



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS DE LARANJEIRAS DO SUL

ENGENHARIA DE ALIMENTOS

MELINE GURTAT

**DINÂMICA DE TRANSMISSÃO DE CALOR POR CONDUÇÃO NA INTERFACE
DE BARRAS COMPOSTAS**

LARANJEIRAS DO SUL

2014

MELINE GURTAT

**DINÂMICA DE TRANSMISSÃO DE CALOR POR CONDUÇÃO NA INTERFACE
DE BARRAS COMPOSTAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia de Alimentos da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito para a obtenção do título de Engenheira de Alimentos.

Orientador: Prof. Dr. Wanderson Gonçalves Wanzeller.

Co-orientadores: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes Dagnone e Prof. Dr. Gian Machado de Castro.

LARANJEIRAS DO SUL

2014

MELINE GURTAT

**DINÂMICA DE TRANSMISSÃO DE CALOR POR CONDUÇÃO NA
INTERFACE DE BARRAS COMPOSTAS**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Alimentos na Universidade Federal da Fronteira Sul – Campus Laranjeiras do Sul-PR.

Orientador: Professor Dr. Wanderson Gonçalves Wanzeller

Este trabalho de conclusão de curso foi defendido e aprovado pela banca em: 28 / 11 / 14

BANCA EXAMINADORA



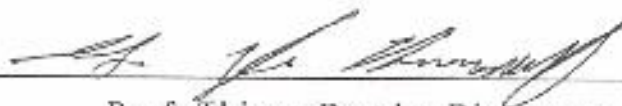
Prof. Wanderson Gonçalves Wanzeller



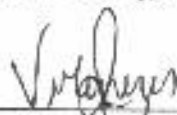
Prof. Gian Machado de Castro



Prof. Carlos Augusto Fernandes Dagnone



Prof. Thiago Bergler Bitencourt



Prof. Vivian Machado de Menezes

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, por ter me dado entendimento e paciência, por me conduzir durante esses anos de estudo sem me deixar desistir, por estar ao meu lado todo tempo cuidando de cada detalhe.

Agradeço aos meus pais, Marli e Alexandre, que me apoiaram de todas as formas possíveis, por serem meu porto seguro. Agradeço pelas inúmeras palavras de compreensão e todo afeto durante os dias estressantes e exaustivos, por todos os abraços e gestos de carinho. Faltam-me palavras para agradecer a vocês dois, todo amor e zelo, obrigada por tudo, eu amo muito vocês.

Meus agradecimentos também se estendem aos meus avós, irmãos, tios, primos, por demonstrarem afeto e muitas vezes se preocuparem comigo, obrigada por todo carinho. Agradeço de todo coração a minha amiga e líder, Maura, qual esteve orando por mim, me ajudando a ter paciência, e principalmente por me acolher enquanto eu me desesperava.

Agradeço ao Prof. Dr. Wanderson, Prof. Dr. Carlos e Prof. Dr. Gian, que com muita competência, me orientaram, compartilharam comigo (sem restrições) suas sabedorias, me auxiliando, corrigindo e me ajudando a crescer. Obrigada por toda paciência ao longo desses dois anos e meio de trabalho.

Agradeço as minhas colegas e amigas, Betina, Cristina, Angélica e Daiane, que de uma forma ou outra sempre estiveram perto, me incentivando e alegrando. Obrigada por todo carinho e amizade.

Por fim, sei da ausência de muitos nomes aqui, professores, colegas de curso, mas agradeço a todos que me apoiaram ou demonstraram um gesto de carinho. Obrigada!

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um protótipo de *software* destinado a resolver numericamente subproblemas derivados do modelo clássico de condução do calor (envolvendo a Lei de Fourier), aplicados a barras formadas por mais de um material, utilizando-se para isso os métodos das diferenças finitas explícito e implícito. Nestes métodos, as barras foram parametrizadas, divididas em três (método explícito) e duas partes (método implícito), com o intuito de analisar o comportamento da função temperatura. O *software* criado forneceu resultados nos quais foi possível determinar a evolução temporal desta variável, tendo-se observado uma descontinuidade nas interfaces das barras, devida aos diferentes coeficientes de difusividade térmica dos materiais que as compunham. Entretanto, ao se tratar de uma barra na qual os materiais têm coeficientes de difusividade térmica de mesma ordem, a evolução da temperatura no tempo é suave. Concluiu-se, pois, que os dois métodos utilizados não se mostraram totalmente eficientes ao se tratar de barras compostas por mais de um material quando estes possuem coeficientes de difusividade térmica de ordens de grandeza diferentes.

Palavras-chave: Condução de calor. Método das diferenças finitas. Barra composta.

ABSTRACT

This work was intended to present a software for numerically solve subproblems derived from the classic heat conduction problem (using the Fourier's law), applied to multimaterial bars, for which explicit and implicit finite difference methods were used. For such objective, the bar's length was parametrized and one considered bars formed by two and three parts (respectively for use with implicit and explicit methods), after what the temperature function was observed. The featured software has given results showing a discontinuity at the interface points of the bars, due to differences in scale of the thermal diffusivity coefficients of each material forming them. However, in bars formed by materials with this coefficient similar, it was possible to see that the temperature evolution was smooth. Hence, one can realize that both methods were not so efficient when dealing with multimaterial bars with very different thermal diffusivity coefficients.

Keywords: Heat conduction. Finite Difference Methods. Multimaterial bars.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	9
2.1.	LEI DE FOURIER	9
2.2.	ISOLANTES	11
2.3.	CÂMARAS FRIAS	13
2.4.	CONTATO PERFEITO	14
2.5.	TRATAMENTO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO DO CALOR PARA UMA BARRA HOMOGÊNEA	15
2.6.	MÉTODOS NUMÉRICOS	19
2.6.1.	Método explícito	20
2.6.2.	Método implícito	22
3	METODOLOGIA	24
3.1.	MÉTODO EXPLÍCITO	24
3.2.	MÉTODO IMPLÍCITO.....	25
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	26
4.1.	MÉTODO EXPLÍCITO	26
4.2.	MÉTODO IMPLÍCITO.....	27
5	CONCLUSÃO	31
	REFERÊNCIAS	33
	APÊNDICE A	35

1 INTRODUÇÃO

Há cerca de 10 mil anos, o homem nômade consumia alimentos frescos de modo a satisfazer suas necessidades imediatas. Tendo-se estabelecido (visando extrair da mesma porção de terra a sua subsistência), entregou-se às atividades agrárias e pecuárias, o que gerou os primeiros excedentes de produção (após toda a comunidade ter se beneficiado de seus resultados). Com base em observações e experiências o homem primitivo notou que o gelo conservava melhor os alimentos. Contudo, foi somente no início do século XIX, após vários mecanismos de conservação terem sido desenvolvidos nos séculos precedentes (GAVA, 1998) que surgiram as primeiras geladeiras, que eram constituídas por um recipiente (quase sempre isolado por meio de placas de cortiça) dentro do qual eram colocadas pedras de gelo responsáveis por manter os alimentos resfriados. Com a descoberta da eletricidade como nova fonte de energia nos séculos XIX e XX (em seu início) buscaram-se meios de manter áreas fechadas a baixas temperaturas em pequena escala, tendo-se, a partir de 1920, verificado um aumento neste tipo de demanda que levou à organização da produção de refrigeradores elétricos (FERRAZ, 2008).

A evolução do homem e da sociedade em que está inserido introduziu novos hábitos e a necessidade crescente de praticidade no momento da alimentação desenvolveu um mercado nutricional abundante. Para manter os gêneros sem haver desperdícios, o processo de conservação em câmaras frias (ambientes dos quais se remove calor¹) adquiriu grande importância, sendo amplamente adotado pela indústria alimentícia que passou a investir em equipamentos apropriados.

Em termos práticos, uma câmara frigorífica é qualquer espaço de armazenagem cujas características internas sejam controladas por *isolamento térmico*. Os materiais utilizados para tal isolamento reduzem as trocas térmicas entre os ambientes devido ao seu baixo coeficiente de condutividade térmica.

Para que as condições interiores das câmaras frigoríficas sejam mantidas é necessário um *sistema de refrigeração* adequado que, em conjunto com uma infraestrutura física

¹ Quantidade física que será definida posteriormente, sendo aqui utilizada no senso comum.

conveniente (*i.e.*, formada por bons isolantes), proporcione a maior resistência possível ao trânsito de calor, o que contribui na diminuição de custos energéticos e operacionais.

O presente trabalho apresenta um estudo analítico e numérico (sob o ponto de vista físico-matemático) do processo de transferência de calor, inicialmente numa barra de seção reta, (que pode ser a parede de uma câmara frigorífica), com o intuito de estabelecer as bases teóricas necessárias à implantação computacional da solução da chamada *equação de condução do calor*. Quando essa barra é composta por mais de um material, existe uma descontinuidade na função que representa a temperatura, esta, localizada na interface dos materiais e é causada pelas diferentes características dos compostos.

O objetivo deste trabalho é apresentar o protótipo de um *software* em linguagem de programação de alto nível destinado a resolver numericamente diversos subproblemas derivados do modelo de condução do calor aplicados a barras formadas por mais de um material com a finalidade de se observar o que ocorre com a função temperatura nas interfaces destas. E como objetivos específicos:

- a) Efetuar um estudo sistemático da linguagem de programação *FORTRAN 77* (CLIVE) e de algumas estruturas de dados básicas, necessárias à construção do *software*;
- b) Apresentar os aspectos teórico-técnicos das barras compostas, sob o ponto de vista de engenharia e da Física;
- c) Desenvolver um modelo matemático relacionado ao problema de condução do calor numa barra de seção reta empregando a lei de Fourier, séries de Fourier, métodos numéricos de integração e equações diferenciais parciais (E.D.P.'s);
- d) Efetuar estudos com métodos numéricos (métodos das diferenças finitas explícito e implícito) para condução de calor em paredes multicamadas.

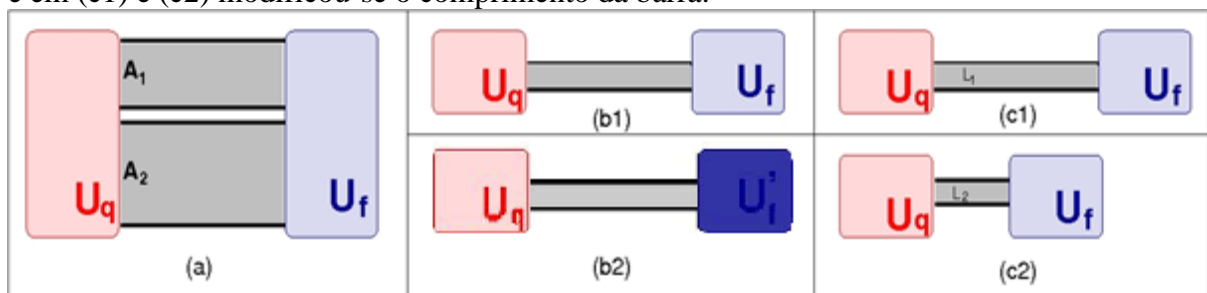
2 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

2.1. LEI DE FOURIER

Se dois materiais distintos a temperaturas diferentes são postos em contato a lei zero da termodinâmica garante que após um determinado tempo eles apresentarão a mesma temperatura. Isto implica que parte da energia interna de um dos materiais é passada para o outro material. Por isso, a lei zero da termodinâmica também é conhecida como a “lei do equilíbrio térmico”. À essa passagem (fluxo) de energia interna de um corpo para outro foi dado o nome de *calor* (q). Esse sempre ocorre em direção ao corpo mais “frio”, ou seja, o corpo “quente” cede energia interna para o corpo “frio”. Então existe uma direção estabelecida, fenomenologicamente, para o calor.

Para escrever uma equação que represente como se dá esse fluxo, supõem-se dois reservatórios térmicos: sendo um “quente” a temperatura U_q e outro “frio” a temperatura U_f . Entre eles uma barra (formada por um material sólido, homogêneo, e isotrópico) capaz de conduzir calor entre os dois reservatórios apenas (isso implica que as paredes da barra são formadas por um material isolante térmico perfeito), como mostra a Figura 1.

Figura 1- Barra condutora de calor em contato com dois reservatórios térmicos. Em (a) é modificado a área de contato, em (b1) e (b2) modifica-se a temperatura do reservatório quente e em (c1) e (c2) modificou-se o comprimento da barra.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2014.

Na Figura 1.a tem-se duas barras feitas com o mesmo material sendo que uma tem uma área de secção reta A_1 e a outra A_2 . Como o fluxo pode ser definido como a quantidade de uma substância que passa perpendicularmente por uma secção reta de um material, tem-se que quanto maior a área, maior será o fluxo:

$$q \propto A. \quad (1)$$

Como o fluxo de energia está diretamente relacionado com a diferença de temperatura entre os reservatórios térmicos pode-se aumentar (ao aumentar o valor de U_q) ou diminuir (ao diminuir U_f) o fluxo, variando a temperatura. Então, se U_q na Figura 1.b1 for maior que U_q em 1.b2 o fluxo será maior. Isto implica em:

$$q \propto \Delta U, \quad (2)$$

em que,

$$\Delta U = U_q - U_f. \quad (3)$$

Por outro lado, quando menor a distância entre os reservatórios, mais rápido o fluxo será estabelecido na barra, devido ao processo de condução do calor. Na Figura 1.c1 os reservatórios térmicos estão separados por uma distância L_1 (comprimento da barra), mas na Figura 1.c2 a distância diminui para L_2 , sendo $L_1 > L_2$. Logo, na situação mostrada na Figura 1.c2 o fluxo de energia térmica será maior que na situação mostrada na Figura 1.c1. Isso implica em:

$$q \propto \frac{1}{L}, \quad (4)$$

unindo as três possíveis situações tem-se:

$$q \propto \frac{A \Delta U}{L}. \quad (5)$$

Para que a equação (5) seja considerada uma igualdade, adiciona-se uma constante relacionada às propriedades térmicas do material. Com isso:

$$q = \kappa A \frac{\Delta U}{L}, \quad (6)$$

em que κ é a condutividade térmica do material. Mas como existe uma direção pré-estabelecida para o calor (na direção em que a temperatura diminui), pode-se generalizar a equação (6) na seguinte equação vetorial:

$$\vec{q}'' = -\kappa \vec{\nabla} u(x, y, z, t), \quad (7)$$

que será melhor discutida no apêndice A. Essa última equação é conhecida como Lei de Fourier e ela descreve como o calor “flui²” por um material sólido, homogêneo, e isotrópico (OZISIK, 1993).

2.2. ISOLANTES

Os isolantes térmicos têm como finalidade reduzir as trocas térmicas entre os ambientes. Como exemplo, têm-se as câmaras frias que requerem temperaturas muito baixas no seu interior. É de extrema importância que se faça um isolamento correto de sua estrutura, com materiais de baixa condutividade térmica de modo a reduzir gastos de energia elétrica no processo de refrigeração. Os materiais isolantes devem possuir características tais como:

- a) Baixa densidade;
- b) Não exalarem odor;
- c) Serem resistentes a deformações e ações mecânicas;
- d) Baixo custo operacional;
- e) Não serem inflamáveis.

Além disso, é necessário evitar a presença e acúmulo de água nos materiais isolantes, pois segundo Marques et al. (2009), alguns materiais isolantes com o decorrer do tempo absorvem umidade, que conseqüentemente aumenta o coeficiente de condutividade térmica do material cerca de 7% para cada 1% de umidade absorvida. Logo, se o coeficiente de condutividade térmica aumenta, há uma diminuição na eficiência do isolamento térmico.

A maior parte dos materiais isolantes não possuem todas as características simultaneamente. Portanto, a escolha do material deve ser de acordo com a finalidade operacional. O isolamento tem por finalidade reduzir as trocas térmicas, mantendo assim a parede interna com a temperatura desejável. Como a condutividade térmica é a taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão (BERGMAN et al., 2011), se um material tem baixa condutividade térmica, o mesmo tem dificuldade em conduzir calor.

² Pelo fato de calor ser energia térmica em trânsito, torna-se redundante falar em “fluxo de calor”, porém, neste caso, ao se escrever somente a palavra “calor” ficaria incompleta a frase.

Conforme Bergman et al. (2011), nas análises de problemas de transferência de calor, é necessário considerar várias propriedades da matéria, estas propriedades são geralmente referidas como propriedades *termofísicas* e incluem duas categorias distintas: *propriedades de transporte* e *propriedades termodinâmicas*. As propriedades de transporte incluem os coeficientes de difusão, como taxa de condutividade térmica κ (para a transferência de calor), e a viscosidade cinética ν (para transferência de momento). As propriedades termodinâmicas, por outro lado, pertencem ao estado de equilíbrio de um sistema. A densidade ρ , e calor específico à pressão constante c_p são duas propriedades que são usadas extensivamente em análises termodinâmicas.

Considerando as propriedades discutidas acima, montou-se a Tabela 1 com dados referentes aos materiais que podem fazer parte da parede de uma câmara frigorífica.

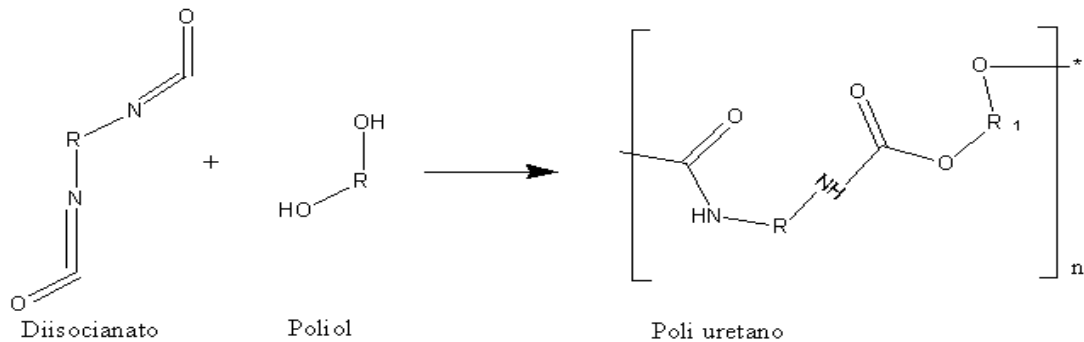
Tabela 1 - Materiais e características dos formadores da parede da câmara fria.

	Aço galvanizado	EPS	PUR	Concreto
Densidade ρ (kg/m^3)	7836	1050	40	2000
Calor específico c_p ($J/kg \cdot K$)	443	1200	1674	840
Condutividade térmica κ ($W/m \cdot K$)	48,9	0,157	0,029	1,4
Difusividade térmica α^2 (m^2/s) $\times(10^{-6})$	14,1	0,12	0,433	0,833

Fonte: Adaptação de Çengel, 2012.

Os materiais isolantes mais utilizados em câmaras frigoríficas são o poliestireno expandido (EPS) e o poliuretano (PUR). De acordo com Vilar (2005), citado por Sartori (2009) o PUR é obtido pela reação química entre dois componentes, o isocianato e o polioliol, através do processo de policondensação em massa, e tendo como catalisador uma amina terciária. Na Figura 2 é descrita a reação química do PUR. Suas principais características são: a baixa condutividade térmica, a resistência ao fogo, gelo e a umidade, e não possuem condições favoráveis aos microrganismos.

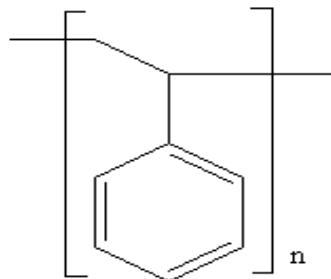
Figura 2 - Equação química para obtenção do PUR.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O EPS é um polímero de estireno que passou por um processo de polimerização de estireno em água, conforme mostra a estrutura molecular na Figura 3. Durante esse processo as partículas aumentam várias vezes em tamanho dando origem a uma espuma porosa de células fechadas. Dessa forma, o EPS é praticamente impermeável. Suas principais características são: a baixa condutividade térmica, leveza, fácil manuseio e resistência aos microrganismos.

Figura 3- Estrutura química do EPS.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3. CÂMARAS FRIAS

Câmaras frigoríficas (também chamadas de câmaras frias) são compartimentos fechados, cujo interior são mantidas condições termo-higrométricas (condições de temperatura e umidade controladas). São utilizadas no setor industrial como câmaras de resfriamento cuja finalidade é manter os produtos em temperaturas próximas de 0°C, como câmaras de congelados, para prolongar o período de estocagem dos produtos em temperaturas abaixo de -15°C, e câmaras de armazenamento com função de conservar alimentos perecíveis através de processamento por remoção do calor (FELLOWS, 2000).

Para manter as condições de temperatura no interior da câmara frigorífica controlada é necessário respeitar critérios no método de construção, nos equipamentos, e em como a câmara opera. Buscando reduzir os custos energéticos e financeiros, o primeiro aspecto a ser considerado é o planejamento operacional desejado para a instalação, e em seguida, a definição das soluções técnicas baseadas nas condições locais e fatores econômicos (CHAGAS, 2000).

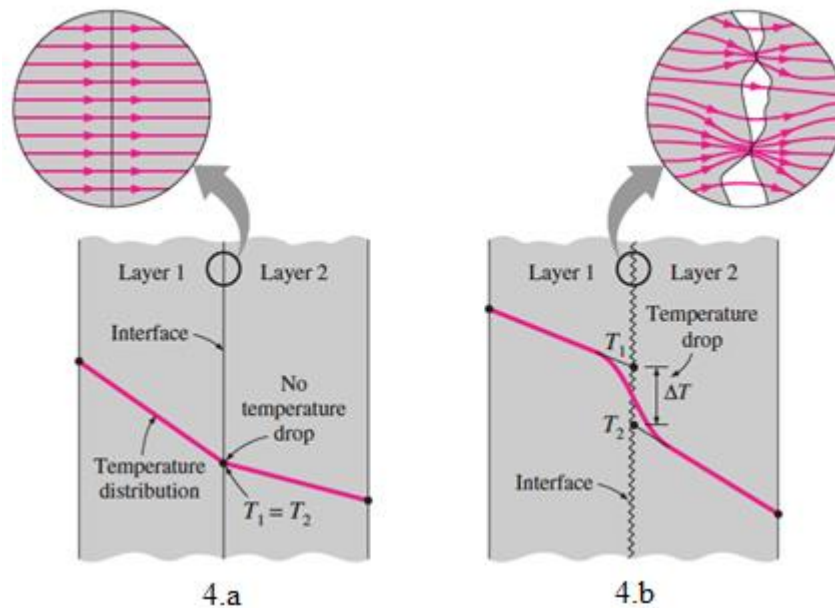
Basicamente, existem duas técnicas de construção de câmaras frias, as compostas por um painel frigorífico, cujo interior é preenchido com material isolante e revestimento de aço galvanizado, e as câmaras de alvenaria, na qual a parede é formada por concreto com núcleo de material isolante e o revestimento de chapas de aço galvanizadas. Essas paredes com diferentes configurações são denominadas de paredes compostas ou multicamadas. Portanto, devido ao fato destas, ao longo do seu comprimento e da sua altura, apresentarem a mesma composição, será considerado para esse estudo apenas a sua espessura.

2.4. CONTATO PERFEITO

As paredes multicamadas são constituídas por materiais que apresentam características distintas, o que torna necessário fazer algumas considerações quando se observa o comportamento do calor. Na Figura 4.b, nota-se que na interface dos materiais, as superfícies não são perfeitamente lisas, o que ocasiona pequenos espaços preenchidos por ar. Essa rugosidade faz com que o calor seja propagado por meio de condução (quando os materiais estão em contato) e por convecção (quando há espaços entre os materiais). Em contra partida, na Figura 4.a, observa-se que está sendo feita a consideração em que o calor se propaga somente por condução, ou seja, as superfícies dos materiais são perfeitamente lisas, indicando que o fluxo de energia térmica ocorre de parede 1 (Layer 1) para a parede 2 (Layer 2) somente por condução.

Em uma situação real, é esperado que, quando dois materiais estão em contato, estes apresentem mesma temperatura, uma vez que o calor é propagado por condução. Porém, quando observa-se paredes compostas por diferentes materiais, em que suas superfícies não são perfeitamente lisas (Figura 4.b), existe uma maior diferença de temperatura (de um material para outro), ocasionada pelos intervalos de ar.

Figura 4 – Propagação de calor por convecção e condução na interface da parede 1 e parede 2 (Layer 1 e layer 2) .



Fonte: ÇENGEL.

Será suposto neste trabalho que não haverá troca de calor por convecção, sendo toda transferência de calor na forma de condução, o que caracteriza a condição denominada *contato perfeito*. Para isso foi considerado que o calor propagado de um lado do material é o mesmo para o outro lado, diferenciando entre eles o coeficiente de condutividade, ou seja:

$$k_i \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(x, t)}{\partial x}, \quad \text{para } i = 1 \text{ ou } 2. \quad (08)$$

2.5. TRATAMENTO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO DO CALOR PARA UMA BARRA HOMOGÊNEA

Considerando que a espessura da parede de uma câmara fria é igual ao comprimento de uma barra, sendo uma das extremidades refrigerada (interior) e a outra extremidade em contato com o ambiente (exterior), o comportamento da temperatura no interior de uma barra homogênea é dado pela equação do calor³:

³ Neste caso está sendo considerado em apenas uma dimensão.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

cuja dedução está no apêndice A, sendo α^2 o coeficiente de difusividade térmica, por sua vez dado pela equação:

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (10)$$

Na equação (10), k é o coeficiente de condutividade térmica, ρ é a densidade e c_p é o calor específico do material.

Para o tratamento analítico da equação (9) é necessário estabelecer uma condição inicial, que em conjunto com a E.D.P. (9), constitui o chamado de Problema de Valor Inicial (P.V.I.):

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (11)$$

em que $f(x)$ é uma função dada que representa o perfil inicial de temperatura dentro da barra em $t = 0$ e L é o comprimento da barra. Considera-se que as extremidades possuem temperaturas fixas U_1 para $x = 0$ e U_2 para $x = L$. Sendo matematicamente representados pelas equações abaixo e que constituem em conjunto com a equação (9), um Problema de Valor de Contorno (P.V.C.):

$$u(0, t) = U_1, t \geq 0, \quad (12)$$

$$u(L, t) = U_2, t \geq 0. \quad (13)$$

O perfil da temperatura $u(x, t)$ pode ser representada pela soma de um estado estacionário $v(x)$ e um estado não-estacionário $\omega(x, t)$:

$$u(x, t) = v(x) + \omega(x, t), \quad (14)$$

substituindo na equação (9) e isolando as variáveis:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), \quad (15)$$

em que $v(x)$ e $\omega(x, t)$ satisfazem respectivamente:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

e

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (17)$$

juntamente com a condições de contorno das equações (12) e (13), encontram-se:

$$v(0) = U_1 \quad e \quad v(L) = U_2, \quad (18)$$

e

$$\omega(0, t) = \omega(L, t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (19)$$

$$\omega(x, 0) = f(x) - v(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (20)$$

Portanto, para resolver $v(x)$, usam-se as equações (16) e (18) e encontra-se:

$$v(x) = (U_2 - U_1) \frac{x}{L} + U_1. \quad (21)$$

Para a solução de $\omega(x, t)$ tem-se que as condições de contorno na equação (19) são homogêneas. Assumindo uma solução no formato de:

$$\omega(x, t) = X(x)T(t). \quad (22)$$

Substituindo a equação (22) na equação (9), o método de separação de variáveis leva a:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2 T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (23)$$

Com isso, é necessário igualar os dois lados da equação pela mesma constante, para que essa seja válida.

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2 T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda^2. \quad (24)$$

A partir das quais encontrou-se as equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (26)$$

A solução geral para a equação (25) é dado por:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x. \quad (27)$$

E para a equação (26):

$$T(t) = C e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}. \quad (28)$$

Em que A , B e C são constantes arbitrárias a determinar. Substituindo as equações (27) e (28) na equação (22), obtém-se:

$$\omega(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)] e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}. \quad (29)$$

Usando as condições de contorno [equações (12) e (13)] na equação (19):

$$\omega(0, t) = 0 = A e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}, \quad (30)$$

com isso, conclui-se que $A = 0$. Em seguida:

$$\omega(L, t) = 0 = B \operatorname{sen}(\lambda L) e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}. \quad (31)$$

Para $B \neq 0$, pois deseja-se obter soluções não-triviais, dessa forma deve-se considerar que:

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0. \quad (32)$$

Com isso, sabendo que a função seno é uma função periódica isso leva a valores de λL :

$$\lambda L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (33)$$

logo,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (34)$$

devido à soma de infinitos termos, tem-se:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (35)$$

Em que aplicando a condição de inicial, equação (20), obtém-se:

$$\omega(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (36)$$

Com isso, somando a parte estacionária $v(x)$ [equação (21)] com a parte não-estacionária $\omega(x, t)$, obtém-se:

$$u(x, t) = (U_2 - U_1) \frac{x}{L} + U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (37)$$

Os coeficientes B_n da equação (37) são encontrados a partir de:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x') - (U_2 - U_1) \frac{x'}{L} - U_1 \right] \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx'. \quad (38)$$

Portanto, a solução da equação (9) é dada pela equação (37), em que se soma a parte estacionária $v(x)$ com a parte não-estacionária $\omega(x, t)$, e os coeficientes da Série de Fourier. Nota-se que para tempos muito longos, o que matematicamente é tomado para $t \rightarrow \infty$, a solução da equação do calor será representada somente pela parte estacionária, isso porque a equação (37) se reduz a equação (21) (STEPHENSON, 1996; BOYCE E DIPRIMA, 2000).

2.6. MÉTODOS NUMÉRICOS

O procedimento analítico citado na seção anterior é amplamente utilizado para solucionar problemas associados à propagação do calor em barras homogêneas (BOYCE e DIPRIMA, 2000), embora torne-se inapropriado quando se trata de uma barra formada por mais de um material. Com isso, buscou-se outras abordagens que contemplassem o problema proposto, sendo uma delas o método numérico das diferenças finitas, dos quais utilizou-se o método explícito e o método implícito. Em que os métodos são baseados na discretização do domínio da função, além da substituição das derivadas na equação diferencial por aproximações, as quais envolvem valores numéricos da função (FRANCO, 2006).

2.6.1. Método explícito

O processo de discretização de uma derivada se dá a partir da expansão em série de Taylor

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} + \dots \quad (39)$$

Por meio da equação (39) pode-se encontrar uma aproximação em primeira ordem do operador derivada,

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx}, \quad (40)$$

podendo ser reescrita como:

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (41)$$

Da mesma forma, como foi escrita uma aproximação de primeira ordem usando um Δx adiante do ponto x da função ou, um Δx progressivo, pode-se também escrever um Δx retrógrado:

$$f(x - \Delta x) \cong f(x) - \Delta x \frac{df(x)}{dx}, \quad (42)$$

podendo ser reescrita como:

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (43)$$

Usando-se as equações (41) e (43) é possível escrever a aproximação centrada.

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (44)$$

Também pode-se encontrar a aproximação progressiva, para o operador derivada de segunda ordem:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad (45)$$

e a retrógrada,

$$f(x - \Delta x) \cong f(x) - \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (46)$$

Assim, as equações (45) e (46) podem ser reescritas como:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cong \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}. \quad (47)$$

Utilizando as aproximações acima na equação do calor [equação (9)], obtém-se:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}. \quad (48)$$

Na equação (48) pode-se perceber que foi utilizada uma aproximação progressiva para o tempo t e uma aproximação centrada para o espaço x . Rearranjando a equação (48) com a finalidade de isolar a temperatura que se deseja obter em um ponto no instante futuro, tem-se:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \omega [u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)], \quad (49)$$

em que ω é dado pela expressão:

$$\omega = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}, \quad (50)$$

chamado de número de Courant, uma quantidade adimensional, que, conforme Iserles (2008), deve apresentar valores menores ou igual a $\frac{1}{2}$ para garantir a convergência do método e um erro numérico pequeno. As discretizações do tempo e do espaço foram feitas de modo a permitir que isso ocorresse.

Para um tratamento numérico mais refinado é aconselhável parametrizar a barra, ou seja, ela passa a ter tamanho unitário, $\{(x, t): x \in [0, 1], t \geq 0\}$. Essa parametrização permite transformar uma barra real, independente do tamanho, em uma de tamanho unitário, na qual se pode realizar toda a análise, para posterior retorno ao cenário original.

Para o procedimento de discretização é particionado o intervalo $[0,1]$ em d subintervalos e o tempo em n subintervalos, dessa forma tem-se a malha retangular

$$\{(i\Delta x, n\Delta t) \mid i = 0, 1, 2, \dots, d + 1, n \geq 0\}, \quad (51)$$

sendo $\Delta x = 1/(d + 1)$. Logo, a aproximação $u(i\Delta x, n\Delta t)$ é denotada por u_i^n (em que n é um índice e não uma potência). Essa nova notação é empregada para estabelecer uma distinção entre o espaço e o tempo (ISERLES, 2008). Dessa forma pode-se reescrever a equação (49) como:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \omega(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \quad (52)$$

A equação (52), mostra que para obter uma temperatura no instante futuro $(n + 1)$ é necessário considerar pontos no instante n e nas posições $i - 1, i$ e $i + 1$.

2.6.2. Método implícito

O método implícito difere-se do explícito devido à escolha dos pontos a serem utilizados. Para esse método utiliza-se a equação (48), reescrevendo-a com acréscimo do índice superior direito.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \quad (53)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \left\{ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2(\Delta x^2)} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x^2)} \right\}. \quad (54)$$

Rearranjando a equação acima de forma que os termos com $n + 1$ e n sejam separados tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^2}{2(\Delta x^2)} u_{i+1}^{n+1} - \frac{\alpha^2}{2(\Delta x^2)} u_{i-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\alpha^2}{\Delta x^2} \right] u_i^{n+1} \\ = + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x^2)} u_{i+1}^n + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x^2)} u_{i-1}^n + \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\alpha^2}{\Delta x^2} \right] u_i^n, \end{aligned} \quad (55)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 a_i &= b_i = -\frac{\alpha^2}{2(\Delta x^2)}, \\
 d_i &= \frac{1}{\Delta t} - (a_i + b_i), \\
 e_i &= \frac{1}{\Delta t} + (a_i + b_i).
 \end{aligned} \tag{56}$$

Essa abordagem é conhecida como o método de Crank-Nicolson (ANDERSON, 1995), que também pode ser escrito pelo rearranjo da equação (55), e utilizando-se as definições da equação (56), obtém-se:

$$\begin{bmatrix}
 d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & b_{j-1} & d_{j-1} & a_{j-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_j & d_j & a_j \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{j+1} & d_{j+1}
 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix}
 u_1^{n+1} \\
 u_2^{n+1} \\
 u_3^{n+1} \\
 u_4^{n+1} \\
 \vdots \\
 u_{j-1}^{n+1} \\
 u_j^{n+1} \\
 u_{j+1}^{n+1}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 c_1^* \\
 c_2 \\
 c_3 \\
 c_4 \\
 \vdots \\
 c_{j-1} \\
 c_j \\
 c_{j+1}^*
 \end{bmatrix}, \tag{57}$$

com:

$$\begin{cases}
 c_i = -b_i u_{i-1}^n + e_i u_i^n - a_i u_{i+1}^n, & \text{para } i = 2 \text{ a } j \\
 c_1^* = -b_1 (u_{i-1}^n + u_0^{n+1}) + e_1 u_1^n - a_1 u_{i+1}^n, \\
 c_{j+1}^* = -b_{j+1} u_{i-1}^n + e_{j+1} u_j^n - a_{j+1} (u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n+1})
 \end{cases}, \tag{58}$$

em que c_1^* e c_{j+1}^* são diferenciadas das demais pela adição das condições de contorno. Assim, tem-se um sistema tri-diagonal de equações lineares a ser resolvido.

A matriz acima é quadrada, em que os elementos da diagonal são coeficiente definidos na equação (56) e u_β^{n+1} ($\beta = 1, \dots, j + 1$) são incógnitas a determinar. Para determiná-las é necessário aplicar as condições de contorno, além da manipulação adequada das equações (LEE, sem ano). A característica tri-diagonal da matriz garante a existência e unicidade da solução.

3 METODOLOGIA

A pesquisa iniciou-se com estudo da condução do calor para barras homogêneas em que os diferentes materiais foram colocados lado a lado com o intuito de formar uma única barra composta. Nesta abordagem utilizou-se o método de separação de variáveis (descrito na seção 2.5), que resultou na observação de uma descontinuidade na função da temperatura, localizada na interface dos materiais. Esse resultado foi apresentado no II Seminário de Pesquisa e Extensão (SEPE) da Universidade Federal da Fronteira Sul (GURTAT, 2012), tendo gerado, com desdobramentos, outras abordagens no sentido de minimizá-la, que culminaram com a aplicação dos métodos das diferenças finitas explícito e implícito.

3.1. MÉTODO EXPLÍCITO

Para a utilização do método explícito foi realizado um estudo nas literaturas de Ozisik (1993), Iserles (2008), Anderson (1995), que apresentaram o método numérico das diferenças finitas e os melhores valores para convergência do número de Courant (ω).

Primeiramente, considerou-se a formação da barra conforme descrito na Figura 5 com a finalidade de observar, nas interfaces dos materiais, a eficiência do método para a eliminação da descontinuidade da função temperatura. Em seguida, assumiu-se no P.V.C. condições de contorno que indicavam temperaturas fixas nas extremidades, a condição inicial dada por:

$$f(x) = \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right) + \frac{\text{sen} (2\pi x)}{2}, \quad (59)$$

e a condição de contato perfeito. Posteriormente, discretizou-se a barra de modo a formar uma malha retangular. Por fim, implementou-se um código numérico em linguagem computacional *FORTRAN 77* com os dados pertinentes ao problema.

Figura 5 – Barra composta por três materiais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2. MÉTODO IMPLÍCITO

De mesma forma, para o método implícito realizou-se um estudo nas literaturas citadas para o explícito (descrito na seção 3.1), além de Hojjati e Tari (2010). Nesta abordagem considerou-se a barra formada por apenas dois materiais (Figura 6). De forma análoga ao método explícito, a finalidade foi observar sua eficiência frente à eliminação da descontinuidade na função temperatura, presente na interface dos materiais.

Figura 6 – Barra composta por dois materiais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

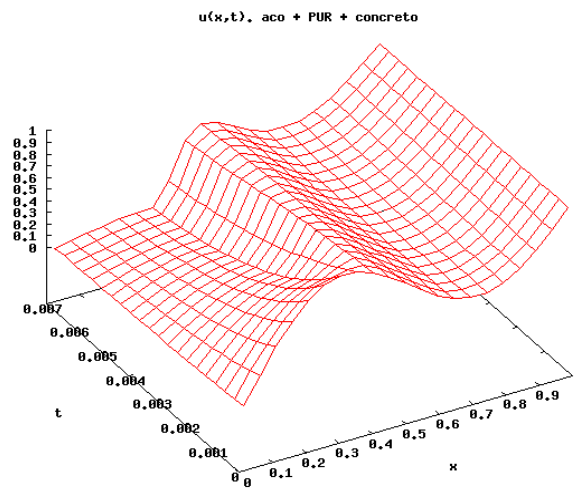
Assim como descrito no método explícito os procedimentos de discretização, P.V.C., P.V.I. e condição de contato perfeito foram mantidos. Para implementação do método implícito também utilizou-se a linguagem computacional *FORTRAN 77* com os dados pertinentes do problema.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. MÉTODO EXPLÍCITO

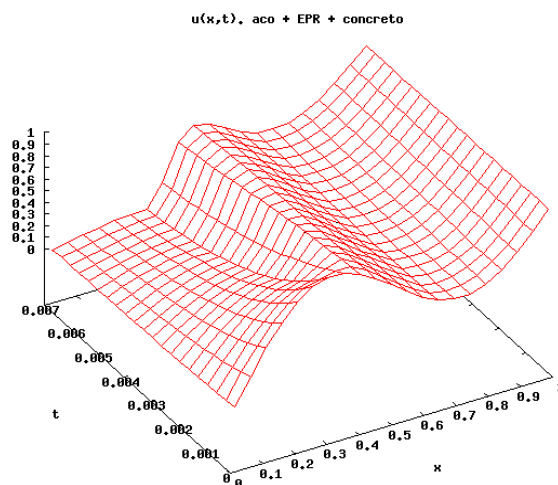
As simulações numéricas realizadas com base no método das diferenças finitas explícito tiveram como cenários duas barras, diferenciando em cada uma o isolante utilizado, ou seja, uma com PUR (Figura 7) e outra com EPS (Figura 8).

Figura 7 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra utilizando aço galvanizado, PUR e concreto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra utilizando aço galvanizado, EPS e concreto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme pode ser observado nas figuras anteriores, o método das diferenças finitas explícito não eliminou a descontinuidade na função temperatura localizada na interface dos materiais. Contudo, houve uma suavização desta quando comparada com Gurtat et al. (2012). Essa descontinuidade acontece na interface entre a chapa de aço galvanizado e o isolante térmico, devido ao aço galvanizado possuir um coeficiente de difusividade térmica maior em relação ao isolante e assim convergir à situação de equilíbrio termodinâmico mais rapidamente em comparação a este.

Na interface entre o isolante e o concreto, nas figuras anteriores, também ocorre a descontinuidade da função temperatura. Contudo, nestas não é possível observá-la devido às diferenças dos coeficientes de difusividade térmica, que é menor em relação à outra interface (aço galvanizado - isolante). Porém se utilizar uma escala mais apropriada, a descontinuidade é percebida.

Conforme proposto por Iserles (2008), considerou-se o valor do número de Courant (ω) igual a $\frac{1}{2}$ para o material com maior coeficiente de difusividade térmica (aço galvanizado), de modo que os demais materiais apresentaram valores de ω menores que $\frac{1}{2}$, garantindo a convergência da solução.

Devido ao fato do método explícito ter apenas suavizado a descontinuidade na função temperatura apresentada na interface dos materiais, conclui-se que este não é totalmente apropriado para resolver problemas de condução de calor aplicado a barra compostas, com isso, realizou-se simulações utilizando o método implícito.

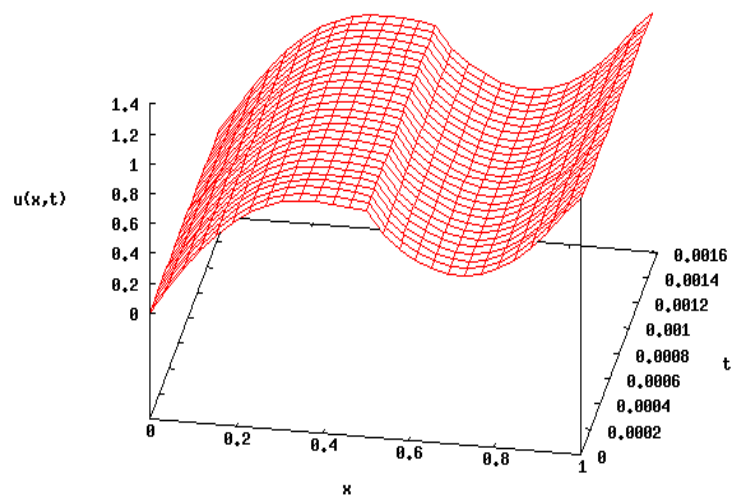
4.2. MÉTODO IMPLÍCITO

A Figura 9 (9.a e 9.b) apresenta o resultado obtido para uma barra composta por dois materiais, conforme descrito na seção 3.2. Na Figura 9.a pode-se observar a evolução temporal da temperatura ao longo da barra através de um gráfico de três dimensões, enquanto a Figura 9.b apresenta os pontos obtidos através da simulação, em que as diferentes cores representam os tempos de evolução. Nestas utilizou-se aço galvanizado e EPS. Optou-se em não considerar uma barra composta por três materiais devido ao objetivo do trabalho, que é analisar a descontinuidade da função temperatura na interface entre os materiais.

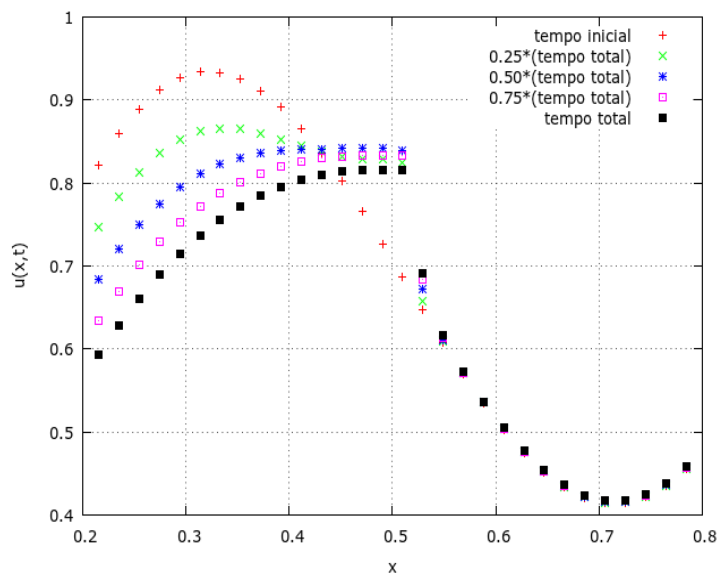
Nota-se na Figura 9 que o método das diferenças finitas implícito também apresenta a descontinuidade da função temperatura, semelhante aos métodos citados anteriormente, que

está localizada na região de interface entre os materiais. Essa descontinuidade da função temperatura é melhor observada na Figura 9.b, em que nota-se a presença de uma queda abrupta na interface dos materiais (ponto 0,5 no eixo horizontal). Da mesma forma, a descontinuidade visualizada nesta, deve-se ao fato da temperatura no aço galvanizado convergir para situação de equilíbrio termodinâmico mais rapidamente do que no isolante. Ao se observar a Tabela 1, nota-se que os coeficientes de difusividade térmica (α^2) do aço galvanizado e do EPS apresentam ordem de grandezas diferentes, em que o primeiro possui um α^2 aproximadamente 50 vezes maior em comparação ao do isolante EPS.

Figura 9 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra utilizando materiais com α^2 de ordens de grandeza diferentes.



(9.a)

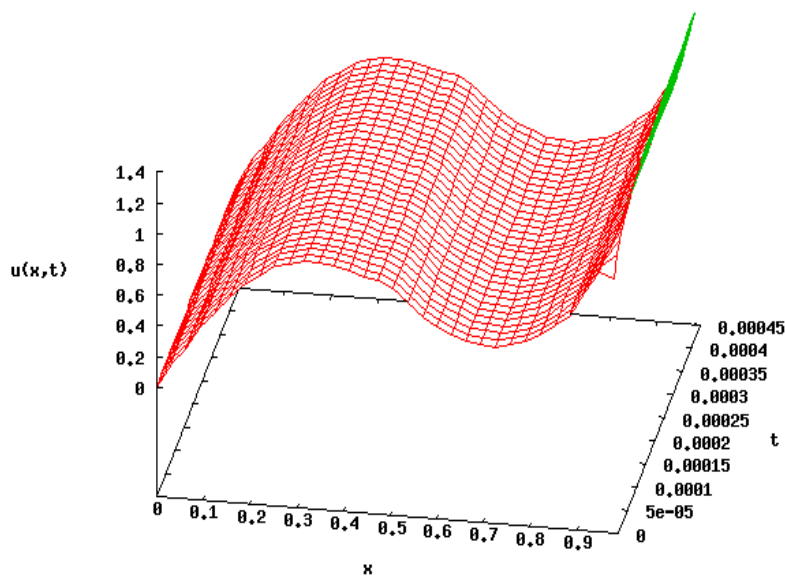


(9.b)

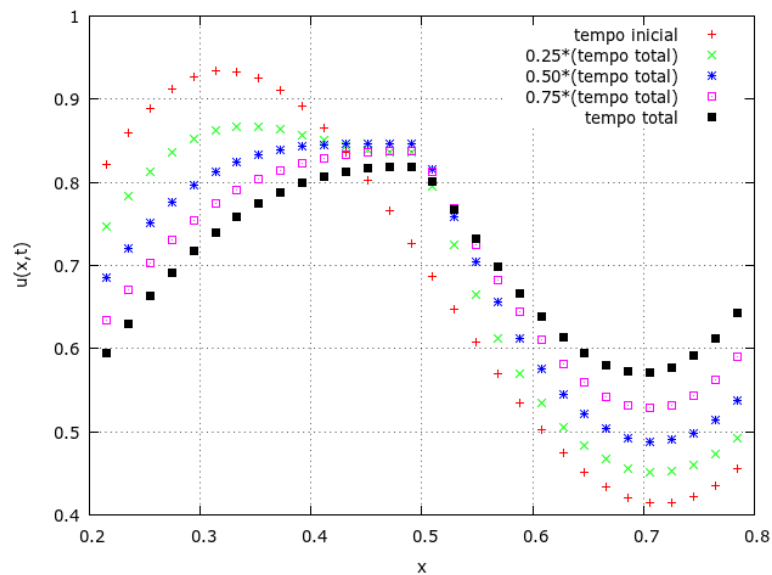
Fonte: Elaborado pelo autor.

No estudo realizado por Hojjati e Tari (2009), ao utilizar o método implícito, evidenciou-se uma solução com ausência de descontinuidade, isso porque os materiais utilizados pelos autores (aço, ferro e alumínio) possuem coeficientes de difusividade térmica de mesma ordem grandeza. Dessa forma, nas simulações deste trabalho foram usadas duas abordagens com coeficientes de difusividade térmica de: (i) ordens de grandezas diferentes (Figura 9); (ii) mesma ordem de grandeza (Figura 10).

Figura 10 – Evolução da temperatura no tempo ao longo da barra utilizando materiais com α^2 de mesma ordem de grandeza.



(10.a)



(10.b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 10 (10.a e 10.b) pode-se observar, conforme descrito por Hojjati e Tari (2010), que quando utiliza-se coeficientes de difusividade térmica de mesma ordem de

grandeza os resultados apresentam um perfil suave de evolução temporal da temperatura. Observa-se que a Figura 10.a, esta apresenta a evolução temporal da temperatura ao longo da barra, e a Figura 10.b ilustra, com diferentes cores, o tempo de evolução da temperatura na barra. Nesta última, não é observado a queda abrupta na interface dos materiais (ponto 0,5 no eixo horizontal) comparado com a abordagem em que se tem diferentes ordens para o coeficiente de difusividade térmica dos materiais.

A partir dos resultados apresentados, conclui-se que o método das diferenças finitas não se mostrou totalmente apropriado ao se tratar de barras compostas, uma vez que os materiais que compõem câmaras frias possuem coeficientes de difusividade térmica de ordens de grandeza diferentes. Assim, buscou-se novas bibliografias, em que Carslaw e Jaeger (1959) Chester et al. (1984), Chen e Lin (1990), Al-Hazmy (2005), Singh et al. (2007), utilizaram a transformada de Laplace para resolver problemas associados à propagação do calor em paredes de multicamadas.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou um *software* destinado ao cálculo das variações de temperatura ao longo de barras compostas por diversos materiais, em especial em suas interfaces (pontos de junção entre elementos distintos). Para isto, foi necessário, em vista dos modelos derivados do problema elementar da condução de calor (que contemplaram, em especial, o fenômeno nas interfaces), desenvolver rotinas em FORTRAN 77 para sua resolução numérica via método das diferenças finitas explícito e implícito, envolvendo a solução de sistemas de equações lineares, a construção da solução propriamente dita (a partir destes resultados) e a montagem de tabelas em arquivos de texto usadas na construção dos gráficos indicativos das respostas.

A aplicação deste *software* revelou, na execução do método de diferenças finitas explícito, que barras compostas por materiais de coeficientes de difusividade térmica (α^2) muito distintos em termos de ordem de grandeza apresentaram expressiva variação de temperatura em cada lado da interface, gerando uma descontinuidade na função temperatura. A aplicação posterior do método implícito minimizou esta descontinuidade apenas para materiais cujos α^2 possuíam mesma ordem de grandeza, não tendo-se revelado eficiente para α^2 de ordens de grandeza diferentes, segundo o que se poderia pensar a partir de estudos usados na composição deste trabalho.

Durante o desenvolvimento do *software*, foram devidamente contabilizadas questões a respeito da convergência dos métodos numéricos empregados para garantir que soluções seriam sempre alcançadas.

Tendo-se notado que em ambos os métodos a descontinuidade persistiu, efetuou-se uma busca por alternativas ao tratamento desta, chegando-se a métodos matemáticos mais sofisticados, tais como uso de transformadas de Laplace e funções de Green, que constituem uma direção futura para os assuntos tratados neste texto. O que se deseja é a suavização da evolução de temperatura em barras compostas por materiais de α^2 de ordens de grandeza diferentes.

Além disso, o próprio *software* pode passar por melhorias, como, por exemplo, tornar mais amigável a interação com o usuário em termos de entrada de dados e permitir a construção de cenários (diversas barras de diferentes materiais) para efeitos de comparação da distribuição de temperatura. Salienta-se que o estudo de uma linguagem de programação vai

além do que é proposto no curso de Engenharia de Alimentos, o que possibilitou significativo amadurecimento neste tema, bem como nos aspectos físicos e matemáticos envolvidos.

REFERÊNCIAS

- AL-HAZMY, M. M. Analysis of coupled natural convection- conduction effects on the heat transport through hollow building blocks. **Energy and Buildings**, Elsevier: Agosto, 2005.
- ANDERSON, J. D. **Computational Fluid Dynamics**, 1ª edição, McGraw-Hill: 1995.
- BERGMAN, T. L.; et al. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**, 6º Edição, Willey: 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares**, 9ª edição: pp.541-590, 2000.
- CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids** 2ª Edição, 1959.
- CHAGAS, J. A. C. **Projeto e construção de câmaras frigoríficas**. YORK Refrigeration. Joinville-SC, 2000.
- CHEN, H. T.; LIN. J. Y. Application of the hybrid method to transient heat conduction in one-dimensional composite layers. **Computers e structure**. Vol. 39. Nº 5, pp.451-458. Março, 1990.
- CHESTER, W.; et al. Transient conduction through a two-layer medium. **Int J. Heat Mass Transfer**. Vol 27, Nº 11, pp. 2167-2170. Janeiro, 1984.
- CLIVE, P. **Professional Programmer's Guide to Fortran77**. Disponível em:<
<http://www.star.le.ac.uk/~cgp/prof77.html>>. Acessado em 08/10/2012 às 11h40min.
- ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A.J. **Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática**. 4ª Edição. Porto Alegre: AMGH, 2012.
- ÇENGEL, Y. A. **Heat Transfer**. 2ª Edição.
- FRANCO, N. B. **Cálculo numérico: método das diferenças finitas**. Pearson Pretice Hall: São Paulo, 2006.
- FELLOWS, P. J. **Tecnologia do Processamento de Alimentos: Princípios e Prática**. 2ª edição, Porto Alegre: Artmed, 2006.
- FERRAZ, F. **Apostila de Refrigeração**. Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia. Santo Amaro, 2008.
- GAVA, A. J. **Princípios de Tecnologia de Alimentos**. Editora Nobel: 1ª edição, São Paulo, 1998.
- GURTAT, M.; WANZELLER, W. G.; DAGNONE, C. A.; CASTRO, G. **Dinâmica de Transmissão de Calor por Condução em Isolamento de Câmaras Frigoríficas**. Seminário de Pesquisa e Extensão, Universidade Federal da Fronteira Sul, 2012.

HOJJATI, M. H.;TARI, H. **On the solution of transient heat conduction of multi-layer slab and filtering temperature measurements, Multidiscipline Modeling in Materials and Structures.** Vol. 6, pp. 168-178, 2010.

ISERLES, A. **A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations**, 1ª Edição, Cambridge: 1996.

MARQUES, A.; et al. **Isolamentos.** Universidade de Fernando Pessoa. Cidade do Porto. Portugal, 2009/2010.

OZISIK, M. N. **Heat Conduction**, 2ª edição, Wiley: 1993.

SARTORI, A. P. **Desenvolvimento e caracterização de compósitos sanduíche para isolamento térmico.** 2009. 81 p. Universidade de Caxias do Sul. Caxias do Sul-RS, 2009.

SINGH, S.; et al. Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction. **International Journal of Thermal Sciences.** Elsevier, pp. 261-273. Março, 2007.

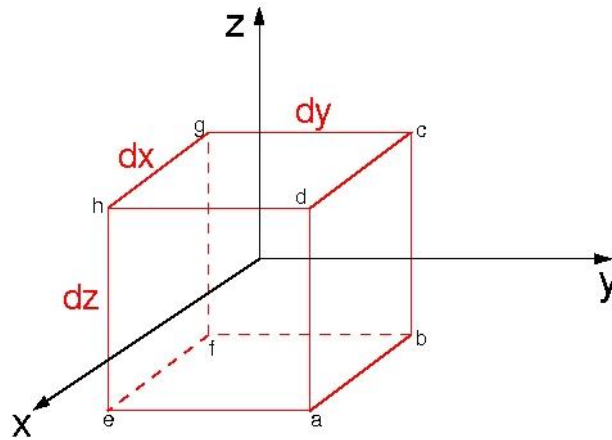
STEPHESON, G. **Partial Differential equation for scientists and engineers**, 1ª edição, pp. 28-61. World Scientific, 1996.

APÊNDICE A

Fluxo

Considerando um campo vetorial \vec{F} qualquer e um cubo de arestas $dx = dy = dz$, conforme a Figura (11-A),

Figura 11-A: Cubo de arestas de tamanho dx , dy e dz . A origem do sistema de coordenadas é fixo no centro do cubo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

com uma fonte geradora de energia térmica exatamente no centro do cubo, afirma-se que o fluxo ϕ pode ser escrito como:

$$\phi = \int_A \vec{F} \cdot \hat{n} dA, \quad (\text{A1})$$

em que \hat{n} é o vetor normal a superfície, e o campo vetorial \vec{F} é dado pela expressão:

$$\vec{F}(x, y, z) = a(x, y, z)\hat{i} + b(x, y, z)\hat{j} + c(x, y, z)\hat{k}, \quad (\text{A2})$$

na qual $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ e $c(x, y, z)$ são funções.

Tomando a Equação (6) e considerando uma distribuição de temperatura $U = u(x, t)$, com aplicação do limite em ambos os lados,

$$\lim_{L \rightarrow 0} q = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\kappa A \Delta u}{L}. \quad (\text{A3})$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$q = \kappa A \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (\text{A4})$$

Então,

$$q = \kappa A \frac{du}{dx}. \quad (\text{A5})$$

Logo,

$$q'' = \frac{q}{A} = \kappa \frac{du}{dx}, \quad (\text{A6})$$

em que o fluxo térmico q'' é a taxa de transferência de calor na direção x por unidade de área.

Fisicamente, sabe-se que o fluxo térmico é uma grandeza direcional. Logo, a direção do fluxo será sempre normal a uma superfície de temperatura constante, a qual é chamada de superfície isotérmica. Além disso, o fluxo térmico possui direção, sentido e módulo bem definidos, ou seja, é um vetor. Desse modo, pode-se escrever de forma mais geral:

$$\vec{q}'' = q''_x \hat{i} + q''_y \hat{j} + q''_z \hat{k} = \kappa \{ \partial_x \hat{i} + \partial_y \hat{j} + \partial_z \hat{k} \} u(x, y, z, t), \quad (\text{A7})$$

ou,

$$\vec{q}'' = -\kappa \vec{\nabla} u(x, y, z, t), \quad (\text{A8})$$

em que o sinal negativo foi acrescentado pela condição física, em que o fluxo térmico ocorre sempre no sentido do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura. Essa última equação é conhecida com a Lei de Fourier.

Teorema da Divergência

Ao analisar o fluxo na face $abcd$ do cubo da Figura (11-A), pode-se dizer que:

$$\int_A \vec{F}\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \hat{i} dy dz = \int_A a\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz, \quad (\text{A9})$$

usando a Série de Taylor, a qual tem uma fórmula mais geral dada por:

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (\text{A10})$$

sendo que na mesma foi utilizada somente o dois primeiros termos, portanto:

$$a\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \sim a(x, y, z) - (\partial_x a) \left[x - \left(x + \frac{dx}{2}\right) \right]. \quad (\text{A11})$$

Logo,

$$\int_A \vec{F}\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \hat{i} dy dz = \int_A \left\{ a(x, y, z) + \frac{dx}{2} \partial_x a \right\} dy dz, \quad (\text{A12})$$

e para o sentido contrário, ou seja, $-\hat{i}$:

$$\int_A \vec{F}\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) \hat{i} dy dz = - \int_A \left\{ a(x, y, z) - \frac{dx}{2} \partial_x a \right\} dy dz. \quad (\text{A13})$$

Somando os fluxo de mesma direção:

$$\phi_x = \int_A \left\{ a(x, y, z) + \frac{dx}{2} \partial_x a \right\} dy dz - \int_A \left\{ a(x, y, z) - \frac{dx}{2} \partial_x a \right\} dy dz. \quad (\text{A14})$$

Então:

$$\phi_x = \int_V \partial_x a dx dy dz. \quad (\text{A15})$$

Da mesma forma são obtidos ϕ_y e ϕ_z . Com isso, tem-se que:

$$\phi = \phi_x + \phi_y + \phi_z = \int_V \left\{ \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right\} dV. \quad (\text{A16})$$

De onde pode-se observar:

$$\phi = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (\text{A17})$$

Portanto, existe a igualdade entre as equações (A1) e (A17):

$$\phi = \int_A \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV. \quad (\text{A18})$$

A equação (A18) é conhecida como o teorema da divergência.

Equação do calor

Seja o objeto [cubo - conforme a Figura (11-A)] homogêneo, isotrópico, com uma fonte geradora de calor ao centro $g(r, t)$. Consequentemente a energia armazenada dentro do objeto vai depender do fluxo térmico e da energia geradora. Considerou-se a equação de balanço de energia para o volume do objeto, pois há conservação da energia (OZISIK, 1993):

$$[\textit{energia gerada}] + [\textit{energia que entra no volume}] = [\textit{energia armazenada}]. \quad (\text{A19})$$

A energia geradora do objeto pode ser dada pela integral abaixo:

$$E_g = \int_V g(r, t) dV. \quad (\text{A20})$$

Supôs que o objeto é sólido e não sofre mudança de fase, dessa forma desconsiderou-se os efeitos do calor latente, e considerou-se somente o calor sensível. O produto do calor específico à pressão constante c_p e da densidade ρ é chamado de capacidade calorífica volumétrica ρc_p , pois mede a capacidade de um material de armazenar energia térmica. Com isso a energia armazenada dentro do objeto é dada pela capacidade calorífica volumétrica em um determinado tempo. Dessa forma obtém-se:

$$E_a = \int_V \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (\text{A21})$$

Logo, substituindo as equações (A18), (A20) e (A21), em (19):

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV + \int_V g(r, t) dV, \quad (\text{A22})$$

rearranjando:

$$\int_V \left\{ \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - g(r, t) \right\} dV = 0. \quad (\text{A23})$$

Para que o valor da integral seja 0 (zero), o integrando deve ser 0 (zero), por isso:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - g(r, t) = 0. \quad (\text{A24})$$

Usando a equação (A8)

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-\kappa \vec{\nabla} u) - g(r, t) = 0, \quad (\text{A25})$$

e rearranjando e multiplicando os dois lados por $\frac{1}{\rho c_p}$, tem-se

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\kappa} g(r, t). \quad (\text{A26})$$

em que utilizou-se a equação (9).

Se $g(r, t) = 0$, ou seja, não há fonte de energia térmica no cubo,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (\text{A27})$$

Dessa forma, tem-se a equação do calor (9) para o caso tridimensional, obtida a partir da lei de Fourier e considerações acerca da conservação da energia.