UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
***CAMPUS* CHAPECÓ**
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: História e Aplicações

BILLY BERTRAND

CHAPECÓ
2019

BILLY BERTRAND

GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: História e Aplicações

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul.
Orientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

CHAPECÓ
2019

BILLY BERTRAND

GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: História e Aplicações

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul.

Orientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

Aprovado em: 26/09/2019

BANCA EXAMINADORA:

Rosane Rossato Binotto

Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto - UFFS

Prof. Dr. Vitor José Petry - UFFS

Marcon

Profa. Dra. Divane Marcon - UFFS

AGRADECIMENTOS

A elaboração e o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso só foi possível graças ao dom da vida recebida de um Ser Superior eterno que é Pai de tudo e também graças ao apoio e acompanhamento de diversas pessoas a quem são dirigidos os mais sinceros agradecimentos.

Meus pais biológicos Erold Bertrand e Santania Philosterne a quem devo amor, respeito e admiração. Meus familiares mais próximos com quem houve crescimento, aprendizagem, amadurecimento e gosto pela vida: Hector Junior Bertrand, Wilgain's Bertrand, Ricot Bertrand, Wilson Benoît, Marie-Claire Bertrand, Vanel Lénéus, Lelianne Bertrand, Saintecile Bertrand, Anna Lénéus, Erlane Cimeus, Saintania Philosterne, Marie-Kenia Rocher. Wadner Bertrand, Daschmy Dorcent, Vakerda Lénéus, Vakercoff Peterson Lénéus, Che Alnaartoï Bertrand, Elri Don Coe Bertrand, Clairena Dorcent, Josiane Dorcent, Cakia Bertrand, Bilbada C. Bertrand, Dotie C. Bertrand, Daphcaina Wiliana Benoît, Savli Laïna Benoît.

Uma gratidão especial a minha orientadora Professora Rosane Rossato Binotto que aceitou com entusiasmo o convite. Ela foi capaz de guiar-me durante este longo período e apesar de suas múltiplas ocupações institucionais e familiares, ela foi capaz de supervisionar-me na realização deste trabalho. Suas orientações foram decisivas.

Há também que agradecer a Universidade Federal da Fronteira Sul pela oportunidade de estudo, especialmente aos apoiadores do programa PROHAITI, o corpo docente e os colegas da turma do curso de Matemática que acompanharam meu avanço ao longo dos anos.

Aos nossos companheiros de caminho, amigos considerados como irmãos com quem vivenciamos todas as possíveis adversidades da vida durante estes cinco últimos anos, dedico este trabalho a eles: Bachelor Louis, Wedson Vilcent, Louicenson Chery, Robenson Milius, Bermane Limage, Damas Sérius.

Nossos sinceros reconhecimentos ao Senhor Elvis Roberto Giacomim e sua família, senhor Ari da Silva, senhora Laura Dalmolin da Silva, senhora Êuri Maria Invitti, senhora Rejane Terezinha Tamanho.

Meus agradecimentos profundos aos irmãos da Instituição Gnóstico Antropológico (IGA) de Chapecó.

E por fim, agradeço a todos àqueles que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

“A Geometria existe por toda a parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la e
alma para admirá-la.”

Johannes Kepler (1571-1630)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos por meio de pesquisa bibliográfica, um breve estudo das Geometrias Não-Euclidianas: geometria hiperbólica e geometria elíptica. Estas geometrias surgiram a partir das tentativas de se demonstrar o postulado das paralelas de Euclides como uma proposição. Vimos que a criação permitiu o início de um vasto campo de conhecimento e raciocínio englobando não somente a matemática, mas várias ciências que se beneficiaram das descobertas novas. Apresentamos também modelos de representação dessas geometrias a fim de explicitar o impacto significativo delas. Assim, buscamos mostrar aonde se encontram aplicações reais desses novos conhecimentos, por meio de vários exemplos. Os matemáticos, assim como todo os outros cientistas, sempre estão em estado de pesquisa e compreensão do mundo e do universo em geral, vimos que esta atitude pode levar resultados espantosamente incríveis e úteis para a humanidade. Assim, no fim deste trabalho, tentamos reforçar o interesse de estudar e aprofundar ainda mais os conhecimentos matemáticos, especialmente, a geometria, considerando a gama de resultados obtidos tanto para a Matemática quanto para outras ciências.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica, Postulado das Paralelas. Geometria elíptica.

ABSTRACT

This paper presents a brief study of non-Euclidean geometries: hyperbolic geometry and elliptical geometry. These geometries emerged from the attempts to demonstrate the postulated of Euclid's parallels as a proposition. We saw that the creation allowed the beginning of a vast field of knowledge and reasoning encompassing not only mathematics, but several sciences that benefited from new discoveries. We also present models of representation of these geometries in order to clarify their significant impact. Thus, we seek to show where real applications of these new knowledge are found, through several examples. Mathematicians, like all other scientists, are always in a state of research and understanding of the world and the universe in general, we have seen that this attitude can lead to amazingly amazing and useful results for mankind. Thus, at the end of this work, we try to reinforce the interest of studying and further deepening the mathematical knowledge, especially the geometry, considering the range of results obtained both for mathematics and for other sciences.

Keywords: Euclidean geometry, hyperbolic geometry, parallel postulated. Elliptical geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo das Geometrias Não-Euclidianas: hiperbólica e elíptica, nos aspectos mais usuais e aplicáveis. Começaremos este trabalho relatando episódios da história da matemática para compreender as razões da criação destas geometrias, sua implicação em outras ciências como física, informática e também da matemática em si mesmo.

Os precursores destas geometrias estudaram a geometria existente, na época, chamada de Geometria Euclidiana para depois introduzir ideias sobre a existência~~s~~ de outras geometrias com outras dimensões que escapavam do senso humano até então. Estas descobertas no ramo da geometria permitiram uma abrangência muito mais ampla da matemática e também em outras ciências e direcionaram cada vez mais o modernismo e a socialização do mundo.

1.1 Contextualização

De acordo com Eves (2012), na primeira metade do século XIX ocorreu um desenvolvimento matemático notável e revolucionário. Neste período houve a descoberta de outras geometrias autoconsistentes, diferente daquela usual de Euclides. Estas novas geometrias surgiram a partir das tentativas de provar o quinto postulado de Euclides ou axioma (postulado) das paralelas, postulado fundamental da Geometria Euclidiana.

Euclides formulou o famoso axioma das paralelas ou quinto postulado por: "Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então, as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos", (BARBOSA, 2012, p.122).

De acordo com Coutinho (2001), o matemático Playfair apresentou uma outra versão deste postulado, sendo um dos substitutivos mais conhecido: "Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada".

Ao longo deste trabalho, usaremos a sigla GNEs para abreviar o termo Geometrias Não-Euclidianas no intuito de facilitar o texto. O interesse de estudar estas geometrias é de mostrar que o universo em que vivemos é constituído não somente de um tipo de geometria conhecido por euclidiana que fornece definições e modo de uso dos conceitos mais básicos tais como: ponto, reta, plano, sólido, polígono, círculo etc.…, mas de outros tipos de geometrias que abordam temas como: curvaturas[1], formas esféricas, hiperbólicas e elípticas.

1 Curvatura: Número que mede a rapidez com que o traçado de uma curva se afasta do traçado da tangente à proximidade de um dos seus pontos. Mais explicações:https://images.math.cnrs.fr/Visualiser-la-courbure.html?lang=fr

Uma aplicação disso aparece na teoria da relatividade geral publicada por Albert Einstein em 1915, ela é um conjunto de hipóteses que mostra existência de áreas do espaço onde a geometria é muito fortemente curvada relacionando o espaço com o tempo. Portanto a "curvatura do espaço-tempo" é consequentemente não-euclidiana.

A terra é uma esfera (com exceção dos polos que são achatados). Se você quiser ir de um ponto para outro, o caminho mais curto é o que é chamado de caminho geodésico ou simplesmente geodésica. Durante séculos, marinheiros e astrônomos aplicaram a geometria de Riemann sem saber, e agora são os pilotos de avião que o fazem também.

Desse modo, o objetivo é destacar algumas aplicações das GNEs que possuem uma importância interessante para o avanço da humanidade em termo de estrutura e das formas dos objetos e lugares do universo.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo das GNEs especificamente, a geometria hiperbólica e a geometria elíptica, por meio de um resgate histórico, elencando as contribuições destas para o desenvolvimento da Matemática ao longo dos anos, bem como citando aplicações delas em outras áreas do conhecimento.

1.2.2 Específicos

Em relação aos objetivos específicos elencamos os seguintes:

- Relatar episódios da origem e história das GNEs.
- Definir as Geometrias Não-Euclidianas.
- Relembrar os principais atores fundadores destas geometrias e as razões.
- Enumerar algumas implicações das GNEs no avanço da matemática e de outras ciências.
- Reforçar o interesse dos estudos desses conhecimentos no ensino superior.

1.3 Justificativa

A geometria é a parte da matemática que estuda as figuras do plano e do espaço. Desde o final do século XVIII, ela também tem estudado figuras pertencentes a outros tipos de espaços, como por exemplo, as Geometrias Não-Euclidianas.

Levando em consideração a diversidade de formas, o interesse no estudo das GNEs surgiu pela importância das descobertas feitas pelos matemáticos neste tema; o vasto campo de aplicações destas geometrias e considerando também que não há disciplina no currículo do curso de licenciatura em Matemática, na Universidade Federal da Fronteira Sul, UFFS, sobre as GNEs; aconteceu a escolha do tema a fim de enriquecer o conhecimento sobre o assunto.

Como estudantes de um curso de graduação, estamos sempre num processo de pesquisas, buscando respostas sobre tudo o que nos intrigam ou que escapa nosso entendimento. E veremos que as novas descobertas sempre abrem horizontes espantosos de conhecimento. A existência das GNEs reforça os campos de modelagens e a demonstração dos trabalhos científicos.

1.4 Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido por meio de pesquisa bibliográfica em livros, artigos e outras fontes documentais selecionadas de acordo com as especificidades além da construção de figuras utilizando o Software GeoGebra. A maior parte dos dados do trabalho foi extraída da internet, em diversos sites tanto do Brasil quanto do exterior devidamente verificados. Este fato é ~~a~~ consequência da falta de materiais bibliográficos, sobre o assunto, na biblioteca da universidade.

Os principais autores escolhidos para embasar este trabalho teoricamente são: Eves (2004), Boyer (2012), Melzback (2012) e Barbosa (2012).

Este trabalho possui 5 capítulos, sendo que no capítulo 1 está a Introdução, no capítulo 2 apresentaremos de modo uma breve a história da Geometria Euclidiana e seus fundamentos. No capítulo 3 apresentaremos uma breve história e os principais resultados das Geometrias Não-Euclidianas: geometria hiperbólica e geometria elíptica. No capítulo 4 apresentaremos algumas aplicações das Geometrias Não-Euclidianas. Finalizamos com o capítulo 5 sobre as conclusões deste trabalho.

2. GEOMETRIA EUCLIDIANA

Antes de estudarmos as Geometrias não-Euclidianas: geometria hiperbólica e geometria elíptica vamos revisar os principais fundamentos da Geometria Euclidiana. Também vamos apresentar um pouco da história do grande matemático responsável pela construção da geometria euclidiana, o matemático Euclides.

2.1 Breve História de Euclides

Segundo Eves (2004), pouco se sabe sobre a vida de Euclides, um matemático que originalmente teorizou a geometria, chamado Pai da Geometria. Euclides de Alexandria nasceu provavelmente por volta do ano 300 A.C., em pleno florescimento da cultura helenística, quando Alexandria, no Egito, era o centro do saber da época. Muito antes dele, a geometria já era assunto no Egito. Era usada para medir terrenos e projetar pirâmides. Tão famosa era a geometria egípcia, que matemáticos gregos como Tales de Mileto e Pitágoras, iam ao Egito para ver o que havia de novo em matéria de linhas e ângulos. Embora sejam escassos os dados sobre a vida de Euclides, sabe-se que ele fundou a Escola Real de Alexandria, no reinado de Ptolomeu I (306-283 A.C.).

Euclides recolheu todas as obras de Tales, Pitágoras, Platão e dos gregos e egípcios que o precederam. Sua contribuição não consistiu na solução de novos problemas de geometria, mas na ordenação de todos os métodos conhecidos, formando um sistema que permitia combinar todos os fatos conhecidos para descobrir e provar novas ideias. Partindo de definições simples, chamadas axiomas ou postulados[2], combinou-as Euclides em afirmações chamadas proposições ou teoremas, que se provam por meio da Lógica. Ele escreveu o livro Os Elementos, por volta de 300 A.C. e seus múltiplos discípulos foram responsáveis por disseminar as teorias apresentadas nesta obra fundadora da geometria.

A obra Os Elementos é um tratado matemático consistindo de treze livros e mais de quatrocentas proposições matemáticas, demonstradas com a ajuda dos axiomas que formam a base da Geometria Euclidiana. Ele engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas destas proposições. Os treze livros contemplam a Geometria Euclidiana e a versão grega antiga da Teoria dos Números elementares. Parece que Euclides

2Axioma ou Postulado: sentença que não é provada ou demonstrada, e por isso se torna óbvia ou se torna um consenso inicial para a aceitação de uma determinada teoria. O postulado não é necessariamente uma verdade muito clara, é uma expressão formal usada para deduzir algo, a fim de obter um resultado mais facilmente, através de um conjunto de sentenças. O postulado é uma proposição que, apesar de não ser evidente, é considerada verdadeira sem discussão. (FUTURA SCIENCE, 2019).

pretendia reunir três grandes descobertas do seu tempo: a teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão.

De acordo com Dilva (2019), na obra Os Elementos, Euclides reuniu num sistema coerente e compreensível, tudo o que se sabia sobre matemática em seu tempo. Todos os fragmentos surgidos da necessidade prática do uso da aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida. A obra Os Elementos é considerada uma das obras mais lidas e mais bem-sucedida e influente já escrita, sendo um dos primeiros trabalhos de matemática e ser impresso depois da invenção da imprensa móvel e perde somente para a Bíblia em número de edições publicadas, com o número batendo nas mil edições. Euclides também é o autor de outras coleções, tais como “Dados”, “Da divisão de figuras”, “Cônico”. Mas é com a obra Os Elementos que ele se torna um matemático proeminente.

Figura 1: Provável foto de Euclides.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides

2.2 Fundamentos da Geometria Euclidiana

A Geometria Euclidiana fica sistematizada com a obra, Os Elementos de Euclides, que é a soma do conhecimento geométrico do tempo e uma tentativa de formalizar esse conhecimento.

De acordo com Barbosa (2012), Euclides baseou a Geometria Euclidiana em dez (10) axiomas divididos e dois grupos: cinco classificados como noções comuns e os outros cinco classificados como postulados. As figuras geométricas elementares desta geometria são pontos, retas, planos e o espaço.

As noções comuns são:

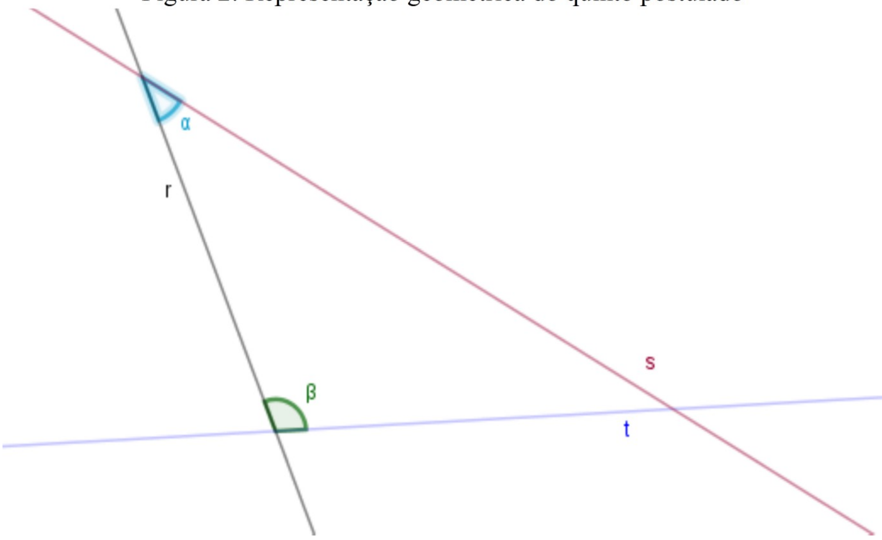
1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

E os Postulados são:

1. Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos distintos.
2. Pode-se continuar qualquer segmento de reta indefinidamente de maneira a obter uma reta.
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. É verdade que, se uma reta **r** ao cortar duas outras **s e t**, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

O quinto postulado é conhecido como Postulado das paralelas de Euclides. (Fig. 2).

Figura 2: Representação geométrica do quinto postulado



Fonte: Os autores.

A soma que está sendo discutida aqui é $\alpha + \beta < 180^\circ$, conforme Fig. 2.

Dos muitos substitutivos encontrados para o postulado das paralelas de Euclides, o mais comumente usado é aquele que se tornou conhecido nos tempos modernos devido ao matemático e físico escocês John Playfair[3]: “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta.”

Figura 3: John Playfair

Fonte: https://www.britannica.com/biography/John-Playfair

Em Matemática, devemos também a John Playfair uma tradução da obra Os Elementos de Euclides em 1795.

Ainda de acordo com Barbosa (2012), desde a publicação destes postulados, particularmente o quinto postulado, tornou-se alvo de críticas pelos matemáticos por ser diferente dos outros, inclusive em tamanho

E mais, seu uso tardio na geometria, após tantas proposições serem provadas sem seu auxílio, levantou suspeitas de que ele seria uma proposição que Euclides não conseguiu provar. Neste sentido foram feitas inúmeras tentativas de tentar provar este postulado, as quais destacaremos na próxima seção.

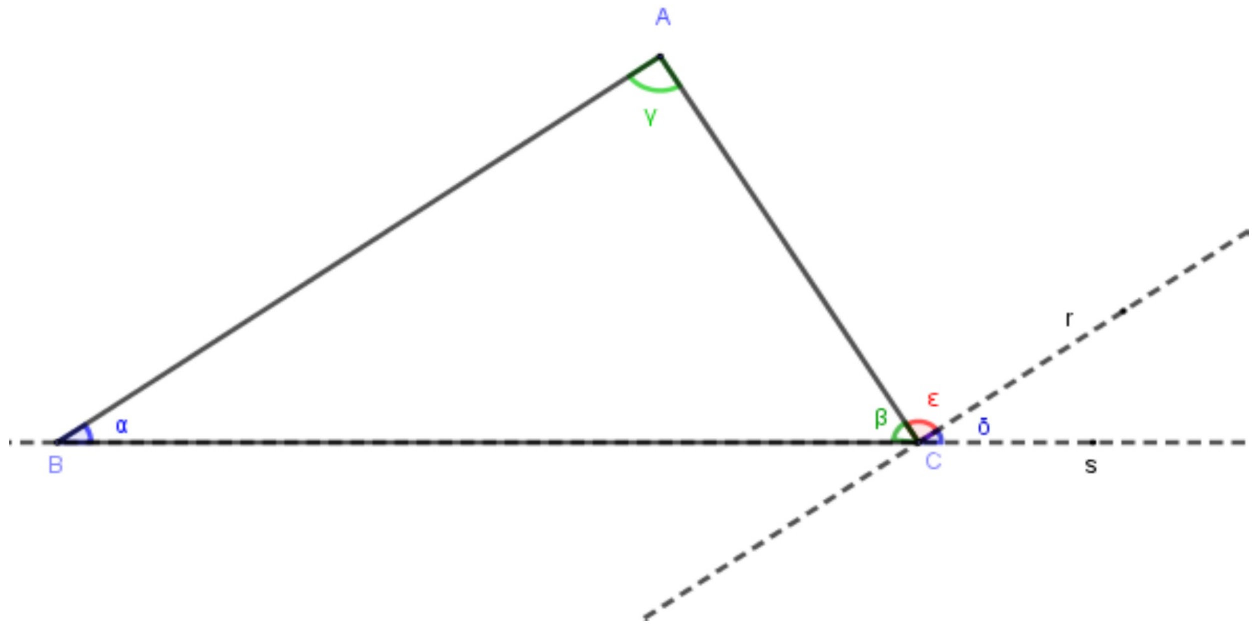
Gostaríamos de destacar que são várias as proposições e os teoremas que utilizam o quinto postulado ou consequências dele para a prova. Em particular, apresentamos um deles que é o Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Teorema: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Euclides demonstrou este resultado em Os Elementos (proposição I-32) da seguinte maneira: Dado um triângulo ABC de lados AB, BC e AC. Traçar pelo ponto C uma reta r paralela ao segmento de reta AB. Considerar a reta que passa por B e C. Sendo r e AB paralelos, cortados pelo segmento transversal AC e pela reta transversal s, eles formam, respectivamente, ângulos alternos

3John Playfair (1748-1819) geólogo e matemático que estudou na Universidade de Saint Andrews e, em seguida, em Edimburgo, onde foi nomeado professor em 1785. Ele estudou as geleiras e as origens da crosta terrestre, propondo com seu colega e amigo James Hutton (1726-1797) a teoria do ciclo geológico. Fonte: Britannica (2019) internos iguais, conforme a Fig. 4. Por outro lado, a soma dos três ângulos no vértice C é o ângulo raso. Assim, a soma dos ângulos α, β e γ é 180° (ou π radianos). A soma dos ângulos internos do triângulo é 180°.

Figura 4: Soma dos ângulos de um triângulo



Fonte: Os autores.

A concepção da geometria está intimamente ligada à visão do espaço físico, ambiente no sentido clássico do termo. A geometria euclidiana lida com o plano e o espaço. Conforme já observamos os objetos considerados nesta geometria são pontos, linhas ou retas, semirretas e suas propriedades de incidência (a régua), bem como os círculos (o compasso). As principais questões são o estudo de figuras e medidas.

A geometria euclidiana tem muitas aplicações. O renascimento usa as técnicas dos elementos extensivamente. Arquitetura, pintura através da perspectiva, é preenchido com exemplos desta natureza. A arte de entrelaçamento de Leonardo da Vinci (1452-1519) é outro caso de uso. Estas matemáticas também servem para medida, tanto para os topógrafos como para um propósito científico. O teorema de Thales permitiu que os Erastóstenes (276 – 194 A.C.) medisse a circunferência da terra. Esta técnica, chamada triangulação, também permite que os marinheiros saibam sua posição. A geometria euclidiana é aquela que comumente usamos e estudamos em sala de aula.

3. AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

De acordo com Boyer (2012), foi somente na primeira metade do século XIX que os matemáticos chegaram à conclusão de que o quinto postulado de Euclides não era demonstrável a partir dos outros quatro. Antes disso foram realizadas várias tentativas de demonstração, do postulado das paralelas de Euclides, uma vez que os matemáticos suspeitavam se tratar de uma proposição e não de um postulado. Isto ocorreu com a descoberta das chamadas Geometrias não-Euclidianas em que o quinto postulado de Euclides é substituído por uma outra afirmação de abordagem diferente no que se refere a quantidade de paralelas a uma reta dada.

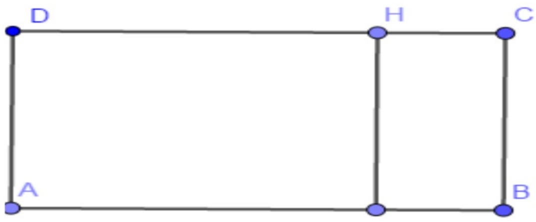
3.1 O postulado das paralelas e suas tentativas de prova

As tentativas para provar este postulado ocuparam os geômetras por mais de 2000 anos e culminaram em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da matemática moderna. Foram dadas muitas demonstrações do postulado, mas, cedo ou tarde, mostrou-se que cada uma baseava-se numa suposição tácita equivalente ao mesmo postulado. Entre os nomes famosos que buscaram uma prova para este postulado estão: Próclus (485-410 A.C); John Wallis (1616-1703); Gerolamo Sacherri (1667-1733); John H. Lambert (1728-1777); Adrien M. Legendre (1752-1833); e Carl F. Gauss (1777-1855).

A priori, todos aqueles interessados seriamente em matemática até o século XVII tentaram eventualmente uma demonstração. Rocha (2007) apresenta, na sua dissertação de mestrado, uma tabela das principais propostas de substituição do quinto postulado de Euclides, a qual apresentamos aqui na tabela 1, com algumas modificações:

TABELA 1 - Proposições substitutivas apresentadas na tentativa de provar o quinto postulado das paralelas de Euclides.

	Substitutivo	Matemáticos
01	Retas paralelas são equidistantes.	Poseidonios, séc. I A.C
02	A totalidade dos pontos equidistantes a uma reta dada, por um mesmo lado dessa reta, constitui uma linha reta.	Cristóvão Clavius, 1574

03	Em todo $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ quadrilátero ABCD com dois lados congruentes () e perpendiculares a um terceiro lado ($\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{BC} \perp \overline{AB}$) há ao menos um ponto (H) pertencente ao quarto lado $\overline{DC}$, $H \in \overline{DC}$ tal que a perpendicular por H a $\overline{AB}$ seja congruentes aos dois lados congruentes entre si.  	Giordano Vitale, 1680
04	A distância entre duas retas infinitas paralelas pode variar, mas permanece sempre menor que uma certa distância fixada.	Proclus, séc. V
05	Dada duas retas paralelas, uma terceira reta que encontre uma encontrará, também a outra.	Proclus, séc V
06	Por um ponto não pertencente a uma reta dada, não é possível traçar mais de uma paralela à reta dada.	John Playfair, 1795
08	Retas que não são equidistantes convergem numa direção e divergem na outra.	Pietro Antônio Cataldi, 1603
09	Numa reta finita dada é sempre possível construir um triângulo semelhante a um triângulo dado.	John Wallis, 1663; Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot, 1803; Adrien-Marie Legendre, 1824
10	Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.	Gerolamo Saccheri, 1733
12	A soma dos ângulos de todo triângulo é 180º	Euclides, Gerolamo Saccheri, 1733; Adrien-Marie Legendre, início do séc. XIX
13	É possível construir um triângulo cuja área seja maior que qualquer área dada.	Karl Friedrich Gauss, 1799
14	Dados três pontos não pertencentes a uma mesma reta, é sempre possível traçar um círculo que passe por eles.	Adrien-Marie Legendre, Farkas Bolyai, início séc. XIX

Fonte: https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/GH/H_4.htm.

Após várias tentativas de demonstrações deste postulado, sem grande sucesso, os matemáticos passaram a suspeitar que não fosse possível transformar o postulado em teorema.

Se o quinto postulado ou postulado das paralelas não é uma consequência dos outros quatro postulados da geometria euclidiana, como seria possível demonstrá-lo? A resposta era simples: criar uma geometria ou mais de uma, num universo, onde os quatro primeiros postulados são satisfeitos, e o quinto, não. Criando tal universo, foi mostrado que este último não é uma consequência lógica dos outros. Assim, essa nova geometria, diferente da geometria euclidiana, é dita não euclidiana. Foi o que fez Nikolai Ivanovich Lobachevsky, matemático russo, cujo artigo foi publicado em 1835 cujo título do artigo é ***"Os Novos Elementos daGeometria ."***

3.2 A descoberta das Novas Geometrias

Segundo a história geral da matemática, na primeira metade do século dezenove, os matemáticos chegaram a conclusão que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Esta descoberta está associada a três matemáticos que obtiveram independentemente os mesmos resultados: o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e o húngaro Johann Bolyai (1802-1860). Eles descobriram que se pode obter uma nova teoria matemática perfeitamente consistente, começando com a negaçãode uma das visões do postulado das paralelas de Euclides.

As diferentes geometrias não-euclidianas derivam do desejo de demonstrar o quinto postulado (o postulado, depois que os outros quatro foram declarados axiomas) que parecia insatisfatório porque era muito complexo, e talvez redundante.

Durante vários séculos, a geometria euclidiana foi usada sem questionar sua validade. Era mesmo longo, considerado como o arquétipo do raciocínio lógico-dedutivo. Ele tinha a vantagem de definir as propriedades intuitivas de objetos geométricos em uma construção matemática rigorosa.

As tentativas de prova deste postulado ajudaram a estabelecer que o postulado das paralelas é realmente improvável e que não é uma consequência dos outros axiomas do sistema: isto é comprovado pelo fato de que somos conduzidos a nenhuma contradição lógica ao criar um espaço geométrico onde os outros axiomas são mantidos.

Daí em diante a preocupação com a fundamentação em bases sólidas dominou a pesquisa matemática sobre o assunto. A descoberta das GNEs foi a solução final secular do problema do postulado das paralelas, e permitindo a ruptura com o hábito tradicional e oferecendo a liberdade de pensamento para a matemática.

3.3 O que são as Geometrias Não-Euclidianas?

Na Matemática, nomeamos de Geometrias não-Euclidianas uma teoria geométrica que recorre a todos os axiomas e os postulados enunciados por Euclides em Os Elementos, exceto o quinto postulado chamado de postulado das paralelas. Mike Askew e Sheila Ebbutt (2012), em seu artigo publicado no site *FUTURA SCIENCE*, intitulado "*La géometrie non euclidienne"* explicam que, os geômetras, uma vez que perceberam que a terra não era plana, mas esférica, muitos "fatos" da geometria euclidiana que pareciam óbvio tornaram-se problemático e abriram o caminho para geometrias não-euclidianas.

Nesta parte do texto, apresentaremos apenas algumas definições tirados dos livros de história da matemática, mas focalizaremos mais sobre duas delas a saber hiperbólica e elíptica.

3.3.1 A Geometria Hiperbólica

A história da geometria hiperbólica (Carlos 2016) parece começar no início do século XVIII com o trabalho do matemático italiano Giovanni Girolamo Saccheri, que procurou demonstrar no trabalho de sua vida: *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides sem erro), que os postulados de Euclides foram coerentes e necessários para definir a geometria euclidiana. Ele procurou, em particular, por uma demonstração pelo absurdo, para obter contradições, assumindo falso o quinto postulado de Euclides sobre os paralelos. Falhou nessa tentativa, mas obteve por outro lado, uma grande quantidade de teoremas bastante coerentes entre eles, que agora pertencem à geometria hiperbólica. Mas ele não percebeu que tinha diante de seus olhos uma nova geometria, e considerou seu trabalho e sua vida como um fracasso.

Segundo Kleber (2013), foi quase um século depois, o trabalho de Carl Friedrich Gauss, que geralmente é reconhecido como o verdadeiro ponto de partida da geometria hiperbólica, embora estes nunca foram publicados em sua vida. Ele formulou em suas anotações uma teoria estruturada, e parece que ele estava totalmente consciente de que esta geometria tinha um estatuto matemático equivalente ao da geometria euclidiana. Ele mesmo teria tentado medir, por experimentos geodésicos, se a geometria hiperbólica não era em grande escala, a geometria real do universo.

Durante o século XIX, a geometria hiperbólica foi redescoberta e extensivamente explorada por Nikolai Lobachevsky em 1830 e de forma independente por János Bolyai em 1832.

O Instituto *Henri Poincaré*[4] e *Images des Mathématiques* se juntaram na reedição da coleção *El mundo es matemático*[5], publicado pela RBA.

A geometria hiperbólica (chamada de geometria de Lobachevsky) é uma geometria não-euclidiana que satisfaz os quatro primeiros postulados da geometria de Euclides, porém o postulado das paralelas é recusado e substituído por outro:

Postulado das paralelas para a Geometria Hiperbólica: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.

Em 23 de fevereiro de 1826, quando ele era professor na Universidade de Kazan, Nikolai Lobachevsky impressionou a comunidade científica com sua palestra sobre a teoria das Paralelas. Os primeiros resultados da aplicação de suas propostas foram publicados em 1820 na revista da Universidade de Kazan. Em 1835, todo o seu trabalho foi publicado no título "Os Novos Elementos de Geometria", em que ele afirmou:

> É bem sabido que na geometria, a teoria das retas paralelas permaneceu incompleta até hoje. Os esforços inúteis, previstos para 2000 anos desde Euclides levaram-me a duvidar de que os conceitos não incluem a verdade que procuramos provar, mas que, como com outras leis físicas, eles só podem ser verificados experimentalmente, em observações astronómicas, por exemplo. Finalmente, convencido da validade da minha conjetura e Considerando que este problema difícil é completamente resolvido, expliquei o meu raciocínio em 1826. (JOAN, 2013. Tradução dos autores) .

Nesta geometria, uma reta é sempre definida como a linha de caminho mais curto unindo dois pontos em uma superfície. Como consequência, na geometria hiperbólica, o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, na versão euclidiana, não é mais válido e a soma dos ângulos internos[6] de um triângulo não é mais igual a 180°, ela é menor do que 180°. Para uma representação do triângulo hiperbólico podemos ver a Fig. 6.

---

4 Instituto Henri Poincaré: O Instituto Henri-Poincaré (IHP) é um Instituto de pesquisa matemático da Universidade de Sorbonne localizado em Paris.

5 El mundo es matemático: tratado de diversos assuntos de matemática. Autor: Villani Cédric. Editora: RBA France Paris, 2013.

6Triângulo hiperbólico: Uma demonstração da soma dos ângulos se encontra na tese de Inedio Arcari. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/N_ArcariInedio.pdf

No artigo “*Calculer dans un monde hyperbolique?”*Delahaye[7] (2007) apresentou algumas outras modificações geométricas no mundo hiperbólico, tais como: não existem retângulos, a soma dos ângulos de um quadrilátero é estritamente inferior a 2π radianos; uma sequência infinita de polígonos regulares do mesmo ponto, um tipo de polígono com um número infinito de lados de comprimentos iguais e fazer ângulos iguais entre eles. Seu papel, em alguns métodos de cálculo hiperbólico, está ligado à propriedade de ter um número infinito de vizinhos idênticos, que eles próprios têm um número infinito de, tudo o que permite organizar redes muito fortes.

Figura 5: Nikolai Ivanovich Lobachevsky.

Fonte: JOAN (2013).

3.3.1.1 Modelos de Representação da Geometria Hiperbólica

O estudo do plano hiperbólico requer a análise de vários modelos de representação. Na sequência apresentaremos modelos cuidadosamente escolhidos devido às fontes de dados. Importante observar como são representados pontos e retas nestes modelos, o equivalente ao postulado das paralelas nesta geometria, bem como triângulos.

Iniciaremos apresentando a pseudoesfera de Beltrami e na sequência definiremos hiperboloides, o disco de Poincaré e o semiplano de Poincaré.

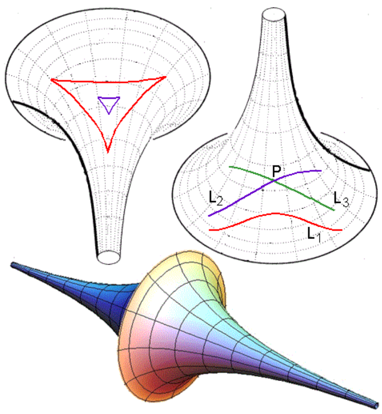
3.3.1.2 A Pseudoesfera de Beltrami

7Jean-Paul Delahaye: Professor emérito de ciência da computação da Universidade de ciência e tecnologia de Lille (França) e pesquisador do centro de pesquisa em ciência da computação. Fonte: Interstives.info.

Em 1868, o matemático italiano o Eugênio Beltrami (1835-1900), foi o primeiro a apresentar um modelo para Geometria Hiperbólica que era contido num espaço de 3 dimensões, conhecido como Pseudoesfera. Este modelo é uma superfície de curvatura negativa constante onde as geodésicas (menor distância que une dois pontos) são as retas. Assim, foi possível verificar que há mais de uma reta que passa por um determinado ponto e que são paralelas a reta dada, Fig. 6.

De acordo com Inedio (2008), a partir desse modelo, foi possível perceber que era matematicamente real a geometria que Lobachevsky chamou de imaginária. Esse modelo não deu certo porque curvaturas negativas, conhecidas na época, tinham arestas o que impedia o prolongamento das geodésicas**.**

Figura 6: Pseudoesfera de Beltrami.



Fonte: Kleber (2013).

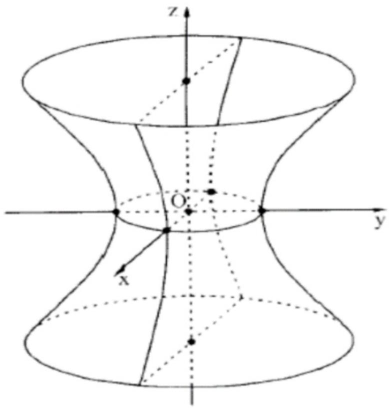
3.3.1.3 Os Hiperboloides

Em matemática, um hiperboloide é uma quádrica, um tipo de superfície em três dimensões a saber os eixos X, Y e Z nas coordenadas cartesianas. Existem dois tipos de hiperboloides: hiperboloide de uma folha e hiperboloide de duas folhas.

- **Hiperboloide de uma folha**, caso conexo, sendo definido pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, com \quad a, b\ e\ c\ constantes\ não\ nulas.$$

Figura 7: Hiperbolóide de uma folha.



Fonte: https://www.ebah.com.br/content/ABAAAAk1IAC/superficies-quadricas part=2.

Essa superfície é obtida girando uma reta em torno de um eixo que não é coplanar. . A partir da equação principal, obtemos as respectivas equações:

XOY: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, com\ \ a\ e\ b\ constantes\ não\ nulas;$

XOZ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, com\ \ a\ e\ c\ constantes\ não\ nulas;$

YOZ: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, com\ \ b\ e\ c\ constantes\ não\ nulas.$

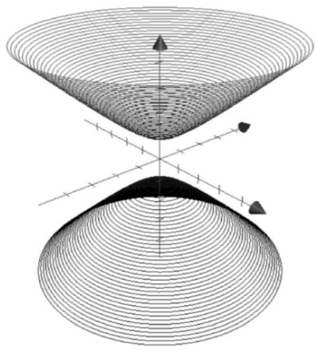
A expansão do hiperboloide depende da variação dos valores tomados pelo par de coordenada (x, y) já que a coordenada z é nula.

- **Hiperboloide de duas folhas**, no caso é não-conexo. Sua equação é em coordenadas cartesianas:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, com\ \ a,b\ e\ c\ constantes\ não\ nulas.$$

Cada rotação é considerada uma reta, variando as coordenadas x e y, obteremos outra reta paralela ao anterior e os próximos. Neste tipo de construção, se traçamos planos paralelos ao XOY (fig. 7), obtemos seções de elipses similares e os planos XOZ e YOZ formam as hipérboles. O que resulta o fundamento da geometria hiperbólica. A diferença de um modelo pra outro está nas equações. Percebemos que na equação do primeiro modelo, o sinal positivo precede todos os parâmetros, por isso resulta-se de um hiperboloide de uma folha. Agora, segundo Janine (2010), percebemos que na equação do segundo modelo, o sinal negativo precede duas das três coordenadas, isto é o hiperboloide será constituído de duas folhas.

Figura 8: Hiperbolóide de duas folhas.



Fonte: Patrice (2014)

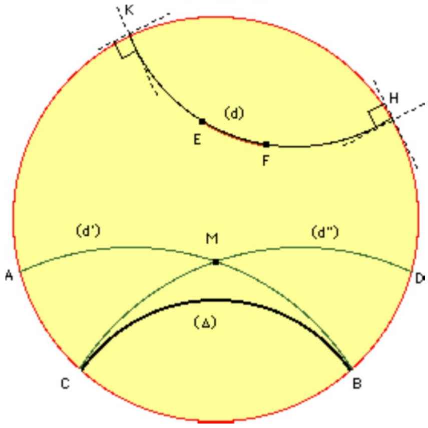
3.3.1.4 O disco de Poincaré

Segundo Étienne (2005), Poincaré definiu seu modelo de plano hiperbólico no qual as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo, que representa o plano hiperbólico.

O disco de Poincaré é definido por:

$D=\{z\epsilon\,\mathbb{C}, z=x+iy/(x,y)\epsilon\,\mathbb{R}^2, i^2=-1; |z|=\sqrt{x^2+y^2}<1\}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. O disco de Poincaré é uma representação plana para a geometria hiperbólica em que o plano ainda é reduzido para um disco. Por definição, as retas neste modelo de representação são arcos de círculos ortogonais. Duas retas serão ditas paralelas se os arcos que os definem são tangentes em um ponto do disco. Na Fig.9, para um ponto M localizado fora da reta (Δ), duas paralelas a (Δ): (d') e (d'') podem ser concorrentes. Ainda na Fig.9, pelos pontos H e K, passa a reta (d) e é perpendicular a fronteira do disco de Poincaré.

Figura 9: Representação do Disco de Poincaré.



Fonte: http://serge.mehl.free.fr/anx/disqu_beltrami.html.

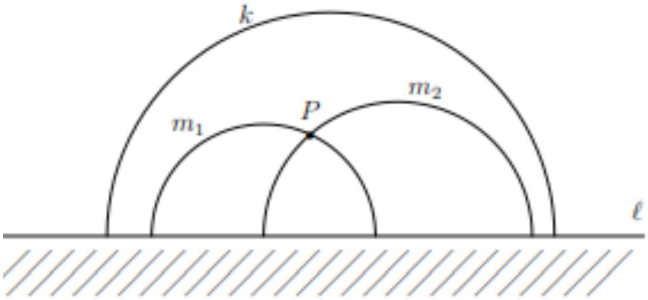
3.3.1.5 Semiplano de Poincaré

Suponhamos que o plano esteja relacionado a um sistema de eixos ortogonais e consideramos o conjunto H dos pontos (x, y) cuja ordenada y é estritamente positivo, ou seja:

$H=\{z\epsilon\,\mathbb{C}/z=x+iy/(x,y)\epsilon\,\mathbb{R}^2, i^2=-1, y>0\}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

Em Patrice (2014), Poincaré apresentou uma proposição que define de modo conceitual as principais características do plano hiperbólico: Seja k, uma reta hiperbólica em H (considerado como o plano hiperbólico) e seja P um ponto em H não pertencente a k. Então, existem, pelo menos, duas retas hiperbólicas $m_1\ e\ m_2$ através de **P** que são paralelas a **k**. Portanto, na Fig.10 abaixo, as retas $m_1\ e\ m_2$ passam por **P** e são efetivamente paralelas a **k** porque de fato, não a encontrarão nunca.

Figura 10: Representação de retas hiperbólicas e do semiplano hiperbólico.



Fonte: Patrice (2014)

3.3.2 Geometria Elíptica ou Geometria Riemanniana

Segundo a história geral da matemática, uma outra consequência da negação do quinto postulado de Euclides é a inexistência de paralelas passando por um ponto fora de uma reta dada, ou seja:

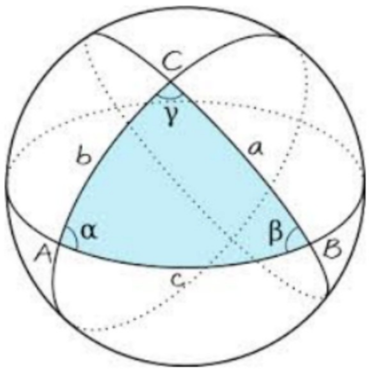
Postulado das paralelas na Geometria Elíptica: por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela a esta reta.

Este postulado é a base da geometria elíptica. Georg Friedrich Bernhard Riemann[8] introduziu este outro modelo de geometria não-euclidiana chamado geometria elíptica (às vezes de geometria esférica).

Nesta geometria, de acordo com Perrin (2016), o plano é uma esfera, os pontos são os pares de pontos antípodas na esfera; as retas são os grandes círculos de mesmo centro que a esfera, sendo todas as retas secantes entre si.

A estrutura do espaço é tal que, a soma dos ângulos[9] de um triângulo, na geometria elíptica, é maior que 180° e menor do que 540° devido à inexistência do paralelismo. Assim encontraremos triângulos cujos três ângulos são retos ou maiores.

Figura 11: Triângulo esférico.



Fonte: Shyrlene (2015).

Um outro resultado que muda quando comparamos as Geometrias Euclidiana e Elíptica é o cálculo da área de um triângulo. Na Geometria Euclidiana esse cálculo é dado pela metade do

8Georg Friedrich Bernhard Riemann: (1826-1866). Matemático alemão cujas abordagens profundas e inovadoras para o estudo da geometria estabeleceu a base matemática para a teoria da relatividade de Albert Einstein. Ref.: https://www.britannica.com/biography/Bernhard-Riemann.

9 soma dos ângulos: demonstração no site: astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm.

produto de um lado pela altura relativa a este lado, mas na Geometria Elíptica, o matemático francês Albert Girard estabeleceu a fórmula para a área do triângulo esférico, calculada a partir de seus três ângulos. Consideramos, na Fig. 11, esfera de centro O, pelos três pontos A, B, C e os respectivos circunferências que passam por esses pontos. A interseção destes três círculos origina o triângulo ABC. Sejam α, β e γ os respectivos ângulos relacionados aos vértices do triângulo ABC. Assim, a área do triângulo é dada pela fórmula:

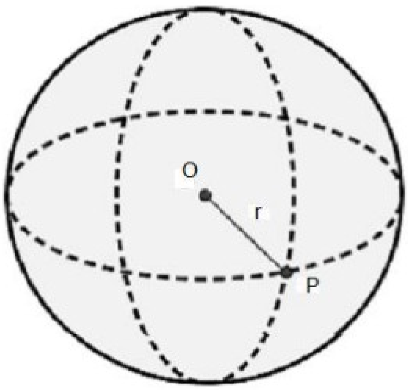
$$S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi).R^2.$$

3.3.2.1 Modelo de Representação da Geometria Elíptica

De acordo com Elígio (2013), uma das maneiras de alcançar com eficiência a lógica dos sistemas geométricos é através de modelos de representação. Para esta geometria apresentaremos um modelo que explicita as características especiais do plano esférico.

Segundo Shyrlene (2015), temos a seguinte proposição: Seja o ponto $O(x_o, y_o, z_o)$ que é o centro da esfera e r um número real positivo. Chamamos de esfera o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço, cujas distâncias a O são menores ou iguais a r. As retas são grandes círculos chamados geodésicas passando por dois pontos especiais. Os pontos são chamados antípodas devido a posição diametral na esfera. O plano esférico é dada pela fórmula: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2 \leq r^2$. enquanto cada geodésica é gerada pela equação: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^{2.}$.

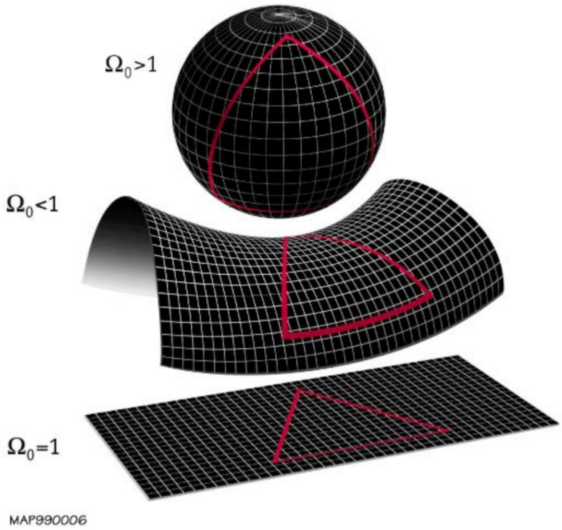
Figura 12: Representação do plano esférico.



Fonte: Shyrlene (2015).

Ao finalizarmos este capítulo apresentamos a Fig. 13 que apresenta um triângulo na Geometria Euclidiana e nas Geometrias Não-Euclidianas. Retomando o conceito de curvaturas, o símbolo Omega Ω_0 representa a quantidade de retas paralelas em cada geometria.

Figura 13: Um triângulo nas geometrias elíptica, hiperbólica e euclidiana.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_euclidiana .

4. EXEMPLOS DA CONSTRUÇÃO CIVIL E EM OUTRAS ÁREAS EM QUE APARECEM AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Um dos objetivos deste trabalho é de mostrar de maneira concreta, as utilidades de todo este conhecimento, considerado revelador e importante ao mesmo tempo. Os resultados encontrados são baseados em sites diferentes.

4.1 Torre de Resfriamento ou de Refrigeração.

No documento editado pela *Eduscol* promovido pelo ministério da educação na França, o artigo intitulado *Surfaces gauches, développement en design* desenvolvimento no design, encontramos algumas aplicações da geometria hiperbólicas relacionadas as áreas de engenharia e arquitetura. Em uma delas o modelo utilizado é o hiperboloide de uma folha na arquitetura para fabricar torre de resfriamento, ou torre de refrigeração, ou torre de arrefecimento, que é um dispositivo de remoção de calor usado para transferir o calor residual do processo para a atmosfera. As torres de resfriamento podem utilizar a evaporação da água para remover o calor de processo e resfriar o fluido de trabalho para perto da temperatura de bulbo úmido ou utilizar somente ar para resfriar o fluido de trabalho para perto da temperatura de bulbo seco. As aplicações mais comuns incluem o resfriamento da água que circula nas refinarias de petróleo, indústrias químicas, estações de energia e refrigeração do edifício. As torres variam em tamanho, desde pequenas unidades no topo de telhados a estruturas em formato de hiperbolóides gigantescas que podem ser de até 200 metros de altura e 100 metros de diâmetro.

Figura 14: Torre de resfriamento Didcot na Inglaterra.

Fonte: mathcurve (2019).

4.2 Castelo de Água

Na engenharia civil, um Castelo d'água é um reservatório de água elevado, constituído de uma torre com uma grande caixa d'água na parte superior. Geralmente é construído em local suficientemente alto para alimentar o sistema de abastecimento d'água, sob pressão. O site Sud-Ouest publicou no seu jornal um artigo publicado por Philippe Charbonneau (2013) intitulado: *Un château d'eau de plus sur le secteur*, explicando a construção de uma torre de água de tipo hiperboloide, no caso uma folha, de sessenta metros de altura com uma capacidade de 2.000m^3 na cidade de Marcenais (FRANÇA) para atingir o objetivo de distribuir 1 milhão de metros cúbicos de água por ano.

Figura 15: Torre de água em Marcenais, França.

Fonte: Philippe (2013)

4.3 Catedral de Brasília

O site brasileiro chamado CULTURA GENIAL apresenta detalhadamente a estrutura da Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, mais conhecida como Catedral de Brasília, na cidade de Brasília (Brasil). Esta catedral foi projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer com projeto estrutural do engenheiro Joaquim Cardozo. Os trabalhos iniciaram no dia 12 de setembro de 1958 e a obra foi concluída em 31 de maio de 1970. Seguindo o estilo modernista, a construção possui dezesseis colunas de concreto que convergem num círculo central. A Catedral ocupa uma área circular de 70 metros de diâmetro. Cada uma das dezesseis colunas de concreto que compõem a estrutura possui 42 metros de altura e pesa noventa toneladas. A Igreja tem capacidade para receber quatro mil pessoas. O projeto estrutural de Joaquim Cardozo reduziu o número de colunas e permitiu que as bases dos pilares ficassem delgadas, apenas tocando o chão, além de ter substituído o que seria uma cinta de concreto a unir as colunas no topo por uma laje posta um tanto mais abaixo do previsto. Pela obra, Niemeyer foi laureado em 1988 com o Prêmio Pritzker, considerado o "Nobel da arquitetura".

Figura 16: Catedral de Brasília.

Figura 17: Estrutura da catedral de Brasília.

Fonte: Cultura Genial (2017).

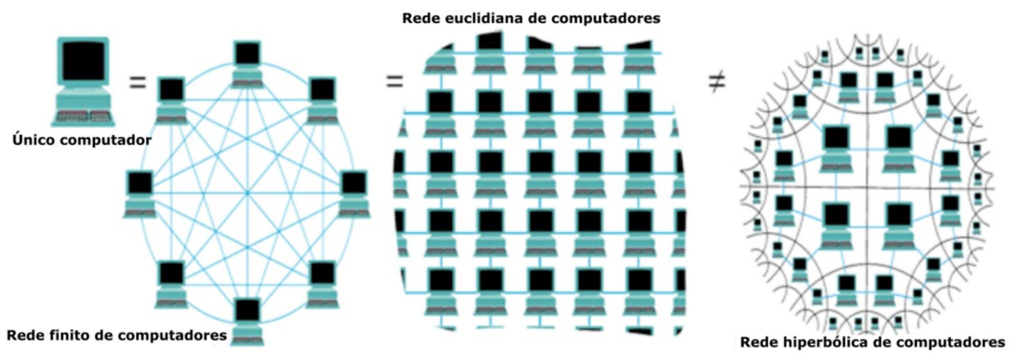
4.5 Interconexão de processadores

Jean Paul, Jean Paul (2007), faz uma análise comparada em termo interconecção de processadores em espaços euclidiano e hiperbólico. As vantagens do plano hiperbólico são muitas. O raciocínio dele começa imaginando um plano ou um espaço ocupado por unidades de processadores conectadas entre si para a resolução de um problema de fatoração. Assim, ele perguntou se é possivel conceber uma rede de calculadores (eventualmente ilimitado), tratando em tempo polinomial, com qualquer caso particular do problema, distribuindo o trabalho com unidades de processadores conforme necessario. Supondo que a resposta seja positiva, baseado nas pesquisas de Dara Morgenstein e Vladik em 1995, ele afirma que um o problema desse tipo é paralelamente polinomial, porque de là se torna útil, a geometria do espaço e especialmente o plano de Poincaré Segundo sua explicação, num espaço euclidiano de dimenção d, o volume de uma esfera de raio r é proporcinal à r^d , a velocidade de comunicação entre as unidades de processadores é delimitada pela velocidade c da luz e essas unidades occupam cada uma, um espaço mínimo que impossibilita uma concentração infinita de unidades de processadores no plano euclidiano de dimenção d. Portanto, num plano e espaço hiperbolicos, os resultados são muito diferentes, o volume de uma esfera cresce exponencialmente dependendo do raio da esfera, assim existe a possibilidade de envolver um número exponencial de unidades de processadores na resolução de um único problema. Esta pesquisa tem se relacionado com as classes de problemas que ainda nao tem resolução em tempo polinomial[10].

10 Tempo polinomial: tempo de execução de um algoritmo limitado superiormente por uma expressão polinomial do tamanho da entrada para o algoritmo, T(n) = O(nk) para algumas constantes k. mais explicações em http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/caixeiro.html

> Desde 1995, muitas coisas foram especificadas e um novo campo de computação geométrica se desenvolveu. Graças ao trabalho de Maurice Margenstern, da Universidade de Metz e dos colegas franceses, japoneses e alemães que ele treinou em sua aventura, sabemos como dominar o paralelismo hiperbólico. Primeiro, Maurice Margenstern adaptou ao plano hiperbólico a noção de uma rede de autômatos celulares. (JEAN PAUL, 2007, Tradução dos autores).

Figura 18: Interconexão de Processadores.



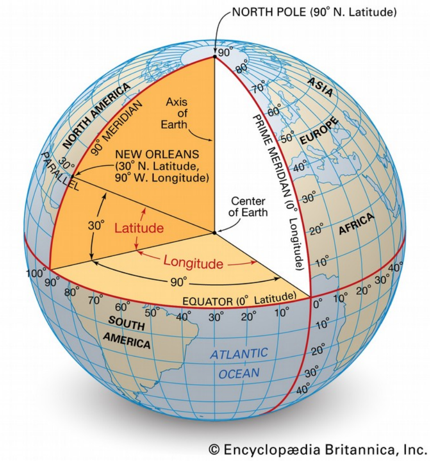
Fonte: Jean-Paul (2007).

4.6 Geodésicas e Relatividade Geral

Uma geodésica é uma curva que minimiza localmente o comprimento entre dois pontos de um mesmo espaço. Na esfera, as geodésicas são os círculos máximos. Os exemplos mais populares são a linha do equador que é uma linha imaginária que divide o globo terrestre horizontalmente em dois hemisférios: sul e norte, e o meridiano de Greenwich que corta o Globo Terrestre de norte a sul e divide também o planeta em dois hemisférios: ocidental e oriental.

É de conhecimento geral que os deslocamentos na superfície da terra, no mar ou no ar envolvem um posicionamento (localização) definido através de um sistema de coordenadas. Segundo o Instituto Nacional de informação florestal (IGN) da França, um dos sistemas usados é o das coordenadas geográficas. Estas coordenadas geográficas estão relacionadas a geometria elíptica com um elipsóide de revolução. Trata-se de uma esfera achatada nos pólos, o elipsoide é centrado na origem do sistema, seu eixo de revolução é a elipse meridiana. Assim, as coodenadas geodésicas permitem exprimir as posições na vizinhança da Terra. Qualquer ponto é localizado pelas suas coordenadas geográficas e são expressas em valores angulares esféricos pela latitude (equador NORTE - SUL) abreviado por L, pela longitude (meridiano Greenwich sentido LESTE-OESTE) de abreviação G e pela altitude abreviado por H que é a altura geográfica. Nas viagens marítimas e aéreas, os cientistas se baseiam em conjuntos de linhas imaginárias que rodeiam o globo terrestre. Com estas novas coordenadas, os navios e aviões conseguem efetuar viagens com melhor segurança, em trajetos minimizados em forma de curvaturas e com informações antecipadas sobre o destino.

Figura 19: Coordenadas geográficas.



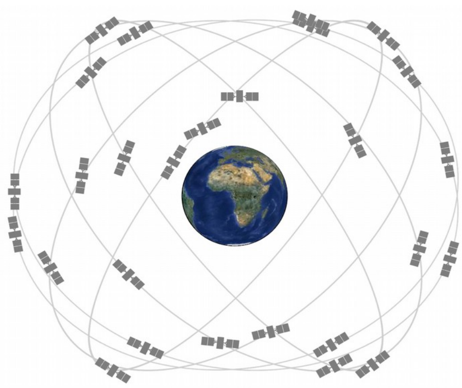
Fonte: Encyclopedia Britannica (2019)

Para encerrar o capítulo, apresentamos um outro exemplo que é a relatividade geral. O espaço é de dimensão quatro e possui uma métrica não euclidiana dada pela curvatura do espaço modificando consequentemente a noção de coordenadas.

Segundo o site HIPER CULTURA, linhas do universo traçadas neste espaço-tempo são geodésicos através de uma métrica obediente às equações não lineares de Einstein que ligam a curvatura do espaço-tempo e a presença de massas. Esta teoria afirma que a gravitação não é uma força, mas a manifestação da curvatura do espaço (nomeado espaço-tempo), uma curvatura produzida pela distribuição de energia, sob a forma de massa ou energia cinética. Esta teoria relativista da gravidade prevê efeitos como a expansão do Universo, ondas gravitacionais e buracos negros. Embora que este assunto é essencialmente da área da física, partimos do princípio que a terra é de forma esférica e que existem distorções no espaço-tempo.

Uma das aplicações comumente citadas da relatividade é o ''Sistema de Posicionamento Global ou GPS em inglês''. Segundo o site GPS.GOV, o GPS é um utilitário pertencente aos Estados Unidos que assegura serviços de posicionamento, de navegação e de referência temporal. Ele possui três segmentos: o segmento espacial, o segmento de controle e o segmento de utilizador. A Força Aérea dos Estados Unidos assegura o desenvolvimento, a manutenção e o funcionamento do segmento espacial e do segmento de controle. Os satélites GPS voam em órbita terrestre a uma altitude de aproximadamente 20.200 km e cada satélite circula a Terra duas vezes por dia. Os satélites na constelação de GPS são organizados em seis planos orbitais igualmente espaçados ao redor da Terra. Esse arranjo de 27 satélites garante que os usuários possam visualizar pelo menos quatro satélites de praticamente qualquer ponto do planeta. O segmento de controle GPS consiste em uma rede global de instalações terrestres que rastreiam os satélites GPS, monitoram suas transmissões, realizam análises e enviam comandos e dados para a constelação. O segmento de controle operacional atual inclui uma estação de controle mestre, uma estação de controle mestre alternativa, onze antenas de comando e controle e 16 locais de monitoramento. Os locais dessas instalações são mostrados no mapa apresentado a abaixo. O segmento utilizador compreende os receptores GPS, que recebem os sinais dos satélites e que calculam, com base nas informações transmitidas, a posição tridimensional e a referência temporal do utilizador. As aplicações descritas neste site representam apenas alguns exemplos como topografia e mapeamento, agricultura, aviação, meio ambiente, espaço-temporal, proteção publica e ajuda em desastre, construção de ferrovias, estradas e rodovias, etc.... Todos os dias são inventados novos usos do GPS: os únicos limites são os da imaginação criativa do ser humano.

Figura 20: Segmento dos satélites.



Fonte: GPS.GOV (2019).

5. CONCLUSÃO

Os novos conhecimentos adquiridos graças aos trabalhos de pesquisa realizados pelos pesquisadores no ramo da geometria permitiram de entender melhor o quão importante as geometrias não-euclidianas sem minimizar obviamente o magnífico trabalho de Euclides. De acordo com Coutinho (2001, p. 35-36), a Geometria de Euclides deixou de ser única, no século XIX, devido a matemáticos como Lobachevsky (1792-1856), Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) e Riemann (1826-1866) que lançaram as bases de outras geometrias devidamente comprovadas a saber: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica, eles deduziram essas GNES de uma série de dúvidas na busca da prova do quinto postulado. Através dos exemplos apresentados no capítulo 4 do trabalho, as descobertas foram efetivamente uteis se for analisar todas as contribuições trazidas no campo da física com as equações elípticas. Diremos que os cálculos hiperbólicos fortaleçam muito a arquitetura e engenharia. Vimos também o desenvolvimento potente das viagens aéreas e marítimas beneficiam avanços incríveis e houve maior domínio do espaço-tempo. De modo geral, queremos incentivar o gosto de aprender matemática. Aproveitamos este trabalho para mostrar o fundamento das pesquisas, das interrogações sobre os conhecimentos, de lá podem surgir outros interesses de saberes que permitirão a facilidade da vida entre as nações na medida que forem bem compreendidos e usados adequadamente. Retomando os objetivos, este trabalho teve como propósito de realizar um estudo das GNEs especificamente, as geometrias hiperbólica e elíptica, por meio de um resgate histórico, elencando as contribuições destas para o desenvolvimento da Matemática ao longo dos anos, bem como citando aplicações delas em outras áreas do conhecimento. Ciente de todos estes esclarecimentos obtidos durante a elaboração deste trabalho, fiquei convencido que a inclusão de um componente curricular regular ou optativo faria elogiar ainda melhor o curso de matemática da UFFS, já que o objetivo é formar professores para atuar nas escolas, a chance de ensinar conteúdos de GNEs é mínimo mas, de repente poderá aparecer novas propostas de reformas. Resumindo, seria muito inteligente antecipar esse momento. Neste trabalho, foi apresentado detalhadamente apenas dois tipos de GNEs, mas existe uma grande variedade que merecem ser explorados e estudados pois são conhecimentos usuais e integrante do cotidiano da sociedade.

6.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Rio de janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

CARLOS, B. De Souza. **GEOMETRIA HIPERBÓLICA, Consistência do Modelo de Disco de Poincaré.** RECIFE. 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=234 . Acesso em: 06/09/2019

CATEDRAL DE BRASÍLIA. **CULTURA GENIAL**. Rio de Janeiro. 2017. Disponível em: https://www.culturagenial.com/catedral-de-brasilia/ . Acesso em: 07/09/2019

Coutinho, L.*Convite às geometrias não-euclidianas*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DESIGN ET MÉTIERS D'ART MATHÉMATIQUES. **ÉDUSCOL** .2013 .Disponível em:https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/39/2/Ress_designmaths_gauches_eduscol_263392.pdf . Acesso em: 07/09/2019

DILVA. Frazão. **EUCLIDES**. Disponível em: https://www.ebiografia.com/euclides/. Acesso em 26/03/19.

ELIGIO, Carlos Eduardo. **GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E GEOMETRIA DA RELATIVIDADE.** São Paulo. **2013.** Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7446/mod_resource/content/0/TCC_Eligio.pdf . Acesso em: 07/09/2019

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução: São Paulo: Ed Unesp, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GREENBERG. M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries.** 3rd. ed. New York: W.H Freeman and Company, 2001.

GHYS, E. **POINCARÉ ET SON DISQUE.** Lyon. 2005. Disponível em: http://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/disque-poincare.pdf . Acesso em: 15/10/2019

IMAGE DES MATHÉMATIQUES. **GÉOMÉTRISER L'ESPACE: DE GAUSS À PERELMAN.** Lyon. 2007**.** Disponível em :http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html **acesso em 08/11/2018**

INEDIO, ARCARI. **UM TEXTO DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA.** Sao Paulo. 2008 Disponível em: http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/N_ArcariInedio.pdf Acesso em: 09/09/2019

JACQUES, Lafontaine. **ELLIPTIQUE, HYPERBOLIQUE, POURQUOI?** Montpellier. 2010. Disponível em: https://images.math.cnrs.fr/Elliptique-hyperbolique-pourquoi.html . Acesso em: 07/09/2019

JANINE, F Mota. **UM ESTUDO DE PLANOS, CILINDROS E QUÁDRICAS, EXPLORANDO SEÇÕES TRANSVERSAIS, NA PERSPECTIVA DA HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO, COM O SOFTWARE WINPLOT. Belo Horizonte. 2010.** Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_MotaJF_1.pdf . Acesso em: 07/09/2019

JEAN-Paul DELAHAYE. **CALCULER DANS UN MONDE HYPERBOLIQUE ?**. LILLE 2007. Disponivel em:https://interstices.info/calculer-dans-un-monde-hyperbolique/ . Acesso em: 09/09/2019

JOAN, Gomez. **QUAND LES DROITES DEVIENNENT DES COURBES**. Paris. 2013. Disponível em: https://images.math.cnrs.fr/Quand-les-droites-deviennent?lang=fr . Acesso em: 09/09/2019

KLEBER, Kilhian. **LOBACHEVSKY E AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS**. Sao Paulo. 2013. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2013/09/lobachevsky-e-as-geometrias-nao.html Acesso em : 09/09/2019

LA GÉODÉSIE **.IGN**. 2019 DISPONÍVEL EM: https://geodesie.ign.fr/ . ACESSO EM: 06/09/2019

LAPLACE'S EQUATION. **ENYCLOPAEDIA BRITANNICA**. 2019. Disponível em: https://www.britannica.com/science/Laplaces-equation . Acesso em: 06/09/2019

LATITUDE AND LONGITUDE. **ENYCLOPAEDIA BRITANNICA**. 2019. Disponível em: https://www.britannica.com/science/latitude . Acesso em: 06/09/2019

MIKE Askew . SHEILA Ebbutt. **LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE. Paris. 2012** Disponivel em : https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/mathematiques-initiation-geometrie-1443/page/5/ . Acesso em: 09/08/2019

PAULO, Marcelo Dias de Magalhães. **INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS.** Ouro Preto. 2017. Disponível:http://professor.ufop.br/freud/classes/introdu%C3%A7%C3%A3o-equa%C3%A7%C3%B5es-diferenciais-parciais . Acesso em: 10/09/2019

PATRICE, Sawyer. **GÉOMETRIE HYPERBOLIQUE POUR LES NON-INITIÉS.** Ontario. 2014. Disponível em: https://zone.biblio.laurentian.ca/bitstream/10219/62/1/sawyer.pdf.Acesso em: 07/09/2019

PHILIPPE, Charbonneau. **UN CHÂTEAU D'EAU DE PLUS SUR LE SECTEUR.** SAINT-ANDRÉ-DE-CUBZAC**.** 2013. Disponível em: https://www.sudouest.fr/2013/04/30/un-chateau-d-eau-de-plus-sur-le-secteur-1039800-2985.php . Acesso em: 07/09/2019

SIMONE, Semmer. **ENSINO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS USANDO ARTE E MATEMÁTICA. Ponta Grossa. 2013. Disponível em**:http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1312/1/PG_PPGECT_M_Semmer%2C%20Simone_2013.pdf . Acesso em: 07/09/2019

SHYRLENE, M. de Abreu. **GEOMETRIA ESFÉRICA E TRIGONOMETRIA ESFÉRICA APLICADAS A ASTRONOMIA DE POSIÇÃO.** São João del Rei. 2015. Disponivel em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Shyrlene%20Martins%20de%20Abreu%20Versao%20Final.pdf . Acesso em: 06/09/2019

SYSTÈME DE POSITIONNEMENT MONDIAL. **GPS.GOV.** 2019. Disponível em: https://www.gps.gov/systems/gps/french.php . Acesso em: 06/09/2019

10 COISAS QUE VOCÊ DEVERIA SABER SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE. **HIPERCULTURA.** 2017. Disponível em :https://www.hipercultura.com/10-coisas-que-voce-deveria-saber-sobre-a-teoria-da-relatividade/ . Acesso em: 09/09/2019