



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CERRO LARGO

CURSO DE FÍSICA LICENCIATURA

ALECSANDER MERGEN

APROXIMAÇÕES NO ENSINO DE FÍSICA:

O ESTUDO DO PÊNDULO SIMPLES

CERRO LARGO

2019

ALECSANDER MERGEN

APROXIMAÇÕES NO ENSINO DE FÍSICA:

O ESTUDO DO PÊNULO SIMPLES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Thiago de Cacio Luchese

CERRO LARGO

2019

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Mergen, Alecsander

APROXIMAÇÕES NO ENSINO DE FÍSICA: O ESTUDO DO
PÊNDULO SIMPLES / Alecsander Mergen. -- 2019.

31 f.:il.

Orientador: Doutor Thiago de Cacio Luchese.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Física-Licenciatura, Cerro Largo, RS , 2019.

1. Ensino de Física. 2. Aproximações. 3. Pêndulo
simples. 4. Filosofia natural. I. Luchese, Thiago de
Cacio, orient. II. Universidade Federal da Fronteira
Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela
UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ALECSANDER MERGEN

APROXIMAÇÕES NO ENSINO DE FÍSICA:

O ESTUDO DO PÊNDULO SIMPLES

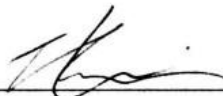
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Thiago de Cacio Luchese

Este trabalho de conclusão de curso foi defendido e aprovado pela banca em:

03/07/2019

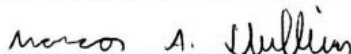
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Thiago de Cacio Luchese – UFFS



Prof. Dr. Márcio do Carmo Pinheiro – UFFS



Prof. Dr. Marcos Alexandre Dulus – UFFS

Dedico o presente trabalho aos meus pais, Ismar e Sandra, por sempre acreditarem em meu potencial e contribuírem incansavelmente para a conclusão dessa jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Venho através deste agradecer primeiramente aos meus pais, José Ismar Mergen e Sandra Marinês Taube Mergen, que sempre se fizeram presentes em minha vida acadêmica e tornaram possível a realização desse sonho.

A todos os professores que sempre me ajudaram e contribuíram em minha jornada acadêmica. Especialmente meu orientador, Prof. Dr. Thiago de Cacio Luchese, pela incansável colaboração na realização desse trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos, que tornaram ainda mais especial essa caminhada. Em especial agradeço a Daniel Marsango, Marcelo Nunes Schneider e Eliseu Andrade Torres pela grande amizade oferecida nesse caminho acadêmico.

Por fim um agradecimento especial à minha companheira, Laís Schropfer, por se fazer presente em todos os momentos, apoiando e contribuindo para minhas conquistas.

RESUMO

O uso de aproximações em Física é muito corriqueiro e necessário para possibilitar nossa compreensão de aspectos fundamentais do funcionamento da natureza. Pretende-se, neste trabalho, esclarecer que o uso de aproximações não é nenhum crime lógico, desde que as limitações inerentes a essas aproximações estejam claras ao investigador. Abordamos a aproximação utilizada no estudo de um pêndulo simples, onde adota-se, para pequenas oscilações, $\sin \theta \cong \theta$, a fim de facilitar a investigação quantitativa do mesmo. Foi desenvolvido um aparato experimental para coleta de dados empíricos e foram analisadas algumas possíveis correlações entre o período do pêndulo e suas características construtivas, limitando o estudo à dependência direta do período com o comprimento e alcançando uma equação empírica capaz de realizar previsões do período para um dado comprimento. Além disso, foi abordado o estudo da teoria de erros a fim de esclarecer sua utilização em estudos experimentais, evidenciando sua importância na hora de analisar os dados obtidos de um experimento, buscando esclarecer o motivo pelo qual pode-se ou não deixar de lado alguns termos de menor importância quando do estudo de um fenômeno físico. Através dessa abordagem buscou-se reconhecer a Física não como uma ciência exata, mas como uma ciência de boas aproximações, tornando-a ainda mais instigante, como uma filosofia natural.

Palavras-chave: Ensino de Física. Aproximações. Pêndulo simples. Filosofia natural.

ABSTRACT

The use of approximations in Physics is very common and necessary to enable our understanding of fundamental aspects of the nature working. The purpose of this work is to clarify that the use of approximations is not a logical crime as long as the limitations inherent to these approximations are clear to the investigator. We address the approach used in the study of a simple pendulum, where it is adopted, for small oscillations $\sin\theta \cong \theta$, in order to facilitate its quantitative investigation. An experimental apparatus was developed to collect empirical data, some possible correlations of the pendulum period with its constructive characteristics were analyzed, limiting the study to the direct dependence of the period with its length, thus achieving an empirical equation, capable of performing period predictions for a given length. In addition, the study of error theory was did in order to clarify its use in experimental studies, showing its importance at the time of analyzing the data obtained from an experiment, seeking to clarify the reason why some terms of minor importance can or cannot be left aside in the study of a physical phenomenon. Finally, it was sought through this approach to treat Physics not as an exact science, but as a science of good approximations, which makes it even more instigating, as a natural philosophy.

Keywords: Physics Teaching. Approaches. Simple pendulum. Natural philosophy.

LISTA DE SÍMBOLOS

θ_m = Amplitude angular máxima.

L = Comprimento do pêndulo.

T = Período do pêndulo.

ΔL = Erro associado à medida do comprimento do pêndulo.

Δx = Erro propagado na medida da amplitude do pêndulo.

ΔT = Erro na medida do período.

Δx_E = Variação da amplitude.

x_i = Amplitude inicial.

x_f = Amplitude final.

$\Delta\theta_m$ = Erro máximo na medida da amplitude angular.

$E x_i$ = Energia do pêndulo em sua amplitude inicial.

$E x_f$ = Energia do pêndulo em sua amplitude final.

ΔE = Variação de energia.

$\Delta(\Delta E)$ = Erro propagado no cálculo da energia.

$\Delta(\Delta k)$ = Erro médio da constante k .

Δm = Erro associado à medida da massa.

Δg = Erro associado à medida da gravidade.

ω = Frequência angular do pêndulo.

φ = Fase de ajuste da curva senoidal.

k = Constante obtida para ajuste do período do pêndulo.

Δk = Erro propagado na obtenção da constante k .

ω_0 = Frequência natural de oscilação do pêndulo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 METODOLOGIA.....	14
3 ANÁLISE E DISCUSSÕES.....	18
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	30
REFERÊNCIAS	31

1 INTRODUÇÃO

Quando observamos os fenômenos presentes na natureza, somos instigados a entendê-los e então descrevê-los para que outras pessoas possam testar e aperfeiçoar a compreensão do funcionamento do mundo que vivemos conforme viemos a construí-la. Nesse sentido, a Física constitui-se do acumulado de compreensões reprodutíveis e descritas a respeito da estrutura da matéria e suas interações, compreensões estas que se aplicam a todo o Universo, sob a hipótese de que, neste, apliquem-se as mesmas leis formuladas aqui na Terra. Embora seja ousada em sua pretensão de compreender a estrutura de todo o Universo, efetivamente a Física mostra-se, no seu padrão de linguagem constituído, uma ciência de boas aproximações ao invés de exata conforme divulga-se amplamente. O fato é que a capacidade de obter previsão precisa a respeito do comportamento e propriedades de um sistema físico arbitrário está intimamente associada ao modelo adotado (aproximação da realidade) para descrever o sistema e, na maioria das vezes, o processo de construção de previsão de comportamento e propriedades, por sua vez, apresenta simplificações matemáticas do modelo constituído (aproximação das soluções) [1]. Desse modo, descrever o universo, sua constituição e interações, torna-se uma tarefa de extrema delicadeza, considerando que é preciso tornar uma dada descrição ou uma previsão de um fenômeno, compreensível e reprodutível para todos que buscarem entendê-lo. Sendo assim, pode-se dizer que a Física é, de fato, uma Filosofia Natural.

A necessidade de utilizarmos aproximações, tanto na descrição do fenômeno (modelização da realidade) quanto em seu tratamento quantitativo (aproximação matemática do modelo), levanta ainda outras questões: por que precisamos modelar a realidade? Como sabemos que estamos trabalhando com um bom modelo? No tratamento quantitativo do modelo constituído, como reconhecer se uma aproximação matemática pode ou não ser feita? Conforme ressaltam Suave e Nogueira (2016) [2], reconhecer os termos que podem ser desprezados em uma aproximação matemática pode representar um considerável desafio aos estudantes de Física em sua formação inicial.

Questões como essas nos levam a pensar sobre a real necessidade do uso das aproximações e a tentar compreender como e quando trabalhar com elas. Como quantificar, se possível, o que é “pequeno” o bastante para ser desprezado, como ressaltam [2], e que não implica em imprecisão de descrição ou previsão de comportamento ou propriedades, ao mesmo tempo que torna o fenômeno observado mais facilmente compreensível e quantitativamente tratável. Até que ponto é possível negligenciar informações em um tratamento e manter a

coerência e a precisão necessárias para descrever com simplicidade (que gera elegância na descrição) a natureza do fenômeno que observamos.

O pêndulo simples é um dos fenômenos abordados pela Física desde o ensino básico até a graduação [3]. No entanto, sua modelagem inicial tem como aproximações físicas a desconsideração de forças retardadoras e de forças fictícias devido à rotação da Terra, além da hipótese de oscilação nas proximidades da superfície da Terra. Como aproximação matemática do modelo, restringe-se ao tratamento de pequenas oscilações, pequenas o suficiente para que o seno da perturbação angular possa ser considerado igual à própria amplitude de perturbação angular ($\text{sen}\theta \cong \theta$). Estas aproximações acabam por tornar o pêndulo simples uma boa ilustração do movimento harmônico simples (MHS) que, apesar das aproximações utilizadas, consegue prever o período de oscilação com razoável precisão para equipamentos de sala de aula. Desse modo, torna-se um excelente sistema físico para discussão das questões levantadas nos parágrafos anteriores com respeito à modelização da realidade e simplificações matemáticas de maneira mais aprofundada [4].

Sob outro viés investigativo, quando trabalhamos com questões experimentais na Física, buscamos reproduzir através de experiências controladas os perfeitos e intrigantes fenômenos da natureza. Para isso, rebuscamos-nos de aparatos experimentais que possam fazer tal reprodução visando sempre a maior aproximação possível da realidade. Porém, qual seria essa margem? De que maneira podemos dizer que medimos alguma coisa com precisão? Essas são algumas perguntas que tornam a atividade experimental desafiadora, desde o desenvolvimento de um aparato adequado e preciso a ponto de conseguir se adaptar às restrições teóricas subjacentes ao seu tratamento com êxito, até a análise dos dados obtidos e a maneira com que os tratam com a finalidade de conseguir resultados. Essa tarefa, como um todo, é rodeada de certa dificuldade, pois é preciso desenvolver medidas e resultados que sejam capazes de convencer o investigador e as outras pessoas daquela abordagem experimental específica dada ao fenômeno reproduzido.

Por sua vez, a abordagem experimental estará embasada em uma teoria sólida que auxilie o entendimento do fenômeno reproduzido e, caso não haja perfeita harmonia entre a experimentação e a teoria, temos uma divergência difícil de ser aceita e complicada de ser contornada, pois o que está faltando? Uma teoria mais completa capaz de descrever os dados empíricos do experimento ou um aparato experimental melhor elaborado capaz de reproduzir as hipóteses da teoria desenvolvida? Em divergências como essas devemos inicialmente nos

perguntar: o que é “ser preciso”? O que é um “erro” pequeno ou grande em um experimento? E, principalmente, o quanto ele é capaz de influenciar nos resultados?

Com o objetivo de levantar e, se possível, responder a algumas perguntas com esse cunho crítico desenvolvemos esse trabalho. Iniciamos com a busca de embasamento teórico para sua construção, por meio de uma revisão bibliográfica que nos fornecesse os subsídios mais importantes para iniciar uma análise crítica e experimental sobre as possíveis dependências entre o período do pêndulo simples e suas características construtivas. Essas possíveis dependências foram o foco do estudo até estabelecermos um recorte de estudo, possibilitando a realização de uma abordagem específica do pêndulo e seu comprimento.

A revisão bibliográfica realizada inicialmente nos permitiu discutir as possíveis variáveis determinantes do período de um pêndulo simples, assim como seu uso no ensino básico como ferramenta para auxiliar o professor no momento que for necessário realizar o estudo desse sistema. Buscamos referências que já abordaram questões como a dependência da massa do fio no movimento pendular, como visto em Palangana e Pedreira [5], o estudo do amortecimento do pêndulo, como ressalta Arnold et al. [6], foi notado o uso de aproximações na determinação do período do pêndulo simples na abordagem de Suave e Nogueira [2]. Essas leituras nos proporcionaram uma visão mais ampla e detalhada do pêndulo simples, assim como uma compreensão maior de todas as possíveis limitações e dependências em seu movimento e na determinação de seu período, como esclarecem Nelson e Olsson [4].

A perspectiva de unir o empírico e o teórico, que é um dos pilares desse trabalho, também já foi discutida por alguns autores, como podemos ver em Lang [7], além de ser uma forma necessária de análise que já foi muito utilizada por físicos importantes do passado. Porém, como ressalta Lang [8], seu uso deve ser feito com atenção e ressalvas, lembrando que o método científico usualmente utilizado no ensino de física, onde observamos um fato, levantamos um problema, criamos hipóteses, realizamos experiências e então podemos chegar a conclusões, não é garantia de construção de conhecimento. Todavia, não podemos ignorar a proposta de partir do empírico e ir ao teórico, pois dessa forma ignoramos também o trabalho de grandes Físicos como Johannes Kepler e Tycho Brahe, Bohr e os espectroscopistas, Planck e o corpo negro, que trouxeram grandes contribuições em suas respectivas áreas de estudo, utilizando esse método.

O presente trabalho tem como base a discussão das possíveis dependências do período do pêndulo simples, assim como o estudo de uma maneira simples de relacionar período e

comprimento através de equação empírica obtida através de dados experimentais coletados de um aparato desenvolvido para observação de fatores que podem influenciar no movimento de um pêndulo simples.

Buscando uma forma didática de trabalhar com o pêndulo simples no ensino de física, desenvolvemos um aparato experimental para obtenção de dados e através destes, encontrar uma relação entre período e comprimento de forma empírica. Utiliza-se o pêndulo como ferramenta para o ensino crítico de ciências e não apenas como item para comprovar uma teoria. Nesse sentido, buscamos fazer este trabalho a partir dos dados experimentais e, através deles, apresentar uma equação que relacione o período em função do comprimento e, por fim, para assim obter previsões para o período do pêndulo em pequenas oscilações de forma empírica com justificativa teórica já no nível básico de ensino.

2 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento de um método didático para a explicação e uso do pêndulo simples no ensino da física, desenvolvemos um aparato experimental para obtenção de dados do período, do comprimento e da amplitude, buscando relacionar os conceitos de forma simplificada, visando encontrar uma equação empírica que descreva o período em função do comprimento e, ainda, demonstrar que a aproximação $\sin \theta \cong \theta$ é satisfatória e nos fornece bons resultados quando analisamos pequenas oscilações.

Antes de iniciarmos um estudo sobre o pêndulo simples, precisamos entender o que o compõe e suas dependências. O pêndulo simples é constituído por uma massa sustentada por um fio inextensível, sendo a massa do fio muito menor que a massa por ele sustentada. Todo esse conjunto, fio e massa, é fixo em um ponto de suspensão. É possível deslocar, então, a massa de sua posição de equilíbrio até uma amplitude máxima e iniciar a oscilação. Partindo desse conceito, criamos o aparato experimental (Figura 1) para a obtenção e análise de dados.

O aparato experimental foi desenvolvido de forma simples, utilizando um suporte metálico fixado a uma parede para suspender o pêndulo. Esse último, por sua vez, é formado por um fio de nylon e uma massa esférica metálica, sendo a massa da esfera muito maior que a massa do fio, por isso nesse caso não analisaremos a dependência com a massa do fio [5]. Para assegurar que nenhuma perturbação de grande magnitude fosse introduzida no sistema no momento do início do movimento, afastando a massa de sua posição de equilíbrio para amplitude máxima, foi utilizado um suporte fixo, acoplado a esse um eletroímã, controlado manualmente à distância do movimento, para que este se desse de forma controlada.

Figura 1: Aparato experimental desenvolvido.



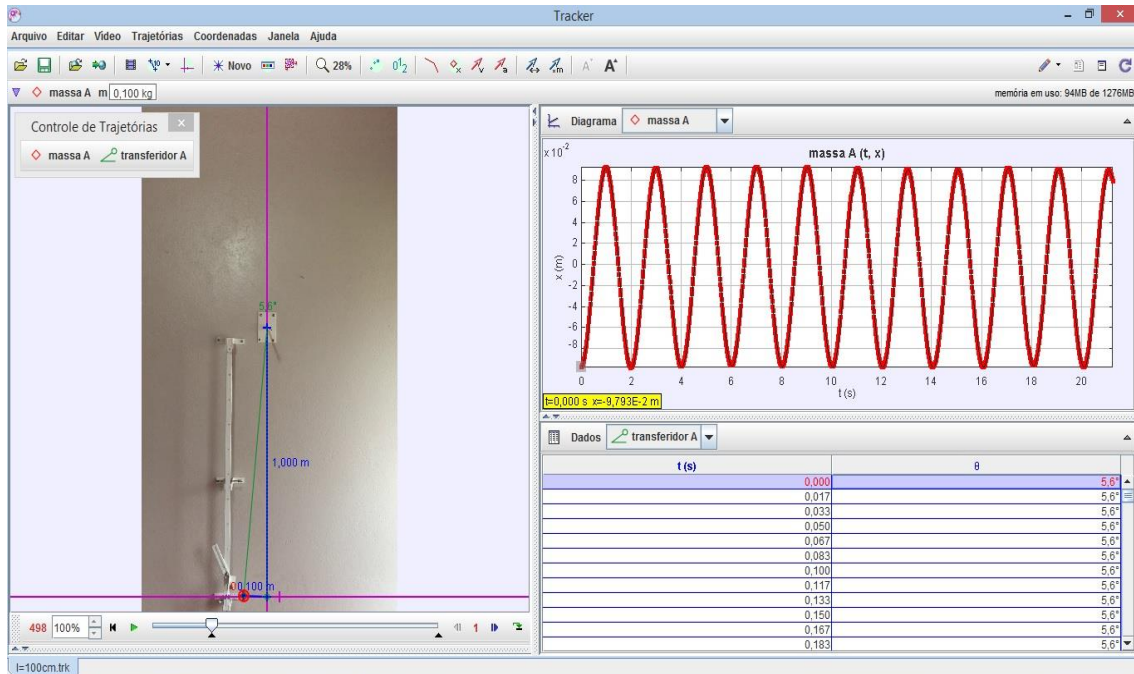
Fonte: Elaborado pelo autor.

O método utilizado para obtenção dos dados experimentais foi o uso de filmagens do pêndulo em movimento, utilizando um software livre de análise de vídeos quadro a quadro, Tracker [9]: com o software é possível analisar de forma detalhada uma filmagem feita do pêndulo em oscilação. Para as filmagens, utilizamos o próprio celular colocado em um ponto fixo.

Para análise, variamos os comprimentos entre dez e cem centímetros, de dez em dez centímetros, mantendo amplitude angular fixa em cada vídeo experimental. Após cada filmagem, carregamos o vídeo no programa. Para iniciar a análise automática dos dados, o Tracker necessita da inserção de uma medida de referência para realizar suas medições: sendo assim, inserimos manualmente a medida do comprimento do pêndulo utilizando uma fita métrica. Tendo essa medida empírica e adicionando-a no Tracker, após posicionar um sistema onde o software fará as demais medições de forma automática. Basta fixar um ponto de massa no centro da esfera metálica do pêndulo e ele então descreve a trajetória, contabiliza o tempo de oscilação, fornece a amplitude, insere um transferidor para conferirmos o ângulo de oscilação e ainda esboça um gráfico da posição como função tempo de oscilação como mostra

a Figura 2 tomada em uma análise em execução. Mais detalhes e exemplos do uso do Tracker podem ser encontrados em Bezerra et al. [10] e Bonventi e Aranha [11].

Figura 2: Captura de tela mostrando o funcionamento do Tracker.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para investigar a dependência do período com o comprimento, decidimos manter a amplitude angular de oscilação fixa em $\theta_m = (6 \pm 1)^\circ$ para cada comprimento analisado. Dessa forma, foi necessário deslocar a massa do pêndulo de sua posição inicial aproximadamente 10% do comprimento em cada vídeo. A dificuldade em posicionar o eletroímã que mantinha a massa deslocada de sua posição de equilíbrio em aproximadamente 10% do comprimento e, conseqüentemente, daria início ao movimento do pêndulo, fez com que precisássemos tentar várias vezes o início do movimento, devido ao diâmetro da bolinha dificultar a manutenção da amplitude angular fixa. O erro de medida adotado para medida do comprimento do fio do pêndulo, foi de $\Delta L = 0,002 \text{ m}$, já que trata-se de uma medida manual com possíveis erros de paralaxe, de modo que consideramos adequado essa margem um pouco maior que a menor divisão de escala da trena. Como a medida da amplitude foi realizada com o mesmo instrumento, o erro na medida da amplitude é o erro entre pontos no Tracker, ou seja, $\Delta x = 0,004 \text{ m}$. O dobro do erro de ponto a ponto na medida do comprimento. Além disso, o software de análise dos vídeos nos dá uma margem de erro de um quadro para mais ou para menos no tempo, de modo que estimamos $\Delta T = 0,03 \text{ s}$.

Com o objetivo de obter experimentalmente dados capazes de fornecer uma relação entre período e comprimento no pêndulo simples, foi necessário adotar algumas limitações para o estudo do problema. A amplitude angular foi mantida fixa, para que possamos analisar apenas a dependência do período com o comprimento. Para isso, discutimos a independência do período com a amplitude de oscilação, mesmo quando tratamos de pequenas amplitudes e, então, mostramos experimentalmente o que seriam as pequenas amplitudes. Os dados foram obtidos de forma automática através do software, o que traz uma considerável confiabilidade nos dados experimentais, devido ao processo ser mecânico e automatizado. Para tratamos das possíveis dependências entre período e amplitude, realizamos uma experimentação inicial e, devido aos dados obtidos, as forças retardadoras, como a resistência do ar, foram desprezadas pois a variação da energia ao longo dos dez períodos completos analisados foi muito menor que a energia inicial do pêndulo. Portanto, a variação de energia medida fica dentro da margem de erro do experimento, o que será analisado e discutido logo adiante.

3 ANÁLISE E DISCUSSÕES

No momento em que nos deparamos com um pêndulo pela primeira vez, logo nos perguntamos o que podemos aprender realizando um estudo do mesmo. Qual seria seu tempo de oscilação (período)? Quais variáveis podem influenciar em seu movimento? São pensamentos interessantes que podem nortear o estudo do pêndulo. Dessa forma, podemos estudar quais são as variáveis que podem influenciar em seu período (dependências) e analisá-las, levantando hipóteses, testando-as e desenvolvendo algumas conclusões.

Antes de iniciar o estudo do pêndulo, precisamos discutir as possíveis dependências que podem ser observadas na obtenção do período. A independência da massa na obtenção do período pode ser justificada pelo fato de todos os corpos estarem sujeitos à mesma aceleração gravitacional e, no vácuo, caírem em tempos iguais. Em seus estudos da dependência da queda dos corpos com a sua massa, Galileu Galilei não podia reproduzir o vácuo, mas podia imaginá-lo. Caso pensássemos que a queda dos corpos dependesse da massa, intuiríamos que um corpo mais leve deveria cair mais devagar que um corpo mais pesado: Então, se acoplarmos um corpo mais leve a um mais pesado, o primeiro deveria frear o último, de modo que o conjunto acoplado deveria cair mais devagar que o corpo pesado sozinho. No entanto, o corpo acoplado, por pesar mais na ausência do vácuo, cai mais depressa que o corpo pesado sozinho. Ao chegar a essa conclusão dupla e contraditória a partir de uma única hipótese, afirma-se que a hipótese está errada e, conseqüentemente, a queda independe da massa.

Analisamos ainda outras dependências, como o comprimento do fio, a amplitude de oscilação e as forças de retardo. Para essas análises, levantamos algumas hipóteses e as testamos experimentalmente.

A dependência do período com a amplitude de oscilação pode ser descartada quando trabalhamos com pequenas amplitudes de oscilação. Essa afirmação pôde ser observada experimentalmente (Tabela 1).

Através da variação da energia calculada do início ao final do movimento oscilatório analisado, foi possível também desprezar as forças de retardo.

Desde o ensino básico ao ensino superior, muitos professores se utilizam de aproximações para o estudo do pêndulo simples afirmando que, quando analisamos pequenas oscilações, o período do pêndulo independe da amplitude de oscilação. Para reafirmar a ideia e mostrar que é possível utilizar aproximações sem perder a precisão e elegância no estudo de problemas físicos, nesse caso o pêndulo simples, quantificamos o que seriam as pequenas

oscilações, que são o contexto utilizado para o emprego da aproximação $\text{sen } \theta \cong \theta$, onde o seno da amplitude analisada é aproximadamente a própria amplitude de oscilação (dada em radianos).

Para isso, fixamos experimentalmente um comprimento de um metro no pêndulo simples e variamos a amplitude. Observam-se alterações no período à medida que as amplitudes vão aumentando. Porém, em oscilações menores ou iguais a 10% do comprimento do pêndulo, a dependência com a amplitude é inferior ao erro na medida do período, de modo que podemos considerá-la inexistente com boa segurança, como podemos confirmar pelos dados experimentais, onde fixamos o comprimento do pêndulo e variamos a amplitude. Os períodos obtidos nesse experimento estão dispostos na Tabela 1. Dessa forma, podemos empregar a utilização da aproximação $\text{sen } \theta \cong \theta$, sempre que limitamos o estudo do pêndulo a pequenas amplitudes de oscilação, pois os resultados obtidos para o período mostram-se constantes para a precisão experimental adotada para as medidas de tempo.

Tabela 1: Dados do período com comprimento fixo e variações de amplitude.

$\theta_m(\pm 1^\circ)/T(\pm 0,03s)$	3°	5°	8°	11°	14°	30°
1T	1,98±1°	2,00±1°	1,98±1°	2,00±1°	2,03±1°	2,05±1°
2T	3,98±1°	4,00±1°	4,00±1°	4,02±1°	4,05±1°	4,08±1°
3T	6,00±1°	6,02±1°	6,02±1°	6,03±1°	6,07±1°	6,15±1°
4T	8,00±1°	8,02±1°	8,02±1°	8,03±1°	8,10±1°	8,20±1°
5T	10,02±1°	10,03±1°	10,03±1°	10,05±1°	10,10±1°	10,23±1°
6T	12,02±1°	12,05±1°	12,05±1°	12,07±1°	12,14±1°	12,28±1°
7T	14,04±1°	14,05±1°	14,07±1°	14,09±1°	14,15±1°	14,32±1°
8T	16,05±1°	16,07±1°	16,07±1°	16,10±1°	16,17±1°	16,37±1°
9T	18,06±1°	18,07±1°	18,09±1°	18,12±1°	18,20±1°	18,42±1°
10T	20,07	20,09	20,09	20,12	20,22	20,45

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos perceber, observando os dados experimentais na Tabela 1, que realmente há dependência entre período e amplitude. Porém, quando trabalhamos com pequenas amplitudes de oscilação, inferiores a 10° como nos mostra a tabela, essa dependência acaba dentro da margem de erro do próprio experimento. Dessa forma, podemos garantir experimentalmente que, para pequenas oscilações, o período do pêndulo simples não depende da amplitude, pois os valores obtidos para o período são constantes, considerando a margem de erro de medida.

Apenas a partir de amplitudes superiores a 10° , observa-se efeito sobre os valores do período não abrangido pela imprecisão na medida do tempo.

Tendo obtido tais resultados, partimos para a realização do experimento com variações do comprimento e mantendo a amplitude fixa. Com o Tracker podemos analisar os vídeos experimentais utilizando apenas a inserção manual da medida de comprimento do pêndulo. As demais análises são feitas de forma automática através do software. A amplitude angular foi mantida fixa com $\theta_m = (6 \pm 1)^\circ$. A margem de erro da amplitude foi estimada com base no erro do comprimento do pêndulo. Já que a amplitude é fornecida pelo software, a medida empírica que fornecemos a ele foi a do comprimento. Então, temos:

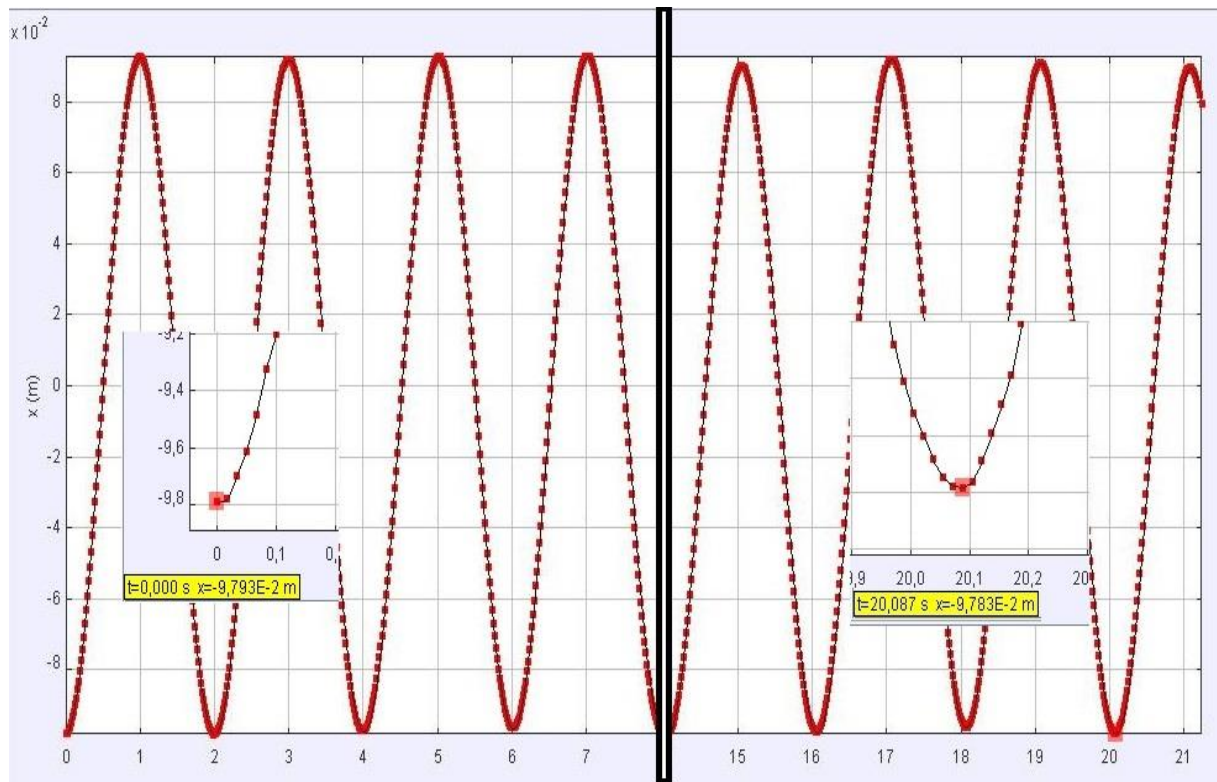
$$\Delta\theta_m \cong \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Assim, a margem de erro $\Delta\theta_m$ aumenta à medida que o comprimento diminui, dessa forma o erro estimado no comprimento máximo foi de $\Delta\theta_m \cong \pm 0,002$ radianos, que em graus seria $\Delta\theta_m = \pm 0,1^\circ$. Já a margem de erro no comprimento mínimo é de $\Delta\theta_m \cong \pm 0,02$ radianos, que em graus nos dá $\Delta\theta_m = \pm 1^\circ$. O experimento foi conduzido mantendo a amplitude angular fixa, como já foi mencionado anteriormente, buscando, na medida do possível, conservar um deslocamento da posição de equilíbrio do pêndulo de aproximadamente 10% do comprimento do mesmo.

Para afirmar que o amortecimento observado durante o estudo do pêndulo é desprezível, buscamos mostrar que a dissipação de energia durante a análise foi mínima, sendo incluída na margem de erro do experimento. Calculamos a variação de energia do pêndulo reafirmando a independência do período com a amplitude no estudo realizado, tendo em vista tornar possível e confiável a utilização de aproximações no seu estudo.

Para analisarmos a energia do pêndulo simples no experimento desenvolvido, utilizamos os dados experimentais de amplitude máxima inicial e final. Assim, calculamos a variação de energia sofrida pelo pêndulo desde o instante inicial do movimento até o décimo período medido. Portanto, temos uma variação de amplitude que foi observada experimentalmente, que será representada por $\Delta x = x_f - x_i$, onde x_i é a amplitude inicial de movimento do pêndulo e x_f é a amplitude alcançada pelo pêndulo em seu décimo período, que foi o último analisado nesse caso. Ambas as amplitudes são dadas em metros e mostradas na Figura 3.

Figura 3: Amplitudes inicial e final de oscilação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tendo as amplitudes inicial e final, podemos calcular a variação de energia sofrida pelo pêndulo durante as oscilações analisadas. Podemos calcular as energias inicial e final experimentais, para podermos afirmar que as forças de retardo não influenciaram diretamente na medida do período do pêndulo simples, ficando dentro da margem de erro de medida da própria energia. Dessa forma, a energia inicial do pêndulo em sua amplitude inicial, assim como a energia final, considerando energia nula no suporte do pêndulo, é toda potencial e pode ser expressa por:

$$E(x_i) = -mgL \cos \theta \quad (2)$$

$$E(x_f) = -mgL \cos \theta \quad (3)$$

onde m representa a massa da esfera metálica, g a aceleração gravitacional e L o comprimento do fio do pêndulo. Porém, estamos trabalhando com amplitudes em x , de modo que $\cos \theta$ pode ser representado como:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{L} \quad (4)$$

Colocando L em evidência e expandindo a raiz em série de Taylor, considerando $x \ll L$, temos:

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) nas equações (2) e (3), temos:

$$E(x_i) = -mgL + \frac{mg}{2L} x_i^2 \quad (6)$$

$$E(x_f) = -mgL + \frac{mg}{2L} x_f^2 \quad (7)$$

Através das equações (6) e (7) podemos calcular a variação da energia obtida durante a realização do experimento. Basta fazermos a diferença entre a energia inicial e final, $\Delta E = E(x_f) - E(x_i)$:

$$\Delta E = \frac{mg}{2L} (x_f^2 - x_i^2) \quad (8)$$

Para afirmar que a variação de energia estimada durante a realização do experimento está dentro da margem de erro da própria estimativa da energia vamos calcular a propagação do erro $\Delta(\Delta E)$ na medida da variação de energia.

$$\Delta(\Delta E) = \left| \frac{\partial E}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial E}{\partial g} \right| \Delta g + \left| \frac{\partial E}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial E}{\partial x_i} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial E}{\partial x_f} \right| \Delta x \quad (9)$$

Resolvendo as derivadas parciais, obtemos:

$$\Delta(\Delta E) = \frac{g}{2L} (x_f^2 - x_i^2) \Delta m + \frac{m}{2L} (x_f^2 - x_i^2) \Delta g + \frac{mg}{L^2} (x_f^2 - x_i^2) \Delta L + \frac{mg}{L} (x_i) \Delta x + \frac{mg}{L} (x_f) \Delta x \quad (10)$$

onde utilizamos $g = 9,72 \pm 0,02 \text{ m/s}^2$, que foi obtido experimentalmente em um trabalho anterior em laboratório utilizando um pêndulo, e $m = 0,054 \pm 0,001 \text{ kg}$. Obtendo a margem de erro propagada, organizamos os dados na Tabela 2, onde temos a comprovação que a dissipação de energia durante a análise das oscilações do pêndulo foi muito pequena, ficando dentro da margem de erro da própria estimativa da energia expressa em micro joules.

Tabela 2: Variação de energia do pêndulo.

$L(\pm 0,002 \text{ m})$	$\Delta x(\pm 0,004 \text{ m})$	$\Delta E(\pm \Delta(\Delta E) \text{ MJ})$
1,000	-2,0E-05	-0,51 \pm 41

0,900	-1,8E-05	-0,52 ± 42
0,800	-4,8E-05	-1,6 ± 42
0,700	-2,5E-04	-9,3 ± 41
0,600	-1,3E-04	-5,8 ± 42
0,500	-1,7E-04	-9,0 ± 40
0,400	-4,0E-05	-2,6 ± 42
0,300	-3,0E-05	-2,6 ± 41
0,200	-4,0E-06	-0,52 ± 42
0,100	-2,1E-06	-0,54 ± 43

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 2 nos mostra com clareza que a dissipação de energia calculada da amplitude inicial à amplitude final do experimento está contida na margem de erro da estimativa da energia, dentro das limitações do experimento. Nesse sentido, podemos afirmar que as forças de retardo não influenciaram a dinâmica do pêndulo no tempo relatado da experiência.

Analisadas as possíveis dependências do período do pêndulo e tendo limitado o estudo do pêndulo a pequenas amplitudes de oscilação, podemos dizer que agora o período do pêndulo simples em estudo depende exclusivamente de seu comprimento. Logo, analisaremos os dados experimentais obtidos de um pêndulo simples, com amplitude fixa e variação de comprimento.

Como o objetivo do presente trabalho é desenvolver previsões para o período do pêndulo simples através de expressão empírica, partindo de dados experimentais coletados de forma automática, precisamos tratar esses dados para obtermos a determinação da precisão dos mesmos e então desenvolver uma equação que relacione o período do pêndulo e o seu comprimento.

Após obter os dados experimentais de dez períodos completos, os mesmos foram organizados, marcando o tempo total registrado em cada período, formando a Tabela 3:

Tabela 3: Dados experimentais do período em função do comprimento.

L(±0,002m)	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,100
T(±0,03s)										
1°T	2,00	1,90	1,78	1,68	1,53	1,42	1,27	1,10	0,88	0,62

2°T	4,00	3,82	3,58	3,37	3,08	2,83	2,53	2,20	1,78	1,27
3°T	6,02	5,72	5,37	5,05	4,63	4,27	3,80	3,30	2,68	1,90
4°T	8,03	7,62	7,17	6,72	6,18	5,67	5,07	4,40	3,58	2,53
5°T	10,03	9,52	8,98	8,40	7,75	7,10	6,33	5,48	4,48	3,17
6°T	12,05	11,44	10,77	10,08	9,30	8,52	7,60	6,58	5,37	3,80
7°T	14,05	13,32	12,57	11,77	10,87	9,94	8,89	7,68	6,27	4,45
8°T	16,07	15,22	14,35	13,45	12,42	11,35	10,14	8,78	7,17	5,08
9°T	18,07	17,12	16,15	15,12	13,97	12,79	11,42	9,88	8,07	5,72
10°T	20,09	19,04	17,94	16,80	15,52	14,20	12,69	10,98	8,95	6,35

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 3 nos mostra os dados obtidos pelo Tracker. Para encontrar um período para cada comprimento o próprio software faz o ajuste de uma curva senoidal sobre os pontos experimentais do tipo

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) , \quad (11)$$

onde A é a amplitude de oscilação, ω é a frequência angular e φ é a fase de ajuste da curva. Dessa forma, através da frequência angular, podemos obter um período melhor ajustado para cada comprimento. Sendo $x(t)$ uma função periódica de período T , então:

$$x(t + T) = A \operatorname{sen}(\omega t + \omega T + \varphi) = x(t) \quad (12)$$

A equação (12) mostra que quando acrescentamos um período completo T à função, temos que no arco surge ωT , que seria o período adicionado. Logo, esse termo precisa ser igual a 2π , que remete a uma oscilação completa. Então, temos:

$$\omega T = 2\pi \quad (13)$$

Assim, isolando o período T , obtemos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14)$$

A Tabela 4 mostra as funções seno ajustadas de forma automática pelo Tracker às trajetórias experimentais. Através dela obtemos a frequência de oscilação do pêndulo. Com isso, calculamos um período, ajustado por curva senoidal para cada comprimento L .

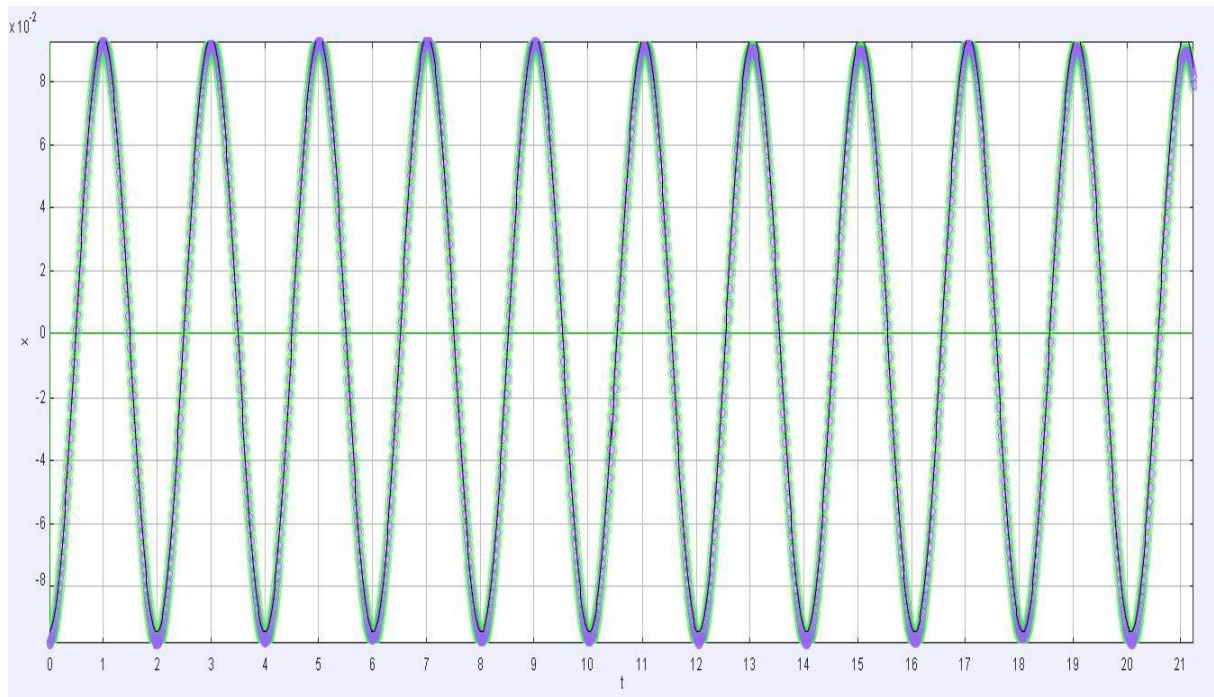
Tabela 4: Curvas ajustadas automaticamente para obtenção do período do pêndulo.

Comprimento $L(\pm 0,002 \text{ m})$	Função seno ajustada automaticamente pelo Tracker	Período obtido $T(\pm 0,03 \text{ s})$
1,000	$x(t) = 0,094 \text{ sen}(3,127t - 1,529)$	2,01
0,900	$x(t) = 0,087 \text{ sen}(3,301t - 1,575)$	1,90
0,800	$x(t) = 0,073 \text{ sen}(3,498t - 1,514)$	1,80
0,700	$x(t) = 0,068 \text{ sen}(3,740t - 1,582)$	1,68
0,600	$x(t) = 0,059 \text{ sen}(4,042t - 1,483)$	1,55
0,500	$x(t) = 0,048 \text{ sen}(4,421t - 1,533)$	1,42
0,400	$x(t) = 0,040 \text{ sen}(4,950t - 1,529)$	1,27
0,300	$x(t) = 0,030 \text{ sen}(5,719t - 1,550)$	1,10
0,200	$x(t) = 0,021 \text{ sen}(7,010t - 1,492)$	0,90
0,100	$x(t) = 0,011 \text{ sen}(9,855t - 1,406)$	0,64

Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções foram obtidas no próprio software, que faz o ajuste automático da função seno como mostra o Gráfico 1. A curva em preto é a curva ajustada sobre os pontos experimentais obtidos.

Gráfico 1: Ajuste automático de função senoidal pelo Tracker.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com esses dados dos períodos para cada comprimento do pêndulo, buscamos encontrar uma equação que os relacione. Para isso, por tentativa e erro, encontramos uma equação em que o resultado da relação entre período e comprimento seja uma constante, denominada k , conforme a Tabela 5:

Tabela 5: Tentativas de obtenção de constante.

$T(\pm 0,03 \text{ s})$	$L(\pm 0,002 \text{ m})$	$\frac{T}{L} \left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)$	$\frac{T}{L^2} \left(\frac{\text{s}}{\text{m}^2}\right)$	$\frac{T^2}{L} \left(\frac{\text{s}^2}{\text{m}}\right)$
2,01	1,000	$2,01 \pm 0,03$	$2,01 \pm 0,04$	$4,03 \pm 0,13$
1,90	0,900	$2,11 \pm 0,04$	$2,35 \pm 0,05$	$4,03 \pm 0,14$
1,80	0,800	$2,25 \pm 0,04$	$2,81 \pm 0,06$	$4,05 \pm 0,15$
1,68	0,700	$2,40 \pm 0,05$	$3,43 \pm 0,08$	$4,04 \pm 0,16$
1,55	0,600	$2,59 \pm 0,06$	$4,31 \pm 0,11$	$4,01 \pm 0,17$
1,42	0,500	$2,84 \pm 0,07$	$5,68 \pm 0,17$	$4,03 \pm 0,19$
1,27	0,400	$3,17 \pm 0,09$	$7,93 \pm 0,27$	$4,02 \pm 0,21$
1,10	0,300	$3,66 \pm 0,12$	$12,21 \pm 0,50$	$4,02 \pm 0,25$
0,90	0,200	$4,48 \pm 0,19$	$22,4 \pm 1,2$	$4,01 \pm 0,31$
0,64	0,100	$6,36 \pm 0,43$	$63,6 \pm 5,5$	$4,04 \pm 0,46$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Através da Tabela 5 podemos ver que a relação de período e comprimento do pêndulo simples que realmente descreve uma constante é:

$$k = \frac{T^2}{L} \quad (15)$$

A constante obtida de forma experimental descreve com eficácia o período do pêndulo simples. Inferindo como margem de erro na medida manual do comprimento do pêndulo $\Delta L = \pm 0,002 \text{ m}$ e considerando que o software de análise dos vídeos nos dá uma margem de erro de um quadro para mais ou para menos, sendo $\Delta T = \pm 0,03 \text{ s}$, podemos realizar a propagação de erros na equação e verificar a precisão da constante encontrada. Para isso, temos:

$$\Delta k(T, L) = \left| \frac{\partial k}{\partial T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial k}{\partial L} \right| \Delta L \quad (16)$$

Desta forma, tendo os valores da margem de erro propagada na constante k para cada comprimento L , podemos calcular a média dos erros obtidos, através da expressão:

$$\Delta(\Delta k) = \sqrt{\frac{\sum \Delta k^2}{n(n-1)}} \quad (17)$$

onde $\Delta(\Delta k)$ é a média da margem de erro propagada na obtenção da constante k , sendo $\Delta(\Delta k) = \pm 0,08 \text{ s}^2/\text{m}$, permitindo expressar o valor da constante $k = 4,03 \pm 0,08 \text{ s}^2/\text{m}$, que reproduz o período medido em função do comprimento. Portanto, podemos dizer que o período de um pêndulo simples oscilando em pequenas amplitudes, como demonstrado anteriormente, próximo à superfície terrestre, pode ser descrito estabelecendo somente a relação com o comprimento do mesmo. Nesse sentido, podemos, de forma empírica, estabelecer a seguinte equação na obtenção do período para um dado comprimento:

$$T = \sqrt{k \cdot L} \quad (18)$$

O estudo das aproximações no ensino de Física implica na utilização de algumas limitações para que seu entendimento seja facilitado e sua aplicação possível. No caso do pêndulo simples, muito conhecido no ensino de física, o uso da aproximação $\text{sen } \theta \cong \theta$ é empregado desde o ensino básico até os cursos de graduação, o que torna o uso do pêndulo mais didático e compreensível que a solução exata do mesmo. Essa última, por sua vez, implicaria na utilização de métodos numéricos/computacionais para sua resolução, dificultando o possível uso do pêndulo como ferramenta de ensino em sala de aula.

Partindo do teórico para a previsão do período de um pêndulo simples, aplicamos a segunda Lei de Newton para rotações. Obtemos:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \text{sen } \theta \quad (19)$$

onde m é a massa do pêndulo, L seu comprimento, g a aceleração gravitacional e θ a amplitude angular de oscilação. Como estamos tratando de pequenas oscilações, podemos utilizar da conhecida aproximação $\text{sen } \theta \cong \theta$. Assim temos:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta \quad (20)$$

Dividindo a equação por mL^2 , obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (21)$$

Com a aplicação da aproximação, identifica-se que a massa do pêndulo descreve um movimento harmônico simples na vertical, cuja solução da equação diferencial ordinária linear e de segunda ordem nas condições iniciais $\theta(0) = \theta_m$ e $\frac{d\theta}{dt} = 0$, é dada por

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) , \quad (22)$$

sendo ω_0 é a frequência natural de oscilação do pêndulo dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} . \quad (23)$$

Dessa forma, o período T de um oscilador harmônico pode ser calculado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (24)$$

Assim, o período é calculado substituindo a equação (23) na equação (24), obtendo o período de oscilação do pêndulo simples para pequenas amplitudes de oscilação

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} . \quad (25)$$

Podemos perceber que a previsão teórica do período independe da massa ou da amplitude de oscilação, contudo mostra uma dependência direta com o comprimento do pêndulo. Assim podemos observar experimentalmente quando trabalhamos com o pêndulo em pequenas amplitudes de oscilação. Devido a isso, podemos afirmar que o uso da aproximação no caso do pêndulo facilita muito sua utilização sem perder a elegância e precisão nos resultados. Podemos observar também que é possível partir de um aparato experimental adequado para a obtenção da relação entre período e comprimento do pêndulo de forma empírica.

Caso decidíssemos obter mais informações do presente estudo do pêndulo simples, podemos explorar o valor da aceleração gravitacional obtido através dos dados experimentais. Para isso, podemos utilizar a equação (18), empírica, obtida para o período e a equação (25). Substituindo (18) em (25) temos:

$$\sqrt{k \cdot L} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (26)$$

Se elevarmos toda a expressão (26) ao quadrado e isolarmos g , teremos:

$$g = \frac{4\pi^2}{k} \quad (27)$$

Como a aceleração da gravidade, nesse caso, depende exclusivamente da constante k podemos realizar a propagação de erros na obtenção de g . Assim temos:

$$\Delta g(k) = \left| \frac{\partial g}{\partial k} \right| \Delta(\Delta k) \quad (28)$$

Assim, temos como margem de erro na aceleração da gravidade:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{k^2} \Delta(\Delta k) \quad (29)$$

A partir da equação (29) temos que a margem de erro na obtenção da aceleração da gravidade é de $\Delta g = \pm 0,2 \text{ m/s}^2$. Sabendo que o valor da constante, obtida de forma empírica é $k = 4,03 \pm 0,08 \text{ s}^2/\text{m}$, o resultado obtido para a aceleração gravitacional experimentalmente através da expressão (27), pode ser expresso como, $g = (9,9 \pm 0,2) \text{ m/s}^2$. O que mostra que o experimento foi relevante pois consegue estimar o valor da aceleração gravitacional dentro dos valores usados em toda a Terra.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nos proporciona concluir que o pêndulo simples é um objeto de estudo com grande potencial, capaz de gerar ótimas questões envolvendo sua utilização como ferramenta no ensino de física. Todavia, seu estudo necessita de grande atenção para levar em consideração todos os seus aspectos ou, então, como feito aqui, é necessário criar uma delimitação a seu estudo para conseguir chegar às devidas conclusões.

Nesse trabalho, buscamos abordar o estudo de aproximações no caso do pêndulo simples. Para isso, mostramos experimentalmente por que é necessário limitar o estudo do movimento do pêndulo a pequenas amplitudes de oscilação, mostrando o quão pequenas elas devem ser para que sua influência seja a menor possível e permaneça na margem de erro e não cause interferência considerável na medição do período do pêndulo. Discutimos ainda outras possíveis dependências do período do pêndulo, concluindo que seu período depende apenas de seu comprimento, quando empregamos amplitudes de oscilação menores que 10° . O que nos permite dizer que o uso de aproximações no estudo do pêndulo em pequenas amplitudes não perde a elegância e a confiabilidade nos resultados obtidos, logo torna-se apenas uma ferramenta que facilita seu estudo, tornando-o mais didático.

Com a realização desse estudo, tive a oportunidade de familiarizar-me com o pêndulo e suas dependências, conseguindo diferenciar o que pode ou não ter grande influência sobre o período do mesmo. Todavia, esse estudo nos trouxe um conhecimento maior sobre o que podemos considerar “pequeno” o bastante para não levarmos em conta na hora de analisarmos um fenômeno físico, além de esclarecer a importância da teoria de erros e sua propagação para análise de dados experimentais, o que torna o experimento mais elegante e convincente para que outras pessoas possam verificá-lo e reproduzi-lo.

Por fim, o trabalho realizado proporcionou o levantamento de boas questões e discussões acerca dos fenômenos físicos e do que precisamos para compreendê-los e descrevê-los, trazendo grande contribuição para minha formação crítica e acadêmica, possibilitando observar e analisar a natureza da maneira que ela se apresenta a nossos olhos, o que, a meu ver, torna a Física não apenas uma ciência que busca simplesmente descrever a natureza, mas sim uma ciência que observa, discute, compreende e, enfim, busca a melhor definição para os fenômenos observados, como uma verdadeira filosofia natural.

REFERÊNCIAS

- [1] M. César, V. Sandra, S. Julia, **Control Experimental del Modelo de Péndulo Matemático**. Rev. Brs. Ens. Fís. Vol 24 (2002).
- [2] R.N. Suave e J.A. Nogueira, **Uma discussão sobre as aproximações na determinação do período máximo de um pêndulo simples**. Rev. Brs. Ens. Fís. 38, e2501 (2016).
- [3] L.S. Flávio, S. N. Rogério, N. A. Jose, **Uma revisão das aproximações lineares para grandes amplitudes de oscilações do período de um pêndulo simples**. Rev. Brs. Ens. Fís. 40, e3313 (2018).
- [4] Nelson, R.A. and Olsson, M.G. **The Pendulum - Rich Physics from a Simple System**. **American Journal of Physics**. v.54, Issue 2, p. 112-121. (1986).
- [5] Palangana, A. J; Pedreira P. R. B. **Estudo – teórico experimental do efeito da massa do fio sobre o período de oscilação de um pêndulo simples**. Rev. Brs. Ens. Fís. Maringá, v.17, n.3, set. (1995).
- [6] Arnold, F.J. Arthur, R. Bravo-Roger, L. L. Gonçalves, M. S. Oliveira, M. J. G. **Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino**. Rev. Brs. Ens. Fís. v. 33, n. 4, 4311 (2011).
- [7] Lang, S.F. **Estudo empírico da relação entre o período e a amplitude de um pêndulo simples**. Cad. Cat. Ens. Fis., Florianópolis, 3(3): 134-137, dez. (1986).
- [8] Lang, S.F; Ostermann, F. **A insustentabilidade da proposta indutivista de “Descobrir a lei a partir de resultados experimentais”**. Cad. Bras. Ens. Fís., v. 19, n. Especial: p. 7-27, jun. 2002.
- [9] TRACKER. Disponível em: < <https://physlets.org/tracker/>>. Acesso em: 26 jun. 2019.
- [10] Bezerra, A. G. Jr, Oliveira, L. P, Lenz, J. A, Saavedra, N. **Videoanálise com o software livre tracker no laboratório didático de física: movimento parabólico e segunda lei de newton**. Cad. Bras. Ens. Fís., v. 29, n. Especial 1: p. 469-490, set. (2012).
- [11] Bonventi, W. Jr; Aranha, N. **Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”**. Rev. Brs. Ens. Fís. v. 37, n. 2, 2504, jun. 2015.