UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CERRO LARGO

FÍSICA – LICENCIATURA

DANIEL MARSANGO

PARADOXO DOS GÊMEOS: UMA ABORDAGEM PARA O CURSO BÁSICO DE FÍSICA

CERRO LARGO

2019

DANIEL MARSANGO

PARADOXO DOS GÊMEOS: UMA ABORDAGEM PARA O CURSO BÁSICO DE FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física-Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito parcial para obtenção do título de licenciando em Física.

Orientador: Prof. Dr. Márcio do Carmo Pinheiro

CERRO LARGO

2019

FICHA CATOLOGRÁFICA

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Marsango, Daniel
PARADOXO DOS GÊMEOS:: UMA ABORDAGEM PARA O CURSO BÁSICO DE FÍSICA / Daniel Marsango. -- 2019.
43 f.:il.

Orientador: Doutor em Física Márcio do Carmo Pinheiro.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Física-Licenciatura, Cerro Largo, RS , 2019.

1. Relatividade Restrita. 2. Paradoxo dos Gêmeos. 3. Ensino de Física. I. Pinheiro, Márcio do Carmo, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Daniel Marsango

PARADOXO DOS GÊMEOS: UMA ABORDAGEM PARA O CURSO BÁSICO DE FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física-Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito parcial para obtenção do título de licenciando em Física.

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi defendido e aprovado pela banca em:

03/07/2019

BANCA EXAMINADORA

Dr. Marcio do Carmo Pinheiro- UFFS (Orientador)

Dr. Thiago de Cacio Luchese- UFFS

Marcos A. Dullius

Dr. Marcos Alexandre Dullius- UFFS

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos (Wagner, Eloá e Éragon) e familiares que sempre me apoiaram e acreditaram que a educação poderia transformar vidas.

Ao professor Márcio pelas incontáveis dúvidas tiradas e os milhares de tremores de celular causados pelo envio de mensagens.

Aos meus professores e amigos por sempre contribuírem com minha formação.

Ao PETCiências e todos meus colegas que durante percurso da graduação estiveram sempre ao meu lado.

A minha namorada Taís Regina Hansen por sempre me apoiar, contribuir e corrigir este e muitos outros trabalhos.

RESUMO

As medidas relativas entre sistemas de referências sempre foram historicamente estudadas. Na própria Grécia antiga (XX ao século IV a.C), surgem problemas que levaram Galileu, anos mais tarde, a construir a solução de problemas relativos ao movimento de corpos. Todavia, suas conclusões passaram a ser questionadas com a formulação do eletromagnetismo, corrigido por Lorentz e interpretado por Einstein na TRR. Assim, com intuito de promover uma exploração de tal teoria, buscamos a partir desta pesquisa, identificar a maneira como a temática referente ao paradoxo dos gêmeos vem sendo trabalhada na literatura do ensino superior, além de verificar a profundidade de detalhes apresentada e, a partir deste, realizar uma pequena abordagem para as dúvidas pertinentes, uma vez que, o mesmo é um problema clássico e que geralmente é apresentado na literatura ao explorar questões da Teoria da Relatividade Restrita. A literatura escolhida situa-se nos principais livros da graduação em Física adotados no Brasil. Deste modo, acreditamos que este trabalho possa trazer contribuições para professores e alunos ao trabalhar este conteúdo no ensino Física.

Palavras chave: Relatividade Restrita; Paradoxo dos Gêmeos; Ensino de Física.

ABSTRACT

The relative measures between reference systems have always been historically studied. In Ancient Greece itself, problems arise that led Galileo years later, to construct the solution of problems related to the movement of bodies. However, his conclusions came to be questioned with the formulation of electromagnetism, corrected by Lorentz and interpreted by Einstein in the Theory os Relativity Restricted. Thus, in order to promote an exploration of this theory, we seek from this research, to identify the way in which the thematic about the paradox of the twins has been worked in the literature of higher education, besides verifying the depth of details presented and, from this, to take a small approach to the pertinent doubts, since the same is a classic problem and is usually presented in the literature when exploring TRR issues. The chosen literature is located in the main books of the graduation in Physics adopted in Brazil. In this way, we believe that this work can bring contributions to teachers and students when working this content in Physical education.

Keywords: Relativity Restricted; Paradox of the Twins; physics teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

TRR	Teoria da Relatividade Restrita
TRG	Teoria da Relatividade Geral
c	Velocidade da Luz no vácuo
A.	Anos
A.l.	Anos-Luz

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR) de Einstein surge como uma teoria controversa que de imediato levou a grandes críticas e incertezas. Mas, com decorrer do tempo suas previsões e consequências passam a vigorar, trazendo novas indagações sobre suas previsões. Como exemplo, a detecção dos Múons, que são partículas elementares formadas a cerca de 15 km de altitude pela interação dos raios cósmicos de alta energia com a atmosfera terrestre e possuem tempo de vida de 2.21μs . Na visão clássica, seria necessário cerca de 23 segundos para partícula atingir a superfície terrestre mesmo viajando numa velocidade próxima à velocidade da luz, sendo um tempo muito superior ao tempo de vida da mesma. A explicação, no entanto, para a sua observação em nossa superfície, é que a partícula ao viajar com uma velocidade de 0.988c possui seu tempo dilatado ou, em seu referencial, observa uma distância menor a ser percorrida.

Diante de tais conclusões relativísticas, emerge-se o *gedankenexperiment*[1] proposto pelo físico Paul Langevin (1872-1946), denominado **"paradoxo dos gêmeos".** O problema proposto pelo físico francês consiste em dois irmãos Gêmeos idênticos, onde um dos irmãos embarca em uma nave espacial para realizar uma viagem até uma estrela distante com uma velocidade próxima a da luz, mas, ao retornar, aquele que permaneceu na Terra envelheceu mais do que aquele que viajou. Em primeira análise, consideramos que o gêmeo que permaneceu na Terra pertence a um referencial imóvel, enquanto o outro irmão é o que se desloca. Porém, para TRR, o processo inverso poderia ser válido e o gêmeo que viaja poderia, então, afirmar estar imóvel e ver seu irmão se afastando no sentido oposto. Assim, surge um suposto paradoxo, o qual buscamos investigar: por que o gêmeo da nave envelhece menos se, em primeira análise, os argumentos são semelhantes? Como mostraremos é, de fato, o gêmeo que viaja aquele que envelhece menos.

1.1 OBJETIVOS

Buscamos, a partir desta pesquisa, identificar a maneira como a temática referente ao paradoxo dos gêmeos vem sendo trabalhada na literatura do ensino superior, além de verificar a profundidade de detalhes apresentada. Desta forma, almejamos criar meios que auxiliem os professores no processo de ensino-aprendizagem desses assuntos.

1.1.1 Objetivo geral:

[1] Termo utilizado para experimentos de natureza mental, cujos resultados provêm de suposições realizadas mentalmente.

Visamos apresentar e promover uma análise detalhada de um problema relativístico envolvendo o gedankenexperiment “paradoxo dos gêmeos”, explicitando suas relações ao referencial próprio, considerando suas implicações na dilatação do tempo do gêmeo que viaja.

1.1.2 Objetivos específicos:

- Analisar como é trazido paradoxo dos gêmeos na literatura
- Apresentar o que define um referencial como próprio
- Apresentar uma proposta de trabalho com a temática

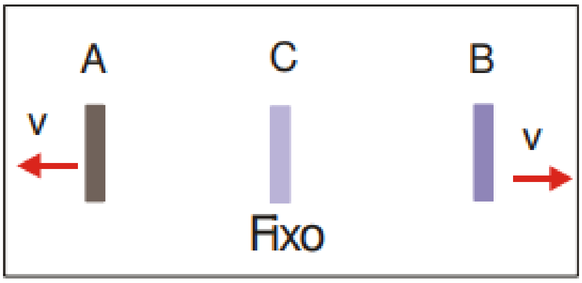
1.2 JUSTIFICATIVA

O paradoxo dos gêmeos é um problema clássico que resulta da relatividade restrita. Tal problema geralmente é apresentado na literatura ao explorar questões dessa temática. No entanto, em alguns referenciais teóricos, a abordagem é extremamente superficial. Nesse sentido, a produção de um material mais completo, com detalhamento de todas as hipóteses envolvidas, poderá auxiliar os professores na preparação de atividades relacionadas a esse tema e servir de leitura complementar aos graduandos. Este material fará análise detalhada, permitindo que ambos observadores possam realizar suas medidas e equipará-las em outro sistema equivalente, buscando apresentar questões e explorar outras, as quais não se apresentam na literatura.

2. BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

O estudo dos movimentos relativos despertou interesse desde a antiguidade até os dias atuais. Podemos destacar o paradoxo de Zenão (500 – 451 a.C.) como sendo o primeiro a buscar compreender aspectos relativísticos. Seu problema consiste em três corpos A, B e C, em que A e B se deslocam em sentidos opostos enquanto o corpo C permanece entre eles em repouso, conforme a Figura 01. Assim, Zenão acreditava que o módulo da velocidade medido por A em relação a B era o dobro do medido em C com relação a B num mesmo intervalo de tempo, concluindo a impossibilidade de tal movimento, pois esta daria uma soma infinita e dobrada sempre.

Figura 01 – Corpos A e B se deslocando em relação a um corpo C.



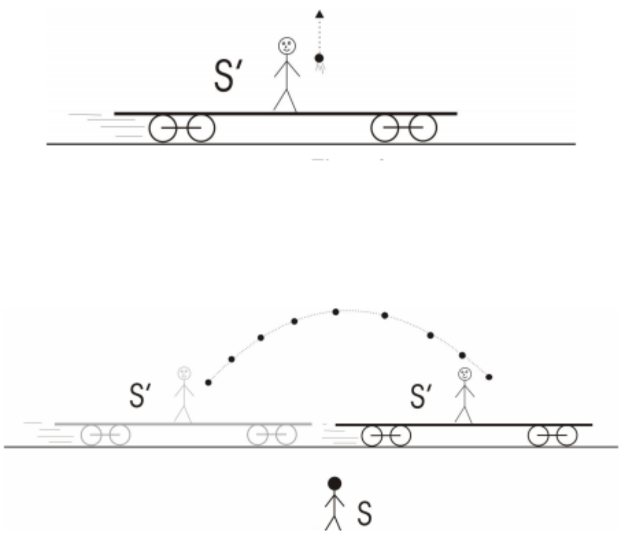
Fonte: WOLFF e MORS, 2005.

Também é importante ressaltar outros filósofos e cientistas que desempenharam importante papel na busca de descrever movimentos relativos, como Aristóteles (384 - 322 a.C.) que desenvolveu uma teoria filosófica construída a partir dos elementos para explicação dos movimentos que perpetuou por mais de 20 séculos. Após a contestação da teoria aristotélica, buscou-se uma descrição matemática para os movimentos. Neste sentido, Galileu Galilei (1564 - 1642) encontrou uma resposta para o paradoxo proposto por Zenão, ao qual, justificou a diferença de velocidades pelo referencial que é observado o movimento. Além disso, Galileu, que foi um dos grandes gênios da Ciência moderna, descreveu o movimento de projéteis e caracterizaram aspectos ligados à queda livre dos corpos, introduzindo, desta forma, a física experimental.

2.1 A RELATIVIDADE DE GALILEU

Galileu foi um dos grandes cientistas a contribuir com o que hoje chamamos de Física Clássica. Na visão clássica, o espaço é tratado de forma totalmente independente ao tempo. Analogamente, o espaço é contínuo e dotado de três dimensões, o tempo também é tratado como contínuo, todavia unidimensional. Nessa natureza, “o espaço se ocupa e o tempo se passa”[2], sendo o tempo considerado absoluto. A relatividade Galileana consiste na descrição do movimento de corpos para determinados observadores, denominados observadores inerciais, ou seja, que satisfazem a primeira Lei de Newton[3]. Ademais, estabelece que as leis que regem e descrevem um movimento em referenciais inerciais são todas fisicamente equivalentes. Desta maneira, as leis da mecânica deveriam ser as mesmas para estes observadores. Para justificar tal suposição, Galileu supôs que o movimento de um objeto em um lançamento vertical é descrito de maneira divergente por um observador dentro e fora de um vagão que se desloca com velocidade constante, conforme mostrado na Figura 02, em que cada um deles observa uma trajetória, todavia, constatam a mesma aceleração e mesmo tempo de queda.

Figura 02 – Trajetórias de partícula para dois observadores



Fonte: WOLFF e MORS, 2005.

2.2 CORREÇÃO RELATIVÍSTICA GALILEANA

Um sistema de referência é um conjunto de coordenadas às quais os observadores podem efetuar medidas de tempo e espaço. Estes sistemas precisam ser bem estabelecidos, de modo que medidas possam ser reprodutíveis em quaisquer outros sistemas equivalentes.

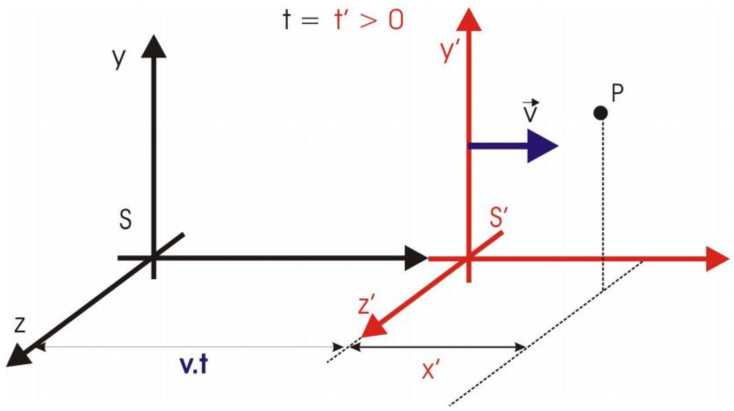
---

[2] Frase extraída dos textos de apoio ao professor de Física sobre Teoria da Relatividade Especial de T.F. Ricci, 2000.

[3] A primeira Lei de Newton estabelece que um corpo permanece eternamente em repouso ou em movimento uniforme, desde que nenhuma força externa atue sobre ele.

Na Figura 03, um evento P[4] em movimento é visto por dois observadores diferentes. O primeiro espectador, S, está parado em relação ao evento, enquanto o segundo, S’, se desloca em uma dimensão, com velocidade constante e em direção a P.

Figura 03 – O referencial de dois observadores para um mesmo evento



Fonte: Wolff e Mors, 2005.

Para que ambos observadores possam realizar suas medidas e equipará-las, um sistema de referência deve ser adotado para cada um. Assim, suas medidas podem ser escritas em S como função de espaço-tempo através das coordenadas (x, y, z, t) e em S’ como (x’,y’,z’,t’). Portanto, considerando o referencial inercial de cada observador, na visão clássica das transformações galileanas, as medidas do evento S com relação às medidas de S’ podem ser expressas pelas seguintes coordenadas:

$$x = x' + vt' \qquad (01)$$

$$y=y' \qquad (02)$$

$$z=z' \qquad (03)$$

$$t = t' \qquad (04)$$

Podemos notar que essas transformações assumem que os relógios sempre estão sincronizados e invariantes, bem como o comprimento seria inalterado entre dois sistemas. Isto porque o tempo e espaço são absolutos na formulação galileana, indiferente o referencial adotado.

---

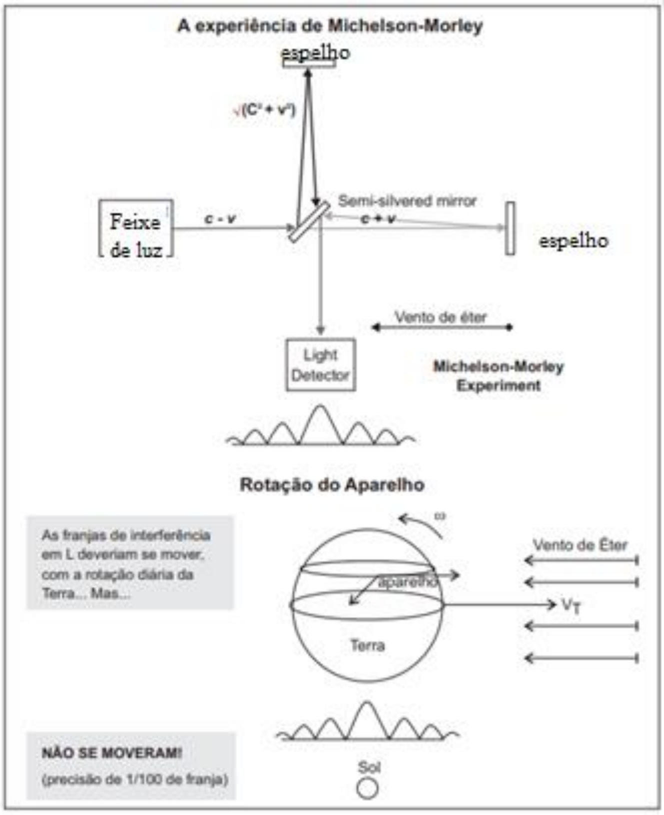
[4] Um evento pode ser considerado uma explosão, um feixe de luz algo que marque determinado tempo e espaço.

2.3 O PROBLEMA DO ELETROMAGNETISMO E DA MECÂNICA

Com a formulação do eletromagnetismo por Maxwell e sua unificação com a ótica, as equações de Maxwell levavam à conclusão de que as ondas eletromagnéticas se propagavam no vácuo. No entanto, acreditava-se que, como as demais ondas, a luz necessitava de um meio para se propagar, ao qual, na época, se denominou éter luminífero; um fluido translúcido, sem peso, que preencheria os espaços vazios existentes tanto entre os átomos quanto entre os corpos celestes, e que serviria como o meio de propagação das ondas eletromagnéticas (PONZECK, 2009).

Em busca da detecção desta substância, grandes experiências do século XIX destinaram-se a identificar a sua existência, como o caso da experiência do interferômetro de Michelson e E. W. Morley. Michelson, que já possuía trabalhos anteriores e era considerado um especialista na medição da velocidade da luz, logo imaginou que o planeta, ao se mover com velocidade $\boldsymbol{v}$ com relação ao éter em repouso, faria com que no referencial da Terra surgisse um vento de éter oposto ao movimento terrestre, do mesmo modo como o vento nos bate quando corremos. Desta forma, um feixe de luz que fosse apontado no sentido contrário ao movimento terrestre teria velocidade $\mathrm{c} + v$, enquanto que um raio apontado no sentido do movimento teria velocidade $\mathrm{c} - v$. Já, um feixe perpendicular deveria possuir uma velocidade como uma soma da componente horizontal da velocidade que a Terra se move com a verticial c, possuindo um módulo estimado em $\sqrt{c^2 + v^2}$, conforme Figura 04.

Figura 04 – Interferômetro de Michelson e Morley



Fonte: Adaptada de PONZECK, 2009.

Assim, na primeira medição de Michelson esperava-se um deslocamento das franjas de interferência produzidas entre os raios paralelos e perpendiculares com relação o éter. Porém, mesmo com preciso aparato experimental, Michelson não encontrou diferença entre as velocidades dos feixes, que resultava na imobilidade das franjas obtidas. Inconformado e com auxilio de Morley, Michelson buscou repetir a experiência com um aparato ainda mais preciso e mesmo assim, a existência do éter não foi encontrada.

Entretanto, surge um novo problema: a velocidade da luz proposta pela teoria de Maxwell era medida em qual referencial inercial? Os estudos da época permitiam apontar que a Velocidade da luz c só poderia ser encontrada por um observador quer estive-se em repouso com relação ao éter, enquanto um observador ao se deslocar no mesmo sentido do éter com velocidade constante u encontraria a velocidade da luz como um somatório $c + u$. Com isso, deveria existir um sistema de referência preferencial e em repouso com respeito ao éter, para o qual as equações de Maxwell seriam exatamente válidas e o valor da velocidade da luz no vácuo era exatamente c. Tal suposição acabava por violar o Princípio da Relatividade Galileana, que considerava a não existência de um referencial preferencial, bem como, garantia que as leis da Mecânica deveriam ser as mesmas para todo e qualquer referencial.

Assim, frente às novas teorias e as contradições com as já existentes, chega-se a três hipóteses fundamentais:

1. A Relatividade Galileana seria válida apenas para a Mecânica Clássica e as leis do Eletromagnetismo exigiriam um referencial inercial preferencial chamado éter onde a velocidade da luz seria igual a c.
2. A Relatividade Galileana seria válida tanto para a Mecânica Clássica quanto para o Eletromagnetismo, mas as equações de Maxwell deveriam ser modificadas com relação à fonte emissora de luz.
3. As equações de Maxwell e as leis da Mecânica clássica seriam válidas em qualquer referencial inercial, mas para isto teríamos que modificar as transformações de Galileu.

Para determinar qual(is) dessas afirmações descrevia(m) corretamente os fenômenos da natureza e, desta forma, o surgimento da nova relatividade, era necessário considerar que as equações de Maxwell eram bastante fundamentadas para que fossem modificadas, bem como, as leis da Mecânica clássica eram confirmadas por meio de resultados experimentais totalmente aceitos até então. Porém, a nova teoria deveria tornar a velocidade da luz no vácuo igual a c em todo referencial inercial, pois não se detectava uma velocidade maior que esta, independentemente da experiência que fosse realizada (RICCI, 2000). Então, como alternativa, Einstein propôs modificar as transformações de Galileu considerando a velocidade da luz como invariante em todos os sistemas inerciais, como veremos a seguir.

2.4 A RELATIVIDADE DE EINSTEIN

A correção da relatividade Galileana já era apresentada como um caso especial das transformações de Lorentz, elaborada a partir do trabalho de FitzGerald, as quais traziam a ideia de contração de corpos quando estes se deslocavam com relação ao éter, com uma relação de correção $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Essa correção baseava-se nas conclusões dos postulados de Maxweel, para os quais, as transformações de Lorentz deveriam ser válidas para todos os observadores inerciais. Ainda, estas transformações deveriam ser homogêneas no espaço e no tempo, de modo que todos os pontos dos espaços e instantes de tempos deveriam ser equivalentes. Por exemplo, um ponto qualquer do espaço poderia ser adotado como origem de um sistema de coordenadas, bem como, qualquer instante de tempo pode ser tomado como o instante inicial de um cronômetro ou relógio (Ricci, 2000). Para compreender essas transformações observe novamente a Figura 03. Nela, o evento P, o observador (S) e o observador (S’) que se move em direção ao evento, possuem diferentes coordenadas relativas e que são proporcionais as velocidades de cada observador. Todavia, um pulso de luz emitido pelo evento P será propagado de forma esférica e será visto por cada observador em seu sistema de referência (S) e (S'). Desse modo, cada observador poderia descrever essa onda esférica e compará-la as coordenadas relativas. Então, essas coordenadas no sistema S (x, y, z, t), com relação a S' (x', y', z', t') vistos na Figura 03, para as transformações de Lorentz[5], ficam:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{05}$$

y=y'

z=z'

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{06}$$

O termo $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ geralmente é chamado γ e é conhecido como fator de correção de Lorentz.

Com as coordenadas estabelecidas nas transformações de Lorentz, Albert Einstein, em 1905, após a explicação do efeito fotoelétrico e do movimento browniano das partículas, traz a interpretação às mesmas, em sua obra intitulada *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento,* dando assim origem à Teoria da Relatividade Especial. O cientista verificou que a aplicação das Equações de Maxwell para qualquer referencial inercial resultava em uma invariância da velocidade da luz, independente do movimento do observador. De tal forma, Einstein apresenta dois postulados:

1) as Leis físicas são as mesmas para quaisquer referenciais inerciais;

2) a velocidade da luz é constante e é a mesma para todos os observadores.

> O primeiro postulado está associado diretamente às leis da Mecânica, Termodinâmica, Óptica e do Eletromagnetismo, ou seja, é uma generalização do princípio da Relatividade Galileana e que se aplicava apenas à Mecânica. Esta generalização de várias leis somente foi possível graças à modificação dos conceitos de espaço e tempo. O segundo postulado trouxe, entre algumas consequências, a de que nenhuma partícula pode se deslocar com velocidade superior à da luz (Wolf e Mors, p.22).

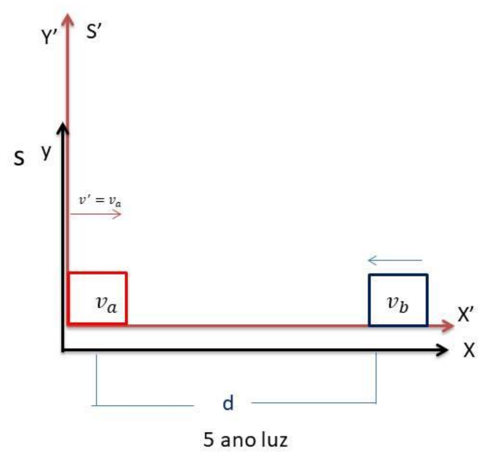
---

[5] A dedução de tais transformações pode ser vista no trabalho de WOLFF e MORS, 2005.

2.5 A VELOCIDADE RELATIVA DE GALILEI VS EINSTEIN

Para comparar ambas as relatividades e verificar as conclusões criadas por cada uma delas perante as medidas realizadas, vamos supor que as partículas A e B, se deslocam em sentidos opostos a 0,6 *c* e 0,8 *c*, respectivamente, com relação a um sistema inercial S(x,y), conforme a ilustração da Figura 05.

Figura 05 – Partículas idênticas se deslocando em direções opostas



Fonte: Autoria própria, 2019.

Na visão clássica, um observador no sistema (S') que se desloca com um dos corpos e outro observador inercial em repouso (S), chegam à conclusão direta de que a velocidade relativa de aproximação é uma adição entre ambas às velocidades (v_a e v_b). Extrapolando, portanto, a velocidade da luz. Tal resultado é facilmente verificado pela diferenciação da equação (1),

$$\frac{d(x)}{dt} = \frac{d(x')}{dt'} + \frac{d(vt')}{dt'}$$

$$\nu_x = \nu' + \nu \qquad (07)$$

onde, ao substituir as velocidades com que ambas as partículas se aproximam tem-se o seguinte resultado.

$$\nu_x = 0{,}6c + 0{,}8c$$

$$v_x = 1.4\ c \qquad (08)$$

Vimos que o resultado da extrapolação da velocidade da luz pela relatividade galileana é contestada pelos postulados de Einstein. Na relatividade de Einstein a velocidade da Luz é o limite em todas as medidas realizadas. Assim, ao considerar o problema anterior, a medida de velocidade do observador (S'), pode ser encontrada combinando as equações (5) e (6). Como resultado, chegamos à seguinte relação:

$$v_x = \frac{(v' + v)}{1 + \frac{v'v}{c^2}} \qquad (09)$$

onde:

v_x medida do observador S';

v' medida de velocidade da partícula A;

v medida de velocidade da partícula B.

Ao substituir as velocidades que as partículas se aproximam, esse observador encontra a seguinte velocidade relativa.

$$v_{ab} = \frac{(0{,}6c + 0{,}8c)}{1 + \frac{0{,}6c * 0{,}8c}{c^2}}$$

$$v_{ab} = 0.94\ c \qquad (10)$$

Os resultados encontrados condizem com as afirmações esperadas pela TRR, em que as medidas realizadas em um sistema com relação a outro não podem ser superiores à velocidade luz, "Ou seja, nenhum observador inercial consegue medir uma velocidade maior do que a da luz no vácuo para qualquer entidade física, não importa quão rápido se mova em relação a qualquer outro referencial inercial e quão rápido este se mova com respeito a qualquer outro referencial inercial" (Ricci, 2000, p.19).

Veja que, mesmo que as partículas estivessem se aproximando com uma velocidade de 0,95 c a velocidade relativa entre elas não seria superior a da luz.

$$v_{ab} = \frac{(0{,}95c + 0{,}95c)}{1 + \frac{(0{,}95c)^2}{c^2}}$$

$$v_{ab} = 0.99\ c \qquad (11)$$

Outra conclusão direta que provêm das afirmações dos postulados de Einstein, é que tempo e espaço deixam de ser absolutos. Então, diferentes observadores encontram divergência em suas medidas. Assim, ao considerar o problema anterior (Figura 05), o observador S' e o S que permanece em repouso sobre o referencial (x,y), devem encontrar medidas diferentes de tempo e espaço. Para o observador S, a distância entre as partículas é de 05 Anos-luz, enquanto, o tempo de encontro entre elas pode ser calculado pela equação (01) ao substituir a velocidade relativa que ambas se deslocam e isolar *t*:

$$t = \frac{\Delta x}{v_a + \ v_b} \tag{12}$$

$$t = \frac{5 * A.l.}{0{,}6\,c + \ 0{,}8\,c}$$

$$t = 3{,}57\,A. \tag{13}$$

Todavia, para os observadores no referencial da partícula, este tempo e comprimento devem possuir medidas diferentes. Para o observador S', esse comprimento pode ser encontrado aplicado as correções de Lorentz em relação ao observador inercial, conforme a equação (5). Em seguida, ao substituir a velocidade relativa que ambas se aproximam na medida deste observador, $v_{ab} = 0.94\,c$, pode-se encontrar a medida do comprimento para o observador (S').

$$\Delta x' = x * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta x' = 5\,A.l.* \sqrt{1 - 0{,}88}$$

$$\Delta x' = 1{,}7\,A.l. \tag{14}$$

Com este resultado vemos que o referencial da partícula realiza uma medida de comprimento menor que o outro observador inercial. Quanto à medida de tempo, podemos encontra-la para esse referencial (S') aplicando as correções relativísticas apresentada na equação (8) com relação ao observador inercial (S):

$$t' = t * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{15}$$

Ao substituir a velocidade relativa do observador que se move, $v_{ab} = 0.94\,c$, encontramos que o tempo de encontro entre ambas é, também, inferior à medida do relógio do referencial inercial:

$$t' = 3{,}57\,A * \sqrt{1 - \frac{(0{,}94c)^2}{c^2}}$$

$$t' = 1{,}2\,A. \qquad (16)$$

Como conclusão, as medidas realizadas por observadores que se deslocam junto à partícula, são sempre inferiores às medidas de tempo e comprimento medidos para qualquer outro observador. Ou seja, a medida realizada sobre determinado evento são sempre medidas por um observador que possui seu relógio e régua em repouso em elação ao evento. Cabe salientar que, independente o observador, todos concordam que as medidas realizadas nesses referencias são as mesmas e podem ser determinados igualmente para qualquer outro referencial. Assim, toda medida realizada nestes sistemas podem ser denominadas de “próprio” (Rebelo e Afonso, 2017; Veit, 2005).

TEMPO PRÓPRIO

O termo “tempo próprio” é utilizado para descrever a medida de um relógio em um sistema inercial ao qual o evento ocorre em repouso (Resnick e Watanabe, 1971).

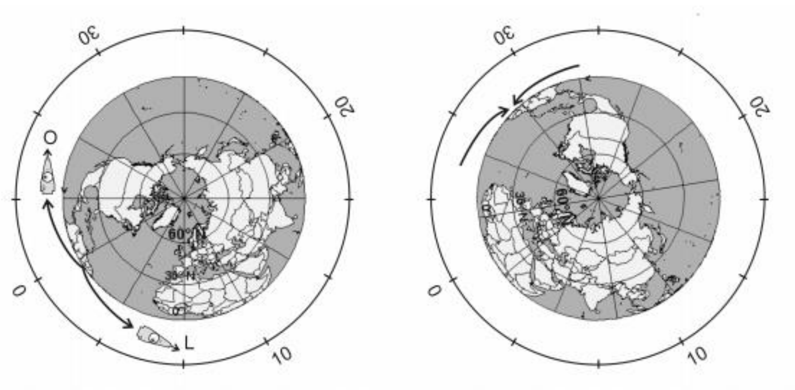
COMPRIMENTO PRÓPRIO

O termo “comprimento próprio” é utilizado para o comprimento medido no referencial inercial do corpo em repouso (Resnick e Watanabe, 1971).

Para demais observadores com outro relógio e régua, o tempo e espaço medidos podem ser corrigidos pela TRR pelo fator de correção resultante das transformações de Lorentz (Resnick e Watanabe, 1971).

A verificação de tais suposições foi concretizada a partir da experiência feita em 1972 pelos pesquisadores o Joseph C. Hafele e Richard E. Keating. Os mesmos ajustaram e sincronizaram relógios atômicos e os colocaram em dois aviões a jato para navegarem pela Terra em sentidos opostos sobre linha do equador, conforme Figura 06.

Figura 06– Experiência com relógios atômicos



Fonte: Osvaldo Pessoa Jr, 2017.

Disponível em < http://opessoa.fflch.usp.br/sites/opessoa.fflch.usp.br/files/TR-Exp-2-Avioes.pdf>

Ao final do experimento os relógios nos dois aviões e o relógio que permaneceu na superfície indicaram diferenças da ordem de centenas de nanossegundos na medida de tempo (Hafele, Keating, 1972). A explicação para que os relógios andassem em ritmos diferentes é um efeito da dilatação temporal que leva diretamente ao paradoxo dos Gêmeos.

EFEITO DOPPLER

O efeito Doppler aparece quando uma fonte emissora de sinal se move com relação a um observador, como exemplo uma ambulância se aproximando e se afastando. Conforme Tipler e Mosca (2006), as equações do deslocamento Doppler relativístico são diferentes da clássica e estão detalhadamente deduzidas em seu trabalho. A equação do efeito Doppler Relativístico para quando fonte e observador estiverem se aproximando pode ser observada na equação (17).

$$f' = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}f_0 \qquad \text{Aprox.} \quad (17)$$

Enquanto a dedução da expressão quando fonte e receptor estivem se afastando um do outro, pode ser observada na equação (18).

$$f' = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}f_0 \qquad \textit{Afas.} \quad (18)$$

Onde, nas equações (17) e (18) temos:

f' = Frequência recebida pelo observador;

f_0 = Frequência emitida pela Fonte;

v= Velocidade relativa entre fonte e receptor.

3. PARADOXO DOS GÊMEOS NA LITERATURA

O paradoxo dos Gêmeos é um problema clássico que surge logo após as primeiras conclusões em estudos da Relatividade. Como já apresentado, ele consiste em uma experiência mental com dois irmãos gêmeos idênticos A e B, em que um deles realiza uma viagem com uma velocidade próxima a da luz até uma estrela distante e, ao retornar, encontra o outro muito mais velho. Diante disso, parte-se ao questionamento de por que o irmão que viaja é o que envelhece menos? Se, na visão daquele que está viajando numa nave espacial, quem parece se deslocar é aquele que ficou na Terra? Em busca de respostas, buscamos verificar na literatura a sutileza de detalhes com que o problema vem sendo abordado.

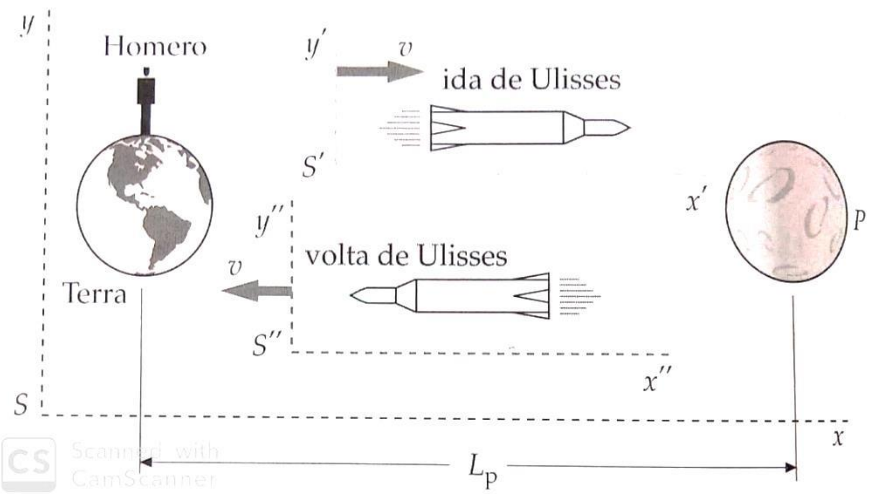
Em nossa análise, optamos por utilizar as principais bibliografias básicas utilizadas na graduação: Marion e Thornton. Halliday e Resnick. Nussenzveig, H. Moysés. Tipler e Mosca. Serway e Jewett. Feynman. Young e Freedman. Verificando o nível de profundidade explorado no tema junto ao seu detalhamento nas proposições do problema apresentado em cada livro.

Em Halliday e Resnick, as versões atuais (8ª,9ª e 10ª) edições, não apresentam o problema, mesmo sendo o livro de maior adesão nos cursos de Física. Então, acreditamos que este livro precise, ao menos, apresentar o problema e relacionar aos efeitos que são previsto pela TRR, uma vez que é um problema chave para trabalhar tais conceitos.

Para iniciar o paradoxo dos gêmeos, Serway e Jewett (2008), apresentam o conceito de tempo próprio, ressaltando que "*todos os processos físicos, incluindo os processos químicos e biológicos, são medidos como tornando-se mais lentos por um observador quando esses processos ocorrem em um referencial em movimento em relação ao observador" (p.290)*. Quanto ao paradoxo, os autores trazem dois irmãos gêmeos (Speedo e Goslo) que possuem 20 anos de idade, em que Speedo viaja para um Planeta X localizado há 20 anos-luz a uma velocidade de 0,95c tanto na ida quanto na volta. Assim, no referencial do irmão que permaneceu na Terra, passassem-se 42 anos entre a saída e retorno de Speedo, enquanto para o gêmeo viajante apenas 13 anos se passaram. Para solução do aparente paradoxo, o autor enfatiza que *a situação não é simétrica*, onde, Speedo tem várias acelerações durante sua jornada para retornar, tendo como consequência a mudança da sua velocidade escalar, não estando sempre em um referencial inercial (Serway e Jewett, 2008). Deste modo, na análise dos autores não existe paradoxo, apenas Goslo permanece em um único referencial podendo realizar as medidas precisas e esperadas pela relatividade especial. Além disso, enfatiza-se que o tempo necessário para acelerar e diminuir a velocidade na nave é muito pequeno e, portanto, Speedo permanece a maioria do tempo indo e voltando do Planeta X com velocidade constante. Tendo em vista que o problema é tratado de forma muito conceitual, em nossa análise consideramos que a abordagem dada pelos autores propicia uma fácil compreensão e entendimento do problema em questão. Todavia, salientamos que o livro não apresenta as equações pelas quais os leitores poderiam verificar suas suposições, apenas enunciando os valores e as conclusões obtidas pelos mesmos.

Em Tipler e Mosca (2006) o problema ganha um olhar especial. Os Gêmeos Homero e Ulisses também apresentam divergência de idade após Ulisses realizar uma viagem a um planeta (p) distante (L_p) 8 anos-luz, com uma velocidade(v), constante, sobre um referencial inercial (s') que se desloca a 0,8 c e retorna com uma mesma velocidade sobre um referencial (s'') conforme a Figura 07.

Figura 07 – Ilustração viagem dos gêmeos em Tipler e Mosca



Fonte: Tipler &Mosca, 2011.

Para Homero, Ulisses viaja durante 10 anos no referencial S' e outros 10 em S'', estando 20 anos mais velho até o retorno do irmão. Enquanto para o irmão que viaja, o tempo entre saída e retorno à Terra é de apenas 12 anos, conforme previsto pela teoria da relatividade restrita. Com isso, o autor questiona por que Ulisses não aplica as correções da relatividade restrita e também encontra um tempo menor, uma vez que, aparentemente permanece em um referencial inercial durante sua viagem. Para responder tal indagação, os autores afirmam que Ulisses não permanece em um único referencial. Desse modo, para compreensão do problema, enfatizam que podemos supor que cada irmão envia sinais de telecomunicações de ano em ano para acompanhar a idade de cada irmão. Feita tal suposição, verificamos que a frequência de chegada dos sinais não acontece de um sinal por ano em decorrência do deslocamento Doppler[6]. Assim, nas condições adotadas, ao se afastar do planeta durante a viagem de ida, a frequência de sinais captada por Ulisses é de 1 sinal a cada 3 anos, enquanto ao retornar a frequência é de 3 sinais por ano. Além disso, os autores realizam comentários de experiências semelhantes realizadas com partículas aceleradas com alta velocidade e aprisionadas em campos magnéticos, que comparadas com partículas idênticas que permaneceram em repouso apresentam divergência de tempo de vida, comprovando, portanto, a divergência de idade.

Em nossa análise, compreendemos como sucinta a apresentação do problema, o que acaba dificultando o entendimento da questão. Quanto a abordagem, os autores exploram de maneira detalhada a divergência de idade, além de apresentarem as conclusões da relatividade restrita, bem como, as equações para compreensão do problema, pela qual permitem ao leitor verificar cada afirmação feita durante a abordagem da temática. Todavia, a questão das possíveis acelerações ou desacelerações da viagem pouco é abordada.

Em Marion e Thornton (2007), os gêmeos Mary e Frank também se deparam com uma divergência de idades. Mary é uma astronauta de 30 anos que realiza uma viagem até uma estrela a 8 anos-luz do nosso planeta, com uma velocidade escalar $v = 0{,}8c$, enquanto Frank, um corretor de bolsa de valores permanece na Terra. Após o retorno, Frank, que permaneceu em nosso planeta, terá 50 anos de idade. Então, Frank supõe que o relógio de Mary deve estar mais lento e que o tempo de duração de cada trecho da viagem no referencial de Mary é de 6 anos, dessa forma, ao retornar ela possui 42 Anos. Para explorar tal questão, o autor enaltece que o tempo gasto para acelerações e desacelerações pode ser considerado desprezível para divergência de idade, além de afirmar que, quando Mary realiza as medições de tempo em seu relógio, elas não são comparáveis ao relógio de Frank devido ao fato de seu referencial não ser inercial. Uma contextualização importante e que fica clara na abordagem dos autores é que a nave acelera para sair do planeta e precisa, necessariamente, desacelerar para inverter o sentido e retornar. Outro conceito bem explorado é do referencial de Mary sentir ação das forças inerciais por, justamente, ter variações de velocidade no tempo até alcançar a velocidade v sugerida de ida e retorno. Para complementar a abordagem, os autores trazem um exemplo em que ambos os irmãos trocam sinais anualmente e, via efeito Doppler

---

[6] O deslocamento Doopler caracteriza-se de forma geral, como uma alteração nas frequências e comprimentos de ondas emitidas por uma fonte em deslocamento.

reforçam a conclusão de que durante a ida chega 1 sinal a cada 3 anos e durante a volta são 3 a cada ano.

Em Young e Freedman (2008) as gêmeas Terrana e Astrina se deparam com uma divergência de idade após Astrina retornar de uma viagem com uma velocidade elevada percorrendo diversos astros. Para resolver tal paradoxo, os autores argumentam que as duas irmãs não são idênticas em todos os aspectos, onde a gêmea viajante sofre diversas acelerações em relação ao nosso planeta para contornar os astros e retornar. Assim, os sistemas de referência não são equivalentes e Astrina, ao retornar, estará realmente mais jovem. Com a análise do livro percebemos que o problema é apenas contextualizado e pouco explorado, sem apresentar conceitos importantes previstos pela Teoria da Relatividade Restrita, além de estar situado, no livro, antes da definição de termos importantes como tempo e comprimento próprios.

No livro Lições de Física, de Feynman (2008), encontramos a contextualização do problema por meio dos gêmeos Pedro e Paulo. Ao chegar na idade de dirigir uma nave espacial, Paulo parte em altíssima velocidade. Então Pedro, que ficou no solo, percebe que todos os relógios de seu irmão na nave devem estar mais lentos, bem como as batidas do coração. Assim, quando Paulo retorna, Pedro está mais velho. Por simetria devíamos encontrar a mesma idade entre ambos porém, ao dar meia-volta, ocorre uma mudança de referencial e uma quebra de simetria. Desta forma, o autor elucida "*o homem que sentiu as acelerações, que viu as coisas irem de encontro à parede, etc. é aquele que estaria mais jovem*" (Feynman, 16-2). Com nossa análise, percebemos que o problema está conceitualmente bem explorado, contextualizado, e apresenta uma linguagem que instiga o aluno à leitura. Porém, o autor opta por trabalhar muito superficialmente e deixa os conceitos mais profundos para o volume dois.

No livro Curso de Física Básica, de Moysés Nussenzveig (1998), Ana e Bia, irmãs idênticas, encontram divergência de idade quando Bia viaja em um foguete com uma velocidade 0.6 c para uma estrela distante 15 anos-luz da Terra. Desta forma, para Ana a viagem de ida e volta de sua irmã durou 50 anos, enquanto para Bia, ao aplicar o fator de dilatação tempo-velocidade $\gamma = 5/4$, a viagem dura apenas 40 anos. Porém, Bia poderia afirmar que Ana é quem se desloca em relação a ela tendo 32 anos ao retornar. Para responder o suposto paradoxo o autor enaltece que o referencial de Ana é inercial, enquanto o de Bia não, pois a mesma, ao chegar à estrela precisa acelerar para inverter o sentido da velocidade no movimento. Desse modo, para o autor, como essas acelerações são muito grandes, no referencial do foguete, o tempo passa mais devagar e, por isto, *Bia estaria mais moça que Ana ao retorna*r (Nussenzveig, 1998).

Por meio da nossa análise, entendemos que o problema é apresentado muito sucintamente e a própria duração de viagem de cada referencial (Bia e Ana) é pouco explorada. O autor ainda afirma que a aceleração é responsável por encontramos a divergência de idades. No entanto mostraremos, no capítulo subsequente que a diferença de idade causada pela desaceleração pode ser considerada desprezível frente a duração total da viagem.

4. UMA VISÃO DETALHADA DO PROBLEMA

Com respeito a nossa abordagem, decidimos considerar quatro conclusões acerca das leituras realizadas até o momento. A primeira conclusão é que, ao retornar ao planeta, o irmão que viaja quebra a simetria de seu referencial inercial devido ao fato de ter que *desacelerar* para inverter o sentido da viagem. Outro apontamento crucial é que as referências não deixam explicito, é que são duas viagens, uma para ida e outra para retorno. Uma terceira conclusão é que o gêmeo só pode afirmar que está mais novo devido ao fato dele retornar. E, por fim, outra conclusão é que tempo que o irmão passa acelerando, para partir e para retornar, pouco implicam na divergência da idade.

Para verificar tais conclusões e contextualizar o problema envolvendo o paradoxo dos gêmeos, considere que o gêmeo viajante, “B”, permanece com velocidade constante de 0,8c deslocando-se até uma estrela situada a 4 Anos-luz (A.l.) da Terra. Tal suposição deve ser capaz de permitir visualizar a possível quebra de simetria que leva o irmão viajante à mudança de seu referencial inercial. Iniciaremos nossa abordagem descrevendo as características do diagrama espaço x tempo para, em seguida, mostrar que, de fato, os referenciais não são idênticos.

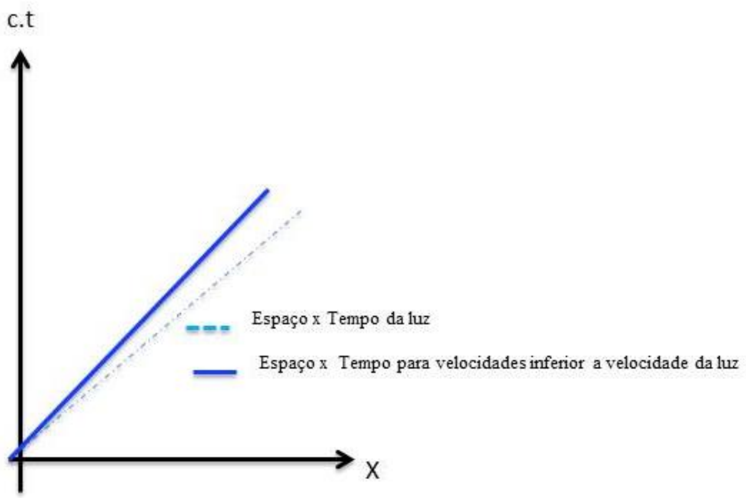
4.1 DIAGRAMAS ESPAÇO X TEMPO

Os efeitos da não simultaneidade, dilatação do tempo, contração dos comprimentos, são explicados nos dois postulados da TRR, onde a velocidade da luz assume um papel central. Também, as medidas realizadas por diferentes observadores e seus efeitos podem ser previstos nas transformações de Lorentz. Entretanto, existem outros modos de visualizar estes efeitos, aos quais são denominados diagramas espaço-temporal, introduzidos por Hermann Minkowski[7] em 1908. Estes diagramas permitem visualizar eventos simultâneos que acontecem em lugares distintos, eventos que ocorrem na mesma posição, mas com tempos diferentes e entre outros. Em tais diagramas é comum encontrarmos a representação de uma *linha universo da partícula* que descreve a posição em diferentes instantes da mesma, isto é, descrevem sua velocidade. É importante ressaltar que nestes diagramas, a velocidade da partícula é inversa da *linha universo* (DE MELLO, 2017). Para melhor compreensão, considere a Figura 08.

---

[7] Hermann foi um matemático alemão usou métodos geométricos para resolver problemas difíceis em teoria dos números, física matemática e teoria da relatividade.

Figura 08– Diagrama Espaço-Tempo



Fonte: Autoria própria, 2019.

Perceba que, na Figura 8, a linha tracejada representa a posição de uma partícula que se desloca na velocidade da luz, como por exemplo, um fóton. Enquanto, a linha continua apresenta uma partícula com velocidade menor, tendo uma inclinação maior.

Com elucidação dos diagramas, suponha que, para cada ano que se passa no seu próprio relógio, cada irmão envie um sinal luminoso para o outro. Dessa forma, o numero de sinais recebidos dará diretamente a idade do gêmeo que o enviou, bem como sua posição enquanto o mesmo estiver se deslocando. Além disso, por meio da contagem da frequência entre os sinais trocados pelos irmãos durante a viagem, será possível verificar, via deslocamento Doopler, essa divergência de idade.

ANÁLISE COM EFEITO DOPPLER DURANTE A VIAGEM DE IDA

Vamos analisar somente os sinais enviados pelo gêmeo viajante. Durante a viagem de ida, o irmão “B” envia 03 sinais e, verificando, tem-se a conclusão que não existe divergência. os três sinais enviados por “B” são recebidos por “A”. Todavia, como a fonte está se deslocando à medida que envia os sinais a frequência dos pulsos é alterada via Efeito Doppler Relativístico (D’INVERNO, 1992).

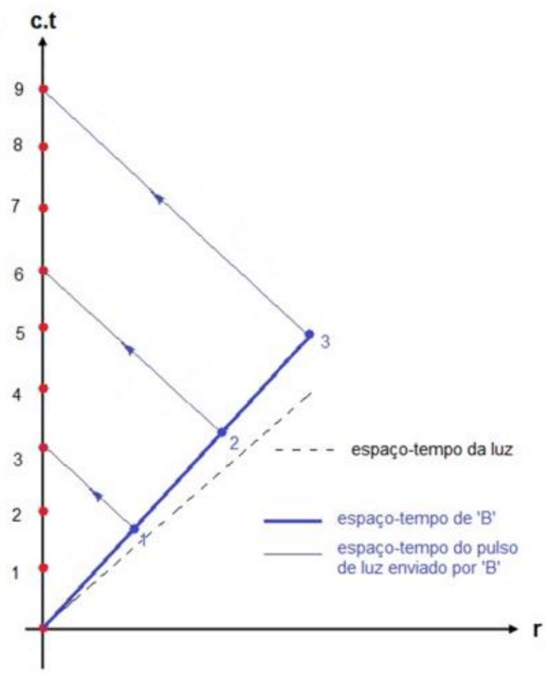
Assim, ao substituir a velocidade que a nave do irmão se desloca nas equações que preveem a mudança da frequência via afastamento da fonte emissora, o termo da correção relativística $\frac{v}{c} = 0{,}8$ passa ser considerado. Então, quando os Gêmeos estiverem se afastando conforme equação (18) teremos que:

$$f_A = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}}\, f_0 = \frac{1}{3} f_B \qquad (19)$$

Onde, f_A = frequência recebida pelo “A” e f_B = frequência emitida pelo “B”.

O resultado da equação (19) apresenta a relação das frequências dos pulsos enviados entre os irmãos “A” e “B”, onde “A” recebe um sinal a cada 03 anos durante a viagem de ida de seu irmão. Isso implica que um pulso do relógio “B”, corresponde a três pulsos no relógio “A” [8] (Gobbi, 2016). Para ilustrar tal fenômeno vejamos a Figura 09.

Figura 09 – Diagrama Espaço-Tempo irmão "B" durante viagem ida



FONTE: Gobbi, 2016

Note que o gêmeo “A” vê “B” se afastando durante 09 anos, enquanto para o gêmeo da espaçonave em seu relógio passaram-se apenas 03 anos.

4.2 ANÁLISE COM EFEITO DOPPLER DURANTE A VIAGEM DE VOLTA

---

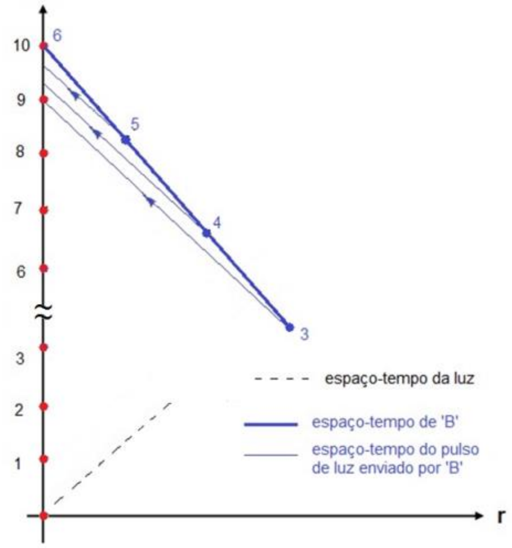
[8] É importante destacar que a relação de frequências é inversa do período. Então o tempo medido em um relógio em “A” é 3 vezes mais lento que “B” $\frac{TA}{3} = TB$.

Analisando somente a viagem de retorno também não percebemos divergência quanto ao número de sinais, os três sinais enviados por “B” são recebidos por “A”. No entanto, quando a fonte que emite sinal estiver se aproximando, a frequência dos pulsos é alterada e são também previstas utilizando a equação (17):

$$f_A = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}}f_0 = 3f_B \tag{20}$$

Por meio de tal análise percebe-se que a relação de sinais agora é de 3:1 durante a viagem de volta, isso significa que, “A” recebe três sinais para cada ano em seu relógio na Terra. Assim, a cada sinal enviado pela gêmea na Terra, “B” envia três. A ilustração de tais afirmações pode ser vista na Figura 10.

Figura 10 – Diagrama Espaço-Tempo do irmão "B" durante a viagem de volta

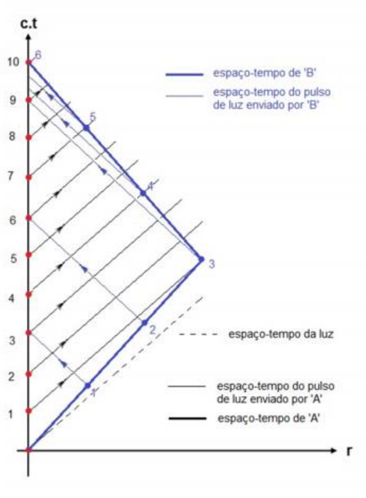


Fonte: Gobbi, 2016

Note que o gêmeo que permanece na Terra vê seu irmão retornar em 01 ano, enquanto no relógio próprio do irmão da nave passaram-se 03 anos.

A dilatação aparece quando nota-se que a gêmea “A” visualiza seu irmão “B”, se afastando perante 09 anos e logo em seguida visualiza ele retornar ao planeta em 01 ano, totalizando 10 anos, embora que, no relógio de “B” passaram-se 03 anos para partir 03 anos para voltar. Então, pode-se afirmar que no tempo próprio de “B”, passaram-se 06 anos, ou seja, seu relógio afirma que esteve fora durante 06 anos, enquanto o de “A” indica que se passaram 10 anos (Gobbi, 2016). A relação completa dos sinais enviados entre os irmãos pode ser verificada na Figura 11.

Figura 11– Diagrama Espaço-Tempo completo com sinais trocados



Fonte: Gobbi, 2016

Na figura acima vemos que, no reencontro o 6º sinal enviado pelo gêmeo da nave “B” corresponde ao 10º enviado pela irmã “A”. No referencial da irmã que permanece na Terra, seu irmão precisa de 5 anos para chegar à estrela e 5 anos para voltar à Terra percorrendo uma distancia de 8 Ano-luz. Porém, para o irmão, a viagem demora apenas 6 anos. Essa diferença de tempo é prevista pela TRR e pode ser calculada isolando t’ da equação (6).

$$t' = t * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (21)$$

Ao substituir o valor da velocidade com que a nave se desloca, o fator de correção de Lorentz assume o valor de $\frac{3}{5}$. Então, a viagem que no relógio de “A” aparenta ter 10 anos é medida diferente para o referencial do irmão “B”.

$$t' = \frac{10 * 3}{5}$$

$$\mathrm{t}' = 6\,A. \qquad (22)$$

Outra observação é que o comprimento medido para o irmão da espaçonave é menor se comparado ao irmão que permanece na Terra, fato este, previsto pela TRR e que pode ser verificado aplicando as correções relativísticas da equação (5)?

$$\Delta x' = x * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

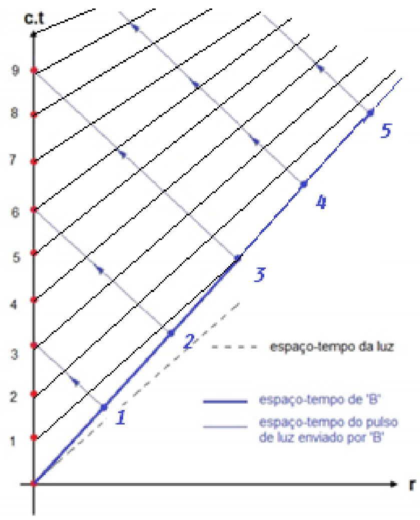
$$\Delta x' = 8\,A.l.* \frac{3}{5}$$

$$\Delta x' = 4{,}8\,A.l. \qquad (23)$$

Portanto, dentro da nave, ao se deslocar o irmão viajante mede uma distância menor que sua irmã que permanece na Terra. Assim, podemos dizer que o tempo do irmão está dilatado e o espaço contraído. Logo, pode-se concluir que no referencial da irmã “A”, seu irmão “B”, ao retornar, envelheceu apenas 06 anos (Gobbi, 2016). Desse modo, ignorando os efeitos das acelerações e desacelerações, pode-se dizer que a irmã “A” sempre permanece em um único referencial inercial, enquanto “B”, passa por dois, um partindo e outro retornando com $+0{,}8\,c$ e $-0{,}8\,c$ respectivamente, evidenciando que são duas viagens.

Para complementar a análise suponha que, ao invés de retornar, o irmão continue se deslocando com velocidade constante e enviando um sinal por ano, todavia, sem inverter o sentido. Então, ao aplicar as correções do Efeito Doppler relativístico chegamos à conclusão de que a frequência de sinais de “A” com relação à “B” é a mesma. “A” envia três sinais e recebe um, bem como “B” recebe um sinal a cada três enviados. A ilustração do diagrama *espaço x* tempo desse exemplo pode ser verificado na Figura 12.

Figura 12 – Diagrama Espaço-Tempo para quando irmão não retorna



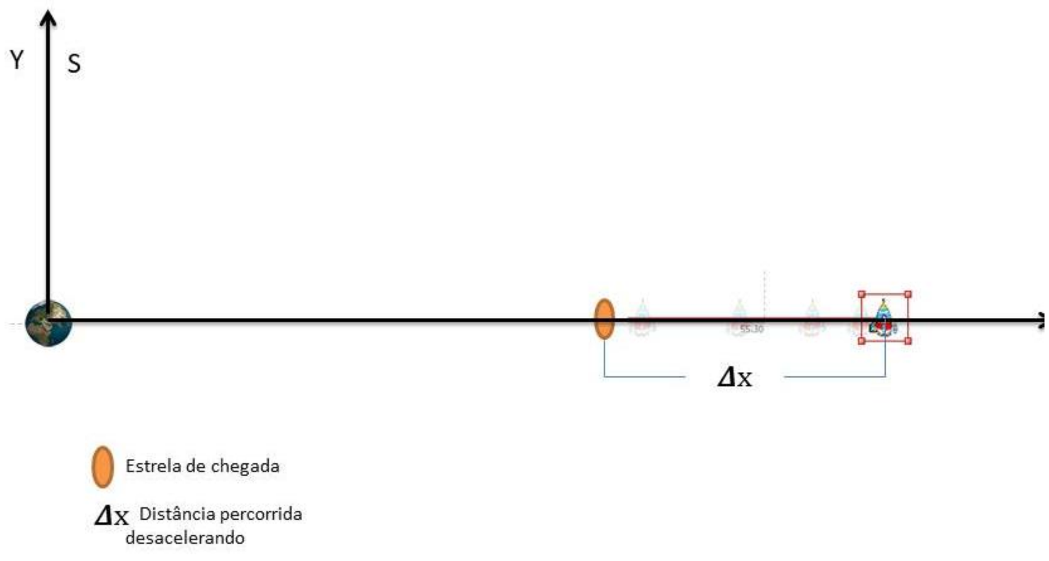
Fonte: Adaptada de Gobbi, 2016.

Com tal suposição, conclui-se que a descoberta do paradoxo só é possível quando o primeiro sinal da viagem de retorno do irmão “B” chega a Terra, alterando a frequência habitual. Caso contrário, ambos os irmãos poderiam afirmar que o relógio do outro está mais lento, pois estão permanecendo em um espaço simétrico e em um único referencial inercial.

4.3 OS EFEITOS DE DESACELERAÇÃO

Considere que o gêmeo “B” ao chegar à estrela precisa realizar uma desaceleração para passar de 0,8 c para -0,8 c podendo, por exemplo, fazê-lo em linha reta com uma taxa de desaceleração $\frac{-c}{Semana} \approxeq 50g$, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Representação do trajeto percorrido em linha reta pelo irmão da nave ao desacelerar



Fonte: Autoria própria, 2019.

Através da função horária da velocidade do MRUV é possível encontrar o tempo necessário que a nave precisa para parar na visão do irmão que permanece na Terra.

$$t = \frac{0-0{,}8c}{\frac{-c}{semana}} = 0{,}8 \text{ Semana} \tag{24}$$

Percebe-se que é necessário pouco mais de cinco dias para o irmão parar e cerca de 11 dias para o irmão desacelerar e inverter completamente o módulo da velocidade.

Além do tempo que seu irmão passa desacelerando, o irmão A, é capaz de realizar a medida da distância percorrida pelo seu irmão B durante esse processo. Esta distância pode ser encontrada aplicando diretamente os valores na equação de Torricelli ao isolar Δx conforme equações (25) e (26).

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \tag{25}$$

$$\Delta x = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} \tag{26}$$

Considerando que v_f é igual a zero, percebemos que a distância percorrida pela nave é igual a:

$$\Delta x = \frac{-v_0^2}{2 * a} \tag{27}$$

Onde v_0 corresponde a 0,8 c e $a = \frac{-c}{semana}$. Todavia, para o irmão B essa distância e esse tempo são ainda menores. Segundo a Teoria da Relatividade Geral (TRG) [9], as presenças de campos gravitacionais ou acelerados implicam que o tempo e espaços sejam curvados. Então, para o irmão “B” que permanece na nave em um processo de desaceleração, o tempo e espaço são abordados de formas diferenciadas, e assim, o relógio deve andar mais lentamente. Para calcular o tempo medido em um relógio submetido a este campo acelerado, ao qual está contido o irmão “B”, é necessário usar a expressão (28) deduzida no trabalho de Acevedo, Morais, Pimentel, (2018), que relaciona o tempo entre diferentes observadores sob efeitos de aceleração.

$$t' = \left(1 + \frac{hg}{c^2}\right) t \tag{28}$$

Em que, t’= tempo medido no relógio do irmão “B”; t= tempo medido no relógio do irmão “A”; h= distancia percorrida pelo irmão “B” medido por “A”; g= desaceleração que irmão esta submetido; c= velocidade da Luz no vácuo. Note que, em nosso caso h corresponde a Δx, e g corresponde a $\frac{-c}{semana}$.

Assim, no referencial do irmão “B”, pela TRG, o tempo medido em seu relógio corresponde:

---

[9] A TRG apresenta em seu principio de equivalência, uma relação direta entre corpos acelerados e os efeitos sobre luz e matéria.

$$T_B = \left(1 + \frac{\frac{-v_0^2}{2*a}*a}{c^2}\right) T_A$$

$$T_B = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c^2}\right) T_A \tag{29}$$

Perceba que através dessa relação, é possível verificar que a diferença na medida dos dois relógios (Espaçonave, Terra), se deve exclusivamente à razão de velocidade inicial entre a nave do irmão e a da luz. Ao substituir $v_0 = 0{,}8c$, vemos que,

$$T_B = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{(0{,}8c)^2)}{c^2} T_A\right.$$

$$T_B = 0{,}68\ T_A \tag{30}$$

no relógio próprio do irmão “B”, o tempo gasto para parar é de apenas 3,8 dias.

As conclusões até aqui feitas levam à constatação que o tempo que o irmão “B” permanece desacelerando é insignificante frente à divergência de idades, correspondendo a 0,35% da divergência apresentada na medida do irmão “A” (0 Anos). Além disso, com essa investigação pode-se concluir que a *desaceleração* sofrida implica em uma medida de tempo menor para o referencial próprio do irmão “B”.

Em Moysés, o processo de desaceleração acontece por meio de uma conversão em uma estrela, à qual a nave estaria sujeita a um potencial gravitacional. Veja que, nesse caso, mesmo que o irmão realizasse a conversão sob uma desaceleração elevada, este tempo, também, seria ordens de grandezas menores perante a diferença de idade dos irmãos[10].

Portanto, podemos ver que o autor Moysés apresenta corretamente a explicação da dilatação do tempo para referenciais submetidos à ação de potenciais gravitacionais, conforme previstos pela TRG. Todavia, este autor apresenta uma interpretação complexa ao explicar a diferença de idade entre os irmãos por essa mesma teoria, uma vez que o tempo que o irmão permanece em um referencial inercial é muito superior ao que ele passa invertendo o módulo da velocidade (desacelerando). Para aprofundar essas conclusões veja a próxima seção.

4.4 OS EFEITOS PARA UMAVIAGEM ACELERADA

Agora, considere que o irmão na nave “B” imediatamente após a partida inicia um processo de desaceleração e, ao chegar à estrela, sua velocidade é igual a zero. Conforme

---

[10] A verificação da medida de tempo para partículas submetidas a potenciais gravitacionais podem ser encontradas em Moysés na seção que trata da Relatividade.

visto, por meio da equação (26), se o irmão da nave desacelerar com uma taxa de $-0{,}08c\ /\ ano$ é possível que tal suposição aconteça (alcançar a estrela e parar).

Em primeira análise percebemos que o irmão “B” precisa de mais tempo para chegar até a estrela, conforme predito pela equação (24) ao substituir esta desaceleração.

$$Ta = \frac{0-0{,}8c}{-0{,}08c/semana} = 10 \text{ Anos} \qquad (31)$$

O resultado encontrado prediz que, segundo a medida do relógio do irmão “A”, durante 10 anos o irmão “B” permaneceu desacelerando para chegar à estrela e que precisaria mais 10 anos para retornar acelerando, totalizando 20 anos. Enquanto para o irmão “B”, conforme visto anteriormente na equação (28) e nas conclusões da TRG, em seu relógio essa viagem duraria apenas 13.6 Anos. Todavia, se o irmão “B” permanecesse fora durante 20 anos, se deslocando com uma velocidade constante de $0{,}8\,c$, para a TRR, no relógio do irmão “B” teriam se passado 12 anos conforme a equação (22). Com esta análise, percebemos que, em média, ele viaja numa velocidade mais baixa e menores são os efeitos da relatividade perante a divergência de idade[11]. Isto é, por estar se deslocando com uma velocidade menor, menos significativa é a diferença de idade entre os irmãos.

Veja que, se a nave realizasse toda a viagem desacelerando, então, maior seria a sua velocidade e mais próximo da velocidade da luz ela estaria se movendo. Como consequência direta da TRG, maiores seriam os efeitos relativísticos e maior a diferença de idade os irmãos iriam apresentar.

[11] À medida que a velocidade diminui, mais próximo da visão clássica a relatividade se torna.

5. CONCLUSÃO

O paradoxo dos Gêmeos é um tema estruturante para trabalhar as implicações previstas pela TRR, ao qual a contração do comprimento e dilatação do tempo são tópicos chave para trabalhar tais conceitos. Tal teoria é considerada uma teoria de medidas, onde diferentes observadores em seus respectivos sistemas de referência devem realizar suas medidas e equipará-las com outro. Todavia nenhum deles pode discordar com as medidas realizadas no sistema próprio. No caso dos gêmeos, o irmão viajante apresenta divergência da medida de idade devido à mudança do sistema inercial, visto que este enfrenta acelerações e desacelerações durante a viagem. Com nossa análise, percebemos que em inúmeras literaturas o problema não está bem apresentado ou as conclusões acerca das suposições que são levantadas deixam perguntas pertinentes.

Quanto à nossa abordagem, esperamos possa auxiliar professores e alunos da graduação, sendo uma leitura complementar a ser adotada. Desse modo, acreditamos que o trabalho, além de representar uma revisão bibliográfica de diferentes literaturas, representa uma proposta de trabalho para discussão do paradoxo dos Gêmeos.

REFERÊNCIAS

ACEVEDO, O. A.; DE MORAIS, E. M.; PIMENTEL, B. M. O Princípio de Equivalência**. Revista Brasileira de Fisica**, v. 41, i3, p. e20180329. 2019. Disponível em < www.scielo.br/pdf/rbef/v41n3/1806-9126-RBEF-41-3-e20180329.pdf> acesso em 19 de junho de 2019.

D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein Relativity**. 1992. Oxford University Press.

DE MELLO, Luiz Adolfo. **E-livro-Relativity**. 2017.

FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M., **Lectures on Physics**. v. 1, NewYork, 1963: Tradução, Adriana válio Roque da Silvia, 2008.

GOBBI, L. H. **Teoria da Relatividade Restrita**: Abordagem Histórica e uma Sequência Didática e Investigativa, com a Utilização de uma Ferramenta Computacional, como Facilitadora do Processso de Ensino/Aprendizagem da Contração Espacial de Lorentz. 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo.

HAFELE, Joseph Carl , KEATING, Richard. Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains. 1972. **Revista Science**, n. 177, p. 166-168.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., KRANE, K.S., Física. v. 4, Rio de Janeiro: LTC Ltda, 1992 .
NUSSENZVEIG, H.M., **Curso de Física Básica**, v. 4, São Paulo: Edgar Blücher LTDA, 1987.

MARION, J. B.; THORNTON, S. T. Classical dynamics. 4th ed. Philadelphia: Harcourt Brace & Company, 2007.

PONCZEK, RL. **Deus ou seja a natureza: Spinoza e os novos paradigmas da física** [online]. Salvador: EDUFBA, 2009. 352 p.

RICCI, T. F. Teoria da Relatividade Especial. Porto Alegre: Gráfica do Instituto de Física UFRGS, In **Textos de apoio ao professor de física**, v. 11, n. 5, 2000.

REBELO, N. e AFONSO, N. **A aceleração e a solução do paradoxo dos gêmeos**. Disponível em < https://www.researchgate.net/publication/311948276_A_aceleracao_e_a_solucao_do_paradoxo_dos_gemeos> Acesso em 13 de junho de 2019.

RESNICK, Robert; WATANABE, Shigeo. **Introdução à relatividade especial**. Editora da Universidade de São Paulo, 1971.

SERWAY, R. A.; JEWETT JR., J. W. **Princípios de física**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. v. 1.

TIPLER, P.A., MOSCA, G., **Física**. 5.ed , v. 1, v. 2 e v.3, Rio de Janeiro: LTC, 2006.

VEIT, Eliane Angela. **Textos de Apoio ao Professor de Física**, v. 16 n. 5, 2005.

WOLFF, J. F. S., MORS, P. M.. Relatividade : a passagem do enfoque galileano para a visão de Einstein. In **Textos de apoio ao professor de física**, v. 16, n. 5, 2005.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A., **Fisica Iv - Ótica E Física Moderna**, 12a ed. São Paulo, Addison Wesley, 2008.