
> ***EPM**: A única conclusão com a TVI_1 é que sempre cresce.*
> ***PP**: Isso, nem zero vai ser a TVI_1. Aí você vai para a TVI_2! Por quê? Por que a TVI_1 diz pouca coisa! Só que é crescente!*

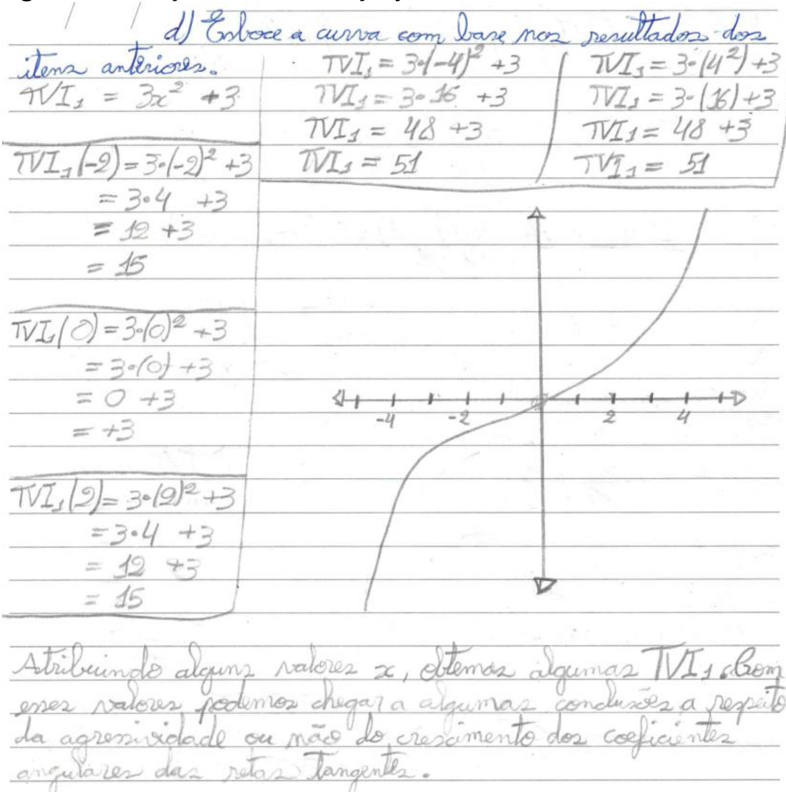
O estudante afirmou que neste exemplo não existem máximos e mínimos e calculou corretamente a $TVI_2(x)$, porém não a utilizou para o esboço do gráfico, ele novamente aplicou valores para x, encontrou as $TVI_1(x)$ referentes e esboçou o gráfico de acordo com a taxa de crescimento.

> ***PP**: Tá... A TVI_1 vai ser sempre positiva. Tu até pode aplicar valores, mas ela vai crescer sempre.*
> ***EPM**: Então... Eu analisei o quanto cresce, mas chutando valores. Tendo a TVI_1 e atribuindo valores mais ou menos estratégicos para x tu mais ou*

menos descobre se ela cresce bastante ou pouco. Ou seja, atribuindo alguns valores de x, obtemos algumas TVI_1. Com esses valores podemos chegar a algumas conclusões a respeito da agressividade ou não do crescimento dos coeficientes angulares das retas tangentes.

Nesta atividade o EPM utilizou o raciocínio de natureza lógica, aplicando valores distintos para x e encontrando o “quanto” a função está variando neste ponto, ou seja, a $TVI_1(x)$, a fim de esboçar o gráfico de forma coerente, conforme a figura 24.

Figura 24: Esboço da curva da função $y=x^3+3x+5$.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Evidenciamos que o procedimento utilizado pelo EPM não invalida sua solução, mas, apesar disso, o caminho de análise do sinal da $TVI_2(x)$ foi reforçado.

> ***PP**: Não está errado teu raciocínio. Tu consegues esboçar sabendo o quanto ela cresce em alguns pontos. Porém, tem outra forma em que não é necessário chutar valores e que pode me dizer diferentes coisas sobre o gráfico.*
> ***EPM**: Que é a TVI_2! Analisar o sinal da TVI_2.* (Após um tempo)... *Então, a $TVI_2 > 0$ para $x > 0$, concavidade voltada para cima e para valores $x < 0$ ela é para baixo.*

Durante este encontro o estudante demonstrou desconforto para calcular a $TVI_1(x)$, provavelmente devido à quantidade de vezes em que errou sinais, questionando se existe algum software ou se o GeoGebra possibilitaria encontrar a $TVI_1(x)$ e verificar seus resultados. Utilizamos então o software GeoGebra e encontramos algumas derivadas, foi explicado ao EPM que “derivada” é o nome que as taxas de variação instantâneas também recebem. A derivada, então, é o comportamento da função com relação à sua variação.

O encontro findou com a retomada da atividade 2 do Momento 5, anteriormente exposta, na qual também foi encontrado erro de sinal no cálculo da $TVI_1(x)$.

5.3.5 Esboço de curvas

Esboço de curvas: *8º encontro com a turma*

Este encontro foi realizado com a turma no dia 12 de dezembro de 2016. Nele, o objetivo foi trabalhar o esboço de curvas com base em tudo que foi abordado nos encontros anteriores. Algumas atividades tinham sido realizadas como tarefa de casa e, sobre isto, uma das estudantes questiona.

> ***E2**: Profe, eu fiquei confusa... Quando solicitava para esboçar a curva, era da função ou da TVI?*

Diante desta dúvida, optou-se por saná-la corrigindo algumas atividades no quadro, iniciando pela atividade 1 do Momento 5.

Atividade 1- Seja a função $y=x^3-3x+3$:

a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores

Analisamos o sinal da $TVI_1(x)$:
- para $x = 1$ e $x = -1$, a $TVI_1(x) = 0$,
- para $-1 < x < 1$, a $TVI_1(x) < 0$, ou seja, a função decresce;
- para $x < -1$ ou $x > 1$ a $TVI_1(x) > 0$, ou seja, cresce.

E, com estas informações o gráfico foi esboçado e concluído que em $x = -1$ tem-se um ponto máximo relativo e em $x = 1$, um ponto mínimo relativo. Os estudantes encontraram os valores máximo e mínimo relativos, localizaram no plano cartesiano e melhoraram o esboço já construído. Passamos então para a correção da atividade 3 do Momento 5.

Atividade 3- Seja a função $y=-x^3-3x^2-3x+2$:
a) Calcule a TVI_1 e analise o sinal.
b) Calcule a TVI_2, o que isso significa?
c) A função possui máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos?
d) Esboce a curva com base nos resultados dos itens anteriores.

Esta atividade também foi realizada no quadro. Inicialmente encontrando e analisando o sinal da $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x - 3$ a partir do esboço da parábola e concluindo que a $TVI_1(x) = 0$, para $x = -1$ e $TVI_1(x) < 0$, para $x \neq -1$. Assim, como a função decresce para valores de $x \neq -1$, foi necessário analisar a concavidade, pois ela decresce variando. Após os estudantes terem encontrado a $TVI_2(x)$, analisamos o sinal desta e esboçamos a curva. Concluímos que esta função não possui máximos e/ou mínimos absolutos nem relativos e que o ponto onde a $TVI_1(x) = 0$, é onde a curva inverte sua concavidade, chamado de ponto de inflexão.

Com base no trabalho realizado, foi solicitado aos estudantes que esboçassem as curvas de algumas funções (letras a, b, e, f e g) do Momento 6. As construções serão apresentadas e discutidas no capítulo sexto.

Esboço de curvas: *5º encontro com EPM*

De tarefa de casa, o EPM esboçou as curvas das funções do Momento 6. Assim, no encontro do dia 09 de setembro de 2017, foram conferidas as construções e foi solicitado que o estudante falasse sobre as ações utilizadas para tais esboços. A seguir, o diálogo sobre o esboço da curva da função $y = 2x^2 - 4x + 3$.

***EPM**: Fui fazendo, encontrei a TMV, daí, sendo o intervalo* (se referindo à Δx ou h, como o estudante preferiu) *zero, encontra-se a TVI_1 e, a partir*

disso, calcula a taxa de variação da taxa de variação, que é a taxa de variação de segunda ordem da função; depois encontra os zeros da função e deu esse gráfico, testei com o GeoGebra e deu mais ou menos parecido. Alguns eu sofri um pouco (se referindo ao esboço de curva de algumas funções).
***PP**: O que você usou para construir o gráfico?*
***EPM**: A TMV, fiz intervalo igual a zero que dá a TVI_1 e depois fiz a TVI_2. Neste caso* (apontando para a função da letra a, *a TVI_1 é uma função afim, então a TVI_2 é fácil. Aí tu acha o vértice com $x = -b/2a$.*
***PP**: Por que o x do vértice é $x = -b/2a$? Onde você usou isso?*
***EPM**: Ahhh não... Eu fiz a TVI_1 e igualei a zero! Neste caso o ponto onde a $TVI_1 = 0$ é o vértice, onde a reta tangente é horizontal.*
***PP**: Isso, nos pontos onde a TVI_1 é zero, temos pontos críticos. No caso da parábola, esse ponto é também chamado de vértice, mas em outras funções é ponto máximo ou mínimo, relativo ou absoluto.*
***EPM**: Quando $x = 0$ a função corta o y no +3.*
***PP**: Esse estudo do sinal da TVI_1 por quê?*
***EPM:** Para saber o que está acontecendo antes do $x = 1$, se os coeficientes... Se as retas... Se a parábola está crescendo ou decrescendo. Então, antes* (se referindo a $x < 1$) *do $x = 1$, ela decrescia, no $x = 1$ ela é constante e depois* (se referindo a $x > 1$) *do $x = 1$, ela crescia.*
***PP**: Tu conseguiu fazer esse raciocínio para esboçar as curvas das funções?*
***EPM**: Deu para fazer... A TVI_2 eu demorei para entender... Fazia a partir da receita, depois disso, compreendi que tem o ponto de inflexão e tal...*
***PP**: Então, fazendo o esboço você compreendeu para que serve a TVI_2?*
***EPM**: Sim... Até a ideia de infinitésimos... No começo, tá, aceitei, é um intervalo, beleza, mas depois, pensando melhor, tu pega um intervalo pequeniníssimo para depois mais para frente tu dizer que ele é zero, daí te dá a taxa de variação naquele ponto! Por que se tu pegar, assim, e querer calcular sem intervalo, direto exatamente em um ponto, não tem como fazer...Se tu pensa primeiro naquele espaçozinho lá e depois diz que ele é zero!*
***PP**: Muito bem, conseguiste fazer todas?*
***EPM**: Sim, mas algumas o gráfico dá fora por que dá problema para achar o zero da TVI_1.*

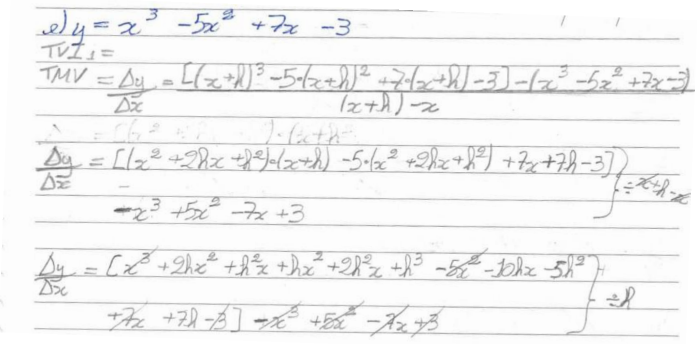
O próximo diálogo exposto é sobre o esboço da curva da função $y = -2x^2 + 18$.

***EPM**: Então, a função é $y = -2x^2 + 18$, primeiro achei a TVI_1, mas para chegar nela encontrei a TMV para um intervalo $[x, x + h]$, daí cheguei em $TMV = -4x + 4h$, como tu quer saber a TVI_1 em um ponto, tu vai dizer que $h = 0$, ou seja, $TVI_1 = -4x$. Como isso é uma função afim, tu conclui que a taxa de variação desta reta* (se referindo a $-4x$), *que é a taxa de variação de segunda ordem da função $y = -2x^2 + 18$, é -4!*
***PP**: Ok! Tu encontrou a TVI_1 e a TVI_2, e daí, para construir o gráfico, o que tu fizeste?*

EPM*: Tá, primeira coisa encontrar os pontos críticos, máximos e mínimos... Neste caso, como é uma parábola voltada para baixo* (conclusão devido ao coeficiente que acompanha o x^2), *ela terá somente ponto de máximo. A partir da TVI_1, que é $-4x$ tu encontra o valor de x em que a TVI_1 é zero, ou seja, em que a reta tangente é horizontal . Então, fazendo isso, em $x = 0$ tem-se o vértice, localizei este ponto no plano cartesiano e, se não me engano, encontrei os zeros da função* (se referindo à função $y = -2x^2 + 18$).
PP*: E você não estudou o sinal da TVI_1?*
EPM*: Não...*
PP*: Pelo que estamos conversando nos últimos encontros, isso aqui* (apontando para a TVI_1) *me informa a variação da função... Como a função está variando... Então, estudar o sinal, é encontrar para quais valores de x a função cresce, decresce e é constante.*
EPM*: Então, quando $x = 0$ a $TVI_1 = 0$, para valores de $x < 0$, a TVI_1 é positiva e para $x > 0$, a TVI_1 é negativa, ou seja, concavidade voltada para baixo (equivocando-se).*
PP*: Mas a TVI_1 não informa se a função cresce ou decresce?*

Diante destas questões, retomamos algumas ideias sobre o significado da $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$. Ao analisar os esboços feitos pelo EPM, percebeu-se que este não utilizou o estudo do sinal da $TVI_1(x)$, apenas utilizou a $TVI_1(x)$ para encontrar os pontos máximos e mínimos, e para o esboço efetivamente, o EPM utilizou o ponto de inflexão e análise da $TVI_2(x)$. A seguir, a construção para a função da letra *e*, $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

Figura 25: Esboço da curva da função *y=x*^{3}*-5x*^{2}*+7x-3*.


e) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
$TVI_1 =$
$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3 - 5\cdot(x+h)^2 + 7\cdot(x+h) - 3] - (x^3 - 5x^2 + 7x - 3)}{(x+h) - x}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [(x^2+2hx+h^2)\cdot(x+h) - 5\cdot(x^2+2hx+h^2) + 7x + 7h - 3] - x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \div x+h-x$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [x^3 + 2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3 - 5x^2 - 10hx - 5h^2 + 7x + 7h - 3] - x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \div h$

Continua na próxima página.

Continuação da figura 25.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3 - 10hx - 5h^2 + 7h}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(2x^2 \boxed{+hx} + x^2 \boxed{+2hx} + h^2 - 10x - 5h + 7)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 10x - 5h + 7$$

$$TVI_1 = 3x^2 - 10x + 7$$

$$TVI_1 = 3x^2 - 10x + 7$$

$$3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot(3)\cdot(7)}}{2\cdot(3)} \qquad x = \frac{10 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} \qquad x' = \frac{10+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \simeq 2{,}\bar{3}$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{16}}{6} \qquad x'' = \frac{10-4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

pontos de crítico (ponto de max ou min.)

$$y = 3x^2 - 10x + 7$$

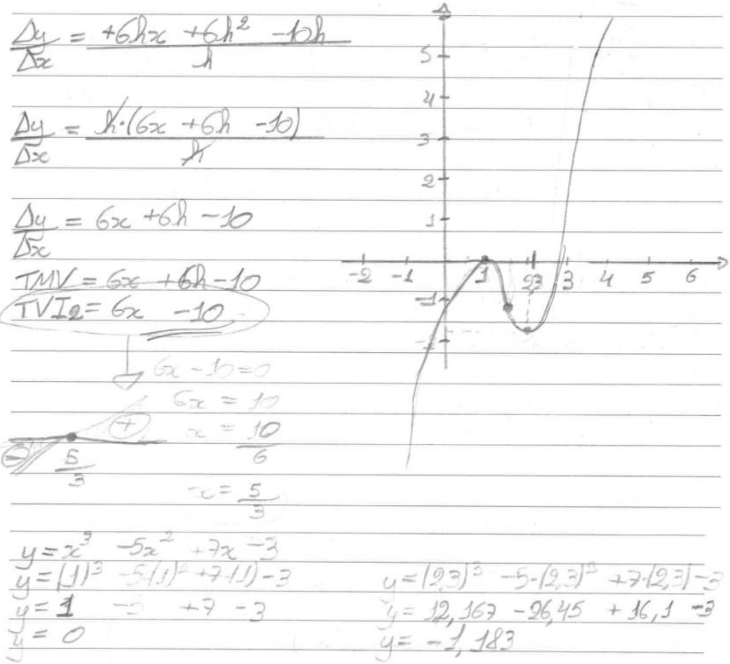
$$TVI_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x+h)^2 - 10\cdot(x+h) + 7] - (3x^2 - 10x + 7)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) - 10x - 10h + 7 - 3x^2 + 10x - 7}{\cancel{x} + h - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{3x^2} + 6hx + 6h^2 - \cancel{10x} - 10h \cancel{+7} \cancel{-3x^2} \cancel{+10x} \cancel{-7}}{h}$$

Continua na próxima página.

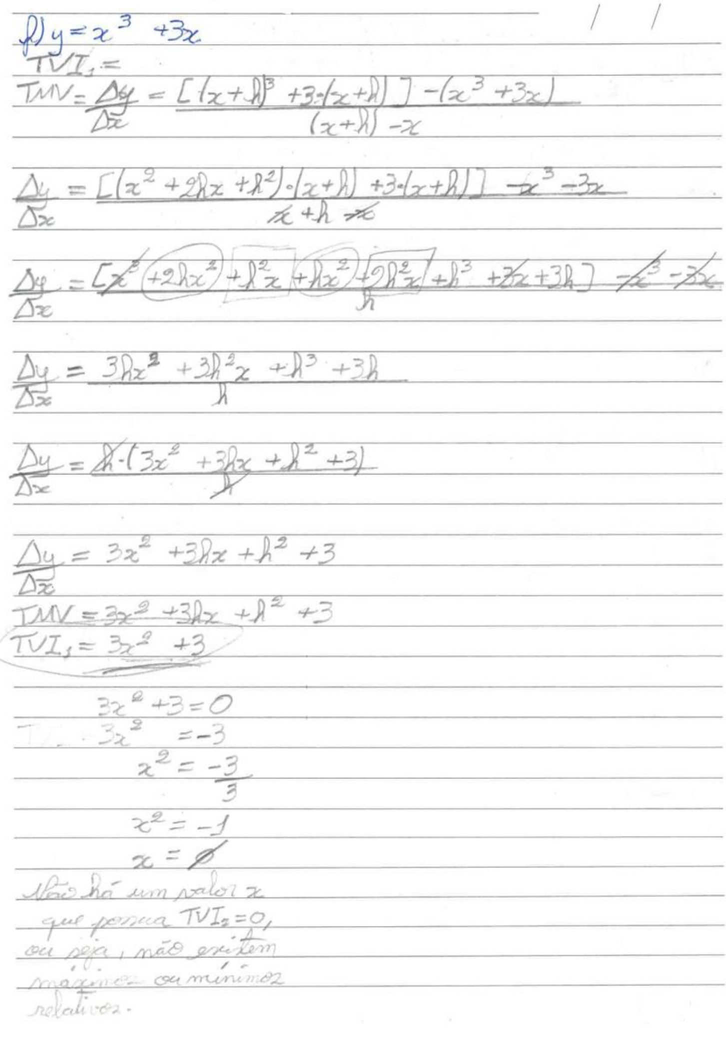
Continuação da figura 25.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

As próximas construções do EPM que apresentamos são esboços das funções das letras f, $y = x^3 + 3x$, e g, $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$, do Momento 6. Na função da figura 26, a $TVI_1(x)$ não possui raízes reais, então, necessariamente, o esboço é realizado pela análise da $TVI_2(x)$. No caso da função da figura 27, o EPM não analisou a variabilidade e sim a concavidade a fim de esboçar a curva.

Figura 26: Esboço da curva da função *y=x*^{3}*+3x*.



f) $y = x^3 + 3x$

$TVI_1 =$

$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3 + 3\cdot(x+h)] - (x^3 + 3x)}{(x+h) - x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x^2 + 2hx + h^2)\cdot(x+h) + 3\cdot(x+h)] - x^3 - 3x}{\cancel{x} + h \cancel{-x}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\cancel{x^3} + 2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3 + \cancel{3x} + 3h] \cancel{-x^3} \cancel{-3x}}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 3h}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(3x^2 + 3hx + h^2 + 3)}{\cancel{h}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3hx + h^2 + 3$

$TMV = 3x^2 + 3hx + h^2 + 3$

$TVI_1 = 3x^2 + 3$

$3x^2 + 3 = 0$

$3x^2 = -3$

$x^2 = -\frac{3}{3}$

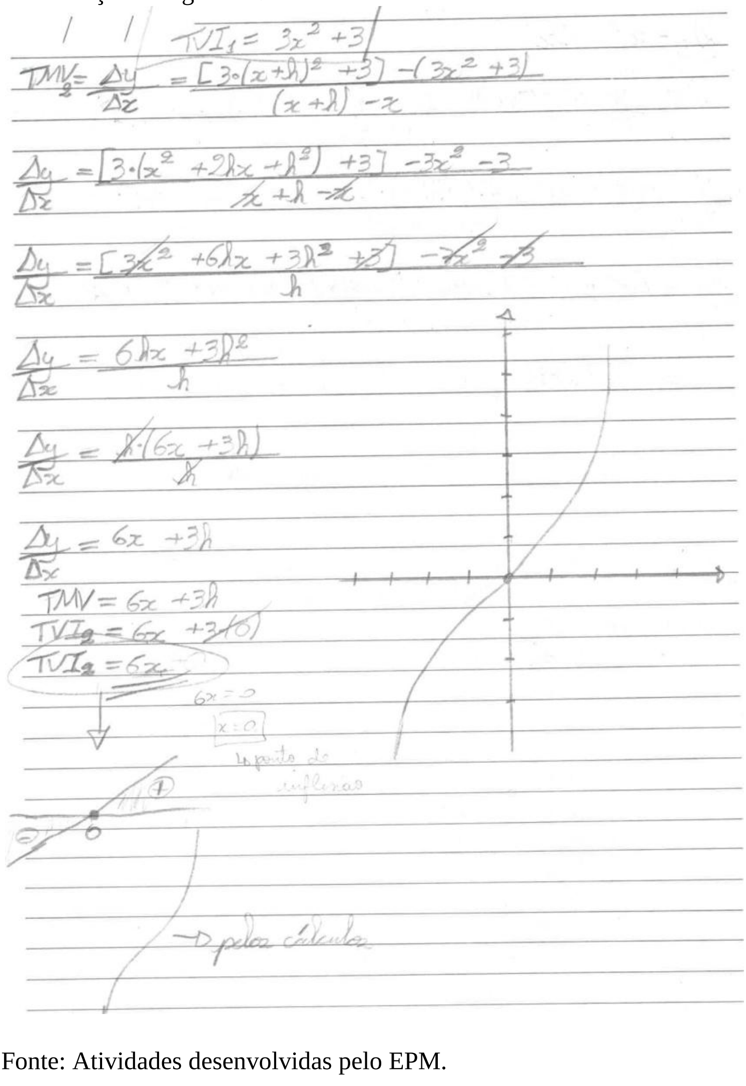
$x^2 = -1$

$x = \emptyset$

Não há um valor x que possua $TVI_1 = 0$, ou seja, não existem máximos ou mínimos relativos.

Continua na próxima página.

Continuação da figura 26.



$$TVI_1 = 3x^2 + 3$$

$$TMV_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x+h)^2 + 3] - (3x^2+3)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) + 3] - 3x^2 - 3}{\cancel{x} + h - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\cancel{3x^2} + 6hx + 3h^2 + \cancel{3}] - \cancel{3x^2} - \cancel{3}}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6hx + 3h^2}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(6x + 3h)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3h$$

$$TMV = 6x + 3h$$

$$TVI_2 = 6x + 3(0)$$

$$TVI_2 = 6x$$

$$6x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

ponto de inflexão

(+) (−) 0

pelos cálculos

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Figura 27: Esboço da curva da função *y=-x*^{3}*+6x*^{2}*-12x-3*.

g) $y=-x^3+6x^2-12x-3$

$TVI_1 =$

$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3+6\cdot(x+h)^2-12\cdot(x+h)-3]-(-x^3+6x^2-12x-3)}{(x+h)-x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left\{ [-(x^2+2hx+h^2)\cdot(x+h)+6\cdot(x^2+2hx+h^2)-12x-12h-3] +x^3-6x^2+12x+3 \right\} \div (x+h-x)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left\{ [\cancel{-x^3} -2hx^2 \boxed{-h^2x} -hx^2 \boxed{-2h^2x} -h^3 \cancel{+6x^2} +12hx +6h^2 \cancel{-12x} -12h \cancel{-3}] \cancel{+x^3} \cancel{-6x^2} \cancel{+12x} \cancel{+3} \right\} \div h$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3hx^2 -3h^2x -h^3 +12hx +6h^2 -12h}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(-3x^2 -3hx -h^2 +12x +6h -12)}{\cancel{h}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3x^2 -3hx -h^2 +12x +6h -12 = TMV$

$TVI_1 = -3x^2 -3(0)\cdot x -(0)^2 +12x \cancel{+6(0)} -12$

$TVI_1 = -3x^2 +12x -12$

$-3x^2 +12x -12 = 0$

A função possui um único ponto cuja TVI_1 seja 0, $(x=2)$

$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 -4\cdot(-3)\cdot(-12)}}{2\cdot(-3)}$

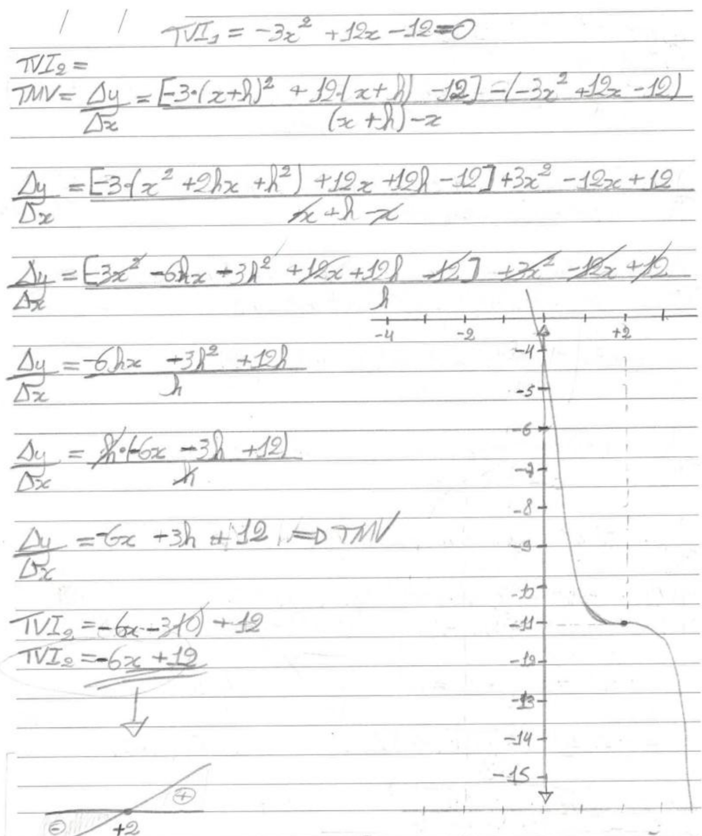
$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{-6}$

$x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{-6}$ $\qquad x' = \frac{-12+0}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$

$x = \frac{-12 \pm 0}{-6}$ $\qquad x'' = \frac{-12-0}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$

Continua na próxima página.

Continuação da figura 27.



$TVI_1 = -3x^2 + 12x - 12 = 0$

$TVI_2 =$

$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[-3\cdot(x+h)^2 + 12\cdot(x+h) - 12] - (-3x^2 + 12x - 12)}{(x+h) - x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[-3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) + 12x + 12h - 12] + 3x^2 - 12x + 12}{\cancel{x} + h \cancel{-x}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\cancel{-3x^2} - 6hx - 3h^2 + \cancel{12x} + 12h \cancel{-12}] \cancel{+3x^2} \cancel{-12x} \cancel{+12}}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6hx - 3h^2 + 12h}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(-6x - 3h + 12)}{\cancel{h}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -6x - 3h + 12 \Rightarrow TMV$

$TVI_2 = -6x - 3(0) + 12$

$TVI_2 = -6x + 12$

+2

ponto de inflexão

$y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$

$y = -(+2)^3 + 6\cdot(+2)^2 - 12\cdot(+2) - 3$

$y = -8 + 24 - 24 - 3$

$y = -11$

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Além do trabalho do Momento 6 realizado, foi solicitado que, como tarefa de casa, o EPM esboçasse curvas de outras funções, expostas mais adiante. Finalizando o encontro, o EPM questionou como eu conferia as $TVI(x)$ tão rapidamente. Foram expostas então algumas regras de derivação.

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = c.x \rightarrow f'(x) = c$$

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$$
$$f(x) = c.x^n \rightarrow f'(x) = c.n.x^{n-1}$$

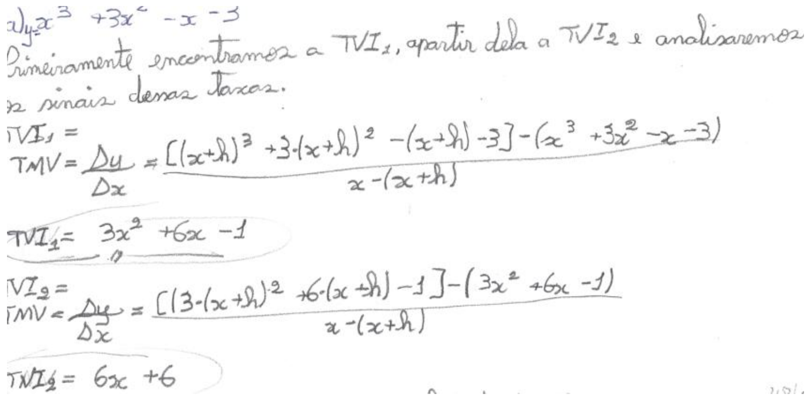
Esboço de curvas: *6º encontro com o EPM*

O último encontro da sequência didática com o estudante do Programa Mentores ocorreu dia 27 de setembro de 2017 nas dependências da UFFS para conferir e discutir sobre o esboço da curva das funções a seguir.

a) $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$
b) $y = -2x^3 - 2x^2 - 24x$
c) $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 3$
d) $y = x^3 + 6x - 3$
e) $y = -x^2 + x + 6$
f) $y = 3x^2 - 6x + 3$
g) $y = x^2 + x + 1$

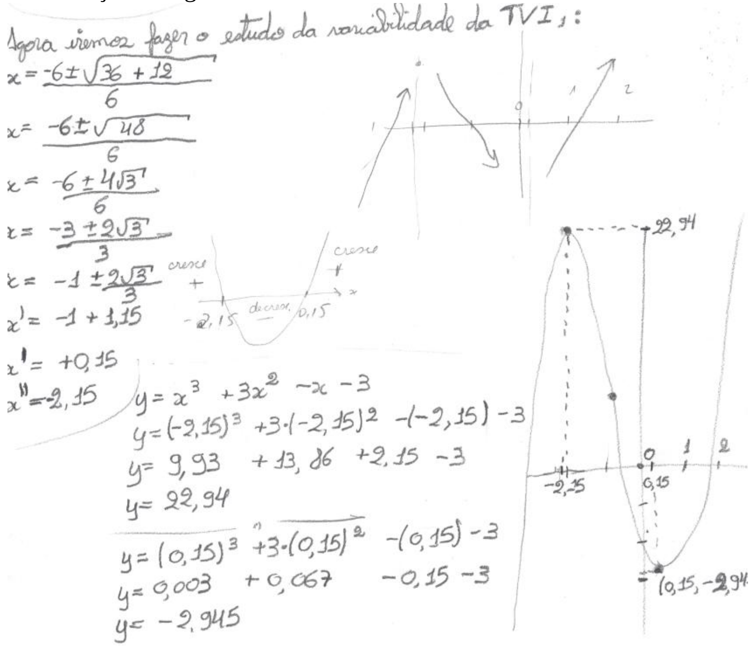
Nas construções, o EPM encontrou a $TVI_1(x)$ e a $TVI_2(x)$ com as regras de derivação apresentadas a ele no encontro anterior. Na figura 28 apresentamos o caminho percorrido pelo EPM para esboçar a curva da função $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Figura 28: Esboço da curva da função *y=x*^{3}*+3x*^{2}*-x-3*.


a) $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$
Primeiramente encontramos a TVI_1, apartir dela a TVI_2 e analisaremos os sinais dessas taxas.
$TVI_1 =$
$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3 + 3\cdot(x+h)^2 - (x+h) - 3] - (x^3 + 3x^2 - x - 3)}{x - (x+h)}$
$TVI_1 = 3x^2 + 6x - 1$
$TVI_2 =$
$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(3\cdot(x+h)^2 + 6\cdot(x+h) - 1] - (3x^2 + 6x - 1)}{x - (x+h)}$
$TVI_2 = 6x + 6$

Continua na próxima página.

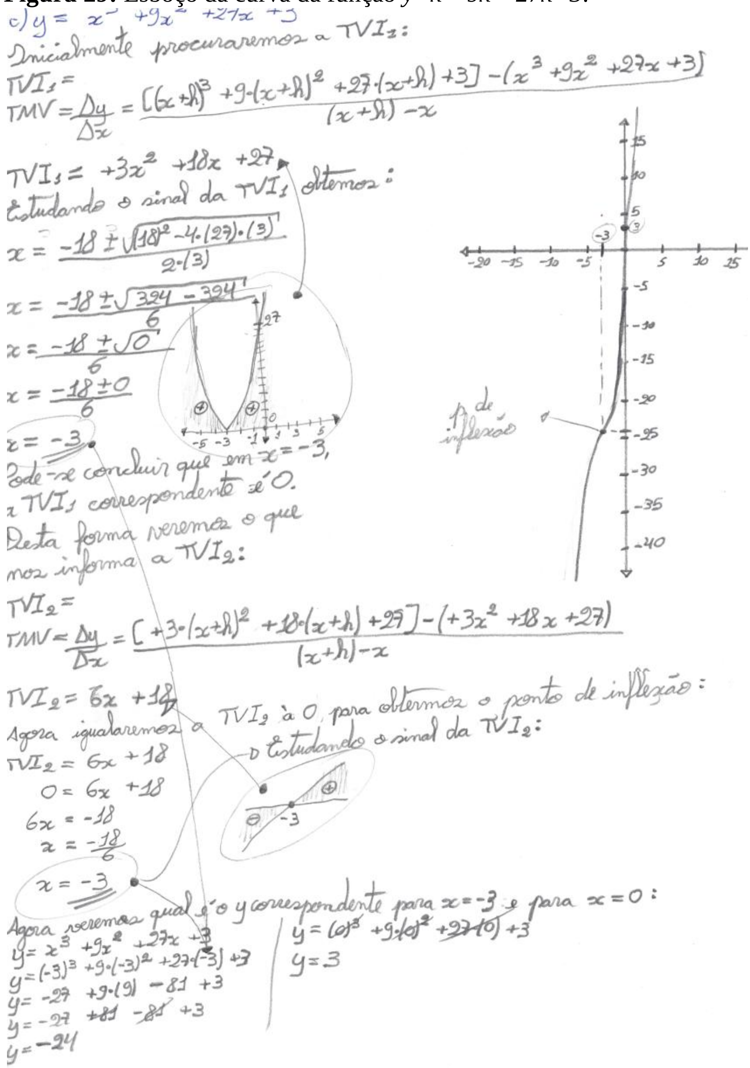
Continuação da figura 28.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Para o esboço da função da letra c, $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 3$, o EPM demonstrou dúvidas e cometeu equívocos ao estudar o sinal da $TVI_1(x)$, não concluindo que a função é crescente para valores de $x \neq -3$. Contudo, isso não o impediu de esboçar corretamente o gráfico, se baseando apenas e novamente, na $TVI_2(x)$, conforme figura 29.

Figura 29: Esboço da curva da função $y=x^3+9x^2+27x+3$.

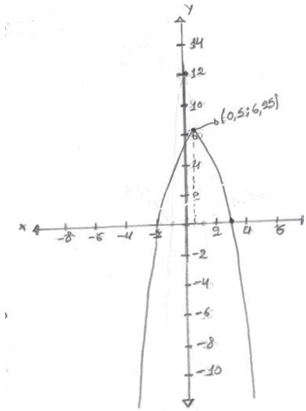


Fonte: Atividades desenvolvidas pelos EPM.

Foi solicitado que o estudante explicasse seu procedimento para o esboço da curva da função $y = -x^2 + x + 6$.

> ***EPM**: Já dá pra dizer que é uma parábola com concavidade voltada para baixo, mas enfim, vamos ver o que acontece a partir das TVI. Pela regra,*

$TVI_1 = -2x + 1$, daí encontramos o valor de x que possui TVI_1 igual a zero que vai ser $x = 1/2$. Então a TVI_1 é uma função afim, ela corta eixo x em ½, isso significa que nesse ½ está o ponto crítico máximo. Então, para valores menores que $x = 1/2$, a função é crescente, para valores maiores, ela decresce e tem um ponto máximo em $x = 1/2$. Vamos para a TVI_2 que é -2. Aí eu busquei a ordenada para abscissa igual a ½ e encontrei o ponto máximo da curva $(1/2, 25/4)$.
***PP**: O que significa a TVI_2 ser -2?*
***EPM**: Que a concavidade da curva é sempre voltada para baixo. Aí eu esbocei a curva e ainda calculei os zeros da função pra o gráfico ficar melhor.*



O estudante continuou explicando seus esboços, frisando que, para funções polinomiais do segundo grau, encontrar a $TVI_2(x)$ não é fundamental, pois a $TVI_1(x)$ já dá ideia da concavidade.

Antes do término do encontro, iniciamos uma discussão sobre a possibilidade de seguir caminho alternativo utilizado para esboçar curvas de funções polinomiais, para outras funções trabalhadas no EM.

***PP**: Será possível utilizar essas ideias para esboçar curvas da função seno e cosseno?*

Percebendo o interesse do estudante, continuamos.

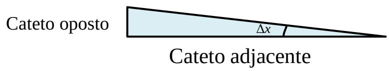
***PP**: Então, quando você calcular a TMV para um intervalo $[x, x + \Delta x]$ para a função $y = sen\, x$, tem-se*

$$TMV = \frac{sen(x + \Delta x) - sen\, x}{\Delta x}.$$

Utilizando
$sen(x + \Delta x) = sen\, x. cos\, \Delta x + \ sen\, \Delta x. cos\, x,$
tem-se

$$TMV = \frac{sen\ x. cos\ \Delta x + \ sen\ \Delta x. cos\ x - sen\ x}{\Delta x}$$

Mesmo percebendo lacunas com relação a conceitos de trigonometria, continuamos a análise de $cos\ \Delta x$ e $sen\ \Delta x$, levando em conta que Δx é um infinitesimal. A ideia geométrica de seno e cosseno foi utilizada a partir do triângulo retângulo.



$$sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} \qquad \text{e} \qquad cos\ \Delta x = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa}$$

***PP**: Sendo assim, $cos\ \Delta x = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa} = 1$ pois o cateto adjacente e a hipotenusa são infinitamente próximos. Para analisar o $sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$ é preciso ressaltar que Δx é um infinitésimo, assim, o cateto oposto também será um infinitésimo e dividido pela hipotenusa, resulta em um infinitésimo.*

***EPM**: Sim, se tu pensar em pegar um pedacinho bem pequeno e dividir em 10 partes, o resultado da divisão é ainda menor!*

***PP**: Desta forma, concluímos que $sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} = \Delta x$ e, assim,*

$$TVI_1 = \frac{sen\ x.1 + \Delta x. cos\ x - sen\ x}{\Delta x}$$

$$TVI_1 = \frac{\Delta x. cos\ x}{\Delta x}$$

$$TVI_1 = cos\ x.$$

No caso da função $y = cos\ x$, a análise é análoga, a TMV para um intervalo $[x, x + \Delta x]$ é

$$TMV = \frac{cos(x + \Delta x) - cos\ x}{\Delta x}.$$

Utilizando

$cos(x + \Delta x) = cos\ x. cos\ \Delta x - \ sen\ x. sen\ \Delta x$, tem-se

$$TMV = \frac{cos\ x. cos\ \Delta x - \ sen\ x. sen\ \Delta x - cos\ x}{\Delta x}$$

Sendo $cos\ \Delta x = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa} = 1$ e $sen\ \Delta x = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} = \Delta x$, então, $TVI_1 = -sen\ x$.

A análise do sinal das $TVI_1(x)$ é que possibilitou pensar a variação da função seno e cosseno e esboçar as curvas. A discussão sobre funções trigonométricas não foram ampliadas nem aprofundadas.

5.3.6 Síntese das atividades desenvolvidas nas sequências didáticas

Apresentamos a seguir, de forma geral e resumidamente, as atividades desenvolvidas nos encontros realizados com os estudantes das turmas de terceiro ano da escola estadual de Erechim, RS, na sequência didática.

Tabela 31 - Atividades desenvolvidas na sequência didática com a turma.

Encontro	Descrição das atividades desenvolvidas
19/10/2016	- Explicação sobre o termo de compromisso e assinatura dos pais. - Apresentação da metodologia de trabalho dos encontros. - Coleta de e-mail e número de telefone dos estudantes para combinar dias e horários das aulas. - Exposição resumida sobre representação gráfica e algébrica de funções: retas, taxa de variação, coeficiente angular. - Resolução da atividade 1 do M1: retomada de elementos de funções (crescimento, decrescimento, domínio, imagem, interceptação nos eixos coordenados, variável dependente e independente); estudo do sinal de uma função a partir somente do gráfico; explicação de valor máximo e mínimo, relativo e absoluto. - Estudantes participativos, porém com inúmeras dificuldades. - Do planejamento, só foi possível resolver a atividade 1, as outras ficaram para o próximo encontro.
28/10/2016	- Estudo do sinal de funções a partir do gráfico e da expressão algébrica. - Resolução das atividades 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 do planejamento do M1.
04/11/2016	- Resolução da atividade 1 do M2: análise, a partir do gráfico, da variabilidade da função, ou seja, dos intervalos de crescimento e decrescimento, compreensão e cálculo da taxa média de variação em diferentes intervalos. - Resolução da atividade 2 do M2: cálculo de taxa média de variação de uma função afim a partir da expressão algébrica. Compreensão e cálculo da TMV genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$. - Resolução da atividade 3 do M2: cálculo de taxa média de variação de uma função quadrática a partir da expressão algébrica. Compreensão e cálculo da taxa média de variação genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$.
09/11/2016	- Resolução da atividade 4 do M2: cálculo de TMV de uma função polinomial do 3º grau a partir da expressão algébrica. - Compreensão e cálculo da TMV genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$. - Resolução e entrega, pelos estudantes, em duplas, das atividades 5, 6, 7 e 8 do M2.
16/11/2016	- Trabalho com a TMV para intervalos cuja diferença é um infinitésimo Δx. - Resolução da atividade 4 do M3: a partir da expressão algébrica de uma função quadrática, cálculo da TMV para intervalos infinitamente próximos para a compreensão da taxa de variação instantânea em um ponto específico; compreensão de taxa de variação instantânea nula; compreensão de infinitésimo; cálculo da $TVI(x)$ genérica. - Estudantes resolveram em duplas e entregaram a atividade 2 do M4: $TVI(x)$ de uma função quadrática a partir da TMV em um intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Encontro	Descrição das atividades desenvolvidas
23/11/2016	- Retomada de aspectos importantes que envolvem a atividade 2 do M4: $TVI(x)$ de uma função quadrática a partir da TMV em um intervalo $[x, x+\Delta x]$ e elaboração de conjecturas a respeito do gráfico da referida função com base na $TVI(x)$. - Resolução da atividade 3 do M4: $TVI(x)$ de uma função polinomial do 3º grau a partir da TMV em um intervalo $[x, x+\Delta x]$ e elaboração de conjecturas a respeito do gráfico da referida função com base na $TVI(x)$.
07/12/2016	- Compreensão da concavidade e relação com a taxa de variação instantânea. - a $TVI_1(x)$ e os pontos críticos (máximos e mínimos). - Variabilidade a partir do estudo do sinal da função. - $TVI_2(x)$ e os pontos de inflexão. - Esboço do gráfico da função quadrática e polinomial do 3º grau a partir das atividades 2 e 3 do M4. - Resolução da atividade 3 do M5: cálculo da $TVI_1(x)$, encontrar os pontos críticos se existirem, neste caso não existem; cálculo da $TVI_2(x)$ para analisar a concavidade e encontrar o ponto de inflexão, se existir, neste caso, existe; por fim, esboçar o gráfico da função polinomial de 3º grau. - Estudantes resolveram e entregaram atividade 1 do M5, a qual envolve o esboço do gráfico de uma função polinomial do 3º grau.
11/12/2016	- Sanadas dúvidas da atividade 1 do M5. Os estudantes apresentaram muita dificuldade no cálculo da TMV da função para um intervalo $[x, x+\Delta x]$. - Resolução da atividade 3 do M5: esboçar o gráfico de uma função polinomial do 3º utilizando a concavidade. - Foram esboçadas as curvas *a*, *b*, *e*, *f* e *g* das atividades planejadas no M6.

Fonte: Os autores.

Ressaltamos as dificuldades dos estudantes no estudo do sinal das funções afim e quadrática (Momento 1) e no cálculo da taxa média de variação genérica em um intervalo $[x, x+\Delta x]$ (Momento 2), o que fez com que os seis momentos fossem trabalhados em 8 encontros.

A seguir, a tabela síntese dos encontros com o estudante do Programa Mentores.

Tabela 32 - Atividades desenvolvidas na sequência didática com o estudante do Programa Mentores.

Encontro	Descrição das atividades desenvolvidas
13/05/2017	- Explicação da metodologia de trabalho, datas e duração dos encontros. - Explicação do termo de compromisso. - Ideias gerais sobre funções, representação gráfica e algébrica, domínio e imagem. - Resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, sobre funções. - Estudo do sinal de funções. - Conferência das atividades do M1,resolvidas em casa pelo estudante.

Encontro	Descrição das atividades desenvolvidas
14/06/2017	- Conferência e discussão das atividades 1, 2, 3, 4, 6 e 7 do M2. - Velocidade média e TMV. - Compreensão da TMV e da $TVI(x)$ - intervalo infinitesimal. - Variabilidade de funções afim, quadrática e polinomial do 3º grau. - Vértice de uma parábola e $TVI(x) = 0$. - Relação entre crescimento e decrescimento de uma curva e as inclinações das retas tangentes à curva – pontos mínimos e máximos $\rightarrow TVI(x) = 0 \rightarrow$ reta tangente horizontal. - Velocidade instantânea e $TVI(x)$. - Encaminhamento da tarefa de casa: refletir e resolver as atividades do M3 e as atividade 1 e 2 do M4.
08/07/2017	- Conferência e discussão das atividades 3 e 5 do M3. - Coeficiente angular de reta secante à curva e TMV de uma função. - Elaboração de conjecturas a respeito da $TVI(x)$. - Noção de infinitésimos. - $TVI(x)$ e retas tangentes – $TVI(x) = 0 \rightarrow$ reta tangente horizontal. - Discussão sobre a possibilidade de encontrar a lei da função a partir do gráfico apenas ou da $TVI(x)$ e sobre a existência de regularidades nos gráficos relacionadas ao grau do polinômio (dúvidas do estudante). - Utilização do GeoGebra para esboço de gráficos e encontrar/visualizar a $TVI(x)$ (derivada) de uma função. - Introdução da ideia de taxa de variação instantânea de ordem 2 – $TVI_2(x)$.
05/08/2017	- Retomadas as atividades 1 e 2 do M4. - Discussão da atividade 3 do M4 e das atividades 1, 2 e 4 do M5. - Análise da variação da função a partir da $TVI(x)$ genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$ e de seu estudo por meio de dois métodos: construção de uma tabela com valores de x e da $TVI(x)$ relacionadas; e pelo estudo do sinal da expressão algébrica. - Máximos e mínimos relativos. - Variação da $TVI_1(x)$ – $TVI_2(x)$. - Estudo do sinal da $TVI_2(x)$ – concavidade para cima, para baixo e ponto de inflexão. - Esboço de gráficos a partir da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$. - Esboço da curva da função polinomial do 3º grau decrescente com ponto crítico ($TVI_1(x) = 0$) igual a ponto de inflexão. - Esboço da curva da função polinomial do 3º grau que não possui ponto crítico. Construção a partir de valores da $TVI_1(x)$ e a partir da análise do sinal da $TVI_2(x)$.
09/09/2017	- Conferência dos esboços do M6 construídos pelo EPM em casa. - Análise da variação da função a partir da $TVI(x)$ genérica em $[x, x + \Delta x]$. - Máximos e mínimos relativos. - Variação da $TVI_1(x)$ – $TVI_2(x)$. - Estudo do sinal da $TVI_2(x)$ – concavidade e ponto de inflexão. - Estudante utiliza a $TVI_1(x)$ para encontrar os pontos críticos, mas é a partir análise da $TVI_2(x)$ que esboça a curva, ou seja, não analisa a variabilidade da função. - Apresentação das regras básicas de derivação, solicitadas pelo estudante: Derivadas (constante, potência, multiplicação por um escalar, soma e subtração). - São passadas mais funções para que o estudante esboce as curvas em casa.

Encontro	Descrição das atividades desenvolvidas
27/09/2017	- Conferência dos esboços das funções - Estudante utiliza as regras de derivação, apresentadas no encontro anterior para encontra a $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$. - Estudo do sinal da $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$. - Discussão do artigo de Moretti (2003) sobre o esboço da parábola a partir das translações horizontal e vertical. - Análise da variabilidade das funções seno e cosseno.

Fonte: Os autores.

A seguir, apresentamos de forma detalhada como cada variável analisada *a priori* no item 5.2.3 foi efetivamente trabalhada nos encontros, ou seja, uma análise *a posteriori* das variáveis que interagem e emergem da prática de esboço de curvas e culminam nela.

5.4 ANÁLISES *A POSTERIORI*

As análises *a posteriori* realizadas estão embasadas nas análises *a priori* das variáveis essenciais no esboço de curvas (seção 5.2.3), nas descrições das atividades e diálogos realizados na sequência didática (seção 5.3), alguns dos quais serão apresentados novamente, e também nas resoluções dos estudantes. Pontuamos diversos aspectos da prática realizada, questões recorrentes nos encontros, dificuldades e compreensões dos estudantes à luz da teoria dos registros de representação semiótica, especificamente a hipótese fundamental da aprendizagem (seção 2.4), aludindo às funções do discurso (seção 2.6) para análise dos diálogos e construções matemáticas.

As soluções dos estudantes aos problemas propostos e os diálogos dos encontros das sequências didáticas foram examinados com relação às funções de expansão discursiva, apofântica e referencial. Conforme apresentado na seção 2.6 do capítulo segundo, a função de expansão discursiva envolve as explicações, descrições, narrações e raciocínios, os quais podem ser de natureza lógica ou natural e ainda podem se constituir por acumulação ou por substituição, utilizando regras que podem estar explícitas ou não. A função apofântica, de predicação ou locução, nos permite concluir sobre o valor lógico, epistêmico ou social do discurso utilizado pelos estudantes. A função referencial, por sua vez, será destacada quando evidenciado designações de objetos.

Inicialmente, nas sequências didáticas, auxiliamos os estudantes nas suas construções do discurso matemático, começando com a designação de objetos (função referencial), uma vez que, para realizar inferências e tirar conclusões, ela é essencial. Isto ocorreu devido às dificuldades apresentadas por eles na exposição de suas ideias e conclusões a respeito de suas construções, bem como, às lacunas evidenciadas na linguagem, símbolos e conceitos matemáticos. Trabalhamos, então, com as operações de designação pura, categorização simples, determinação e descrição de objetos matemáticos como domínio e imagem de uma função, intervalos reais, fatoração de polinômios, zeros de funções, plano cartesiano, equações, entre outros. Este trabalho foi realizado com a turma e também com o estudante do Programa Mentores (EPM). As dificuldades dos estudantes em exporem suas ideias, explicarem seus cálculos e realizarem inferências, ou seja, em utilizarem coerentemente o discurso nas resoluções, evidenciaram m um ensino que não prioriza o discurso nas atividades e resoluções e não incentiva a escrita e a socialização das conclusões dos estudantes em problemas matemáticos.

De acordo com a ED, a análise *a posteriori* é a fase da pesquisa em que ocorre o tratamento dos dados e informações obtidos na sequência didática, e a confrontação com os dados da análise *a priori*. Na próxima seção, apresentamos as análises *a posteriori* dos dados coletados nas sequências didáticas e as reflexões suscitadas a respeito das potencialidades, possibilidades e limitações do caminho alternativo para o esboço de curvas.

5.4.1 Estudo do sinal de funções

Estudar o sinal das funções afim e quadrática demanda o conhecimento de diversos conceitos. De acordo com o exposto na seção 2.6, é a expansão discursiva, a qual ocorre a partir das proposições matemáticas, que nos permite inferir sobre as propriedades necessárias utilizadas pelos estudantes para estudar sinal de funções, expostas na tabela 21. Por isso, nos primeiros encontros, a fim de tornar possível o trabalho com esboço de curvas e, mais do que isso, possibilitar a construção de inferências e explicações a respeito do sinal de uma função, reforçamos com os estudantes a função referencial de alguns objetos matemáticos como domínio e imagem de uma função, plano cartesiano, esboço de retas e sinal de uma função.

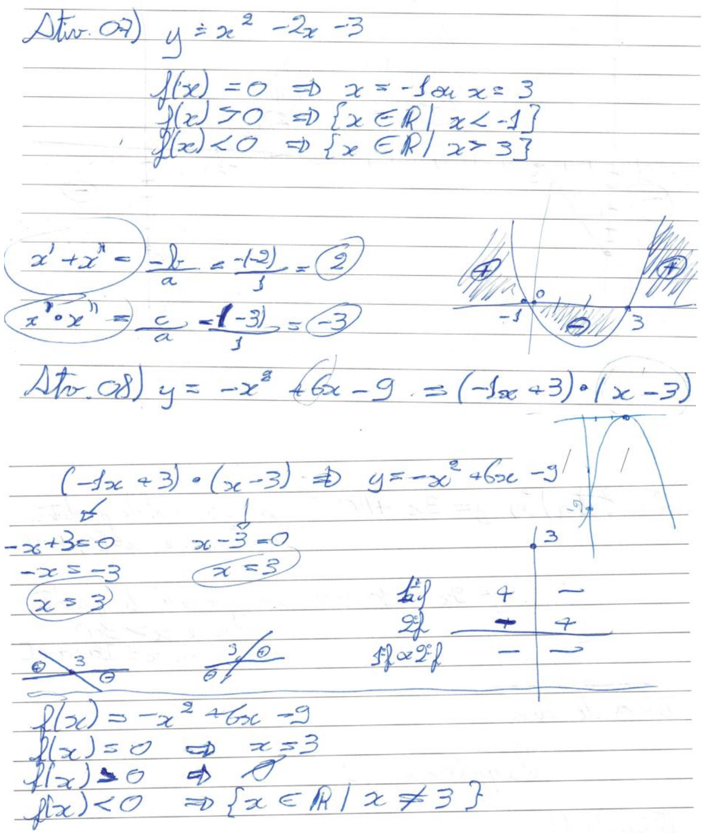
Em diálogo ocorrido no 1º encontro com a turma, a seguir exposto novamente:

> ***PP**: Analise o sinal da função! Analisar o sinal da função é então analisar o sinal de y. Então, para que valores de x, $y = 0$, $y < 0$ e $y > 0$? Vamos lá, para que valores de x o $y = 0$?*
> ***Estudantes**: -8,2; 3 e 5,8.*
> ***PP**: $y > 0$ para que valores de x?*
> ***E2**: de -8,2 até 3 e de 5,8 até $+\infty$.*
> ***PP**: E agora, $y < 0$ para quê valores de x?*
> ***E1*** (apontando para o quadro)*: de -∞ até -8,2.*
> ***PP**: Agora, conjecturem a respeito do crescimento e decrescimento deste gráfico.*
> ***E1**: Sempre levando em conta os valores de x?*
> ***PP**: Sim, você vai utilizar os intervalos de x para especificar "onde" a função cresce e decresce.*

é possível evocar a função referencial de designação quando os alunos falam "*vai de -8,2 até 3...*" de forma espontânea por meio da língua natural. É uma forma de mostrar um caminho que privilegia as intuições primeiras necessárias para as conceitualizações.

O Momento 1 foi organizado para o trabalho com o estudo do sinal de funções a partir do gráfico apenas, como no caso das atividades 1, 2 e 5, ou a partir da expressão algébrica de funções afim e quadrática, no caso das atividades 3, 4, 6, 7 e 8. A seguir, na figura 30, apresentamos as soluções das atividades 7 e 8 do Momento 1 do EPM, as quais foram resolvidas corretamente. Aliás, cabe ressaltar que tanto os diálogos com o EPM como as resoluções e construções por ele realizadas, são repletos de inferências e explicações.

Figura 30: Estudo do sinal das funções $y=x^2-2x-3$ e $y=-x^2+6x-9$.

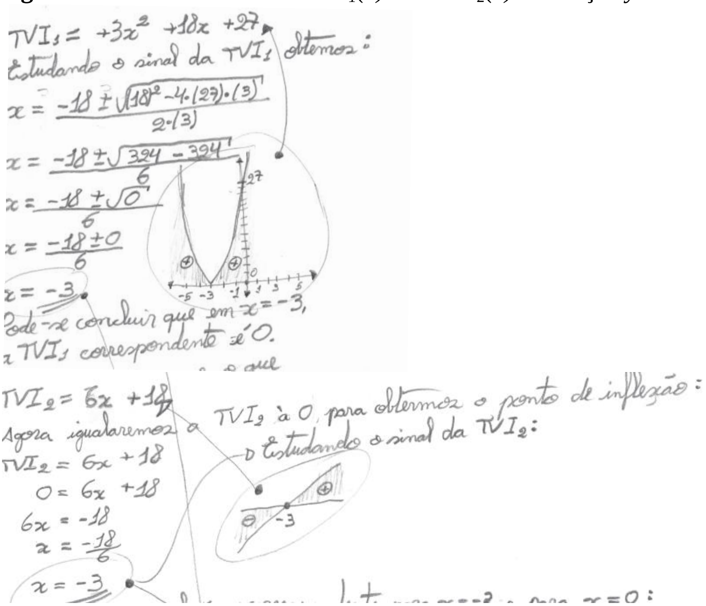


Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

No caso das resoluções da figura 30, evidenciamos as conversões entre unidades básicas simbólicas e unidades básicas gráficas ancoradas no tratamento da expressão que representa a função e culminando no sinal das funções. Na atividade 7, o EPM utilizou as raízes da função, a partir da ideia de soma e produto, e a concavidade para esboçar a parábola e concluir a respeito do sinal, aliás, este foi o procedimento mais utilizado pelos estudantes. Na atividade 8, o EPM fez uso da fatoração da expressão algébrica, analisando o sinal de cada fator separadamente e depois, multiplicou os sinais. Este procedimento foi utilizado neste primeiro encontro, porém, como já pontuado, prevaleceu a análise do sinal a partir da parábola, tanto com os estudantes da turma como o EPM.

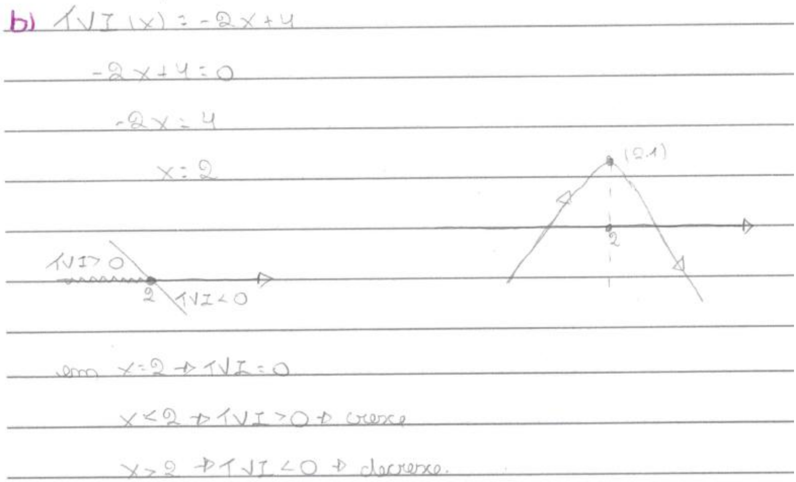
Apresentamos nas figuras a seguir o estudo do sinal necessário realizado pelos estudantes a fim de concluir a respeito da variação de funções propostas. A figura 31 é de uma atividade extra proposta ao EPM, a qual não constava nos planejamentos; a figura 32 é da atividade 2 do Momento 4 e a figura 33, é da letra *e* do Momento 6. Para esboçar a curva, todas as variáveis pontuadas nas análises *a priori* foram utilizadas e a visualização de como o estudo do sinal possibilitou inferências a respeito da curva é que nos permite concluir sobre a compreensão desta variável matemática.

Figura 31: Estudo do sinal da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$ da função $y=x^3+9x^2+27x+3$.



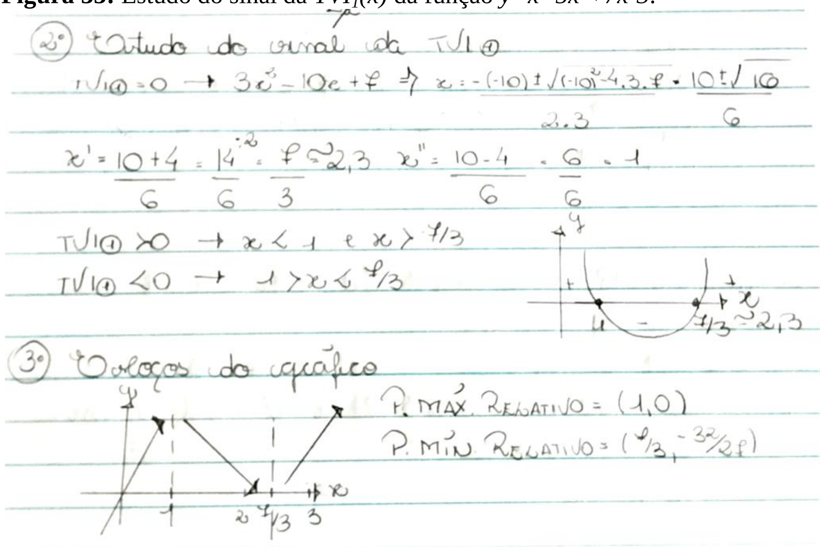
Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Figura 32: Estudo do sinal da $TVI_1(x)$ e esboço da função $y=-x^2+4x-3$.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E3 da turma.

Figura 33: Estudo do sinal da $TVI_1(x)$ da função $y=x^3-5x^2+7x-3$.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E2 da turma.

A resolução do EPM, apresentada na figura 30, demonstra sua atitude perante todas as atividades envolvidas, relativa ao seu engajamento àquilo que quer expressar, conferindo valor social às suas resoluções e diálogos. A partir de explicações em língua natural e em forma de gráficos, utilizando setas e léxicos sistemáticos, o EPM expande seu discurso mesclando a forma natural e lógica, mantendo o valor epistêmico e lógico.

Nas soluções de dois estudantes da turma, expostas nas figuras 31 e 32, a progressão do discurso é do tipo lógica em que o valor lógico se verifica devido às relações matemáticas corretas estabelecidas. O valor epistêmico é contemplado, uma vez que faz uso da progressão do discurso pela substituição de proposições por resultados de novas inferências e também o valor social, por desempenharem a tarefa solicitada pelo professor. Em todas as figuras é possível evidenciar a identificação de unidades básicas referentes à $TVI_1(x)$ e conversão entre as representações simbólicas e gráficas.

Estudar o sinal de uma função no contexto do esboço da curva nos permite concluir que as ações para reforçar conceitos prévios juntamente com as situações-problema propostas no Momento 1, possibilitaram a compreensão dos procedimentos, os quais, por sua vez, permitiram que os argumentos necessários fossem utilizados para tal trabalho, conferindo assim, o valor epistêmico de verdade à resolução. Contudo, a forma como tínhamos proposto trabalhar com o estudo do sinal da função quadrática, a partir da fatoração do polinômio e análise dos fatores, esbarrou na dificuldade de tratamento da expressão algébrica, ou seja, na fatoração de polinômios. Por isso, a fim de estudar a $TVI_1(x)$ da função polinomial do terceiro grau, optamos por não insistir na fatoração e utilizar o esboço da parábola a partir dos zeros da função e da concavidade, maneira que, de certa forma, era habitual aos estudantes.

Além disso, no trabalho com o estudo do sinal de funções constatamos algumas questões pontuais, as quais já foram enfatizadas na seção 5.3, como dificuldades relacionadas à visualização de curvas no domínio $\mathbb{R}$; à escrita e à leitura de intervalos reais; aos símbolos matemáticos, conceitos básicos envolvendo funções e a pouca participação dos estudantes nos questionamentos.

5.4.2 Taxa média de variação

A taxa média de variação das funções afim, polinomiais do segundo e do terceiro graus foi trabalhada a partir do Momento 2 com atividades que solicitavam a TMV de funções a partir da representação gráfica apenas, no caso das atividades 1 e 5, e, a partir da representação algébrica, nas atividades 2, 3, 4, 6 e 7. Introduzimos o estudo dialogando sobre a compreensão dos estudantes sobre velocidade média de um móvel, enquanto razão entre a variação do espaço percorrido e do tempo. Esta referência não estava prevista na sequência, porém foi necessária e frutífera para o entendimento de TMV e, mais adiante, de $TVI(x)$.

Os conceitos envolvidos na variável TMV como, por exemplo, intervalos reais, valor da função em extremos de intervalos e razão entre variação de grandezas, foram essenciais para a compreensão desta. Entretanto, as propriedades relacionadas à reta secante e ao coeficiente angular de reta secante, presentes na tabela 23, não foram aprofundadas. Isto, pois, a construção de retas secantes, o cálculo dos coeficientes angulares destas retas e a compreensão efetiva da relação destas retas com a TMV, demanda um trabalho em sala de aula permeado por tecnologias, o que, por sua vez, requer mudança de olhar para o tema desta tese.

Outra dificuldade que ressaltamos, evidenciadas nos diálogos, foi a de visualizar um objeto matemático a partir de suas distintas facetas, no caso, algébrica e geométrica. Por isso, destacamos a necessidade de um ensino que incentive e possibilite explicitamente as conversões entre registros de representação semióticas, atividades estas que não são espontâneas e neste trabalho podemos confirmar isso.

A seguir, trazemos um trecho dos diálogos sobre a atividade 1 do Momento 2 com a turma sobre a TMV que demonstra equívocos básicos sobre domínio e imagem e, por outro lado, a compreensão sobre o conceito de TMV.

> ***PP***: *Só pela observação do gráfico, a taxa média de variação (TMV) neste intervalo* (apontando para intervalo $[-8,-7]$) *é positiva ou negativa?*
> ***E2***: *Positiva por que está crescendo.*
> ***PP***: *Isso mesmo! O resultado da TMV será positivo, pois neste intervalo a função cresce.*
> ***E1***: *Mas a variação é analisada em x ou em y?*
> ***PP***: *Pois é... Estamos falando de variação da função, então é a variação de y!*

> ***E1**: Então a variação será 3. Cresce uma unidade em x, a variação de y será 3.*
> ***PP**: Muito bem! Isso mesmo! A TMV é o quanto o y varia quando x aumenta 1 unidade! Neste caso, o intervalo em x aumenta 1 unidade, mas e quando não for, por exemplo, calcular para o intervalo $[-2{,}0]$? (*Para este intervalo, são definidos os pontos extremos, aproximadamente $(-2, 4)$ e $(0;\ 6{,}2)$ e questionado sobre como calcular a TMV).
> ***E2**: Essa variação ela vai dar o resultado para cada 1 unidade de x?*
> ***PP**: Isso aí!*
> ***E2**: Então vou ver quanto varia o y e divido por 2, então 2,2 divido por 2, que dá 1,1.*
> ***PP**: Isso! O y aumentou 2,2 enquanto o x aumentou 2, então a TMV será a $\Delta y/\Delta x$, ou seja, 1,1. O próximo intervalo tem extremos $(2{,}4)$ e $(3{,}0)$, então, sem cálculo, o x foi do 2 para o 3, aumentou 1 unidade, o que aconteceu com o y?*
> ***E3**: Diminuiu 4.*
> ***PP**: Então, nem preciso de fórmula para concluir que a $TMV = -4$ neste intervalo. Mas, em querendo utilizar a fórmula?*

Neste momento do diálogo, estudantes ficam em silêncio, talvez pensando em qual fórmula utilizar ou deduzindo uma generalização. A partir disso, a ideia de velocidade média foi retomada e utilizada para encontrar a $TMV = -4$.

> ***PP**: O que significa a TMV ser -4?*
> ***E2**: Que decresceu.*
> ***PP**: Que no intervalo que vai de $x = 2$ até $x = 3$ a função está decrescendo em média...*
> ***E3**: 4 unidades.*
> ***PP**: Isso aí! A TMV é -4 ou a função está decrescendo em média 4 unidades no referido intervalo!*
> ***E1**: Não dá para falar que está decrescendo -4, né?*

Com o estudante do PM, os diálogos e as resoluções foram permeados pelas funções referencial, apofântica e de expansão discursiva. Os encontros foram bastante dialogados, em todas as resoluções foi possível verificar a preocupação do estudante em explicar seus procedimentos, caracterizar os objetos em questão e, mais do que isso, realizar inferências, substituindo proposições por novos resultados ou acumulando informações necessárias para chegar a conclusões e compreensões. Isto se verificou tanto nas resoluções escritas entregues pelo estudante como nos diálogos, quando solicitado que este falasse suas resoluções e construções. A seguir, um trecho em que o EPM explica sua compreensão sobre TMV da atividade 1 do Momento 2.

> ***PP***: *Bem, variabilidade de uma função está relacionada a quê?*
> ***EPM***: *Crescimento e decrescimento.*
> ***PP***: *Então, como você respondeu a letra a da atividade 1?*
> ***EPM***: *Taxa de variabilidade é o quociente obtido da diferença entre as ordenadas de dois pontos quaisquer pela diferença das abscissas destes dois pontos. É igual ao coeficiente angular. Se a taxa é positiva, a função é crescente, se é negativa, é decrescente.*

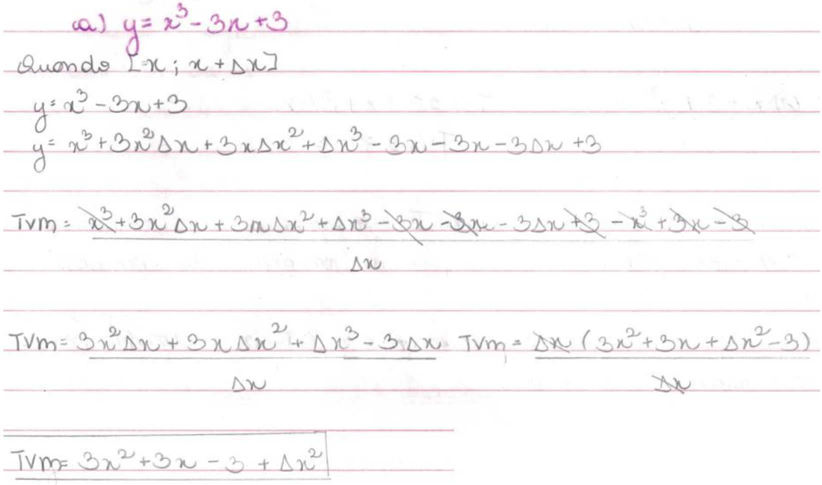
Neste caso, temos um discurso por expansão natural com utilização de registro em língua natural e conclusão a partir do acúmulo de informações. Sobre a validade da argumentação (função apofântica), ela tem valor lógico, uma vez da veracidade de suas colocações, tem valor social, ao responder a uma questão feita pelo PP e empenhar-se para explicar, e também valor epistêmico, uma vez que é válida em todos os contextos.

Em outro diálogo, referente à atividade 2 do Momento 2, o estudante do PM expressa seu raciocínio a respeito da TMV da função afim $y = -2x + 3$ para intervalos distintos.

> ***EPM***: *Eu fiz todas* (se referindo ao cálculo da TMV para os intervalos das letras *a*, *b*, *c* e *d*)*, mas era evidente que iam dar todas igual a -2 por que é uma função afim.*
> ***PP***: *O que significa esse -2?*
> ***EPM***: *Que a cada unidade de x que aumenta, o y decresce 2.*
> ***PP***: *Então, resumindo, a taxa de variação de uma função afim é...*
> ***EPM***: *Constante.*

O foco do trabalho com a TMV foi, então, a relação desta com a variabilidade média da função em um intervalo e a TMV genérica para um intervalo $[x, x + \Delta x]$. Com relação a esta última, é importante ponderar as dificuldades no tratamento da expressão $TMV = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, apresentadas pelos estudantes. Os diversos erros relacionados aos sinais, aos produtos notáveis e à multiplicação de expressões algébricas, nos possibilitaram inferir que não só as conversões não são estimuladas no ensino, mas os tratamentos precisam, inclusive, receber uma atenção especial. Algebricamente, o maior obstáculo nas atividades da sequência didática, está relacionado ao cálculo da TMV para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, conforme apresentado na figura a seguir, em que o estudante da turma se equivoca no cálculo da TVM genérica da função $y = x^3 - 3x + 3$, da atividade 1 do Momento 5, mais especificamente na fatoração, ao colocar o Δx em evidência.

Figura 34: Taxa média de variação genérica da função *y=x*^{3}*-3x+3.*



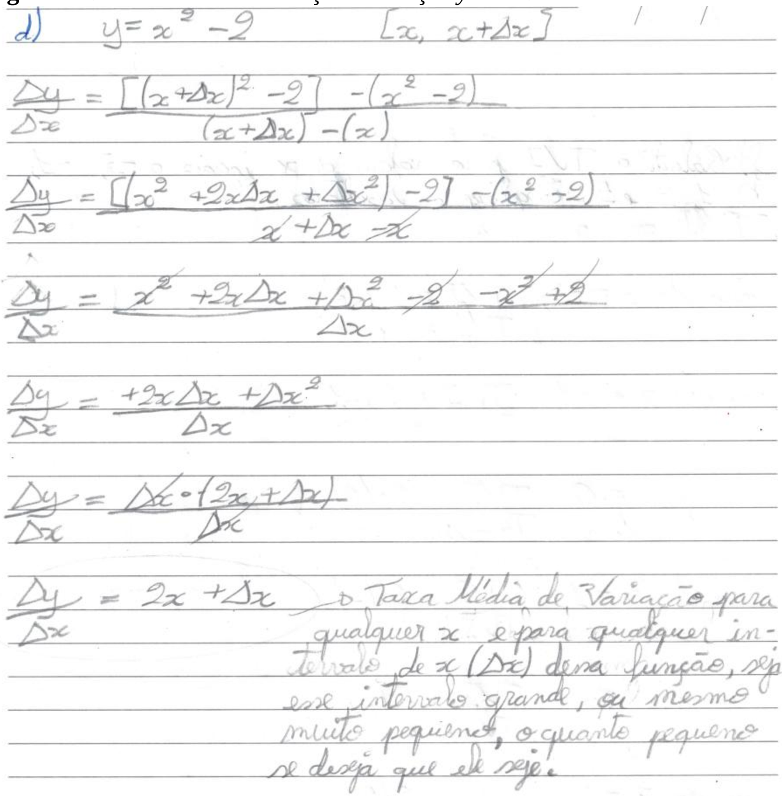
Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E3 da turma.

Questões relacionadas ao tipo de erro da figura 34 perpassaram todos os encontros das sequências didáticas. O estudante do PM, percebendo sua dificuldade, optou por fazer uma simples substituição (utilização de léxico associativo na operação de determinação da função referencial) de Δx, num primeiro momento por k, e depois por h, sem perda de compreensão, agilizando os cálculos e minimizando seus erros. Além disso, foi a partir da TMV que o estudante se deu conta das condições de existência dos pontos de máximo e/ou mínimo. Conforme o diálogo a seguir sobre as TMV da função $y = x^2 - 8x + 16$, exigida na atividade 3 do Momento 2.

> ***PP****: Então o que percebemos é que na função quadrática, em alguns intervalos ela tem decrescimento alto* (apontando para a resposta da letra *b* ($TMV = -10$)), *em outros tem decrescimento menor* (apontando para a resposta da letra a ($TMV = -6$)), *em outros ela cresce, ou seja, o gráfico é crescente em alguns "lugares" e decrescente em outros.*
> ***EPM****: Interessante... Se aqui é decrescente* (apontando para o intervalo $[-2,2]$) *e aqui ela é crescente* (apontando para o intervalo $[5,6]$), *então no meio deste intervalo tem o vértice?!*

A seguir, expomos o cálculo da TMV da função $y = x^2 - 2$, da atividade 2 do Momento 3, seguido de explicação do estudante do PM.

Figura 35: Taxa média de variação da função *y=x*^{2}*-2*.



d) $y = x^2 - 2 \quad [x, x+\Delta x]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+\Delta x)^2 - 2] - (x^2 - 2)}{(x+\Delta x) - (x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 2] - (x^2 - 2)}{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-2} \cancel{-x^2} \cancel{+2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$ → Taxa Média de Variação para qualquer x e para qualquer intervalo de x (Δx) desta função, seja esse intervalo grande, ou mesmo muito pequeno, o quanto pequeno se deseja que ele seja.

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Nesta resolução, evidenciamos a utilização de registro algébrico no cálculo da TMV para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, em que o tratamento foi realizado corretamente. É uma resolução composta também pela função de expansão discursiva em que a progressão do discurso ocorre de forma natural e formal, cujas proposições, em se tratando da função apofântica, possuem valor social, pela presença do ato de elocução; e epistêmica, por utilizar relações válidas do ponto de vista matemático. É uma resolução com valor lógico de verdade, por estabelecer de forma coerente, as relações matemáticas. Além disso, é evidente a conversão do registro algébrico para o registro em língua natural a fim de explicar sua conclusão.

Assim, a partir das situações-problema apresentadas, os estudantes trabalharam no procedimento de cálculo da TMV e utilizaram os argumentos e propriedades para a construção de inferências relacionadas ao crescimento e ao decrescimento de uma função em um intervalo, propriedades estas expostas nas tabelas 23 e 24. Estas ações culminaram no trânsito entre as unidades básicas simbólicas e gráficas da TMV.

5.4.3 Taxa de variação instantânea de primeira ordem, Pontos críticos, Variação de funções

As variáveis *taxa de variação instantânea de primeira ordem* - $TVI_1(x)$, *pontos críticos* e *variação de funções* foram trabalhadas de forma simultânea, com maior ou menor profundidade, desde o primeiro Momento da sequência didática. A $TVI_1(x)$ que, no princípio foi chamada apenas de *taxa de variação instantânea* - $TVI(x)$ de uma função, foi planejada, mais especificamente, para o Momento 3 e introduzida a partir de situações-problemas baseadas no cálculo da $TMV(x)$ de um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, sendo Δx um infinitesimal. Em diversos encontros fizemos referência à diferença entre velocidade média e velocidade instantânea de um móvel, o que gerou questionamentos dos quais os estudantes participaram ativamente, respondendo de forma correta. Os procedimentos que possibilitaram a compreensão das propriedades essenciais desta variável se basearam no cálculo da $TMV(x)$ para diversos intervalos reais próximos, culminando em um intervalo infinitamente pequeno e genérico $[x, x + \Delta x]$. Geometricamente, contudo, a compreensão a partir do traçado de retas secantes e retas tangentes a uma curva, ocorreu de forma breve devido a fatores já elencados, relacionados à necessidade de um trabalho com tecnologias. Por isso, é de intenção futura realizar um trabalho na perspectiva desta tese permeado por tecnologias a fim de desenvolver de forma profunda relação entre álgebra e geometria, no que se refere às taxas de variação e retas secantes ou tangentes.

As atividades iniciais propostas (atividade 2 do Momento 3) solicitavam o cálculo da $TMV(x)$ para intervalos cada vez menores, por exemplo, $[2, 3]$, $[2, 2{,}1]$, $[2, 2{,}01]$, $[2, 2{,}001]$ e $[2, 2{,}0001]$ e a partir disso, os estudantes tinham que responder perguntas sobre o comportamento da TMV. Na perspectiva destas atividades, foi introduzida a noção intuitiva de infinitésimos e de $TVI(x)$. Os diálogos a seguir expõem as ideias iniciais trabalhadas.

O primeiro diálogo, com o estudante do PM, refere-se à noção de infinitésimo para encontrar a $TVI_1(x)$ da função $y = 2x^3 - x^2 + 16$ da atividade 4 do Momento 2, a partir da $TMV = 6x^2 - 2x + k$, encontrada por ele.

> ***PP**: E se eu quiser calcular a TVI eu uso essa fórmula* (apontando para $TMV = 6x^2 - 2x + k$)*, mas o k vai ser o quê?*
> ***EPM**: A diferença de x_2 para x_1* (se referindo genericamente aos extremos de um intervalo).
> ***PP**: Mas se eu quiser calcular a TVI em um ponto específico?*
> ***EPM**: Tu usa $k = 0$!*
> ***PP**: A TMV é $6x^2 - 2x + k$! Se eu quero saber a TVI em um ponto específico?*
> ***EPM**: Tu usa como intervalo a variação de x igual a zero. Então $k = 0$.*
> ***PP**: O k pode ser tão pequeno quanto se deseja, não é zero, mas tende a zero! Ele é um infinitésimo! Os infinitésimos são muito úteis para a compreensão de alguns conceitos matemáticos.*
> ***EPM**: O nome infinitésimo é só por que ele é um número grandão?*
> ***PP**: Não! Ao contrário! Por que é pequeno!*
> ***EPM**: Sim... Quis dizer que tem muitas casas decimais, mas pequeno em valor!*

O estudante do PM também elaborou conjecturas a respeito da $TVI(x)$ em outro diálogo.

> ***EPM**: A TVI é igual à TMV de um ponto até ele mesmo! Isso ficou estranho... Ou melhor, quando $\Delta x = 0$. A TVI em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente à parábola, à curva, naquele ponto. Se calcula pela genérica* (apontando para a TMV) *e substitui os valores de x.*

O próximo diálogo, com estudantes da turma, também se refere à noção de infinitésimos para compreensão da $TVI(x)$ e à propriedade de um ponto crítico.

> ***PP**: Bem, a TVI é o que está acontecendo com a função em um ponto específico, assim, como é o Δx?*
> ***E2**: Número pequeno, próximo de zero!*
> ***PP**: Δx tem que ser um infinitésimo, é tão pequeno quanto se quer, não é zero, mas depois de ter a fórmula genérica para a TMV, posso ignorá-lo para compreensão da TVI. Assim, para $x = 2$ encontramos $TVI = 0$.*
> ***E2**: Então aí é o vértice!*
> ***PP**: Isso aí! É o vértice da parábola!*

Logo, a noção de infinitésimos foi trabalhada de forma intuitiva a partir de concepções espontâneas que, no contexto deste trabalho e âmbito do EM, se mostrou frutífera e com potencial para a compreensão que se faz necessário. Assim, as propriedades que emergiram das atividades realizadas são as que foram previstas na análise *a priori*, a constar:

- Δx é um infinitésimo, logo, é uma grandeza muito próxima de zero, podendo ser excluída do resultado e dividida por ela mesma, quando necessário;

- a $TMV(x)$ de uma função em um intervalo $[x, x + \Delta x]$ é, a partir da noção de infinitésimos, a $TVI(x)$;

- a $TVI(x)$ da função em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente à curva neste ponto;

- a $TVI(x)$ de uma função em um ponto está relacionada com a variabilidade da função naquele ponto.

- $TVI(x) > 0$ → a curva da função é crescente em x (tabela 8).

- $TVI(x) < 0$ → a curva da função é decrescente em x (tabela 8).

- $TVI(x) = 0$ → a curva tem variação nula em x (tabela 8).

As dificuldades no trabalho com os elementos envolvidos nestas variáveis, os quais não eram conhecidos dos estudantes, pois não são trabalhados no âmbito do EM, foram algébricas (tratamento). Conforme pontuado anteriormente, o foco de erros esteve no cálculo da TMV para $[x, x + \Delta x]$, necessário para analisar a $TVI(x)$, encontrar pontos críticos e decidir sobre a variabilidade da curva.

A seguir, apresentamos alguns diálogos sobre as variáveis em questão. Inicialmente, um diálogo com a turma sobre a função $y = x^2 - 4x - 5$, da atividade 4 do Momento 3.

> ***PP**: Bem, a TVI é o que está acontecendo com a função em um ponto específico, assim, como é o Δx?*
> ***E2**: Número pequeno, próximo de zero!*
> ***PP**: Δx tem que ser um infinitésimo, é tão pequeno quanto se quer, não é zero, mas depois de ter a fórmula genérica para a TMV, posso ignorá-lo para compreensão da TVI. Assim, para $x = 2$ encontramos $TVI = 0$.*
> ***E2**: Então aí é o vértice?*
> ***PP**: Isso aí! É o vértice da parábola!*

Neste diálogo está presente a operação de predicação da função apofântica, em que o estudante vincula um conceito a uma propriedade, no caso, o conceito de vértice de uma parábola à propriedade relacionada aos pontos críticos, em que a $TVI(x) = 0$.

Com o EPM, apresentamos diálogo a seguir a fim de expor o raciocínio utilizado pelo estudante sobre a mesma atividade ($y = x^2 - 4x - 5$), mas especificamente da letra f, a qual solicitava, a partir da $TVI(x)$, a análise da variação da função.

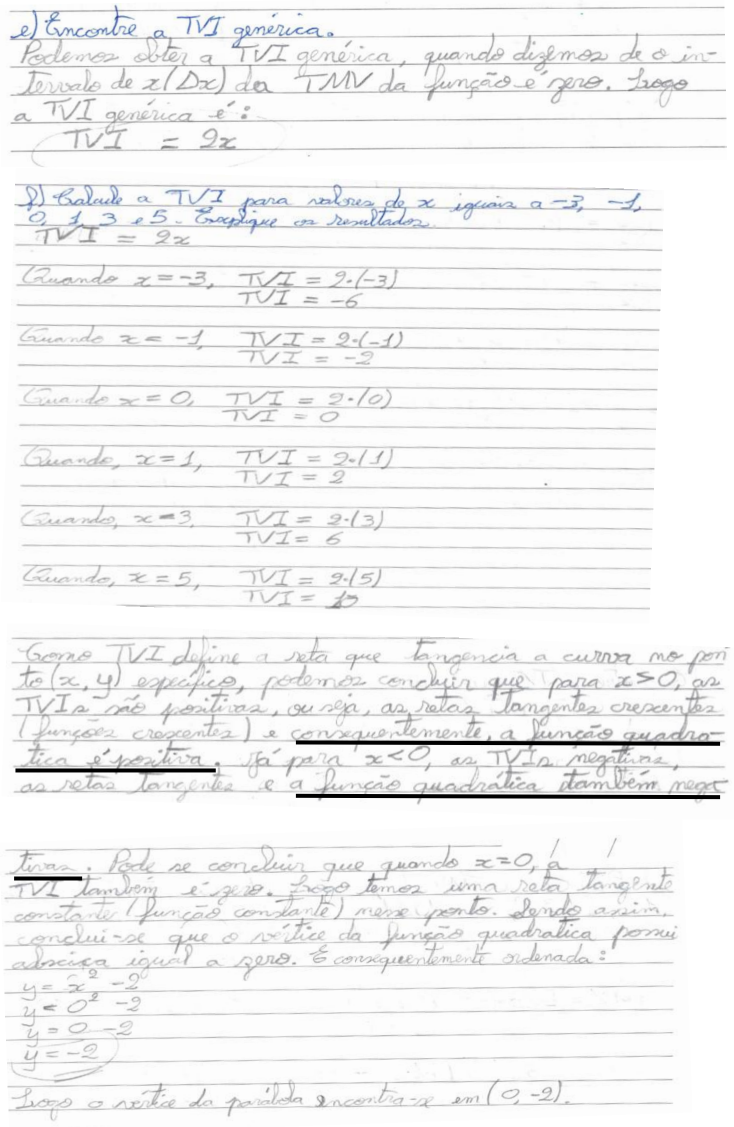
> ***EPM**: Então, eu calculei para quando a TVI é zero.*
> ***PP**: Por quê?*
> ***EPM**: Para analisar o que acontece com a função... Se ela cresce ou decresce, em valores maiores e menores que o encontrado.*
> ***PP**: Mas por que zero?*
> ***EPM**: Por que a TVI é zero no vértice, onde a reta tangente é horizontal, constante. E aí encontrei que a TVI é zero para $x = 2$, para $x < 2$ ela é decrescente e para $x > 2$, ela é crescente.*
> ***PP**: Então, para analisar o crescimento e o decrescimento de uma função somente a partir da expressão algébrica, sem o gráfico, eu posso utilizar essas ideias?*
> ***EPM**: Mas tu tem que achar o vértice.*
> ***PP**: E como se encontra o vértice?*
> ***EPM:** Tu encontra a TMV para um intervalo e faz Δx tender a zero...*

Além disso, o EPM elaborou conjecturas a respeito da $TVI(x)$, a qual foi lida por ele.

> ***EPM**: A TVI é igual à TMV de um ponto até ele mesmo! Isso ficou estranho... Ou melhor, quando $\Delta x = 0$. A TVI em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente à parábola, à curva, naquele ponto. Se calcula pela genérica* (apontando para a TMV) *e substitui os valores de x.*

As colocações do EPM são expansões discursivas que mesclam a progressão natural e lógica, possuem valor lógico de verdade, por serem formadas de afirmativas válidas matematicamente, e valor social quando o EPM argumenta a fim de explicar sua resolução. O valor epistêmico das afirmações também foi alcançado uma vez que o progresso do discurso foi feito por substituições válidas do ponto de vista matemático. Outro ponto importante a ser abordado é a espontaneidade que o EPM demonstra na transição entre o registro algébrico e em lingual natural. Na figura, expomos algumas construções do EPM relacionadas à $TVI_1(x)$.

Figura 36: Taxa de variação instantânea, pontos críticos e variação da função $y=x^2-2$.



e) Encontre a TVI genérica.
Podemos obter a TVI genérica, quando dizemos de o intervalo de $x(\Delta x)$ da TMV da função é zero. Logo a TVI genérica é:
$TVI = 2x$

f) Calcule a TVI para valores de x iguais a -3, -1, 0, 1, 3 e 5. Explique os resultados.
$TVI = 2x$
Quando $x=-3$, $TVI = 2\cdot(-3)$
$TVI = -6$
Quando $x=-1$, $TVI = 2\cdot(-1)$
$TVI = -2$
Quando $x=0$, $TVI = 2\cdot(0)$
$TVI = 0$
Quando, $x=1$, $TVI = 2\cdot(1)$
$TVI = 2$
Quando, $x=3$, $TVI = 2\cdot(3)$
$TVI = 6$
Quando, $x=5$, $TVI = 2\cdot(5)$
$TVI = 10$

Como TVI define a reta que tangencia a curva no ponto (x, y) específico, podemos concluir que para $x>0$, as TVIs são positivas, ou seja, as retas tangentes crescentes (funções crescentes) e consequentemente, a função quadrática é positiva. Já para $x<0$, as TVIs negativas, as retas tangentes e a função quadrática também negativas. Pode se concluir que quando $x=0$, a TVI também é zero. Logo temos uma reta tangente constante (função constante) nesse ponto. Sendo assim, conclui-se que o vértice da função quadrática possui abscissa igual a zero. E consequentemente ordenada:
$y = x^2 - 2$
$y = 0^2 - 2$
$y = 0 - 2$
$y = -2$
Logo o vértice da parábola encontra-se em (0, -2).

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

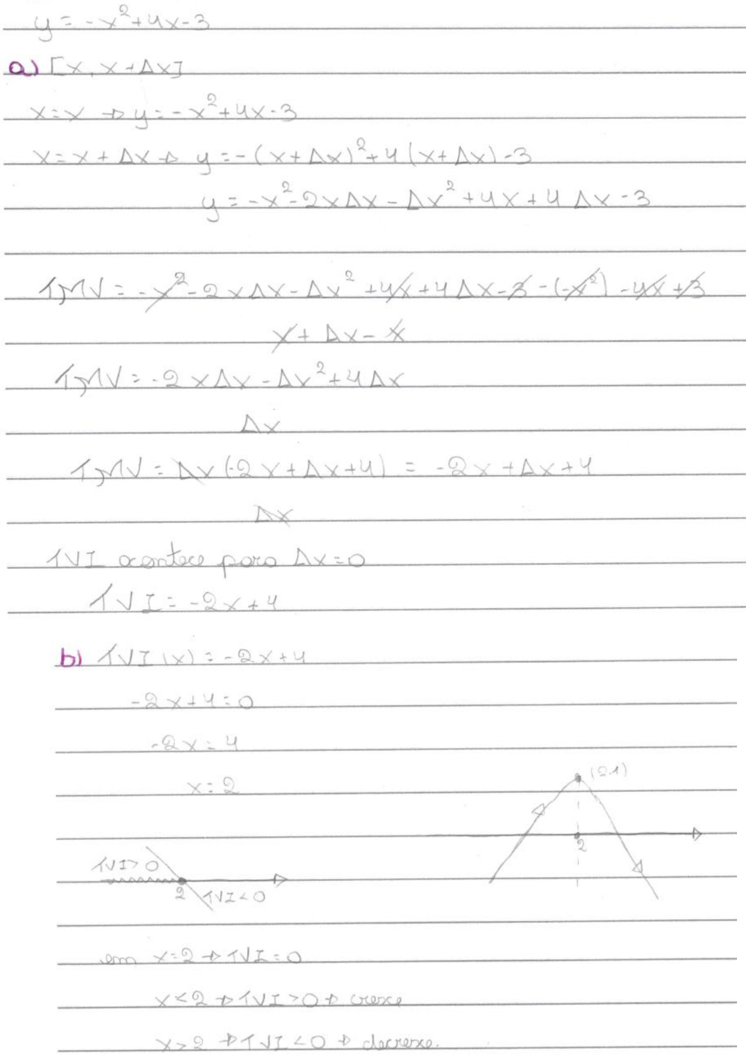
Na resolução da letra *f* da atividade 2 do Momento 3, exposta na figura 36, o estudante do Programa Mentores utilizou diversos conceitos e propriedades a fim de argumentar a respeito de suas conclusões. Dedicado à tarefa de explicar, transita de forma espontânea entre diferentes registros de representação, expandindo seu discurso ora por acumulação, ora por substituição, sempre prevalecendo o valor social, utilizando coerentemente léxicos em suas designações. Um equívoco, no entanto, quando relaciona o sinal da $TVI(x)$ ao sinal da função quadrática, na figura sublinhado, não confere o valor lógico de verdade à sua proposição. Contudo, essa proposição não invalida suas inferências e é o tipo de resposta que deveria ser valorizada e incentivada no ensino, a fim de possibilitar aprendizagens significativas.

As ideias pontuadas também são válidas para o diálogo a seguir, sobre a atividade 1 do Momento 4, em que foram solicitadas a $TVI(x)$ da função $y = -3x + 4$ e a análise da variação desta, ao que o estudante do PM argumenta.

> ***EPM**: Bem, na letra a, a TMV... Isso é uma função afim, então a TMV vai ser constante para qualquer intervalo. De cara dá para saber que, como a função é afim, a TMV é -3, por que é reta! Eu fiz toda a conta, mas nem precisava! Tá, então a TVI vai ser também -3 por que nem tem Δx* (se referindo à fórmula da TMV do intervalo $[x, x + \Delta x]$). *Então, pensando bem, tu tem a reta* ($y = -3x + 4$) *e pega um ponto dela, a reta tangente a ela neste ponto tem coeficiente angular igual a essa TVI* (apontando para o -3) *e vai ser uma reta que passa sobre a função. Então é -3!*
> ***PP**: E esse -3 está associado a que na expressão algébrica da função?*
> ***EPM**: Ao coeficiente angular.*

A resolução a seguir é um tipo comum entre os estudantes ao resolverem problemas matemáticos. Apresentada por um estudante da turma para a atividade 2 do Momento 4, a qual envolve a variável $TVI_1(x)$, pontos críticos e variação de funções. Nesta atividade, a solicitação das letras a e b eram o cálculo da $TVI_1(x)$ e a análise desta relacionando com a variabilidade da função. Constatamos nesta resolução uma expansão discursiva por substituição e progressão lógica, com valor lógico de verdade, valor epistêmico e também social. Muitas inferências ocorreram por substituição, ficando implícitas na resolução.

Figura 37: Análise da $TVI_1(x)$ no esboço da curva da função y=-x^2+4x-3.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E3 da turma.

Com relação aos *pontos críticos*, a ideia de máximos e mínimos absolutos e/ou relativos era relativamente nova para estudantes do EM. Contudo, nas situações propostas, tanto nas atividades de observação gráfica como nas que necessitavam o cálculo da $TVI(x)$, estas ideias foram utilizadas coerentemente. Os pontos críticos foram trabalhados a partir do Momento 1 e, neste, sem formalização, por meio de gráficos apenas.

Como a compreensão de máximos e mínimos relativos e absolutos perpassa a compreensão de domínio e imagem de uma função, o trabalho de encontrar máximos e mínimos a partir apenas da expressão algébrica se tornou custoso para os estudantes. Nesta variável, identificamos a mesma dificuldade ligada ao cálculo da $TVI(x)$ por meio da TMV para $[x, x + \Delta x]$. Outro ponto importante a ser levantado é com relação à resolução de equações do segundo grau. As dificuldades de tratamento de uma equação do segundo grau são recorrentes e isso se deve ao fato, também recorrente, de um ensino que supervaloriza a utilização da fórmula de Bhaskara, sem a efetiva compreensão do quê estão calculando e o significado do resultado encontrado, não incentivando, quando possível, a utilização de outros meios como a fatoração e, por que não, experimentos por tentativas.

Todavia, apesar disso, o objetivo de identificar os pontos do domínio da função em que a $TVI(x)$ se anula e classificá-los em máximos e/ou mínimos relativos e/ou absolutos foi de fato atingido. Dos conceitos envolvidos nesta variável e que elencamos na análise *a priori* (valor da função, máximo/mínimo relativo, máximo/mínimo absoluto, reta tangente, reta constante, coeficiente angular, $TVI(x)$), não foi possível o aprofundamento da relação dos pontos críticos com as retas tangentes. Por isso, as propriedades mais exploradas foram as expostas nas tabelas 9 e 10.

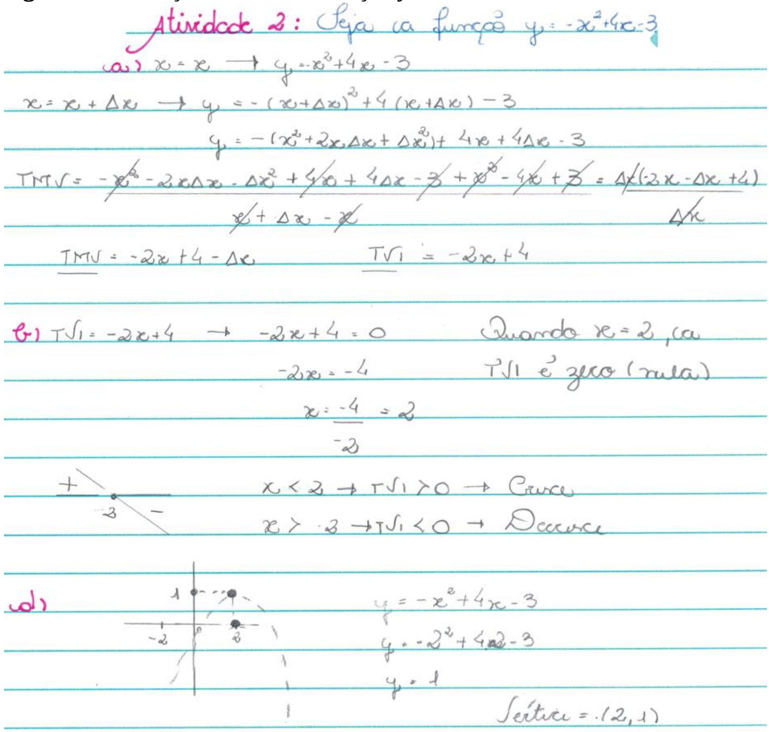
As atividades relacionadas com a variável *variação de funções* foram organizadas especificamente nos Momentos 4 e 5, contudo, desde o primeiro encontro foi proposto, partindo da representação gráfica e, nos outros encontros, da expressão algébrica das funções afim, quadrática e polinomial do terceiro grau, a identificação dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função. Concluir sobre a variabilidade da função por meio da análise da $TVI(x)$, ou seja, relacionando o sinal da $TVI(x)$ da função à variabilidade desta e, consequentemente, com o gráfico da função, foi possível somente a partir do sexto encontro com a turma.

Evidenciamos, a partir das atividades desenvolvidas, que os estudantes possuem um breve entendimento da ideia de variação de funções. Quando são feitas perguntas pontuais quanto à variabilidade de curvas, para intervalos específicos, os estudantes responderam de imediato. A dificuldade, contudo, apareceu quando solicitado para que conjecturassem sobre a variabilidade de forma ampla, levando em conta a curva em todo seu domínio, ou seja, explicar sobre o crescimento e decrescimento e os intervalos em que ocorrem, tanto a partir da curva que representa a função quanto a partir da sua expressão algébrica. Nestas atividades, evidenciamos o resultado de diversos trabalhos aqui apresentados sobre funções: as numerosas dificuldades de uma compreensão ampla sobre funções.

Com relação às propriedades e argumentos necessários para avaliar a variação de funções nos diálogos e nas resoluções do EPM, fica evidente a função de expansão discursiva, utilizando-os adequadamente. Contudo, nas resoluções dos estudantes da turma, as operações de substituição de proposições por resultados de inferências (função expansão discursiva) ocorreram de forma implícita, sem explicações em língua natural.

A seguir, na figura 38, apresentamos a resolução de um estudante da turma para a atividade 2 do Momento 4, na qual ele estuda o sinal da $TVI_1(x)$ e esboça a curva, utilizando coerentemente, porém implicitamente, as propriedades e os argumentos. A expansão do discurso ocorreu de forma lógica uma vez que não foi seguida de explicações, não interagindo, assim, com o interlocutor, no caso, quem solicitou a resolução. Apesar disso, a reunião coerente de proposições e o trânsito entre as unidades básicas gráficas e simbólicas relacionadas à variabilidade, nos possibilitam concluir que ocorreu a compreensão da curva.

Figura 38: Esboço da curva da função *y=-x*^{2}*+4x-3*.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E3 da turma.

5.4.4 Taxa de variação instantânea de segunda ordem

O estudo da concavidade de uma curva foi realizado no Momento 4 e aprofundado no Momento 5. A noção de concavidade foi introduzida a partir do esboço de uma função polinomial de terceiro grau, cuja $TVI_1(x)$ possui duas raízes reais e iguais, em que o estudo do sinal da $TVI_1(x)$ não possibilita esboçar a curva convenientemente. Esta compreensão foi motivada pela visualização das retas tangentes a uma curva (figura 19), a qual possibilitou analisar o comportamento das inclinações destas retas, ou seja, da variação da taxa de variação instantânea de primeira ordem, a qual nomeamos de taxa de variação de segunda ordem $TVI_2(x)$. Utilizamos também associações entre a $TVI_2(x)$ e a aceleração de um móvel. Com relação à nomenclatura, optamos por utilizar *taxa de variação instantânea de segunda ordem* ($TVI_2(x)$), visando não contradizer àquela que é usada no ensino superior.

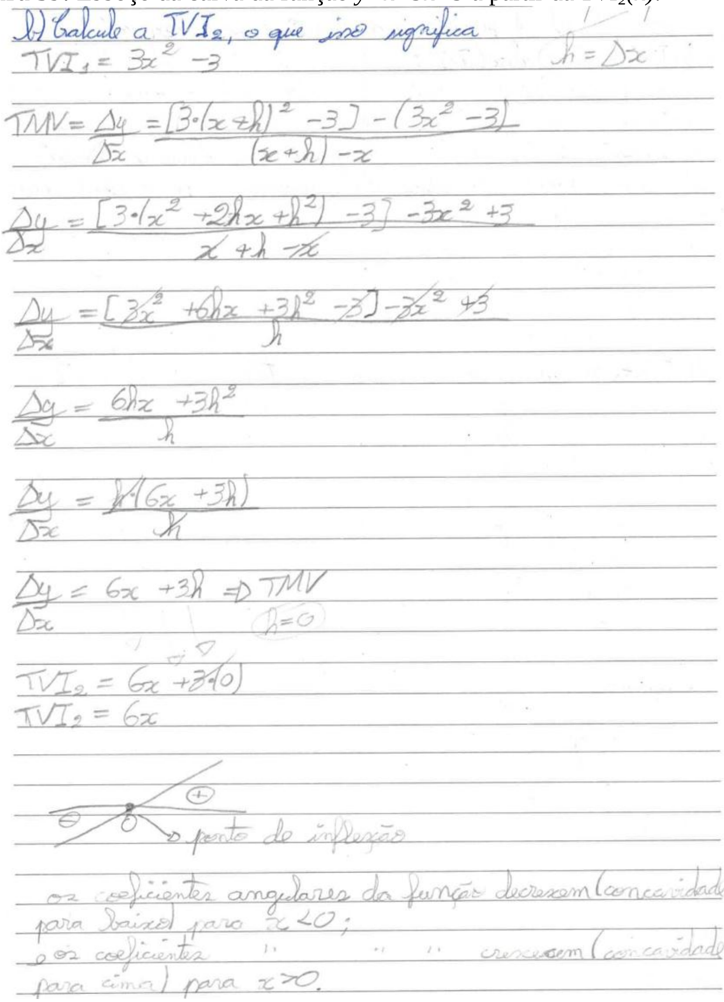
As propriedades relacionadas à variável concavidade, presentes na tabela 18, foram utilizadas para o cálculo da $TVI_2(x)$ de funções polinomiais do terceiro grau e estudo do sinal desta relacionado ao valor de a da função que representa a $TVI_2(x)$. Como a análise da $TVI_2(x)$ é análoga à da $TVI_1(x)$, as dificuldades apareceram no tratamento da $TVI_1(x)$. Os procedimentos previstos para compreensão desta variável proporcionaram uma coerente utilização dos argumentos pelos estudantes, relacionando as unidades básicas simbólicas da expressão de $TVI_2(x)$ às unidades básicas gráficas da concavidade.

Em algumas resoluções, o estudante do Programa Mentores não analisou a $TVI_1(x)$ para esboçar a curva, ou seja, não analisou a variabilidade da função, e sim a $TVI_2(x)$. A partir da $TVI_1(x)$ o estudante do PM identificou os pontos críticos e encontrou a $TVI_2(x)$ e o esboço da curva foi realizado utilizando os pontos críticos e a concavidade. A seguir, apresentamos o diálogo com este estudante em que ele explica seu entendimento sobre a noção de concavidade da atividade 1 do Momento 5, relativa à função $y = x^3 - 3x + 3$.

> ***EPM****: A TVI_2 deu $6x$...* (fica pensando...).
> ***PP****: A TVI_2 é como se comportam as retas tangentes. O coeficiente angular das retas tangentes está crescendo? Decrescendo?*
> ***EPM****: Não pode ser sempre crescente...*
> ***PP****: Não, pois em $x = -1$, por exemplo, a $TVI_2 = -6$.*
> ***EPM****: Então preciso fazer o estudo do sinal da TVI_2. Bem, isso zera em $x = 0$, a TVI_2 é positiva para $x > 0$ e negativa, pra $x < 0$. Em $x = 0$ é o negócio onde divide as concavidades que esqueci o nome.*
> ***PP****: Ponto de inflexão.*
> ***EPM****: A concavidade é para baixo para $x < 0$ e para cima para $x > 0$. Tem duas concavidades. Eu preciso saber quantas vezes a função corta o eixo x?*
> ***PP****: Para fazer um esboço interessante, sim!*
> ***EPM****: A função possui um máximo relativo quando $x = -1$ e um mínimo relativo para $x = 1$ e não possui máximo e mínimo absolutos, pois ela cresce indefinidamente* (apontando para $x > 1$) *e decresce indefinidamente* (apontando equivocadamente para a função em $x < -1$).

Diante disso, o estudante calculou e encontrou os pontos $(-1, 5)$ e $(1, 1)$, esboçou a curva e localizou também o ponto de inflexão $(0, 3)$. Na sequência, apresentamos o cálculo da $TVI_2(x)$ deste estudante e os argumentos utilizados por ele no esboço da curva desta função ($y = x^3 - 3x + 3$) a partir da concavidade.

Figura 39: Esboço da curva da função $y=x^3-3x+3$ a partir da $TVI_2(x)$.



b) Calcule a TVI_2, o que isso significa

$TVI_1 = 3x^2 - 3$ $\qquad h = \Delta x$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x+h)^2 - 3] - (3x^2 - 3)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) - 3] - 3x^2 + 3}{\cancel{x} + h - \cancel{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\cancel{3x^2} + 6hx + 3h^2 \cancel{-3}] \cancel{-3x^2} \cancel{+3}}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6hx + 3h^2}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(6x + 3h)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3h \Rightarrow TMV \qquad h = 0$$

$TVI_2 = 6x + 3\cdot(0)$

$TVI_2 = 6x$

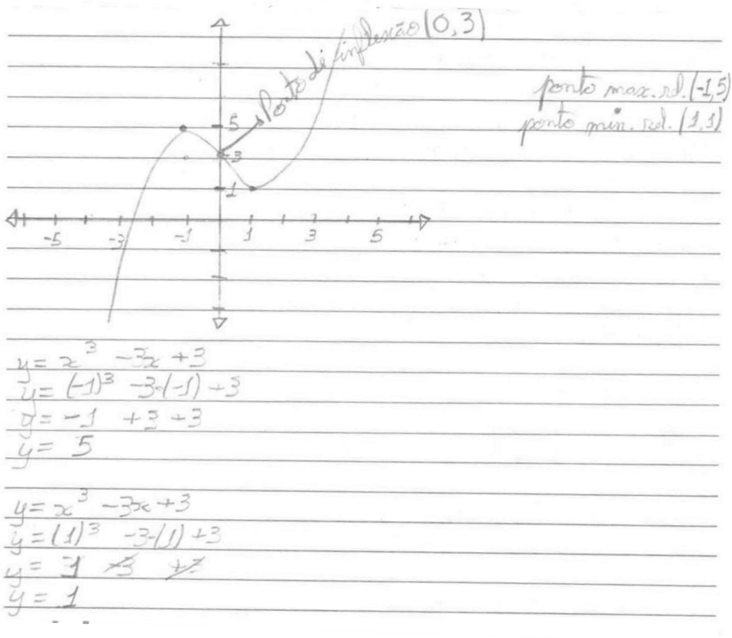
⊖ 0 ⊕ → ponto de inflexão

os coeficientes angulares da função decrescem (concavidade para baixo) para $x < 0$;

os coeficientes " " " crescem (concavidade para cima) para $x > 0$.

Continua na próxima página.

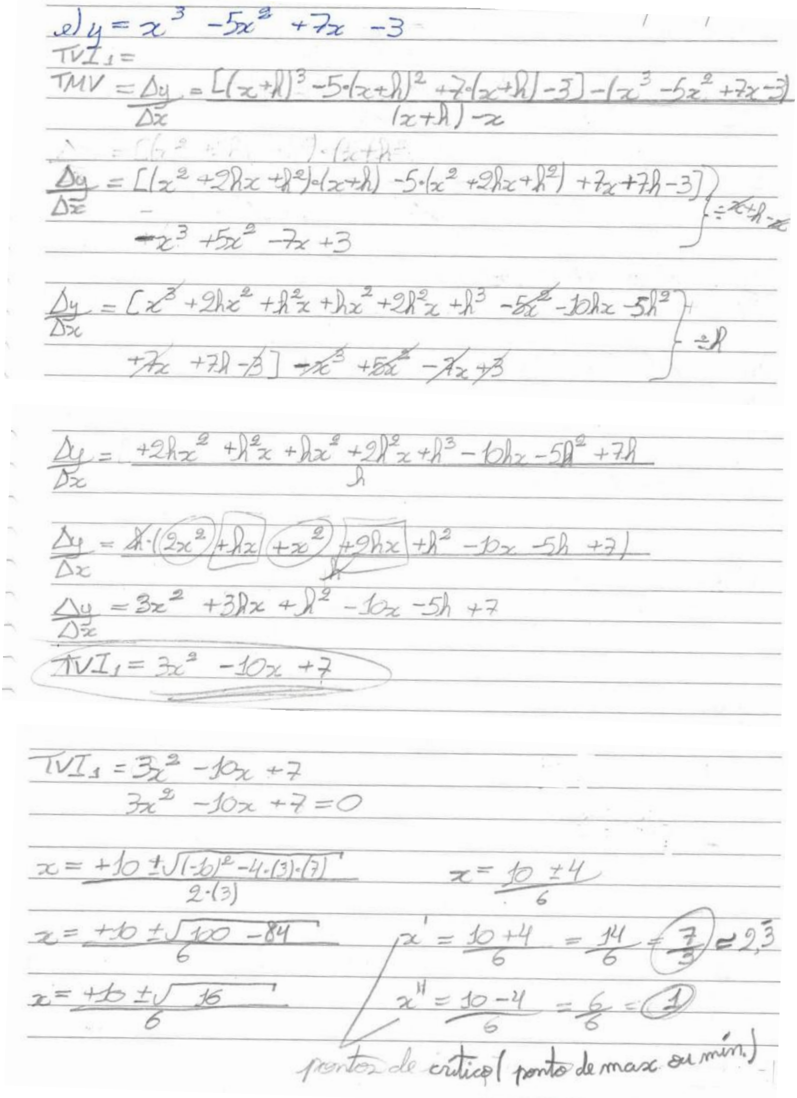
Continuação da figura 39.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

As proposições utilizadas para inferir a respeito da curva possuem valor lógico de verdade, valor epistêmico e social. O discurso utilizado pelo estudante do PM combina registro algébrico com registros da língua natural. Contudo, o esboço se efetivou a partir da identificação e coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas relativas à concavidade, apresentadas na tabela 18. As mesmas ideias são evidenciadas na resolução da função $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ do Momento 6, a seguir exposta.

Figura 40: Esboço da curva da função $y=x^3-5x^2+7x-3$ a partir da análise da $TVI_2(x)$.



e) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$TVI_1 =$

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3 - 5\cdot(x+h)^2 + 7\cdot(x+h) - 3] - (x^3 - 5x^2 + 7x - 3)}{(x+h) - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [(x^2 + 2hx + h^2)\cdot(x+h) - 5\cdot(x^2 + 2hx + h^2) + 7x + 7h - 3] - x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \quad \div x+h-x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [\cancel{x^3} + 2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3 - \cancel{5x^2} - 10hx - 5h^2 + \cancel{7x} + 7h - \cancel{3}] - \cancel{x^3} + \cancel{5x^2} - \cancel{7x} + \cancel{3} \quad \div h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3 - 10hx - 5h^2 + 7h}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(2x^2 + \boxed{hx} + x^2 + \boxed{2hx} + h^2 - 10x - 5h + 7)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 10x - 5h + 7$$

$TVI_1 = 3x^2 - 10x + 7$

$TVI_1 = 3x^2 - 10x + 7$

$3x^2 - 10x + 7 = 0$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot(3)\cdot(7)}}{2\cdot(3)} \qquad x = \frac{10 \pm 4}{6}$$

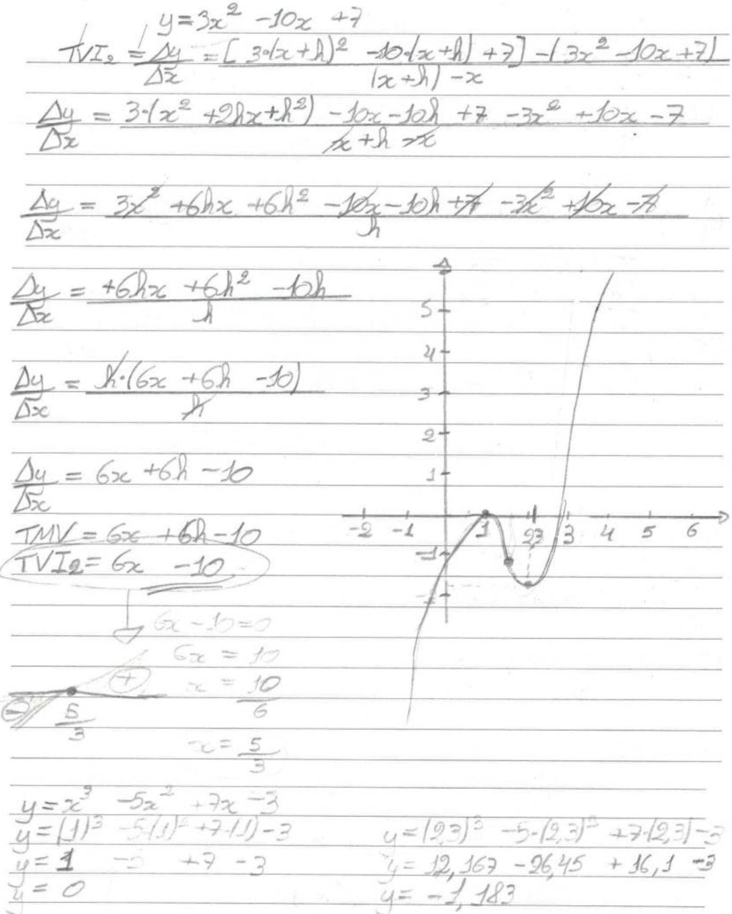
$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} \qquad x' = \frac{10+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \simeq 2,\bar{3}$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{16}}{6} \qquad x'' = \frac{10-4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

pontos de crítico (ponto de max ou min)

Continua na próxima página.

Continuação da figura 40.



$y = 3x^2 - 10x + 7$

$TVI_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x+h)^2 - 10\cdot(x+h) + 7] - (3x^2 - 10x + 7)}{(x+h) - x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\cdot(x^2 + 2hx + h^2) - 10x - 10h + 7 - 3x^2 + 10x - 7}{\cancel{x} + h \cancel{- x}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{3x^2} + 6hx + 6h^2 - \cancel{10x} - 10h + \cancel{7} - \cancel{3x^2} + \cancel{10x} - \cancel{7}}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+6hx + 6h^2 - 10h}{h}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{h}\cdot(6x + 6h - 10)}{\cancel{h}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 6h - 10$

$TMV = 6x + 6h - 10$

$TVI_2 = 6x - 10$

$6x - 10 = 0$

$6x = 10$

$x = \frac{10}{6}$

$x = \frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}$

$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$y = (1)^3 - 5(1)^2 + 7\cdot(1) - 3$

$y = 1 - 5 + 7 - 3$

$y = 0$

$y = (2,3)^3 - 5\cdot(2,3)^2 + 7\cdot(2,3) - 3$

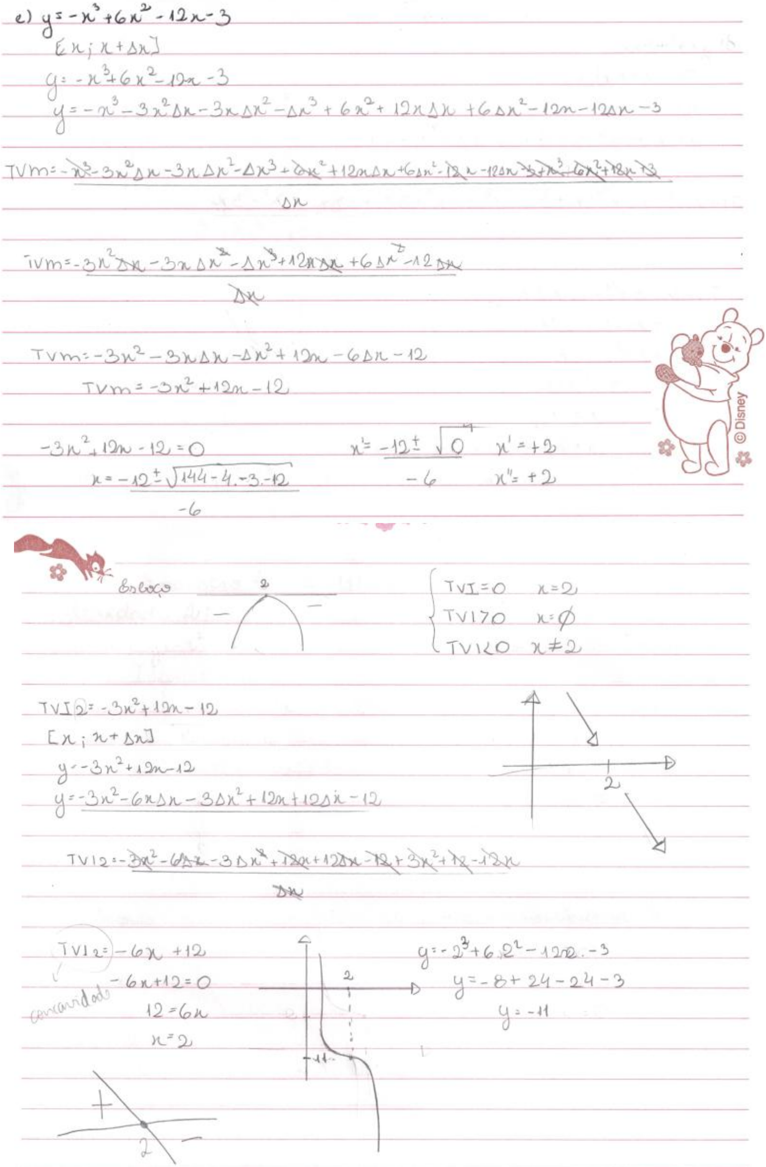
$y = 12,167 - 26,45 + 16,1 - 3$

$y = -1,183$

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

No caso dos estudantes da turma, as resoluções seguiram as etapas planejadas na sequência didática: encontrando a $TVI_1(x)$, analisando seu sinal, conjecturando sobre a variação da função, encontrando os pontos máximos e mínimos e, se necessário, trabalhando com a $TVI_2(x)$. A figura a seguir expõe o esboço da função $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$, do Momento 6.

Figura 41: Esboço da curva da função $y=-x^3+6x^2-12x-3$.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E2 da turma.

Na resolução da figura 41, evidenciamos um discurso expandido de forma lógica, com a acumulação de informações e utilização das propriedades, conceitos e argumentos requeridos para esboçar a curva. Evidenciamos a conversão entre registro de representação algébrico e gráfico a partir de unidades básicas vinculadas à $TVI_1(x)$ e à $TVI_2(x)$. Neste tipo de discurso, porém, muito comum em Matemática, o estudante não demonstra engajamento para explicar suas conclusões por meio da expansão natural.

5.4.5 Esboço de curvas

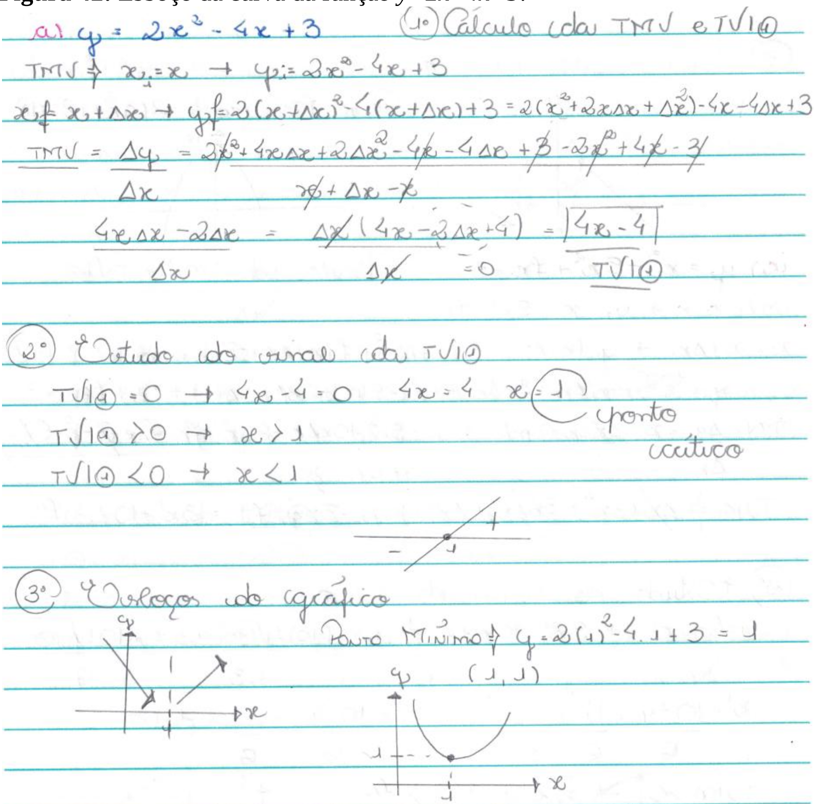
As ações que envolvem o esboço de curvas permearam todos os encontros das sequências didáticas. A análise do domínio e da imagem, a identificação de pontos máximos, mínimos e de inflexão, de intervalos de crescimento e decrescimento e conclusões a respeito da concavidade, bem como o estudo do sinal foram atividades profundamente discutidas nos seis Momentos planejados e em todos os encontros das sequências didáticas. Contudo, conjecturar sobre o esboço de curvas na perspectiva da interpretação global de propriedades figurais a partir das taxas de variação instantâneas, foi possível, a partir de atividades previstas no Momento 4.

Nas sequências didáticas, nos deparamos, com algumas lacunas de aprendizagem em elementos essenciais para este trabalho, como o estudo do sinal de funções, a definição e cálculo de raízes de uma função, o (des)conhecimento da simbologia matemática de modo geral, especificamente, com relação a intervalos reais, plano cartesiano, par ordenado, domínio e imagem de funções, entre outros. Por isso, essas ideias precisaram ser revistas e retomadas em diversos encontros, porém, ainda assim, o caminho trilhado nas sequências nos permitiu olhar para os gestos intelectuais dos estudantes e refletir sobre eles.

Nossa proposta visa, no esboço de curvas de funções no EM, trabalhar no sentido de utilizar a compreensão da variabilidade da função para oportunizar a conversão do registro algébrico para gráfico e do gráfico para o algébrico perpassando a identificação de unidades simbólicas gráficas e algébricas relacionadas à variabilidade da função. Na conversão do registro gráfico para o algébrico não intencionamos chegar à expressão da função, mas ter ideia e compreensão de sua variação ($TVI(x)$), de acordo com a figura 18.

Nas construções dos estudantes evidenciamos as conversões necessárias, entre registro algébrico e gráfico e a volta a partir da identificação de variáveis simbólicas e gráficas, e além disso, da identificação das mudanças que as unidades simbólicas ocasionam na gráfica e que as gráficas ocasionam na simbólica, não relacionada à expressão algébrica da função, mas sim, à taxa de variação instantânea desta função. A seguir, expomos algumas construções dos estudantes na perspectiva proposta e que evidenciam a interpretação global das propriedades figuras.

Figura 42: Esboço da curva da função $y=2x^2-4x+3$.



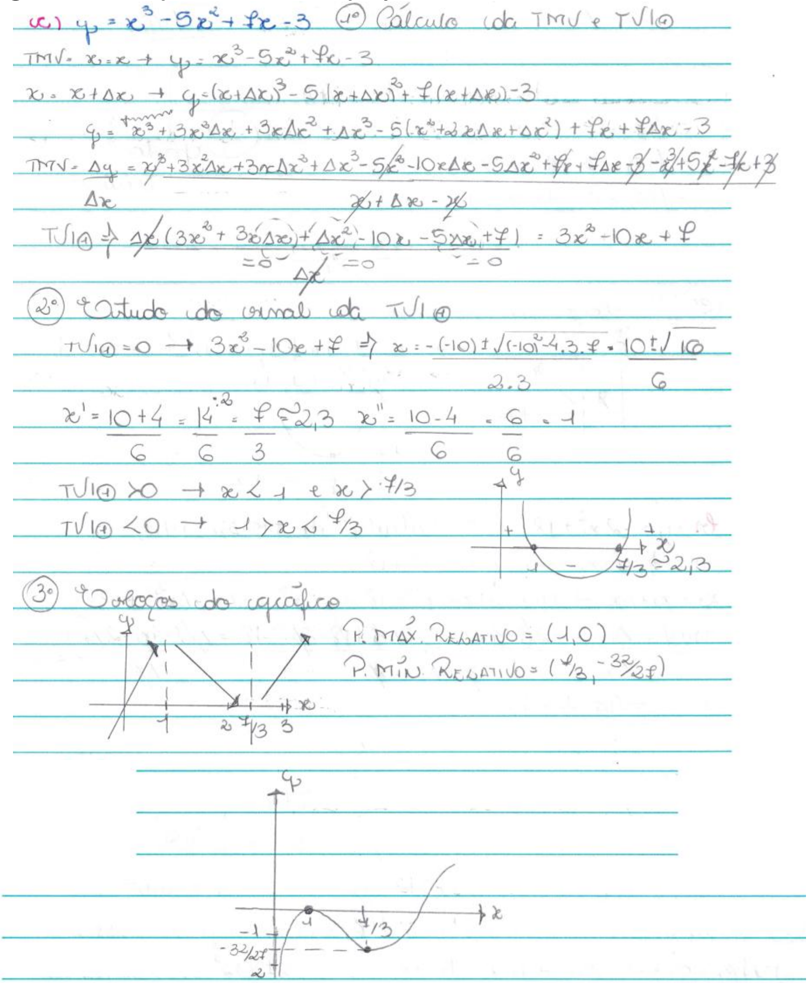
Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E2 da turma.

No esboço da curva da função $y = 2x^2 - 4x + 3$ do Momento 6, exposta na figura 42, observamos que, primeiramente, o estudante organizou seu discurso em etapas como forma de organizar os procedimentos necessários. De acordo com a resolução da figura 42, a fim de esboçar a curva, a $TMV(x)$ para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$ foi encontrada e, a partir deste resultado, a $TVI_1(x)$, tomando Δx como um infinitesimal. Na sequência, foi analisado o sinal da $TVI_1(x)$ e, por fim, a parábola foi esboçada e o ponto crítico identificado. Antes do esboço "final" foi construído um esboço de variabilidade com flechas que determinam o crescimento e decrescimento, chamada por Thomas Jr. e Finney (1988) de "envoltória" formada pelas retas tangentes dentro da qual a curva fica contida e indica seu formato.

Com relação ao seu discurso, o estudante utilizou uma expansão do tipo lógica, formada por proposições válidas matematicamente, tendo assim, um valor lógico de verdade. A maioria dos estudantes da turma apresentaram suas soluções a partir de uma expansão do tipo lógica, não utilizando a expansão em língua natural para expressar suas conclusões. Isso se verifica também nas construções apresentadas nas figuras 43 e 44, expostas a seguir.

Especificamente com relação à figura 43, a solicitação era esboçar a curva da função polinomial do terceiro grau $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Neste caso, a $TVI_1(x)$ é uma função polinomial do segundo grau com duas raízes reais e distintas, cuja análise do sinal foi realizada esboçando a parábola por meio das suas raízes e da concavidade, identificada pelo sinal do coeficiente a da $TVI_1(x)$. A concavidade não foi analisada uma vez que a $TVI_1(x)$ é suficiente. A figura 40 apresenta a resolução da mesma função, mas realizada pelo estudante do PM, o qual esboçou a curva com base na concavidade.

Figura 43: Esboço da curva da função y=x^3-$5x^2$+$7x$-3.

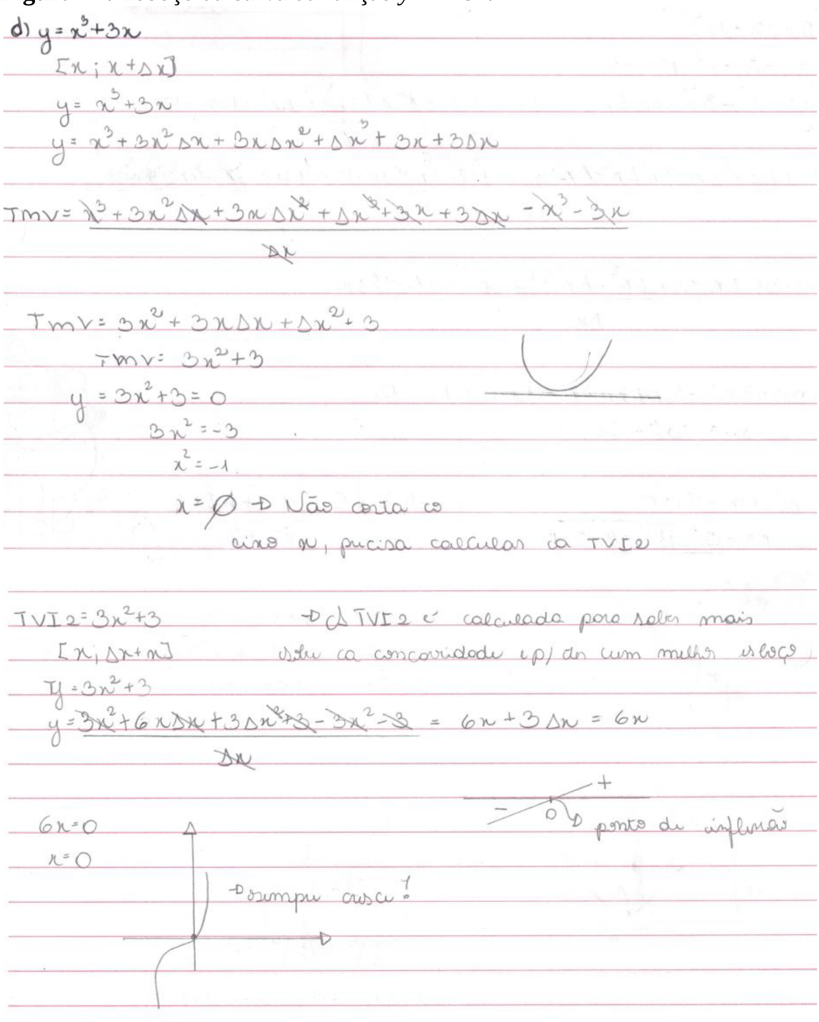


Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E2 da turma.

As propriedades e argumentos necessários para esboçar a curva na resolução da figura 43 foram utilizados, mesmo que implicitamente. É uma resolução com valor lógico de verdade, valor epistêmico e social.

O esboço a seguir é da função $y = x^3 + 3x$ do Momento 6, cuja $TVI_1(x)$ não possui raízes reais e a única análise possível é a da $TVI_2(x)$.

Figura 44: Esboço da curva da função $y=x^3+3x$.

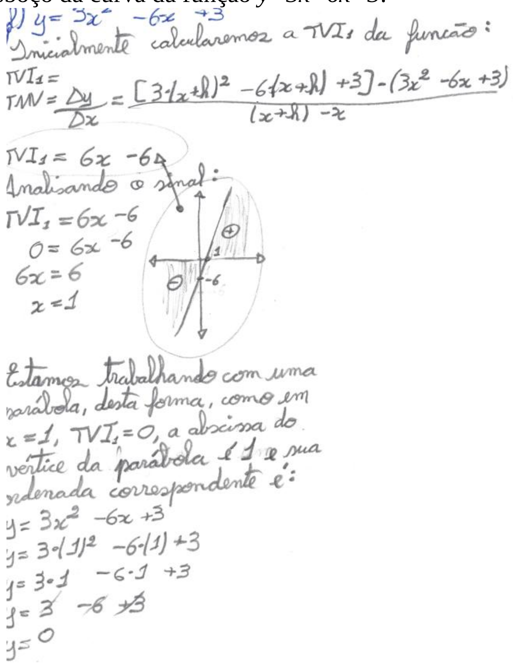


Fonte: Atividades desenvolvidas pelo estudante E3 da turma.

Para o esboço da curva da função $y = x^3 + 3x$, como consta na resolução da figura 44, foi necessário encontrar e analisar a taxa de variação de segunda ordem ($TVI_2(x)$), uma vez que a $TVI_1(x)$ é sempre positiva e informa apenas que a curva é crescente. Para melhorar o esboço, calculou-se a $TVI_2(x)$, a qual informa sobre os pontos de inflexão e a concavidade. Contudo, não fica claro se o estudante utilizou a relação entre a $TVI_2(x)$ e a concavidade para esboçar a curva pois não está explícito se o estudo do sinal da $TVI_2(x)$ foi realizado para avaliar a concavidade, mesmo porque, também não conseguimos concluir a partir do esboço final da curva.

Nas figuras 45 e 46 a seguir, expomos construções do estudante do Programa Mentores para o esboço da curva de uma função[27] polinomial do segundo e do terceiro grau, respectivamente. Na figura 45, o esboço da curva $y = 3x^2 - 6x + 3$ a partir de um discurso repleto de inferências, alternando a expansão natural e lógica que demonstra o engajamento o estudante na comunição de suas conclusões. Este mesmo tipo de discurso é evidenciado na figura 46, que apresenta o esboço da curva da função $y = x^3 + 6x - 3$.

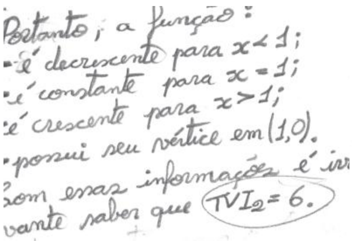
Figura 45: Esboço da curva da função *y=3x²-6x+3*.



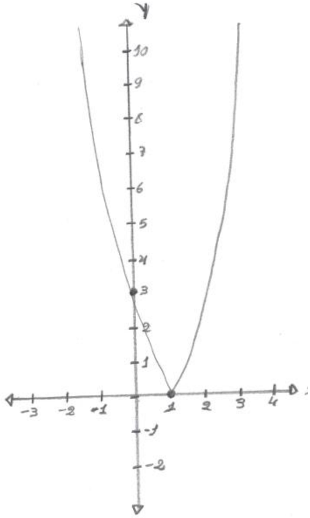
Continua na próxima página.

[27] Essas duas funções propostas ao estudante do Programa Mentores (EPM) não constam nos Momentos planejados, elas foram atividades extras solicitadas para o último encontro.

Continuação da figura 45.

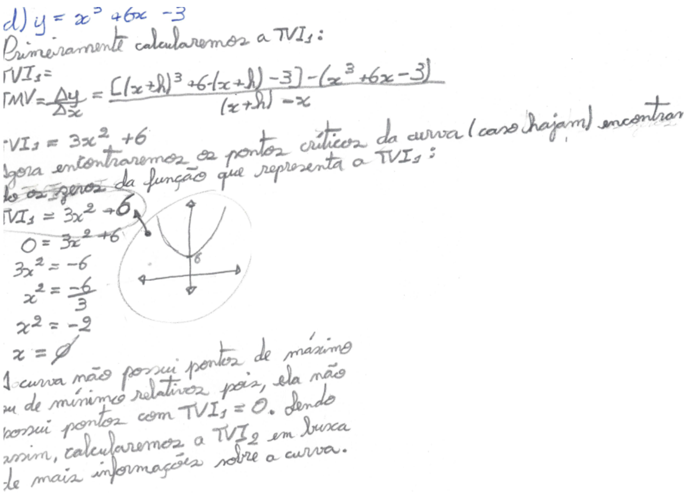

Portanto, a função:
- é decrescente para $x < 1$;
- é constante para $x = 1$;
- é crescente para $x > 1$;
- possui seu vértice em (1,0).

Com essas informações é im
vante saber que $TVI_2 = 6$.



Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Figura 46: Esboço da curva da função $y=x^3+6x-3$.


d) $y = x^3 + 6x - 3$

Primeiramente calcularemos a TVI_1:

$TVI_1 =$

$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^3 + 6(x+h) - 3] - (x^3 + 6x - 3)}{(x+h) - x}$

$TVI_1 = 3x^2 + 6$

Agora encontraremos os pontos críticos da curva (caso hajam) encontrando os zeros da função que representa a TVI_1:

$TVI_1 = 3x^2 + 6$

$0 = 3x^2 + 6$

$3x^2 = -6$

$x^2 = \frac{-6}{3}$

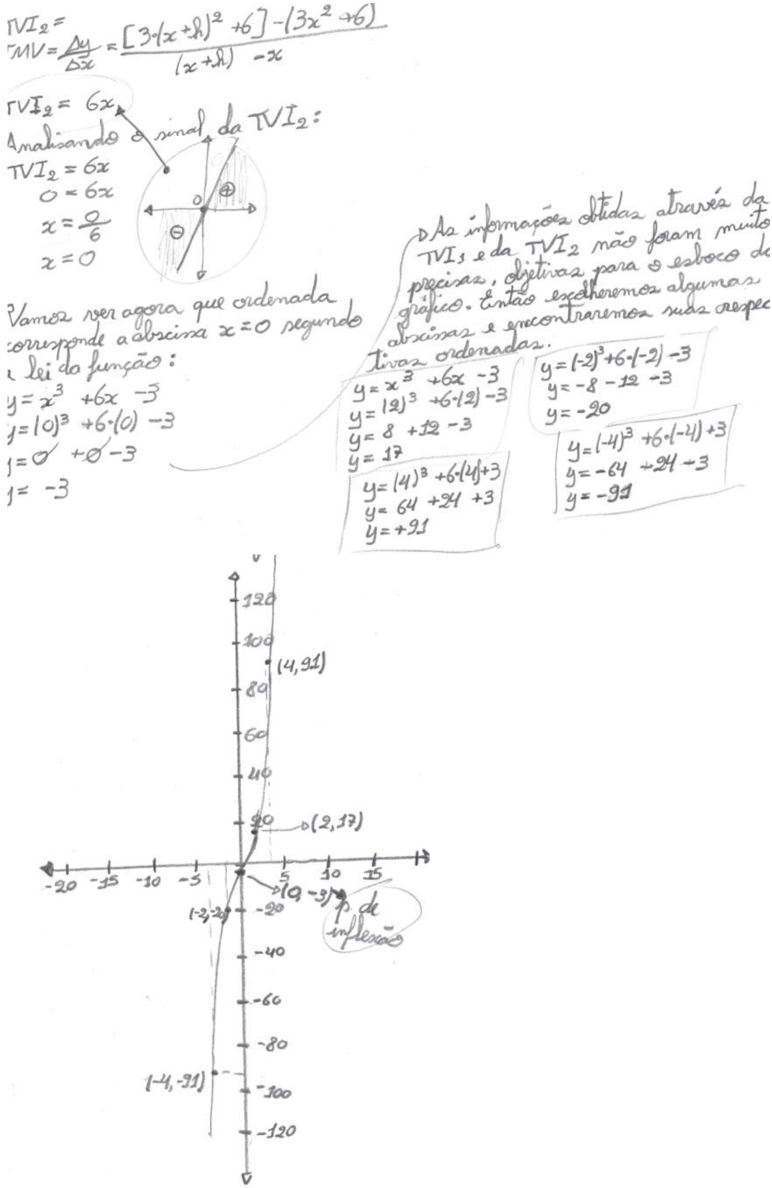
$x^2 = -2$

$x = \emptyset$

A curva não possui pontos de máximo ou de mínimo relativos pois, ela não possui pontos com $TVI_1 = 0$. Sendo assim, calcularemos a TVI_2 em busca de mais informações sobre a curva.

Continua na próxima página.

Continuação da figura 46.



$TVI_2 =$

$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3\cdot(x+h)^2 + 6] - (3x^2+6)}{(x+h) - x}$

$TVI_2 = 6x$

Analisando o sinal da TVI_2:

$TVI_2 = 6x$

$0 = 6x$

$x = \frac{0}{6}$

$x = 0$

Vamos ver agora que ordenada corresponde a abscisa $x = 0$ segundo a lei da função:

$y = x^3 + 6x - 3$

$y = (0)^3 + 6\cdot(0) - 3$

$y = 0 + 0 - 3$

$y = -3$

As informações obtidas através da TVI_1 e da TVI_2 não foram muito precisas, objetivas para o esboço do gráfico. Então escolheremos algumas abscisas e encontraremos suas respectivas ordenadas.

$y = x^3 + 6x - 3$

$y = (2)^3 + 6\cdot(2) - 3$

$y = 8 + 12 - 3$

$y = 17$

$y = (-2)^3 + 6\cdot(-2) - 3$

$y = -8 - 12 - 3$

$y = -20$

$y = (4)^3 + 6\cdot(4) + 3$

$y = 64 + 24 + 3$

$y = +91$

$y = (-4)^3 + 6\cdot(-4) + 3$

$y = -64 + 24 - 3$

$y = -91$

Fonte: Atividades desenvolvidas pelo EPM.

Nesta última figura, evidenciamos que, para o estudante do Programa Mentores, um esboço genérico da curva, apenas com a concavidade não foi suficiente, de acordo com ele “a $TVI_1(x)$ e a $TVI_2(x)$ não foram muito precisas”, o que o levou a encontrar alguns pontos da curva da referida função e localizá-los no plano cartesiano a fim de tornar o gráfico mais preciso. Esta atitude evidencia o apego à abordagem ponto a ponto, mesmo compreendendo a curva em seus aspectos variacionais, ainda assim, a necessidade de exatidão se fez presente.

O material coletado referente às resoluções dos estudantes, com algumas particularidades, explicita o caminho alternativo trilhado de forma coerente, fazendo uso de proposições válidas segundo a argumentação matemática. Na maioria dos esboços, percebemos um discurso com expansão do tipo lógica, mesclando registros algébricos e gráficos, mas utilizando pouco a língua natural. Evidenciamos que as unidades básicas simbólicas foram identificadas e coordenadas com unidades básicas gráficas.

A partir das construções apresentadas, bem como dos diálogos em sala de aula, ficou explícita a falta de hábito dos estudantes de escreverem sobre os resultados encontrados e de explicarem o porquê de suas escolhas e ações na resolução de problemas. Percebemos a necessidade de encontrar resultados numéricos sem explicar esses resultados e as conclusões que ocasionam deles.

Neste sentido, para trabalhar com o esboço de curvas na perspectiva desta tese, é necessário uma mudança de concepção no ensino de Matemática como um todo. A abordagem de esboçar curvas “ponto a ponto”, quando é a única trabalhada no ensino, pode tornar-se um processo mecânico que, conforme abordado no capítulo 3, não possibilita compreender as correspondências semióticas entre o registro algébrico e gráfico, sendo assim, fonte de inúmeras dificuldades. Contudo, não é só no esboço de curvas que processos mecânicos são exclusivamente utilizados. A Matemática é trabalhada a partir deste tipo de entendimento, em que as formas de resolução perpassam técnicas algébricas mecânicas.

6 DISCUSSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

As inquietações de professora de Matemática de ensino médio em início de carreira e o compromisso com a prática de sala de aula despertaram-me, sobretudo, para a compreensão das questões referentes à aprendizagem matemática e conduziram-me na pesquisa sobre o esboço de curvas e as atividades cognitivas envolvidas, na perspectiva da interpretação global das propriedades figurais. Da imersão em um processo de estudo e revisão de literatura sobre o assunto, concluímos a urgência de problematizar os processos e abordagens usuais de esboço de curvas.

O esboço de curvas e a compreensão do fenômeno que elas representam são atividades de suma importância em diversas áreas do conhecimento e também em tarefas cotidianas. Contudo, devido às questões relacionadas ao seu ensino, em que o esboço perpassa mecanicamente a união de pontos no plano cartesiano, encontrados a partir da expressão algébrica, os estudantes demonstram muitas dificuldades.

A impossibilidade de acesso perceptível e instrumental a um objeto matemático e sua apreensão por meio exclusivo de suas distintas representações tornam o ensino e a aprendizagem matemáticos peculiares e distintos de outras áreas da ciência. A compreensão de um objeto matemático está vinculada à articulação de diferentes registros de representação semiótica deste objeto. Assim, compreender as dificuldades de aprendizagem dos estudantes requer uma análise criteriosa sobre as distintas representações semióticas deste objeto, as possibilidades de conversões entre elas e, mais do que isso, a exploração dessas conversões no ensino de forma consciente, explícita e orientada.

Pesquisas apresentadas no capítulo terceiro enfatizam que as dificuldades de aprendizagem relacionadas ao esboço de curvas e, mais genericamente, às funções, se originam de um enfoque, praticamente único, dado no ensino, à construção de gráficos a partir da abordagem "ponto a ponto", a qual não permite a compreensão das conversões entre representações semióticas da função, característica esta fundamental para a aprendizagem de acordo com a teoria de Raymond Duval. As abordagens presentes nos livros didáticos e no próprio ensino atual inviabilizam o trabalho com a variação da função uma vez que restringe o esboço à união de pontos no plano cartesiano, encontrados substituindo valores de x na função, priorizando o desenvolvimento de técnicas algébricas.

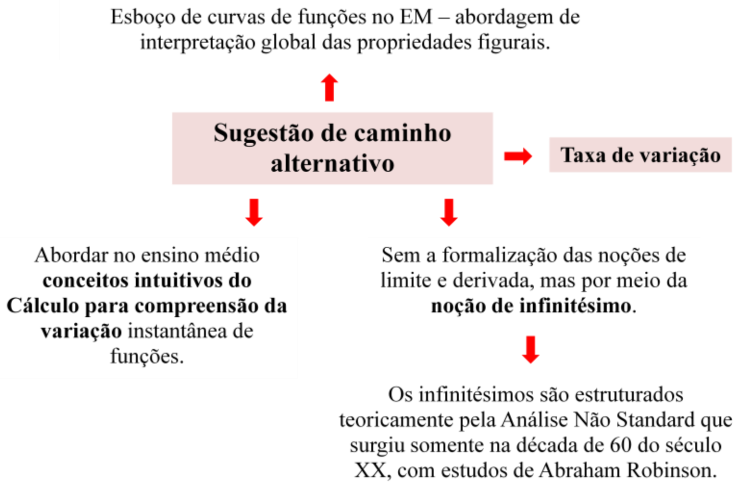
De acordo com Duval (2011a), a abordagem de interpretação global das propriedades figurais possibilita a compreensão integral do esboço de uma curva. Esta abordagem perpassa a análise da congruência entre registro algébrico e gráfico com base nas unidades significativas de cada representação, a partir de recursos que possibilitam identificar essas unidades significativas e coordená-las. Em excursão aos trabalhos ancorados nesta abordagem, encontramos algumas iniciativas a fim de refletir o esboço de curvas a partir de elementos como os parâmetros da expressão algébrica, a translação, a simetria, os elementos do cálculo e o procedimento informático.

A intenção de compreender e esboçar uma curva a partir da sua variabilidade, possibilitando assim, a compreensão da transformação, do dinamismo e do movimento presentes na curva de uma função, fez com que buscássemos na noção de infinitésimos a possibilidade de trabalho no âmbito do ensino médio. Assim, a utilização do recurso taxas de variação por meio dos infinitésimos foi pautada na necessidade de uma compreensão ampla e profunda do conceito de função relacionada ao dinamismo inerente a este objeto matemático. Ademais, a escolha pela noção de infinitésimo perpassa a história da construção dos conceitos matemáticos, e está em consonância com pesquisas que demonstram que esta noção é espontânea aos estudantes, enquanto a abordagem via limites e derivadas, perpassa um “algebrismo” desnecessário neste nível de ensino.

A partir disso, elaboramos um caminho de esboço de curvas, cuja coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas é viabilizada pelas taxas de variação instantâneas da função. Buscamos olhar e compreender o caminho alternativo elaborado trabalhado em sala de aula, olhando-o em suas possibilidades e limitações em diversos aspectos e também pelo viés pedagógico; guiados pela interrogação: *quais são, em nível cognitivo e pedagógico, as possibilidades e as limitações do esboço de curvas de algumas funções do EM, numa perspectiva de interpretação global de propriedades figurais, a partir da análise da taxa de variação, calculada e compreendida a partir da noção de infinitésimos?*

O esquema apresentado na figura 47 possibilita uma visão geral de aspectos importantes que envolvem o caminho alternativo sugerido.

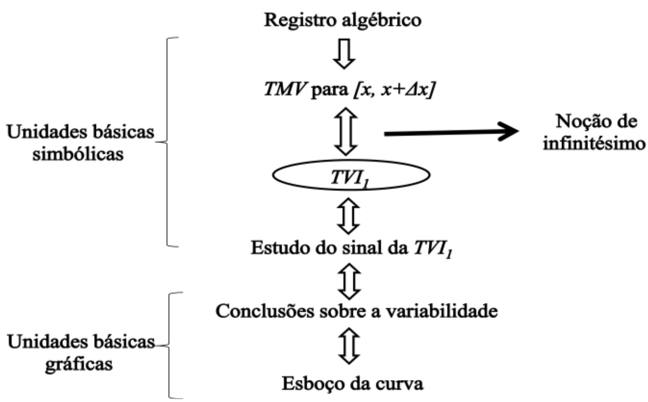
Figura 47: Esquema do caminho alternativo para esboço de curvas no ensino médio.



Fonte: Os autores.

O esquema da figura 48 resume o caminho alternativo para o esboço de funções polinomiais de segundo grau, baseado no cálculo e interpretação da taxa de variação instantânea da função, a partir dos quais é possível coordenar as unidades básicas simbólicas e gráficas.

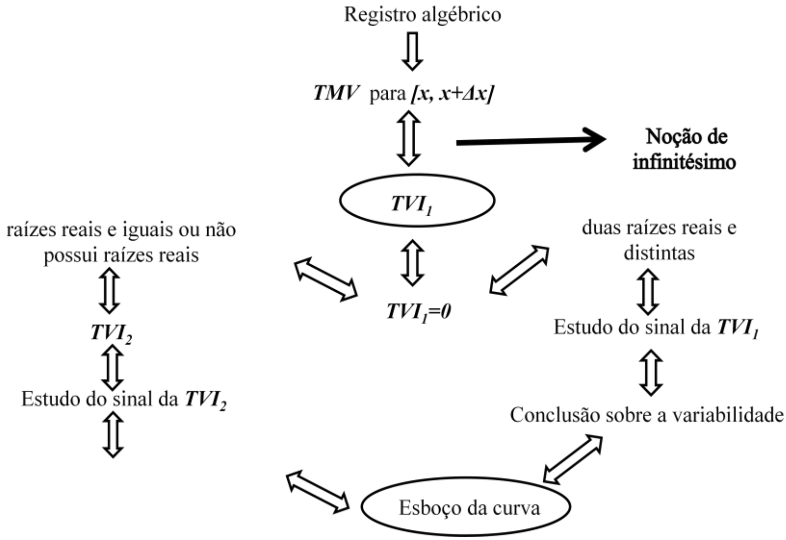
Figura 48: Esquema do caminho alternativo para esboço de curvas de funções polinomiais do segundo grau.



Fonte: Os autores.

A figura 49, por sua vez apresenta peculiaridades do caminho alternativo para funções polinomiais do terceiro grau, necessitando em alguns casos a análise da taxa de variação instantânea de segunda ordem.

Figura 49: Esquema do caminho alternativo para esboço de curvas de funções polinomiais do segundo grau.



Fonte: Os autores.

Após análises teóricas e construções que levaram em conta aspectos cognitivos, apresentadas nas tabelas 13, 17, 18, 19 e 20, envolvemos estudantes do terceiro ano do ensino médio para o desenvolvimento de uma sequência didática elaborada a partir de elementos da Engenharia Didática. A pesquisa caracterizou-se como qualitativa e foi realizada com o objetivo de refletir sobre os gestos intelectuais *requeridos no* e que *constituem o* trabalho de esboço de curvas na perspectiva da interpretação global. Cognitivamente, nos interessamos nas atividades fundamentais que perpassam a apropriação do conhecimento matemático; pedagogicamente, buscamos extrair elementos a fim de problematizar o ensino e que futuramente auxiliem na elaboração um plano de trabalho na perspectiva proposta. Para tanto, as variáveis matemáticas que *interagem no* e *emergem do* esboço de curvas, expostas no esquema da figura 50, foram analisadas *a priori* e a *posteriori* a fim de deflagrar reflexões nesta perspectiva.

Figura 50: Variáveis matemáticas que *interagem no* e *emergem do* esboço de curvas.

Fonte: Os autores.

A abordagem de esboço de curvas, chamada por nós de caminho alternativo, foi trabalhada em duas sequências didáticas desenvolvidas em momentos distintos. Num primeiro momento, trabalhamos com estudantes de uma escola estadual de Erechim e, num segundo momento, com um estudante participante do Programa Mentores do PIC da OBMEP. O foco do trabalho foram funções polinomiais do segundo e terceiro graus, que por serem contínuas em todo o domínio $\mathbb{R}$, não causariam problemas relativos à existência das taxas de variação. Com o estudante do Programa Mentores, foi possível ir além e construir um diálogo acerca das funções seno e cosseno. Nesta sequência foram resolvidas questões diretas, a fim de reconhecer objetivamente as atividades cognitivas mobilizadas e as resoluções dos estudantes.

Nosso objetivo foi, então, deflagrar reflexões e sinalizar possibilidades para a construção de abordagens diferenciadas de ensino e formas de pensar, compreender e esboçar curvas. Desta forma, em consonância com os objetivos e encaminhamentos da prática planejada, os estudantes da turma e o estudante do Programa Mentores experimentaram uma nova forma de "olhar" curvas.

A partir dos dados apreendidos ao longo da investigação, algumas reflexões e compreensões são evidenciadas, entre elas, que este caminho permite uma mudança em termos de compreensões de curvas e funções na medida em que coloca o entendimento do movimento no centro do processo. A noção de infinitésimos, trabalhada de forma intuitiva, se mostrou frutífera no cálculo e entendimento da taxa de variação instantânea de uma função, com potencial para a compreensão do esboço da curva no contexto deste trabalho e âmbito do EM.

A utilização da taxa de variação da função possibilitou as conversões necessárias de registros de representação semiótica, mediadas pelas unidades significativas. As resoluções dos estudantes apresentadas expõem a forma como estes conceberam o caminho alternativo e fizeram uso das relações entre expressão algébrica da função e gráfico.

No que tange às práticas pedagógicas e ao que o ensino promoveu em termos de argumentação e utilização de propriedades, exploramos os diálogos e resoluções dos estudantes com relação ao discurso utilizado. Esta investigação possibilitou concluir que o ensino atual não promove o desenvolvimento de um discurso, não incentivando a comunição oral e escrita a respeito das inferências realizadas sobre os problemas. Diversas dificuldades no ato de elocução dos estudantes, oriundas de lacunas na função referencial dos objetos matemáticos e também da não promoção nas aulas de Matemática de momentos de comunicação de resultados e procedimentos, foram evidenciadas. As dificuldades na designação de objetos matemáticos se devem, sobretudo, a um ensino que considera as representações semióticas com fins apenas de comunicação e as operações de conversão como espontâneas. Aliás, sinalizamos a falta de clareza por parte dos professores de Matemática da importância dos diversos registros de representação semióticos de um objeto matemático e a coordenação destes, não somente para fins de comunicação, mas como essenciais nas atividades matemáticas. Assim sendo, as atividades que para Duval são fundamentais para a aprendizagem, são vistas, no ensino, como evidentes e espontâneas.

A falta de hábito dos estudantes em comunicar suas conclusões, explicar suas escolhas e justificar os caminhos escolhidos nas resoluções, bem como de participar das aulas e fazer perguntas, dificultando o diálogo, é consequência de um ensino em que o professor é o detentor do saber, quem transmite o conhecimento e o aluno é apenas ouvinte que acumula informações e age mecanicamente. A abordagem ponto a ponto, comumente utilizada para trabalhar com o esboço de curvas, é um exemplo de um ensino que restringe as possibilidades de compreensão e valoriza técnicas algébricas, não permitindo um olhar amplo sobre as características inerentes ao conceito de função.

Diante disso, faz-se necessária uma urgente mudança na cultura dos processos de ensino e aprendizagem deste objeto matemático, tão importante para a compreensão dos mais variados fenômenos da vida humana. É necessário que se promova, no contexto do ensino médio, um ensino de funções e esboço de curvas em sintonia com as possibilidades de aprendizagem dos estudantes e, mais do que isso, com as necessidades atuais em termos de conhecimentos demandados pelo cidadão. Essas iniciativas, de refletir caminhos alternativos, possibilitam que o ensino de esboço de curvas seja permeado por diferentes olhares. Olhares voltados à variação, como no caso deste trabalho, ou à translação, simetrias, parâmetros; formando um conjunto de possibilidades que se complementam com potencialidades a novas leituras e interpretações gráficas.

Como intenções futuras, vislumbramos o trabalho nesta perspectiva com o auxílio das tecnologias, a fim de aprofundar a compreensão da relação entre as taxas de variação e declividades de retas secantes e tangentes. Além disso, objetiva-se problematizar outras funções, como as trigonométricas, as quais foram abordadas de forma breve, mas que possuem potencial de compreensão via variação. E, a partir das compreensões deflagradas nessas ações, elaborar um plano de trabalho pedagógico que viabilize o trabalho nesta perspectiva em sala de aula.

Por fim, ressaltamos que esse estudo não tem a ambição de apresentar um método de ensino ideal, que resolve os problemas de aprendizagem matemática, mas sim, constitui-se numa reflexão sobre o ensino e a aprendizagem proporcionados pelo caminho alternativo sugerido, olhados a partir da apropriação do conhecimento matemático baseado na teoria cognitiva de Raymond Duval.

REFERÊNCIAS

ALVES, A.J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas em Educação. *Caderno Pesquisa*, São Paulo, pp. 53-61, 1991.

ANDRÉ, S.L.C. *Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio*. 2008. 241 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.). *Didática das Matemáticas*. Instituto Piaget – Coleção Horizontes Pedagógicos, 1996.

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2° grau. *Revista do Professor de Matemática*, n° 18, pp. 1– 9, 1991.

ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável*. Vol. 1, 7 ed., LTC Editora, 2003.

ÁVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio? *Revista do Professor de Matemática*, nº 60, pp. 30 – 38, 2006.

BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro? *Temas e Debates*, Blumenau, v.8, n.6, p.5-21, 1995.

______________. *Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

______________. Infinitésimos: Quem Ri por Último? *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n.36, p.69-82, jan. 2000.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral*. 1999. 195 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BICUDO, M. A. V.. *Pesquisa qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica*. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.), Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, pp. 101-114. 2010.

BOTELHO, L.M.L. *Funções Polinomiais na Educação Básica: Uma Proposta.* Monografia de Pós-graduação. Niterói: UFF, 2005.

BOYER, C. B. *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*. Tradução de Higino H. Domingues – São Paulo, SP: Editora ATUAL, 1992.

___________. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: USP, Edgard Blücher, 3ªed, 2010.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; BASSOI, T. S. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. *Educ. Matem. Pesq.,* São Paulo, v.16, n.2, pp. 479-503, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Parte I*. Brasília, 2000a. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf . Acesso em Agosto de 2016.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Parte III*. Brasília, 2000b. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf . Acesso em Agosto de 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - *PCN+: Ensino Médio*. Brasília, 2002. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em Agosto de 2016.

CABRAL. T. C. B; BALDINO, R. R. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Tipografia Matemática, Lisboa, 1951.

CARVALHO, T. F. de; O'TTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. *Educação Matemática Pesquisa*, v.

8, n. 1, pp. 13-43, São Paulo, 2006.

CATTO, G. G. *Registros de representação e o número racional – Uma abordagem nos livros didáticos*. 2000. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CAVASOTTO, M. *Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar*. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CORNU, B. *Aprentissage de la notion de limite:* conceptions et obstacles. 1983. Tese (Doctorate de Toisieme Cycle de Mathèmatiques Pure) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenole, 1983.

CORRÊA, M. O. S.; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). *As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática*. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

CURY, H. N. *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de Erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae*, v.6, n.1, jan./jun. 2004, p.27-36.

DE SOUZA, G.A; NASSER,L.; TORRACA, M.A.A.; ASSEMANY, D.; AZEVEDO, C.A.M. *A Transição do Ensino Médio para o Superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas*. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, PR, 2013.

DIONÍSIO, F.A.Q.; BRANDT, C.F. *O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática*. Anais da IX ANPEDSUL- Seminário de pesquisa da região sul, 2012.

DUCLOS, R.C. Cálculo no 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, nº 20, p. 28, 1992.

DUVAL, R. *L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique*. Cours sur les aprentissages intellectuels. PUC/SP, 1999.

_________. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

_________. *Semiósis e pensamento humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_________. *Semiosis y pensamiento humano*: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.

_________. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322. Florianópolis , v.6, n.2, p.91-112, 2011a.

_________. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

_________. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Méricles T. Moretti. *Revemat*, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a.

________. Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012b.

________. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez. 2012c. Disponível em: http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa . Acesso em Maio de 2016.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

FONSECA, V.G. da; SANTOS, A.R. dos; NUNES, W.V. Estudo Epistemológico do Conceito de Funções: uma retrospectiva. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática* – ENEM. Curitiba, PR, 2013.

GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos computacionais*: O Caso da Derivada. Tese de Doutorado. Universidade Ferderal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2004.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M. *Magnificação e Linearidade Local*: Novas Tecnologias no Ensino do Conceito de Derivada. XXIV CNMAC. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, pp. 1 – 10, 2002.

GOMES, R. Q. G. *Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações*. Rio de Janeiro, 2010. 112p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

IRIAS, D. F. ET AL. Cálculo Diferencial e Integral: analisando as dificuldades dos alunos de um curso de licenciatura em matemática. *Revista de Educação Matemática da UFOP*, v. I. 2011. Disponível em http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view/343. Acesso em: 01/08/2016.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. *Pesquisa em Educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LUIZ, L. S. *Esboço de curvas no ensino superior*: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MAIA, A.de M.; TOMAZETTI, E.M. o Ensino Médio Politécnico no RS, Seminário Integrado, Interdisciplinaridade: desafios lançados. *Anais da X Anped Sul*, Florianópolis, SC, 2014. Disponível em: http://xanpedsul.faed.udesc.br/publicacao/trabalhos_completos.php

MATOS FILHO, M. S.; MENEZES, J. E. Como os alunos do ensino médio estão construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais 1º e 2º graus. *Anais do X ENEM*, Salvador, BA, 2010.

MERLINI, V. L. *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental*. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MILANI, R. *Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo*. 2002. 287 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio claro, São Paulo, 2002.

___________. Limite e Infinitésimos no Cálculo diferencial e Integral. VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. *Anais...*, Universidade federal de Pernambuco, Recife, PE, 2004.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem de matemática. *Contrapontos*, ano 2, n.6, p. 343-362, Itajaí, set./dez. 2002.

_______________. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo. v.12, n.3, p.529-547, 2010.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O Procedimento Informático de Interpretação Global no Esboço de Curvas do Ensino Universitário. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). *As contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa em Educação Matemática*. Ijuí: Editora Unijuí, p. 67-81, 2014.

MORETTI, M.T.; FERRAZ, G. A.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante* – Revista de Investigação em Educação Matemática, v. XVII, n.2, 2008.

MORETTI, M.T.; THIEL, A. A. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. *Praxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 379-396, jul./dez. 2012.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Tradução: Magda Melo. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2008.

NASCIMENTO, J. L. *Uma abordagem para o estudo de limites com uso de pré-conceitos do cálculo diferencial e integral*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. Anais... Porto Alegre: PUC, 2001.

NÖTH, W. *A Semiótica no Século XX*. 3. Ed. São Paulo: Annablume, 2005.

_______. *Panorama da semiótica***:** de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OLIVEIRA, T. A. de. *Análise Não-Standard:* uma apologia ao seu ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE/UNESP, 1993.

OLIVEIRA, F. R. *Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio*. 2010. 58 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

OLIVEIRA, M.C.A.; RAAD, M.R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. *Boletim GEPEM*. nº 61, pp. 125-137, Jul. / Dez. 2012.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática* – uma análise da influência francesa. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PEIRCE, C.S. Semiótica. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PEREIRA, V. M. C. *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade.* 2009. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

PINTO, J. M. S. *Métodos infinitesimais de análise matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

POZO, J.I. *Aprendizes e Mestres*: a nova cultura da aprendizagem. Porto Alegre, RS: Artmed, 2002.

PPP. *Projeto Político Pedagógico do Colégio Professor Mantovani*. 2014.

RÊGO, R. M. *Uma abordagem alternativa de ensino de cálculo utilizando infinitésimos.* 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

REZENDE, W. M. *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite*. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: IEM – USU, 1994.

_______________. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

_______________. Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico. *Anais do IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2007.

_______________. Conteúdos digitais para o estudo da variação das funções polinomiais e funções exponenciais no Ensino Médio. *Anais do X ENEM*, Salvador, BA, 2010.

RIO GRANDE SO SUL. Secretaria de Estado da Educação. Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (2011-2014). Porto Alegre, 2011. Disponível em http://servicos.educacao.rs.gov.br/dados/ens_med_proposta.pdf

ROBINSON, A. Non-standard analysis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, ser. A, n. 64, pp. 432-440. Amsterdã, 1961.

____________. *Non-standard analysis* (edição revisada da 1 ed. de 1966). Princeton, Princeton University Press, 1996.

ROMANATTO, M. C. *Número Racional: Relações necessárias à sua compreensão*. Campinas, 1997. 158p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

SADDO, A.; SILVA, M. J. F. Engenharia Didática: evolução e diversidade. *Revemat*, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica*. São Paulo: Brasiliense, 2012.

SANTOS, A. *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental*. 2005. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SARUBBI, P. A.; SOARES, F. *Investigando dificuldades de alunos em problemas de Cálculo de taxas relacionadas*. COBENGE, Recife, PE, 2009.

SAUSSURE, F. de. *Curso de linguística geral*. Tradução de A. Chelini, J. P. Paes, I. Blikstein. São Paulo: Cultrix, 2008.

SILVA, M. O. *Esboço de curvas*: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

SILVA, E.R. *Uma Proposta para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de matemática) – PUCSP, 2012.

SILVA, C.C; ANDRADE, A.P.R.; AZEVEDO, C.L.V.R. O Cálculo no Ensino Médio: as taxas de variação e o conceito de derivada. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM*, 2013.

SILVA, F.A.F; SANTIAGO, M.L., SANTOS, M.C. dos. Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações. *Revemat*, Florianópolis, SC, v. 08, edição especial (dez), p. 190-208, 2013.

STROYAN, K. D.; LUXEMBURG, W. A. J. *Introduction to the theory of infinitesimals*. Nova York, Academic Press, 1976.

TALL, D. O. Intuitive infinitesimals in the calculus. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4, 1980, Berkeley. *Proceedings...* Berkeley: University of Berkeley, p.170-6, 1980.

_________. Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus. *Bulletin of the IMA*, v.18, p.44-8, 1982.

TALL, D. O., VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n.12, p.151-69, 1981.

TEIXEIRA, A. M. *O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo.* 2008. 194 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

THOMAS Jr, G. B.; FINNEY, R. L. *Cálculo e Geometria Analítica*. Tradução de Denise Paravato. Rio de Janeiro: LTC, 1988.

THOMPSON, S. P. *Calculus Made Easy: Being a Very-Simplest Introduction to Those Beautiful Methods of Reckoning which Are Generally Called by the Terrifying Names of the Differential Calculus and the Integral Calculus*. New York: MacMillan Company, 2nd Ed., 1914.

WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. *Cálculo* (George B. Thomas Jr.). Tradução de Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. São Paulo: Addison Weslwey, 2009.

APÊNDICE I – CIÊNCIA E AUTORIZAÇÃO DA 15ª CRE PARA REALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Secretaria de Estado da Educação
15ª Coordenadoria Regional de Educação

DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins e efeitos legais que, objetivando atender as exigências para a obtenção de parecer do Comitê de Ética e Pesquisa com Seres Humanos, e como representante legal da 15ª Coordenadoria Regional de Educação – Erechim /RS, essa regional teve ciência do projeto de pesquisa: Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma interpretação global de propriedades figurais, autorizando assim a sua execução.

Erechim, 30 de junho de 2016.

Clarisse Solange Maronesi
Id. Func.: 1370278/02
Assist. Esp. II / Chefia ... CRE
DOE 11/02/2015 - Pag. 04

Clarisse Solange Maronesi
Coordenadora Regional de Educação – Adjunta

Praça da Bandeira, 190 | Centro | Erechim-RS | CEP: 99700-010| Fone: (54) 3520-2800/FAX: (54) 3522-4340 | E-mail: 15cre@seduc.rs.gov.br

APÊNDICE II – QUESTIONÁRIO ESTUDANTES

Questionário – Estudantes do 3º ano do Ensino Médio

1- Idade:_____________
2- Trabalha? Sim (   ) Não (   )
Se **sim**, em qual turno?_________Quantas horas por dia? ____________
3- Cidade onde reside:______________________________
4- Bairro onde reside:____
5- Com quem reside?____
6- Profissão dos pais ou dos responsáveis:
____
____
7- Por que você estuda nesta escola?
____
____
8- Quer cursar um curso superior? Sim (   ) Não (   )
Se **sim**, qual?____
Em qual universidade?____
Além da escola, como você está se preparando (grupos de estudos, cursinho, aulas particulares) para ingressar na universidade?
____
____
9- Você encontra dificuldades para aprender Matemática?
Sim (   ) Não (   )
Se **sim**, por que você acha que tem essas dificuldades? Quais são essas dificuldades?
____
____
____
Se **não**, por que você acha que não tem dificuldades? Quais são as facilidades?
____
____
____
10-A escola onde você estuda lhe dá condições (espaço físico adequado, professores capacitados, formas de recuperação de conteúdo e notas apropriadas, etc.) de aprendizado? Explique sua resposta (utilize o verso da folha).

APÊNDICE III – TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, Bárbara Cristina Pasa, doutoranda em Educação Científica e Tecnológica da UFSC, estou desenvolvendo a pesquisa denominada *“A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma interpretação global de propriedades figurais”,* sob a orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti. A pesquisa tem objetivo de analisar processos de ensino e aprendizagem que envolvem o esboço de curvas de funções polinomiais do 2º e do 3º no ensino médio, utilizando elementos do Cálculo a partir da noção de infinitésimos e a abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Raymond Duval.

Para tal finalidade, eu ministrarei aulas aos estudantes do 3º ano do Colégio Estadual Professor Mantovani que se colocarem à disposição, nas quartas-feiras, das 17h às 19h, sem algum prejuízo ao desenvolvimento da programação regular da disciplina. Os encontros serão dialogados com foco na resolução de atividades que envolvem o esboço de curvas sobre as quais embasaremos as análises do aprendizado. Ademais, serão desenvolvidas entrevistas coletivas com os alunos, cujo único objetivo é avaliar a sequência de ensino desenvolvida.

Assim, para tanto, gostaria de contar com a sua colaboração, **autorizando seu filho a participar** dessas atividades voluntariamente, as quais serão gravadas em áudio. Ressalto, todavia, que tanto os conteúdos dos questionários quanto os das gravações **preservarão a identidade dos estudantes participantes**. As transcrições das falas dos alunos serão codificadas (símbolos referentes a cada um dos estudantes) sem referência aos seus nomes. A posterior utilização dessas informações transcritas (não imagéticas) manterão essas codificações e terão como objetivo publicações com fins científicos. Portanto, as falas gravadas não serão publicadas, ficando sob a responsabilidade do doutorando; e aquelas falas cujos estudantes ou responsáveis não forem autorizadas, não serão utilizadas.

A qualquer momento da pesquisa o Senhor(a) tem o direito de retirar seu consentimento, bastando comunicar a sua decisão. **Caso deseje aceitar este convite e fazer parte do estudo, por gentileza assine as duas vias ao final deste documento**.

Agradeço desde já sua colaboração, fico à disposição para qualquer outro esclarecimento.

Telefone: (54)91839451. Endereço eletrônico: bapasa1@hotmail.com ou do orientador: mthmoretti@gmail.com. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Trindade, CEP: 88040-900 – Florianópolis/SC.

Erechim, 2016.

Cordialmente. ________________________

Bárbara Cristina Pasa

De acordo.
Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti
==

CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO (Assinado pelo(a) estudante)

Eu,________________________________,RG:________________, abaixo assinado, aceito participar da pesquisa: *"A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma interpretação global de propriedades figurais"*. Declaro que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) sobre a pesquisa. Além disso, estou ciente de que receberei uma cópia desse documento e que, a qualquer momento, poderei retirar meu consentimento sem que isto me leve a qualquer penalidade ou prejuízo, comunicando a doutoranda (Bárbara Cristina Pasa) ou orientador (Méricles Thadeu Moretti) pelo telefone ou e-mail.

Erechim, __________ de ______________________ de 2016.

____

Assinatura

CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO (Assinado pelos pais e/ou responsáveis)

Eu,____________________________________, RG:___________________, abaixo assinado, responsável pelo aluno(a): ________________________________ do ___ ano do Ensino Médio, turma:________, autorizo sua participação na pesquisa: *"A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma* *interpretação global de propriedades figurais"*. Declaro que fui devidamente informado e esclarecido sobre a pesquisa. Além disso, estou ciente de que receberei uma cópia desse documento e que, a qualquer momento, poderei retirar meu consentimento sem que isto me leve a qualquer penalidade ou prejuízo, comunicando a doutoranda (Bárbara Cristina Pasa) ou orientador (Méricles Thadeu Moretti) pelo telefone ou e-mail.

Erechim, _________ de ____________________, de 2016.

____
Assinatura

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, Bárbara Cristina Pasa, doutoranda em Educação Científica e Tecnológica da UFSC, estou desenvolvendo a pesquisa denominada *"A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma interpretação global de propriedades figurais",* sob a orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti. A pesquisa tem objetivo de analisar processos de ensino e aprendizagem que envolvem o esboço de curvas de funções polinomiais do 2º e do 3º no ensino médio, utilizando elementos do Cálculo a partir da noção de infinitésimos e a abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Raymond Duval.

Para tal finalidade, nos encontros do Programa Mentores, eu e o estudante trabalharemos com foco na resolução de atividades que envolvem o esboço de curvas sobre as quais embasaremos as análises do aprendizado. Assim, para tanto, gostaria de contar com a sua colaboração, **autorizando seu filho a participar** dessas atividades voluntariamente, as quais serão gravadas em áudio. Ressalto, todavia, que tanto os conteúdos das resoluções quanto os das gravações **preservarão a identidade do estudante participante**. As transcrições das falas serão codificadas (símbolos referentes a cada um dos estudantes) sem referência ao seu nome. A posterior utilização dessas informações transcritas (não imagéticas) manterão essas codificações e terão como objetivo publicações com fins científicos. Portanto, as falas gravadas não serão publicadas, ficando sob a responsabilidade do doutorando; e aquelas falas cujo estudante ou responsáveis não forem autorizadas, não serão utilizadas.

A qualquer momento da pesquisa o Senhor(a) tem o direito de retirar seu consentimento, bastando comunicar a sua decisão. **Caso deseje aceitar este convite e fazer parte do estudo, por gentileza assine as duas vias ao final deste documento**.

Agradeço desde já sua colaboração, fico à disposição para qualquer outro esclarecimento.

Telefone: (54)91839451. Endereço eletrônico: bapasa1@hotmail.com ou do orientador: mthmoretti@gmail.com. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Trindade, CEP: 88040-900 – Florianópolis/SC.

Erechim, 2017.

Cordialmente. ______________________________

Bárbara Cristina Pasa

De acordo.
Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti
==

CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO (Assinado pelo(a) estudante)

Eu,____________________________________,RG:__________________,
abaixo assinado, aceito participar da pesquisa: *"A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma interpretação global de propriedades figurais"*. Declaro que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) sobre a pesquisa. Além disso, estou ciente de que receberei uma cópia desse documento e que, a qualquer momento, poderei retirar meu consentimento sem que isto me leve a qualquer penalidade ou prejuízo, comunicando a doutoranda (Bárbara Cristina Pasa) ou orientador (Méricles Thadeu Moretti) pelo telefone ou e-mail.

Erechim, __________ de ______________________ de 2017.

____

Assinatura

CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO (Assinado pelos pais e/ou responsáveis)

Eu,______________________________________,RG:_______________, abaixo assinado, responsável pelo aluno(a): _______________________________________ do ___ ano do Ensino Médio, turma:________, autorizo sua participação na pesquisa: *"A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma interpretação global de propriedades figurais"*. Declaro que fui devidamente informado e esclarecido sobre a pesquisa. Além disso, estou ciente de que receberei uma cópia desse documento e que, a qualquer momento, poderei retirar meu consentimento sem que isto me leve a qualquer penalidade ou prejuízo, comunicando a doutoranda (Bárbara Cristina Pasa) ou orientador (Méricles Thadeu Moretti) pelo telefone ou e-mail.

Erechim, __________ de _____________________, de 2017.

____

Assinatura