



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL**

**CAMPUS CERRO LARGO**

**CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA**

**MARCELO NUNES SCHNEIDER**

**INVESTIGAÇÕES DA DINÂMICA DE UM PÊNDULO MAGNÉTICO PRÓXIMO A  
UMA BOBINA**

**CERRO LARGO – RS**

**2019**

**MARCELO NUNES SCHNEIDER**

**INVESTIGAÇÕES DA DINÂMICA DE UM PÊNULO MAGNÉTICO PRÓXIMO A  
UMA BOBINA**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como requisito para obtenção do  
grau de Licenciado em Física da  
Universidade Federal da Fronteira Sul.

Orientador: Prof. Dr. Thiago de Cacio Luchese

CERRO LARGO – RS

2019

### **Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS**

Schneider, Marcelo Nunes  
INVESTIGAÇÕES DA DINÂMICA DE UM PÊNDBULO MAGNÉTICO  
PRÓXIMO A UMA BOBINA / Marcelo Nunes Schneider. -- 2019.  
23 f.:il.

Orientador: Dr. Thiago de Cacio Luchese.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de  
Física-Licenciatura, Cerro Largo, RS , 2019.

1. Pêndulo físico. 2. Bobina. 3. Análise  
experimental. I. Luchese, Thiago de Cacio, orient. II.  
Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

MARCELO NUNES SCHNEIDER

**INVESTIGAÇÕES A RESPEITO DA DINÂMICA DE PÊNDELO MAGNÉTICO NAS  
PROXIMIDADES DE UM INDUTOR**

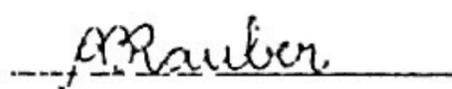
Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Física da Universidade Federal da Fronteira Sul.

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi defendido e aprovado pela banca em: 07 07 2015.

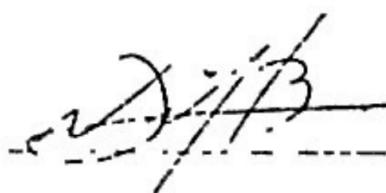
Banca Examinadora:



Dr. Thiago de Cacio Luchese



Dra. Aline Beatriz Rauber



Dr. Ney Marçal Barraç Júnior

*Dedico este trabalho a Dona Maria, minha amada vó, por sempre acreditar no meu potencial e se fazer presente. Sem ela nada disso seria possível.*

## **RESUMO**

Investigou-se o movimento do pêndulo físico, formado por uma barra com um ímã em sua extremidade inferior. O pêndulo oscila por cima de uma bobina até obter o seu repouso, na qual a distância entre a bobina e o ímã é o suficiente para não haver contato. A amplitude de oscilação do pêndulo foi escolhida de tal maneira a manter a área do ímã sobreposta à área do indutor durante todo o movimento oscilatório. Para este estudo, bibliografias foram examinadas no desenvolvimento teórico, onde se fez pressuposições das equações do seu movimento. Além de uma detalhada análise experimental fez-se uso de solução numérica para a avaliação das equações propostas. Por fim, o movimento do pêndulo sofreu um amortecimento como se estivesse imerso em um fluido viscoso, com dependências diretamente proporcionais à corrente induzida na bobina, ao campo magnético do ímã e à sobreposição entre as áreas do ímã e do indutor.

Palavras-chave: Pêndulo físico; Bobina; Análise experimental.

## **ABSTRACT**

Investigated whether the movement of the physical pendulum, formed by a bar with a magnet at its lower end. The pendulum swings over a coil until it rests, in which the distance between the coil and the magnet is sufficient to avoid contact. The oscillation amplitude of the pendulum was chosen in such a way as to keep the magnet area superimposed on the inductor area during the entire oscillatory movement. For this study, bibliographies were examined in theoretical development, where assumptions were made of the equations of their movement. In addition to a detailed experimental analysis, a numerical solution was used to evaluate the proposed equations. Finally, the pendulum movement underwent damping as if immersed in a viscous fluid, with dependencies directly proportional to the current induced in the coil, to the magnetic field of the magnet and to the overlap between the areas of the magnet and the inductor.

**Key-words:** Physical pendulum; Inductor; Experimental analysis.

## Sumário

1 INTRODUÇÃO.....	7
2 UM PENDULO FÍSICO (PF) TEÓRICO.....	9
2.1 MODELO DO PENDULO FÍSICO SEM A BOBINA.....	10
2.2 MODELO DO PENDULO FÍSICO COM A BOBINA.....	11
3 PENDULO FÍSICO EXPERIMENTAL.....	15
3.1 EXPERIMENTO DO PENDULO FÍSICO SEM A BOBINA.....	16
3.2 EXPERIMENTO DO PENDULO FÍSICO COM A BOBINA.....	17
4 SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	18
5 CONEXÃO ENTRE OS DADOS EXPERIMENTAIS E DADOS TEÓRICOS.....	19
6 CONCLUSÃO.....	21
REFERÊNCIAS.....	22

## 1 INTRODUÇÃO

O movimento oscilatório é altamente significativo no ensino da Física no qual, o seu estudo permite abranger analogias e descrições baseadas em movimentos oscilatórios responsáveis por explicar numerosos fenômenos da natureza e aplicações das ciências exatas e tecnológicas.

O pêndulo, que é um sistema mecânico composto por uma partícula de massa  $m$  suspensa por um filamento inextensível que oscila em torno do ponto mais baixo, chamado de ponto de equilíbrio (ponto  $\theta$  na Fig.1) [1], é um dos objetos mais utilizados no estudo de Física, em particular de Mecânica por ser um dispositivo acessível, permite facilmente o estudo do movimento oscilatório.

As previsões advindas do modelo pendular são bem-sucedidas em descrever o comportamento do movimento oscilatório, sendo facilmente encontrada na literatura. Porém, as oscilações quando associadas à presença de forças externas além da força gravitacional, acabam alterando as suas oscilações, gerando algumas dificuldades na descrição do seu movimento. Tais dificuldades envolvendo seu movimento motivam a investigação da teoria que descreve tal movimento.

Na maioria dos casos, faz-se uso de modelos que desprezem quaisquer forças dissipativas que modifiquem o movimento, como a força da resistência do ar, para o estudo do comportamento do pêndulo. Para contrapor este fato, buscou-se um modelo que leve em conta a alteração forçada das oscilações.

Dessa forma, o sistema é constituído por um pêndulo físico, aquele no qual o filamento é formado por uma haste rígida [2] e está acoplado na sua extremidade inferior a um ímã, o qual denominou-se para este trabalho de pêndulo magnético, e que oscila acima de uma bobina, conforme ilustrado pela Fig. 1.

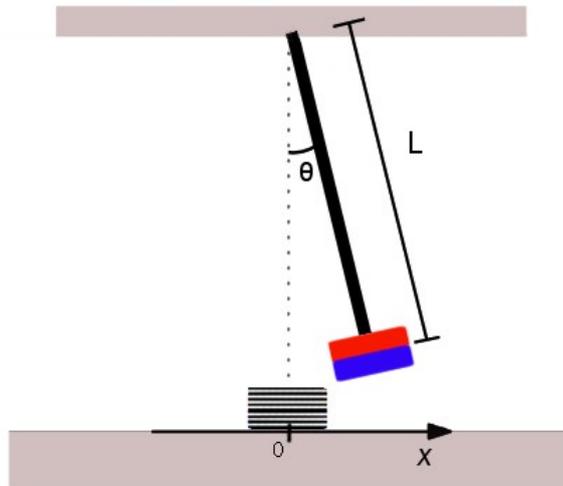


Figura 1: Pêndulo magnético oscilando acima de um indutor.

O objetivo desse trabalho é estudar empiricamente como a combinação do pêndulo com a bobina pode impactar no movimento em comparação com o um pêndulo sem a bobina. Pressupõe-se a alterar não o pêndulo em si, mas o espaço no qual o pêndulo seria posto em movimento. A Teoria Eletromagnética, junto a Mecânica, prevê que, na presença da bobina, nosso sistema sofreria uma alteração: um amortecimento, como se estivesse imerso em um fluido viscoso. Até onde pode-se pesquisar, este estudo ainda não foi explorado de forma experimental e teórica.

Além do mais, este trabalho decorre da importância que um simples experimento tem em permitir estudar de forma contextualizada conceitos envolvendo a Mecânica clássica e o Eletromagnetismo clássico. Dessa forma, estudantes que tem um interesse adicional podem se utilizar do sistema para compreender de forma aprofundada o desenvolvimento teórico e experimental, aproveitando a relação entre duas grandes teorias a partir de um aspecto lúdico e visível. Salienta-se ainda que, embora seja tratado como um experimento simples, é um experimento extremamente completo e rico em dinâmicas distintas possibilitadas pela combinação de seus parâmetros.

## 2 UM PENDULO FÍSICO (PF) TEÓRICO

Um sistema formado de um pêndulo magnético é deslocado de sua posição de equilíbrio e seu movimento começa do repouso. Devido a força gravitacional, o pêndulo físico acelerará de maneira a reproduzir um movimento oscilatório em torno do seu ponto de equilíbrio. Uma bobina é posta abaixo do pêndulo, de modo que o ímã oscile sobre ele. A área ( $A$ ) do ímã é igual a área da seção transversal da bobina, e durante a oscilação, ocorre a sobreposição total dessas áreas.

Quando o pêndulo é deslocado da posição de equilíbrio e então solto, ele passa a oscilar sobre o indutor. O movimento do ímã produz uma variação do fluxo do campo magnético através do indutor. Devido a variação do fluxo do campo magnético, uma corrente é gerada na bobina, chamada de corrente induzida que é produzida a partir do trabalho realizado por unidade de carga, denominada de força eletromotriz induzida. A corrente induzida produz um campo magnético que interagirá com o ímã [3]. Pode-se compreender que o movimento simples do pêndulo será, então, alterado devido à presença da bobina. Em uma situação sem dissipação, as energias mecânica e eletromagnética se interconverteriam continuamente em um movimento acoplado bastante curioso.

Dessa forma buscou-se investigar como as interações entre o ímã e a bobina alterarão a dinâmica oscilatória. Entretanto, espera-se que, na presença do circuito, ocorra um amortecimento do movimento oscilatório, como se o pêndulo estivesse imerso em um fluido que retardasse seu movimento a cada oscilação, com um fator de amortecimento dependente da variação da corrente induzida na bobina. Ou seja, aos poucos a energia mecânica do sistema se transformaria em energia térmica no circuito devido à presença de uma resistência elétrica nos fios.

Fazendo uma extrapolação, aumentando suficientemente o campo magnético do ímã poder-se-ia observar no movimento do pêndulo, ao se aproximar da posição de equilíbrio, uma colisão em um “obstáculo abstrato”, o qual acabaria completamente com o movimento, isto é, toda a energia mecânica inicial do sistema se transformaria em energia térmica em um quarto da oscilação.

Para uma análise quantitativa separou-se o experimento de forma que pudéssemos descrever matematicamente o comportamento do movimento. Dessa maneira, a análise está dividida em duas partes: o pêndulo físico sem a bobina e o pêndulo físico com a bobina.

## 2.1 MODELO DO PENDULO FÍSICO SEM A BOBINA

No pêndulo físico, cada fragmento de massa da haste do pêndulo está sujeito à força gravitacional, sendo que, dessa forma, a força peso de cada elemento contribui para a oscilação. Com isso, o efeito de rotação se deve unicamente à força peso aplicada ao centro de massa do pêndulo.

Dessa forma, define-se como  $d$ , a distância entre o pivô do pêndulo até o centro de massa, sendo o pivô o ponto em torno do qual o pêndulo gira durante a oscilação, o ponto  $O$ .

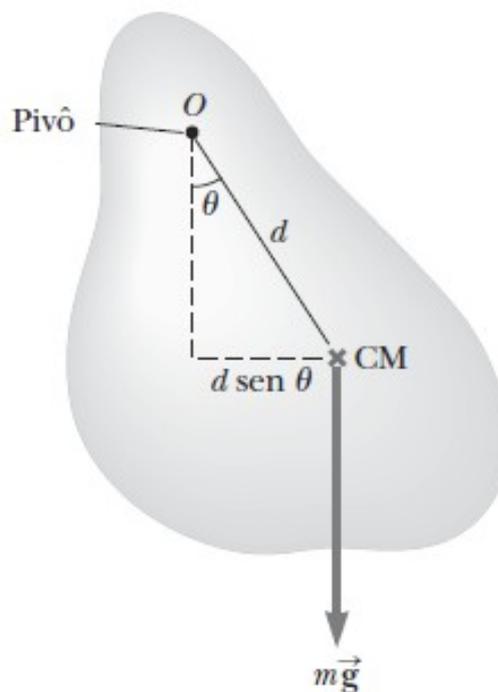


Figura 2: Um pêndulo físico centrado em  $O$  [1].

A força gravitacional promove um torque em relação a um eixo através de  $O$ . Da Segunda Lei de Newton para rotações de corpos rígidos [1] em torno do eixo fixo, temos que:

$$N = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad , \quad (1)$$

sendo  $N$  o torque resultante, e  $I$  o momento de inércia do pêndulo.

Neste experimento pode-se considerar que a oscilação seja somente em uma dimensão, considerando com que não haja variação entre a separação do ímã e da bobina (pequenas oscilações  $\theta \ll 1$ ). Com isso podemos escrever  $\theta \simeq \frac{x}{d}$ . Substituindo na Eq. (1):

$$N \simeq I \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{x}{d} \quad (2)$$

$$N \simeq \frac{I}{d} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

Agora ao considerar os torques que atuam sobre o sistema: *i*) o gravitacional,  $N_g = -mgd \operatorname{sen} \frac{x}{d}$ , com o sinal negativo indicando torque restaurador; *ii*) um torque de amortecimento, devido ao atrito de rotação do pivô e a resistência do ar, proporcional a velocidade angular [4] dado por  $N_{at} \simeq -\beta \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{d} \right)$ , sendo o sinal negativo um torque restaurador e  $\beta$  a constante de amortecimento. Para pequenas oscilações podemos assumir a aproximação  $\operatorname{sen} \left( \frac{x}{d} \right) \simeq \frac{x}{d}$  e a equação do movimento pode ser escrita como:

$$\frac{-mgd}{I} x - \frac{\beta}{I} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4)$$

cuja solução é facilmente encontrada na literatura [1] dado por  $x(t) = A e^{\frac{-\beta}{2I} t} \cos(\omega t)$ . Onde

$A$  a amplitude de oscilação e  $\omega^2 = \frac{mgd}{I} - \left( \frac{\beta}{2I} \right)^2$ .

## 2.2 MODELO DO PENDULO FÍSICO COM A BOBINA

Na presença da bobina, o sistema estudado fica sob a ação de um terceiro torque: o torque gerado pela força eletromagnética  $N_{el} = F L \sin\left(\frac{x}{d}\right)$  onde  $F$  é a força da bobina sobre o ímã e  $L$  a distância do ímã ao pivô (Fig. 1). Aplicando a 2ª Lei de Newton para rotações, temos:

$$\frac{-mgd}{I}x - \frac{\beta}{I} \frac{dx}{dt} + \frac{FL}{I}x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (5)$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{I} \frac{dx}{dt} + \left(\frac{gdm}{I} - \frac{FL}{I}\right)x = 0. \quad (6)$$

Dessa forma, no sistema, ao movimentar-se o campo magnético sobre o indutor, faz com que o fluxo do campo magnético neste varie com o tempo. Com isso, a força magnética será proporcional à corrente induzida e também ao campo magnético do ímã. Quanto maior o valor do campo magnético do ímã, maior será a corrente induzida. Assim tendo maior força eletromagnética entre o ímã e o indutor.

Notamos ainda que tal força tem dependência direta com a sobreposição do ímã com a bobina, sendo nula quando não há sobreposição. Contendo uma ligeira diminuição quando a sobreposição é metade do tamanho do ímã, estando evidente a magnitude máxima aos arredores de toda a sobreposição. Dessa maneira, com duas constantes de ajuste,  $K$  e  $b$ , e uma função exponencial, vamos supor que a força magnética seja dada por:

$$F = -K i B e^{-2\left(\frac{x}{b}\right)^2}, \quad (7)$$

que expressa as proporções diretas com a corrente induzida  $i$  e o campo do ímã  $B$ , além da finitude espacial da ação da força (ver Fig 3). Tal modelo de força será justificado *a posteriori*, por meio da comparação entre teoria e dados experimentais. O sinal negativo reflete a característica de oposição ao movimento, se considerarmos corrente positiva quando a velocidade do ímã for positiva.

Substituindo  $F$ , Eq. (7) na Eq. (6), obtemos:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{I} \frac{dx}{dt} + \left( \frac{g d m}{I} + \frac{K i B e^{-2\left(\frac{x}{b}\right)^2}}{I} L \right) x = 0 \quad (8)$$

Como pode-se perceber a Eq. (8) varia com a corrente elétrica, logo é preciso encontrar o seu valor. No circuito observa-se a formação de uma corrente induzida, devido à variação de fluxo magnético na bobina, e em oposição ao aumento da intensidade dessa corrente manifestam-se a resistência interna do fio e a reatância indutiva, de modo que pode-se escrever como equação de estabelecimento de corrente:

$$\varepsilon - Ri - l \frac{di}{dt} = 0 \quad (9)$$

Onde  $\varepsilon$  é a força eletromotriz induzida,  $R$  é a resistência interna do fio e  $l$  a indutância da bobina. A Eq. (9) coincide com a Lei de Kirchoff, considerando somente as grandezas físicas do circuito.

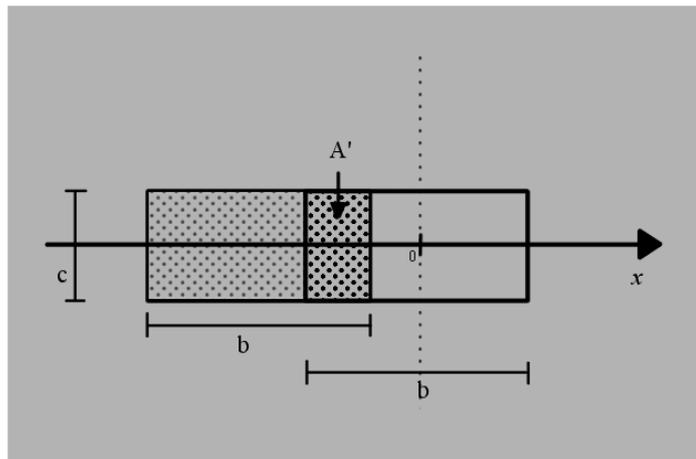


Figura 3: Ímã (área pontilhada) sobrepondo o indutor (área lisa).

A força eletromotriz é definida por  $\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt}$ , onde  $\Phi$  é o produto entre o campo magnético  $B$  e a área sobreposta indicada na Fig.3 por  $A'$ :

$$A' = (b-x)c, \quad \text{se } x > 0$$

$$A' = (b+x)c, \quad \text{se } x < 0$$

sendo  $c$  a largura da área sobreposta conforme indicado na Fig. 3 e  $x$  é definido no centro da bobina. Dessa forma:

$$\varepsilon = Bc \operatorname{sgn}(x) \frac{dx}{dt} \quad (10)$$

Esta expressão já leva em conta o sinal do  $x$  [ $\operatorname{sgn}(x)$ ], ou seja, para todo  $x$ , se  $\frac{dx}{dt}$  for maior que zero a força eletromotriz é positiva e se  $\frac{dx}{dt}$  for menor que zero a força eletromotriz é negativa. Substituindo a Eq. (10) na Eq. 10, temos:

$$Bc \operatorname{sgn}(x) \frac{dx}{dt} - Ri - l \frac{di}{dt} = 0 \quad (11)$$

$$l \frac{di}{dt} + Ri - Bc \operatorname{sgn}(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (12)$$

Dividindo todos os termos por  $l$ :

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{l} - \frac{Bc}{l} \operatorname{sgn}(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (13)$$

Dessa forma temos duas equações acopladas:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{I} \frac{dx}{dt} + \left( \frac{g d m}{I} + \frac{K i B e^{-2\left(\frac{x}{b}\right)^2}}{I} L \right) x = 0 \quad (14)$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{l} - \frac{Bc}{l} \operatorname{sgn}(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (15)$$

e seis constantes a determinar:  $K, b, \beta, I, l$  e  $B$ .

### 3 PENDULO FÍSICO EXPERIMENTAL

Para a realização do experimento utilizou-se um ímã preso a uma haste de madeira exatamente como mostrada no esquema da Fig. 4. A haste está suspensa por um furo feito no centro da sua extremidade superior, por onde um rolamento é colocado tentando amenizar ao máximo o atrito da oscilação.



Figura 4: Experimento de um pêndulo magnético oscilando sobre uma bobina.

Vinte vídeos foram gravados mantendo a mesma distância de 22,0 cm entre a câmera e o sistema, a trinta quadros por segundo, com a câmera de um celular. Em seguida, para análise dos vídeos, foi usado o programa chamado Tracker [5], um software livre que trabalha com análise e modelagem de movimentos gravados em vídeo.

Para a análise dos vídeos, define-se uma escala e um sistema de referência, calibrado com o auxílio de uma distância conhecida e definida anteriormente à gravação dos vídeos. Em seguida, é definido o início da análise do vídeo, sendo aquele no qual o

pêndulo é largado da posição inicial, ou seja, exatamente no início do movimento oscilatório, conforme a Fig. 5.

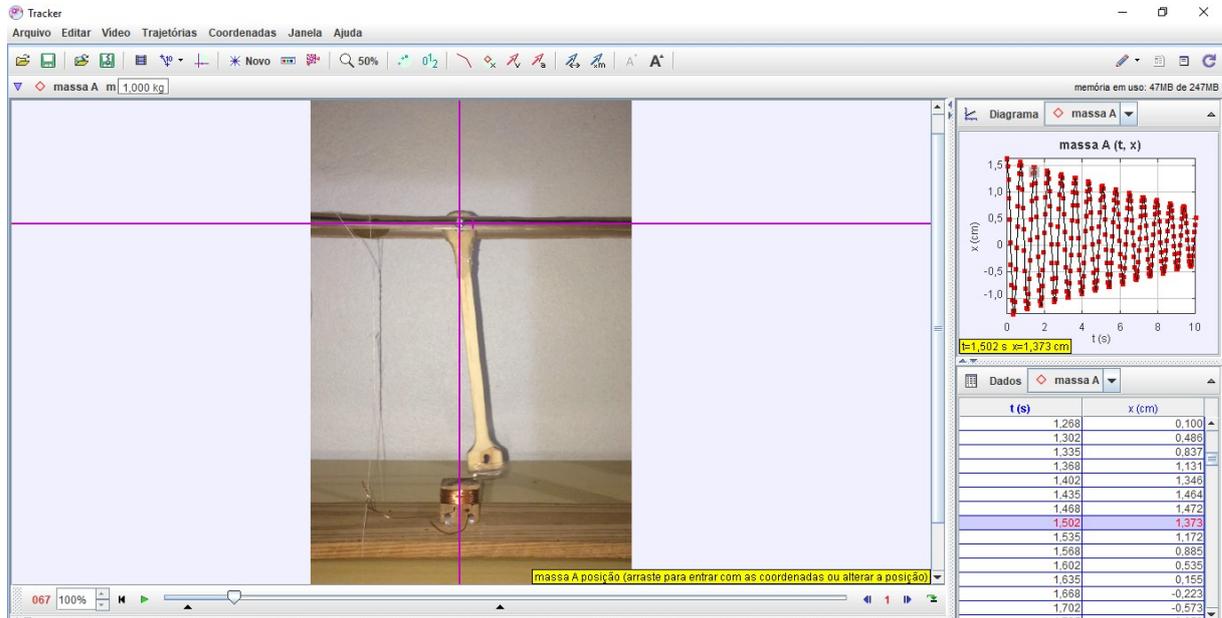


Figura 5: Análise experimental com o uso do programa Tracker.

Como a análise compreende dez segundos do movimento de cada vídeo, o final da análise dos vídeos é definida trezentos quadros à frente do quadro inicial. Posteriormente são marcadas as posições em função do tempo de um ponto da haste, em cada quadro do vídeo. O programa fornece a opção de fazer uma marcação inicial e em seguida se faz uma varredura sistemática a cada quadro do vídeo à procura do mesmo ponto. Com isso, anteriormente à gravação, marcação à caneta é feita no pêndulo, de modo que se crie uma particularidade na hora do programa fazer a varredura, como uma forma de diminuir o erro da análise.

Com os dados de todos os vídeos, é feito a média aritmética simples das trajetórias e o seu desvio padrão. Como trezentos quadros foram analisados, obteve-se trezentos pontos da posição em função do tempo. Devido ao alto número de dados não é exposto aqui os resultados, apenas as trajetórias médias na forma gráfica.

### 3.1 EXPERIMENTO DO PENDULO FÍSICO SEM A BOBINA

O sistema está sobre uma bobina com a menor separação possível do ímã. Inicialmente os terminais da bobina não estão conectados, dispendo assim um circuito aberto, isto é, como se não tivéssemos a presença da bobina.

Fez-se um videoclipe do pêndulo posto a oscilar com a extremidade do ímã sobre o início da bobina, de modo que na oscilação haja total sobreposição entre a área do ímã e da bobina. Este mesmo processo foi repetido mais nove vezes, totalizando dez videocliques da oscilação do pêndulo sem a bobina.

A Fig. 6, apresenta na forma gráfica a trajetória média gerada a partir dos dados dos dez videocliques, sem a bobina, estando o desvio padrão representado nas barras de erro de cada ponto experimental.

### 3.2 EXPERIMENTO DO PENDULO FÍSICO COM A BOBINA

Da mesma forma, porém agora com os terminais da bobina conectados, foram produzidos mais dez videocliques. Procurou-se manter a mesma condição inicial em cada filmagem, de forma a poder comparar diretamente ambos os sistemas, com a bobina e sem a bobina, a partir das filmagens.

A Fig. 6, ainda apresenta na forma gráfica a trajetória média gerada a partir dos dados dos dez videocliques, com a bobina, estando novamente o desvio padrão representado nas barras de erro de cada ponto experimental.

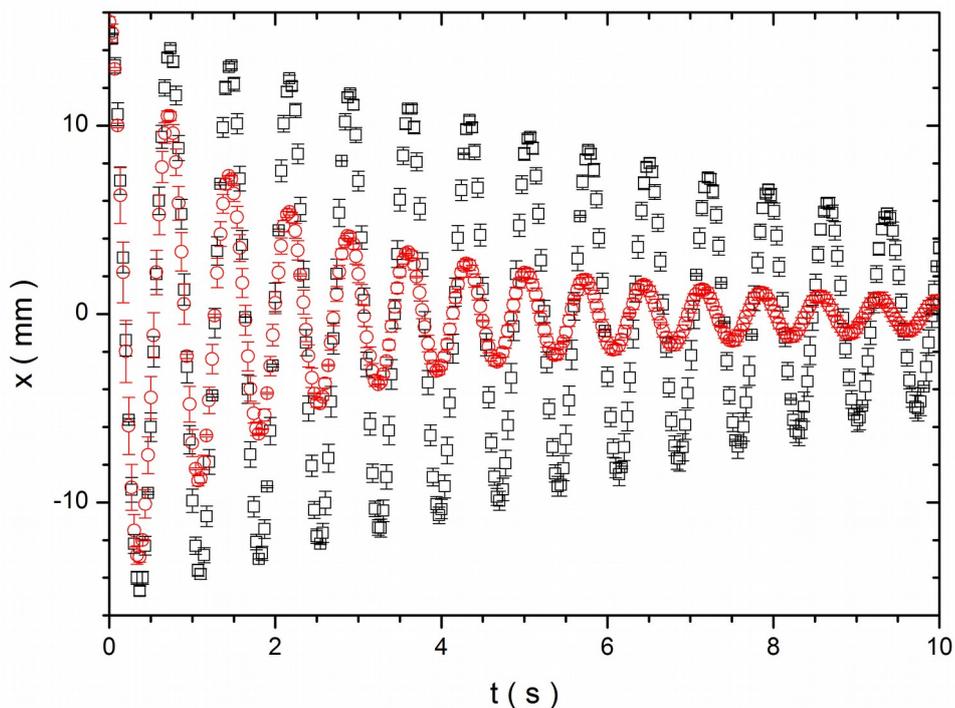


Figura 6: Gráfico da dinâmica média observada (posição em função do tempo), sem indutor (marcação de maior amplitude) e com indutor (marcação central de menor amplitude).

#### 4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para encontramos os valores das constantes do modelo teórico sintetizado nas Eq. (4) – sem indutor – e Eq. (14) e Eq. (15) – com indutor – utilizamos recursivamente o método dos mínimos quadrados com evolução das equações diferenciais acopladas sob o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Ciclicamente, cinco das seis constantes eram mantidas fixas enquanto a constante restante varria um certo intervalo de valores. Escolhia-se o valor daquele parâmetro cuja soma quadrática das diferenças entre o valor simulado e o de evolução temporal numérica era minimizado.

Buscando encontrar os valores das seis constantes, inicialmente foi construído um programa, com a linguagem Fortran, apenas com o pêndulo físico sem a bobina (dinâmica da Figura 6), dessa forma se fez uso da Eq. 4. Definimos  $k_1 = \frac{\beta}{I}$  e  $k_2 = \frac{mgd}{I}$  como constantes auxiliares. Obtivemos então  $k_1 = 4,10 \text{ s}^{-1}$  e  $k_2 = 83,0 \text{ s}^{-2}$ .

Para encontrar as outras constantes, um segundo programa foi utilizado, agora fazendo uso das equações acopladas, Eq. 14 e 15. Aqui definiu-se outras constantes auxiliares, a saber,

$$k_3 = \frac{KBL}{I}, \quad k_4 = \frac{R}{l}, \quad k_5 = \frac{BC}{l} \quad \text{e} \quad k_6 = b \quad \text{e com isso, obteve-se os valores de}$$

$$k_3 = 4,19 \times 10^3 \mu \text{ A}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad k_4 = 49,4 \text{ s}^{-1}, \quad k_5 = 4,52 \mu \text{ A mm}^{-1} \quad \text{e} \quad k_6 = 11,5 \text{ mm}.$$

A partir da determinação dessas constantes auxiliares, pode-se determinar os valores buscados para  $K$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $I$ ,  $l$  e  $B$ , apresentados na tabela 1:

Constantes:	Valores:
$K$	$3,42 \times 10^8 \text{ mm}$
$b$	$11,5 \text{ mm}$
$\beta$	$47,4 \times 10^4 \text{ g mm}^2 \text{ s}^{-1}$
$I$	$11,6 \times 10^4 \text{ g mm}^2$

$l$	$2,23 \times 10^{-2} H$
$B$	$1,01 \times 10^{-2} T$

Tabela 1: Valores das constantes obtidos através da solução numérica.

Para estipular estes valores foi utilizado  $m=10,0 \pm 0.01 g$  ,  $g=9,79 m s^{-2}$  ,  $d=98,0 \pm 0.5 mm$  ,  $c=10,0 \pm 0.05 mm$  ,  $R=1,10 \pm 0.1 \Omega$  ,  $L=140 \pm 0.05 mm$  e  $i=\sqrt{1000} \mu A$  . Sendo que  $m$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $R$  e  $L$  foram medidos experimentalmente. Para o valor da aceleração gravitacional utilizou-se da expressão encontrada no trabalho [6], que leva em consideração a altitude e a latitude para determinar o valor de  $g$ , dessa maneira,  $g=9,791102633 m/s^2$  o qual foi arredondado neste trabalho para  $9,79 m/s^2$ .

## 5 CONEXÃO ENTRE OS DADOS EXPERIMENTAIS E DADOS TEÓRICOS

Com a solução numérica foi possível encontrar os valores das constantes necessárias para descrever o movimento teórico da posição em função do tempo do movimento oscilatório.

A dinâmica resultante da solução numérica para o pêndulo sem a bobina está expressa graficamente por meio da linha contínua na Fig. 8, sobrepondo aos dados experimentais, e a dinâmica resultante da solução numérica para o pêndulo com a bobina está expressa graficamente por meio da linha contínua na Fig. 9, sobrepondo aos dados experimentais.

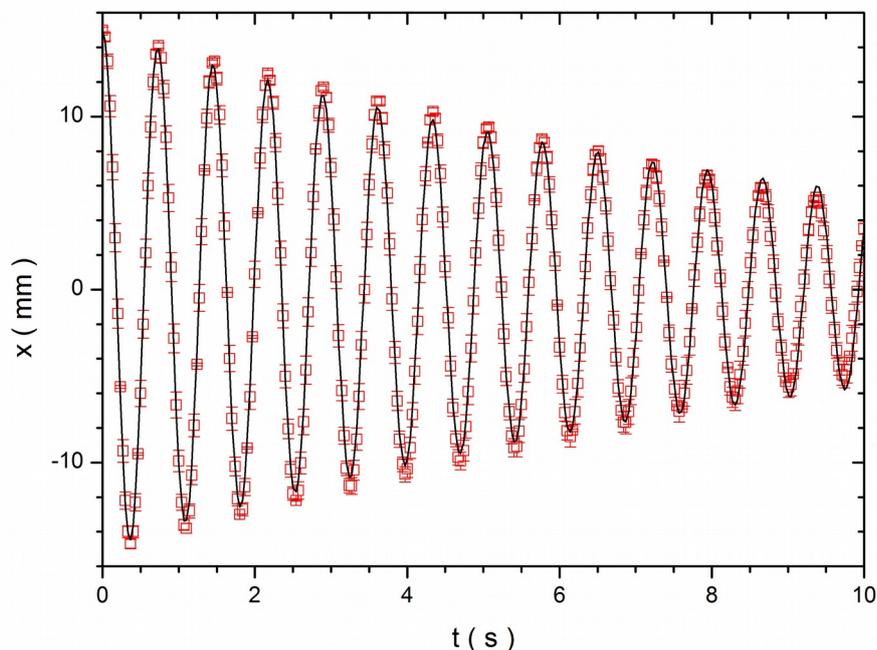


Figura 8: Gráfico da dinâmica resultante da solução numérica (linha contínua) juntamente a dinâmica média observada (marcações quadradas), sem a bobina.

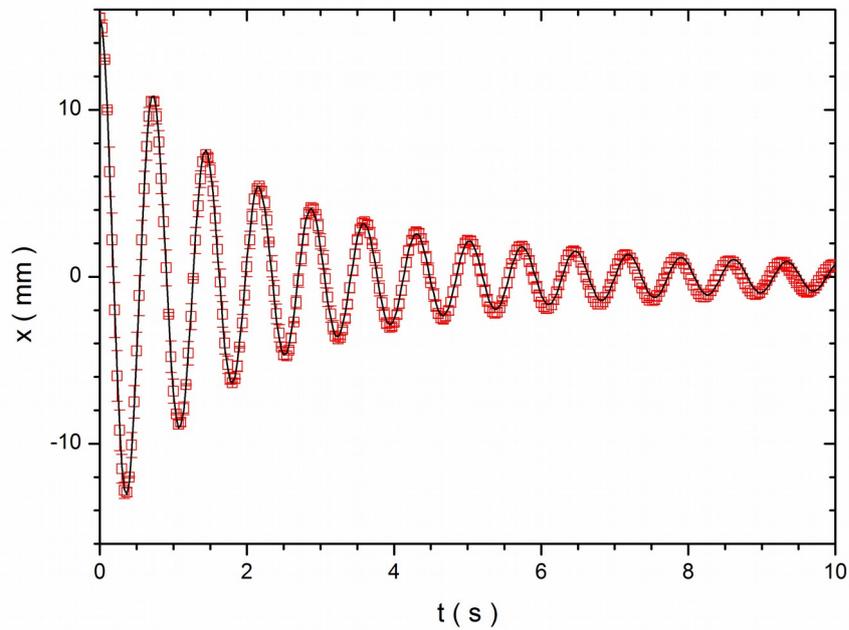


Figura 9: Gráfico da dinâmica resultante da solução numérica (linha contínua) juntamente a dinâmica média observada (marcações quadradas), com a bobina.

A sobreposição da linha aos dados experimentais mostra que para a força entre o ímã e a bobina, a expressão utilizada na Eq. (8) é suficiente para descrever a interação ímã-bobina neste experimento.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho buscou-se, no estudo do movimento oscilatório, diferentemente dos modelos que desprezam quaisquer forças dissipativas, os quais estamos acostumados a trabalhar, a construção de um modelo pendular que descrevesse a dinâmica de um pêndulo magnético quando posto na presença de uma bobina.

A partir de uma análise dos torques presentes no sistema, de uma análise experimental e da solução numérica pode-se constatar as propriedades que modularam seu movimento, causando como esperado, um amortecimento do movimento.

Dessa forma, construiu-se um modelo teórico capaz de ser eficiente para descrever o movimento oscilatório deste pêndulo na presença de uma bobina, o qual está de acordo com os pontos obtidos experimentalmente, conforme evidenciado na Fig. 9.

Nesse estudo, iniciou-se uma reflexão sobre a dinâmica de movimentos mecânicos quando associados a outros campos da Física, como o eletromagnetismo, levando a conclusão do profundo trabalho a ser desenvolvido para poder compreender a união desses campos, a qual evidencia a necessidade de uma maior investigação destinada a esse ramo.

Através desse trabalho, pode-se inovar o ensino de Física e torná-lo interessante e crítico. E nada mais prazeroso do que aprender física através de experimentos, fazendo a relação de diferentes áreas com a prática. Dessa forma, pode-se dizer que, além de uma renovação na forma de aprender, o mesmo leva à construção do conhecimento e nos aproxima da realidade.

## REFERÊNCIAS

- [1] SERWAY, R. A.; JEWETT JR, J. W. Princípios de Física. vol 2. São Paulo: Thomson. (2014). p. 14-17
- [2] LARA A., S. et al. Estudio Experimental De Un Pendulo Fisico Utilizando Un Microcontrolador At – 892051. Scientia Et Technica, vol. X, núm. 25, agosto, 2004, pp. 245-249. Disponível em <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84911685042>>. Acesso em: 26 jun. 2019.
- [3] YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A. Física III: Eletromagnetismo. 12ª ed. São Paulo, SP: Addison Wesley, 2009. p.280-297
- [4] ARNOLD, F. J. et al. Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 4, 4311 (2011). DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011>
- [5] TRACKER. Disponível em: <<https://physlets.org/tracker/>>. Acesso em: 26 jun. 2019.
- [6] BONVENTI JR, W.; ARANHA, N. Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 2, 2504 (2015). DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173721728>