UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

KELI JACOBY

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PAUTADO NA APRENDIZAGEM, NOS TRABALHOS EM GRUPO E NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

CHAPECÓ
2019

KELI JACOBY

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PAUTADO NA APRENDIZAGEM, NOS TRABALHOS EM GRUPO E NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto.

CHAPECÓ
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, km 02
CEP: 89801-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Jacoby, Keli
O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA ANÁLISE COMBINATÓRIA PAUTADO NA APRENDIZAGEM, NOS TRABALHOS EM GRUPO E NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA. / Keli Jacoby. -- 2019.
102 f.:il.

Orientadora: Rosane Rossato Binotto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Chapecó, SC , 2019.

1. Análise Combinatória. I. Binotto, Rosane Rossato, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

UFFS PROFMAT

KELI JACOBY

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIAPAUTADO NA APRENDIZAGEM, NOS TRABALHOS EM GRUPO E NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto.

Aprovado em: 02 / 10 / 2019

BANCA EXAMINADORA

Rosane Rossato Binotto
Prof. Dra. Rosane Rossato Binotto - UFFS

Carmen Mathias
Prof. Dra. Carmen Vieira Mathias - UFSM

Janice T. Reichert
Prof. Dra. Janice Teresinha Reichert– UFFS

Chapecó/SC, Outubro de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me proporcionado a oportunidade de chegar até aqui, por tornar meu sonho realidade, por não me deixar desanimar e por me mostrar que com ele, eu posso ser tudo que eu quiser.

À minha mãe, Roselei, por me ensinar a lutar pelos meus objetivos e nunca desistir no primeiro obstáculo.

Ao meu amado esposo, Adriano, que acompanhou de perto todo desenrolar do curso e trouxe palavras de ânimo e encorajamento em cada etapa deste mestrado.

À minha orientadora Rosane, por aceitar o convite para me orientar, pelo suporte, pelas suas correções e incentivos.

Aos amigos do curso, em especial Lucélia e Mariana, pelas muitas horas que passamos juntas estudando. Agradeço também aos colegas Patrícia, Vanessa e Francisco pelas inúmeras trocas de material e conhecimento.

Agradeço aos demais professores e alunos deste mestrado que contribuíram de forma significativa para o andamento do curso.

“O conhecimento nos faz responsáveis”.

Che Guevara

RESUMO

A partir da necessidade de tornar o aprendizado em Matemática, por parte dos alunos, mais significativo, segundo a teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel, apresentamos o presente estudo, em que abordamos a possibilidade dos alunos interagirem com o conteúdo matemático. A importância do papel mediador do professor como representante do conhecimento. A importância e função da linguagem na formação de conceitos e a implementação do ensino de Análise Combinatória de forma gradativa e produtiva. Neste sentido traçamos o seguinte objetivo: *Analisar as possíveis contribuições para a aprendizagem significativa dos conteúdos de Análise Combinatória a partir da realização de atividades e/ou resolução de problemas em grupos, explorando a comunicação matemática.* Para isso, desenvolvemos uma proposta de ensino, de Análise Combinatória, embasada na resolução de situações-problema, a fim de desenvolver o pensamento combinatório nos alunos a partir de um ambiente de estímulo a argumentação e discussões em pequenos e grandes grupos. Em um primeiro momento, os alunos resolveram situações-problema sobre conteúdos de Análise Combinatória, sem o uso de qualquer fórmula, utilizando apenas seus conhecimentos prévios. Na sequência apresentamos os conteúdos de Análise Combinatória e suas fórmulas e em terceiro momento os alunos resolveram exercícios e situações-problemas optando por qual método gostariam de resolvê-los, a fim de tornar a aprendizagem significativa. A coleta de dados ocorreu a partir dos testes aplicados durante os encontros bem como as anotações feitas em diário de bordo. A análise dos dados evidencia que esta proposta de ensino foi capaz de contribuir de forma significativa para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, pois os alunos apresentaram avanços na capacidade de resolver problemas envolvendo princípios de contagem. A comparação entre os resultados dos testes de diagnóstico evidencia um significativo crescimento na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas combinatórios. Além disso, a análise revela que a realização das atividades em grupo com ênfase na comunicação matemática foi fundamental para bons resultados da proposta. Os dados sugerem que as discussões em pequenos e grandes grupos, com estímulo a argumentação, trazem contribuições para o desenvolvimento do pensamento combinatório.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa. Sequência Didática. Arranjos. Combinações.

ABSTRACT

In response to the needs to make learning in mathematics, by the students, more meaningful, according to Ausubel's Meaningful Learning theory, we present this study in which we approach the possibility of students interacting with mathematical content, the significance of the mediator role of teacher as representative of knowledge, the importance and function of language in the formation of concepts and the implementation of Combinatorial Analysis teaching in a gradual and productive way. In this sense, we propose the following question: *Will there be meaningful learning of Combinatorial Analysis, from a teaching proposal based on group work and mathematical communication, applied to a class of students from the Second Grade of High School in Chapecó- SC?* To this end, we developed a teaching proposal, of Combinatorial Analysis, based on the resolution of problem situations, in order to develop combinatorial thinking in students from an environment that stimulates argumentation and discussions in small and large groups. To this, at first, the students solved problem situations about Combinatorial Analysis contents, without the use of any formula, using only their previous knowledge. After this, we present the contents of the Combinatorial Analysis and the formulas, and in the third moment the students solved exercises and problem situations by choosing which method they would like to solve them, in order to make the learning meaningful. The data collection was made from the tests applied during the meetings as well as the notes made in the logbook. The data analysis shows that this teaching proposal was able to contribute significantly to the process of teaching and learning of Combinatorial Analysis, as the students presented advances in the ability to solve problems involving counting principles. The comparison between the results of the diagnostic tests highlight a significant growth in the understanding of the concepts and in the resolution of combinatorial problems. In addition, the analysis reveals that the realization of group activities with emphasis on mathematical communication was fundamental for good results of the proposal. The data suggest that discussions in small and large groups, with encouragement of argumentation, contribute to the development of combinatorial thinking.

Keywords: Meaningful Learning. Following teaching. Arrangements. Combinations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Meu interesse pela Matemática não é recente. Desde os anos finais do Ensino Fundamental demonstrava paixão pelos números. Como sempre tive facilidade com a matemática, durante o Ensino Médio fui incentivada pelo meu professor de Matemática a Cursar Matemática Licenciatura.

Em 2009 ingressei no Curso de Matemática Licenciatura Plena na Universidade Comunitária da Região de Chapecó – UNOCHAPECÓ, concluindo o curso em 2012. Durante o curso percebi que aquele era o meu lugar. Procurei aproveitar da melhor forma possível meu curso, atuando como estagiária da Universidade desenvolvendo muitas oficinas com alunos e também com professores.

Em 2011 tive a oportunidade de entrar em uma sala de aula como professora titular e não apenas como estagiária e desde então sigo apaixonada por 8 anos atuando como professora de Matemática, sempre buscando me aperfeiçoar. Ao longo dos anos estudei muito, fiz especialização em Matemática e em 2017 consegui ingressar no mestrado, o tão sonhado PROFMAT. Foi durante o curso que realmente aprendi muita Matemática, pude conhecer os porquês de muitas teorias e me aprofundar no tópico que sempre me encantou: Probabilidade e Análise Combinatória.

Já há algum tempo lecionando para segunda série, conhecemos os problemas gerados no ensino de Análise Combinatória. Todos os anos as histórias se repetem, notas muito baixas no conteúdo, alunos frustrados e confusos. Em vários momentos alunos que normalmente possuem boas notas em Matemática, quando se deparam com Análise Combinatória, acabam não obtendo êxito. Por isso, buscamos aprofundar nossos estudos nos problemas de contagem na busca de uma metodologia alternativa.

Nossa pesquisa inspirou-se na proposta de Almeida (2010), que em sua dissertação abordou o ensino do conteúdo de Análise Combinatória pautado somente na resolução de exercícios sem o uso de qualquer tipo de fórmula. Nesse trabalho os alunos participantes da pesquisa sugeriram que seria interessante no decorrer da realização da pesquisa apresentar a resolução por meio de fórmulas, uma vez que eles sabiam da existência de fórmulas para resolver determinados problemas de Análise Combinatória. Em nosso trabalho optamos por abordar o ensino do conteúdo de Análise Combinatória exatamente dessa maneira, ou seja, primeiro resolvemos situações-problema sem o uso de qualquer fórmula, partindo apenas dos conhecimentos prévios que os alunos já possuíam, para em seguida apresentar as fórmulas e deixar que os alunos optassem por qual método gostariam de resolver os problemas.

A Análise Combinatória serve de base para várias áreas da Matemática: probabilidades, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, dentre outras. Tal assunto é foco de muita atenção, pois na literatura não existe uma definição satisfatória desta ciência e de suas ramificações.

Ela se constitui ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, para Almeida (2010), permite a elaboração de situações-problema que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca, dentre outros aspectos, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, professores, devemos ter ao procurar desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos. (BRASIL, 2018. p.274)

Apresentamos como uma necessidade de negociação dos significados em sala de aula, a possibilidade dos alunos interagirem com o conteúdo, a importância do papel mediador do professor como representante do conhecimento, a importância e a função da linguagem na formação de conceitos e a implementação do ensino de Análise Combinatória de forma gradativa e produtiva.

Para Vasquez (2004) a Análise Combinatória é um conteúdo matemático que apresenta grande dificuldade em relação à formulação e, principalmente, interpretação dos seus enunciados. É um ramo da Matemática que permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja necessidade de enumerá-los.

Cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los.

As operações combinatórias são essenciais para o desenvolvimento cognitivo. Por isso seria de extrema importância que o aluno tivesse contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica. Para familiarizar-se com problemas de contagem, descrevendo os casos possíveis e contando-os através de uma representação por ele escolhida, sem regras em princípio, de modo a adquirir um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas, visando uma posterior formalização no Ensino Médio.

De acordo com a experiência como docente, percebemos que esse tema parece não ser bem visto tanto por docentes quanto por alunos de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução destes conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o princípio fundamental da contagem pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido inicialmente por meio de raciocínios simples para depois começar a explorar problemas mais complexos.

Segundo a BNCC (2018), a Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ele consiste em decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. Ele não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório, desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados for muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva. Esperamos que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística.

Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e com os *softwares*, para poder ter um resultado imediato.

De acordo com Martinho (2007), uma das maneiras que os alunos podem evoluir na tarefa de aprender, é realizando trabalhos em grupos, aprendendo a confrontar com os colegas aquilo que pensaram individualmente e partilharem as suas ideias. Para ele, depois deste estágio os alunos estão preparados para uma etapa mais complexa que envolve a capacidade de explicar as suas ideias, argumentar e procurar convencer os colegas das suas opiniões bem como ouvir e contra argumentar. Pois, no momento que os alunos efetuam essa "troca" de conhecimento, vão clareando o significado das palavras e combinando seu conhecimento com o conhecimento de seus colegas.

No que se refere à comunicação, na capacidade do aluno conseguir explicar a sua ideia, efetuando a troca de conhecimento, Sarramona (1987) afirma que tal comunicação só ocorre quando o receptor interioriza significativamente a informação. Se o receptor não lhe atribui qualquer significado, apenas se pode falar em transmissão.

Para tanto buscamos aporte teórico na Teoria de Aprendizagem Significativa, onde enfatizamos a importância de aprender o conteúdo de forma significativa, abrangendo todos os alunos. Para Ausubel (1978), a aprendizagem significativa no processo de ensino necessita fazer algum sentido para os alunos e, nesse processo, a informação deverá interagir e ancorar-se nos conceitos já existentes na estrutura do aluno.

Diante do exposto buscamos verificar as possíveis contribuições para a aprendizagem significativa do tópico Análise Combinatória, a partir de uma proposta de ensino pautada em trabalhos em grupos e na comunicação matemática, aplicada a uma turma de alunos da 2ª Série do Ensino Médio de uma escola estadual de Chapecó – SC.

O objetivo geral da proposta é analisar as possíveis contribuições para a aprendizagem significativa dos conteúdos de Análise Combinatória a partir da realização de atividades e/ou resolução de problemas em grupos, explorando a comunicação matemática.

Para tanto foram traçados alguns objetivos específicos: (1) avaliar os conhecimentos combinatórios anteriores e adquiridos ao longo da proposta; (2) desenvolver nos alunos a capacidade de criar estratégias de contagem e organização da resolução de problemas; (3) identificar as principais estratégias utilizadas; (4) avaliar as interações estabelecidas nos grupos; (5) analisar como os alunos avaliaram a proposta de ensino.

Inicialmente fizemos uma revisão bibliográfica acerca do ensino e aprendizagem da análise combinatória, a fim de identificar trabalhos já realizados elencando seus principais obstáculos e desafios, buscando maneiras de enfrentá-los. O diferencial da nossa proposta está em ensinar Análise Combinatória de duas formas diferentes: partindo da resolução de situações-problema em grupo, e na sequência apresentar o princípio fundamental da contagem e toda a sua teoria com as fórmulas.

Durante o desenvolvimento buscamos construir um ambiente de aprendizagem, onde todos poderiam sentir-se a vontade para expor suas ideias, apresentar sugestões, bem como criticar, argumentar e refletir.

A nossa proposta de ensino consiste em uma sequência didática, aplicada a alunos da 2ª série do Ensino Médio. Para a realização das atividades os alunos foram divididos em grupos. As atividades foram divididas em 10 encontros/aulas, sendo cada aula de 45 minutos.

A presente dissertação inicia pela introdução, com todos seus elementos básicos. No que se segue consta o segundo capítulo, com trabalhos relacionados acerca da Análise Combinatória e sua contextualização histórica. No terceiro capítulo, a fim de fundamentar a nossa proposta, discorremos sobre a Teoria de Aprendizagem de Ausubel, bem como a importância de efetuar trabalhos em grupos exercendo a comunicação matemática. No capítulo 4, apresentamos a metodologia e os principais procedimentos utilizados no estudo. No capítulo 5, descrevemos o processo de aplicação e o desenvolvimento das atividades. No capítulo 6, consta a análise e discussões dos resultados obtidos. E finalmente no capítulo 7 constam as considerações finais.

2. ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo iniciamos com uma revisão bibliográfica acerca do ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, foco de nosso estudo, seguido de uma breve contextualização histórica.

2.1 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta sessão apresentamos, por meio de pesquisa bibliográfica, trabalhos que tratam da importância da resolução de problemas a partir da comunicação no ensino da análise combinatória.

Almeida (2010) propôs um estudo sobre pensamento combinatório e comunicação matemática, para construir uma proposta de atividades sobre conteúdos de análise combinatória. Apresentou aos alunos de 2º ano do Ensino Médio desafios de Análise Combinatória e em pequenos grupos os alunos buscavam resolvê-los, sem ter conhecimento de fórmulas. A autora constatou que discussões feitas em pequenos e grandes grupos, quando realizadas de modo organizado e mediadas pelo professor, trouxeram contribuições para o pensamento combinatório.

Carvalho (2009) elaborou uma sequência didática com vistas a introduzir o pensamento combinatório em alunos do 8º ano a partir de situações de jogos. Em seu estudo observou as distintas formas de resolução de problemas, estratégias que surgiram nas atividades e os esquemas produzidos pelos alunos. Apoiou-se na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud) e também na Zona de Desenvolvimento Proximal (Vigostky), fazendo uma análise de como os sujeitos comportam-se diante de diferentes contextos. Ao término da pesquisa concluiu que o conjunto das diversas situações dos jogos, ampliou o leque de representações de contagem e que o ambiente de sala de aula tornou-se mais sociável a partir da integração dos alunos.

Laureano (2017) ressaltou a importância do uso de atividades lúdicas como alternativa para o processo de ensino-aprendizagem. A partir do ensino de Análise Combinatória o autor elaborou um jogo de cartas como atividade de revisão. Argumentou que atividades com jogos é uma importante ferramenta para motivar e auxiliar no estudo da matéria, pois em muitas situações despertou gosto pela disciplina. Observou em seu estudo que o jogo facilitou o entendimento dos alunos, pois aprenderam brincando.

Pessoa (2009) analisou o desempenho e as estratégias de alunos do 2º Ano do Ensino Fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio de quatro escolas diferentes, totalizando 568 alunos. Propôs a resolução de problemas que envolviam o raciocínio combinatório, focando as dimensões apontadas por Vergnaud (1990): significados, invariantes e representações simbólicas. Propôs aos alunos 8 exercícios de análise combinatória, com os quatro significados (arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano). Em suas análises constatou que o gênero não influenciou o desempenho dos alunos, porém o tipo de escola que frequentaram, o período de escolarização, o tipo de problema que estão resolvendo e a ordem da grandeza dos números que estão envolvidos interferiram no desempenho.

Lima (2014) pesquisou alunos de um curso de licenciatura em Matemática em um estudo de estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos diante de problemas de combinatória. O autor elaborou dois quadros que sintetizam as principais estratégias e dificuldades que os alunos, em um nível superior enfrentam quando resolvem problemas desse tema.

Quadro 1 - Principais estratégias mobilizadas pelos alunos

Estratégia	Descrição da Estratégia
Listagem de Possibilidades	O aluno realiza uma listagem, escrevendo todos os casos possíveis que atendem o problema proposto.
Fórmulas	O aluno tenta identificar qual o tipo de problema proposto, entre arranjo, permutação e combinação. Após isso, seleciona os valores presentes no problema e aplica a fórmula correspondente.
Princípio Fundamental da Contagem	O aluno divide o problema em etapas de escolha, verifica as possibilidades de cada etapa e utiliza o princípio multiplicativo.
Busca de Generalidades	O aluno inicia a listagem de possibilidades, geralmente fixando algum elemento, em busca de regularidades. Ao perceber alguma regularidade, realiza alguma operação que lhe fornece a resposta do problema sem que tenha que listar as demais possibilidades.
Diagrama de Árvores[4]	Uma espécie de grafo, é uma estrutura que possibilita organizar as possibilidades em cada etapa de escolha. A sua utilização, além da quantidade de possíveis casos também fornece listagem de todas as possibilidades.

Quadro 1. Fonte: Extraído do artigo de Lima (2014, p. 5).

Quadro 2 - Principais dificuldades apresentadas pelos alunos.

Dificuldade	Descrição da Dificuldade
Listagem Não sistemática	Os alunos realizam a listagem sem nenhum tipo de organização. Dessa maneira, listagem de possibilidades pode ficar faltando elementos, ou com elementos em excesso.
Ordem dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à ordem dos elementos, considerando a ordem relevante em problemas que não é, e desconsiderando-a quando é necessário levá-la em conta. Um dos erros que pode surgir é classificar um problema de combinação como um problema de arranjo.
Repetição dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à possibilidade de repetição de elementos. Então, desconsidera a repetição dos elementos quando o problema permite, assim como o inverso.
Diferenciação dos problemas combinatórios	Alunos possuem dificuldades nos conceitos de cada tipo de problema de combinatória, classificando os problemas de maneira errônea.
Utilização das Fórmulas	Além da dificuldade de lembrar as fórmulas de cada problema, os alunos apresentam dificuldades na substituição dos valores do problema na fórmula e resolve-lá.
Utilização do Diagrama de árvores	Os alunos montam o diagrama de árvores com uma estrutura errônea.

Quadro 2. Fonte: Lima (2014, p. 5)

Diante do exposto, de acordo com os trabalhos anteriores, destacamos a importância de dar significado a Análise Combinatória e como a comunicação e o trabalho em grupo podem auxiliar no entendimento. Percebemos também a importância na compreensão dos conceitos estudados, pois identificar uma fórmula muitas vezes não é suficiente para resolver uma questão, no entanto pensar sobre o problema, descrever as possibilidades, para em seguida escolher a fórmula adequada pode ser uma estratégia.

2.2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Durante muito tempo a Análise Combinatória foi considerada completamente desligada do cálculo aritmético, segundo Rey Pastor (1939, *apud* VASQUEZ, 2004. p. 2) “o conceito moderno do número é, porém uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas". Segundo Wieleitner (1932, *apud* VASQUEZ, 2004, p.2) o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1,2,3...n^2 em um quadrado n x n de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos na Figura 1:

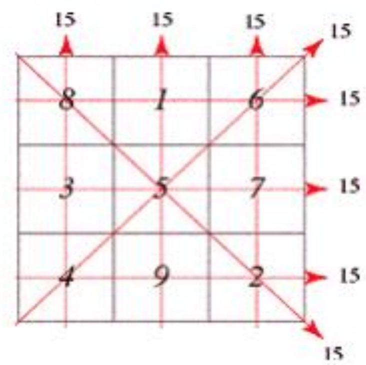


Figura 1: Quadrado Mágico

Há ainda, uma poesia infantil que parece ter sobrevivido em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios::

> Quando eu estava indo para St. Ives,
> Eu encontrei um homem com sete mulheres,
> Cada mulher tem sete sacos,
> Cada saco tem sete gatos,
> Cada gato tem sete caixas,
> Caixas, gatos, sacos e mulheres,
> Quantos estavam indo para St. Ives?
> (BIGGS, *apud* VASQUEZ, 2004, p. 2)

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois relaciona vários elementos e no final quer saber quantos estão indo para St, Ives.

Para Cataldo (2013) o incentivo aos estudos sobre problemas de contagem veio a partir da necessidade de calcular o número de possibilidades existentes de resultados de jogos. Para ele:

> A Análise Combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições. Por sua vez, podemos dizer que a teoria das probabilidades decorre da necessidade de avaliar hipóteses e de tomar decisões. (CATALDO, 2013, p. 2).

De acordo com Vasquez (2004) a teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos, três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Vasquez (2004) também indica que Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos" enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si". Segundo Berge (1971, *apud* VASQUEZ, 2004) a definição de combinatória depende de conceitos de "configurações", pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

A aplicação direta de fórmulas sem o entendimento da mesma pode fazer com que os alunos apenas repitam passos e trabalhem mecanicamente, tornando o seu estudo e aprendizado apenas um jogo de fórmulas. Em uma primeira apresentação dos conceitos de Análise Combinatória, podemos salientar os princípios da adição e da multiplicação.

<u>Princípio da Adição</u>: De acordo com Figueiredo (2010) o princípio aditivo pode ser formulado por: se algo que estamos contando pode ser separado em várias partes, então a quantidade total deste algo é a soma (daí o nome princípio aditivo) das quantidades em cada parte.

<u>Princípio da Multiplicação:</u> Este princípio lida com situações em que uma tarefa se divide em várias etapas. Figueiredo define da seguinte forma: "Suponha que existam N1 maneiras de se realizar uma tarefa T1 e N2 maneiras de se realizar uma tarefa T2. Então há N1 × N2 maneiras de se realizar a tarefa T1 seguida da tarefa T2" (FIGUEIREDO, 2010, p. 58).

Na Análise Combinatória estudamos formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, como objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em duas espécies: arranjos e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

<u>Arranjos:</u> são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos agrupados.

Por exemplo, a palavra AMOR é um arranjo de letras, pois mudando-se a ordem dessas letras obtém-se outro anagrama:

AMOR ROMA

Anagramas diferentes.

<u>Combinação:</u> são agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos agrupados.

Por exemplo, a comissão de alunos formada por Luiz, Joana e Rodrigo e a comissão formada por Joana, Rodrigo e Luiz é a mesma combinação de alunos, pois a ordem dos membros não altera a comissão.

{Luiz, Joana, Rodrigo} {Joana, Rodrigo, Luiz}

Comissões iguais.

Esses tipos de agrupamentos podem ser simples, quando não apresentam nenhum elemento repetido ou composto, quando apresentam pelo menos um elemento repetido.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para fundamentar nosso trabalho nos apoiamos na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, ressaltamos também a importância de trabalhar em grupo a fim de exercer a comunicação matemática. Na sequência discorremos sobre a Teoria da aprendizagem significativa e os benefícios de trabalhar em grupo.

3.1 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

David Paul Ausubel (1918 – 2008) foi psicólogo e pedagogo norte-americano, com destaque para os estudos dos processos de aprendizagem. Filho de família judia e pobre, imigrantes da Europa Central, Ausubel cresceu insatisfeito com a educação que recebera. Revoltado contra os castigos e humilhações pelos quais passara na escola, afirmou que a educação é violenta e reacionária.

Após sua formação acadêmica, resolveu dedicar-se a educação com o objetivo de buscar melhorias necessárias para o verdadeiro aprendizado. Nesse contexto criou a chamada Teoria da Aprendizagem Significativa. Para Ausubel, a aprendizagem significativa no processo de ensino necessita fazer algum sentido para os alunos e, nesse processo, a informação deverá interagir e ancorar-se nos conceitos já existentes na estrutura do aluno.

Ausubel preocupou-se em como explicar os mecanismos de integração das novas informações com as que o aluno já possui, ou seja, para ele “O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo.” (Ausubel, 1978, p.4). Para Kummer (2016) o aluno não é considerado uma tábula rasa, pois ele possui conhecimentos e os novos conhecimentos devem ser ancorados a estes.

Kummer (2016), afirma que:

> Ausubel coloca em dois extremos a aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica. A aprendizagem significativa é caracterizada pela existência de conceitos prévios relevantes como uma predisposição do aluno para estabelecer relações significativas e um material a aprender potencialmente significativo. Na aprendizagem mecânica não ocorre nenhuma interação entre a informação nova e o conhecimento prévio. Assim, a nova informação fica isolada do restante dos conhecimentos anteriores, isto ocorre quando o material a aprender não possui significado lógico ou quando falta ao aluno conhecimento prévio relevante para ancorar o novo conhecimento. (KUMMER, 2016, p. 27).

De acordo com a citação, vemos que a aprendizagem mecânica ocorre quando algo é aprendido e não é relacionado ao que já é conhecido. É uma aprendizagem que não tem significado, e por consequência é um conhecimento que fica isolado dos demais, e por não criar conexões, rapidamente é esquecido. É muito comum ocorrer a aprendizagem mecânica em alunos acostumados com métodos de ensino tradicionais. Podemos citar como exemplo uma aula tradicional de Matemática, onde seguido das definições e exemplos vêm as intermináveis listas de exercícios que servem para “fixar” o conteúdo. Na maioria das vezes estes exercícios não fazem qualquer relação com o cotidiano do aluno, servirão apenas para “treinar” e obter êxito na avaliação.

Por outro lado, Segundo Ausubel (1978, p. 41), a "essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante (i.e., um subsunçor) que pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição já significativos". Portanto, existem duas condições para ocorrência de aprendizagem significativa: é essencial que o aluno tenha uma disposição para aprender e ainda, o material didático utilizado deve ser significativo para o aluno. Pode-se dizer que somente dessa forma se dará a verdadeira compreensão de conceitos, e que dão significado a aprendizagem. Vale lembrar que muitas vezes um indivíduo pode aprender algo mecanicamente e só mais tarde perceber que este se relaciona com algum conhecimento anterior já adquirido.

Ainda de acordo com Ausubel (1978, p. 50) que trata também da aprendizagem por recepção e por descoberta, na primeira, a experiência do aluno é secundária, pois no ensino prevalece a exposição verbal. Já na aprendizagem por descoberta a experiência do aluno é fundamental, pois o conteúdo será aprendido por ele e depois será incorporado de forma significativa. Para Ausubel as crianças em idade escolar já possuem um conjunto de conhecimentos organizados, e por isso é possível ocorrer à aprendizagem significativa.

De acordo com Kummer, “na matemática, a teoria de Ausubel sugere a participação do aluno na elaboração e resolução de problemas que são relevantes para ele.” (Kummer, 2016. p. 30). Nesse contexto destacamos a importância de aprender significativamente, em especial aprender significativamente conteúdos de Análise Combinatória, a partir da resolução de problemas. Em consonância com a aprendizagem significativa, destacamos também a importância de efetuar trabalhos em grupos, a fim de exercer a comunicação matemática e garantir a aprendizagem.

3.2 TRABALHAR EM GRUPO – COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Nesse estudo buscamos uma aprendizagem baseada em resolução de problemas. Foram apresentadas situações-problema em que os alunos em pequenos grupos buscaram a solução destas a partir de métodos elaborados por eles. Em função disso discorremos sobre a importância de trabalhar em grupo exercendo a comunicação matemática.

De acordo com uma reportagem intitulada “Trabalho em grupo traz benefícios para o aprendizado” Queiroz (2015) afirma que os estudantes organizados em grupos, discutem seus erros, se dão broncas e refazem as tarefas, quando necessário. Em algumas situações, a linguagem do colega é mais eficaz que a do próprio professor. Vale ressaltar que em trabalhos coletivos os estudantes apropriam-se melhor das informações e aprendem a resolver conflitos, não somente de relações, mas também de conhecimentos. A partir do momento que um colega tenta ensinar, convencer o outro de sua ideia esse aprendizado será benéfico para a sua vida.

Primeiramente vamos entender o significado da palavra Comunicação. De acordo com o dicionário online do Google, comunicação é um processo que envolve a transmissão e a recepção de mensagens entre uma fonte emissora e um destinatário receptor. No qual as informações, transmitidas por intermédio de recursos físicos (fala, audição, visão etc.) ou de aparelhos e dispositivos técnicos, são codificadas na fonte e decodificadas no destino com o uso de sistemas convencionados de signos ou símbolos sonoros, escritos, iconográficos, gestuais etc.

Bordenave (2007), afirma que a comunicação serve para que as pessoas se relacionem entre si, transformando-se mutuamente e a realidade que as rodeia. Para ele sem a comunicação “cada pessoa seria um mundo fechado em si mesmo”. (BORDENAVE, 2007, p. 36). Pela comunicação as pessoas compartilham experiências, ideias e sentimentos. Ao se relacionarem como seres interdependentes, influenciam-se mutuamente e, juntos, modificam a realidade onde estão inseridas.

Neste trabalho utilizaremos o conceito de comunicação muito semelhante ao dado anteriormente considerando *comunicação como um processo social onde os participantes* *interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente*, pois esta definição é suficiente para definir os processos de comunicação que ocorrem em sala de aula.

Segundo Sarramona (1987), a comunicação só ocorre quando o receptor interioriza significativamente a informação. Se o receptor não lhe atribui qualquer significado, apenas se pode falar em transmissão.

Tendo em vista o papel do professor em sala de aula como mediador e responsável pelo desenrolar da aula, Martinho salienta que:

> O professor assume usualmente um papel de forte intervenção. A planificação, a necessidade de tomar decisões, a coordenação do desenrolar da aula, a escolha das metodologias seguidas e da própria forma como a turma se organiza, são responsabilidades assumidas, na generalidade das aulas, pelo professor. Representante de uma comunidade científica, o professor deve, além disso, concretizar um programa estabelecido pelo Ministério da Educação, procurando seguir as respectivas orientações curriculares nas vertentes científica e pedagógica. O professor é o responsável por tudo aquilo que ocorre ao longo das suas aulas. O peso dessa responsabilidade, juntamente com os múltiplos fatores envolvidos em cada aula, forma a complexidade do processo de ensino.
>
> Também o aluno transporta para a sala de aula, de forma direta ou indireta, as suas vivências anteriores. A partir delas ou, por vezes, apesar delas, espera-se do aluno que aprenda e cresça cognitiva, afetiva e socialmente através das experiências que a escola lhe proporciona. Isto envolve um longo processo comunicativo. Enquanto agente nesse processo, o aluno pode ser tomado individualmente ou no contexto mais geral do grupo de trabalho ou da turma. A entidade grupo surge quando a turma se subdivide e a conjuntos, geralmente pequenos, de alunos são atribuídas determinadas tarefas. Nestes casos há uma intencionalidade associada que a distingue do 'falso grupo', isto é, de situações em que os alunos estão fisicamente agrupados mas a trabalhar individualmente. Por fim, a turma, é o conjunto de todos os alunos que partilham a mesma sala de aula e que permanecem juntos ao longo de todo o ano letivo. A turma tem um crescimento próprio, hábitos adquiridos, relações estabelecidas e aprendizagens conjuntas, pelo que deve ser olhada como uma unidade a ter em conta quando se analisa a comunicação na sala de aula. (MARTINHO, 2007, p. 17).

Em trabalhos em grupo, o professor tem papel de mediador estabelecendo conexões entre os participantes, evitando que ocorram os "falsos grupos", pois muitas vezes os alunos estão sentados em grupos e não interagem entre si. Em muitas situações para proporcionar um ambiente colaborativo o professor deve instigar seus alunos fazendo algumas perguntas. Como proposto por Love e Mason (1995, *apud* Martinho 2007, p. 20) eles dividem as questões colocadas pelo professor em sala de aula, em três tipos: perguntas de focalização, de confirmação e de inquirição. Para eles o professor ao fazer perguntas de focalização tem como objetivo centrar a atenção do aluno num aspecto específico. Por outro lado, com as perguntas de confirmação, procura testar os conhecimentos dos alunos. Nesse tipo de pergunta normalmente as respostas são imediatas e únicas, e são encaradas pelo professor como naturais quando se pretende que o aluno resolva apenas exercícios rotineiros. E finalmente, as perguntas de inquirição podem ser classificadas como verdadeiras perguntas no sentido em que o professor ao colocá-las pretende obter, de fato, alguma informação por parte do aluno. Ao longo dos anos com a prática de docente foi possível observar que esse tipo de pergunta é praticamente inexistente na sala de aula, e provavelmente, isso se deve ao fato de que a grande maioria dos professores segue uma aula tradicional. Pois no tipo de aula proposta por Love e Mason o professor assume o papel de coordenador e não de controlador, pois a aula não se limita a exposição de matéria ou a resolução de exercícios, pois está aberta a explorar diversas situações que podem conduzir ao desenvolvimento da capacidade de comunicação e raciocínio. Nesse estudo pretendemos adotar perguntas de inquirição feitas para a turma, que em pequenos grupos discutirão a resolução de problemas instigando o pensamento crítico.

Quanto ao desenvolvimento da aula pautada em resolução de problemas, Voigt aponta quatro fases: apresentação e explicação, e duas fases de questionamentos. Para ele:

> A resolução do problema é normalmente feita em pequeno grupo e os alunos apresentam e explicam o processo de resolução a toda a turma sem que o professor tenha tido a preocupação de saber antecipadamente qual a solução a que eles chegaram. Na primeira fase de discussão o professor questiona os alunos no sentido destes esclarecerem melhor determinados aspectos que considera relevantes. Por fim, segue-se uma última fase onde o professor questiona os restantes alunos sobre a existência ou não de diferentes resoluções Voigt concluiu que, por defeito, o professor recorre ao padrão de elicitação, em particular quando ocorrem situações em que há divergência nas soluções apresentadas. (VOIGT, 1995 *apud* Martinho, 2007, p. 23 e 24)

Brendefur e Frykholm (2000) também discorrem sobre comunicação em sala de aula. Para eles existem quatro níveis de comunicação na sala de aula: unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva. Eles ressaltam que cada um desses níveis está associado a um tipo de interação, ou seja:

> Relativamente ao padrão unidirecional, o mais comum, o professor fala quase sempre só, coloca questões fechadas e não dá oportunidade aos alunos para exprimirem as suas ideias, estratégias ou pensamentos. No padrão contributivo já se verifica alguma partilha de ideias, soluções e estratégias embora sem grande exigência cognitiva. As interações entre alunos são aqui mais comuns. Quanto ao padrão reflexivo, para além da partilha, são estabelecidas conversas em torno dos conteúdos e dos próprios discursos. As diferentes falas são utilizadas como apoio para novas e mais profundas explorações. As reflexões não surgem de forma espontânea por parte do aluno mas são proporcionadas pela participação na construção do discurso da aula. Por fim, no padrão instrutivo, o professor para além de encorajar a reflexão, procura modificar as compreensões matemáticas dos alunos bem como a sua própria prática. O fato de o pensamento do aluno se tornar público,

> torna o professor consciente dos processos de pensamento, limitações e capacidades dos alunos e isso afeta a sua própria prática. (BRENDEFUR E FRYKHOLM 2000, *apud* Martinho, 2007 p. 25)

Proporcionar um ambiente que se assemelhe ao nível de comunicação instrutivo, estabelece um cenário em que o aluno tem a responsabilidade de expor as suas ideias e efetuar explicações ao longo das aulas. A presença do professor em sala de aula, quando os alunos estão em grupos dedicados a realização de tarefas, deve ser discreta. Nesse contexto é importante o professor circular pela sala, levantar questões, esclarecer algumas dúvidas e criar condições para a realização das tarefas em grupos, verificando se os integrantes dos grupos estão trabalhando no seu grupo, ouvem-se mutuamente e partilham da mesma ideia, e se sabem agir quando houver desacordos. Neste momento não compete ao professor dar respostas aos integrantes dos grupos, e sim questioná-los e desafiá-los.

Ainda de acordo com Martinho (2007) é só através da prática de trabalho em conjunto que os alunos podem evoluir nessa tarefa, aprendendo a confrontar com os colegas aquilo que pensaram individualmente e partilharem as suas ideias. Para ele depois deste estágio os alunos estão preparados para uma etapa mais complexa que envolve a capacidade de explicar as suas ideias, argumentar e procurar convencer os colegas das suas opiniões bem como ouvir e contra argumentar. Pois no momento que os alunos efetuam essa "troca" de conhecimento, vão clareando o significado das palavras e combinando seu conhecimento com o conhecimento de seus colegas.

Diante do exposto torna-se conveniente o uso de um modelo de sequência didática, pois este modelo leva em consideração o que o aluno já sabe e também enfatiza a necessidade da realização de trabalhos em grupos.

Deste modo, em nosso trabalho faremos uso de sequência didática, de acordo com Amaral. Conforme a autora:

> É preciso ter alguns conhecimentos sobre o gênero que se quer ensinar e conhecer bem o grau de aprendizagem que os alunos já têm desse gênero. Isso é necessário para que a sequência didática seja organizada de tal maneira que não fique nem muito fácil, o que desestimulará os alunos porque não encontrarão desafios, nem muito difícil, o que poderá desestimulá-los a iniciar o trabalho e envolver-se com as atividades. Outra necessidade desse tipo de trabalho é a realização de atividades em duplas e grupos, para que os alunos possam trocar conhecimentos e auxiliar uns aos outros. (AMARAL, 2005, p. 1).

Pra ela uma sequência didática consiste em um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa. Organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, elas envolvem atividades de aprendizagem e de avaliação.

4. CONTEXTO E METODOLOGIA DA PESQUISA

A partir das leituras sobre o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória, a importância de ensinar utilizando um modelo de aprendizagem significativa e sobre trabalhar em grupos utilizando comunicação matemática, propomos um trabalho pautado em ensinar Análise Combinatória utilizando uma sequência didática.

Desse modo, como citado na introdução, recortamos a seguinte questão norteadora: *"verificar as contribuições na aprendizagem significativa de Análise Combinatória, a partir de uma proposta de ensino pautada em trabalhos em grupos e na comunicação matemática, aplicada a uma turma de alunos da 2ª Série do Ensino Médio de uma escola estadual de Chapecó – SC".*

Nosso propósito é de investigar o potencial de uma sequência didática construída com base na resolução de situações-problema de Análise Combinatória para serem resolvidos em grupo.

Neste capítulo pretendemos familiarizar o leitor com a nossa pesquisa, descrevendo o contexto da pesquisa, a dinâmica realizada, a coleta de dados e como pretendemos proceder à análise.

4.1 O CONTEXTO E OS SUJEITOS

O foco do estudo consiste em uma turma do 2º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada no centro da cidade de Chapecó – SC. Na presente investigação a turma é de regência da professora – pesquisadora, sendo composta por 28 alunos.

Como a Análise Combinatória integra o currículo de Matemática do 2º Ano do Ensino Médio, as atividades propostas, nesta pesquisa, foram desenvolvidas no horário das aulas de Matemática desta turma. A proposta passou pelo comitê de ética da Instituição. Todos os alunos e seus responsáveis assinaram um termo de compromisso a fim de autorizar o uso de imagem e materiais produzidos.

4.2 DINÂMICA DA PROPOSTA

Ao iniciar a sequência didática os alunos foram divididos em grupos. Foi dada a liberdade de escolha do número e dos membros de cada grupo, respeitando um limite máximo de 6 participantes. As atividades foram divididas em 10 encontros/aulas, sendo cada aula de 45 minutos.

No primeiro encontro foi trabalhado o jogo intitulado *"Mastermind",* também conhecido como "Jogo da senha" com o objetivo de despertar o raciocínio combinatório. No encontro seguinte foi aplicado um pré – teste (individual) (Apêndice B), com a finalidade de verificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca do tema em questão. Buscamos elaborá-lo de forma simples para que os alunos com os conhecimentos adquiridos nos anos anteriores fossem capazes de resolvê-lo. Nos próximos encontros (3º ao 5º) foram resolvidos desafios matemáticos sobre o princípio fundamental da contagem, arranjo, combinação e permutação, restritos aos tópicos da ementa de Análise Combinatória previstos no currículo de matemática do 2º Ano do Ensino Médio. As situações-problema propostas foram discutidas e resolvidas nos grupos, com posterior socialização com o grande grupo. Os alunos divididos em grupos tiveram a tarefa de resolver os desafios sem ter conhecimento dos conteúdos e das fórmulas de Análise Combinatória, para na sequência, explicarem ao grande grupo qual foi o raciocínio utilizado.

No 6º, 7º, 8º e 9º encontros foram estudados os conteúdos e as fórmulas de Análise Combinatória, resolvendo muitos exercícios. Também foram resolvidos novamente todos os desafios já apresentados nas aulas anteriores, porém agora com o auxílio das fórmulas. No último encontro foi aplicado um pós – teste (individual) (Apêndice E) para verificar quais foram as estratégias utilizadas, bem como suas justificativas e os erros cometidos. Ao final da proposta os alunos foram convidados a responderem um questionário, em que não precisariam se identificar, a fim de verificar como avaliaram a proposta, bem como sua participação, interesse e entendimento sobre as aulas.

Considerando que a turma é composta de 28 alunos e todos participaram da pesquisa, os quais foram divididos em 6 grupos, a análise de dados foi realizada da seguinte maneira: verificamos o que estes alunos aprenderam sobre o tema proposto, a partir do trabalho em grupo e levando-se em consideração os conhecimentos que eles já possuíam sobre o tema antes do desenvolvimento das atividades. Para efetuar a escolha do material a ser analisado, foi estabelecido o seguinte critério: foram analisadas as melhores resoluções, as que chegaram ao resultado correto utilizando um raciocínio coerente; em contrapartida analisamos também as resoluções que não chegaram ao resultado correto, que por algum motivo não souberam resolver a questão.

4.3 COLETA DE DADOS

A coleta de dados deu-se por meio de observação, registrada em diário de bordo e fotos, bem como a análise dos materiais escritos pelos alunos, teste inicial e final, e também pelo questionário aplicado no término do trabalho. Os diálogos que constam no texto foram escritos a partir das anotações e observações. A fim de não expor a identidade de cada aluno, propomos que cada um escolhesse um pseudônimo para si.

Após o término do trabalho em campo, a análise procedeu-se sob duas perspectivas: a primeira está voltada para as relações estabelecidas em sala de aula, sob a perspectiva da comunicação matemática, observando as características e os níveis de interação entre os membros dos grupos e entre os grupos. Já a segunda está relacionada aos registros obtidos, a fim de avaliar a evolução no raciocínio combinatório.

O capítulo 5 apresenta a descrição detalhada do processo desenvolvido, com algumas observações e análise preliminar dos dados obtidos.

5. DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE APLICAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo relatamos todo o processo ocorrido, descrevemos as atividades realizadas, diálogos observados, onde procuramos evidenciar o pensamento combinatório, bem como analisar as dificuldades apresentadas ao longo da aplicação das atividades da sequência didática.

Como a turma já é de regência da professora-pesquisadora, algumas aulas antes de iniciar a aplicação da sequência didática foi feito um convite para a turma se eles aceitavam participar de uma proposta pedagógica diferenciada para o ensino de Análise Combinatória. A turma prontamente aceitou o convite; todos os alunos e seus pais assinaram um termo a fim de autorizar o uso de suas atividades e dos seus comportamentos para fins de pesquisa. A sequência didática das atividades na íntegra encontra-se em anexo (apêndice A).

Na sequência descrevemos as etapas e as atividades desenvolvidas pelos alunos, bem como apresentamos algumas observações.

5.1 PRIMEIRO ENCONTRO

5.1.1 Descrição da atividade

No primeiro encontro a fim de despertar o raciocínio combinatório de forma lúdica, os alunos foram convidados a jogar o jogo *Mastermind*[1], também conhecido como Jogo da Senha. A turma não conhecia o jogo, então, primeiramente foi apresentado o jogo e suas regras, o tabuleiro e as peças.

O jogo de *Mastermind* tem peças de seis cores diferentes (verde, vermelho, laranja, roxo, amarelo e azul). Existem ainda as peças pretas e brancas que são menores. Há quatro espaços grandes em cada fileira, em 10 fileiras horizontais, uma abaixo da outra. E ao lado delas, um quadrado menor, com quatro espaços menores. Uma fileira, que seria a décima primeira, tem um defletor que esconde seus espaços. O desafiador faz uma combinação com quatro peças coloridas, sem repetir as cores de cada pino, e as põe na décima primeira fileira e

[1] O jogo foi adaptado em forma física pela autora. Uma versão original encontra-se disponível em: http://www.clickjogos.com.br/Jogos-online/Puzzle/Mastermind

levanta o defletor, escondendo a senha. Então, o desafiado tenta adivinhar a senha, colocando quatro peças na primeira fileira e o desafiador põe as peças pretas e brancas no quadrado menor ao lado. As regras das peças pretas e brancas são essas: o branco significa que há uma cor certa, mas no lugar errado, o preto significa que há uma cor certa no lugar certo, e nenhum pino significa que uma das cores não está contida na senha. O desafiado vai tentando adivinhar, se guiando pelas peças pretas e brancas. Se o desafiado não acertar até a 10ª fileira, o desafiador fecha o defletor e revela a senha, mas se adivinhar, o desafiador põe quatro peças pretas e revela a senha.

O jogo é dividido em dois níveis, o primeiro consiste em revelar quais são as peças que fazem parte do jogo e o segundo se detém apenas em revelar quantas peças estão corretas.

Os alunos iniciaram jogando o nível I.

5.1.2 Desenvolvimento da atividade e observações

Para efetuar a análise das jogadas foram selecionados três resoluções do jogo de três duplas diferentes.

Primeira dupla: Vamos acompanhar e analisar as jogadas feitas pela primeira dupla, jogando o nível I.

Figura 2: Jogo Nível I, concluído com sucesso.

O desafiador elaborou a senha (verde, roxo, vermelho e laranja). Em uma primeira tentativa o desafiado tenta adivinhar montando a seguinte senha: azul, roxo, amarelo e verde. O desafiador em resposta diz que a peça azul não faz parte da senha, a peça roxa está certa no lugar certo, a amarela não faz parte da senha e a verde está certa no lugar certo. Apenas com essa primeira jogada o desafiado já soube quais as cores que faziam parte da senha, bastava organizá-las de modo correto. Na segunda tentativa a senha montada foi a seguinte: laranja, roxo, verde e vermelho, a peça roxa já estava no lugar certo e o desafiado sabia que a peça verde não deveria ficar na 4ª posição. O desafiador mais uma vez respondeu dizendo que a peça laranja está certa no lugar errado, a roxa certa no lugar certo, a verde certa no lugar errado e a laranja também estava certa no lugar errado. Após essa jogada o desafiado já tinha a certeza da sequência das peças: a peça roxa deveria ficar na 2ª posição; a peça verde não estava nem na 3ª e nem na 4ª posição, logo só poderia estar na 1ª posição. Restavam ainda as peças laranja e vermelha. Como a vermelha já havia estado na 4º posição, restava uma única opção, a 3ª posição. Logo, a peça laranja só poderia ocupar a 4ª posição. Portanto na terceira tentativa o desafiado desvendou que a senha criada foi: verde, roxo, vermelho e laranja.

Cada dupla jogou 2 vezes o nível I. Não houve mais interesse em jogar, pois acharam o jogo muito fácil. Com isso no decorrer da aula, conforme as duplas iam finalizando o jogo, foi passado de dupla em dupla para explicar as regras do nível II.

O nível II, tinha uma sútil diferença: O desafiador não informava quais eram as peças que faziam parte do jogo, apenas dizia quantas peças estavam certas no lugar certo e quantas estavam certas no lugar errado, aumentando consideravelmente o nível de dificuldade do jogo.

<u>Segunda dupla:</u> Vamos acompanhar um jogo finalizado do nível II, em que o desafiado após 10 jogadas não conseguiu acertar a senha:

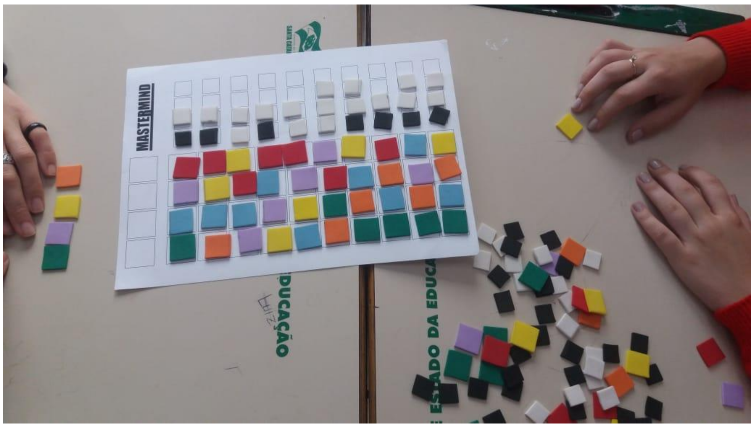


Figura 3: Jogo nível II, concluído sem sucesso.

A senha criada pelo desafiador foi a seguinte: verde, roxo, amarelo e laranja. Na primeira jogada o desafiado tentou adivinhar com a seguinte senha: verde, azul, roxo e vermelho. Observamos que duas cores fazem parte da senha, verde e roxo, onde a verde está certa no lugar certo e a roxa está certa no lugar errado, portanto uma peça preta e outra branca foram colocadas nos espaços menores. Na segunda jogada o desafiador sem ter certeza de nada cria uma nova senha: laranja, azul, amarela e vermelha. Observamos que novamente duas cores fazem parte da senha, amarelo e roxo, onde dessa vez o amarelo estava certo no lugar certo e a laranja está certa, porém no lugar errado. Assim, mais uma vez foram colocadas uma peça preta e uma peça branca na devolutiva. Observamos que na segunda tentativa o desafiado apostou que as cores que faziam parte da senha eram o vermelho e o azul, onde na verdade eram o verde e o roxo. Com isso na próxima jogada, as duas novas cores azul e amarelo faziam parte da senha, confundindo o desafiado. Notamos que o desafiado insiste muito na cor vermelha, a qual nem fazia parte da senha. Em nenhuma jogada o desafiado consegue pelo menos acertar as 4 cores que faziam parte da senha, para que pudesse reorganizá-las, tornando o jogo mais fácil.

<u>Terceira dupla:</u> Acompanhe agora um outro jogo do nível II, onde o desafiado consegue acertar a senha.

Figura 4: Jogo nível II, concluído com sucesso.

Vamos acompanhar as jogadas feitas por esses jogadores, que utilizaram uma estratégia diferenciada para adivinhar a senha. A senha criada pelo desafiador foi: azul, vermelho, roxo e laranja. O desafiado criou a senha da primeira tentativa: laranja, verde, vermelho e amarelo. Observamos que temos duas cores certas, laranja e vermelho, porém no lugar errado, logo o desafiador respondeu com duas peças brancas. A próxima jogada do desafiado foi muito interessante, ele colocou a peça amarela em todas as casas, a fim de ter certeza se a cor fazia ou não parte da senha.

Fez isso também na terceira jogada com a cor verde, como o desafiador não colocou nenhuma peça como resposta, o desafiado já tinha certeza que essas duas cores não faziam parte da senha. Como existem apenas 6 cores disponíveis, ele já sabia quais as cores que faziam parte da senha: roxo, vermelho, azul e laranja, bastava apenas organizá-las de modo correto. Antes de tentar adivinhar a senha, na 4ª tentativa, o desafiado quis ter certeza das posições das peças vermelha e laranja, trocou-as de posição em relação à primeira jogada, e em resposta recebeu duas peças brancas, isso significava que a posição delas era 2º e 4º lugar e as novas peças, roxo e azul, ficavam na 1ª e 3ª posição. Sabendo disso, em poucas jogadas com certeza o desafiado descobriria a senha. Sua próxima jogada foi a seguinte: roxo, vermelho, azul e laranja. Como resposta teve, duas peças pretas e duas brancas, ou seja, roxo e azul estavam certas, ou vermelho e laranja estavam certos. Na 6ª jogada, a aposta foi que as peças roxo e azul estavam certas, então trocou apenas de posição as peças laranja e vermelha. Como a devolutiva foi mais uma vez duas peças pretas e duas peças brancas o desafiado percebeu que havia feito a escolha errada, porém a próxima jogada era definitiva, pois já tinha certeza de qual era a ordem da senha criada pelo desafiador: azul, vermelha, roxa e laranja, acertando a senha criada.

Notamos que a linha de raciocínio utilizada tornou o jogo menos trabalhoso, pois em poucas jogadas o desafiado já conseguiu descobrir quais cores faziam parte da senha, ficando com o dever de apenas descobrir a sequência.

No término da aula, algumas duplas ainda não haviam finalizado o jogo e deste modo, pediram para o professor da aula seguinte, que era Educação Física, se pudessem terminar o jogo. Com a autorização do professor eles puderam finalizar a partida, pois estavam muito envolvidos com o jogo.

Segue alguns dos diálogos entre alunos e a professora-pesquisadora:

Florzinha: Ah prof, bem que você poderia deixar nós jogar na aula de Português, a prof é *bem querida ela vai deixar.*

Professora: Mas não foi suficiente duas aulas de matemática?

Florzinha: Mas é que o jogo é muito legal, e o nível II demora, porque a gente tem que pensar mais, tipo não da pra ir jogando de qualquer jeito.

Professora: Mas porque não da pra ficar jogando de qualquer jeito?

Florzinha: Porque dai a gente nunca vai acertar a senha né prof, tem que ficar analisando as jogadas anteriores, e por isso demora!

Professora: Verdade, não é jogar de qualquer jeito. Mas vamos ver nas próximas aulas, caso sobre um tempinho vocês jogam novamente. Que bom que gostou do jogo!

Quadro 1: Primeiro diálogo**.**

A análise do jogo foi muita positiva, pois todos os alunos participaram e se envolveram, como era o esperado. Em outras aulas que se seguiram vários alunos pediram para jogar novamente, pois haviam gostado bastante.

5.2 SEGUNDO ENCONTRO

5.2.1 Descrição da atividade

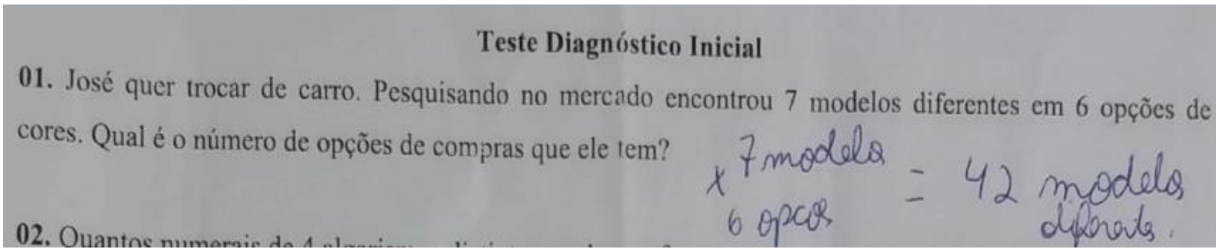
No segundo encontro os alunos realizaram o teste de diagnóstico inicial. Em um primeiro momento ele não foi bem aceito pela turma. Os alunos fizeram os seguintes questionamentos: *"Vale nota?", "Como que a gente vai fazer se nem estudo esse conteúdo?", "Como assim prof, vou me ferrar*", entre outras falas que surgiram em um primeiro momento. Foi solicitado que eles tivessem calma e explicado que fazia parte da pesquisa, pois esse teste poderia ser resolvido com o conhecimento que eles já possuíam e que era uma etapa muito importante do projeto, pois mais tarde ele seria analisado. Foi explicado também que não seria atribuída uma nota a ele, pois uma vez que essa era a maior preocupação da turma. Assim, todos os alunos realizaram o teste de diagnóstico inicial, porém com pouca dedicação, pois a partir do momento que souberam que não "valia" nota muitos não se empenharam, deixando algumas questões em branco. O "fazer a prova" e ter uma nota associada a ela é uma regra social entre os alunos.

O teste (Apêndice B) era composto de 4 questões similares às encontradas nos livros didáticos do segundo ano do Ensino Médio. As questões contemplavam os princípios de contagem, arranjo simples e combinação simples. No dia do teste 23 alunos estavam presentes e todos o realizaram.

5.2.2 Desenvolvimento da atividade e observações

Apresentamos o desenvolvimento por parte de alunos das quatro questões integrantes do teste de diagnóstico inicial.

A primeira questão era relativamente simples, foi resolvida por todos os alunos e aproximadamente 70% acertaram ela. A Figura 5 ilustra a estratégia que foi mais utilizada pelos alunos para resolver o problema: apenas multiplicaram a quantidade de modelos pela quantidade de cores, chegando ao resultado correto de 42 opções de compra.



Teste Diagnóstico Inicial

01. José quer trocar de carro. Pesquisando no mercado encontrou 7 modelos diferentes em 6 opções de cores. Qual é o número de opções de compras que ele tem?

x 7 modelo
6 opçoe = 42 modelo diferente.

02. Quantos

Figura 5: Resolução apresentada pelo aluno Busatinho, da questão 1 do teste de diagnóstico inicial.

Já a segunda questão exigia um pouco mais de atenção por parte dos alunos. Dos 23 alunos apenas 1 aluno deixou a questão em branco. Dos demais, aproximadamente 23% resolveram corretamente a questão. A Figura 6 ilustra que a listagem de todos os números foi o método utilizado pela aluna Marina. Ela listou todas as possibilidades inclusive o zero na primeira posição, utilizando um movimento cíclico, sistemático e completo; em seguida anulou todos os números iniciados em zero, pois não configuram números de 4 algarismos.

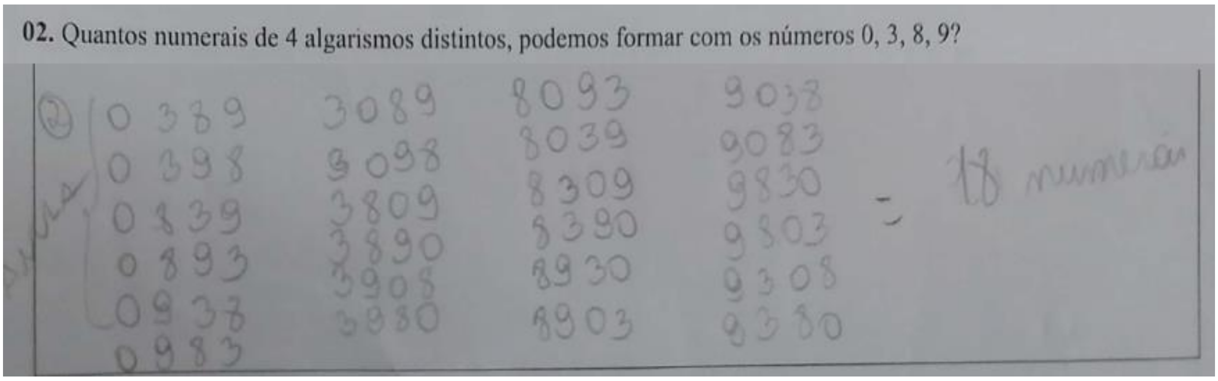


Figura 6: Resolução apresentada pela aluna Marina, da questão 2, do teste de diagnóstico inicial.

Essa estratégia também foi utilizada por boa parte dos alunos.

A resolução apresentada pelo aluno Brinco Preto (Figura 7), ele observou que existem 6 números iniciados pelo algarismo 3, com isso constatou que existirão também 6 números iniciados pelo algarismo 8 e pelo algarismo 9, portanto multiplicou 3 por 6 chegando ao resultado correto, ou seja, utilizou-se de um elemento constate que serviu de referencial para a formação dos agrupamentos.

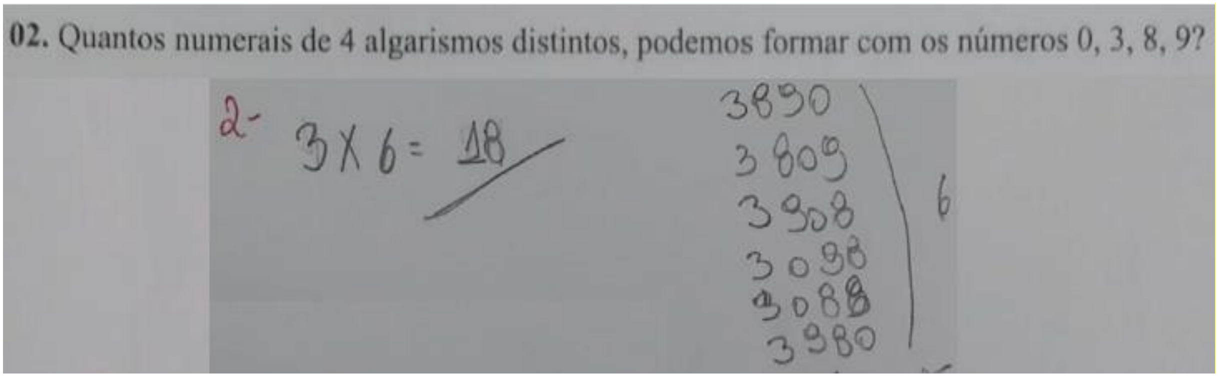
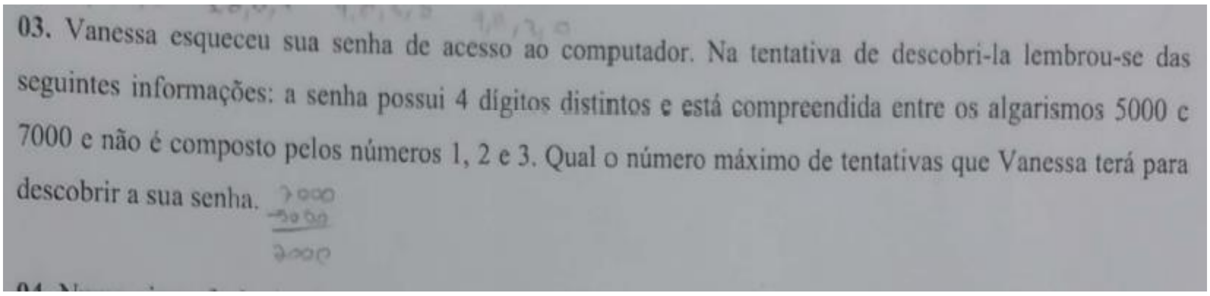


Figura 7: Resolução apresentada pelo aluno Brinco Preto, da questão 2, do teste de diagnóstico inicial.

Nas duas últimas questões não houve acerto de nenhum aluno. Isso pode ter acontecido devido às duas questões serem mais complexas.

Na terceira questão não conseguimos observar nenhuma construção lógica da questão, inclusive vários alunos deixaram de responder essa questão. Observamos que na Figura 8 o aluno VNCCOBR28 considerou que 2000 são as possíveis tentativas, desprezando todas as demais informações da questão.



03. Vanessa esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la lembrou-se das seguintes informações: a senha possui 4 dígitos distintos e está compreendida entre os algarismos 5000 e 7000 e não é composto pelos números 1, 2 e 3. Qual o número máximo de tentativas que Vanessa terá para descobrir a sua senha.

Figura 8: Resolução apresentada pelo aluno VNCCOBR28, da questão 3, do teste de diagnóstico inicial.

A Figura 9 ilustra uma resolução onde a aluna tomou o cuidado de retirar os algarismos 1, 2 e 3. Com isso verificou que existem 7 possibilidades para a unidade e em seguida efetuou dois produtos que não conseguimos estabelecer uma relação, chegando a um resultado absurdo, maior que o intervalo de números inteiros existentes entre 5000 à 7000. Notamos que a aluna após efetuar os cálculos não analisou o resultado encontrado.

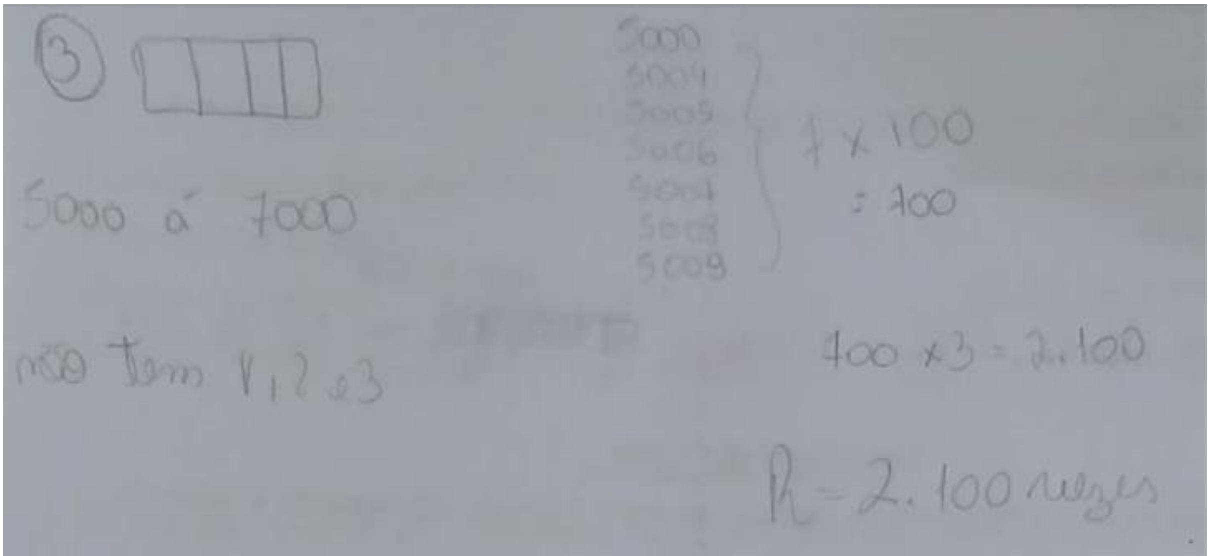
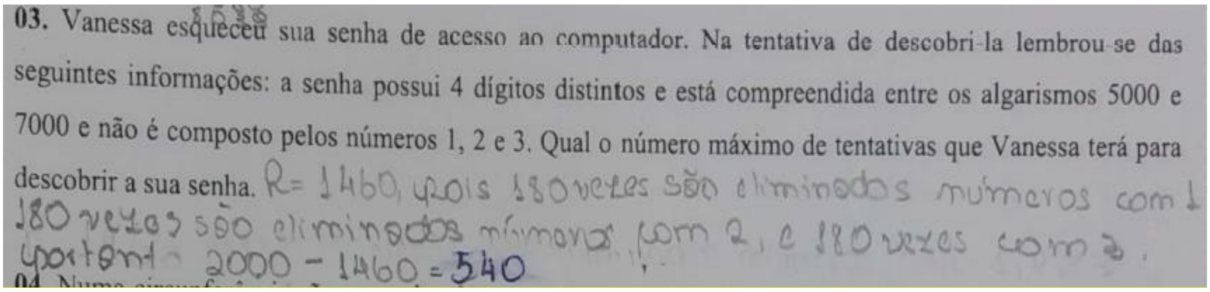


Figura 9: Resolução apresentada pela aluna Marina, da questão 3, do teste de diagnóstico inicial.

Na Figura 10, na resolução apresentada pela aluna Sunflower, notamos que a aluna constata que existem 180 números com cada algarismo 1, 2 e 3 no intervalo de 5000 à 7000, dessa forma subtrai 540 do total e determina que são 1460 as senhas possíveis.



03. Vanessa esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la lembrou-se das seguintes informações: a senha possui 4 dígitos distintos e está compreendida entre os algarismos 5000 e 7000 e não é composto pelos números 1, 2 e 3. Qual o número máximo de tentativas que Vanessa terá para descobrir a sua senha.

Figura 10: Resolução apresentada pela aluna Sunflower, da questão 3, do teste de diagnóstico inicial.

Vamos analisar algumas resoluções da quarta questão do teste de diagnóstico inicial. A Figura 11 ilustra a resolução do aluno Joãozn, percebemos não interpretou corretamente o enunciado da questão que pedia que os vértices dos triângulos estivessem nos pontos, dessa forma o aluno apenas dividiu a circunferência em 6 triângulos iguais.

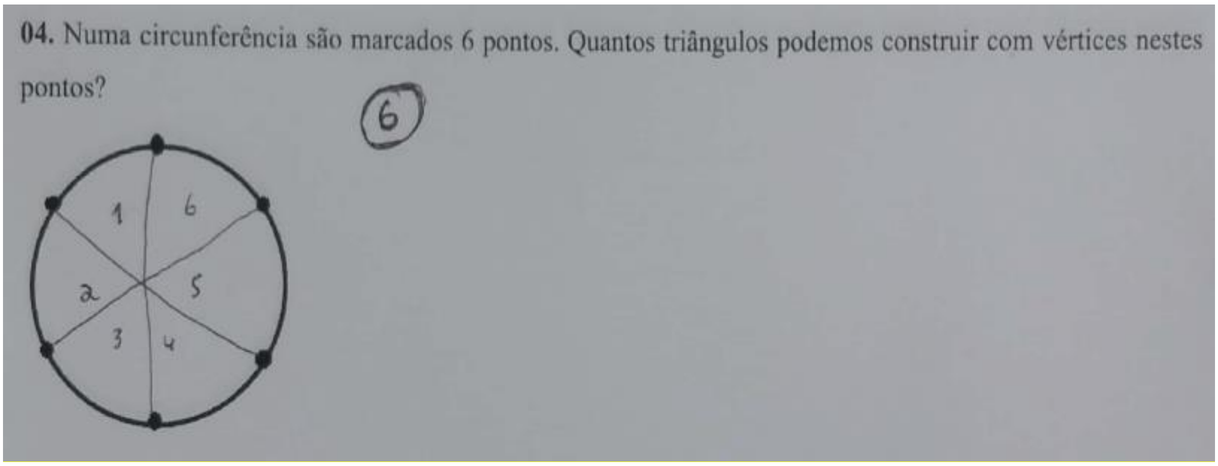


Figura 11: Resolução apresentada pelo aluno Joãozn da 12, da questão 4, do teste de diagnóstico inicial.

O aluno Brinco Preto (Figura 12) utilizou-se de uma estratégia interessante, porém errônea, para resolver o problema. Ele observou de forma equivocada que por cada ponto são formados 4 triângulos, como são 6 pontos, bastou efetuar uma simples multiplicação chegando a 24 triângulos. Nenhuma resolução atentou-se ao fato de que generalizando dessa forma alguns triângulos se repetiriam, obtendo deste modo o mesmo triângulo.

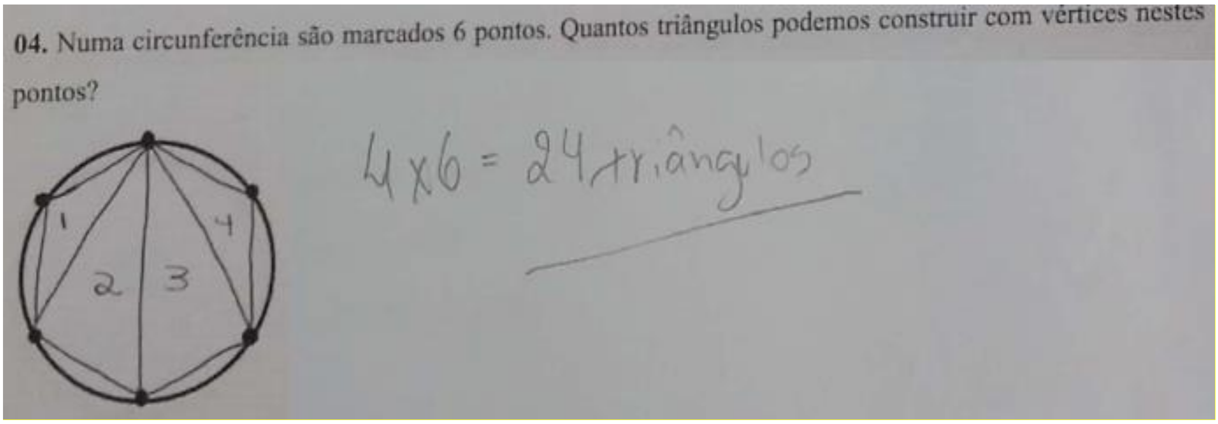


Figura 12: Resolução apresentada pelo aluno Brinco Preto, da questão 4, do teste de diagnóstico inicial.

A partir da análise desse teste verificamos que adolescentes são capazes de resolver problemas simples de combinatória, esses alunos quando submetidos a problemas com um nível de complexidade um pouquinho maior, não conseguem organizar-se de maneira lógica e coerente para resolver essas situações. Para isso, foram levados nas aulas seguintes desafios para que eles pudessem resolvê-los em pequenos grupos a fim de incentivar a resolução de problemas.

5.3 TERCEIRO, QUARTO E QUINTO ENCONTROS

5.3.1 Descrição das atividades

Após a aplicação do teste de diagnóstico inicial, foi apresentado à turma, no grande grupo, o conceito de numerais. Como os alunos estavam acostumados à exposição oral da professora, preferimos iniciar dessa forma a fim de não causar grande desconforto a turma. Em um primeiro momento escrevemos os números 2 e 4 no quadro.

Na sequência apresentamos diálogos ocorridos:

Professora: Quantos números distintos com dois algarismos podemos formar?

Florzinha: Distintos quer dizer diferentes né professora?

Professora: Isso mesmo!

Alunos: Então é 24 e 42.

Professora: Muito bem, e agora Eu pergunto à vocês quantos números com dois algarismos podemos formar utilizando 2 e 4?

(Nesse momento muitos alunos ficaram desconfiados, pensaram que se tratava de uma pegadinha, pois achavam que já haviam respondido à essa pergunta!)

Gavião: Hum, agora não precisa ser diferente, então dá pra formar o 24, 42, 22 e 44!

Professora: Certíssimo, parabéns Gavião! Vamos continuar então, e com os algarismos 1, 2 e 3, podemos formar quantos números de três algarismos distintos!

(Nesse momento muitos números foram falados ao mesmo tempo, para organizar a aula pedimos para que apenas um aluno respondesse como Brinco Preto levantou a mão, foi ele quem respondeu a pergunta).

Brinco Preto: Dá pra formar o 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

Professora: Parabéns, isso mesmo!

Brinco Preto: Ah professora, tá fácil, manda umas mais difíceis aí! (risos)

Professora: Ok, então! Vamos lá! E agora quero números de apenas três algarismos, não precisa ser distinto.

(Mais uma vez foi um alvoroço, todos falavam ao mesmo tempo, desta vez, escrevemos os

números de forma organizada no quadro com a ajuda dos alunos).
Alunos e Professora: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332 e 333.
Brinco Preto: Caramba quanto número! É mais fácil quando são algarismos distintos!
Professora: Exatamente!

Quadro 2: Segundo diálogo**.**

O diálogo, parcialmente descrito nesse quadro, foi o primeiro a ser realizado no grande grupo. Foram apresentadas inicialmente questões consideradas de fácil resolução, com o intuito de criar um ambiente onde os alunos se sentissem mais confortáveis e consequentemente mais receptíveis a questionamentos. No decorrer da aula, aos poucos, os alunos foram demonstrando maior segurança para responder as questões individualmente e em grupo, tornando o diálogo mais produtivo. Foi percebido que os alunos haviam compreendido o conceito de numeral e de algarismos distintos, objetivos dessa primeira conversa.

No que se refere à Comunicação Matemática, foi possível observar alguns avanços, pois o aluno não era apenas um receptor de informações. No decorrer do diálogo todos os alunos queriam expressar a sua ideia, gerando muito barulho, porém, todos os numerais que eram falados estavam corretos. Essa foi uma oportunidade para valorizar a capacidade individual desses alunos.

Dando continuidade a aula, foram distribuídos desafios, que foram desenvolvidos em mais três encontros. Inicialmente os alunos foram divididos em grupos de no máximo 5 integrantes, entretanto houve um grupo que pediu para formar um grupo com 6 integrantes, pois caso contrário um dos colegas ficaria deslocado. Formaram-se então 6 grupos: sendo 1 grupo de 6 integrantes, 3 grupos de 5 integrantes, 1 grupo de 4 integrantes e 1 grupo com 3 integrantes, totalizando os 28 alunos. Observamos que os grupos foram formados a partir das afinidades, sendo que dos seis grupos 3 eram heterogêneos (meninos e meninas) e 3 eram homogêneos (meninos ou meninas). Após as organizações estarem finalizadas, conseguimos dar inicio aos desafios com temas pertinentes ao dia a dia.

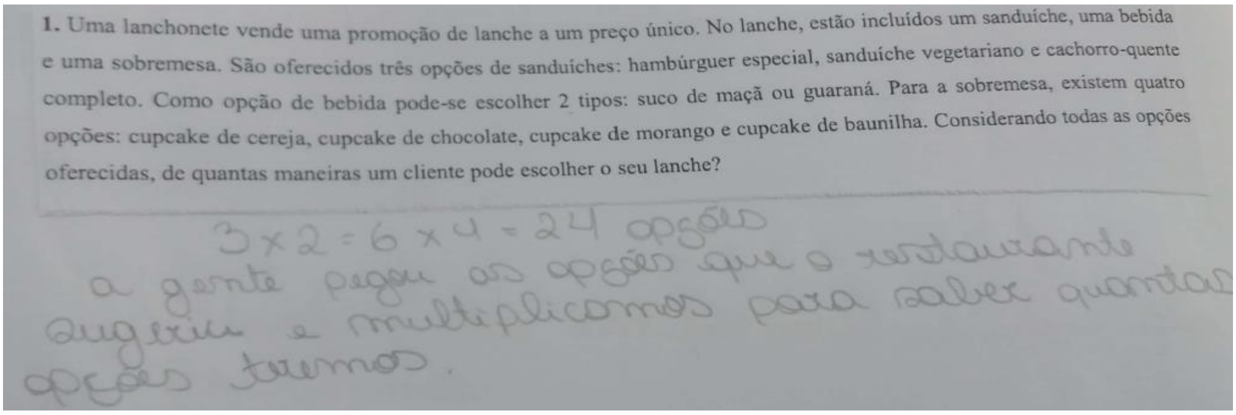
5.3.2 Desenvolvimento das atividades e observações

O primeiro desafio abordou o tema lanche. Cada integrante do grupo recebeu uma cópia impressa do mesmo. Foi entregue também uma cópia extra, para que após as discussões feitas no grupo, a resolução fosse devolvida para a professora.

Desafio 1: *Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidos três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?*

Vamos observar algumas resoluções feitas pelos grupos. Nesse desafio todos os grupos chegaram a resposta correta, 24 opções.

A resolução feita pelo grupo 1 (Figura 13) consiste em multiplicar as opções disponíveis, utilizando-se intuitivamente do princípio multiplicativo.


1. Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidos três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

3x2=6x4=24 opções
a gente pegou as opções que o restaurante sugeriu e multiplicamos para saber quantas opções teremos.

Figura 13: Resolução feita pelo grupo 1, do primeiro desafio.

Já o grupo 2 (Figura 14), optou por descrever todas as opções listando os sanduíches, as sobremesas e as bebidas, fazendo 12 possíveis combinações; em seguida multiplicaram as combinações encontradas por 2, alegando que existiam 4 opções de sobremesa e portanto deveria ser multiplicado por 2. Notamos que a resposta encontrada está correta, porém o desenvolvimento contém erros. Como o grupo já sabia que 24 era a resposta procurada, (pois utilizaram o princípio multiplicativo no início do desafio), ao descrever as possibilidades esqueceram de algumas e criaram uma estratégia para chegar na resposta correta.

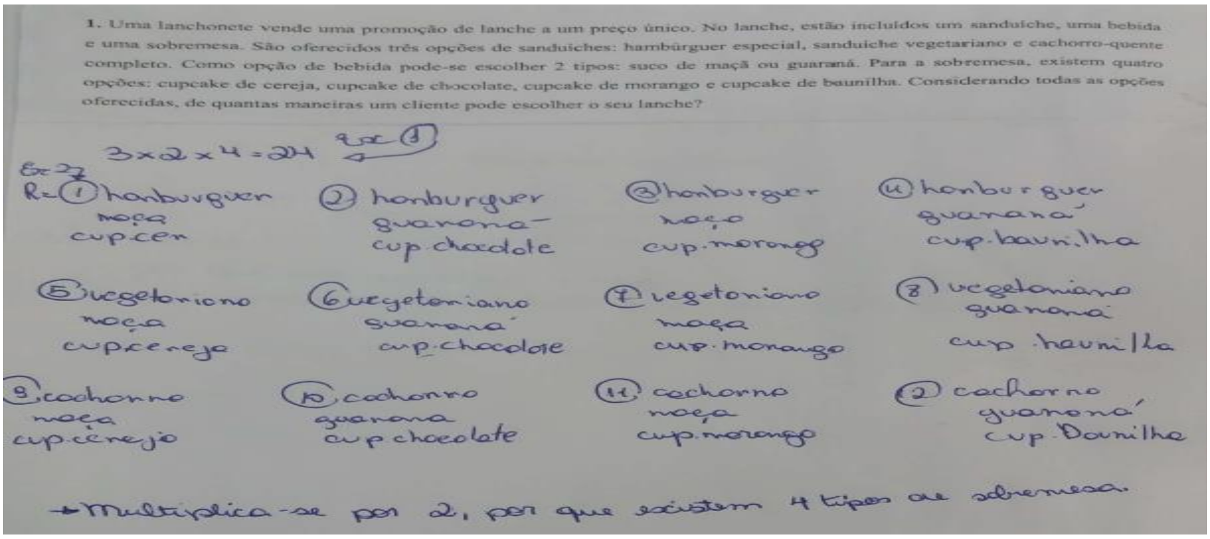


Figura 14: Resolução feita pelo grupo 2, do primeiro desafio.

O grupo 5 (Figura 15) nos apresenta duas soluções, a primeira utilizando o princípio multiplicativo e a segunda utilizando a árvore das possibilidades, instrumento muito usado na Análise Combinatória.

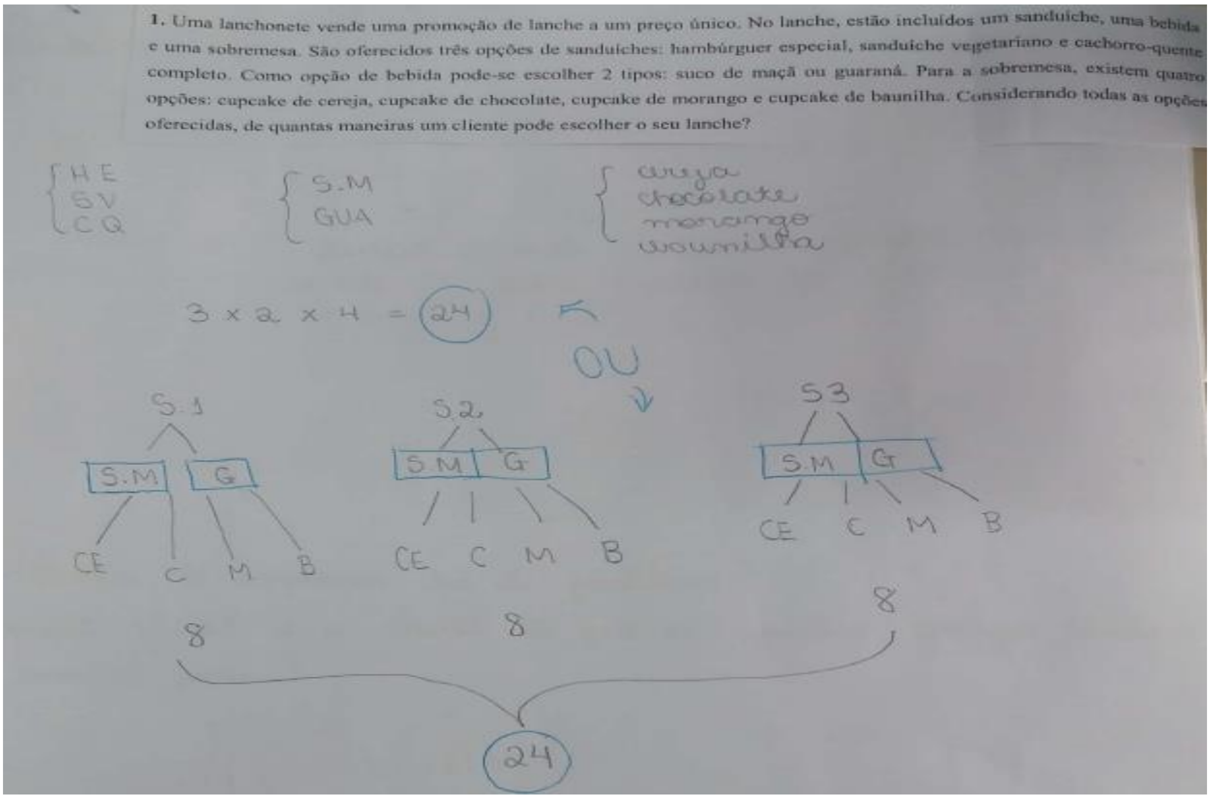


Figura 15: Resolução feita pelo grupo 5, do primeiro desafio.

Notamos que houve um envolvimento de praticamente todos os integrantes dos grupos, alguns alunos que não participavam muito das aulas, nesse momento participaram da discussão na tentativa de encontrar a solução correta, argumentaram considerando o seu ponto de vista. Nesse momento, para a comunicação, o grupo precisou analisar, organizar, decidir e encontrar a solução.

O segundo desafio envolvia o tema Futebol, assunto que despertou a curiosidade e o interesse da maioria dos alunos, principalmente dos meninos. A seguinte questão foi ditada pela professora que pediu para que todos anotassem em seu caderno:

Desafio 2: "*Quatro clubes de futebol estão disputando um campeonato: Predadores, Touros a Solta, Canibais e Dois Pés Esquerdos. Qual é o número de resultados possíveis para os três primeiros lugares?"*

Nessa questão 50% dos grupos conseguiu chegar no resultado correto, 24 resultados possíveis. Essa questão não foi muito bem compreendida por alguns membros dos grupos. Observamos alguns diálogos realizados em um grupo, onde alguns alunos tentavam explicar o desafio ao colega:

Florzinha: Mas como assim tem quatro times e só tem três lugares? Não tô entendendo!

Gavião: Mas isso não tem nada a ver, podia ter 20 times e só três lugares, porque o que a pergunta tá pedindo é como poderia fica essas três primeiras posições!

Florzinha: Ai Meu Deus do Céu, já não tô entendendo mais nada!

Gavião: Assim, poderia dá Predadores em primeiro, Touros em segundo e Canibais em terceiro né?

Florzinha: Sim

Gavião: Então, significa que Dois pés esquerdos não vai ganhar nada, um sempre vai ficar de fora, entendeu agora?

Florzinha: Hum, acho que agora entendi... tá vamos ver as outras opções pra ver quanto que dá.

Quadro 3: Terceiro diálogo.

No diálogo descrito acima, podemos observar a importância de resolver questões em grupos, onde os colegas buscam se ajudar, sem intermédio da Professora.

As Figuras 16 e 17 ilustram as resoluções dos grupos 1 e 6, respectivamente. Observamos que ambos não conseguiram chegar ao resultado correto. O grupo 1 apenas efetuou o produto da quantidade de times pelas posições, chegando a 12 resultados possíveis. Já o grupo 6, montou um esquema de pódio, e verificou que cada time pode ficar em 1º, 2º ou 3º lugar e como são 4 times temos 3 + 3 + 3 + 3 = 12 resultados possíveis também. Um dos erros do grupo foi não considerar que o time poderia ficar em quarto lugar e também não pensaram na ordem dos classificados.

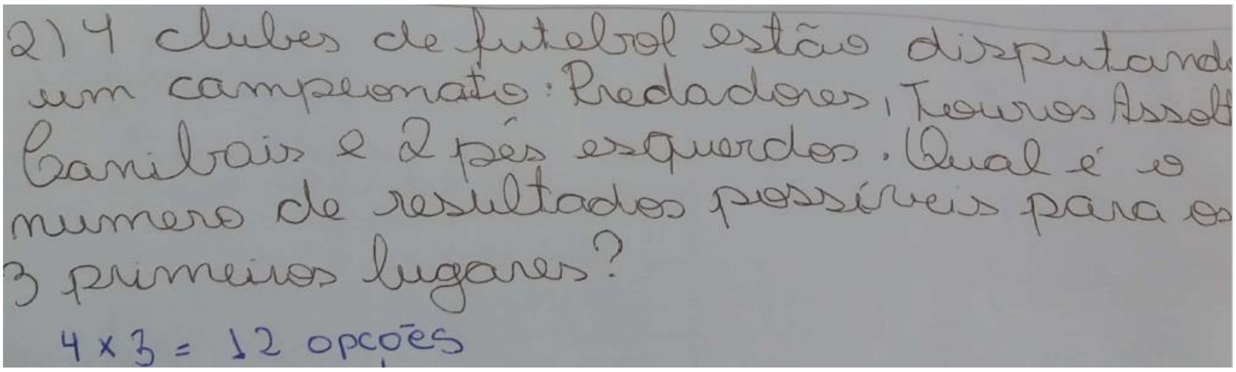


Figura 16: Resolução feita pelo grupo 1, do segundo desafio.

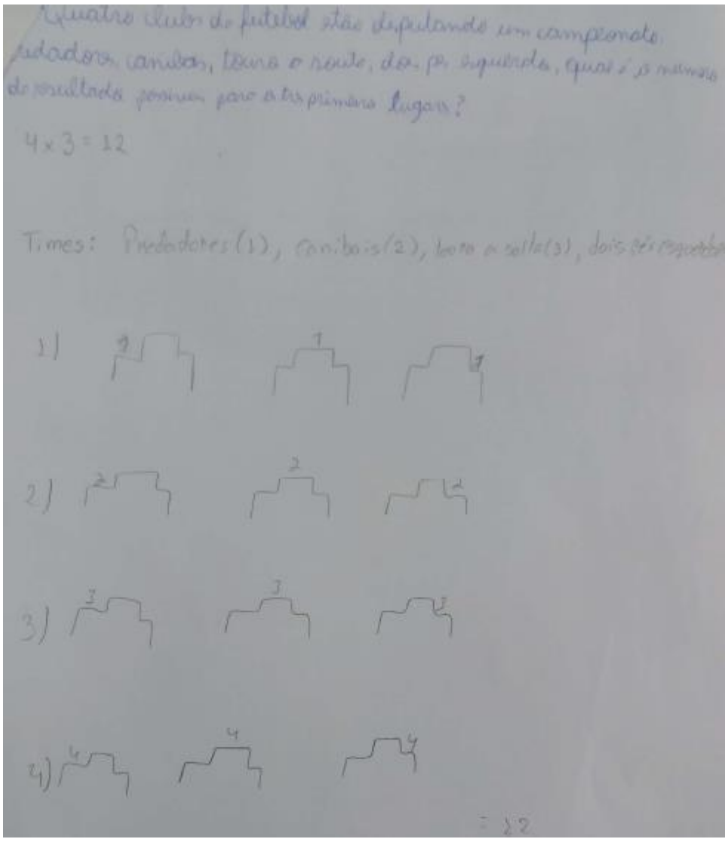


Figura 17: Resolução feita pelo grupo 6, do segundo desafio.

As resoluções feitas pelos grupos 3 e 5 (Figuras 18 e 19), respectivamente, trazem duas maneiras corretas de resolver o problema. A primeira consiste em determinar todas as opções estando um dos times em primeiro lugar, em seguida tomar como verdade para os demais e apenas multiplicar. Já o segundo utilizou o princípio multiplicativo, observou que para o primeiro lugar existem 4 possibilidade, para o segundo são 3 possibilidades e para a terceira posição restam apenas 2 times.

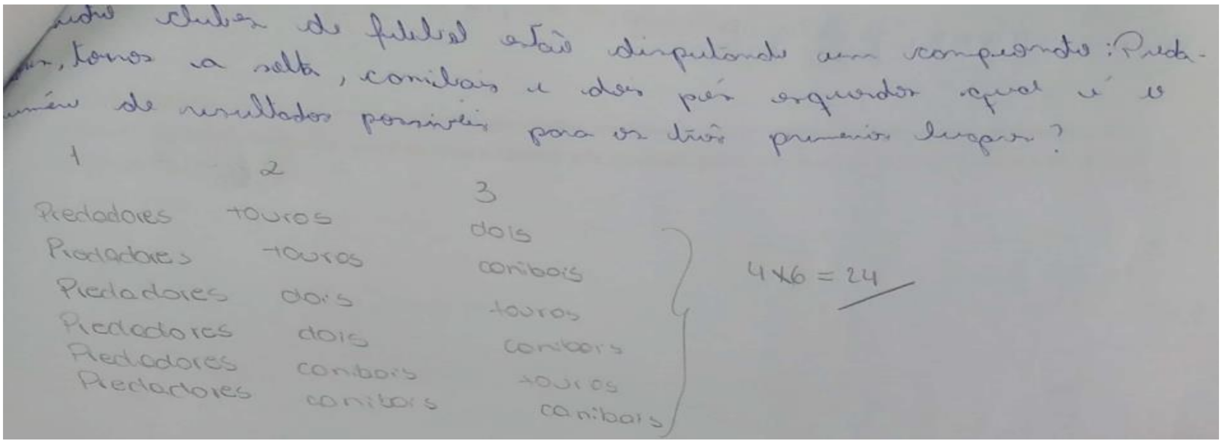


Figura 18: Resolução feita pelo grupo 3, do segundo desafio.

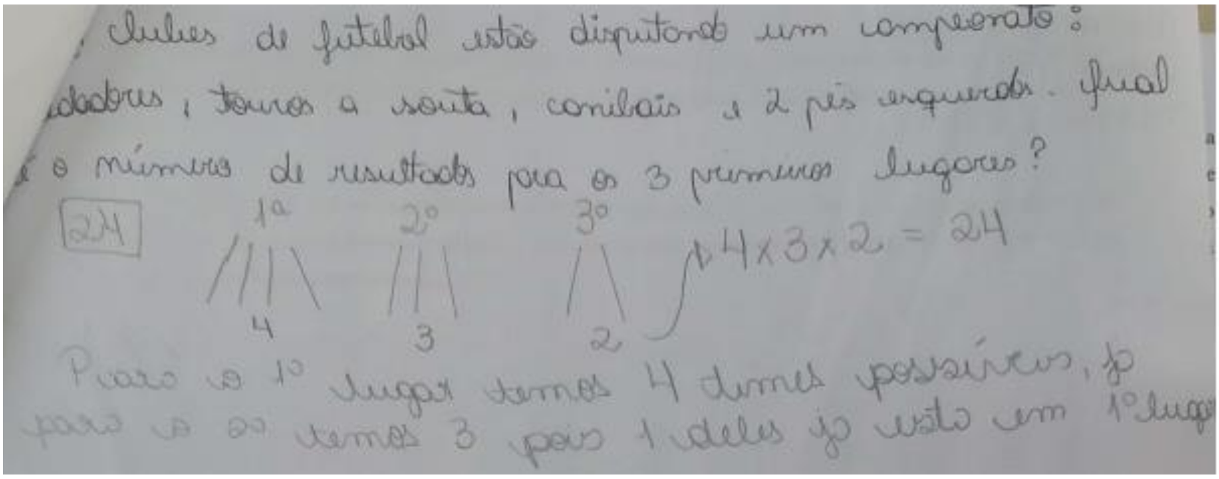


Figura 19: Resolução feita pelo grupo 5, do segundo desafio.

O terceiro desafio consistia de uma pequena história intitulada: *Mentir de Improviso só dá problemas*, que foi lida e interpretada pela professora e todos os alunos ouviram atentamente.

Desafio 3*: Quatro amigos vinham se saindo bem nas aulas de cálculo: recebiam elogios por conta das lições de casa caprichadas, e tiravam boas notas nas provas. Assim, no fim de semana antes da última prova do semestre, eles decidiram interromper os estudos e ir a uma festa em outra cidade, mesmo sabendo que a prova ocorreria na segunda-feira pela manhã. Dormiram pouco, beberam demais e, na segunda-feira, de ressaca, não conseguiram acordar a tempo. Quando chegaram à faculdade, a prova já tinha acabado.*

Um deles foi bater na porta da sala da professora de cálculo. Assim que entrou, inventou uma história:

- Fomos ao aniversário de um amigo, que mora em outra cidade. Hoje de manhã, quando vínhamos para cá, um dos pneus do carro furou. Só aí descobrimos que o estepe estava murcho! Como estávamos numa estradinha secundária, demorou muito até conseguir ajuda.

A professora sorriu, toda simpática, e disse:

- Tudo bem, acidentes acontecem. Não se preocupem. Estejam amanhã cedo no anfiteatro, assim eu aplico uma prova extra só para vocês quatro.

No dia seguinte, os quatro chegaram no horário; estavam contentes. A professora foi com eles ao anfiteatro, e pediu que cada um deles se sentasse num extremo do salão imenso; os quatro ficaram longe demais um do outro, de modo que não havia como colar ou conversar.

A professora usou um projetor multimídia para mostrar aos alunos a primeira questão: ela valia 5 pontos de um total de 100, e era um exercício simples de integração. Os quatro terminaram o exercício em menos de dez minutos. Aí ela apertou um botão projetou a seguinte mensagem:

Segunda questão.

Você têm 10 segundos para respondê-la em absoluto silêncio, e ela vale 95 pontos entre 100:

QUAL PNEU FUROU?

DESAFIO: *Qual é a chance de que os quatro amigos chutem o mesmo pneu?*

Após a leitura houve um momento de descontração na turma com risadas e comentários do tipo *"Que burros!", "Deveriam ter combinado melhor a mentira!", "Estão lascados!"*. Em seguida os grupos se acalmaram e buscaram resolver o desafio.

Em um primeiro momento as respostas foram praticamente unânimes de que os quatro amigos teriam 25% de chance de chutarem o mesmo pneu. Alguns grupos permaneceram com essa posição até o final e outros mudaram durante as discussões. Dos seis grupos, apenas dois chegaram à resposta correta. A Figura 20 ilustra a resposta do grupo 1. Ele segue uma lógica equivocada que consiste em dividir a probabilidade de chutar cada pneu pela quantidade de amigos.

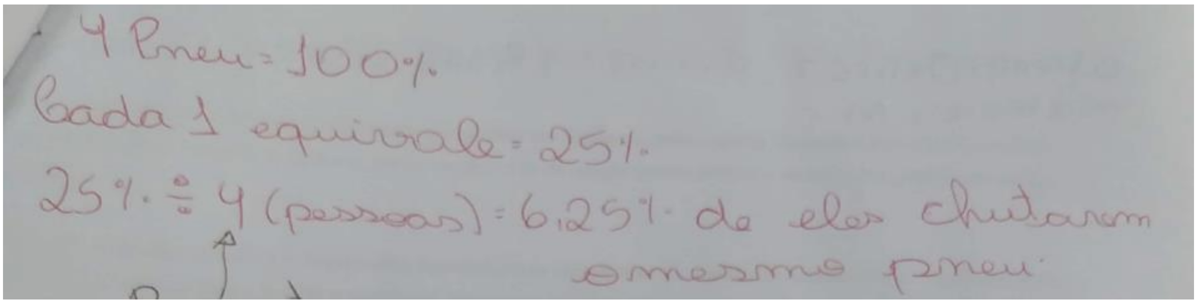


Figura 20: Resolução feita pelo grupo 1, do terceiro desafio.

A Figura 21 ilustra a resposta do grupo 4 que parte para uma tentativa falha de tentar enumerar todas as possibilidades de falas dos amigos, pois nessa situação é pouco provável acertar a questão partindo deste princípio, pois são muitas opções. O grupo busca generalizar com afirmações equivocadas.

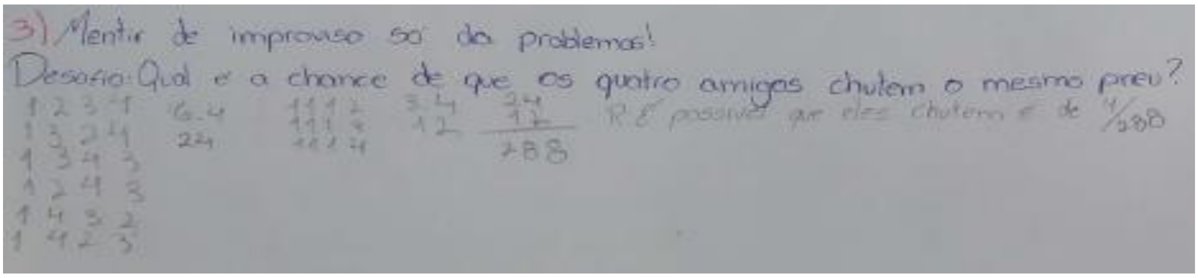


Figura 21: Resolução feita pelo grupo 4, do terceiro desafio.

Na resolução feita pelo grupo 5 (Figura 22), podemos observar que houve compreensão do Desafio. O grupo conseguiu perceber que cada amigo pode “chutar” qualquer um dos quatro pneus, totalizando 256 tentativas, dentre as quais, 4 estarão corretas, P1P1P1P1, P2P2P2P2, P3P3P3P3, P4P4P4P4, ou seja, quando todos os amigos “chutarem” o mesmo pneu.

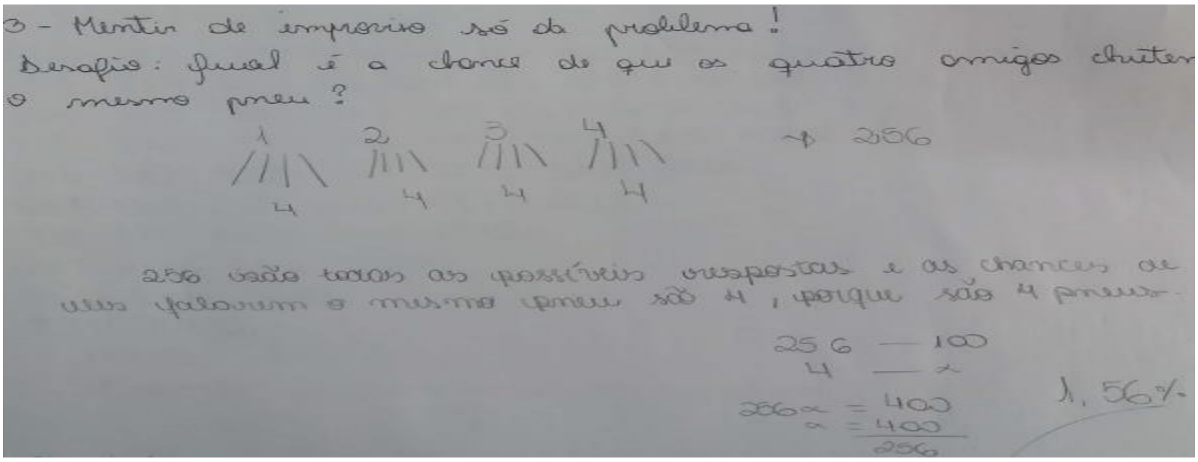


Figura 22: Resolução feita pelo grupo 5, do terceiro desafio.

Para a resolução do quarto desafio foi entregue uma cópia impressa para cada aluno e também uma cópia extra que deveria ser entregue a professora.

Desafio 4*: Qual a quantidade de uniformes diferentes que podem ser formados pelas opções fornecidas por um patrocinador: cinco camisas (azul, vermelha, amarela, roxa e verde), três de calção (preto, branco e cinza) e duas opções de meiões (azul e preta)?*

Nesse desafio os grupos já estavam familiarizados sobre como deveriam proceder para resolvê-lo, pois suspeitavam que a maneira de resolver essa questão era semelhante ao primeiro desafio. Apenas um grupo não chegou ao resultado correto. A Figura 23 ilustra a resolução feita pelo grupo 3 que utilizou duas estratégias para chegar ao resultado: utilizou o princípio multiplicativo e também desenvolveu parcialmente a árvore das possibilidades.

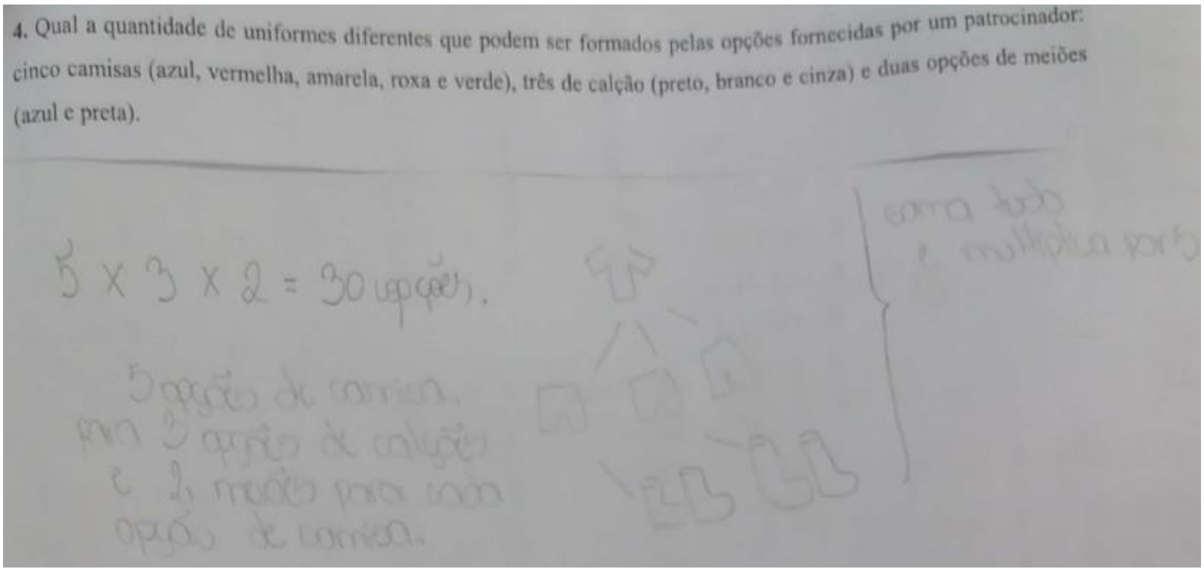


Figura 23: Resolução feita pelo grupo 3, do quarto desafio.

O quinto desafio dava continuidade ao tema futebol. Todos os alunos receberam uma cópia impressa do desafio, e cada grupo recebeu uma cópia extra que deveria ser devolvida com a resolução para a professora.

Desafio 5: *Dois pés esquerdo já está no campeonato estadual junto com outros 11 times. De acordo com o regulamento na primeira fase todos os times devem se enfrentar. Determine quantos jogos serão ao todo nessa primeira fase. Elabore um esquema e apresente o calendário esportivo.*

Durante a resolução desse desafio houveram muitas discussões e questionamentos nos grupos, pois não chegavam à uma solução em que todos concordassem. Cada um pensava de forma diferente. Dos seis grupos, dois não conseguiram chegar na resposta correta.

A Figura 24 ilustra a resolução do grupo 2. Notamos que o grupo esqueceu de um detalhe muito importante que constava no enunciado: “Os times enfrentavam-se uma única vez” e de acordo com a tabela feita por eles os times iriam enfrentar-se duas vezes, obtendo deste modo o dobro do resultado.

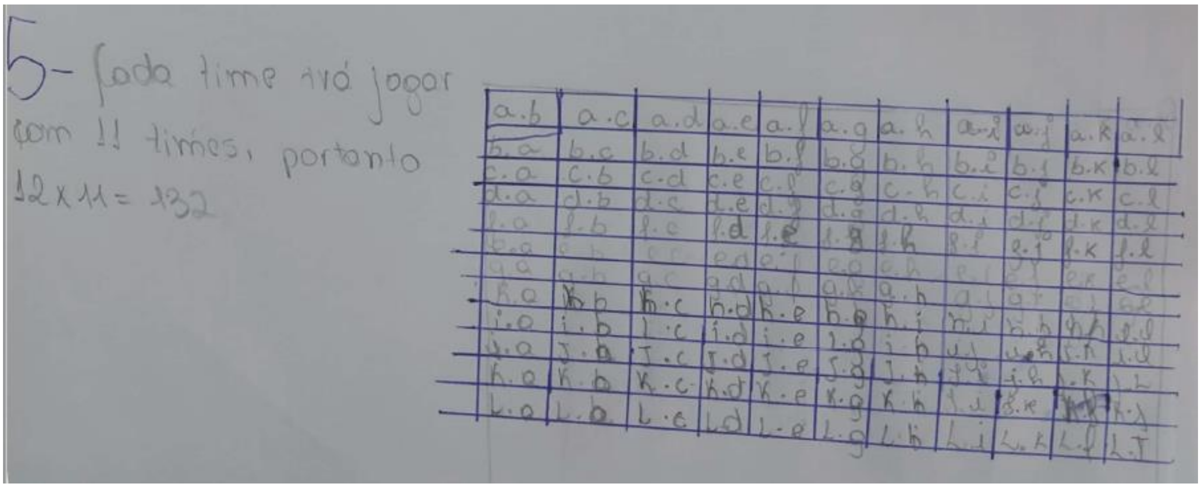


Figura 24: Resolução feita pelo grupo 2, do quinto desafio.

Já o grupo 3 (Figura 25) observou esse detalhe, efetuando a soma dos jogos e subtraindo o jogo que já havia sido contabilizado. Dessa forma o grupo chegou ao resultado correto, 66 jogos. Essa estratégia também foi utilizada pelos demais grupos que acertaram a questão.

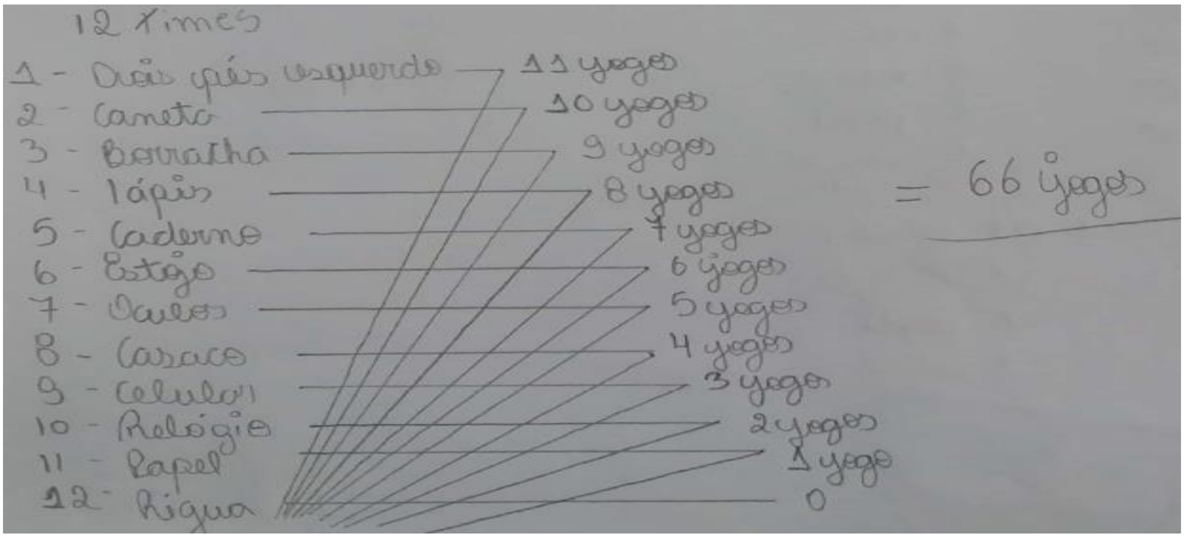


Figura 25: Resolução feita pelo grupo 3, do quinto desafio.

Após o término da realização dos desafios em grupos, foi realizada uma discussão com a turma sobre a dinâmica da aula. Os alunos defenderam a realização de atividades em grupos, afirmaram que gostaram de debater suas ideias com os colegas e que se sentiram mais seguros em poder dividir com outro a responsabilidade de resolver um problema. Afirmaram que ficava mais fácil entender o enunciado de um problema quando ele era discutido em grupo.

Acompanhe abaixo um diálogo ocorrido no término da aula:

Cristiane: Prof, mas tem outro jeito de resolver esses problemas né? *Professora: Com certeza, na Matemática sempre existem vários caminhos para chegar em uma mesma solução.* *Cristiane: Sim, eu sei, mas eu quis dizer é que da pra resolver tudo isso usando fórmulas.* *Professora: Por que você acha que podemos resolver utilizando fórmulas?* *Cristiane: É que eu já estudei esse conteúdo no cursinho, e lá o professor ensinou utilizando fórmulas e eu tinha achado bem difícil.* *Professora: Exatamente, até então buscamos resolver todos esses desafios apostando na aprendizagem em grupo e na utilização das mais variadas estratégias. Porém a partir da nossa próxima aula nós também vamos ver de que forma podemos resolver esses problemas utilizando fórmulas.* *Cristiane: Hum, entendi.* *Professora: E depois vocês poderão escolher a maneira que se sentirem mais seguros para resolver esses problemas.*

Quadro 4: Quarto diálogo.

5.4 SEXTO, SÉTIMO, OITAVO E NONO ENCONTROS

5.4.1 Descrição das atividades

Após várias aulas resolvendo desafios, chegou o momento de trabalhar esse conteúdo utilizando os conceitos e fórmulas de Análise Combinatória, pois esperamos que aliando essas duas formas de aprendizagem o resultado será satisfatório. Foram utilizadas quatro aulas para ministrar o conteúdo que foi trabalhado pelo método tradicional, com aulas expositivas e dialogadas, com resolução de exercícios. Optamos por dar continuidade com os trabalhos em grupo, sendo que todos os exercícios apresentados nestes encontros foram realizados em duplas e pequenos grupos.

Os tópicos abordados foram divididos de acordo com a ordem do cronograma das aulas, da seguinte maneira: Fatorial, Principio Aditivo e Multiplicativo, Arranjo Simples, Permutação Simples e com Repetição e Combinação Simples. As definições foram baseadas em BONJORNO, 2002. O material utilizado encontra-se na íntegra em anexo (Apêndice A).

5.4.2 Desenvolvimento das atividades e observações

5.4.2.1 Fatorial

Para podermos utilizar as fórmulas de Análise Combinatória devemos conhecer e compreender o que é um fatorial, para tanto preparamos uma aula expositiva e com resolução de exercícios para alcançar o objetivo.

A fim de fixar e verificar o entendimento dos alunos, os mesmos realizaram algumas atividades no livro didático adotado pela escola. Durante a realização dos exercícios houve bastante dificuldades no momento de simplificar as expressões, como por exemplo no item

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!+(n+3)!}$$

que para resolver os alunos deveriam utilizar a primeira propriedade que diz o seguinte: *"Podemos escrever para qualquer n (n pertencente aos naturais) e n ≥ 2, como* $n! = n\,.(n-1)!$*"*, para depois colocar o termos comum em evidência e simplifica-los. Durante a realização dos exercícios os alunos solicitaram com frequência a ajuda da professora.

5.4.2.2 Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo

Esse item consiste em apresentar e definir os Princípios Fundamentais da Análise Combinatória: Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. Podemos notar que esses dois princípios já foram utilizados de forma intuitiva pelos alunos durante a resolução dos desafios. Para introduzir e diferenciar os conceitos a aula foi iniciada a partir de dois exemplos:

Exemplo 1:
Maria entrou numa loja que tem 2 tipos diferentes de doces e 4 de salgados.

a) Supondo que ela só possa comprar um alimento, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-lo?
b) Supondo, agora, que ela deseja comprar um doce e um salgado, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-los?

Exemplo 2:
Uma corrida é disputada por 3 atletas. De quantas maneiras poderemos ter os dois primeiros lugares?

Para resolver os exemplos foi utilizado no item a) do 1º exemplo o princípio aditivo. Já no item b) do 1º exemplo e no 2º exemplo foi utilizado o princípio multiplicativo.

Durante a explanação da aula sobre os princípios aditivo e multiplicativo foi possível observar que houve compreensão dos conceitos, pois os próprios alunos observaram que já haviam utilizado esses princípios nas resoluções dos desafios, como mostra o diálogo abaixo:

Professora: Então turma, conseguiram compreender a diferença entre Princípio Aditivo e Multiplicativo?
Alunos: Sim!
Professora: Alguém poderia me dar um exemplo em que utilizamos o princípio multiplicativo diferente dos citados acima?
Marina: Nos desafios que fizemos tinha várias, tipo aquela que falava dos lanches, a gente pegou e multiplicou todas as opções que nós tínhamos.
Professora: Isso mesmo, esse é outro exemplos do uso do Principio Multiplicativo. E alguém poderia me dizer se em algum dos desafios que fizemos utilizamos o Principio Aditivo?
(Alguns segundos de silêncio)
Professora: Então, ninguém se arrisca? Brinco Preto?
Brinco Preto: Eu acredito que seja o desafio que pedia pra gente calcular o número de jogos de um campeonato que fizemos 11 + 10 + 9.. e assim por diante.
Professora: Exatamente, para poder resolver esse desafio vocês utilizaram o Princípio Aditivo.

Quadro 5: Quinto diálogo.

No diálogo parcialmente descrito acima podemos observar que os alunos fizeram conexões com os desafios realizados em grupo, que de forma coletiva encontraram as soluções.

5.4.2.3 Arranjo Simples

O propósito dessa aula foi compreender e identificar o agrupamento do tipo Arranjo e utilizá-lo na resolução de problemas.

No decorrer da aula salientamos que agrupamentos do tipo arranjo são utilizados quando consideramos a ordem dos elementos, ou seja, quando alteramos a ordem também alteramos o tipo de agrupamento. Salientamos também que podemos utilizar o Princípio Multiplicativo para resolver problemas desse tipo.

Durante as explanações os alunos não apresentaram dúvidas, nem questionaram as resoluções feitas utilizando a fórmula. Em seguida resolveram exercícios do livro didático utilizado pela turma sendo que, algumas dúvidas surgiram durante a realização das atividades. Notamos que em atividades que exigiam um pouco mais de esforço intelectual os alunos não hesitavam em pedir ajuda, em questão de segundos já desistiam de "pensar", buscando ajuda para interpretação.

5.4.2.4 Permutação Simples e com Repetição

Nesta aula buscamos compreender um arranjo especial de n elementos tomados n a n, conhecido como Permutação. Procuramos inserir o cálculo de Permutação na resolução de problemas.

Durante a explanação do conteúdo, percebemos que os alunos compreenderam a utilização das fórmulas, porém algumas dúvidas surgiam durante o processo. Primeiramente, a maioria dos alunos desconhecia o significado da palavra anagrama, de forma breve foi explicado que anagramas são diferentes palavras que podem ser feitas utilizando determinadas letras. Uma situação que gerou debate na resolução dos exemplos foram os itens g) e h) do exercício 2 da Permutação Simples.

02. Com a palavra CADERNO:

...

g) Quantos anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e nessa ordem?

h) Quantos anagramas apresentaram as letras C, A e D juntas?

Alguns alunos não conseguiam diferenciar os enunciados e acreditavam que a resposta seria a mesma em ambas as situações, sendo assim foi explicado novamente que na primeira situação as letras CAD deveriam permanecer juntas e na mesma ordem, que para trocar de lugar deveríamos "carregar" CAD como se fosse uma única letra. Já na segunda situação CAD também deveriam permanecer juntas, no entanto, não precisariam ficar sempre nessa ordem, ou seja, CAD podem trocar de lugar entre eles, e com essa possibilidade a mais, com certeza a última situação teria mais possibilidades. Após as explicações todos concordaram com as resoluções feitas e as dúvidas haviam sido esclarecidas.

Em seguida a fim de fixar o conteúdo visto, os alunos mais uma vez realizaram alguns exercícios do livro didático. Durante a realização das atividades poucas dúvidas surgiram, poucos alunos solicitaram ajuda para resolver, pois como estavam fazendo exercícios de permutação sabiam que a fórmula que deveriam utilizar era a mesma. Uma aluna inclusive fez o seguinte questionamento:

Estrelinha do Mar: Prof, mas nós vamos fazer as atividades misturadas também? Porque fazendo separado assim fica fácil, já sabemos a fórmula que temos que usar!!
Professora: Exatamente, fica fácil mesmo! Então, em um primeiro momento faremos as atividades separadas em "bloquinhos", quando tivermos estudado cada tipo de agrupamento iremos iniciar os exercícios "misturados".
Estrelinha do Mar: Hum, e como vamos saber que fórmula usar?
Professora: Não será uma tarefa tão difícil, existem elementos cruciais que diferenciam os agrupamentos. Vocês vão ver!

Quadro 6: Sexto diálogo.

Percebemos no diálogo acima a angústia da aluna, pois por enquanto não estava apresentando dificuldades, porém, já sofria por antecedência com medo de não saber como proceder quando tivesse disponíveis mais fórmulas.

5.4.2.5 Combinação Simples

Nesta aula foi trabalhado combinações simples. Ao iniciar, pedimos aos alunos que imaginassem que em sua sala seria feita uma comissão de três pessoas, e pedimos se a ordem das pessoas no grupo iria influenciar na comissão escolhida. Todos entenderam que não faria diferença, pois uma comissão formado por Lindinha, Florzinha e Docinho era igual à comissão formada por Docinho, Florzinha e Lindinha. A partir da situação iniciamos as definições de Combinação. Em seguida os alunos realizaram alguns exercícios do livro didático, não houveram muitas dificuldades.

Após a realização de atividades de combinação simples, havia chegado o momento que a aluna *Estrelinha do Mar* havia demonstrado angústia nas aulas anteriores, o momento de resolver exercícios, situações-problema, envolvendo todos os tipos de agrupamento. Antes disso foi enfatizado que para classificar um agrupamento como arranjo ou combinação, deveríamos proceder da seguinte forma: primeiro devemos formar o agrupamento sugerido pelo problema; em seguida, mudar a ordem de seus elementos; se, com essa mudança de ordem, obtivermos um agrupamento diferente do inicial, esses agrupamentos serão arranjos. Se, com essa mudança de ordem, obtivermos um agrupamento igual ao inicial, esses agrupamentos serão combinações.

A lista de exercícios complementar (Apêndice C) continha vinte e nove questões e abrangia todos os agrupamentos estudados. Inicialmente os alunos mostraram muita insegurança para resolver as atividades, antes de iniciar uma questão chamavam a professora para verificar se estavam procedendo da maneira correta, ou seja, se a fórmula escolhida condizia com a questão. No decorrer da aula, depois de alguns exercícios, alguns alunos já sentiam maior segurança na interpretação do problema e já conseguiam identificar o agrupamento correto sem necessitar de auxilio. Outros por sua vez, pediam ajuda praticamente em cada exercício, na maioria das vezes queriam apenas confirmação da professora, pois a linha de raciocínio estava correta. Após o término da lista de exercícios, sentiu-se a necessidade de fazer a correção de algumas questões no grande grupo a fim de esclarecer qualquer dúvida.

5.4.3 Questionário Diagnóstico

Com o objetivo de avaliar a proposta de ensino na perspectiva dos alunos aplicamos um questionário (Apêndice D) no término da nona aula. Vinte e seis alunos responderam as questões, individualmente. Optamos por representar graficamente os dados obtidos no questionário. As respostas dadas pelos alunos ao questionário e a análise dessas respostas serão apresentadas no capítulo 6.

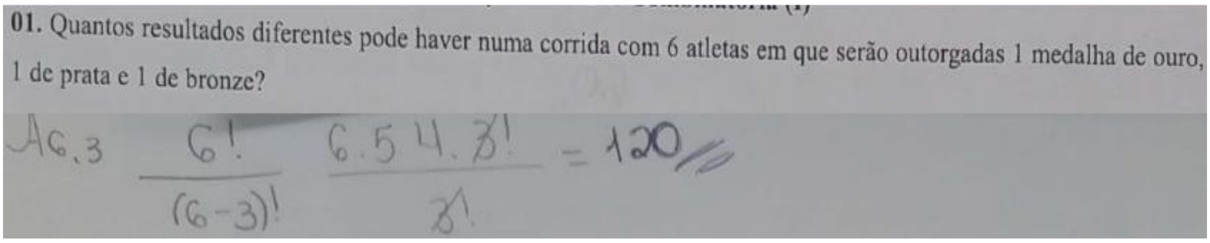
5.5 DÉCIMO ENCONTRO

5.5.1 Descrição da atividade

Para finalizar a proposta foi aplicado o teste de diagnóstico final (Apêndice E) para os 28 alunos presentes, o qual foi resolvido de maneira individual. O teste continha 10 questões envolvendo os dois tipos de agrupamento: arranjos e combinações. Apresentava também uma questão sobre fatorial. A escolha das questões foi influenciada pelo livro didático utilizado na turma e também pelas questões trabalhadas em sala. A seguir faremos considerações sobre algumas destas questões.

5.5.2 Desenvolvimento das atividades e observações

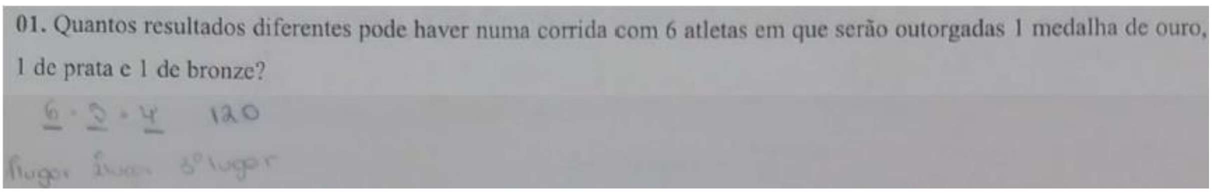
A primeira questão era parecida com o segundo desafio que foi realizado em grupos. Dos 28 alunos, 20 resolveram corretamente a questão. Porém os alunos que não resolveram de forma correta a questão, não o fizeram porque utilizaram fórmulas erradas. Dos 20 alunos que resolveram corretamente a questão 8, optaram por utilizar a fórmula de arranjo que foi estudada, conforme ilustra a Figura 26, resolvida pela aluna Lindinha.


01. Quantos resultados diferentes pode haver numa corrida com 6 atletas em que serão outorgadas 1 medalha de ouro, 1 de prata e 1 de bronze?

$A_{6,3} \quad \frac{6!}{(6-3)!} \quad \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$

Figura 26: Resolução feita pela aluna Lindinha, da primeira questão do Teste de diagnóstico final.

Os 12 alunos restantes optaram por não utilizar as fórmulas, sendo que 11 deles utilizaram o princípio multiplicativo (Figura 27).


01. Quantos resultados diferentes pode haver numa corrida com 6 atletas em que serão outorgadas 1 medalha de ouro, 1 de prata e 1 de bronze?

$6 \cdot 5 \cdot 4 \quad 120$

Figura 27: Resolução feita pela aluna Estrelinha do Mar, da primeira questão do Teste de diagnóstico final.

Apenas um aluno optou por enumerar as possibilidades de ordem cíclica e sistemática, conforme ilustra a Figura 28.

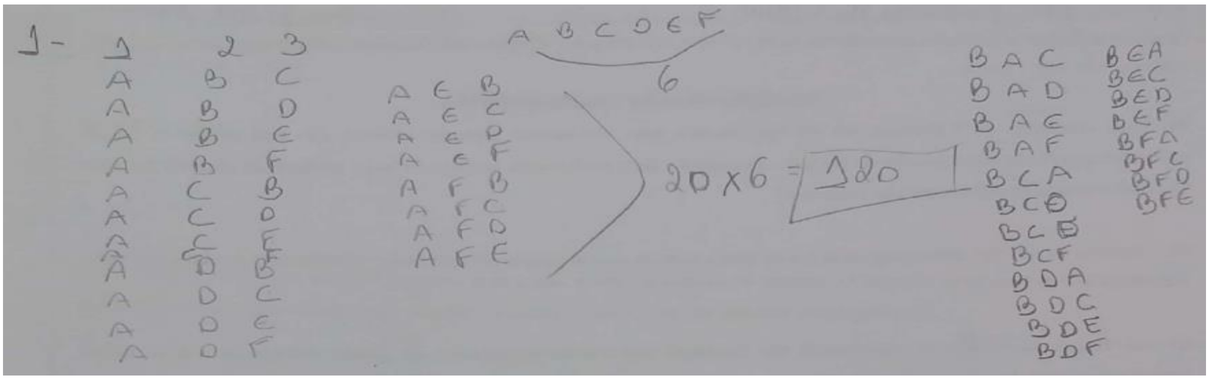


Figura 28: Resolução feita pelo aluno Brinco Preto, da primeira questão do teste de diagnóstico final.

A terceira questão era parecida com a segunda questão do teste de diagnóstico inicial. Na ocasião apenas 23% dos alunos resolveram corretamente a questão, já no teste final 64% dos alunos resolveram corretamente a questão o que equivale a 18 alunos.

A Figura 29 ilustra as resoluções da aluna Marina no teste de diagnóstico inicial e teste final. Podemos perceber que a aluna entendeu os conceitos de enumeração e também soube aplicar corretamente a fórmula, já que na segunda situação enumerar todos os números seria uma tarefa complicada, portanto o uso da fórmula tornou-se conveniente.

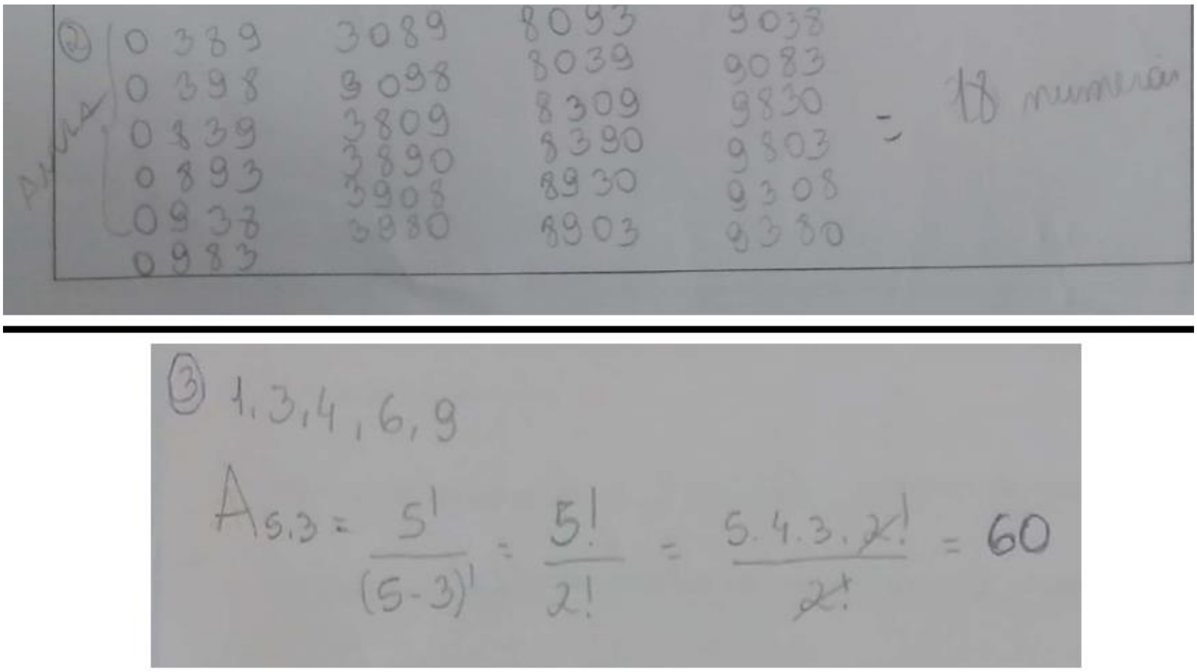


Figura 29: Resoluções da aluna Marina, da questão 2 do teste de diagnóstico inicial comparada com a questão 3 do teste de diagnóstico final.

A Figura 30 ilustra as resoluções do aluno Joãozn para ambas as questões. Note que no diagnóstico inicial o aluno não soube resolver a questão “chutando” uma resposta qualquer. Já no diagnóstico final percebemos um avanço significativo, pois soube interpretar o enunciado e utilizar as fórmulas estudadas de forma correta na resolução de problemas.

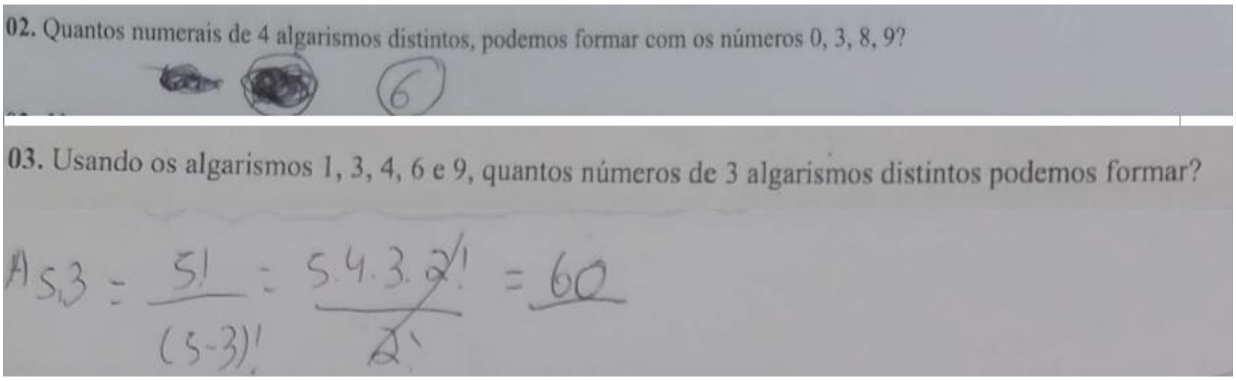


Figura 30: Resoluções do aluno Joãozn da 12, da questão 2 do teste de diagnóstico inicial comparada com a questão 3 do teste de diagnóstico final

A questão 4 teve o menor índice de acertos. Apenas duas alunas resolveram ela corretamente, ambas aplicaram as fórmulas de combinação (Figura 31).

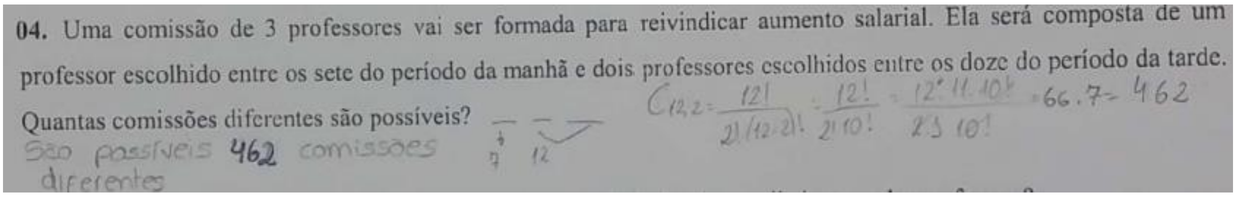


Figura 31: Resolução da aluna Girassol, para a questão 4 do teste de diagnóstico final.

Atribuímos o baixo índice de acertos da questão ao fato da interpretação incorreta do enunciado, pois muitos alunos efetuaram uma combinação de 19 professores tomados 3 a 3, ignorando o fato de haver restrições para os turnos.

Todas as questões foram resolvidas pelos alunos. Percebemos que optaram por utilizar as fórmulas em questões que apresentavam um número maior de elementos, onde o desenvolvimento descritivo exigia maior esforço. Porém em questões que existia a possibilidade de descrever todos os elementos ou utilizar os princípios fundamentais, as fórmulas eram deixadas de lado. Percebemos também que alguns alunos utilizaram os dois métodos de resolução, a fim de validar os resultados encontrados.

No teste de diagnóstico inicial, poucos alunos justificaram as suas respostas. Já no teste final houve um avanço na construção de argumentos mais consistentes, todas as respostas dadas provinham de proposições apresentadas de forma clara e organizada.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÕES

Como visto nos capítulos anteriores optamos por abordar o ensino de Análise Combinatória através de uma sequência didática que se dividiu em dois momentos: resolução de desafios em grupos e resolução de exercícios a partir de fórmulas.

A seguir faremos uma análise da proposta didática na perspectiva dos alunos, do professor, bem como dos autores citados no referencial teórico, a partir dos dados obtidos na aplicação das atividades e nas observações e anotações feitas pela pesquisadora e professora regente da turma.

Nesta análise será observado se o trabalho em grupo e as interações estabelecidas pelos alunos nos grupos e com a professora-pesquisadora contribuíram para:

i) o desenvolvimento, pelos alunos, do pensamento combinatório;

ii) a busca de estratégias de contagem e a resolução de problemas;

iii) a aprendizagem significativa destes conteúdos.

Utilizaremos também, para embasar nossa análise as respostas dadas pelos alunos sobre o desenvolvimento da proposta, conforme ilustram os gráficos abaixo:

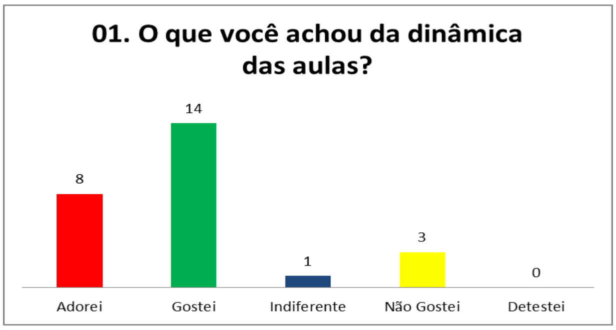


Gráfico 1: Questão 1 do questionário diagnóstico.

Gráfico 2: Questão 2 do questionário diagnóstico

Gráfico 3: Questão 3 do questionário diagnóstico.

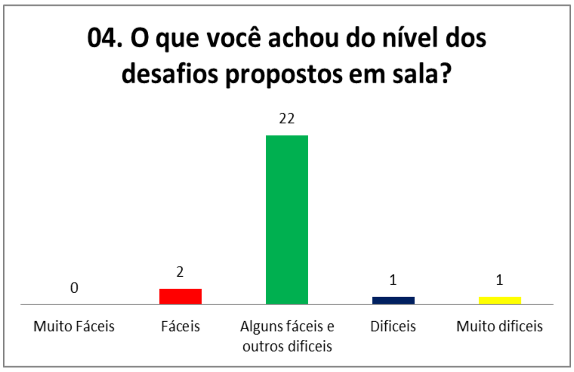


Gráfico 4: Questão 4 do questionário diagnóstico

1

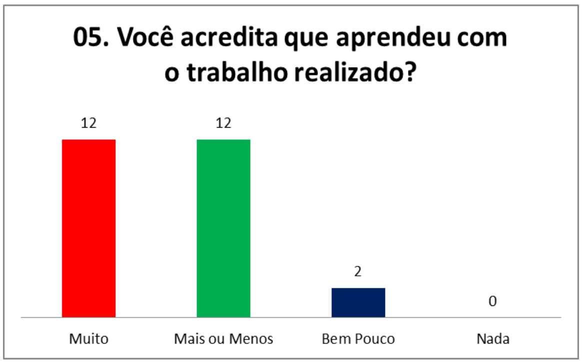


Gráfico 6: Questão 5 do questionário diagnóstico.

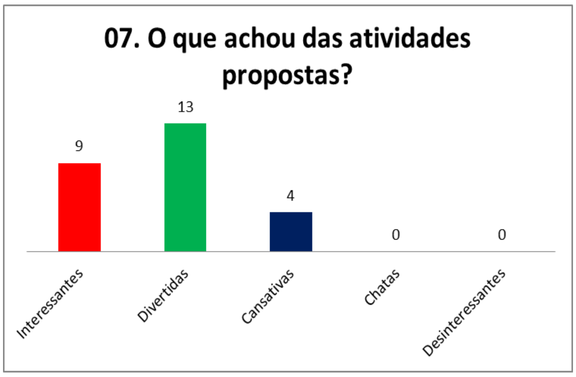


Gráfico 5: Questão 7 do questionário diagnóstico.

Gráfico 7: Questão 9 do questionário diagnóstico.

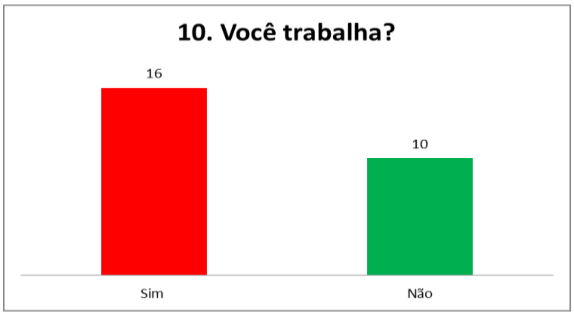


Gráfico 8: Questão 10 do questionário diagnóstico.

Dividiremos a análise dos resultados obtidos em dois momentos: o primeiro momento refere-se aos desafios aplicados nas primeiras aulas e o segundo momento refere-se às aulas sobre conteúdos e fórmulas.

6.1 DESAFIOS

As aulas em que foram desenvolvidos os desafios foram muito prazerosas enquanto professor. Percebemos que alunos que não se envolviam muito com as aulas, neste momento, mostraram-se interessados e participativos. Existem muitos pontos positivos de se trabalhar em grupo, dentre eles estão a possibilidade de compartilhar conhecimentos e de discutir ideias para resolver um problema, mostrar o seu ponto de vista apresentando argumentos que o defendem e convençam os colegas. Os momentos de discussão no grupo geraram muito aprendizado para os alunos e também para os professores.

Através do questionário diagnóstico (Apêndice D) constatamos que a maioria dos alunos gostou de resolver desafios matemáticos em grupos, como comprova o gráfico 1, onde

22 alunos gostaram ou adoraram esse tipo de aula. Foram muitos comentários no questionário elogiando esta metodologia, como por exemplo:

"Achei algo bem legal e impulsionou a turma a fazer atividades";

"Foi bom discutir sobre os problemas com os colegas que tem opinião diferente da sua"; "*Como comecei já no meio da 1ª dinâmica, gostei muito, porque são poucos professores que fazem isso e isso é o diferencial".*

Outros alunos inclusive pediram mais aulas nesse formato *"Porque aprendi bem melhor com essa dinâmica diferente em grupo, gostaria de mais!".*

É muito prazeroso e satisfatório saber que proporcionamos aos alunos um ambiente em que eles se sentiram estimulados a aprender.

Resolver atividades em grupo exercendo a comunicação matemática oral ou escrita traz benefícios, conforme Queiroz (2015) que afirma que muitas vezes os alunos aprendem com maior facilidade quando um colega está explicando, pois utilizam uma linguagem mais coloquial.

No decorrer do trabalho os alunos foram desenvolvendo a habilidade de trabalhar em equipe. Observando os registros dos diálogos ocorridos nos grupos, verificamos que no inicio alguns alunos tomavam frente para expor as suas ideias, e no decorrer das atividades houve um avanço, pois todos se envolviam nas discussões. O que nos leva a observar a ocorrência dos processos de comunicação na sala de aula, onde consideramos *comunicação como um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente*, pois na busca pelo convencimento do outro, os alunos negociaram significados e construíram o próprio conhecimento.

Quanto ao nível de dificuldade dos desafios propostos, vemos no gráfico 4 que vinte e dois alunos acharam alguns fáceis e outros difíceis. A única aluna que assinalou que eram todos difíceis comentou: *"Difíceis pois existia muita lógica e sem qualquer fórmula é complicado resolver".* Um dos alunos que assinalou que os desafios eram fáceis, também argumentou: *"Pensávamos que era difícil, mas depois pegamos o ritmo e tiramos de letra".* Esse aluno fazia parte de um grupo que conseguiu resolver corretamente todos os desafios, foi notável o empenho que tiveram e sempre ficavam muito orgulhosos de saber que haviam acertado a questão. Inclusive durante a realização dos desafios houve uma concorrência positiva e produtiva entre os grupos, como comprovam alguns comentários da questão 7: *"Foi algo diferente e bem competitivo!"; "São desafiadoras"; "Pois eram formas divertidas e interessantes de aprender o conteúdo".*

No gráfico 7, relativo à questão 6, vinte e um alunos responderam que se empenharam para fazer os desafios o que comprova que as atividades propostas eram desafiadoras, pois os grupos sentiam-se capazes de resolver os desafios. O que provavelmente tornou a atividade prazerosa foi o fato de levarmos a eles desafios pertinentes ao dia a dia, com temas como futebol, comida e amigos. Nesse sentido entendemos que fomos de encontro com a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel, pois uma das condições para a ocorrência da aprendizagem significativa, é que "o material a ser aprendido seja relacionável a estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. Um material com essa característica é dito potencialmente significativo". (MOREIRA, 2011, p. 164)

As questões 2 e 3 do questionário diagnóstico final, tabuladas nos gráficos 2 e 3, também referiam-se aos desafios realizados em sala. No gráfico 2 vemos que dezenove alunos responderam que às vezes outras disciplinas também seguem esta metodologia, ou seja, em algumas aulas formam grupos para realizar tarefas. No gráfico 3, vinte e dois alunos afirmam que nunca fizeram desafios como os propostos neste trabalho, isso se deve ao fato de que normalmente as aulas seguem um estilo tradicional, onde é comum primeiramente apresentar o conteúdo, seus conceitos para só depois resolver as atividades.

Nesta etapa da proposta fizemos exatamente ao contrário, os alunos foram instigados a resolver os desafios partindo e valorizando o conhecimento que já possuíam e neste modelo a formação dos grupos foi essencial, pois pensam e criam soluções coletivamente. Neste contexto a teoria da aprendizagem de Ausubel também propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados, para que possam construir estruturas mentais que permitam descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem prazerosa e eficaz.

6.2 FÓRMULAS

Nesta etapa da proposta optamos por abordar o ensino de Análise Combinatória seguindo o modelo tradicional, com aulas expositivas e dialogadas, apresentando fórmulas da Análise Combinatória, pois pensamos que somente o ensino a partir de desafios não seria o suficiente, todavia essas duas metodologias juntas teriam um maior potencial na aprendizagem dos alunos.

Na sequência, para resolver os exercícios de Análise Combinatória com a possibilidade do uso de fórmulas os alunos formaram duplas e até pequenos grupos, pois, indiferente da metodologia utilizada, apostamos na aprendizagem em grupo. No decorrer das aulas os alunos fizeram muitos exercícios. Em um primeiro momento os exercícios eram vistos de forma isolada de acordo com o agrupamento estudado na aula, ou seja, ao estudar arranjo foram feitos em sequência apenas exercícios de arranjo, e assim seguimos com cada agrupamento. Para tanto utilizamos os exercícios propostos no livro didático adotado pela escola.

Observamos que enquanto os alunos faziam atividades relacionadas a apenas um tipo de agrupamento, eles não apresentavam muitas dificuldades. Em algumas situações chamavam a professora para que os auxiliasse na interpretação do problema, pois na resolução do cálculo não tinham dificuldades.

No decorrer das aulas voltamos aos desafios propostos na etapa anterior para verificar suas resoluções utilizando uma fórmula, mostrando aos alunos as duas versões da resolução de exercícios e com isso poderiam escolher aquela que desejassem.

Após trabalhar todos os agrupamentos, arranjo, permutação e combinação, os alunos fizeram em duplas uma lista de exercícios complementar com questões sobre arranjo, permutação ou combinação. Nesse momento eles deveriam identificar o tipo de agrupamento e resolver a questão, por meio de aplicação ou não de fórmula. Muitas dúvidas surgiram na resolução dessa lista. Uma parte considerável dos alunos não conseguia diferenciar o tipo do agrupamento (arranjo, permutação ou combinação) presente no exercício a fim de resolvê-lo, solicitando ajuda da professora para a interpretação do enunciado do exercício. Essa ajuda dada aos alunos consistia basicamente em uma única pergunta: *Se você trocar a ordem dos elementos, vai mudar o agrupamento? Sim, então trata-se de um arranjo. Não, então trata-se de uma combinação.* Após essa fala, a grande maioria dos alunos já compreendia o problema e conseguia resolvê-lo. Muitos dos exercícios dessa lista complementar foram corrigidos em aula para a turma inteira.

De acordo com Moreira, em seu estudo sobre as diversas teorias de aprendizagem destaca quando existe evidência de aprendizagem significativa ou quando a aprendizagem está baseada apenas em memorização. Segundo Moreira:

> De acordo com Ausubel, a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica a posse de significados claros, precisos e transferíveis. Porém, ao se testar essa compreensão, simplesmente pedindo ao aluno que diga quais os atributos essenciais de um conceito ou os elementos essenciais de uma proposição, pode-se obter apenas respostas mecanicamente memorizadas. Ele argumenta que uma longa experiência em fazer exames faz om que os estudantes se habituem a memorizar não

> só proposições e fórmulas, mas também causas, exemplos, explicações e maneiras de resolver "problemas típicos". (MOREIRA, 2011, p. 164).

Quando Ausubel argumenta que os alunos memorizam resolver "problemas típicos" vemos que em nossa proposta onde aliamos desafios e fórmulas, trabalhamos de forma diferenciada. Como já mencionamos anteriormente, a aplicação direta de fórmulas sem o entendimento da mesma pode fazer com que os alunos apenas repitam passos e trabalhem mecanicamente, tornando o seu estudo e aprendizado apenas um jogo de fórmulas.

No questionário diagnóstico perguntamos aos alunos se eles haviam aprendido com o trabalho realizado. Como mostra o gráfico 5, doze alunos responderam que aprenderam muito, doze alunos responderam que aprenderam mais ou menos e apenas dois alunos responderam que aprenderam pouco, argumentando: *"Falta de interesse da minha parte" e "Falta de atenção minha".*

Dos alunos que assinalaram mais ou menos, alguns também comentaram: *"Umas coisas eu não entendi!", "Em algumas coisas fiquei com dúvida", "Foi possível perceber que as vezes não precisamos usar contas, basta pensar."*

Quando a aluna argumenta que *basta pensar,* ela deve estar se referindo a resolução dos exercícios sem aplicação de uma fórmula de forma mecânica, pois muitas vezes descrever os elementos do problema traz mais clareza para resolvê-lo. Esse pensamento vai ao encontro do que Vasquez (2004) afirma, que "Cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los".

Alguns alunos que assinalaram que aprenderam muito também comentaram: *"Aprendi muito, achei muito divertido a gente fazer os desafios sem ter visto o conteúdo, depois com a explicação a gente entendeu melhor"; "Aprendi muito, pois me desafiei, me empenhei e busquei mais conhecimentos para resolver as questões"*; "*Aprendi um novo jeito de resolver exercícios".* De acordo com os comentários é possível observar que a maioria dos alunos aprendeu com a proposta de ensino, o que também comprova isso foram os avanços percebidos do teste de diagnóstico inicial para o teste de diagnóstico final.

Ainda no questionário diagnóstico, na questão 9, que era descritiva, perguntamos aos alunos como poderíamos melhorar o trabalho realizado. Dos vinte e seis alunos que responderam o questionário, dezessete alunos afirmaram que do jeito que as atividades haviam sido encaminhadas estava bom, não teria nada para melhorar, muitos elogios foram dados. Quatro alunos não responderam a questão e cinco alunos apontaram alguns aspectos que deveriam ser melhorados. Dos cinco alunos, quatro deles apontaram que deveriam ter sido trabalhados menos exercícios, pois em algumas situações eles não conseguiam fazer todas as questões em sala e consequentemente teriam que terminar em casa sem auxilio direto do professor, o que tornava a atividade mais complicada, aliado ao fato de que trabalhavam e tinham pouco tempo para terminar a tarefa em casa. Outro aluno escreveu de deveríamos deixar as aulas mais divertidas.

Quando questionamos os alunos sobre qual conteúdo estávamos trabalhando, a resposta foi quase unânime: Análise Combinatória. Apenas seis alunos responderam que o conteúdo estudado se tratava de Probabilidade ou Análise Combinatória e Probabilidade. Entendemos a confusão pois estes dois conteúdos são muito próximos.

As respostas dos vinte e seis alunos que responderam o questionário sugerem que a proposta foi bem aceita pela maioria, as atividades despertaram interesse e a dinâmica em grupo auxiliou no processo de aprendizagem significativa destes conteúdos.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de analisar as possíveis contribuições na aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória com base na resolução de problemas, a partir de uma proposta pautada em trabalhos em grupos e na comunicação matemática, aplicada a uma turma de alunos da 2ª série do Ensino médio de uma escola estadual de Chapecó – SC, estruturamos a presente pesquisa visando: (1) avaliar os conhecimentos combinatórios adquiridos ao longo da proposta; (2) desenvolver nos alunos a capacidade de criar estratégias de contagem e organização da resolução de problemas; (3) identificar as principais estratégias utilizadas; (4) avaliar as interações estabelecidas nos grupos; (5) analisar como os alunos avaliaram a proposta de ensino.

Em relação ao conteúdo de Análise Combinatória, verificamos que um percentual significativo de alunos que participaram da proposta, apresentaram avanços na capacidade de resolver problemas envolvendo princípios de contagem. A partir da comparação dos registros escritos pelos alunos nos testes de diagnóstico inicial e final, encontramos indícios que essa proposta contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do raciocínio combinatório para a maior parte dos alunos que fizeram parte dessa pesquisa. A comparação entre os índices de acertos do teste de diagnóstico inicial e final legitimam essa afirmação.

As resoluções apresentadas no teste de diagnóstico final evidenciam estratégias mais elaboradas do que as apresentadas no início do desenvolvimento da proposta. Entretanto foram encontradas dificuldades quanto a diferenciação do tipo de agrupamento a ser utilizado. Atribuímos esse fato a um aspecto negativo que encontramos em nossa proposta, que foi em relação ao número de exercícios realizados como desafios. Foram apenas cinco situações-problemas em que os alunos, organizados em grupos, tiveram que resolver. Se houvéssemos dispostos um tempo maior nessa etapa, com mais desafios, as dificuldades teriam sido menores. Em contrapartida os exercícios com uso de fórmulas foram muitos, tornando a aula um pouco cansativa e repetitiva. Consideramos que esse tenha sido um fator atenuante na aprendizagem dos alunos, onde alguns consideraram que aprenderam “mais ou menos” ou “bem pouco” com as atividades realizadas. Para sanar essa dificuldade seria necessário mais tempo para aplicar a proposta, o que nesse caso tornou-se inviável, pois a escola possui como meta cumprir todos os conteúdos previstos na ementa de Matemática para o 2º Ano do Ensino Médio, conforme prevê a Base Nacional Comum Curricular.

Através da análise dos diálogos, registrados em diário de bordo, verificamos que a comunicação estabelecida nos pequenos grupos ocorreu de forma contributiva. No momento da aproximação da professora a comunicação passava para um padrão reflexivo, pois nesse momento eram feitas perguntas aos alunos que os faziam pensar. Utilizamos perguntas de focalização, de confirmação e de inquirição, conforme sugerido por Love e Mason (1995 *apud* Martinho 2007). As perguntas de focalização eram utilizadas em momentos de distração dos grupos, para que os alunos centrassem a atenção na situação- problema que deveria ser resolvida. Já as perguntas de confirmação foram utilizadas durante as atividades para testar os conhecimentos dos alunos; foram feitas nos pequenos e também no grande grupo. E para as perguntas inquiridoras, utilizamos o erro como ponto de partida para reflexões, para que os alunos validassem ou refutassem sua estratégia.

Quanto às estratégias utilizadas para resolver os problemas, percebemos que foram evoluindo na medida em que as discussões iam ocorrendo no grande grupo. No que se refere a resolver problemas utilizando fórmulas ou não, ficou bastante dividido entre a turma. Alguns deixaram as fórmulas totalmente de lado e não as utilizaram para resolver as questões. Outros por sua vez optaram por resolver utilizando as duas metodologias, ora uma, ora outra, ou também as duas em uma mesma questão a fim de validar o resultado encontrado. Um terceiro grupo optou por resolver os problemas utilizando diretamente as fórmulas, sem criar nenhuma outra estratégia. De acordo com os testes aplicados, percebemos que houve maior êxito nos alunos pertencentes ao segundo grupo, ou seja, tiveram um maior índice de acertos.

Apesar das dificuldades encontradas, a avaliação da proposta feita pelos alunos foi determinante para concluirmos que este trabalho alcançou seus objetivos. Em um relato, uma aluna afirmou que aprendeu consigo mesma e com o grupo, de uma forma diferente e divertida. A partir desse comentário percebemos que a interação em grupo contribuiu de maneira positiva e significativa.

Com essa proposta buscávamos analisar as possíveis contribuições na aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória com base na resolução de problemas, a partir de uma proposta pautada em trabalhos em grupos e na comunicação matemática. Os resultados obtidos na comparação dos testes diagnósticos e na análise do processo nos levam a afirmar que esta proposta de ensino foi capaz de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Esperamos que nossa proposta sirva de inspiração para outros docentes ou futuros docentes que estão em busca de uma educação de qualidade, aprendendo com os nossos erros e criando uma proposta que possa beneficiar ainda mais nossos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriane Luziê de. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na comunicação Matemática: Um estudo de caso com o 2º Ano do Ensino Médio.** 2010. 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto.

AMARAL, Heloísa. **Sequência didática e ensino de gêneros textuais.** 2015. Disponível em: https://www.escrevendoofuturo.org.br/conteudo/biblioteca/nossas-publicacoes/revista/artigos/artigo/1539/sequencia-didatica-e-ensino-de-generos-textuais Acesso em: 29/10/2018

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D. and HANESIAN, H. **Educational psychology: a cognitive view**. 2nd. ed. New York, Holt Rinehart and Winston, 1978.

BORDENAVE, Juan Diaz. **O que é comunicação.** São Paulo: Brasiliense, 2007.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem.** 2009. 195f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

CATALDO, João Carlos. **Análise Combinatória: A importância dos métodos de contagem – Parte 1.** 2013. 3f. Artigo. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

FIGUEIREDO, Luiz Manoel. **Matemática discreta: v. 1**. 3.ed.- Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. 140p.

KUMMER, Tarcísio. **Um caminho para a Matemática: do cotidiano para o escolar.** Curitiba: CRV, 2016. 118p.

LAUREANO, Sidomar Barbosa. **Um jogo de Cartas no ensino da Análise Combinatória e Probabilidade.** 2017. 95f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Tocantins – Campus Arraias.

LIMA, Renam Gustavo Araújo de; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Um estudo inicial de estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos, diante de problemas de combinatória.** 2014. 12f. Artigo.

MARTINHO, Maria Helena; PONTE, João Pedro da. **A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor.** 2007. 12f. Universidade do Minho.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de aprendizagem**. – 2. Ed. Ampl. – São Paulo: EPU, 2011. 242f.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. **Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.** 2009. 267f. Tese (Programa de Pós Graduação em Educação – Curso de Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco.

QUEIROZ, Christina Stephano de. **Trabalho em grupo trás benefícios para o aprendizado.** 2015. Disponível em: http://www.revistaeducacao.com.br/trabalho-em-grupo-traz-beneficios-para-o-aprendizado/ Acesso em: 28/10/2018.

SARRAMONA, J. (1987). **La educación como sistema de educación**. In Castillejo & Colom, Pedagogia Sistemica. Barcelona: CEAC.

THOMAS, Jerry R. e NELSON, Jack K. (1996) **Métodos de pesquisa em atividade física.** 3.ed. Campo: Cinética Humana

VASQUEZ, Cristiane Maria Roque. **Análise Combinatória: Alguns aspectos históricos e uma Abordagem pedagógica.** 2004. 16f. Artigo – Educação Matemática um compromisso social.

YIN, Roberto K**. Estudo de caso: planejamento e métodos.** 2ª Ed. Porto Alegre. Editora: Bookmam. 2001

APÊNDICES

APÊNDICE A _ Sequência Didática

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1º Encontro

Tempo: 2 aulas[2]

Objetivo: Reconhecer o Princípio Fundamental da contagem presente no jogo.

Metodologia: A aula será expositiva e dialogada com uso de materiais concretos manipulando um jogo intitulado “Mastermind”.

Descrição das atividades:

1º Momento: Primeiramente apresentaremos o jogo, seu funcionamento e suas regras.

Comentário: O jogo de Mastermind tem peças de seis cores diferentes (verde, vermelho, laranja, roxo, amarelo e azul). Temos ainda as peças pretas e brancas que são menores. Há quatro espaços grandes em cada fileira, em 10 fileiras horizontais, uma abaixo da outra. E ao lado delas, um quadrado menor, com quatro espaços menores. Uma fileira, que seria a décima primeira, tem um defletor que esconde seus espaços. O desafiador faz uma combinação com quatro peças coloridas, sem repetir as cores de cada pino, e as põe na décima primeira fileira e levanta o defletor, escondendo a senha. Então, o desafiado tenta adivinhar a senha, pondo quatro peças que ele acha que são a senha na primeira fileira, e o desafiador põe as peças pretas e brancas no quadrado menor ao lado. As regras das peças pretas e brancas são essas: o branco significa que há uma cor certa mas no lugar errado, o preto significa que há uma cor certa no lugar certo, e nenhum pino significa que uma das cores não está contida na senha. O desafiado vai tentando adivinhar, se guiando pelas peças pretas e brancas. Se o desafiado não acertar até a 10ª fileira, o desafiador fecha o defletor e revela a senha, mas se adivinhar, o desafiador põe quatro peças pretas e revela a senha.

Fonte: Jogo criado por Mordecai Meirowitz[3] e adaptado pela autora.

2º Momento: Solicitar aos alunos que formem duplas para manipulação do jogo. Será distribuído a cada dupla um kit do jogo: Tabuleiro, peças e um defletor.

---

[2] Cada aula equivale à 45 minutos.

[3] Mordecai Meirowitz foi um perito em telecomunicações israelita que inventou o jogo de tabuleiro de descobrir os códigos Mastermind.

3º Momento: Ao concluir o jogo, solicitar que os alunos expressem o que foram "pensando" ao efetuar as jogadas. Solicitar, nessa análise, o número de possibilidades que temos para preencher cada um dos espaços:

6 cores	5 cores	4 cores	3 cores

Questionar: Como saber quantas e quais são as possibilidades?

2º Encontro

Tempo: 1 aula

Objetivo: Esta atividade tem por objetivo verificar os conhecimentos prévios de cada aluno.

Metodologia: Resolução de atividades.

Descrição das atividades:

1º Momento: Cada aluno receberá uma cópia e irá desenvolver as atividades de forma individual. (Apêndice A)

2 Momento: No final da aula recolher a atividade bem como suas resoluções.

3º Encontro

Tempo: 2 aulas

Objetivo: Reconhecer a utilização do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas.

Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada.

Descrição das atividades:

1º Momento: Iniciar com o grande grupo o conceito de numerais.

Exemplo:

Quantos números com algarismos distintos é possível formar com os algarismos 2 e 4?
Quantos números é possível formar com os algarismos 2 e 4?
Quantos números com algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3?
Quantos números é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3?

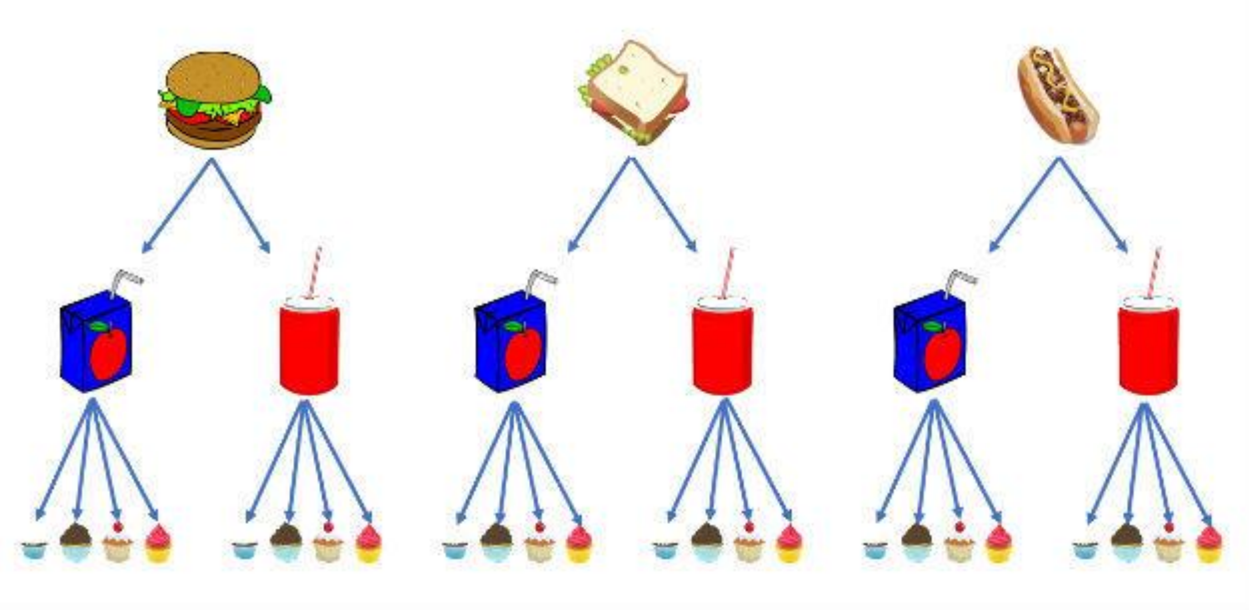
2º Momento: Em seguida os alunos irão formar grupos de 5 alunos a fim de resolver algumas situações-problema de análise combinatória, após um representante de cada grupo terá que apresentar ao grande grupo a solução encontrada.

1ª Situação: Cada aluno receberá uma cópia do problema.

Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidos três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

Solução

Podemos começar a resolução do problema apresentado, construindo uma árvore de possibilidades, conforme ilustrado abaixo:



Acompanhando o diagrama, podemos diretamente contar quantos tipos diferentes de lanches podemos escolher. Assim, identificamos que existem 24 combinações possíveis.

Podemos ainda resolver o problema usando o princípio multiplicativo. Para saber quais as diferentes possibilidades de lanches, basta multiplicar o número de opções de sanduíches, bebidas e sobremesa.

Total de possibilidades: 3.2.4 = 24

Portanto, temos **24 tipos diferentes de lanches** para escolher na promoção.

Fonte: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

2ª Situação: O problema será repassado verbalmente para a turma.

Quatro Clubes de Futebol estão disputando um campeonato:

Predadores, Touros à solta, Canibais e 2 pés esquerdos. Qual é o número de resultados possíveis para os três primeiros lugares?

Solução:

4 x 3 x 2 = 24 possibilidades.

3ª Situação: A história será lida para a turma.

MENTIR DE IMPROVISO

SÓ DÁ PROBLEMAS

Quatro amigos vinham se saindo bem nas aulas de cálculo: recebiam elogios por conta das lições de casa caprichadas, e tiravam boas notas nas provas. Assim, no fim de semana antes da última prova do semestre, eles decidiram interromper os estudos e ir a uma festa em outra cidade, mesmo sabendo que a prova ocorreria na segunda-feira pela manhã. Dormiram pouco, beberam demais e, na segunda-feira, de ressaca, não conseguiram acordar a tempo. Quando chegaram à faculdade, a prova já tinha acabado.

Um deles foi bater na porta da sala da professora de cálculo. Assim que entrou, inventou uma história:

- Fomos ao aniversário de um amigo, que mora em outra cidade. Hoje de manhã, quando vínhamos para cá, um dos pneus do carro furou. Só aí descobrimos que o estepe estava murcho! Como estávamos numa estradinha secundária, demorou muito até conseguir ajuda.

A professora sorriu, toda simpática, e disse:

- Tudo bem, acidentes acontecem. Não se preocupem. Estejam amanhã cedo no anfiteatro, assim eu aplico uma prova extra só para vocês quatro.

No dia seguinte, os quatro chegaram no horário; estavam contentes. A professora foi com eles ao anfiteatro, e pediu que cada um deles se sentasse num extremo do salão imenso; os quatro ficaram longe demais um do outro, de modo que não havia como colar ou conversar.

A professora usou um projetor para projetar na parede a primeira questão: ela valia 5 pontos de um total de 100, e era um exercício simples de integração. Os quatro terminaram o exercício em menos de dez minutos. Aí ela apertou um botão projetou a seguinte mensagem:

Segunda questão.

Você têm 10 segundos para respondê-la em absoluto silêncio, e ela vale 95 pontos entre 100:

QUAL PNEU FUROU?

O DESAFIO

Qual é a chance de que os quatro amigos chutem o mesmo pneu?

Fonte: Revista Cálculo: matemática para todos, 14ª edição, Pág. 58 – 59, editora Segmento Março de 2012

4º Encontro

Tempo: 1 aula

Objetivo: Reconhecer e diferenciar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo presentes na resolução de problemas.

Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada.

Descrição das atividades:

1º Momento: Dar continuidade a resolução de situações – problemas iniciadas na aula anterior feitas em pequenos grupos. Solicitar que um componente do grupo socialize a solução encontrada.

4ª Situação:

Qual a quantidade de uniformes diferentes que podem ser formados pelas opções fornecidas por um patrocinador: cinco camisas (azul, vermelha, amarela, roxa e verde), três de calção (preto, branco e cinza) e duas opções de meiões (azul e preta).

Solução:

5 x 3 x 2 = 30 uniformes diferentes.

5ª Situação:

Dois pés esquerdo já está no campeonato estadual junto com outros 11 times. De acordo com o regulamento na primeira fase todos os times devem se enfrentar. Determine quantos jogos serão ao todo nessa primeira fase. Elabore um esquema e apresente o calendário esportivo.

Solução:

10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55 jogos

Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K os times participantes da primeira fase. Os confrontos ocorrerão entre:

AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ, BK, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ, CK, DE, DF, DG, DH, DI, DJ, DK, EF, EG, EH, EI, EJ, EK, FG, FH, FI, FJ, FK, GH, GI, GJ, GK, HI, HJ, HK, IJ, IK, JK.

5º Encontro

Tempo: 2 aulas

Objetivo: Compreender o que é um fatorial; Definir e diferenciar princípio multiplicativo e princípio aditivo.

Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada.

Descrição das atividades:

1º momento: Iniciaremos a aula introduzindo o conceito de fatorial. As definições que se seguem foram baseadas em BONJORNO, 2002.

<u>Comentário:</u> Certos cálculos da Análise Combinatóriasão trabalhosos e desanimadores. Por exemplo, o cálculo do produto cujos fatores são números naturais consecutivos de nove algarismos não-nulos e distintos é dado por:

9.8.7.6.5.4.3.2.1

Para facilitar as operações com expressões desse tipo, adotamos o símbolo n! para indicar o produto dos números naturais consecutivos n, (n – 1), (n – 2),...,1, com $n \geq 2$. Assim, temos:

9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1

Essa notação nos auxilia em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, permitindo apresentar resoluções de maneira abreviada.

Definição de Fatorial:

<u>Passar no quadro:</u> Seja *n* um número natural, com $n \geq 2$, que chamamos de fatorial de um número. Define-se o fatorial n, que indicamos por *n!*, como o produto dos números naturais consecutivos:

n, (n – 1), (n – 2),...,1.

isto é,

n! = n . (n – 1) . (n – 2). 1

Exemplos: 2! = 2.1 = 2

3! = 3.2.1 = 6

5! = 5.4.3.2.1 = 120

<u>Comentário:</u> Podemos observar que a calculadora científica possui uma tecla para calcular o fatorial.

2º momento: Propriedades dos fatoriais

<u>Passar no quadro:</u>

1ª propriedade: Podemos escrever para qualquer n (n pertencente aos naturais) e n ≥ 2.

n! = n . (n – 1)!

Observe a igualdade 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1, sabemos pela definição de fatorial que 7! = 7.6.5.4.3.2.1, então substituindo 7! no 8! temos:

8! = 8 . 7!

Essa propriedade é denominada de propriedade fundamental dos fatoriais.

2ª propriedade: Vamos estender o conceito de fatorial de n para n = 1 e n = 0. Em cada extensão deve-se conservar a propriedade n! = n . (n – 1)!.

- Se n = 2 → n! = n . (n – 1)!

  2! = 2 . (2 – 1)!

  2! = 2 .1!

  2 . 1 = 2 .1! (dividindo os dois membros por 2)

  1 = 1!

- Se n = 1 → n! = n . (n – 1)!

  1! = 1 . (1 – 1)!

  1! = 1 .0!

  1 = 1 .0!

  Para que essa igualdade seja verdadeira, definimos **0! = 1**

3º Momento: Atividades sobre fatorial.

01. Calcule:

a) 6!

b) 4.2!

c) 0! + 4!

d) 5! – 4!

e) $\frac{10!}{3!7!}$

f) $\frac{15!13!}{14!12!}$

g) $\frac{12!3!}{15!}$

h) $\frac{(3!-0!)!}{3!2!}$

02. Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

b) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!+(n+3)!}$

c) $\frac{(n-1)!+n!}{(n+1)!}$

03. Resolva as equações:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$

b) $\frac{(n+10)!}{(n+8)!} = 30$

c) n! = 1

3º Momento: Introduziremos o conceito de principio aditivo e principio multiplicativo a partir de dois exemplos.

Exemplo 1:

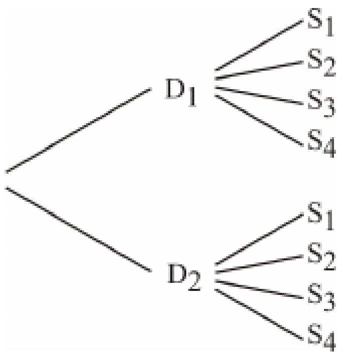
Maria entrou numa loja que tem 2 tipos diferentes de doces e 4 de salgados.

a) Supondo que ela só possa comprar um alimento, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-lo?

Resposta: São 2 + 4 = 6 tipos de alimentos. Maria poderá escolher de 6 maneiras distintas o seu alimento.

b) Supondo, agora, que ela deseja comprar um doce e um salgado, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-los?

Resposta: Chamemos os diferentes tipos de doces de D1 e D2 e os de salgados de S1, S2, S3 e S4. Observemos o seguinte diagrama, também conhecido como a árvore das possibilidades.

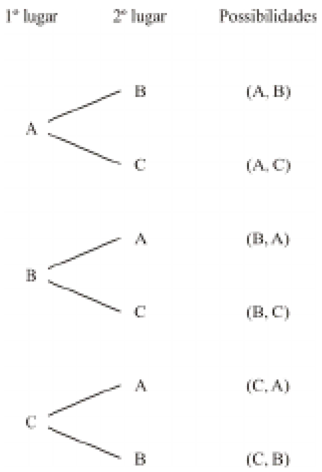


Maria pode escolher o doce D1 e o salgado S1 ou o doce D1 e o salgado S2, e assim por diante. Ela tem 8 maneiras distintas de escolher um doce e um salgado.

Exemplo 2:

Uma corrida é disputada por 3 atletas. De quantas maneiras poderemos ter os dois primeiros lugares?

Resposta: Chamemos os atletas de A, B e C. Partindo do princípio de que qualquer atleta poderá chegar em primeiro lugar, temos 3 possibilidades para o primeiro lugar. Uma vez ocupado o primeiro lugar, o segundo lugar poderá ser ocupado por um dos 2 atletas restantes. Chamemos os atletas de A, B e C.



Encontramos 6 maneiras distintas de se obter os dois primeiros lugares na corrida. Neste exemplo, observemos que a possibilidade (A, C) é diferente de (C, A), pois a ordem de chegada é importante.

Comentário: No item a do 1º exemplo, usamos o princípio aditivo. Já no item b do 1º exemplo e no 2º exemplo poderíamos ter usado o princípio multiplicativo.

Podemos enunciá-los da seguinte forma:

Princípio Aditivo

Seja A um conjunto e $A1, A2, ..., An$ subconjuntos de A, disjuntos 2 a 2, de forma que $A = A1 \cup A2 \cup ... \cup An$. Sendo n(A) o número de elementos de A e n(Ai) o número de elementos de Ai para $1 \leq i \leq n$, temos $n(A) = n(A1) + n(A2) + ... + n(An)$.

Princípio Multiplicativo

Se uma tarefa a ser realizada pode ser dividida em n etapas sucessivas de modo que
p1 é o número de maneiras de se realizar a 1ª etapa;
p2 é o número de maneiras de se realizar a 2ª etapa;
...
e pn o número de maneiras de se realizar a n-ésima etapa
então $p1 . p2 . ... . pn$ é o número de maneiras diferentes de se realizar a tarefa.

Exemplo 3: Retomando ao jogo Mastermind, podemos determinar o nº de sequências possíveis de serem formadas usando o princípio fundamental da contagem: $6 . 5 . 4 . 3 = 360$ sequências possíveis. A indicação dos acertos e erros com as peças brancas e pretas, facilitam um pouco para determinarmos a sequência que o colega criou, mesmo assim, são muitas as possibilidades. Caso quisermos saber quantas sequências são possíveis realizar se optarmos por repetir as cores, é só fazer: $6 . 6 . 6 . 6 = 1296$ possibilidades.

6º Encontro

Tempo: 1 aula

Objetivo: Diferenciar arranjo de combinação; Compreender e identificar um Arranjo e utilizá-lo na resolução de problemas.

Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada.

Descrição das atividades:

1º Momento: Definir os tipos de agrupamentos

Passar no quadro: A Análise Combinatóriaaborda dois dos principais tipos de agrupamentos: os arranjos e as combinações.

- **Arranjos:** são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos agrupados.

Por exemplo, a palavra AMOR é um arranjo de letras, pois mudando-se a ordem dessas letras obtém-se outra palavra.

AMOR ROMA

Palavras diferentes

- **Combinação:** são agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos agrupados.

Por exemplo, as comissões de alunos formadas por Luiz, Joana e Rodrigo e por Joana, Rodrigo e Luiz formam uma combinação de alunos, pois a ordem dos membros não altera a comissão.

{Luiz, Joana, Rodrigo} {Joana, Rodrigo, Luiz}

Comissões iguais

Comentário: Esses tipos de agrupamentos podem ser Simples, quando não apresentam nenhum elemento repetido, ou composto, quando apresentam pelo menos um elemento repetido. Os exemplos anteriores são de agrupamentos simples, mas estudaremos apenas agrupamentos simples, com exceção da permutação (um tipo de arranjo) com elementos repetidos.

2º momento: Definir Arranjo Simples

Passar no quadro: Seja *E* um conjunto de *n* elementos e $p \leq n$ com *n, p* pertencente aos naturais, diferentes do zero.

Dessa forma, define-se arranjo simples como sendo o agrupamento simples de *n* elementos que podemos formar com *p* elementos distintos, sendo $p \leq n$. Cada um desses agrupamentos se diferencia de outro pela ordem ou natureza de seus elementos.

Representações:

Indica-se o número desses arranjos simples por $A_{n,p}$.

Comentário: Lê-se número de arranjos simples de *n* elementos tomados de *p* a *p*.

Passar no quadro: Para calcular $A_{n,p}$ vamos utilizar a seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

onde *n* é o número total de possibilidades e *p* é a quantidade de elementos que iremos utilizar para esse agrupamento.

Comentário: Um arranjo simples também pode ser calculado pelo Principio Fundamental da contagem.

Exemplos:

1) Resolva o arranjo abaixo:

$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30$

2) Uma escola possui 18 professores. Entre eles, serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolhas?

$A_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = 4896$ *ou* $18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$

Comentário: O agrupamento se altera ao mudarmos a ordem ou a natureza dos elementos, por isso temos um Arranjo onde n=18 e p = 3.

3) Quantos números de 3 algarismos, sem repetição, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, incluindo sempre o algarismo 4?

Nesse problema precisamos perceber que o número 4 pode ocupar 3 posições diferentes devido à isso temos:

$3 \cdot A_{8,2} = 3 \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = 3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$

3º Momento: Resolução de exercícios.

01. Calcule:

a) $A_{6,2}$

b) $A_{9,3}$

c) $A_{7,4}$

d) $A_{8,6}$

e) $A_{5,4} - A_{9,2}$

f) $A_{20,3} + A_{40,1}$

02. Uma empresa possuir uma linha com 12 produtos diferentes. O departamento de *marketing* dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará três tipos de anúncio para divulgação dos produtos: *outdoor*, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?

03. Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pintado com uma cor diferente. De quantas maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 cores distintas?

04. Para acessar sua conta bancária via internet, uma pessoa tem de cadastrar uma senha composta por 5 caracteres distintos, dentre 32 disponíveis. De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode cadastrar a senha?

05. Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos por duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis), e uma numérica com 5 algarismos (de 10 disponíveis). Sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos, quantos livros essa biblioteca pode cadastrar?

06. A partir dos algarismos 1,2,3,4 e 8, calcule a quantidade de números:

a) com 4 algarismos que podem ser formados.

b) com 4 algarismos distintos que podem ser formados.

c) múltiplos de 4 com 4 algarismos distintos que podem ser formados.

d) ímpares de 4 algarismos distintos que podem ser formados.

07. Com os algarismos 0,1,2,3,5,7 e 9, quantos números de cinco algarismos menores que 70000 podem ser formados?

7º Encontro

Tempo: 2 aulas

Objetivo: Compreender e identificar uma Permutação e utilizá-la na resolução de problemas.

Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada.

Descrição das atividades:

1º momento: Definir Permutação Simples

Passar no quadro:

Definição: Chama-se permutação simples dos *n* elementos, qualquer agrupamento de *n* elementos distintos de E.

Podemos também interpretar cada permutação de *n* elementos como um arranjo de *n* elementos tomados *n* a *n*, ou seja, p = *n*.

O número de permutação simples de *n* elementos é indicado é indicado por $P_{n.}$

$P_n = A_{n,n} \longrightarrow P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = n! \longrightarrow P_n = n!$

Exemplos:

1) Quantos anagramas tem a palavra MITO?

Um anagrama é qualquer sequência das letras de uma palavra qualquer, ou seja, é quantas sequências diferentes podemos formar apenas mudando a ordem das letras de uma palavra. Dessa forma como a palavra MITO tem 4 letras precisamos encontrar a permutação de 4.

$P_4 = 4 \,.\, 3.\ 2 \,.\, 1 = 24$ anagramas.

2) Com a palavra CADERNO:

a) Quantos anagramas podemos formar?

$P_7 = 7! = 5040$.

b) Quantos anagramas começam por C?

Fixando a letra C na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores. Logo temos que:

$P_6 = 6! = 720$ anagramas começam com a letra C.

c) Quantos anagramas começam por C e terminam por O?

Fixando a letra C na primeira posição e a letra O na última posição, sobram 5 posição para distribuir as outras 5 letras restantes. Dessa forma temos:

$P_5 = 5! = 120$

d) Quantos anagramas começam por vogal?

A palavra CADERNO possui 3 vogais portanto temos três possibilidades para preenchermos a primeira posição. Para cada vogal fixada na primeira posição temos seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores. Então temos que:

$3 \,.\, P_6 = 3 \,.6! = 2160$ anagramas

e) Quantos anagramas terminam por consoantes?

A palavra CADERNO possui 4 consoantes, portanto temos 4 possibilidades para preenchermos a última posição. Para cada consoante fixada na última posição, temos seis letras para serem distribuídas nas posições anteriores. Então temos:

$4 \,.\, P_6 = 4 \,.6! = 2880$ anagramas

f) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoantes?

Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição e quatro possibilidades para o preenchimento da última. Fixando uma vogal e uma consoante na primeira e na última posição, sobram 5 letras para serem distribuídas nas posições intermediárias. Assim temos que:

$3 \cdot 4 \cdot P_5 = 12 \cdot 5! = 1440$ anagramas

g) Quantos anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e nessa ordem?

As letras juntas CAD, serão contadas apenas como uma única posição pois essas letras deverão permanecer fixas, onde as demais 5 letras permutarão entre elas, dessa forma temos que:

$P_5 = 5! = 120$ anagramas

h) Quantos anagramas apresentaram as letras C, A e D juntas?

Nesse caso, um bloco composto das letras C, A e D pode ter P_3 formas diferentes: CAD, CDA, DCA, DAC, ADC e ACD.

Para cada um desses seis blocos podemos formar P_5 anagramas, conforme vimos no item g. Logo, com os seis blocos podemos formar:

$P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$ anagramas.

2º Momento: Resolução de Exercícios.

01. Calcule:

a) P_7

b) $P_7 - P_5$

c) $P_3 \cdot P_6$

d) $\frac{P12}{P10}$

02. Quantos anagramas tem a palavra:

a) AMOR

b) LUCRO

c) TECLADO

d) TRIÂNGULO

03. Seis amigos irão a um cibercafé, onde pretendem realizar uma pesquisa escolar, cada um deles em um computador. Sabendo que estão disponíveis no ciberacafé 6 computadores, localizados lado a lado, de quantas maneiras distintas os amigos poderão ocupa-los?

04. Certo restaurante é aberto de segunda – feira a sábado e, para cada dia da semana, tem um cardápio diferente. O dono do restaurante deseja alterar o cardápio da semana apenas permutando os cardápios já existentes. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

05. Considere todas as palavras de 5 letras, com ou sem significado, que podem ser escritas com A, B, R, O e D, sem que haja repetição de letra.

a) Quantas são essas palavras?

b) Determine quantas dessas palavras começam com a letra R.

c) Quantas dessas palavras terminam em vogal.

3º Momento: Definir Permutação com repetição

Caso haja repetição de letras, é necessário dividir o resultado pelo fatorial da quantidade de letras repetidas.

<u>Passar no quadro:</u> O número de permutações de *n* elementos ($P_n^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)}$), com

$$\begin{cases} \alpha_1 \text{ elementos iguais a } a_1 \\ \alpha_2 \text{ elementos iguais a } a_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \text{ elementos iguais a } a_k \end{cases} \text{ será dado por: } P_n^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!}$$

Exemplos:

1) Quantos anagramas podemos formar com a palavra BANANA?

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 60$$

2) Quantos anagramas podemos formar com a palavra EXERCICIO?

$$P_9^{(2,2,2)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 2} = 45360$$

4º Momento: Resolução de exercícios.

01. Determine quantos anagramas tem cada palavra:

a) MONITOR
b) AMERICANA
c) LIBERTADOR
d) CALCULADORA
e) RENASCIMENTO

02. Permutando os algarismos do número 125612, quantos números:
a) são obtidos?
b) pares são obtidos?
c) menores que 400000 são obtidos?

8º Encontro
Tempo: 1 aula
Objetivo: Compreender e identificar uma Combinação e utilizá-la na resolução de problemas.
Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada.
Descrição das atividades:
1º momento: Definir Combinação simples

Observação: Imagine que em sua sala é feita uma comissão com três pessoas, dessa forma note que a ordem em que os alunos de uma comissão são escolhidos não faz diferença.

Portanto, na formação das comissões os agrupamentos são conjuntos e não sequências, pois os agrupamentos obtidos diferem entre si pelos elementos componentes (natureza dos elementos), não importando a ordem (posição) em que aparecem. Esse tipo de agrupamento chama-se combinação simples.

Passar no quadro:

Combinações simples: Indicaremos as combinações por $C_{n,p}$ que lê-se: número de combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*.

O cálculo da combinação simples é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Passar no quadro

Observações importantes:

Para classificar um agrupamento como arranjo ou combinação, procedemos da seguinte forma:

- Formar agrupamento sugerido pelo problema;

- Em seguida, mudar a ordem de seus elementos;
- Se, com essa mudança de ordem, obtivermos um agrupamento diferente do inicial, esses agrupamentos serão arranjos. Se, com essa mudança de ordem, obtivermos um agrupamento igual ao inicial, esses agrupamentos serão combinações.

Exemplos:

1) Quantas comissões de 3 participantes podem ser formadas com 5 pessoas?

Fazer o teste pra ver se é combinação ou arranjo: tomar ABC como os três participantes.

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(9-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

2) Uma escola tem 9 professores de matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = 126$$

2º Momento: Resolução de exercícios.

01. Calcule:

a) $C_{6,2}$

b) $C_{9,5}$

c) $C_{15,5}$

d) $C_{12,6} + C_{8,2}$

e) $C_{8,4} - C_{8,3}$

02. De um grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, o técnico deve selecionar 12 para a disputa de uma partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser realizada?

03. De quantas maneiras distintas pode-se formar uma comissão com 10 integrantes, a partir de um grupo de 25 pessoas?

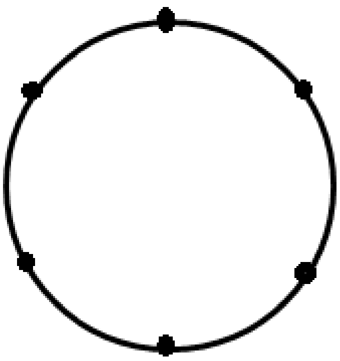
04. Uma escola enviará a um congresso 4 de seus 22 professores. De quantas maneiras distintas pode ser formado o grupo de professores que participará do congresso?

05. Em certo corredor de um edifício há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De quantas maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas?

06. Em relação ao conjunto A = $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, quantos subconjuntos de 3 elementos podem ser formados? E de 5 elementos?

07. Considere os fatores primos do número 210. Com o produto de exatamente três desses fatores primos distintos, quantos números diferentes podem ser compostos?

08. Sobre uma circunferência são indicados 6 pontos distintos, conforme figura.



a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?
b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?

9º Encontro

Tempo: 2 aulas

Objetivo: Desenvolver o raciocínio combinatório, tendo em vista a familiarização do aluno com problemas que envolvam o Princípio Fundamental da Contagem, e o reconhecimento de diferentes tipos de agrupamentos.

Metodologia: A atividade será expositiva e dialogada com a utilização do quadro para resolução de problemas.

Descrição das atividades:

1º Momento: Resolver os desafios apresentados anteriormente fazendo uso das fórmulas estudadas.

2º Momento: Cada aluno receberá uma lista de exercícios contendo arranjo, permutação simples, permutação com repetição e combinação simples (APÊNDICE B), a fim de fixar e diferenciar todos os agrupamentos estudados. As atividades serão realizadas em duplas.

3º Momento: No final da aula entregar para cada aluno um questionário diagnóstico (APÊNDICE C)

10º Encontro

Tempo: 1 aula

Objetivo: Esta atividade tem como objetivo verificar os conhecimentos adquiridos por cada aluno.

Metodologia: Resolução de atividades.

Descrição das atividades:

1º Momento: Aplicar de forma individual o Teste de diagnóstico final (APÊNDICE D).

APÊNDICES

APÊNDICE B _ Teste de Diagnóstico Inicial

Escola de Educação Básica

Professora: Keli Jacoby

Disciplina: Matemática Série: 2ª___

Pseudômino:____Data:____/____/____

.

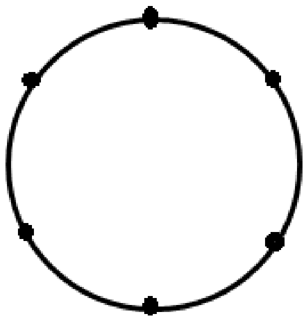
Teste Diagnóstico Inicial

01. José quer trocar de carro. Pesquisando no mercado encontrou 7 modelos diferentes em 6 opções de cores. Qual é o número de opções de compras que ele tem?

02. Quantos numerais de 4 algarismos distintos, podemos formar com os números 0, 3, 8, 9?

03. Vanessa esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la lembrou-se das seguintes informações: a senha possui 4 dígitos distintos e está compreendida entre os algarismos 5000 e 7000 e não é composto pelos números 1, 2 e 3. Qual o número máximo de tentativas que Vanessa terá para descobrir a sua senha.

04. Numa circunferência são marcados 6 pontos. Quantos triângulos podemos construir com vértices nestes pontos?



APÊNDICE C _ Lista de Exercícios Complementar

Lista de Exercícios Complementar – Professora Keli Jacoby

01. Quantos números distintos com 2 algarismos diferentes, podemos formar com os dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

02. Quantos números distintos com 3 algarismos diferentes, podemos formar com os dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.

03. Quantos números distintos com 4 algarismos diferentes, podemos formar com: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.

04. De quantos modos distintos podemos colocar 3 livros juntos em uma estante de biblioteca?

05. De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em um banco de jardim com 5 lugares?

06. Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares 1,3,5,7,9, desde que estejam sempre juntos os algarismos 1 e 3.

07. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que não contenham nem as letras A e B?

08. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que somente uma das letras A ou B esteja presente, mas não as duas?

09. Quantos são os anagramas possíveis com as letras da palavra: ARARA?

10. Qual é o número possível de anagramas que se pode montar com as letras da palavra AMAR?

11. Quantos são os anagramas possíveis com as letras da palavra: MATEMATICA?

12. Um indivíduo possui 25 livros diferentes. De quantas formas distintas ele poderá empacotar tais livros em grupos de 6 livros?

13. Quantos grupos de 3 pessoas podem ser montados com 8 pessoas?

14. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto?

15. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que sempre comecem pela letra A?

16. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que sempre estejam juntas as letras A e B?

17. Para resolver um assunto entre 6 professores e 4 alunos, devemos formar comissões com 3 professores e 2 alunos. Quantas são as possibilidades?

18. Usando-se apenas os algarismos 1,3,5,7,9 quantos números com 3 algarismos podem ser montados?

19. Usando-se as 26 letras do alfabeto: A,B,C,D,...,Z quantos arranjos distintos com 3 letras podem ser montados?

20. Com as 26 letras do alfabeto: A,B,C,D,...,Z e os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, quantas placas de carros podem ser escritas contendo 3 letras seguidas de 4 algarismos?

21. Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI?

22. Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por A?

23. Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por AB?

24. Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por ABC?

25. Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por uma vogal e terminando por uma consoante?

APÊNDICE D _ Questionário Diagnóstico

Questionário Diagnóstico

Sexo: (   ) Masculino (   ) Feminino

Idade:

01. O que você achou da dinâmica das aulas? (realizar desafios em grupos)

a) Adorei   b) Gostei   c) Indiferente   d) Não gostei   e) Detestei

Comente:____

____

02. Você costuma trabalhar dessa forma em outras disciplinas?

a) Sim   b) Às vezes   c) Não

03. Você já havia resolvido desafios como estes apresentados em sala?

a) Sim   b) Não

04. O que você achou do nível dos desafios propostos em sala de aula?

a) Muito fáceis   c) Alguns fáceis e outros difíceis   d) Difíceis

b) Fáceis   e) Muito difíceis

Comente:____

____

05. Você acredita que aprendeu com o trabalho realizado?

a) Muito   c) Bem pouco

b) Mais ou menos   d) Nada

Comente:____

____

06. Que conteúdo você acha que estávamos trabalhando?

____

07. O que você achou das atividades propostas?

a) Interessantes   c) Cansativas   e) Desinteressantes

b) Divertidas   d) Chatas

Comente:____

____

08. Você acredita que se empenhou para tentar resolver os desafios?

a) Sim b) Não c) As vezes

09. Como você acha que eu poderia melhorar o trabalho realizado?

____

____

10. Você trabalha?

a) Sim

b) Não

APÊNDICE E _ Teste de Diagnóstico Final

Escola de Educação Básica

Disciplina: Matemática Professora: Keli Jacoby

Série: 2º___ ano

Pseudônimo:____ Data:____/____/____

Teste de Diagnóstico Final

01. Quantos resultados diferentes pode haver numa corrida com 6 atletas em que serão outorgadas 1 medalha de ouro, 1 de prata e 1 de bronze?

02. Quantos anagramas da palavra LÓGICA começam por consoante?

03. Usando os algarismos 1, 3, 4, 6 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

04. Uma comissão de 3 professores vai ser formada para reivindicar aumento salarial. Ela será composta de um professor escolhido entre os sete do período da manhã e dois professores escolhidos entre os doze do período da tarde. Quantas comissões diferentes são possíveis?

05. Uma escola possui 15 professores. Entre eles serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?

06. No Brasil, as placas de automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Dessa forma quantas placas podemos formar, sabendo que os algarismos são distintos um dos outros?

07. Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listas adjacentes, de quantos modos pode se colorir a bandeira?

08. Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montas a composição é:

a) 120 b) 320 c) 500 d) 600 e) 720

09. (UEMG-2007) Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 3 pares de sapatos. O número de maneiras distintas com que a secretária poderá se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 par de sapatos corresponde a:

a) 13 b) 126 c) 72 d) 54

10. Simplifique:

a) $\frac{n!}{(n-1)!} =$

b) $\frac{n!}{(n+1)!} =$