UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT/UFFS

GRACIELE REMPEL

TANGRAM NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

CHAPECÓ
2021

GRACIELE REMPEL

TANGRAM NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Lucia Menoncini

CHAPECÓ

2021

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Rempel, Graciele
TANGRAM NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA / Graciele Rempel. -- 2021.
94 f.

Orientadora: Doutora em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, 2018 Lucia Menoncini

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2021.

1. Tangram. 2-Matemática. 3-Representação Semiótica. 4-Livro Didático. I. Menoncini, Lucia, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

GRACIELE REMPEL

TANGRAM NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 19/10/2021.

BANCA EXAMINADORA

Lucia Menoncini

Prof.ª Dra. Lucia Menoncini – UFFS
(Presidente/Orientadora)

Prof. Dr. Tarcisio Kummer – MEC/INEP

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Agradeço à minha família e amigos, pelas palavras de incentivo, pela torcida e compreensão pelos momentos de ausência.

De maneira especial quero agradecer aos meus colegas do PROFMAT pela parceria, pelo companheirismo, incentivo, ajuda e por sempre estarem ao meu lado. As amizades que conquistei ao longo do curso levarei para a vida toda!

Aos meus professores minha eterna gratidão pelos aprendizados, vocês fizeram a diferença na minha formação. Agradeço à minha orientadora, Lucia, por aceitar esse desafio, pela paciência e compreensão, pelo incentivo e estar sempre pronta para ajudar, mesmo não nos conhecendo pessoalmente.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade Federal da Fronteira Sul, UFFS, pela parceria que busca a melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica por meio da implementação do PROFMAT.

RESUMO

O propósito desta pesquisa é investigar a maneira como o uso do tangram pode contribuir para desenvolver habilidades relacionadas à visualização de uma figura, considerando-se que ver uma figura do ponto de vista matemático se difere de ver uma figura qualquer. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica e qualitativa, em que os propósitos são alcançados a partir da análise de atividades que envolvem o tangram em três coleções de livros didáticos de Matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental. Baseada na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, são organizadas categorias voltadas aos olhares e às apreensões geométricas, as quais guiam a análise de treze atividades, distribuídas de maneira heterogênea nas coleções. A análise mostra que a maior incidência de atividades que envolvem o tangram é no sexto ano, sendo que poucas atividades abordam o tangram nos outros três anos escolares. Quanto às apreensões geométricas, destacam-se a perceptiva e a operatória, sendo que as propriedades heurísticas e a visualização são potencializadas à medida que reconfiguram-se as peças do tangram, ou seja, quando se executa a operação semiótica de reconfiguração, principal tratamento figural operado sobre o mesmo. No que tange aos olhares, sobressai o olhar icônico botanista, responsável por reconhecer e diferenciar as formas, seguido do olhar inventor. De modo geral, as atividades exploram o tangram como figura heurística ou como recurso didático, e em ambos os casos propiciam a mobilização de diferentes olhares e apreensões geométricas, indo ao encontro da proposta de Duval para o ensino de geometria.

Palavras-chave: Tangram; Visualização; Livro didático.

ABSTRACT

The purpose of this research is to investigate how the use of tangram can contribute to developing skills related to the visualization of a figure, considering that seeing a figure from a mathematical point of view is different from seeing any figure. It is a bibliographical and qualitative research, in which the purposes are reached from the analysis of activities that involve the tangram in three collections of Mathematics textbooks, from the final years of Elementary School. Based on Raymond Duval Theory of Semiotic Representation Records, categories aimed at geometrical views and apprehensions are organized, which guide the analysis of thirteen activities, distributed heterogeneously in the collections. The analysis shows that the highest incidence of activities involving the tangram is in the sixth grade, with few activities addressing the tangram in the other three school years. As for the geometric apprehensions, the perceptive and the operative stand out, and the heuristic and visualization properties are enhanced as the tangram pieces are reconfigured, that is, when the semiotic reconfiguration operation is performed, the main figural treatment operated on the same. With regard to looks, the iconic botanist look stands out, responsible for recognizing and differentiating shapes, followed by the inventor look. In general, the activities explore the tangram as a heuristic figure or as a didactic resource, and in both cases, they enabled the mobilization of different geometrical perspectives and apprehensions, meeting Duval proposal for the teaching of geometry.

Keywords: Tangram; Visualization; Textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história mostra que a Matemática sofreu uma brusca mudança em seu modo de fazer ciência a partir do século XVII. Na antiguidade, os problemas matemáticos eram pensados sob o enfoque visual geométrico, sem muita preocupação com números. O cálculo de áreas, por exemplo, utilizava operações sobre a figura e a comparação de uma figura para com outras, como o quadrado. A Geometria era voltada à atividade prática para resolver problemas. A construção de majestosas catedrais e a melhoria das atividades agrícolas, num tempo sem recursos tecnológicos, são casos que demonstram como a humanidade recorria à prática para dar conta das grandes transformações econômicas e sociais (ROQUE, 2012).

As contribuições de Descartes e Fermat no século XVII foram essenciais para a mudança de uma Matemática calcada quase que exclusivamente na geometria das figuras para uma matemática mais algébrica. Com os trabalhos destes matemáticos, os métodos algébricos passaram a ganhar espaço na matemática e a álgebra foi incorporada à geometria, dando origem ao que se conhece hoje como geometria analítica (ROQUE, 2012).

Esta tendência algebrista da geometria chegou ao ensino, e a geometria e a álgebra estreitaram relações, uma dando suporte à outra. As representações geométricas passaram a subsidiar a construção de conceitos algébricos, enquanto que a álgebra passou a ser uma das linguagens para expressar o pensamento geométrico. Cada vez mais esta tendência ganha espaço no contexto escolar o que pode trazer à tona a preocupação de que o ensino de geometria se restrinja à aplicação de fórmulas. Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) chama a atenção:

> [...] Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). (BRASIL, 2018, p. 270).

A BNCC, enquanto documento normativo, orienta que o ensino de geometria não seja pautado simplesmente em fórmulas, visto que esse saber foi construído ao longo da história a partir de situações cotidianas, estando sempre em busca de soluções para as necessidades da sociedade.

O enfoque algébrico e o uso de fórmulas são necessários no ensino de geometria, pois ao se traduzir os problemas geométricos em problemas algébricos, o tempo e os cálculos matemáticos são acelerados ou otimizados. Contudo, priorizar este enfoque pode tornar a aprendizagem desprovida de significado, fazendo com que os alunos não assimilem o conteúdo abordado. Neste sentido, uma alternativa para prover sentido ao ensino de geometria seja uma abordagem mais voltada aos aspectos geométricos, dando-se maior atenção às figuras geométricas.

As figuras geométricas desempenham um importante papel no ensino de geometria à medida que podem sinalizar características fundamentais para resolver um determinado problema ou descrever melhor uma situação geométrica em comparação com a descrição unicamente por meio da língua natural. Sobre isso, Moran (2015, p. 30) destaca que "a imagem ou figura pode modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre aspectos a serem considerados para se chegar à conclusão necessária". Desta forma, a figura não somente pode representar uma situação geométrica, como complementar ou explicitar informações textuais.

Flores e Moretti (2006) também falam da importância da figura para a geometria, especialmente aquelas que possuem propriedades heurísticas, que permitem o desenvolvimento da visualização. A visualização, segundo Moretti (2013), é a conexão entre duas interpretações geométricas: a interpretação daquilo que se vê na figura (apreensão perceptiva) e a interpretação do que se pode fazer sobre a figura (apreensão operatória). Estas interpretações são chamadas por Duval (2012a), em sua Teoria de Registros das Representações Semióticas, de apreensões geométricas. São quatro as apreensões geométricas: apreensão perceptiva, apreensão discursiva, apreensão sequencial e apreensão operatória. Elas emergem associadas a olhares, que podem ser do tipo icônico (botanista e agrimensor) ou não-icônico (construtor e inventor).

Dentre as diversas figuras abordadas no ensino de geometria, o tangram possui propriedades heurísticas e pode ser explorado a partir do conceito de visualização, definido por Moretti (2013). De fato, as propriedades heurísticas e a visualização são desenvolvidas sempre que as suas peças são reorganizadas para formar novas figuras. Mais que uma figura, o tangram é um material didático. Para Lorenzato (2009, p. 18), "material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto o MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros". Ainda sobre o tangram, Smole *et al.* (2003, p. 97) destacam que "mudar as sete peças de posição, colocar as peças lado a lado, sem sobreposição, introduz algumas noções e relações geométricas e desenvolve as habilidades de percepção espacial, atraindo a atenção e desenvolvendo uma aprendizagem mais significativa". Desta forma, o tangram, seja como figura, seja como material didático, permite não somente explorar, mas atribuir significado para uma diversidade de propriedades e conceitos matemáticos.

Vários conteúdos podem ser abordados ao manipular esse famoso quebra-cabeça chinês. Formas geométricas, retas, ângulos, áreas, frações são exemplos de conteúdos que podem utilizar o tangram no processo de construção ou aprofundamento de conceitos, propriedades, bem como para resolução de problemas.

Em sala de aula, o estudo destes conteúdos chega por meio de livros didáticos. O livro didático é o principal guia das aulas de Matemática. É com base nele que o professor prepara sua aula, explica, faz exemplos e exercícios. Ele desempenha papel importante no processo de ensino e de aprendizagem não apenas porque auxilia o professor a planejar as aulas, mas também porque possibilita a aquisição de saberes, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades e para a autonomia do professor e do aluno.

Para Choppin (2004, p. 552-553), o livro didático desempenha quatro funções primordiais. A primeira função é servir de referência, ou seja, é "o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário de conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações". A segunda função considera o livro didático como instrumento para realização de exercícios capazes de aprofundar ou ampliar conhecimentos, bem como favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades, métodos e técnicas. A terceira função está direcionada ao viés ideológico, pois para o autor, o livro didático é o meio pelo qual se transmite valores culturais e neste sentido, assume um papel político. A última função é servir de fonte documental, contribuindo para desenvolver a reflexão crítica a partir das diferentes interpretações dos leitores.

Sobre as diferentes funções do livro didático, elas podem ou não ser desenvolvidas, dependendo do contexto em que ele é utilizado, o que recai, principalmente, sobre o professor e a forma como utiliza este material, conforme Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 13).

Segundo os PCNs, o livro didático deve ser um aliado do professor e do aluno, deve servir de apoio, mas não deve ser fator único e determinante para o desenvolvimento das aulas. Por isso, é salutar que sejam utilizados outras fontes e materiais didáticos na prática em sala de aula para complementar os conhecimentos abarcados no livro didático.

Diante do exposto, reconhecendo a importância do livro didático para o processo de ensino e de aprendizagem, e considerando que o tangram é uma figura heurística que favorece o desenvolvimento de habilidades visuais e de operações sobre a figura, tornando a geometria menos algébrica, emerge o problema de pesquisa: *Como os olhares e as apreensões geométricas podem ser mobilizados em atividades que envolvem o tangram, em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental?*

Para responder a pergunta, considera-se como referencial teórico a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Com base nesta Teoria são analisadas atividades que abordam o tangram em livros didáticos, a partir de categorias de análise voltadas aos olhares e às apreensões geométricas. A pesquisa bibliográfica ocorre em três coleções de livros didáticos de Matemática do 6º ao 9º ano, aprovados no Plano Nacional do Livro e do Material Didático/2020.

Quanto à estrutura do trabalho, está organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo apresenta a introdução. No segundo capítulo é abordado o ensino da geometria segundo a Teoria de Registros de Representação Semiótica, destacando as apreensões geométricas e os olhares. No terceiro capítulo, a origem do tangram e suas características, trazendo as possibilidades matemáticas do uso desse material didático. No capítulo quatro relacionam-se as apreensões geométricas com o tangram.

O quinto capítulo contempla a metodologia da pesquisa, em que constam a indicação das três coleções de livros didáticos selecionadas, as categorias de análise e uma breve introdução de cada coleção visando situar o leitor a partir da descrição geral dos livros didáticos e da localização das atividades com o tangram em cada coleção.

No sexto capítulo são apresentadas as análises das atividades que exploram o tangram, elencando as apreensões geométricas e os olhares que cada atividade exige. Por fim, no sétimo capítulo constam as considerações finais acerca do desenvolvimento do trabalho.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DE REGISTROS DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Na Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, o ensino e a aprendizagem da Matemática precisam considerar o objeto matemático e suas múltiplas representações. Isso porque, tanto a comunicação como o ensino é feito por meio de representações, uma vez que os objetos da matemática não são acessíveis de modo imediato como são os objetos ditos "reais" ou "físicos". E as representações semióticas desempenham esse papel na atividade matemática, de permitir o acesso a esses objetos, sendo fundamentais à atividade cognitiva do pensamento, pois desenvolvem as representações mentais, a realização de diferentes funções cognitivas e a produção de conhecimento (DUVAL, 2012b).

As representações semióticas podem ser definidas como

> [...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem intervenções próprias de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2012b, p. 269).

De acordo com o autor, a compreensão matemática requer o uso de diversas representações semióticas do mesmo objeto. Mais, que estas representações, estas variedades, precisam estar articuladas entre si e possibilitar a passagem de uma representação para a outra. Raymond Duval (2012b) é enfático a respeito da necessidade de se utilizar, no mínimo, duas formas distintas de representações, sendo essa a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

Um sistema semiótico é considerado registro de representação quando possibilita três atividades cognitivas:

a) A **formação** de uma representação identificável que respeite algumas regras do sistema simbólico utilizado;
b) O **tratamento**, uma transformação que ocorre num mesmo sistema semiótico. É uma transformação interna;
c) A **conversão**, considerada como a transformação de uma representação em outra representação de outro registro, cuja forma se altera. É uma transformação externa.

Destas três operações, a conversão é a operação que desenvolve um papel fundamental para a aprendizagem da matemática, pois segundo Duval (2012b, p. 282, grifos do autor): *"a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão."* Assim, de acordo com o autor, o conhecimento é ampliado e a pessoa aprende quando existe um trânsito, uma coordenação entre os diferentes registros de representação, sejam eles numéricos, algébricos, geométricos ou em língua natural.

Dentre as subáreas da Matemática, a Geometria ganha uma atenção especial na Teoria de Registros de Representação Semiótica. Segundo Duval (2011), o ensino de geometria na Educação Básica está ancorado em dois registros de representação semiótica: da língua natural e o figural. O registro figural é o registro que compreende as figuras geométricas. Ele está associado à visualização e permite a construção de figuras e a operação sobre elas, bem como o reconhecimento visual de propriedades geométricas. Já os enunciados, as definições e os teoremas, por exemplo, são desenvolvidos no registro da língua natural. O autor destaca que para o ensino de geometria é fundamental que esses dois registros estejam articulados entre si de modo que haja a coordenação entre os tratamentos realizados em cada registro.

Sobre as figuras geométricas, Duval (2011) afirma que são representações semióticas pertencentes a um registro de representação cognitivamente produtivo, à medida que permitem diferentes formas de visualização e exploração. Por isso, as figuras exercem um importante papel no ensino de geometria, principalmente porque são utilizadas como registro auxiliar que subsidia ou complementa outros registros. Neste sentido, Moran (2015) discorre que:

> Em muitos conceitos, principalmente de geometria, o uso de imagens pode auxiliar na compreensão e resolução de um problema. A imagem ou figura pode modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre aspectos a serem considerados para se chegar à conclusão necessária. A imagem poderá oferecer novas perspectivas da ideia proposta pelo texto, sem abandoná-lo. (MORAN, 2015, p. 30).

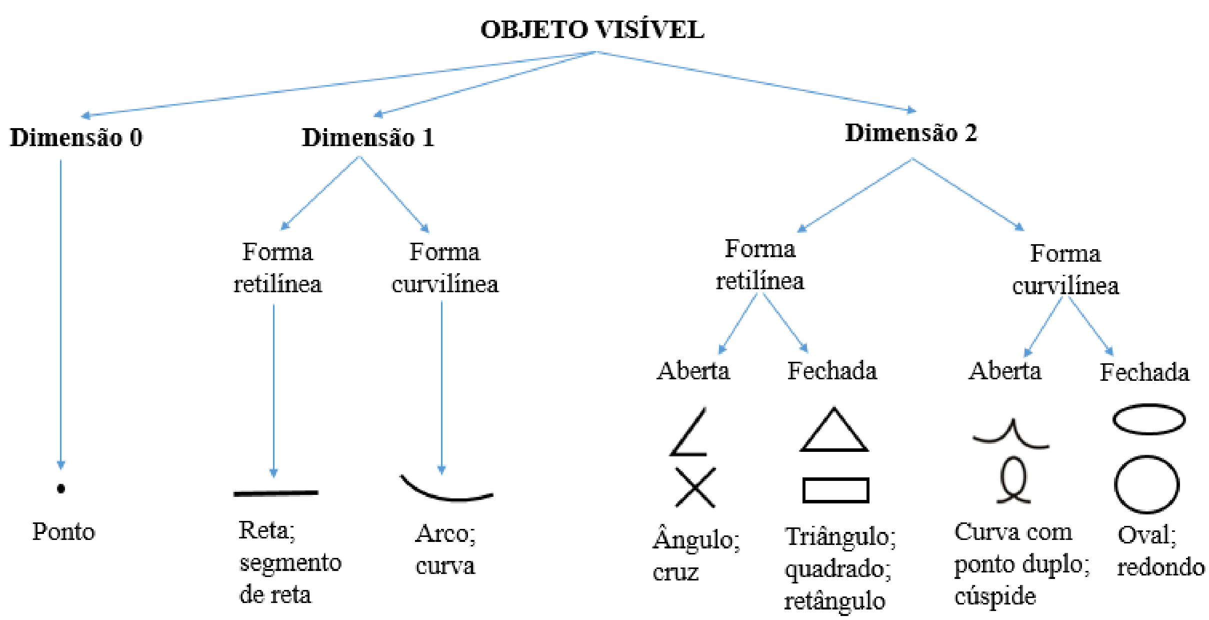
Corroborando com Moran (2015), Menoncini (2018, p. 27) afirma que as figuras geométricas "exercem um papel fundamental na construção de conhecimentos matemáticos: recorre-se a elas para compreender um conceito, para reconhecer ou aplicar uma propriedade, para demonstrar um teorema, para resolver um problema, etc". Complementando as autoras, Flores e Moretti (2004) destacam que a figura se torna essencial para o ensino de geometria quando cumpre o papel de ser um registro auxiliar, indo para além daquela primeira percepção intuitiva, geralmente associada à forma figural:

> De fato, as figuras representam um auxílio na resolução de problemas. Mas, para a maioria dos alunos, elas não têm cumprido este papel. Normalmente, trabalha-se com as figuras numa abordagem exclusivamente psicológica da percepção, aquela imediata, a qual não dá condições ao aluno para olhar a figura sob outros aspectos. Quer dizer, olhá-la de outros modos, sob outras configurações, o que implica na correspondência entre a visão de uma seqüência de sub-figuras pertinentes, a união destas sub-figuras formando um todo, e ainda, a correspondência da figura e o texto, possibilitando, enfim, a exploração heurística. (FLORES e MORETTI, 2004, p. 1).

De acordo com os autores, o papel intuitivo e heurístico que as figuras têm na geometria está diretamente relacionado à forma matemática de ver as figuras, que consiste em realizar tratamentos figurais, ultrapassando os limites da percepção imediata da forma figural.

Os tratamentos no registro das figuras, também denominado tratamentos figurais, são operações realizadas sobre as unidades figurais de uma figura geométrica com objetivo de transformá-la em outra figura. Elas podem ser figuras tridimensionais como um cubo, bidimensionais como um retângulo, unidimensionais como retas e curvas, ou não ter dimensão, como os pontos (Figura 1).

Figura 1: Algumas unidades figurais



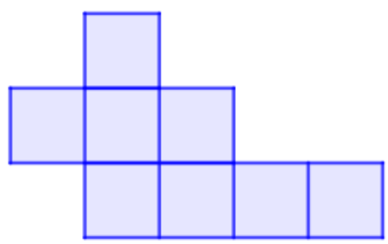
Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 159)

Observando a Figura 1, toda figura geométrica é uma combinação de unidades figurais e são as propriedades geométricas entre essas unidades que correspondem ao verdadeiro conteúdo que a figura deve revelar. Ainda sobre as unidades figurais, Flores e Moretti (2004, p. 2) afirmam que são “formas identificáveis que não podem ser decompostas em formas mais simples, a menos que mudemos de dimensão, nem podem ser distinguidas sobre critérios de tamanho”.

Para Duval (2004), as figuras geométricas admitem dois tipos principais de tratamentos figurais. O primeiro, que consiste em operações mereológicas[1], baseia-se na percepção e na transformação de unidades figurais em outras figuras de mesma dimensão. O segundo depende da operação de desconstrução dimensional, em que são identificadas as unidades figurais de dimensão inferiores à dimensão da figura ou subfiguras que não são visíveis de imediato.

Um exemplo de atividade que exige a percepção e a transformação de unidades figurais em outras figuras de mesma dimensão é apresentado na Figura 2. A atividade envolve o cálculo da área de uma figura que pode ser decomposta de modo que se transforme em um retângulo.

Figura 2: Qual é a área da figura azul, sabendo que cada quadradinho mede 2 cm de lado?

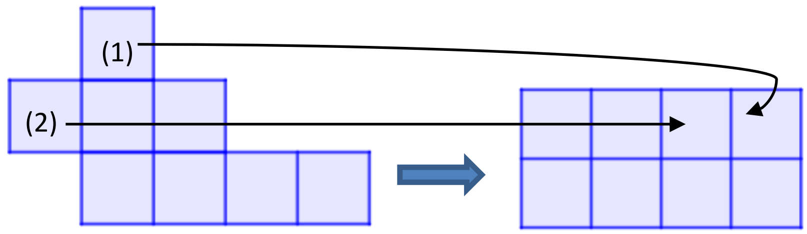


Fonte: Autora

Para obter a área desta figura uma alternativa é considerar o quadradinho como unidade figural e reorganizar as unidades formando uma nova figura que traga algum ganho de conhecimento, conforme mostra a Figura 3.

[1] As operações mereológicas estão associadas às apreensões geométricas e são abordadas na próxima subseção.

Figura 3: Reconfiguração da figura

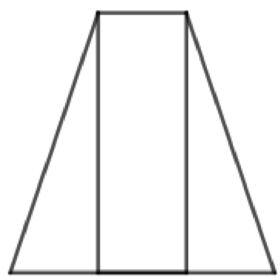


Fonte: Autora

De acordo com a figura acima, ao deslocar os quadrados (1) e (2) é possível formar um retângulo, que é uma figura conhecida e por isso o cálculo da área se torna mais fácil.

Para exemplificar a desconstrução dimensional, apresenta-se a Figura 4:

Figura 4: Qual é a figura?



Fonte: Autora

Observando a Figura 4, é possível identificar duas decomposições visualmente incompatíveis, em que as unidades figurais são bidimensionais. A primeira ocorre pela justaposição de dois triângulos e um retângulo. A segunda, por superposição de um retângulo em um trapézio. Há também uma terceira decomposição considerando-se as arestas (total de 8 arestas) como unidades figurais. Dentre as três maneiras distintas de ver essa figura geométrica, a tendência é ver aquela(as) de maior dimensão, que aqui, seriam as subfiguras bidimensionais. Isso se deve às leis da Gestalt[2] que priorizam a figura como um todo, dificultando a passagem do olhar para reconhecer as unidades de dimensões inferiores.

[2]As Leis do fechamento ou da continuidade, explicam que quando linhas formam um contorno simples e fechado o que se destaca é a figura como um todo, já que o todo tende a facilitar a compreensão da imagem visualizada. Maiores informações acerca da Teoria da Gestalt e de suas Leis podem ser encontradas em Morais (2017).

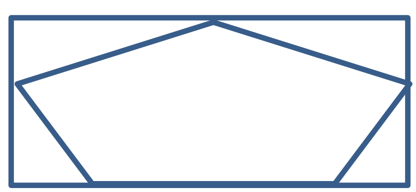
Operar sobre a figura e desconstruí-la dimensionalmente são operações essenciais na Geometria, pois exige a mudança de ver, do olhar geometricamente. Neste sentido, Moretti (2013, p. 290) enfatiza que "no mundo de hoje, cada vez mais da imagem nos meios semióticos, o "aprender a ver" torna-se cada vez mais importante não só para a disciplina de geometria, mas para grande parte das nossas atividades cotidianas". E aprender a ver, do ponto de vista matemático implica em realizar tratamentos figurais, operando sobre a figura de maneira que a figura reconfigurada traga algum ganho de conhecimento em relação à anterior, de acordo com Duval (2011).

2.1 APREENSÕES GEOMÉTRICAS

O ato de compreender ou conhecer algo é chamado de apreensão. Para Duval (2012a, 2012b), apreensão é o termo usado para destacar as variadas interpretações que emergem quando se interage com figuras, especialmente aquelas que possuem função heurística. Assim, as apreensões geométricas relacionam-se à habilidade de ver uma figura, reconhecer nela as unidades figurais e operar sobre ela. Neste sentido, Duval (2005) apresenta quatro tipos de apreensões:

1. A **apreensão perceptiva ou gestáltica**: permite identificar com rapidez uma forma ou um objeto bidimensional ou tridimensional, não exigindo conhecimentos matemáticos. Ela é fundamental, pois comanda as outras apreensões, dando ideias de como resolver um problema, por exemplo. É o reconhecimento visual de formas, sendo imediata e automática. Veja como esta apreensão pode se desenvolver quando se interage com a imagem apresentada na Figura 5.

Figura 5: Qual (ais) figura (as) você reconhece?

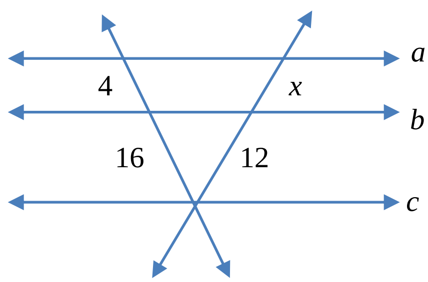


Fonte: Autora

Esta atividade possibilita duas respostas diferentes: se prevalecer as leis da Gestalt será identificada uma figura única, composta de um pentágono sobreposto a um retângulo, pois por estas leis, o olhar tende a reconhecer a figura como uma unidade; se estas leis não prevalecerem, pode-se reconhecer um pentágono e quatro triângulos retângulos. É a apreensão perceptiva de cada pessoa que irá determinar a/as figura/as reconhecida/as.

2. A **apreensão discursiva**: emerge quando um enunciado ou explicação acompanha um desenho ou uma figura. Uma indicação verbal faz o papel de âncora entre a figura e a representação do objeto matemático. É a interpretação dos elementos da figura, apresentada pelo enunciado. Esta apreensão deve estar articulada com a figura e deve comandar a percepção. Veja este exemplo:

Figura 6: Calcule x, sabendo que a // b // c:

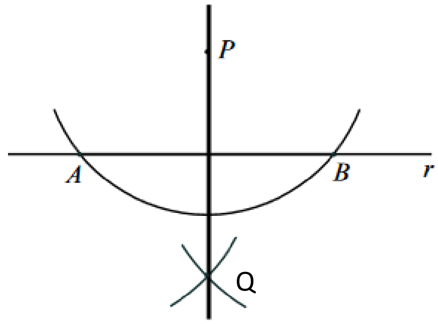


Fonte: Autora

Com a informação dada no enunciado de que as retas a, b e c são paralelas, é possível fazer a interpretação de que as outras duas retas são transversais, comandando a percepção de que se trata de segmentos proporcionais. Assim, o enunciado influencia na maneira de ver as retas e lança hipóteses para a resolução do problema.

3. A **apreensão sequencial**: refere-se àquela apreensão requerida em construções geométricas, em que uma sequência de passos deve ser observada e seguida. Por exemplo, para traçar uma reta perpendicular usando régua não graduada e compasso, segue-se as seguintes orientações: seja uma reta r e um ponto P fora da reta r. Coloque a ponta seca do compasso em P e descreva um arco de raio qualquer, interceptando a reta r nos pontos A e B. Depois, descreva dois arcos centrados em A e B com raio maior que $\overline{AB}$ marcando como Q a interseção desses arcos. A reta que passa pelos pontos P e Q é a perpendicular desejada (Figura 7).

Figura 7: Construção da reta perpendicular por um ponto pertencente a uma reta dada



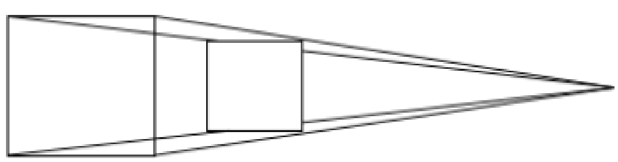
Fonte: Adaptado de Wagner (2015, p. 4)

Observando a figura construída, os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são iguais, pois o arco foi centrado em P. Os dois arcos centrados em A e B possuem o mesmo raio e determinam o ponto Q, sendo que os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{BQ}$ também são iguais entre si, definindo a reta perpendicular. Esta perpendicular construída, pelas suas características, é chamada de mediatriz, pois passa no ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

4. A **apreensão operatória**: relacionada às modificações ou transformações possíveis de uma figura inicial, o que pode ocorrer graficamente ou mentalmente. Essas modificações podem ser:

- **Óticas:** ocorrem ao deformar, ampliar ou reduzir as figuras em outras, que são as suas imagens. Exemplo: homotetia.

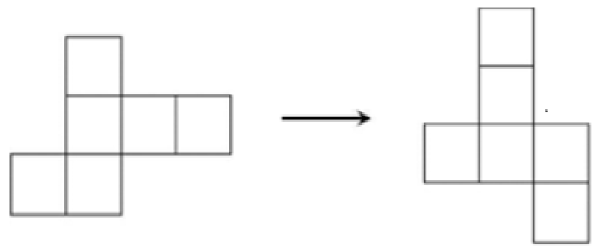
Figura 8: Modificação ótica: homotetia



Fonte: Duval (2004, p. 167)

- **Posicionais:** referem-se à mudança de posição, geralmente em relação ao plano paralelo, sendo exemplos a rotação e a translação.

Figura 9: Modificação posicional por meio de rotação



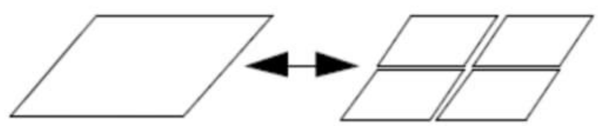
Fonte: Duval (2004, p. 173)

- **Mereológicas**: repartições de uma figura em subfiguras, ou acréscimo de outras.

Para Duval (2005), existem três modos de efetuar a decomposição figural:

a) Decomposição estritamente homogênea: a forma da figura final mantém a forma da figura inicial, conforme o exemplo abaixo:

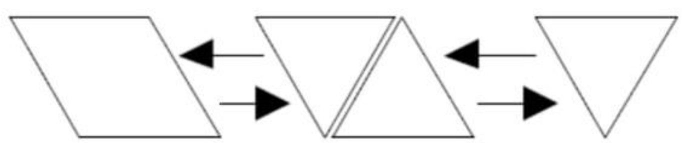
Figura 10: Decomposição estritamente homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21)

b) Decomposição homogênea: a forma da figura final tem partes idênticas à figura inicial, conforme a seguinte ilustração:

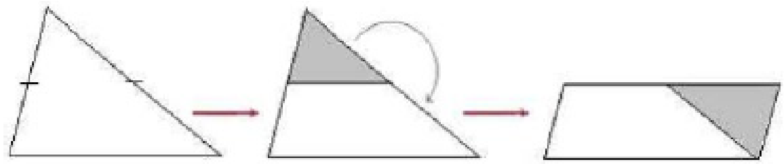
Figura 11: Decomposição homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21)

c) Decomposição heterogênea: a forma da figura final é totalmente diferente da forma da figura inicial.

Figura 12: Decomposição heterogênea



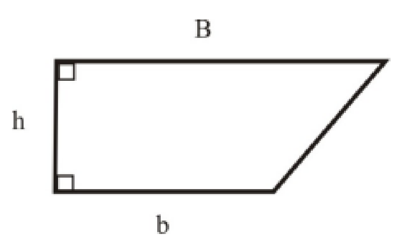
Fonte: Duval (2005, p. 21)

Essas modificações e os tratamentos figurais associados a elas permitem que a figura cumpra sua função heurística, que segundo Duval (2012a, p. 125, grifos do autor) “**está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto”.** Assim, segundo o autor, os tratamentos figurais são o primeiro passo em direção aos tratamentos matemáticos, ou seja, diante de uma figura geométrica é necessário mobilizar as apreensões, em especial a apreensão operatória que visa revelar tratamentos figurais, para em seguida identificar e aplicar tratamentos matemáticos, que podem ser algébricos, numéricos, etc.

Dentre os diversos tratamentos figurais tem-se a reconfiguração, também conhecida como reconfiguração intermediária, associada à modificação mereológica. Sobre a reconfiguração, Duval (2011, p. 92) afirma que “ela mostra-se como uma das chaves do processo de ensinar a ver figuras”. Ela surge quando a figura é dividida em subfiguras, relacionando as partes com o todo, a fim de aplicar os tratamentos figurais. É necessário visualizar as subfiguras, visualizar a reorganização delas e também visualizar os possíveis tratamentos que possam ser aplicados.

Como exemplo da reconfiguração, há os tratamentos figurais usados por Moretti e Brandt (2013, p. 11) para a obtenção da fórmula do cálculo da área de um trapézio, segundo figura abaixo:

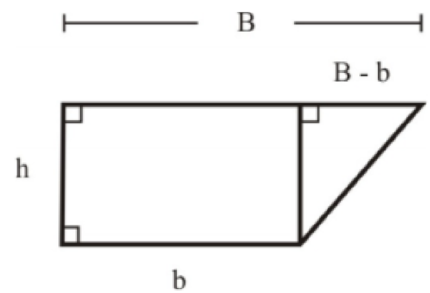
Figura 13: Estabelecer a fórmula da área do trapézio



Fonte: Moretti e Brandt (2013, p. 11)

Ao adicionar um traço vertical ao trapézio (Figura 14), que caracteriza a operação de reconfiguração, visualizam-se duas subfiguras: um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo com dimensões dos lados b e h e o triângulo retângulo com catetos B – b e h.

Figura 14: Reconfiguração intermediária para a obtenção da fórmula



Fonte: Moretti e Brandt (2013, p. 11)

Partindo da reconfiguração, é possível realizar tratamentos no registro algébrico para determinar a área da figura. A área procurada A passa a ser a soma das áreas do retângulo e do triângulo retângulo e, portanto: $A = b.h + \frac{(B-b)}{2}.h \Rightarrow A = \frac{(b+B)}{2}.h$.

O acréscimo do traço reconfigurou a figura e foi fundamental para a obtenção da representação da área do trapézio no registro algébrico, auxiliando no trato da visualização e tornando os cálculos mais simples, como discorrem Moretti e Brandt (2013).Visualmente, o trapézio pode ser pensado como a soma das duas subfiguras formadas após a inserção do traço, mostrando que "por meio da reconfiguração pode-se calcular a medida de área de uma figura a partir da soma das áreas de suas partes ou a partir do reconhecimento da equivalência de dois reagrupamentos intermediários", conforme afirma Menoncini (2018, p. 36).

A reconfiguração intermediária, por si só, não garante a resolução de todos os problemas relacionados às figuras geométricas, pois é necessária atenção às informações do enunciado do problema (apreensão discursiva) e ao reconhecimento de certas qualidades visuais presentes na figura (apreensão perceptiva). Dessa forma, as apreensões não emergem de forma isolada. Em um mesmo problema, uma pode ser mais requisitada do que outra, sendo que todas podem aparecer em maior ou menor grau. Não há hierarquia entre elas, mas uma relação de dependência e articulação.

Diante de uma figura, ao mobilizar as apreensões, podem emergir diferentes tipos de olhares: icônicos e não-icônicos. Estes, por sua vez, subdividem-se em quatro tipos, conforme o Quadro1.

Quadro 1: Tipos de olhares

ICÔNICO		**NÃO-ICÔNICO**	
Botanista	**Agrimensor**	**Construtor**	**Inventor**
Permite reconhecer o contorno de formas e diferenciá-las. Observar diferenças nas figuras semelhantes e semelhanças nas formas diferentes. Prepara para os demais olhares.	Utilizado para fins de medida e escala, transferir de uma escala de grandeza à outra.	Refere-se ao uso de instrumentos, régua não-graduada e compasso.	É o acréscimo de traços na figura em um problema, operação e modificação para descobrir um método de resolução.

Fonte: Moretti (2013, p. 294)

Quanto aos olhares icônicos, o olhar botanista é o olhar que diferencia formas, contornos. É um olhar qualitativo, que prepara a pessoa para os demais olhares. Agrimensor é aquele olhar que consegue passar as medidas de um terreno para o papel, usando escalas. Já o olhar não-icônico construtor usa instrumentos de desenho, como réguas, compassos ou aplicativos como o GeoGebra, enquanto que o inventor acrescenta traços, modifica e opera para descobrir como resolver um problema.

Assim, conforme as apreensões geométricas são exigidas, esses olhares caminham de um lado para outro, induzindo certas compreensões:

> Passar de uma maneira de ver para uma outra constitui uma mudança profunda de olhar, que é tão frequentemente ignorado no ensino. Pois o funcionamento cognitivo implicado por cada uma de suas quatro maneiras de ver não é a mesma [...]. Mas já podemos enfatizar que cada maneira de ver induz um tipo particular e limitado de compreensão. O conhecimento desenvolvido não é o mesmo segundo o olhar onde um aluno se sente ser capaz ou incapaz de mobilizar, e isso na presença da mesma figura. (DUVAL, 2005, p. 11).

De acordo com o autor, o ensino e a aprendizagem em geometria devem levar em conta os diversos elementos que a compõe, com base nas apreensões e nos olhares acima citados. Esse processo deve ocorrer de forma contínua, no decorrer de todos os anos escolares, para que o aluno tenha mais facilidade em resolver problemas que envolvem figuras geométricas.

3 O TANGRAM

3.1 CONHECENDO O TANGRAM

"Uma imagem vale por mil palavras, porque via de regra é muito mais fácil mostrar do que falar." (Provérbio chinês)

Os tangrans são quebra-cabeças muito antigos. O mais conhecido e antigo é o chinês, inventado há mais de quatro mil anos, trazido da China para o Ocidente por volta da metade do século XIX. Em 1818 já era conhecido na América, Alemanha, França, Itália e Áustria, mantendo-se até hoje na sua forma original. Em chinês o tangram também é conhecido como "Tchi Tchiao Pan", cuja tradução é as "Sete Peças da Sabedoria", que representariam as sete virtudes chinesas: Criatividade, Humildade, Paciência, Perfeição, Perseverança, Sabedoria e União, dando a impressão que sua criação tem algum propósito religioso ou místico, empregando as sete peças para descrever o mundo (SOUZA *et al*., 1997).

Martins *et al*. (2015) destacam várias lendas e histórias sobre a origem desse quebra-cabeça. Uma das versões menciona que há cerca de quatro mil anos atrás, um mensageiro partiu o espelho quadrado do imperador Tan, quando o deixou cair ao chão. O espelho partiu-se em sete pedaços. Preocupado, o mensageiro foi juntando as sete peças a fim de remontar o quadrado. Enquanto tentava resolver o problema, o mensageiro criou centenas de formas de pessoas, animais, plantas, até conseguir refazer o quadrado. Outra lenda, relata a história de um senhor chinês chamado Tan, que vivia num país muito distante, em um palácio dourado, junto de um lago. O que ele mais adorava era passear em volta do lago durante horas. Um dia, enquanto vagueava no meio dos juncos, viu no chão um objeto brilhante. Baixou-se e descobriu um magnífico azulejo de prata. Apanhou-o e admirou-o: o azulejo era liso como a superfície do lago, macio como uma pluma, brilhante como o seu traje. Quis virá-lo, mas infelizmente o lindo azulejo escapou-lhe das mãos e partiu-se no chão em sete pedaços. O senhor Tan, desiludido, tentou reconstituí-lo e juntando as peças criou a forma de uma pequena personagem. Deslocou mais umas peças e, para seu espanto, formou-se uma linda casa. O senhor Tan regressou ao palácio muito entusiasmado por ter inventado um novo jogo. Batizou-o de tangram e mandou fabricar um para cada habitante do seu reino.

Não se sabe se tais histórias são verdadeiras, pois não existem registros históricos que as confirmem ou refutem. Porém, em 1813 já haviam registros sobre o tangram:

> Os primeiros registros sobre o tangram encontram-se em um livro datado de 1813 de um escritor chinês que possui o pseudônimo Yang Cho Chu Shi e que possivelmente foi escrito na época em que o imperador Chia Ch'ing (1796 – 1820) governava na China. Todavia, existem outras versões que datam a origem do quebra-cabeça no período da dinastia Tang (618 – 907), de onde derivaria seu nome. (MARTINS *et al*., 2015, p. 13).

Martins *et al*. (2015) trazem a imagem dos primeiros tangrans, conforme se observa abaixo.

Figura 15: Primeiros registros sobre tangram

Fonte: Martins *et al*. (2015, p. 13)

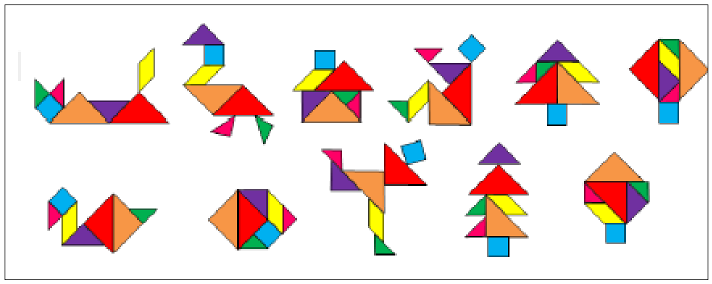
O tangram clássico ou tradicional tem como essência um quadrado que foi decomposto em sete outras figuras geométricas, sendo dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo, conforme Figura 16.

Figura 16: Tangram clássico ou tradicional

Fonte: Souza *et.al*. (1997, p. 1)

De acordo com Gonçalves *et al*. (2012), com essas sete peças é possível montar cerca de 1700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números e figuras geométrica, sendo que as peças sempre devem ser colocadas lado a lado, sem sobreposição. Alguns exemplos são mostrados a seguir.

Figura 17: Figuras montadas a partir das peças do tangram

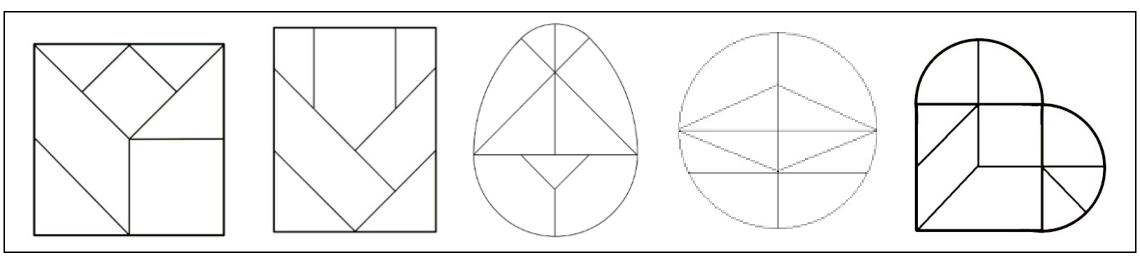


Fonte: Santos (2019, p. 103)

Santos (2019) apresenta algumas possibilidades de figuras formadas com as peças do tangram, mas outras podem ser criadas, basta ter criatividade ao juntar as peças.

Além do tangram tradicional, existem outras versões como o Tangram de Fletcher, o Tangram Retangular, o Tangram Oval, o Tangram Circular, o Tangram Coração Partido, todos apresentados na próxima figura, respectivamente:

Figura 18: Outros formatos de tangram



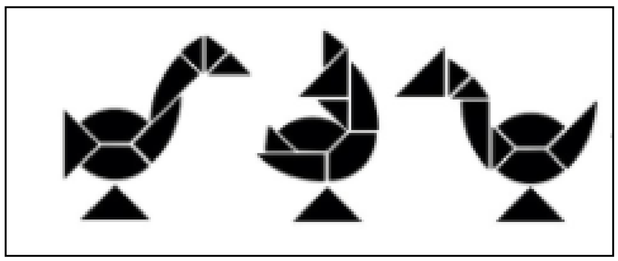
Fonte: Adaptado de Souza *et al*. (1997)

Cada versão do tangram apresentada na Figura 18 é composta por distintas peças, que variam em quantidade e em formatos. O tangram de Fletcher foi fabricado originalmente no século XIX por F.A. Richter and Company e também é conhecido como tangram de Pitágoras. É composto por sete peças, constituído por quatro triângulos retângulos isósceles, dois quadrados e um paralelogramo, formando um quadrado. Acredita-se que a intenção do fabricante em criar esse tangram era provar o famoso teorema de Pitágoras (SOUZA *et al*., 1997).

Na composição do tangram Retangular encontram-se também sete peças: quatro quadriláteros (dois trapézios retângulos pequenos, um trapézio retângulo médio e um trapézio retângulo grande), dois triângulos isósceles e congruentes e um pentágono irregular.

Das nove peças do tangram Oval ou Ovo Mágico, uma peça é de forma triangular e oito peças estão em pares, formando quatro pares com o mesmo formato e tamanho. Com sua construção, é possível abordar a concordância de arcos e formar muitas figuras interessantes (Figura 19).

Figura 19: Figuras de aves construídas com o tangram Oval

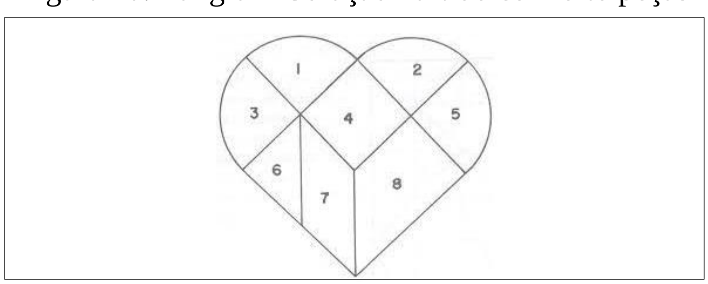


Fonte: Souza *et al*. (1997, p. 99)

Com as dez peças do tangram Circular permite-se explorar atividades com setores circulares e a formação de figuras que possuem a circunferência em sua composição. É formado por setores circulares, semicírculos e polígonos.

O tangram do Coração partido é um quebra-cabeça formado por oito ou nove peças. Esse tangram é constituído por: quatro ou cinco setores circulares, um quadrado, um trapézio retangular, um paralelogramo e um triângulo retângulo.

Figura 20: Tangram Coração Partido com oito peças



Fonte: Souza *et al*. (1997, p. 96)

Os inúmeros formatos de tangram também podem servir para o estudo de diversos conceitos em geometria, como a observação das diferentes representações de figuras planas realizadas pelo processo de justaposição de todas as suas peças, mas que estas mantêm a sua área, por exemplo. São materiais que representam “estratégias para promover a reflexão do aluno sobre aspectos de um determinado conceito que se quer desenvolver” (SOUZA *et al.*, 1997, p. 4).

3.2 POSSIBILIDADES MATEMÁTICAS COM O TANGRAM TRADICIONAL

O uso de materiais didáticos durante as aulas de matemática proporciona uma interação com o conteúdo matemático, aproximando o aluno de forma lúdica e investigativa aos conhecimentos matemáticos. Segundo Lorenzato (2008, p. 17), “palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticas ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar.” Ademais, o tangram é apresentado como jogo lúdico e seu objetivo é ser um “elo para que os alunos possam descobrir as formas e representações geométricas” (PONTES, 2016, p. 4). Assim, o tangram se revela como um objeto didático e lúdico que pode auxiliar no ensino de matemática, em particular de geometria.

O tangram tradicional de sete peças é a versão mais conhecida e utilizada no âmbito escolar e uma justificativa para isso remete às suas formas geométricas:

> As formas geométricas que o compõem permitem que os professores vejam neste material a possibilidade de inúmeras explorações, quer seja como apoio ao trabalho de alguns conteúdos específicos do currículo de matemática, ou como forma de propiciar a desenvolvimento de habilidades de pensamento. (SOUZA *et al.,* 1997, p. 3).

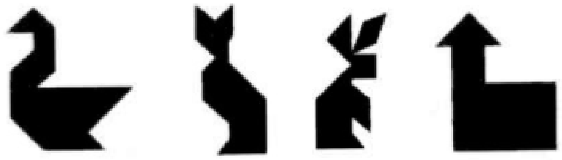
Nas aulas de matemática, uma das vantagens do tangram[3] é o fácil acesso a esse material. Pode ser confeccionado com uma simples folha de papel ofício. Ele é um material manipulável e não exige nenhuma habilidade especial.

Outra vantagem desse material é a possibilidade de ampliar o conhecimento dos tipos de figuras conhecidas pelos alunos. Pela composição das peças, muitas e variadas figuras podem ser formadas, fazendo com que as habilidades de percepção espacial se desenvolvam. A sobreposição

[3] A partir de agora, o termo tangram refere-se à sua versão tradicional, composta por sete peças.

e a construção de figuras dadas com base em uma silhueta, por exemplo, desenvolve a memória visual e a percepção de figuras planas e de suas propriedades (GONÇALVES *et al*., 2012).

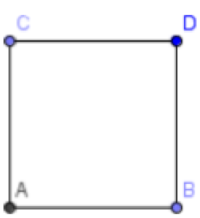
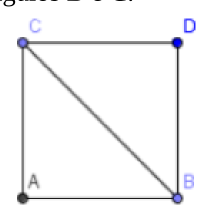
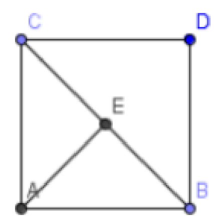
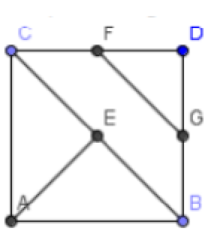
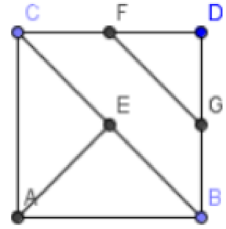
Figura 21: Silhuetas de figuras.

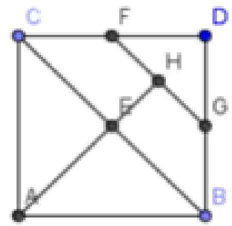
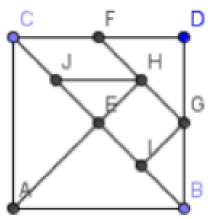
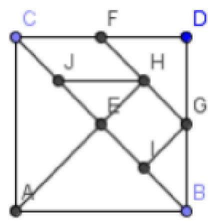


Fonte: Gonçalves et al. (2012, p. 125)

Durante sua confecção, é possível introduzir conceitos de retas, semirretas, segmentos de retas, ponto médio e bissetriz. Além disso, os conceitos de paralelismo, lados e vértices também podem ser abordados. Veja o passo a passo de uma confecção do tangram no quadro abaixo.

Quadro 2: Passo a passo para a confecção do tangram.

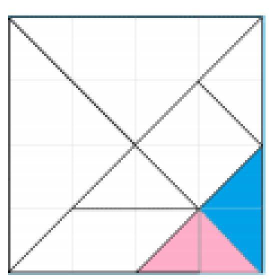
1-Utilizando uma folha de papel dobradura ou similar, recorte um quadrado. Nomeie os vértices desse quadrado ABCD. 	2-Dobre o quadrado pela diagonal BC. Abra e risque essa linha de dobra, dividindo o quadrado em dois triângulos iguais. Constata-se que a diagonal do quadrado também é bissetriz dos ângulos B e C. 	3-Trace a metade da diagonal AD do quadrado. As diagonais AD e BC se encontrarão em um ponto que chamaremos de E. O ponto E é o ponto médio das duas diagonais. 
4-Encontre os pontos médios F e G respectivamente dos segmentos CD e BD. 	5-Trace um segmento de reta do ponto F ao ponto G. 	6- Prolongue o segmento AE até o segmento FG, de forma que o ponto de interseção desses segmentos, o ponto H, seja o ponto médio do segmento FG.

		
7-Encontre os pontos médios dos segmentos BE e CE, esses pontos serão I e J respectivamente. 	8-Por fim, una com uma reta os pontos H e J e I e F. 	

Fonte: Adaptado de Souza *et al*. (1997, p. 65)

Com suas peças o estudo da semelhança de figuras geométricas fica mais palpável. Classificar polígonos, desenhar formas geométricas planas, visualizar, explorar as transformações através da decomposição e composição de figuras são aspectos importantes para o entendimento da congruência e semelhança entre as formas. Considerando o menor triângulo do tangram como uma unidade, pode-se compará-lo com as demais peças, respondendo questões do tipo: “Quantos triângulos pequenos são necessários para "cobrir" o triângulo médio ou o quadrado?” “O maior e o menor triângulo são semelhantes entre si?” (Figura 22).

Figura 22: Comparando as peças do tangram.



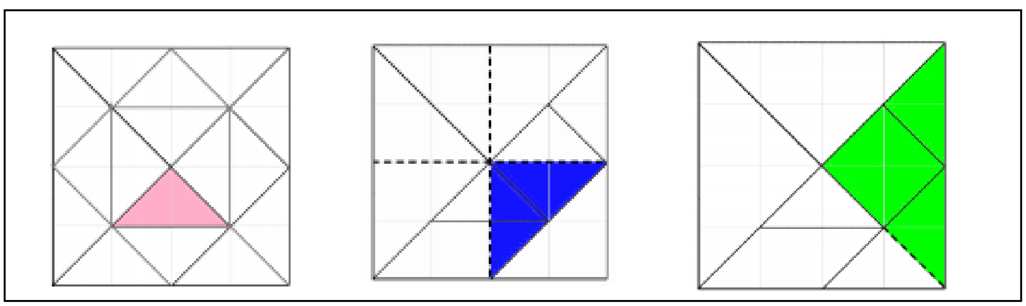
Fonte: Santos (2019, p. 110)

Observando a Figura 22, são necessários dois triângulos pequenos para sobrepor o triângulo médio e o quadrado. Comparando o maior e o menor triângulo, percebe-se que ambos são semelhantes, tratando-se de dois triângulos retângulos isósceles.

Souza *et al*. (1997) dedicam um capítulo inteiro para demonstrar a semelhança dos triângulos do tangram. Elas partem das medidas dos ângulos internos dos triângulos e da comparação da medida dos seus lados. Sabendo que dois triângulos são semelhantes se os três ângulos internos correspondentes são congruentes ou quando os três pares de lados correspondentes são proporcionais, sugerem a verificação da primeira condição com a sobreposição das peças ou a utilização do transferidor. Para verificação da condição de proporcionalidade entre os lados de qualquer triângulo do tangram, os autores trazem como referência o triângulo pequeno.

O tangram também é uma alternativa para reforçar os conteúdos relacionados a frações e áreas. Ele apresenta uma relação de proporcionalidade entre suas sete peças. Na Figura 23, o triângulo pequeno tem área igual a 1/16 da área do tangram, o triângulo grande possui 1/4 e as demais peças 1/8 cada. Com a sobreposição das peças, é possível explorar áreas equivalentes e visualizar as fórmulas para o cálculo das mesmas.

Figura 23: Comparando as peças do tangram



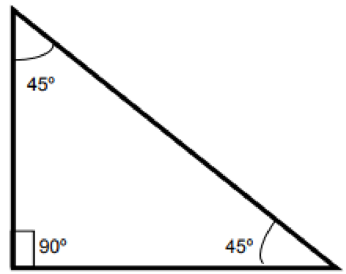
Fonte: Santos (2019, p. 112-113)

Observando as três figuras, o triângulo pequeno é a peça mais indicada para comparar figuras feitas a partir do tangram, pois ele cabe um número inteiro de vezes em todas as outras peças.

Os ângulos também podem ser estudados. Classificando os polígonos quanto as suas formas e lados, observa-se que tem triângulos retângulos e isósceles. Dando um passo a mais, é possível iniciar a dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Todos os triângulos retângulos do tangram possuem dois lados com a mesma medida e portanto, são isósceles (Figura 24).

Figura 24: Ângulos dos triângulos retângulos do tangram

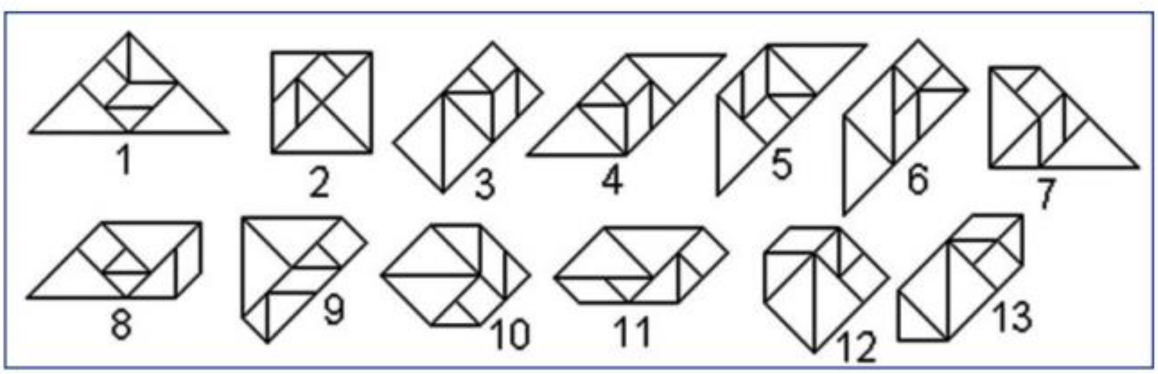


Fonte: Pollon (2013, p. 25)

A figura acima mostra as medidas dos ângulos de um triângulo retângulo e isósceles, peça do tangram.

Usando o tangram também podem ser trabalhados os conceitos de simetria, perímetro, números racionais e até mesmo números irracionais (na incomensurabilidade existente entre alguns segmentos de reta que formam as peças do tangram). Lopes (2009) reforça esses conceitos quando traz, em seu artigo, os treze polígonos convexos enumerados, com seu respectivo nome, classificação, simetrias, área, perímetro e aproximação decimal, conforme Figura 25 e Quadro 3.

Figura 25: Polígonos convexos.



Fonte: Lopes (2009, p. 4)

Quadro 3: Nome, classificação, simetrias, área, perímetro e aproximação decimal.

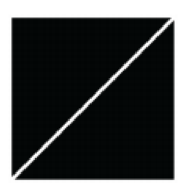
Figura	Nome e classificação	Simetrias	Área	Perímetro	Aproximação decimal
1	Triângulo retângulo isósceles	1 eixo de simetria	8	$8 + 4\sqrt{2}$	13,6
2	Quadrado (quadrilátero regular)	4 eixos de simetria; simetria de rotação de 90º	8	$8\sqrt{2}$	11,3
3	Retângulo	2 eixos de simetria, simetria de rotação de 180º	8	12	12
4	Paralelogramo	Simetria de rotação de 180º	8	$8 + 4\sqrt{2}$	13,6
5	Trapézio isóscele	1 eixo de simetria	8	$8 + 4\sqrt{2}$	13,6
6	Trapézio retângulo	0	8	$10 + 2\sqrt{2}$	12,8
7	Trapézio retângulo	0	8	$4 + 6\sqrt{2}$	12,4
8	Pentágono	0	8	$4 + 6\sqrt{2}$	12,4
9	Pentágono	1 eixo de simetria	8	$6 + 4\sqrt{2}$	11,6
10	Hexágono	2 eixos de simetria	8	$6 + 4\sqrt{2}$	11,6
11	Hexágono	Simetria de rotação de 180º	8	$6 + 4\sqrt{2}$	11,6
12	Hexágono	1 eixo de simetria	8	$8 + 2\sqrt{2}$	10,8
13	Hexágono	2 eixos de simetria	8	$6 + 4\sqrt{2}$	11,6

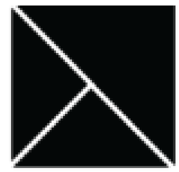
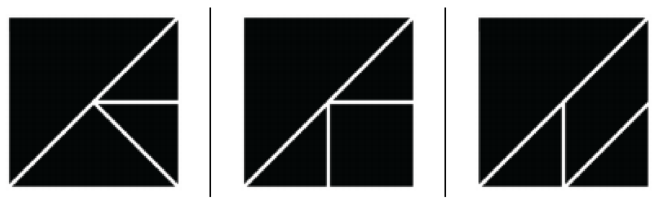
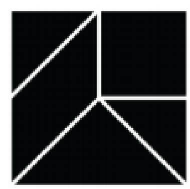
Fonte: Lopes (2009, p. 4)

Há muitos problemas instigantes, alguns sofisticados, que se pode propor aos alunos a partir da exploração do tangram como, por exemplo, a impossibilidade de se construir um triângulo usando apenas seis peças do tangram, conforme Lopes (2009).

A impossibilidade de se construir um quadrado com apenas seis peças do tangram é salientada por Souza *et al.* (1997) e pode ser visualizada no quadro a seguir:

Quadro 4: Construção de quadrados a partir das peças do tangram.

Número de peças	Figuras
Duas peças	

Três peças	
Quatro peças	
Cinco peças	
Sete peças	

Fonte: Adaptado de Souza (1997, p. 89)

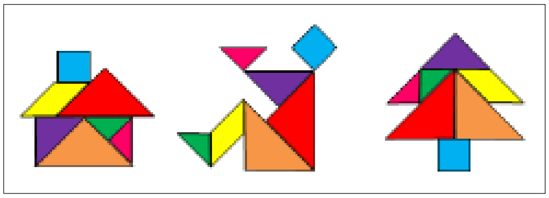
Assim, o leque de possibilidades para o uso do tangram no ensino de matemática é grande, indo para além de um quebra-cabeça de caráter lúdico e desafiador. Dentre as possibilidades, considera-se o tangram como um objeto geométrico que permite a manipulação visual. Desta forma, é importante ressaltar que o professor conheça os conteúdos que podem ser explorados por meio do tangram, tenha os objetivos traçados e saiba quais transformações são possíveis para que ocorra a compreensão dos conhecimentos matemáticos.

4 APREENSÕES GEOMÉTRICAS E O TANGRAM

De acordo com Duval (2004), toda atividade de geometria que envolve figuras deve mobilizar olhares e apreensões geométricas. Diante da interação com uma figura geométrica, deve-se priorizar a visualização, que segundo Moretti (2013) é a articulação entre as apreensões perceptiva e operatória.

Considerando a ideia de Moretti (2013) para o caso do tangram, enquanto figura geométrica, a visualização consiste na identificação das subfiguras que o compõe e na formação de figuras visualmente diferentes da original. De fato, reconhecer as subfiguras requer a mobilização da apreensão perceptiva para romper as Leis da Gestalt que direcionam o olhar para ver as sete peças como uma unidade, isto é, como um quadrado. Formar novas figuras remete à apreensão operatória e suas operações figurais, especialmente a reconfiguração. Assim, através da reconfiguração o tangram é decomposto em sete subfiguras e por meio de movimentos de rotação ou translação destas subfiguras, criam-se novas formas em que se percebe a diferença entre a figura original e a modificada.

Figura 26: Figuras formadas a partir das subfiguras do tangram

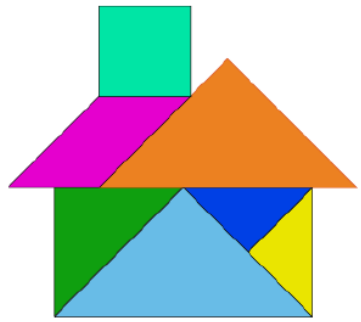


Fonte: Santos (2019, p. 103)

Na Figura 26, reproduzir a casa, o homem e a árvore a partir das peças do tangram indica que foram mobilizadas as apreensões perceptiva e operatória. É a reconfiguração que potencializa a realização dos tratamentos figurais. Nesta atividade de reconfiguração pode-se explorar o cálculo da área da figura formada (casa, homem e árvore) por meio da soma das áreas de suas partes (quadrado, triângulos, ...) ou mesmo comparar as áreas das figuras formadas utilizando um número diferente de peças do tangram.

Ainda sobre a reconfiguração, Souza e Moretti (2017) apresentam uma atividade que explora o tangram, e a desconstrução dimensional[4] se faz necessária para poder calcular a altura do paralelogramo (Figura 27).

Figura 27: Calcular a altura do paralelogramo



Fonte: Souza e Moretti (2017, p. 6)

De acordo com os autores, a tendência é olhar para a figura como um todo, reconhecendo a imagem da casa. Mas, para encontrar a altura solicitada, inicia-se um processo de desconstrução dimensional, que consiste em desconstruir a figura da casa em subfiguras bidimensionais e identificar o paralelogramo, a partir da articulação entre as apreensões perceptiva e operatória. Em seguida, para traçar suas diagonais e determinar a altura do paralelogramo, é necessária a operação de desconstrução dimensional para a primeira dimensão, o que pode causar dificuldades, uma vez que as diagonais não aparecem na imagem do paralelogramo. Souza e Moretti (2017, p. 6) alertam que "quando os objetos visíveis são composições de mais de uma figura, as situações em que a percepção age ocorreria de forma diferenciada para cada estudante e as dificuldades de visualização possivelmente aumentariam".

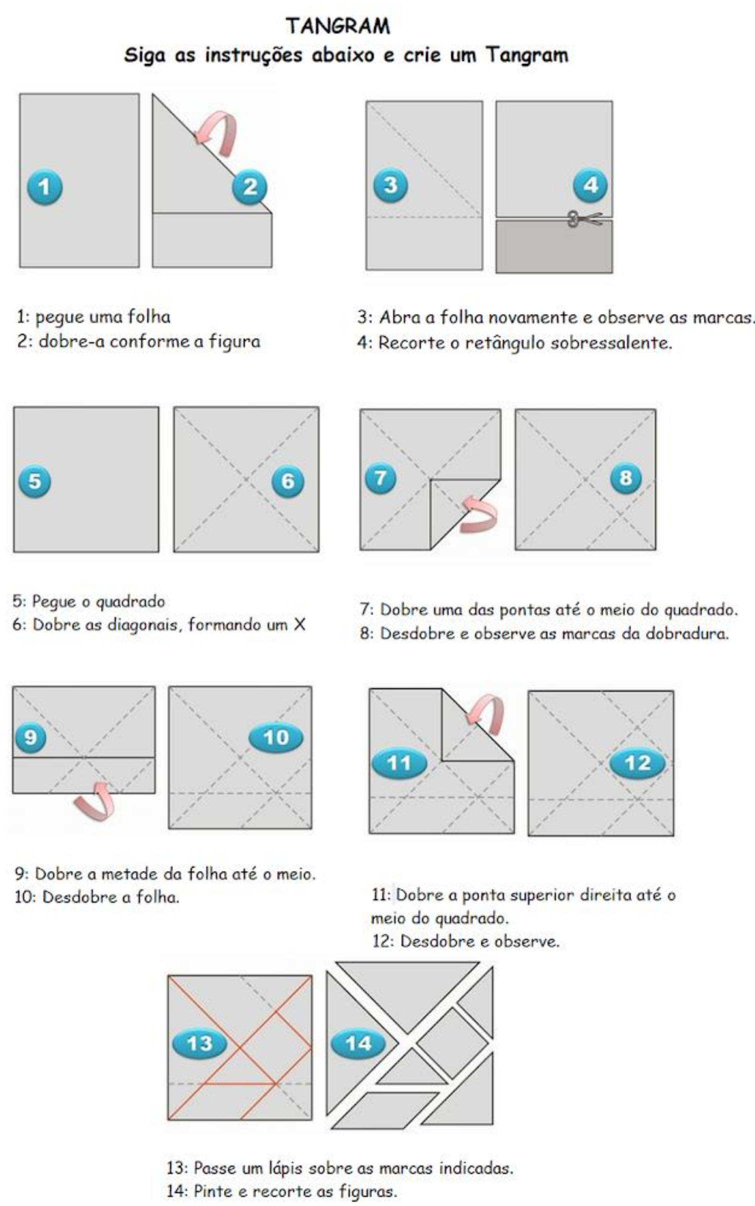
O tangram, por si só, não explicita suas propriedades geométricas, nem as propriedades de suas subfiguras. Desta forma, é necessário mobilizar a apreensão discursiva para controlar a apreensão perceptiva. Por vezes, a figura e o discurso entram em conflito, pois "a **figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem**

[4] Em geral, a desconstrução dimensional e a reconfiguração são operações semióticas distintas. Contudo, quando se trata da decomposição de uma figura bidimensional (como o tangram) em subfiguras bidimensionais (peças do tangram), essas operações podem ser sinônimas.

espontaneamente” (DUVAL, 2012a, p. 120, grifos do autor). Assim, o discurso ou enunciado de uma atividade deve sempre ser articulado com a figura do tangram, para não incorrer em erros durante a resolução da atividade.

Quanto à apreensão sequencial, ela está relacionada às construções geométricas, e portanto, está presente no processo de construção do tangram, como se observa na Figura 28.

Figura 28: Construção do tangram usando dobraduras.



Fonte: Tangram: texto instrucional

A Figura 28 mostra o passo a passo da construção do tangram usando dobraduras. Para tal construção, a apreensão sequencial é requerida.

Ao interagir com o tangram, emergem também diferentes olhares que auxiliam e complementam as apreensões geométricas. O olhar botanista é aquele que possibilita reconhecer as formas das subfiguras: triângulos, quadrado e paralelogramo. O olhar agrimensor é desenvolvido, por exemplo, quando se compara o triângulo maior com o triângulo menor. Quando há necessidade de reconhecer valores numéricos, como o cálculo da medida dos lados de uma subfigura ou do perímetro, então o olhar construtor é acionado. Já o olhar inventor é requerido, por exemplo, em atividades de recomposição de figuras a partir de subfiguras.

5 OS CAMINHOS DA PESQUISA

Este trabalho consiste em uma pesquisa qualitativa e bibliográfica. Para Lakatos e Marconi (2003, p. 182), "a pesquisa bibliográfica abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses", e tem por finalidade colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto.

Ainda sobre a pesquisa bibliográfica, Fachin (2006, p. 120), enfatiza que é a principal forma de investigação e obtenção de conhecimento durante a trajetória escolar e acadêmica, pois possibilita o contato com diversas ideias de diferentes autores. Para a autora, "a pesquisa bibliográfica se fundamenta em vários procedimentos metodológicos, desde a leitura até como selecionar, achar, arquivar, organizar e resumir o texto. Ela é a base para as demais pesquisas".

Como esta pesquisa é bibliográfica, para organizar e interpretar os dados coletados recorreu-se à análise de conteúdo segundo Bardin (2016), por meio da realização de três fases: a pré-análise, que corresponde à formação do *corpus* de documentos; a exploração do material e tratamento dos resultados; e a inferência e interpretação.

Na pré-análise, o objetivo era selecionar as coleções de livros didáticos de matemática na versão do professor, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático (PNLD) 2020. Dentre as coleções aprovadas para a área de Matemática, anos finais do Ensino Fundamental, foram selecionadas aquelas utilizadas nas redes estadual e municipal de São Carlos, SC, município em que a pesquisadora atua como professora de matemática em ambas as redes. Assim, ficou definido o quantitativo de três coleções, já que a rede municipal de educação adota uma única coleção para as suas três escolas e as duas escolas estaduais têm autonomia para escolher a coleção de sua preferência. Em diálogo com professores e gestores, foi possível identificar que a rede municipal e as duas escolas estaduais adotam a mesma coleção, *Matemática Essencial*. Como a proposta era analisar três coleções distintas, o diálogo se estendeu para a rede de ensino estadual de Águas de Chapecó, Saudades, Cunhataí e Palmitos, municípios limítrofes de São Carlos. Os municípios de Águas de Chapecó e Cunhataí só atendem os anos finais do Ensino Fundamental e também adotam a coleção *Matemática Essencial*, enquanto que Saudades e Palmitos, a coleção *A Conquista da Matemática*. Desta forma, a segunda coleção selecionada foi *A Conquista da Matemática.* Com a necessidade de buscar a terceira coleção, fez-se contato com a gestão da rede municipal de Chapecó, a qual informou que também adota a última coleção supracitada. Por fim, foi escolhida a coleção *Teláris Matemática*, de forma aleatória dentre as nove coleções recebidas de amostra em 2019 pelas escolas em que a pesquisadora atua.

Na segunda fase, dedicada à exploração do material e tratamento dos resultados, foram avaliadas as coleções observando se contemplavam ou não atividades que envolviam o tangram. Em paralelo, foram identificados os volumes (anos escolares) e os conteúdos matemáticos em que tais atividades estavam sendo abordadas. As três coleções apresentaram tais atividades e foram mantidas como base de dados. Sendo assim, as coleções de livros didáticos de Matemática do 6º ao 9º ano, objeto de estudo desta pesquisa são:

- PATARO, Patrícia Moreno e BALESTRI, Rodrigo. **Matemática Essencial.** 1ª edição. São Paulo: Scipione, 2018.
- GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy e CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**. 4ª edição. São Paulo: FTD, 2018.
- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática**. 3ª edição. São Paulo: Ática, 2018.

Nas coleções, as atividades com o tangram estão disponíveis na versão do professor e do aluno, ou somente do professor. Em virtude disso, elas ficam definidas como ATIVIDADE X – A ou ATIVIDADE X – P, em que X representa o Número da atividade, e as letras A ou P representam Aluno ou Professor, respectivamente. Para exemplificar, **ATIVIDADE 1-A** indica que a Atividade 1 está disponível no livro didático do aluno e do professor, enquanto que **ATIVIDADE 1-P** indica que está disponível apenas para o professor.

Selecionadas as coleções e observando as atividades, foram identificadas duas formas de exploração do tangram: como recurso didático, a partir da confecção e da manipulação física de suas peças ou subfiguras; ou como figura geométrica. Como recurso didático, o tangram permite desenvolver habilidades visuais e de operação sobre a figura, a partir da manipulação de suas peças permitindo realizar tanto tratamentos figurais por justaposição como por sobreposição. Como figura, desempenha seu papel heurístico, em que as relações geométricas podem ser amplamente abordadas, uma vez que as propriedades das figuras planas podem se tornar mais evidentes. Assim, o tangram pode ser explorado de formas distintas, excludentes ou complementares, dependendo da proposta da atividade.

Na última fase são elencadas as categorias de análise. Segundo Bardin (2016), na categorização ocorre a classificação dos elementos coletados, agrupando-os em razão de características comuns. Seu primeiro objetivo é fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos para depois representar os dados de forma organizada. Assim, por meio da categorização um texto é desmembrado em categorias e estas são reagrupadas de acordo com critérios definidos.

Com base na Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval, em particular olhando para as considerações desta teoria acerca do ensino de geometria, foi possível reconhecer aspectos comuns nas atividades das três coleções, e assim definir duas categorias de análise e duas subcategorias relacionadas à apreensão operatória e aos olhares:

- **Categoria 1 - As apreensões Geométricas**:

Perceptiva (P), Discursiva (D), Sequencial (S) e Operatória (O).

- **Subcategorias da Apreensão Operatória - Modificações:**

Modificação Mereológica de Reconfiguração Intermediária (MM), Modificação Posicional (MP), Modificação Ótica (MO).

- **Categoria 2 – Os Olhares:**

Icônicos (I), Não-Icônicos (N-I).

- **Subcategorias dos olhares:**

Icônicos (I): Botanista (B), Agrimensor (A);

Não-Icônicos (N-I): Construtor (C), Inventor (I).

Buscando clarificar a ideia de como as modificações e os olhares foram identificados em cada atividade desta pesquisa, considerou-se o seguinte entendimento:

A reconfiguração intermediária (MM) foi relacionada à criação de figuras a partir das peças do tangram ou de algum acréscimo à figura, como um traçado de segmento de reta.

A modificação posicional (MP) foi associada ao reposicionamento ou sobreposição de peças do tangram, sem gerar uma nova figura.

A modificação ótica (MO) foi responsável pela comparação de figuras ou subfiguras do tangram que apresentam o mesmo formato, mas com tamanhos distintos.

O olhar botanista identificou o formato das figura e enquanto que o agrimensor comparou suas superfícies. O olhar construtor exigiu algum instrumento de medição, como régua, transferidor. Já o olhar inventor remeteu à ideia de invenção ou criação de algo. Desta forma, o olhar inventor é o único olhar que sempre emergiu junto com a operação de reconfiguração intermediária.

De modo geral, as apreensões, os olhares e as modificações não emergem isoladamente e por isso, uma mesma atividade pode requerer mais de uma apreensão, mais de um olhar, mais de uma modificação, ou mesmo mesclá-los. Assim, a partir destas categorias, buscou-se analisar os dados com intuito de responder a pergunta desta pesquisa.

5.1 APRESENTANDO AS COLEÇÕES

Esta seção faz uma breve introdução às três coleções selecionadas para análise, visando situar o leitor quanto à forma como os livros estão organizados e destacando os conteúdos matemáticos que exploram o tangram.

5.1.1 Coleção 1: Matemática Essencial

Os livros da versão para o professor, da coleção *Matemática Essencial* edição de 2018, estão estruturados em duas partes. A primeira parte é composta pelas orientações didáticas e metodológicas e pelas contribuições da BNCC. Ainda conta com sugestões de livros e sites, moldes diversos para reprodução e bibliografia. A segunda parte é composta pela reprodução das páginas do livro do aluno de maneira espelhada e reduzida, com orientações nas partes lateral e inferior. Dentre as orientações estão as *Atividades complementares* que são sugestões de atividades como jogos, construções, manipulação de materiais concretos, problemas, entre outras, disponíveis apenas no livro do professor.

A coleção apresenta os conteúdos do 6º ano organizados em treze capítulos e os conteúdos do 7º, 8º e 9º anos em doze capítulos. Em todos os livros, cada capítulo mostra os objetivos do capítulo e dicas sobre a avaliação do conteúdo, além de relacionar as atividades com as habilidades e competências previstas na BNCC. No início de cada capítulo é apresentado o tema principal e um texto de abertura com ilustrações em que o conteúdo abordado é relacionado com outras áreas do conhecimento.

De forma geral, os capítulos estão estruturados por meio das seções listadas na sequência, e os conteúdos por meio de tópicos:

- *Atividades* - exercícios de aplicação.
- *Matemática em destaque* – atividades que trazem um texto e, por vezes, recursos gráficos que envolvem algum tema curioso relacionado à realidade do aluno e a outras áreas do conhecimento.
- *Explorando o que estudei* – questões que dão oportunidade ao aluno para refletir sobre o que aprendeu durante o trabalho com o conteúdo estudado. Esta seção encontra-se no final de cada capítulo e busca desenvolver o raciocínio lógico e investigativo dos alunos.
- *Cidadania: explore essa ideia* – essa seção trabalha os temas contemporâneos elencados na BNCC, estruturados por textos e cenas ilustradas, gráficos e questões que despertam o pensamento crítico sobre o tema. Esta seção não está presente em todos os capítulos.

Ao final de cada livro, tem-se a seção *Explorando tecnologias*, que apresenta exemplos e propostas de atividades utilizando *softwares* livres como o Geogebra e Calc. Também, no final, os autores trazem sugestões de livros e sites, respostas dos exercícios e bibliografia.

5.1.1.1 O tangram na coleção

Analisando os livros dessa coleção, o tangram aparece nos quatro volumes da coleção, quando os autores abordam polígonos, semelhança de figuras e área.

No 6º ano o tangram aparece em atividades para os alunos no estudo de geometria plana, sendo explorado e abordado somente em dois capítulos: capítulo 8, *Polígonos e figuras semelhantes* e capítulo 13, *Medidas de área e volume*. Quanto aos demais capítulos do 6º ano, o capítulo 1 trata das *Figuras geométricas espaciais*. Os capítulos 2 e 3 abordam os *Números naturais* e *Operações com números naturais*, respectivamente. *Potências e raízes*, *Múltiplos e divisores*, *Frações*, e *Ângulos e retas* são contemplados, respectivamente, nos capítulos 4, 5, 6 e 7. Os capítulos 9 a 12 abordam respectivamente a *Localização e pares ordenados*, *Números decimais*, *Medidas de comprimento, de massa e de tempo*, *Estatística e probabilidade*. O livro é finalizado com o capítulo 13, já mencionado.

No 7º ano, o tangram não aparece como atividade para os alunos, sendo sugerido ao professor como *Atividade complementar* no último capítulo do livro, no capítulo 12, *Medidas de área e volume*. O rol de capítulos começa com *Múltiplos e divisores*, seguido de *Frações*, *Números* *decimais, Estatística e probabilidade, Números positivos e negativos, Expressões algébricas, fórmulas e equações, Grandezas e medidas de temperatura, energia e capacidade, Ângulos, Polígonos e formas circulares, Proporcionalidade, Simetria e transformação de figuras*, finalizando com o capítulo 12, acima citado.

De todos 12 os capítulos abordados no 8º ano, somente o capítulo 11, *Medidas de área*, traz o tangram em uma atividade. *Ângulos e polígonos, Potências e raízes, Conjuntos numéricos, Polinômios, produtos notáveis e fatoração* são os conteúdos abordados nos primeiros quatro capítulos do livro. O capítulo 5 trata da *Transformação de figuras. Equações, sistemas de equações e inequações* são os conteúdos do capítulo 6. *Proporcionalidade, Estatística e probabilidade, Triângulo, Quadriláteros e formas circulares* são abordados nos capítulos 7, 8, 9 e 10, respectivamente. Os autores encerram com o capítulo 12, *Medidas de volume e de capacidade*.

No 9º ano, o tangram é sugerido numa *Atividade complementar* do capítulo 8, que trata do conteúdo de *Semelhança*. Do capítulo 1 ao capítulo 7, os autores abordam *Potências e raízes, Equações do 2º grau e sistemas de equações, Matemática Financeira, Razão e proporção, Noções de função e função afim, Função quadrática,* e *Medidas de comprimento e medidas de informática*. No capítulo 9 são abordadas as *Relações no triângulo retângulo*. Já no capítulo 10 é abordada a *Estatística e probabilidade*. Nos capítulos 11 e 12 tratam-se os assuntos *Circunferência e círculo* e *Figuras geométricas espaciais*, respectivamente.

Assim, o tangram é observado de acordo com os capítulos e tópicos listados abaixo:

No **6º ano**:

- *Capítulo 8: Polígonos e figuras semelhantes*, tópico *Triângulos e Quadriláteros*. Nas duas atividades apresentadas aos alunos, o Tangram é utilizado para a classificação de triângulos e quadriláteros. Como *Atividade complementar* há uma atividade acessível somente para o professor em que sugere-se a sua resolução a partir da reprodução do molde do tangram, disponível nas *Páginas para reprodução* (páginas do livro do professor que apresentam moldes, malhas quadriculares, planificações, jogos, etc). Aqui, o tangram serve de material didático que permite aos alunos a sua manipulação de modo a auxiliá-los na classificação dos triângulos e dos quadriláteros construídos com algumas ou com todas as peças do tangram.

- *Capítulo 13: Medidas de área e volume*, o tangram consta em uma atividade para o aluno, no tópico *Medidas de área*, onde comparam-se as medidas das áreas entre as peças e expressa-se também em porcentagem.

No **7º ano**:

- *Capítulo 12: Medidas de área e volume*, tópico *Medida de área*, o tangram aparece em uma *Atividade complementar*. Sugere-se ao professor a reprodução do tangram e a formação de figuras que podem ser associadas a polígonos.

No **8º ano**:

- *Capítulo 11: Medidas de área*, tópico *Medida da área de polígonos*, o tangram também é abordado em uma *Atividade complementar*. Ele é objeto de uma atividade que propõe calcular a medida da área de cada peça e a medida da área de cada figura formada. Sugere-se a reprodução e manipulação do tangram, nas observações laterais do livro do professor.

Já no **9º ano**:

- *Capítulo 8: Semelhança*, *tópico Semelhança de figuras*, o tangram aparece numa *Atividade complementar* ao professor, em que é sugerido o uso do molde do tangram para a reconstrução de figuras semelhantes às imagens de alguns polígonos.

Os autores desta coleção disponibilizam um molde do tangram, mas não indicam como construí-lo. Também incentivam a reprodução do molde e o manuseio de suas peças para a compreensão de conceitos matemáticos em todos os anos.

5.1.2 Coleção 2: A Conquista da Matemática

Na coleção *A Conquista da Matemática* edição de 2018, os livros do professor estão organizados em três partes. A primeira parte é composta por orientações para o professor, com considerações sobre o ensino de Matemática, contribuições da BNCC, quadro de habilidades, uma visão interdisciplinar e temas contemporâneos, avaliação e o detalhamento da obra. Ainda conta com sugestões de livros, revistas, sites e bibliografia. A segunda parte é composta pela reprodução das páginas do livro do aluno de maneira espelhada e reduzida, com *Orientações didáticas* nas partes lateral e inferior. A última parte consiste nas resoluções de todas as atividades propostas no livro.

Os livros desta coleção apresentam os conteúdos de cada volume divididos em nove unidades e cada unidade em diversos capítulos.

A unidade é introduzida por uma abertura que traz uma imagem relacionada com temas que são estudados ao longo no capítulo e algumas questões para contextualizar os alunos, instigando-os a uma discussão inicial. As unidades são compostas de uma quantidade variável de capítulos, e neles, por sua vez, podem ser encontrados seções e boxes (suportes informativos) que buscam favorecer compreensões, aprofundamentos e articulações. Os exercícios apresentados são variados e visam à prática do conteúdo aprendido.

Assim, todos os volumes contêm as seções e boxes:

- *Seção: Fórum* - traz questões que podem favorecer o debate e o desenvolvimento de estratégias de argumentação.
- *Boxe: Pense e responda* – são questões que buscam mobilizar conhecimentos e promover reflexões.
- *Um novo olhar* – retoma os conhecimentos explorados na abertura das unidades.
- *Boxe: Saiba que* – um texto curto que fornecerá uma dica ou recado interessante.
- *Seção: Descubra mais* – seção contendo sugestões de livros e links para consultar informações complementares.
- *Boxe: Nós* – textos e questões que propiciam reflexões sobre valores.
- *Seção: Por toda parte* – diversas situações que possibilitam ainda mais a conexão da Matemática com diversas áreas do conhecimento.
- *Seção: Educação financeira* – a seção trata assuntos diversos como controle de gastos, economia, etc.
- *Seção: Tratamento da informação* – são propostas de tratamento e organização de dados, probabilidade e estatística.
- *Seção: Tecnologias* - sugestões de como utilizar ferramentas tecnológicas na resolução de problemas ou questões matemáticas.
- *Seção: Atualidades em foco* – temas atuais para refletir e perceber como a Matemática ajuda a entender o mundo em que vivemos.

- *Seção: Retomando o que aprendeu* - sistematiza os temas trabalhados por meio de atividades de todos os conteúdos estudados na unidade.

Ao final de cada livro encontram-se as respostas dos exercícios e as referências bibliográficas.

5.1.2.1 O tangram na coleção

Esta coleção não apresenta no livro do aluno atividades que exploram o tangram. Elas somente estão disponíveis no livro do professor.

No volume 1, que corresponde ao 6º ano, são identificadas duas sugestões de atividades aos professores, como *Orientações didáticas*. A primeira delas está localizada na *Unidade 5- A forma fracionária dos números racionais,* capítulo 3, que trata da *Comparação de frações*, e a outra na *Unidade 8 - Comprimento e área*, no capítulo 4 sobre *Áreas de figuras geométricas planas*. Os autores iniciam o conteúdo do 6º ano abordando os *Sistemas de numeração* (Unidade 1) e *Cálculos com números naturais*, na Unidade 2. Nas unidades 3 e 4 estão os conteúdos *Figuras Geométricas*, *Múltiplos e divisores* respectivamente. Nas unidades 6 e 7 são contemplados a *Forma decimal dos números racionais,* e *Ângulos e polígonos*, respectivamente. O livro é encerrado com a unidade 9 que trata do estudo de *Massa, volume e capacidade*.

Não é identificada atividade que utiliza o tangram no livro do 7º ano.

Já no 8º ano, o tangram aparece apenas na unidade 6, *Polígonos e transformações no plano*, nas *Orientações didáticas* ao professor, quando o assunto abordado são as propriedades dos quadriláteros. Já nas unidades 1 e 2, os autores contemplam os *Números Racionais e potências, Raízes e números reais*, respectivamente. A álgebra é o foco das unidades 4 e 5, onde as *Expressões e Cálculos algébricos* e *Equações* são abordados. Na unidade 7 é abordada a *Contagem, probabilidade e estatística*. Na unidade 8 o foco é *Área, volume e capacidade*. Os autores encerram na unidade 9, com o *Estudo de grandezas.*

O tangram também não é contemplado no livro do 9º ano.

Desse modo, o tangram é objeto de análise nos volumes 1 e 3, nas seguintes unidades e capítulos:

No **6º ano**:

- *Unidade 5: A forma fracionária dos números racionais, Capítulo 3: Comparando frações*. A sugestão ao professor, nas *Orientações didáticas*, é usar o tangram como um jogo (dominó), em forma de atividade complementar que visa descobrir a fração correspondente de cada parte do jogo.
- *Unidade 8: Comprimento e área, Capítulo 4: Áreas das figuras geométricas planas*.O tangram é sugerido ao professor, também nas Orientações didáticas, como um recurso didático que pode facilitar a compreensão das relações de composição e decomposição de polígonos.

No **8º ano**:

- *Unidade 6: Polígonos e transformações no plano, Capítulo 6: Propriedades dos quadriláteros*. O tangram aparece nas *Orientações didáticas*, sendo indicado para o trabalho com paralelogramos como retângulos, losangos e quadrados.

Esta coleção não disponibiliza para professor ou para o aluno o molde do tangram, nem indica como confeccioná-lo.

5.1.3 Coleção 3: Teláris Matemática

Os quatro volumes da versão do professor, da coleção *Teláris Matemática* edição de 2018, apresentam a parte geral (comum a todos os volumes) com orientações pedagógicas e metodológicas da disciplina. Após, reproduz o livro do estudante e orientações são dadas ao professor na parte inferior e lateral da página.

Os livros estão divididos em capítulos que abordam as cinco unidades temáticas: *Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas* e *Probabilidade e estatística*. Os objetos de conhecimento e as habilidades são explorados ao longo dos capítulos, sendo retomados, ampliados e aprofundados conceitos, procedimentos e atitudes trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Cada capítulo inicia com imagens, textos e questões que procuram contextualizar os assuntos, incentivar a participação dos alunos e abordar os conhecimentos que já possuem. O conteúdo é dividido em títulos e subtítulos e no final há uma lista com atividades.

Com objetivo de oferecer um melhor aproveitamento, os capítulos são divididos em seções e boxes que trazem formas de sistematizar ou formalizar algum conceito explorado no capítulo:

- *Boxe: Explorar e descobrir* – atividades que incluem a confecção, a manipulação e a exploração de materiais concretos, conjecturando regularidades numéricas e algébricas e propriedades.
- *Boxe: Bate-papo* – atividades orais e em grupo.
- *Boxe: Raciocínio lógico* – momento a mais para os alunos pensarem logicamente.
- *Boxe: Você sabia?* – apresenta informações adicionais ou curiosidades interessantes.
- *Boxe: Um pouco da História* – apresenta dados históricos da Matemática e também da Etnomatemática.
- *Boxe: Glossário* – cita o significado de palavras ou expressões que aparecem no texto e que podem não ser do conhecimento dos alunos.
- *Atividade resolvida passo a passo* – sugestões de atividades resolvidas de maneira detalhada e comentada.
- *Seção: Leitura* – textos que ampliam e enriquecem o conteúdo trabalhado.
- *Seção: Matemática e tecnologia* – seção que permite explorar diferentes ferramentas tecnológicas, como a calculadora, o computador e softwares livres.
- *Seção: Jogo* – atividades lúdicas e desafiadoras.
- *Seção: Revisando seus conhecimentos* – retoma conceitos e procedimentos do capítulo ou dos anos anteriores, ampliando-os e aprofundando-os de modo espiral.
- *Seção: Testes oficiais* – atividades apresentadas em avaliações de aprendizagem, com SARESP, SAEB, OBMEP, ENEM e Prova Brasil.
- *Seção: Verifique o que estudou* – é a última seção do capítulo. Traz atividades para aferição da aprendizagem, percepção das conquistas e sistematização de conhecimentos adquiridos, seguidas de perguntas de autoavaliação do aprendizado.

Ao final do livro, seguem as respostas das atividades, lista de siglas, sugestões de leitura e sites, e a bibliografia.

5.1.3.1 O tangram na coleção

Nesta coleção o tangram é abordado somente no 6º ano e 7º ano.

O autor inicia o livro do 6º ano com o conteúdo sobre os *Números naturais e sistemas de numeração.* No capítulo 2, enfatiza as *Operações com números naturais*. Nos capítulos 3 e 4 são abordados os *Sólidos geométricos* e *Múltiplos e divisores*. No capítulo 5, *Ângulos e polígonos*, o tangram é abordado. *Frações e porcentagem* e *Decimais* seguem nos capítulos 6 e 7, respectivamente. No capítulo 8, que trata das *Grandezas geométricas: comprimento, perímetro e área*, o tangram é foco nos exercícios que exploram a área de figuras. *Outras grandezas e medidas* são estudadas no capítulo 9. O capítulo 10 encerra os conteúdos do 6º ano, contemplando a *Probabilidade e a pesquisa estatística*.

No livro do 7º ano, o tangram é enfatizado somente no capítulo 10, último capítulo do livro. No capítulo 1, estudam-se os *Números inteiros e sequências*. No capítulo 2, o autor aprofunda múltiplos, divisores e frações. *Números racionais*, *Expressões algébricas e equações do 1º grau* são os conteúdos abordados nos capítulos 3 e 4, respectivamente. O capítulo 5 é dedicado a *Geometria: circunferência, ângulo e polígono*. A *Simetria* é foco de estudo no capítulo 6. Nos capítulos 7, 8 e 9 são contemplados os conteúdos de *Proporcionalidade*, *Matemática financeira: regra de sociedade, acréscimos e decréscimos* e *Noções de estatística e probabilidade*, respectivamente. Encerra-se o rol dos conteúdos no capítulo 10, em que se abordam o *Perímetro, área e volume*.

No 8º ano e no 9º ano não há nenhuma atividade ou sugestão que tem como foco o tangram.

Assim, nesta coleção o tangram é contemplado:

No **6º ano**:

- *Boxe: Explorar e descobrir, Capítulo 5: Ângulos e polígonos*. A atividade apresenta o passo a passo para a criação das peças por meio de dobraduras e a construção de figuras planas utilizando algumas ou todas as peças do tangram.
- *Capítulo 8: Grandezas geométricas: comprimento, perímetro e área*. A atividade introduz o conceito da grandeza área.

No **7º ano**:

- *Boxe: Explorar e descobrir, Capítulo 10: Perímetro, área e volume*, apresenta-se o estudo sobre equivalência de áreas. Na atividade sugere-se a manipulação do tangram para a exploração das questões. Porém, o livro não traz um molde do tangram para a reprodução, nem a indicação de como confeccioná-lo.

Apresentadas as três coleções de livros didáticos de matemática, o quadro a seguir mostra a distribuição das atividades que abordam o tangram de acordo com o ano escolar.

Quadro 5: Atividades com tangram nas coleções de acordo com o ano escolar

COLEÇÃO	ANO ESCOLAR	Nº DE ATIVIDADES
Matemática Essencial	6º	4 (3-A; 1-P)
	7º	1-P
	8º	1-A
	9º	1-P
	Subtotal	**7**
A Conquista da Matemática	6º	2-P
	7º	0
	8º	1-P
	9º	0
	Subtotal	**3**
Teláris Matemática	6º	2-A
	7º	1-A
	8º	0
	9º	0
	Subtotal	**3**
	TOTAL	**13**

Fonte: Autora

Observando os dados do quadro, os livros didáticos do 6º ano contêm a maior incidência de atividades que envolvem o tangram, totalizando oito atividades, enquanto que a menor incidência está no 9º ano, com apenas uma atividade. Outrossim, a coleção *Matemática Essencial* é a única que apresenta atividades nos quatro anos escolares.

6 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Nesta seção são analisadas as atividades que trazem o tangram nos livros didáticos de cada coleção, observando as categorias elencadas. Para analisar de forma crítica as atividades propostas e o desenvolvimento das mesmas em sala de aula, é preciso entender a importância das apreensões e dos olhares no ensino da Geometria. As apreensões e olhares estão relacionados à forma matemática de "ver", que segundo Duval (2012b), implica na visualização das formas e nas modificações e operações sobre as mesmas. As dificuldades de "ver" podem aumentar quando se trata do tangram, pois ele é composto por mais de uma figura.

Como já mencionado na seção anterior, o tangram pode ser explorado como uma figura por meio do registro geométrico ou figural ou como recurso didático por meio da manipulação física de suas peças, também denominadas de subfiguras.

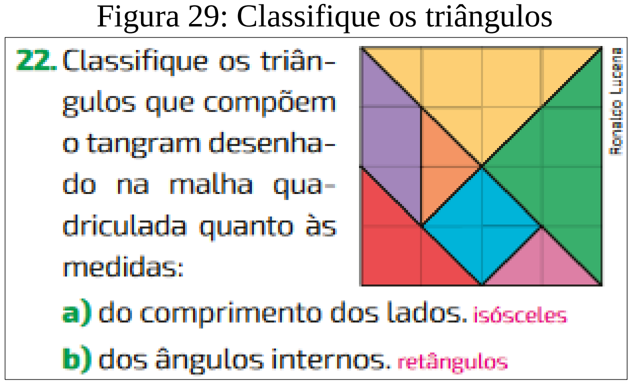
6.1 COLEÇÃO 1: MATEMÁTICA ESSENCIAL

Todos os volumes desta coleção apresentam atividades que exploram o tangram, as quais são apresentadas e analisadas a seguir.

6.1.1 Atividades do 6º ano.

ATIVIDADE 1– A (*Capítulo 8: Polígonos e figuras semelhantes*, tópico: *Triângulos e Quadriláteros*).

Figura 29: Classifique os triângulos



Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 161)

Esta atividade está localizada no *Capítulo 8: Polígonos e figuras semelhantes* e visa exercitar os conhecimentos acerca da classificação do triângulo quanto aos lados (equilátero, isósceles ou escaleno) e quanto aos ângulos (agudo, reto ou obtuso). De acordo com o livro didático, o estudo sobre polígonos e suas classificações antecede essa atividade, reafirmando que a atividade é um exercício de averiguação de conhecimentos.

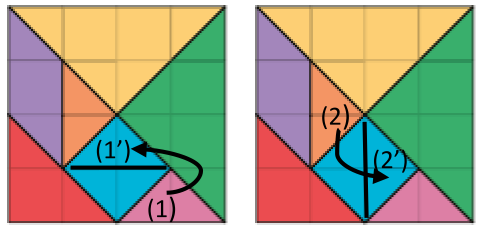
Na atividade, o enunciado (representação na língua natural) e a figura (representação do tangram no registro geométrico) estão bem articulados, pois o tangram e suas peças, bem como a malha quadriculada citados no enunciado estão bem visíveis na figura. É preciso mobilizar a apreensão discursiva para identificar que a atividade pede para classificar apenas os triângulos que compõem o tangram. Ademais, o fato de o enunciado indicar o uso da malha quadriculada para a classificação dos triângulos, não recorrendo a instrumentos para calcular o valor numérico dos lados e dos ângulos internos, permite a exploração das propriedades heurísticas do tangram, conforme Moretti (2013), ou seja, a visualização como conexão entre as apreensões perceptiva e operatória.

Inicialmente é preciso mobilizar a apreensão perceptiva e o olhar botanista para identificar os cinco triângulos que compõem o tangram: dois triângulos maiores, um triângulo médio e dois triângulos pequenos.

Para classificar os triângulos em equilátero, isósceles ou escaleno é preciso o olhar construtor para reconhecer que cada um dos cinco triângulos possui dois lados com a mesma medida, ou seja, são triângulos isósceles. As cores vibrantes das sete peças do tangram auxiliam na visualização das formas triangulares e a malha quadriculada auxilia para efetuar a classificação quanto às medidas dos comprimentos dos lados de cada triângulo, sem recorrer a instrumentos graduados de medição, como a régua.

Para a classificação dos ângulos internos observa-se que o tangram é uma representação do quadrado no registro geométrico e pela definição de quadrado, os ângulos internos são retos. Assim, pelo olhar botanista observa-se que o triângulo médio possui um ângulo interno que mede 90º, pois coincide com o ângulo interno da representação do quadrado. Já os triângulos maiores são retângulos porque os lados que apresentam a mesma medida coincidem com as diagonais do quadrado, as quais dividem ao meio o ângulo reto do quadrado, formando ângulos de 45^o. Assim, cada triângulo maior possui dois ângulos de 45^oe um ângulo de 90^o. Para concluir que cada triângulo menor possui um ângulo reto, uma opção é compará-lo à peça do quadrado, conforme próxima figura.

Figura 30: Classificação do triângulo menor



Fonte: Autora

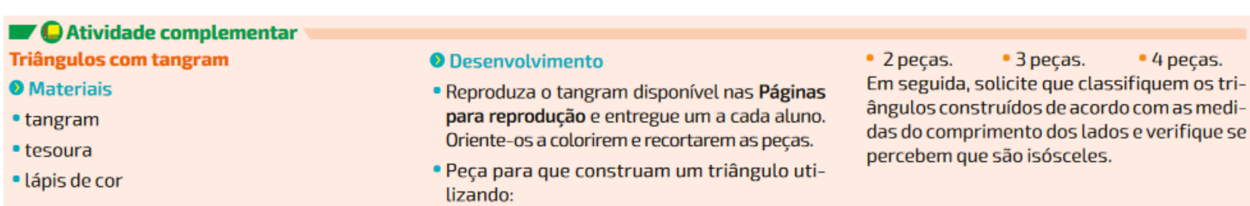
Na Figura 30, o traço preto que divide o quadrado azul indica que a operação figural de reconfiguração e o olhar de inventor foram acionados. Por meio da modificação posicional de translação e do olhar agrimensor, o triângulo rosa (1) pode ocupar o espaço (1’) que corresponde à metade do quadrado azul, enquanto que o triângulo laranja (2), o espaço (2’). Em ambas as situações, um dos ângulos dos triângulos (1) e (2) coincide com o ângulo reto do quadrado azul, mostrando que os triângulos são retângulos.

Por meio da modificação ótica também pode ser observado que os cinco triângulos se diferem apenas pelo tamanho, sendo todos isósceles e retângulos.

Como a atividade está localizada no capítulo *Polígonos e figuras semelhantes*, ela também poder explorar o conceito de semelhança de triângulos a partir da classificação já efetuada dos lados e ângulos.

ATIVIDADE 2 – P (*Capítulo 8: Polígonos e figuras semelhantes*, tópico: *Triângulos e Quadriláteros*)

Figura 31: Triângulos com tangram



Atividade complementar

Triângulos com tangram

Materiais
- tangram
- tesoura
- lápis de cor

Desenvolvimento
- Reproduza o tangram disponível nas **Páginas para reprodução** e entregue um a cada aluno. Oriente-os a colorirem e recortarem as peças.
- Peça para que construam um triângulo utilizando:
  - 2 peças.
  - 3 peças.
  - 4 peças.

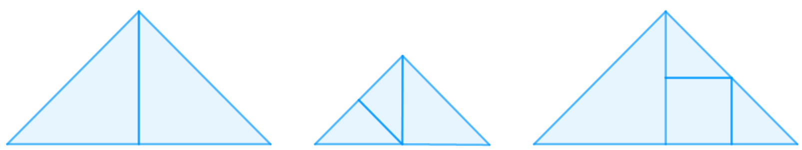
Em seguida, solicite que classifiquem os triângulos construídos de acordo com as medidas do comprimento dos lados e verifique se percebem que são isósceles.

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 161)

Esta atividade não está disponível no livro didático do aluno. Encontra-se somente no livro do professor, na sequência da **Atividade 1-A**, como complemento da mesma. Nela sugere-se a reprodução do tangram cujo molde está disponível exclusivamente no livro do professor. Essa sugestão para reprodução do tangram indica que ele é usado como material didático para desenvolver habilidades visuais de percepção e operações sobre a figura.

A manipulação das peças do tangram para construção de triângulos utilizando duas, três ou quatro peças chama à ação o olhar de inventor e as apreensões perceptiva e operatória, em que a modificação mereológica de reconfiguração é requerida. Aqui, o tangram é fracionado e reorganizado, sendo que suas peças são justapostas para que os triângulos sejam construídos (Figura 32).

Figura 32: Triângulos com 2, 3 e 4 peças



Fonte: Autora

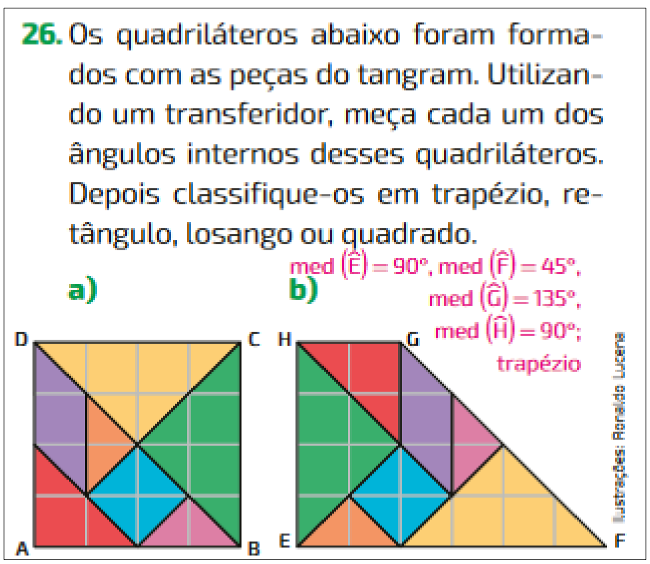
Esta figura exemplifica representações dos triângulos formados com duas, três e quatro peças no registro das figuras. Para formar o triângulo usando duas peças, pode-se utilizar os dois triângulos maiores ou os dois menores. Para o triângulo com três peças, sugere-se o triângulo médio e os dois triângulos menores. Já para o triângulo formado com quatro peças, são justapostos o triângulo médio, o quadrado e os dois triângulos menores. As construções dos triângulos não são únicas e Souza et al.(1997) traz outras possibilidades. Desta forma, a atividade vai ao encontro do que propõe a teoria de Duval (2004) por possibilitar diversos tratamentos no registro das figuras.

Para verificar que os triângulos formados na Figura 32 são isósceles, como propõe a atividade, o aluno pode mobilizar o olhar botanista e o agrimensor para reconhecer e desagrupar a peça triangular que corresponde à metade de cada figura e usando a modificação posicional, sobrepô-la à outra metade. Assim, perceber que cada triângulo possui dois lados com a mesma medida.

Tendo em vista que a atividade utiliza o tangram como recurso didático e permite a manipulação das suas peças, favorecendo a ludicidade e o desenvolvimento das apreensões perceptiva e operatória, e facilitando a compreensão e aprofundamento do conteúdo estudado, como sugestão, ela pode ser proposta aos alunos antes da **Atividade 1-A**. Também sugere-se a construção de triângulos utilizando cinco, seis e sete peças do tangram, verificando a impossibilidade da construção de um triângulo com seis peças. Com esta atividade, também há possibilidade de verificar que só podem ser construídos triângulos se houver outros triângulos na composição e que não é possível formar triângulos somente com figuras quadriláteras.

ATIVIDADE 3 - A (*Capítulo 8: Polígonos e figuras semelhantes*, tópico: *Triângulos e Quadriláteros*)

Figura 33: Classifique os quadriláteros



Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 163)

Na Atividade 3 - A, o tangram é utilizado para exercitar a compreensão do conceito de ângulo interno e da classificação dos quadriláteros. É uma atividade de averiguação de conhecimento que consta após a explicação teórica do tópico *Quadriláteros*, e também está situada no *Capítulo 8: Polígonos e figuras semelhantes.*

Como os autores usaram cores vibrantes para as peças do tangram, pode-se confundir os quadriláteros do enunciado com os quadriláteros (quadrado e paralelogramo) do tangram. Neste momento, é preciso que a apreensão discursiva desenvolva sua função de controlar o olhar, direcionando-o para o reconhecimento dos dois quadriláteros *ABCD* e *EFGH*.

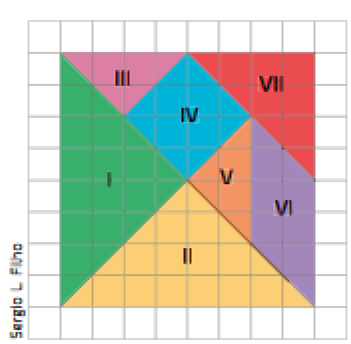
Quanto aos ângulos internos do primeiro quadrilátero, como a atividade sugere o uso do transferidor, então o olhar construtor é requerido para medir e encontrar os quatro ângulos retos. Para classificar o quadrilátero, basta a apreensão perceptiva e os olhares atentos de botanista e de construtor para identificar a forma da figura e, observando a malha quadriculada reconhecer que a figura possui quatro quadradinhos de cada lado, ou seja, representa um quadrado.

Quanto à medição dos ângulos internos do segundo quadrilátero, usando transferidor, encontram-se os valores $\hat{E} = 90^o$, $\hat{H} = 90^o$, $\hat{F} = 45^o$e $\hat{G} = 135^o$. Novamente o olhar construtor é requerido. Para a classificação desse quadrilátero, o olhar botanista entra em ação para observar que sua forma corresponde ao trapézio.

Nesta atividade, o tangram não desempenhou seu papel heurístico, tendo uma abordagem voltada quase que exclusivamente para a percepção. Sobre essa abordagem, Flores e Moretti (2006) discorrem que ao enfatizar unicamente a percepção, o aluno sente dificuldades para reconhecer outros modos, outras configurações, articulações com o texto, ou mesmo operações sobre a figura, o que impossibilita a exploração heurística. Em decorrência disso, o tangram poderia ser substituído por outras figuras que representem o quadrado e o trapézio ou poderia apresentar cores mais neutras para as subfiguras, de forma a não chamar muita atenção para as peças, já que elas não são exploradas na atividade.

ATIVIDADE 4 - A (*Capítulo 13: Medidas de área e volume*, tópico: *Medidas de área*)

Figura 34: Área do tangram



5. Observe o tangram construído em uma malha quadriculada.

a) Determine a medida da área do tangram considerando como unidade de medida de área a peça:

- **I.** 4 unidades
- **III.** 16 unidades
- **VII.** 8 unidades

b) Quais peças têm medidas de área iguais?
I e II; III e V; IV, VI e VIII

c) A quantos por cento da medida da área do tangram corresponde a medida da área da peça:

- **II?** 25%
- **IV?** 12,5%
- **VI?** 12,5%

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 260)

Esta atividade está situada no tópico *Medidas de área* que introduz a noção de área como grandeza.

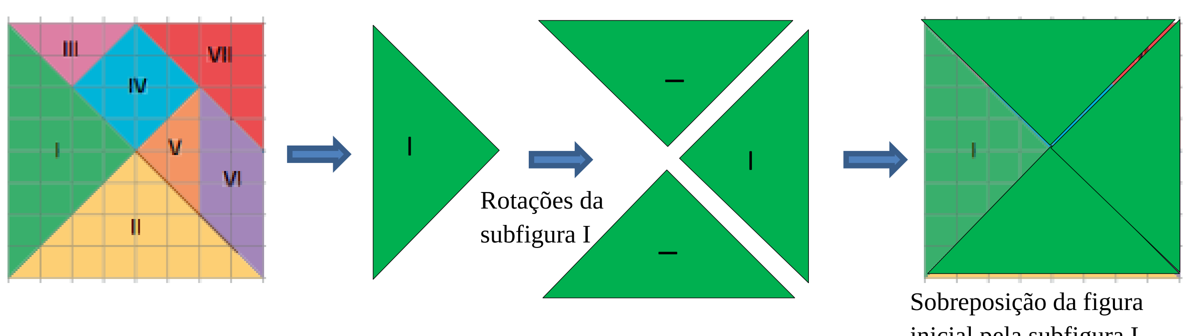
Para realizar a atividade do último capítulo do livro do 6º ano, o aluno precisa rememorar conhecimentos adquiridos ao longo do ano para resolver o solicitado. No primeiro momento, é necessário observar o tangram construído em uma malha quadriculada e direcionar o olhar para as peças que o compõe. Dessa forma, são requeridas de imediato as apreensões discursiva e perceptiva para identificar quais peças do tangram são consideradas unidades de medida de área e que formas elas possuem.

O olhar atento de agrimensor precisa ser mobilizado a fim de comparar a área do tangram com a unidade de medida de área da peça sugerida. A atividade requer muita atenção, pois as subfiguras não são compostas apenas por quadrados inteiros da malha quadriculada. É necessário fazer uma recomposição de figuras a partir de subfiguras, ou seja, aplicar a operação de reconfiguração, mobilizando o olhar não-icônico de inventor.

No item a), três subfiguras são utilizadas como unidade de medida de área e são comparadas à área do quadrado formado pelas sete peças do tangram. É uma atividade interessante para abordar a grandeza área partindo-se da equivalência de áreas de figuras, sem a preocupação com o seu valor numérico.

Neste item, estimula-se o olhar botanista e a modificação ótica para reconhecer que as subfiguras I, III e VII são representações de triângulos isósceles, porém com tamanhos distintos. Para determinar a medida da área do tangram, mobiliza-se a modificação posicional, pois é necessário rotacionar e sobrepor as peças sobre o tangram. A figura a seguir mostra como encontrar a área do tangram, considerando a subfigura I como unidade de medida de área.

Figura 35: Área por sobreposição



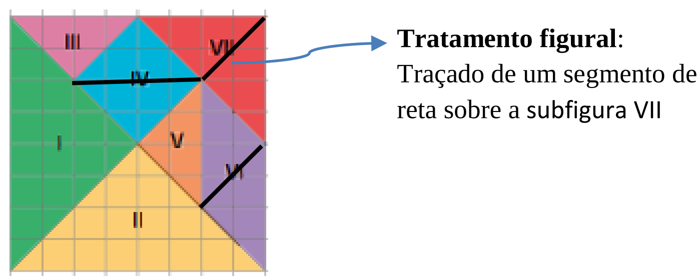
Fonte: Autora

Na Figura 35, ao rotacionar e sobrepor a subfigura I sobre a figura inicial é possível obter a área do tangram equivalente à quatro unidades de medida de área.

Seguindo o raciocínio anterior, para o cálculo da área do tangram considerando as subfiguras III e VII como unidades de medida de área, chega-se às medidas de área do tangram: dezesseis subfiguras III e oito subfiguras VII.

Para responder o item b), ou seja, para encontrar as peças que têm a mesma medida de área, é necessário fazer a comparação das medidas das áreas das subfiguras, mobilizando a apreensão operatória de reconfiguração e a modificação posicional. A malha quadriculada auxilia a resolução e os olhares icônicos do botanista e do agrimensor são exigidos, pois se comparam a forma e a superfície das peças, reconhecendo que as seguintes subfiguras possuem a mesma área: I e II; III e V; IV, V e VII. Reconhecer a equivalência de área das subfiguras I e II, bem como das subfiguras III e V é mais imediato, uma vez que são figuras idênticas entre si. Para ver que a equivalência de área das subfiguras IV, V e VI, aplica-se novamente a operação de reconfiguração, como mostra a figura a seguir.

Figura 36: Reconfiguração intermediária



Fonte: Autora

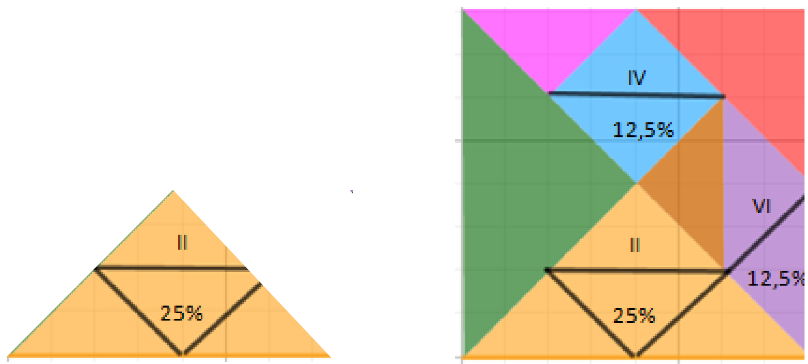
O acréscimo do segmento de reta nas subfiguras IV, VI e VII indica a realização da operação de reconfiguração, e a passagem para o olhar não-icônico de inventor. O traçado destes segmentos representa um ganho de conhecimento, pois vê-se que tais subfiguras são compostas por dois triângulos pequenos (subfigura III), e que portanto apresentam a mesma medida de área.

O item c) aborda um assunto visto em capítulos anteriores (Frações e porcentagens), e requer uma retomada de conteúdo para o seu entendimento. Inicialmente é necessário mobilizar a apreensão perceptiva para reconhecer as formas e a apreensão operatória para fazer a sobreposição das subfiguras no tangram. Ela exige a compreensão do quanto representa cada peça (a parte) do tangram em relação ao todo (tangram inteiro).

Partindo da visualização e acionando os olhares botanista e agrimensor é possível ver que a subfigura II representa 1/4 da área do tangram. Mais, por meio da operação de reconfiguração se decompõe esta subfigura em quatro triângulos menores (subfigura III), como mostra a Subfigura 37-A.

Figura 37: Área e porcentagem

Subfigura 37- A　　　　Subfigura 37 - B



Fonte: Autora

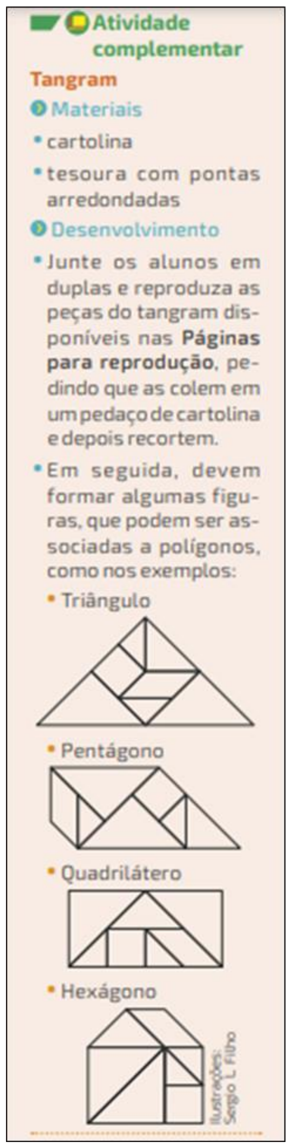
Observando a Subfigura 37- A, a partir do traçado de três segmentos de reta sobre a subfigura II é possível reconhecer que ela é composta por quatro triângulos pequenos (subfigura III). Como no item a) a área do tangram foi expressa como 16 triângulos menores (subfigura III), ao comparar com a área da subfigura II com a área do tangram, encontra-se o percentual $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} =$ 0,25 ou 25%. Observando a Subfigura 37-B e usando o mesmo raciocínio, chega-se que as subfiguras IV e VI correspondem, cada uma, a $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} =$ 0,125 ou 12,5% da área do tangram. Ao escrever as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ como percentuais 25% e 12,5% se está realizando a conversão do registro fracionário para o decimal (percentual). Assim, os tratamentos figurais realizados sobre a representação do tangram no registro das figuras serviram de *start* para os tratamentos matemáticos em direção à resolução do problema, como discorre e defende Duval (2012a).

Ao realizar os tratamentos figurais, a compreensão do quanto cada peça representa do total fica facilitada, pois é possível fazer um comparativo numérico e visual. Percebe-se, por exemplo, que a área dos dois triângulos pequenos equivale à área do paralelogramo, do quadrado ou do triângulo médio. Ao fazer a comparação, o aluno está desenvolvendo a conversão entre os registros figural e numérico, tão salientada por Duval para a aprendizagem conceitual. Portanto, a atividade está bem planejada, pois é rica em conteúdo e explorou a visualização e as conversões entre os registros figural e numérico, fracionário e decimal.

6.1.2 Atividades do 7º ano

ATIVIDADE 5– P (*Capítulo 12: Medidas de área e volume*, tópico: *Medidas de área)*

Figura 38: Polígonos



Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 248)

Esta é a única atividade que explora o tangram no 7º ano e consta somente no livro do professor, na parte lateral da página que traz atividades referentes a medidas de área de quadriláteros e triângulos, no *Capítulo 12: Medidas de área e de volume.*

O objetivo da atividade é fazer com que os alunos decomponham uma figura e formem novas figuras, ou seja, efetuem a operação semiótica de reconfiguração. Sugere-se a reprodução do tangram, em cartolina, usando o molde disponível no livro do professor, para em seguida recortar e formar figuras associadas a polígonos como triângulos, pentágonos, quadriláteros e hexágonos.

Com o tangram em mãos, os alunos podem ser estimulados a formarem mais polígonos convexos do que aqueles apresentados como sugestão ao professor. Conforme Lopes (2009) há a possibilidade de construção de treze polígonos convexos, utilizando todas as peças do tangram (Figura 25).

No que tange à formação de figuras associadas a polígonos, é necessário o reconhecimento das formas (apreensão perceptiva) de cada peça do tangram e uma modificação mereológica de reconfiguração (apreensão operatória). As peças precisam ser rotacionadas e justapostas para formarem polígonos. Para tanto, o olhar botanista é mobilizado para diferenciar a forma das peças e o olhar de inventor para criar novas figuras.

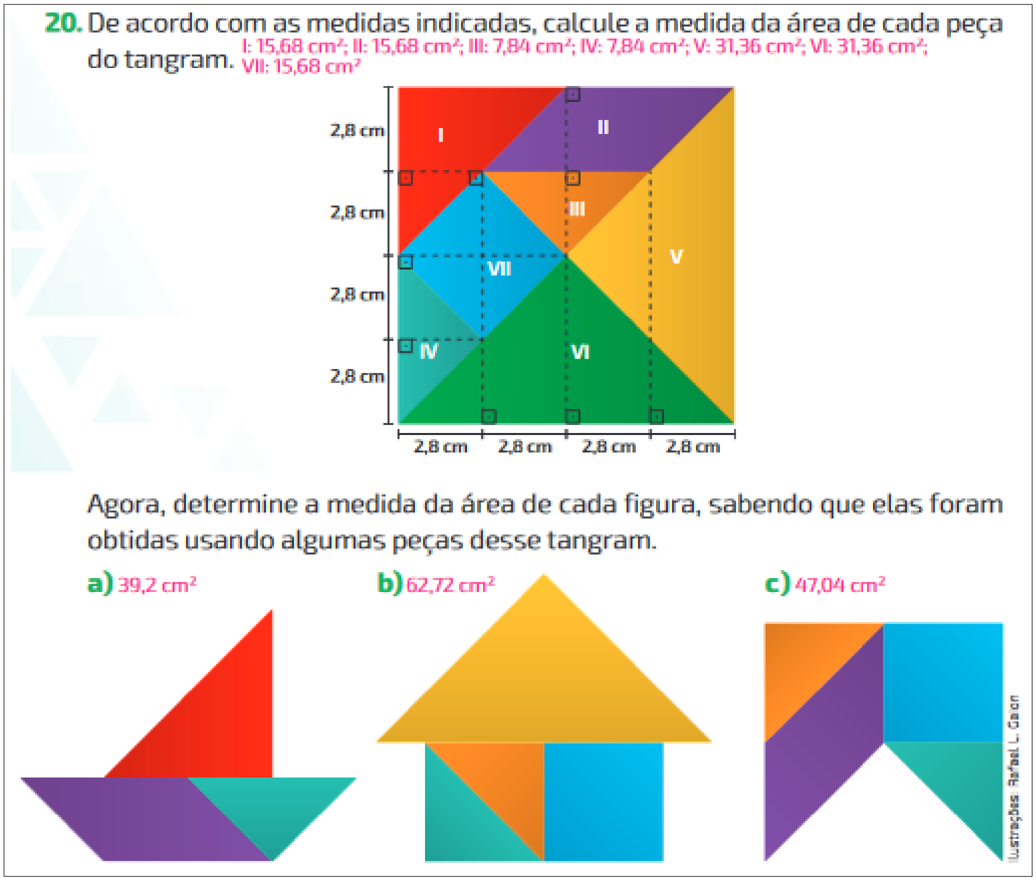
A atividade não informa se os polígonos devem usar exatamente as sete peças do tangram. Também não deixa claro se os alunos reproduzirão os polígonos dados como exemplo ou se criarão outros polígonos. Portanto, para que a atividade favoreça o desenvolvendo do raciocínio lógico e da criatividade, sugere-se que o aluno crie seus próprios polígonos ao invés da simples reprodução dos polígonos.

Nesta atividade, o tangram é usado como material didático que possibilita a manipulação e a construção de polígonos visualmente diferentes do original, estimulando o desenvolvimento de estratégias e desempenhando seu papel lúdico, intuitivo e heurístico.

6.1.3 Atividades do 8º ano

ATIVIDADE 6 - A (*Capítulo 11: Medidas de área,* tópico: *Medida da área de polígonos*)

Figura 39: Área de figuras



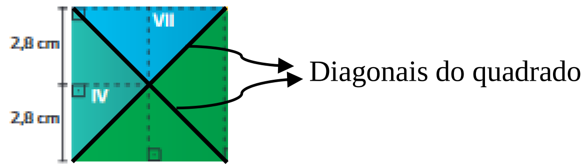
Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 256)

Esta atividade está situada no *Capítulo 11: Medidas de área*, após o estudo de áreas de polígonos e cálculo de suas áreas via fórmulas algébricas. É a uma atividade de averiguação de conhecimento e seu objetivo é calcular a área das três figuras (barco, casa e bandeirinha) a partir do tangram dado.

Inicialmente, a atividade exige o olhar botanista e o olhar construtor para identificar as peças que compõem o tangram e as suas medidas. Enquanto figura, o tangram é um quadrado, e isso fica evidente com as medidas explicitadas na figura. No entanto, as marcações destas medidas podem dificultar a visualização e é necessário mobilizar a apreensão perceptiva para reconhecer as formas das peças do tangram e não confundir com as linhas pontilhadas.

O primeiro passo é calcular a medida de área de cada peça que compõe o tangram. A sugestão é iniciar a atividade calculando a área da peça IV, que é a menor peça do tangram. Para isso, parte-se da visualização do quadrado apresentado na próxima figura.

Figura 40: Subfigura IV: triângulo pequeno

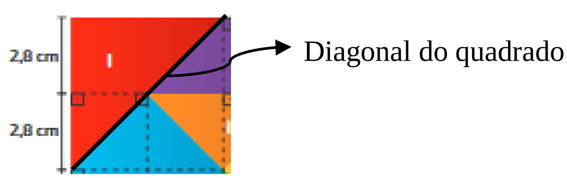


Fonte: Autora

Para encontrar a área da peça IV, que é o triângulo pequeno, é preciso mobilizar as apreensões perceptiva e operatória e os olhares botanista e construtor. A apreensão perceptiva e o olhar botanista levam a reconhecer a peça IV como parte do quadrado apresentado na Figura 40. A inserção das diagonais do quadrado mostra que a operação semiótica de reconfiguração e o olhar inventor foram acionados e que a área da peça IV corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado. Pelo olhar construtor a medida do lado do quadrado é verificada e sua área é calculada, chegando ao valor $A = 5{,}6\ \times 5{,}6 = 31{,}36\ cm^2$. Com isso, chega-se à área da peça IV, $A_{IV} = \frac{A}{4} = \frac{31{,}36}{4} = 7{,}84\ cm^2$. Mobilizando o olhar agrimensor para comparar as peças IV e III (figura 39) se observa que elas possuem a mesma área.

Para encontrar a área da peça I, que é o triângulo médio, basta mobilizar as mesmas apreensões e olhares referentes ao cálculo da área da peça IV, mas considerando o quadrado mostrado na figura abaixo.

Figura 41: Área da peça I: triângulo médio

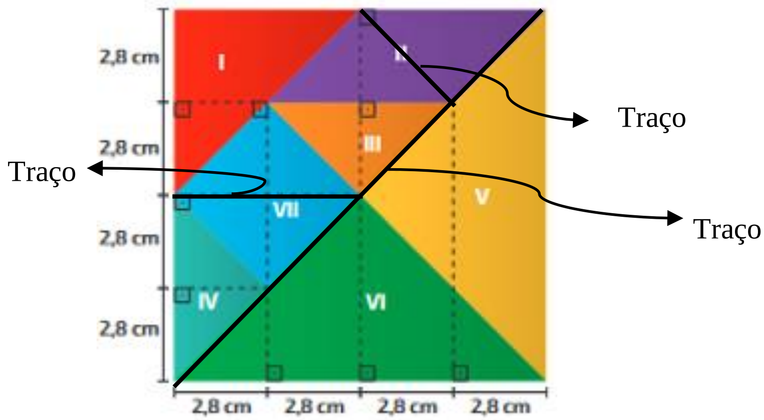


Fonte: Autora

Operando visualmente sobre a Figura 41 se vê que a área da peça I corresponde à metade da área do quadrado $A = 5{,}6\ \times 5{,}6 = 31{,}36\ cm^2$, ou seja, a peça I apresenta área $A_I = \frac{A}{4} = \frac{1}{2}.\,31{,}36 = 15{,}68\ cm^2$.

Para calcular a área das peças II, VII, V e VI que são, respectivamente, o paralelogramo, o quadrado e os dois triângulos maiores, pode-se seguir o raciocínio usado nos cálculos anteriores, realizando as operações figurais conforme mostra a Figura 42.

Figura 42: Peças II e VII



Fonte: Autora

A inserção dos traços sobre as peças II e VII mostra que elas são formadas pela justaposição de duas peças IV (triângulo menor) e portanto apresentam o dobro da área desta peça, ou seja, $A_{II} = A_{VII} = 2. A_{IV} = 15{,}68\ cm^2$. Também, as peças V e VI apresentam a quarta parte da área do tangram de lado 5,6 cm. Como a área do tangram é $A_{tangram} = 11{,}2 \times 11{,}2 = 125{,}44\ cm^2$, então a área das peças V e VI equivalem a $A_V = A_{VI} = \frac{A_{tangram}}{4} = 31{,}26\ cm^2$.

Para responder o item a) da questão, basta somar a medida da área de cada peça que compõe o barco, ou seja, a medida da área das subfiguras I, II e IV. Assim, a área do barco é $A_{barco} = A_I + A_{IV} + A_{II} = 15{,}68 + 7{,}84 + \ 15{,}68 = 39{,}2\ cm^2$.

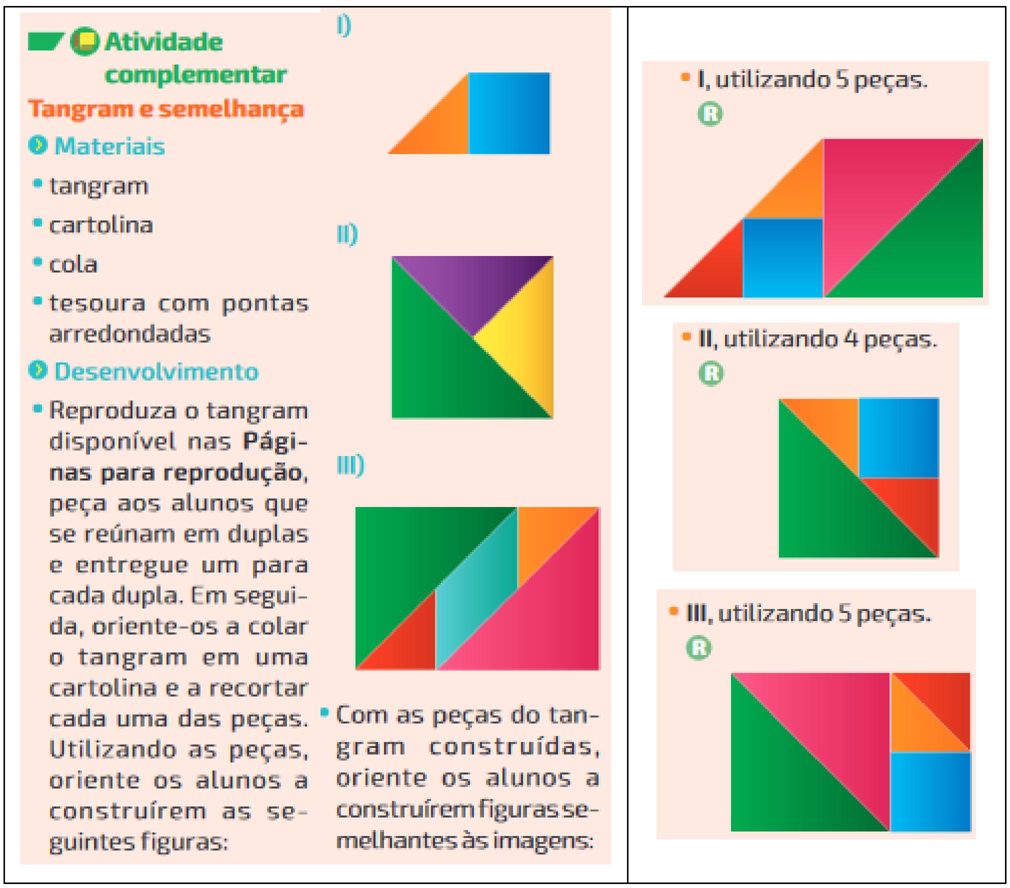
A área da casa e da bandeirinha podem ser calculadas seguindo o mesmo raciocínio do cálculo da área do barco. Assim, chega-se à área da casa $A_{casa} = 62{,}72\ cm^2$, que é a soma das áreas das figuras triângulo grande, dois triângulos pequenos, mais o quadrado; e à área da bandeirinha $A_{bandeira} = 47{,}04\ cm^2$encontrada a partir da soma das áreas dois triângulos pequenos, mais o paralelogramo e o quadrado.

Esta atividade, desenvolvida a partir da visualização, mostra ser possível explorar o cálculo da área de figuras sem recorrer a fórmulas algébricas. Neste sentido, a atividade está em conformidade com Menoncini (2018) que afirma que reconfiguração permite determinar a área de uma figura por meio da soma das áreas de suas partes ou por meio da equivalência de reagrupamentos.

6.1.4 Atividades do 9º ano

ATIVIDADE 7 - P (*Capítulo 8: Semelhança*, tópico: *Semelhança de figuras)*

Figura 43: Figuras semelhantes



Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 180)

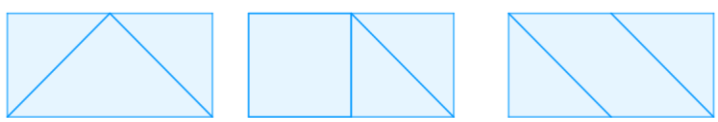
Esta é uma *Atividade Complementar* sugerida para o professor e está localizada após o término das atividades sobre polígonos semelhantes, no *Capítulo 8: Semelhança*. Ela é a única atividade que envolve o tangram no 9º ano.

Inicialmente sugere-se que o professor reproduza o tangram usando o molde e disponibilize-o aos alunos, propondo a construção de figuras semelhantes às figuras dadas, usando uma quantidade fixa de peças do tangram.

O primeiro passo para a criação de figuras semelhantes às figuras iniciais é reconhecer as formas destas figuras, ou seja, reconhecer o trapézio, o quadrado e ao retângulo, requerendo a apreensão perceptiva e o olhar botanista. Em seguida, é chamada à ação o olhar inventor e a apreensão operatória por meio da reconfiguração e da modificação ótica para reorganizar as peças do tangram, criando figuras semelhantes, mas com tamanhos distintos.

Fixar o número de peças para a formação das figuras pode caracterizar um desafio para o aluno, mas ao mesmo tempo reduz a possibilidade de tratamentos figurais. Assim, como sugestão, a construção de figuras semelhantes ao trapézio retângulo, quadrado e retângulo poderia ser feita diversificando o número de peças. A atividade pede para a construção dos mesmos utilizando cinco, quatro e cinco peças, respectivamente. Mas, variando o número de peças é possivel a construção dos mesmos polígonos, exceto no caso do trapézio retângulo, que somente pode ser construído com duas ou cinco peças. Já o quadrado pode ser construído também com duas, cinco e sete peças, enquanto que o retângulo com três (Figura 44), quatro e seis peças.

Figura 44: Retângulos com três peças



Fonte: Autora

A figura acima mostra tratatmentos figurais realizados para representar retângulos com três peças do tangram.

Nesta atividade o tangram foi um material manipulativo com grande potencial para a compreensão do conceito de figuras semelhantes. Isso porque, ao manipular as peças para formar figuras que apresentam a mesma forma, mas em tamanhos distintos, o aluno passa a observar as diversas representações do trapézio, quadrado e retângulo no registro das figuras, auxiliando na distinção do objeto matemático em relação às suas representações, o que é considerado essencial para a aprendizagem matemática, segundo Duval (2004).

Para sintetizar a análise das atividades desta coleção é apresentado a seguir o Quadro 6.

Quadro 6: Análise da coleção *Matemática Essencial*

Ano	**Atividade**	**Apreensões**						**Olhares**			
		P	**D**	**S**	**O**			**I**		**N-I**	
					MM	**MP**	**MO**	**B**	**A**	**C**	**I**
6º	1-A	X	X		X	X	X	X	X	X	X
	2-P	X			X	X		X	X		X
	3-A	X						X		X	
	4-A	X	X		X	X	X	X	X		X
7º	5-P	X			X			X			X
8º	6-A	X			X			X	X	X	X
9º	7-P	X			X		X	X			X

Fonte: Autora

De acordo com os dados, a apreensão perceptiva é exigida em todas as atividades desta coleção e a apreensão operatória é a segunda mais requisitada. Como os autores não sugerem a construção do tangram e sim a sua reprodução via molde, a apreensão sequencial não é mobilizada. Quanto aos olhares, o olhar botanista é exigido em todas as atividades, seguido do olhar inventor que só não aparece em uma atividade.

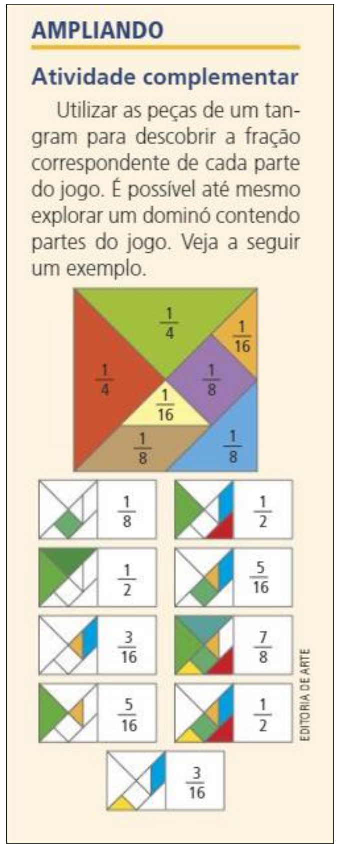
6.2 COLEÇÃO 2: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Esta coleção, adotada por diversas escolas do entorno de São Carlos, apresenta três atividades que exploram o tangram, sendo duas no 6º ano e uma no 8º ano. Elas estão exclusivamente nas *Orientações Didáticas* do livro do professor. Em nenhum volume da coleção é apresentado um molde do tangram ou indicação de como construí-lo ou onde encontrá-lo. As atividades e as análises são apresentadas a seguir.

6.2.1 Atividades do 6º ano

ATIVIDADE 1– P (*Unidade 5: A forma fracionária dos números racionais, Capítulo 3: Comparando frações)*

Figura 45: Dominó do tangram



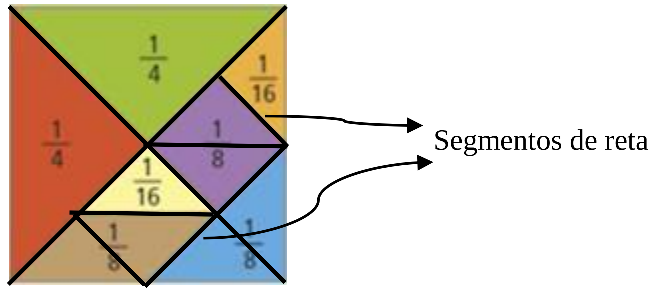
Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 139)

Esta atividade complementar está localizada no Capítulo 3: *Comparando frações*, da Unidade 5 que trata da forma fracionária dos números racionais. Ela apresenta-se nas *Orientações didáticas* ao professor, na parte lateral da página, quando o conteúdo abordado na página é a comparação de frações.

Esta atividade apresenta alguns pontos em comum com a **ATIVIDADE 4-A** da coleção *Matemática Essencial*, no que tange às frações. Nela, sugere-se a utilização do tangram para descobrir a fração correspondente a cada peça. Para encontrar tais frações são mobilizadas as apreensões perceptiva e operatória para visualizar o quanto cada parte representa do todo, além dos olhares botanista e inventor.

Para o cálculo das frações, a operação semiótica de reconfiguração é requerida, conforme figura abaixo:

Figura 46: Reconfiguração intermediária com força de tratamento matemático



Fonte: Autora

O traçado dos diversos segmentos de reta sobre a figura do tangram indica que a operação de reconfiguração intermediária e o olhar de inventor foram requeridos na atividade. A partir dos traços, todo o tangram fica subdividido em figuras triangulares. Para encontrar a fração corresponde a cada um dos dois triângulos maiores, basta observar que juntos eles representam a metade da região do tangram. Assim, realizando a conversão da representação destes triângulos no registro das figuras para a representação no registro das frações, chega-se à fração correspondente a 1/4 do tangram.

Para calcular as demais frações, observa-se inicialmente que a metade do tangram é composta por oito triângulos pequenos (o triângulo pequeno é a menor peça do tangram) e que portanto, o tangram como um todo é composto por dezesseis triângulos pequenos. Assim, a fração de cada um dos dois triângulos pequenos fica determinada em $\frac{1}{16}$.

Tomando como unidade de medida o triângulo pequeno, vê-se que as peças quadrado, paralelogramo e triângulo médio são compostas por dois triângulos pequenos. E como o tangram é composto por dezesseis triângulos pequenos e realizando a conversão entre o registro das figuras e o registro das frações se obtém a fração $\frac{2}{16}$ ou $\frac{1}{8}$ tanto para o quadrado, como para o paralelogramo e para o triângulo médio.

Nesta atividade, a operação semiótica de reconfiguração possibilitou fazer um comparativo numérico e visual que serviu de *start* para a resolução da atividade. Neste sentido, ela teve ‘força’ de tratamento matemático para reconhecer a fração correspondente a cada peça do tangram, em consonância com Duval (2012a, p. 130) que afirma que “esta operação é congruente a um tratamento matemático possível em uma classe de problemas diretamente acessíveis aos alunos, porque não requerem de maneira explícita o emprego de alguma definição ou teorema”.

A atividade também sugere usar as peças do tangram como um jogo de dominó. Contudo, os autores não descrevem as regras do jogo e o objetivo a ser alcançado. Por isso ele não foi analisado. Lembrando que esta coleção não dispõe de um molde para a reprodução do tangram e também não indica como construí-lo.

ATIVIDADE 2– P (*Unidade 8: Comprimento e área, Capítulo 4: Áreas das figuras geométricas planas)*

Figura 47: Área do triângulo retângulo

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Área do triângulo retângulo

O objetivo é calcular a área do triângulo a partir da decomposição da área do retângulo. Esse processo será bastante útil no próximo ano, quando os alunos estudarão as áreas de outros polígonos utilizando a composição e a decomposição de figuras. Por isso, é importante dar atenção especial às etapas desse processo. Os alunos precisam concluir que existe uma relação entre as áreas dos retângulos e dos triângulos que os compõem.

Utilizar papel quadriculado para facilitar a confecção e a observação das relações entre as medidas da área dos retângulos e a dos triângulos. O uso de dobraduras e recortes é interessante, pois os alunos poderão perceber a composição, a decomposição das figuras geométricas e a equivalência de suas áreas sobrepondo-as.

Pedir aos alunos que construam, sobre a malha quadriculada, alguns retângulos de medidas diferentes e depois recortem esses retângulos e façam uma dobradura em uma das diagonais de cada um deles. Em seguida, pedir que recortem sobre o vinco formado por essas dobraduras e sobreponham os dois triângulos obtidos de cada retângulo. É esperado que os alunos percebam que as áreas dos triângulos correspondem à metade da área dos retângulos. É importante que os alunos realizem cálculos ou façam a contagem dos quadradinhos para constatar a veracidade numérica dessa relação.

Se for oportuno, iniciar o trabalho utilizando o tangram, que é mais um recurso pedagógico que pode facilitar a compreensão das relações de composição e decomposição de figuras poligonais.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 251)

Esta sugestão está localizada na Unidade 8: *Comprimento e área*, no capítulo 4 que aborda as áreas das figuras geométricas planas, mais especificamente a área do triângulo retângulo. É sugerido ao professor, nas *Orientações didáticas* da parte inferior e lateral da página, a utilização do tangram para facilitar a compreensão das relações de composição e decomposição das figuras poligonais, contudo, não há um molde ou indicação de como construí-lo. A Figura 48 mostra como o tangram pode contribuir para a compreensão destas relações de decomposição e de composição.

Figura 48: O tangram

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 163)

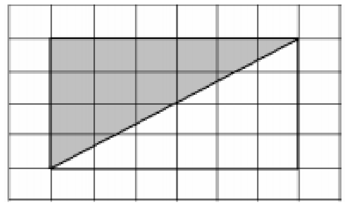
Mobilizando as apreensões perceptiva e os olhares botanista e agrimensor se observa na figura que os dois triângulos maiores formam uma nova representação do triângulo no registro das figuras. Mais, que a área desse novo triângulo corresponde à metade da área do tangram. Desta forma, trata-se de um argumento para comprovar que a área do triângulo pode ser obtida a partir da decomposição da área do retângulo, já que o quadrado é um retângulo. No entanto, é necessário ter o cuidado ao falar da área do retângulo e relacionar com o tangram. Vale ressaltar que o tangram não tem em sua composição um retângulo e que a justaposição de dois triângulos do tangram podem formar um quadrado.

O uso do tangram nesta atividade pode favorecer as habilidades de decomposição e composição, seguindo a direção de Costa (2019) que defende que o tangram é um recurso didático manipulativo que ajuda no desenvolvimento da capacidade de composição de figuras, no estímulo do raciocínio e da percepção espacial.

Como o objetivo da atividade é que os alunos percebam que as áreas dos triângulos correspondem à metade da área dos retângulos e que concluam que existe uma relação entre ambas, na sequência sugere-se a utilização de papel quadriculado e/ou dobraduras para criar representações do quadrado no registro das figuras.

Ao criar a representação do retângulo no registro das figuras e traçar a sua diagonal dividindo-o em dois triângulos, a malha quadriculada auxilia na contagem dos quadradinhos a fim de constatar a veracidade das relações de decomposição das figuras poligonais, conforme Figura 49.

Figura 49: Relação entre triângulo e retângulo



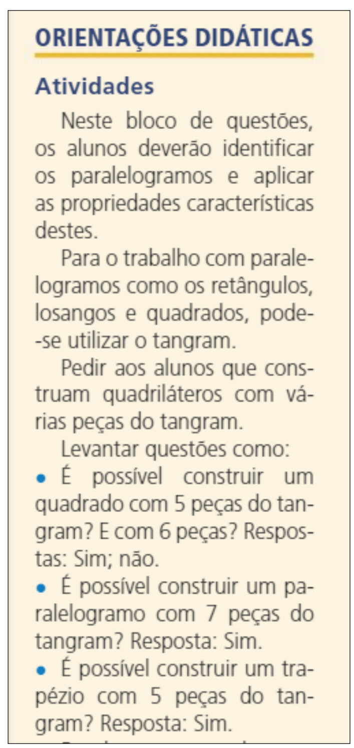
Fonte: Autora

O traçado da diagonal do retângulo remete à operação de reconfiguração que é fundamental para comprovar que a área do triângulo corresponde à metade da área do retângulo.

6.2.2 Atividades do 8º ano

ATIVIDADE 3 - P (*Unidade 6: Polígonos e transformações no plano, Capítulo 6: Propriedades dos quadriláteros)*

Figura 50: Paralelogramo



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Atividades

Neste bloco de questões, os alunos deverão identificar os paralelogramos e aplicar as propriedades características destes.

Para o trabalho com paralelogramos como os retângulos, losangos e quadrados, pode-se utilizar o tangram.

Pedir aos alunos que construam quadriláteros com várias peças do tangram.

Levantar questões como:

- É possível construir um quadrado com 5 peças do tangram? E com 6 peças? Respostas: Sim; não.
- É possível construir um paralelogramo com 7 peças do tangram? Resposta: Sim.
- É possível construir um trapézio com 5 peças do tangram? Resposta: Sim.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 185)

Esta atividade encontra-se nas *Orientações Didáticas* no livro do professor. É sugerida quando o conteúdo abordado trata das propriedades dos quadriláteros, situado na unidade 6: *Polígonos e transformações no plano*. Estimula-se a confecção do tangram para o melhor entendimento na resolução das atividades referentes às propriedades dos paralelogramos. Logo, ele serve como material manipulativo. É necessário confeccionar o mesmo, mas como já mencionado, nenhum molde é apresentado ao aluno, sendo inevitável a procura em outro material.

A atividade apresenta similaridades em relação à **ATIVIDADE 5–P** da coleção *Matemática Essencial*, pois explora a formação de figuras via peças do tangram.

Depois de confeccionado o tangram, sugere-se a construção de quadriláteros com várias peças do tangram, mobilizando a apreensão operatória e o olhar de inventor, pois é preciso fazer a reconfiguração das peças para criar novas figuras. Isso tudo sob um olhar atento de botanista.

Manipulando as peças do tangram, o aluno é desafiado a construir um quadrado com cinco peças e ver a impossibilidade de construção de um quadrado com seis. A utilização de todas as peças dificulta a composição das figuras e os alunos são questionados se é possível a construção de um paralelogramo utilizando as sete peças do tangram. A figura abaixo exemplifica a construção deste paralelogramo.

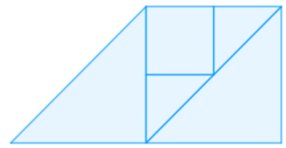
Figura 51: Paralelogramo com sete peças

Fonte: Autora

O questionamento pode ser ampliado variando a quantidade de peças e a forma dos quadriláteros. O terceiro item da atividade questiona se é possível a construção de um trapézio. O tópico que trata do trapézio vem na sequência do livro, logo após a sugestão da atividade. Desse modo, o professor precisa estimular a atividade mobilizando a apreensão discursiva, pois além do aluno não ter acesso às perguntas sugeridas nas *Orientações didáticas*, ele também não tem o entendimento completo das características de todos os quadriláteros, principalmente do trapézio.

O professor, aproveitando as peças do tangram, pode introduzir o estudo do trapézio montando trapézios retângulos e trapézios isósceles, variando o número de peças como exemplifica a Figura 52.

Figura 52: Trapézio retângulo



Fonte: Autora

Aqui, por meio de tratamentos figurais, um trapézio retângulo é formado com cinco peças do tangram. Durante toda a atividade, a apreensão perceptiva, discursiva e operatória são requeridas, pois pode-se explorar o conceito de quadriláteros e de suas diferentes figuras além de propriedades, sejam por meio das figuras ou por meio da representação em língua natural.

O Quadro 7 mostra a síntese das atividades desta coleção, conforme as categorias de análises pré-estabelecidas:

Quadro 7: Análise da coleção *A Conquista da Matemática*

Ano	**Atividade**	**Apreensões**						**Olhares**			
		P	**D**	**S**	**O**			**I**		**N-I**	
					MM	**MP**	**MO**	**B**	**A**	**C**	**I**
6º	1-P	X			X			X			X
	2-P	X						X	X		
7º	Nenhuma										
8º	3-P	X	X		X			X			X
9º	Nenhuma										

Fonte: Autora

De acordo com o quadro, o tangram é explorado mais no 6º ano escolar, em duas atividades. Quanto às apreensões e olhares, a apreensão perceptiva e o olhar botanista são exigidos nas três atividades desta coleção. A apreensão operatória é requerida em duas atividades, somente por meio da operação semiótica de reconfiguração.

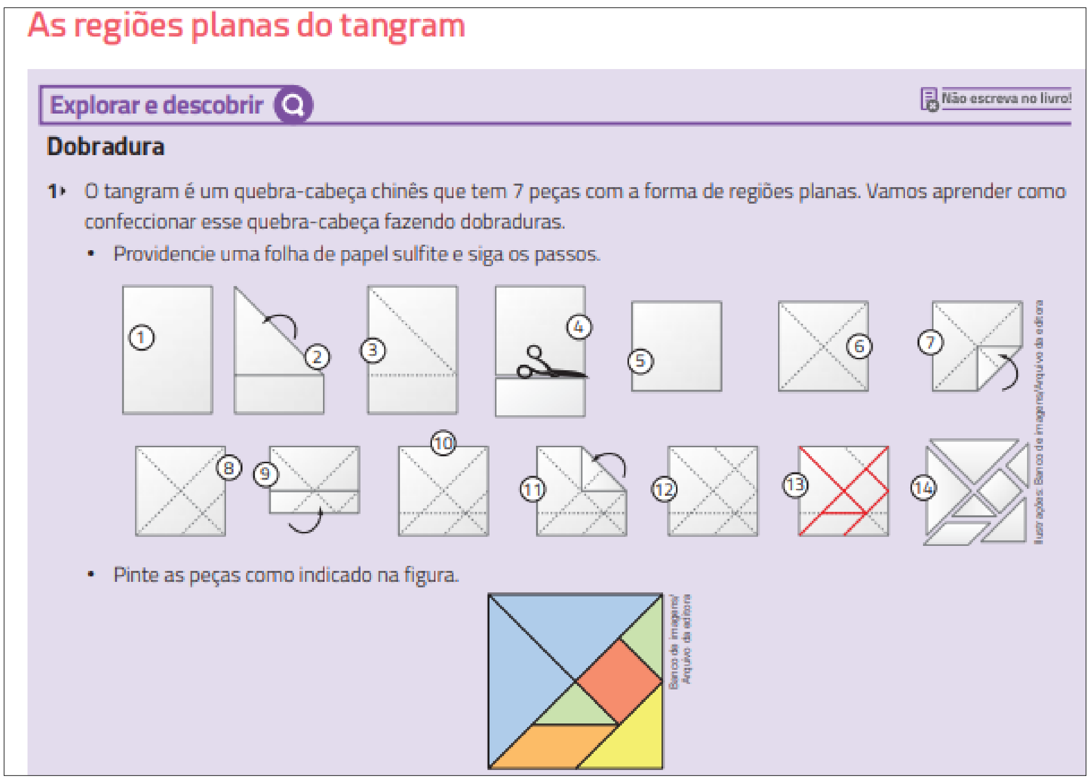
6.3 COLEÇÃO 3: TELÁRIS MATEMÁTICA

As atividades que envolvem o tangram são abordadas no 6º e 7º ano. No 6º ano se explora a reprodução de figuras a partir das peças do tangram e a equivalência de áreas, sendo esta, retomada no 7º ano.

6.3.1 Atividades do 6º ano

ATIVIDADE 1- A (*Boxe: Explorar e descobrir*, *Capítulo 5: Ângulos e polígonos)*

Figura 53: Construção do tangram via dobraduras


As regiões planas do tangram

Explorar e descobrir

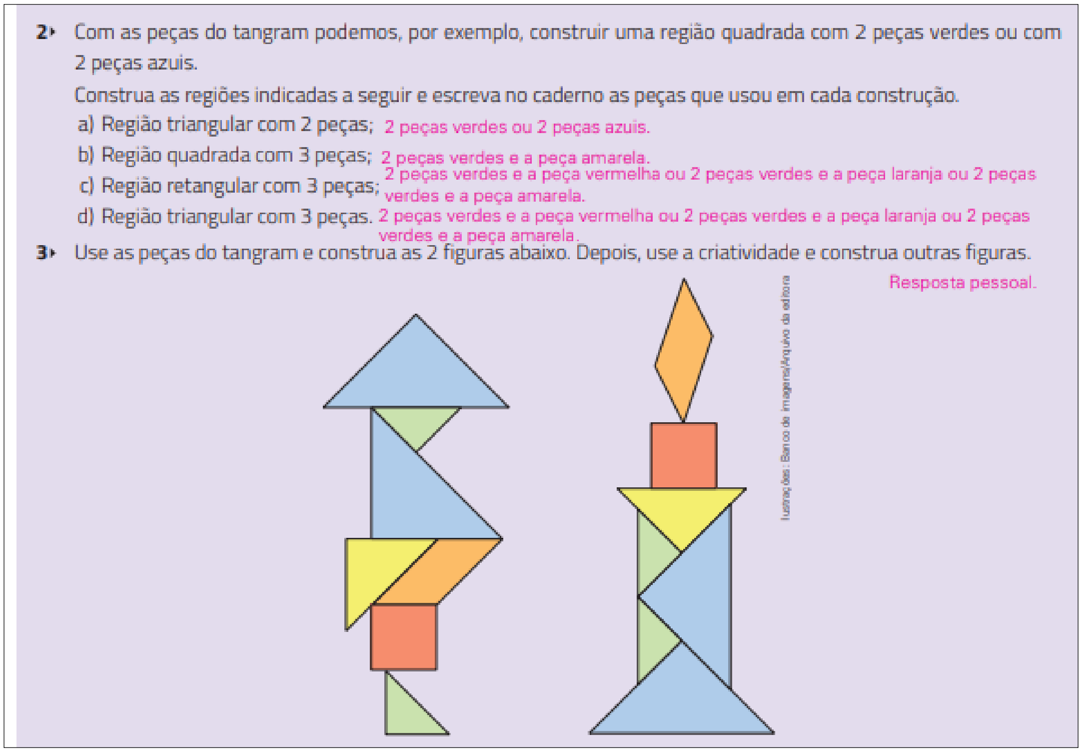
Não escreva no livro!

Dobradura

1› O tangram é um quebra-cabeça chinês que tem 7 peças com a forma de regiões planas. Vamos aprender como confeccionar esse quebra-cabeça fazendo dobraduras.

- Providencie uma folha de papel sulfite e siga os passos.

- Pinte as peças como indicado na figura.



2 Com as peças do tangram podemos, por exemplo, construir uma região quadrada com 2 peças verdes ou com 2 peças azuis.

Construa as regiões indicadas a seguir e escreva no caderno as peças que usou em cada construção.

a) Região triangular com 2 peças; 2 peças verdes ou 2 peças azuis.

b) Região quadrada com 3 peças; 2 peças verdes e a peça amarela.

c) Região retangular com 3 peças; 2 peças verdes e a peça vermelha ou 2 peças verdes e a peça laranja ou 2 peças verdes e a peça amarela.

d) Região triangular com 3 peças. 2 peças verdes e a peça vermelha ou 2 peças verdes e a peça laranja ou 2 peças verdes e a peça amarela.

3 Use as peças do tangram e construa as 2 figuras abaixo. Depois, use a criatividade e construa outras figuras.

Resposta pessoal.

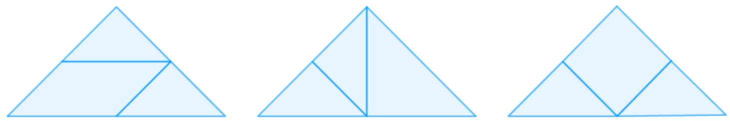
Fonte: Dante (2018, p. 141)

Esta sequência de três atividades está localizada em um dos boxes *Explorar e descobrir* do capítulo 5 que trata dos ângulos e polígonos, mais precisamente no tópico sobre regiões planas e contornos.

Na primeira parte da atividade é apresentada a construção do tangram por meio de dobraduras. Ao seguir o passo a passo para a construção do tangram, mostrado por meio do registro das figuras, a apreensão sequencial é mobilizada. Também é requerida a apreensão perceptiva e o olhar botanista para reconhecer as formas de suas sete peças e o olhar construtor para confeccionar o tangram.

Na segunda parte da atividade, a apreensão operatória é exigida para explorar as combinações de peças para formar as regiões solicitadas, sendo realizada a operação de reconfiguração. No enunciado, ao solicitar a descrição das peças utilizadas para a formação das regiões se está mobilizando a apreensão discursiva e realizando a conversão entre os registros da figura e o da língua natural. A figura a seguir exemplifica uma representação do triângulo no registro das figuras, utilizando três peças do tangram.

Figura 54: Região triangular com 3 peças



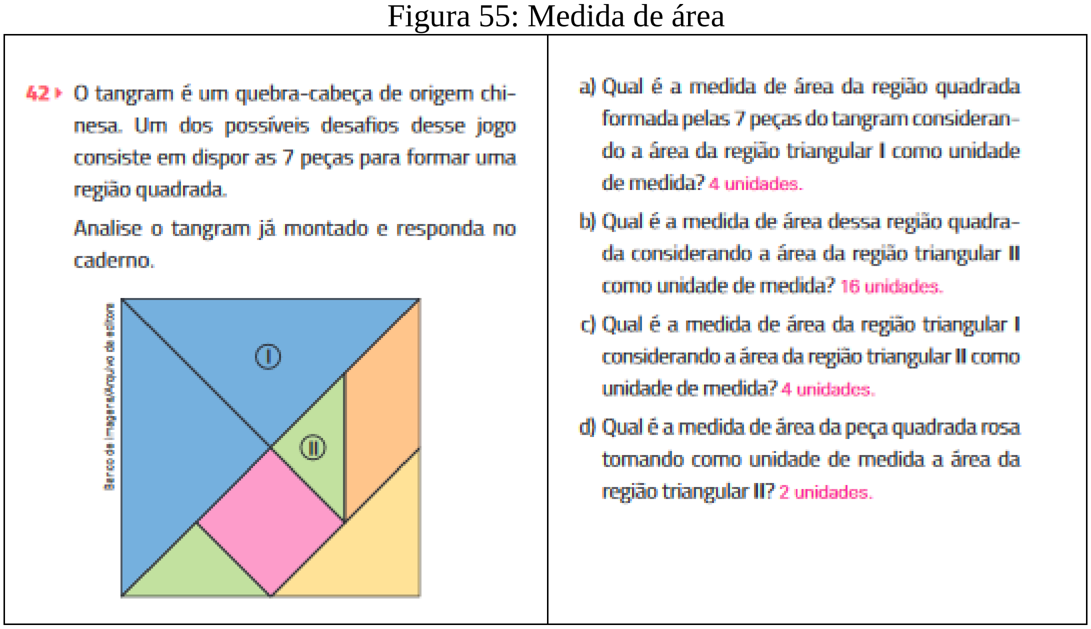
Fonte: Autora

Formar uma região triangular com três peças é uma atividade desafiante, que além de promover a operação de reconfiguração, propicia a exploração de tratamentos figurais.

A terceira parte da atividade inicialmente solicita a reprodução das figuras dadas. Acerca disso, Souza *et. al* (1997) argumenta que a habilidade visual se desenvolve mais quando for apresentado apenas o contorno da figura e não o de todas as peças, e que o grau de dificuldade e complexidade aumentam quando há variação da relação de tamanho entre o modelo apresentado e as peças do jogo. Neste sentido, a atividade poderia apresentar apenas o contorno das figuras, de modo a desafiar o aluno quanto à alocação das sete peças do tangram. Em seguida, a atividade busca estimular a criatividade. Novamente os olhares botanista e inventor, juntamente com as apreensões perceptiva e operatória são requeridos, incentivando a exploração de tratamentos figurais por meio da operação de reconfiguração.

ATIVIDADE 2 - A (*Capítulo 8: Grandezas geométricas: comprimento, perímetro e área)*

Figura 55: Medida de área



42 ▸ O tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa. Um dos possíveis desafios desse jogo consiste em dispor as 7 peças para formar uma região quadrada.

Analise o tangram já montado e responda no caderno.

a) Qual é a medida de área da região quadrada formada pelas 7 peças do tangram considerando a área da região triangular **I** como unidade de medida? 4 unidades.

b) Qual é a medida de área dessa região quadrada considerando a área da região triangular **II** como unidade de medida? 16 unidades.

c) Qual é a medida de área da região triangular **I** considerando a área da região triangular **II** como unidade de medida? 4 unidades.

d) Qual é a medida de área da peça quadrada rosa tomando como unidade de medida a área da região triangular **II**? 2 unidades.

Fonte: Dante (2018, p. 256)

Esta atividade situa-se no capítulo que trata do estudo do comprimento, do perímetro e da área, mais especificamente nas atividades que abordam a grandeza área. As atividades propostas pelo autor buscam promover a compreensão de que medir a área de uma superfície significa compará-la à outra. Deste modo, nesta atividade, explora-se o tangram para mostrar que figuras planas diferentes podem ter a mesma medida de área.

Como o tangram foi construído na atividade anterior, no capítulo 5, o autor sugere a sua retomada e utilização na resolução desta atividade.

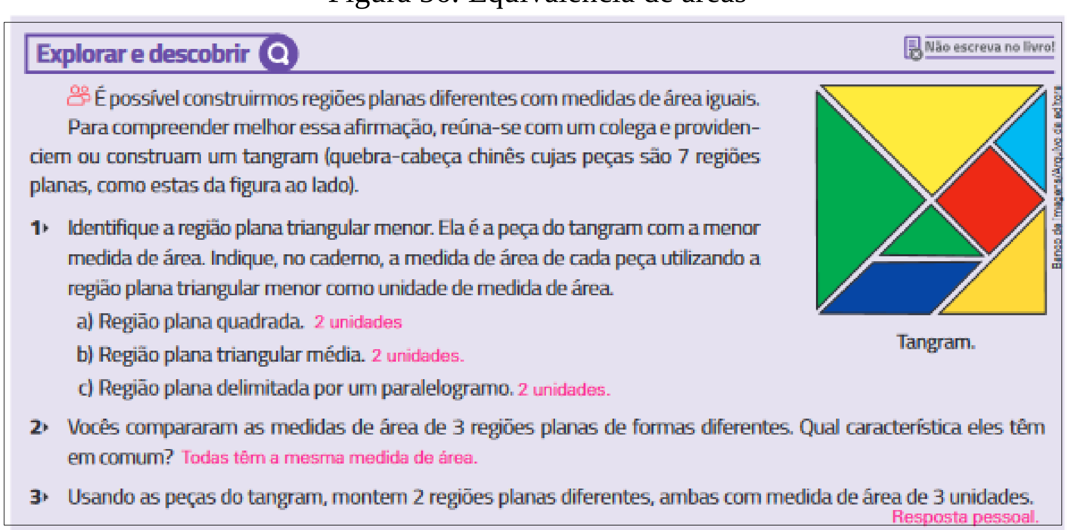
A atividade apresenta pontos em comum com a **ATIVIDADE 4-A** da coleção *Matemática Essencial*, pois também objetiva a comparação entre áreas de regiões, tomando-se subfiguras do tangram como unidades de medidas de áreas. Desta forma, uma breve análise será apresentada.

Inicialmente, as apreensões perceptiva e discursiva e o olhar botanista são requeridos para identificar o formato das peças do tangram que servirão como unidades de medida de área. Pelo olhar de agrimensor são comparadas as áreas das unidades de medidas de acordo com a região determinada no enunciado. A apreensão operatória, por meio da reconfiguração e da modificação posicional, bem como o olhar inventor são necessários para a resolução da atividade, isto é, para calcular quantas unidades de medida compõem cada região enunciada.

6.3.2 Atividades do 7º ano

ATIVIDADE 3- A (*Boxe: Explorar e descobrir*, *Capítulo 10: Perímetro, área e volume)*

Figura 56: Equivalência de áreas



Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

É possível construirmos regiões planas diferentes com medidas de área iguais. Para compreender melhor essa afirmação, reúna-se com um colega e providenciem ou construam um tangram (quebra-cabeça chinês cujas peças são 7 regiões planas, como estas da figura ao lado).

1. Identifique a região plana triangular menor. Ela é a peça do tangram com a menor medida de área. Indique, no caderno, a medida de área de cada peça utilizando a região plana triangular menor como unidade de medida de área.
   a) Região plana quadrada. 2 unidades
   b) Região plana triangular média. 2 unidades.
   c) Região plana delimitada por um paralelogramo. 2 unidades.
2. Vocês compararam as medidas de área de 3 regiões planas de formas diferentes. Qual característica eles têm em comum? Todas têm a mesma medida de área.
3. Usando as peças do tangram, montem 2 regiões planas diferentes, ambas com medida de área de 3 unidades. Resposta pessoal.

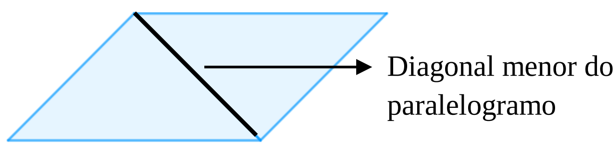
Fonte: Dante (2018, p. 286)

A última atividade a ser analisada nesta coleção está situada no boxe *Explorar e descobrir*, no capítulo que aborda perímetro, área e volume, mais especificamente quando os autores tratam da grandeza área.

Esta atividade apresenta pontos em comum com a **ATIVIDADE 4-A** da coleção *Matemática Essencial* e a **ATIVIDADE 2 – A** desta coleção, já analisadas.

Para responder a primeira questão, a apreensão discursiva precisa ser mobilizada, pois o enunciado indica qual a região do tangram tomada como unidade de medida de área e quais áreas de regiões devem ser calculadas. É preciso identificar a menor região triangular plana e utilizá-la como unidade de medida de área. Para isso, mobiliza-se a apreensão perceptiva e operatória. A figura a seguir mostra uma possibilidade para encontrar a área do paralelogramo a partir do triângulo pequeno.

Figura 57: Paralelogramo solicitado no item c



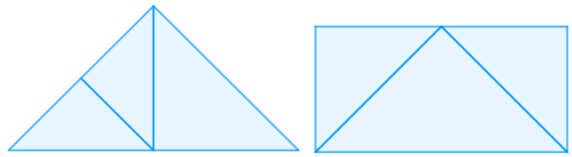
Fonte: Autora

O traçado da diagonal menor do paralelogramo sinaliza que a reconfiguração e o olhar de inventor foram acionados. Assim, a medida da área do paralelogramo corresponde à área de dois triângulos menores. Usando a reconfiguração também se conclui que a área do quadrado e do triângulo médio também correspondem à área de dois triângulos menores.

Após manipular as peças, espera-se que a segunda questão seja respondida sem dificuldade. Almeja-se que todos cheguem à conclusão de que as representações do quadrado, do triângulo e do paralelogramo solicitadas, apesar de apresentarem formas diferentes, possuem a mesma medida de área. Assim, a representação em língua natural é contemplada neste momento da atividade.

Na última questão, há o estímulo para a criação de outras figuras com a mesma medida de área, e novamente as apreensões perceptiva e operatória são exploradas, bem como o olhar atento do botanista é requisitado. A questão sugere a montagem de duas regiões planas diferentes, mas ambas com medida de área de três unidades.

Figura 58: Área com 3 unidades



Fonte: Autora

Com dois triângulos pequenos e um triângulo médio é possível formar as duas regiões planas diferentes, mostradas acima. Tanto a representação do triângulo quanto a representação do retângulo no registro das figuras possuem a mesma medida de área.

Como a questão não deixa claro se deve ser utilizado o triângulo pequeno como unidade de medida, o aluno terá muitas possibilidades de resolução usando também as demais peças do tangram.

Em suma, o quadro a seguir mostra quais apreensões e olhares foram identificados nas atividades desta coleção.

Quadro 8: Análise da coleção *Teláris Matemática*

Ano	**Atividade**	**Apreensões**						**Olhares**			
		P	**D**	**S**	**O**			**I**		**N-I**	
					MM	**MP**	**MO**	**B**	**A**	**C**	**I**
6º	1-A	X		X	X			X		X	X
	2-A	X	X		X	X		X	X		X
7º	3-A	X	X		X			X			X
8º	Nenhuma										
9º	Nenhuma										

Fonte: Autora

De acordo com os dados, esta coleção traz um diferencial importante para a o desenvolvimento das atividades. É a única que explora a apreensão sequencial quando apresenta o passo a passo para a confecção do tangram, na primeira atividade no 6º ano. Quanto às apreensões e olhares, destacam-se a apreensão perceptiva e a apreensão operatória, os olhares botanista e inventor. Infelizmente a coleção só apresenta atividades no 6º e 7º anos.

Buscando reunir as análises de todas as treze atividades que abordam o tangram, nas três coleções de livros didáticos, à luz das apreensões geométricas e dos olhares, apresenta-se o Quadro 9.

Quadro 9: Síntese final das três coleções

Coleção	Ano	Atividade	Apreensões						Olhares			
			P	D	S	O			I			
						MM	MP	MO	B	A	C	I
Matemática Essencial	6º	1-A	X	X		X	X	X	X	X	X	X
		2-P	X			X	X		X	X		X
		3-A	X						X		X	
		4-A	X	X		X	X	X	X	X		X
	7º	5-P	X			X			X			X
	8º	6-A	X			X			X	X	X	X
	9º	7-P	X			X		X	X			X
A Conquista da Matemática	6º	1-P	X			X			X			X
		2-P	X						X	X		
	7º	Nenhuma										
	8º	3-P	X	X		X			X			X
	9º	Nenhuma										
Teláris Matemática	6º	1-A	X		X	X			X		X	X
		2-A	X	X		X	X		X	X		X
	7º	3-A	X	X		X			X			X
	8º	Nenhuma										
	9º	Nenhuma										

Fonte: Autora

De acordo com o quadro, a apreensão perceptiva e olhar de botanista estão presentes em todas as atividades. Também, a apreensão operatória é mobilizada na grande maioria das atividades, principalmente por meio da reconfiguração intermediária, contrastando com a apreensão sequencial que é requerida em apenas uma atividade. O olhar não-icônico de inventor é o segundo olhar mais mobilizado, enquanto que o olhar de construtor, o menos requerido.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A atividade cognitiva que a Geometria requer, segundo Duval (2005), é mais exigente que outras áreas de conhecimento, pois envolve dois registros de representação semiótica: o registro figural para designar as figuras e suas propriedades, e o registro em língua natural para enunciar teoremas, definições e hipóteses. Assim, o autor enfatiza que os tratamentos discursivos e figurais devem ser efetuados de maneira simultânea e interativa.

Para a Teoria de Registros de Representação Semiótica, as figuras são um importante suporte para as atividades em geometria, apresentando um caminho para a aprendizagem da Matemática. Na figura é possível ver mais do que os enunciados dizem, permitindo explorar e aplicar tratamentos figurais. Uma figura, dentre tantas, merece destaque: o tangram. O tangram permite que o professor ensine a geometria de forma menos algébrica e possibilita desenvolver habilidades visuais de percepção e de operaçãosobre a figura. Com seu uso, é possível perceber e distinguir formas geométricas, representar e construir figuras a partir de suas peças, que servem de *start* para cálculos matemáticos. São diversas as possibilidades de seu uso no ensino de matemática, em particular, da geometria.

Ao falar do ensino de Geometria é natural lembrar do livro didático. Ele é um suporte que orienta o professor no preparo e desenvolvimento de suas aulas, sendo um instrumento essencial para o processo de ensino e de aprendizagem, seja para o professor ou para o aluno.

Por isso, esta pesquisa teve como objetivo analisar, em três coleções de livros didáticos de Matemática do 6º ao 9º, atividades que abordam o tangram, tendo como base os olhares e as apreensões geométricas propostos na Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

Das três coleções de livros didáticos analisadas, a coleção *A Conquista da Matemática* não apresentou atividades com o tangram para o aluno, somente para o professor, sendo duas atividades no 6º ano e uma atividade no 8º ano. Nesta coleção, o tangram é sugerido ao professor para o aprofundamento do conceito de frações, áreas e quadriláteros, mas não é apresentado nenhum molde do tangram ou orientação de como construí-lo. Desse modo, o uso do tangram como figura heurística ou como material didático pode passar despercebido durante os quatro anos escolares, caso o professor não o traga paralelamente. A coleção deixou a desejar quanto à exploração do tangram, corroborando com Santana (2006) ao afirmar que os recursos didáticos como o tangram são pouco explorados nos livros didáticos e quando são, muitas vezes é de forma superficial.

Na coleção *Matemática Essencial*, as atividades envolvendo o tangram aparecem em todos os quatro livros, do 6º ao 9º ano. O uso do tangram tem seu foco na averiguação de conhecimentos nos conteúdos que abordam polígonos, classificação de quadriláteros e medidas de área. São sete atividades desta coleção, sendo quatro para o aluno e outras três somente para o professor. Nas atividades dos alunos, o tangram não é explorado como material manipulativo. Somente nas atividades do professor é sugerida a sua reprodução a partir de um molde disponibilizado nos quatro volumes.

A coleção *Teláris Matemática* traz atividades somente nos dois primeiros livros, sendo duas atividades no 6º ano e uma atividade no 7º ano. É a única coleção que apresentou uma atividade que explora a construção do tangram a partir de dobraduras. As atividades aprofundam os conceitos referentes a medidas de áreas e na maioria delas o tangram é sugerido como recurso didático a partir da manipulação de suas peças.

Quanto aos anos escolares, as atividades com tangram tiveram maior incidência no 6º ano, sendo que das treze atividades analisadas, oito constam em livros do ano supracitado, e apenas uma atividade consta no 9º ano, mostrando que à medida que os anos de estudo avançam, diminui o contato dos alunos com o tangram. Contudo, por ser um material lúdico e atraente, o tangram pode desafiar o aluno a empregar diversas táticas e conhecimentos, ampliando o raciocínio lógico-matemático e desenvolvendo a percepção espacial. Também, são inúmeras as possibilidades de uso do tangram para o ensino de conteúdos matemáticos. Neste sentido, ele poderia ser abordado nos diferentes anos escolares ou diferentes níveis de ensino.

Os autores das três coleções propunham um total de treze atividades que envolvem o tangram. Quanto aos olhares e às apreensões geométricas, as atividades sempre possibilitaram a mobilização de algum tipo de apreensão ou de olhar. Em todas as atividades a apreensão perceptiva e o olhar botanista estavam presentes, permitindo por exemplo, o reconhecimento das formas das subfiguras que compõem o tangram. Isso se justifica porque diante do tangram é imediato reconhecer o formato de suas peças e o seu formato como um todo, em consonância com a afirmação de Duval (2003) de que os conhecimentos perceptivos são os primeiros a aparecerem quando se interage com figuras.

As apreensões menos requeridas nas atividades foram a discursiva e a sequencial, essa última, mobilizada apenas na **ATIVIDADES 1- A** da coleção *Teláris Matemática*, que trata da construção geométrica do tangram.

Quanto à conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, definida como visualização, estava presente na grande maioria das atividades que envolvem o tangram e diretamente ligada à operação semiótica de reconfiguração intermediária. A reconfiguração foi desenvolvida em onze das treze atividades e se revelou como a principal operação realizada sobre a figura do tangram ou com as peças do tangram. Ela auxiliou a ver tratamentos matemáticos necessários para a resolução da atividade, indo ao encontro do que discorre Duval (2012a, p. 125, grifos do autor) "**está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto".** Desta forma, operar sobre a figura trouxe à tona novos olhares, resultando em um ganho de conhecimento em relação à figura original, permitindo assim a resolução da atividade.

Reorganizar uma figura em outras subfiguras diferentes, reconhecendo suas características e propriedades, bem como identificar subfiguras que não são visíveis de imediato, não são atividades simples. Requerem uma mudança de atitude e na forma matemática de ver, pois é habitual o ensino de geometria que privilegia as construções com instrumentos, não dando tanto valor ao "ver" sobre a figura e reconhecer os objetos que representam. Para Duval (2012b, p.1), o "ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra."

É importante frisar que com a reconfiguração das peças do tangram, a geometria tornou-se menos algébrica. Nas análises das atividades, o objetivo não era privilegiar o uso de fórmulas e relações algébricas, mas operar visualmente sobre a figura, fazendo justaposições e sobreposições de peças, com acréscimos de traços e rotações, recorrendo à visualização para a resolução das atividades. Isso pode favorecer a aprendizagem de geometria, pois segundo Duval, diante de um problema que envolve figura geométrica, os tratamentos figurais são o primeiro passo em direção à resolução do problema. E isso é reconhecido ao longo da maioria das atividades que exploraram a reconfiguração intermediária. Ela teve força de tratamentos matemáticos, ou seja, a partir da reconfiguração das peças do tangram ou do acréscimo de traços sobre as figuras, foi possível identificar e aplicar diferentes tratamentos matemáticos, como o cálculo de áreas, de frações, por exemplo.

Ainda quanto à visualização, ela só não estava presente na **ATIVIDADE 3-A** da coleção *Matemática Essencial* e na **ATIVIDADE 2-P** da coleção *A Conquista da Matemática*. Nestas atividades, o tangram não foi explorado a partir da visualização, se resumindo a uma figura estática, centrada quase que exclusivamente na identificação da forma da figura. Em relação a isso, Flores e Moretti (2006) afirmam que ao focar na percepção o olhar se limita a reconhecer a forma da figura e acaba por inibir operações possíveis de serem realizadas sobre a figura impossibilitando a exploração heurística. Assim, o tangram não foi relevante para essas atividades e poderia ser substituído por outras figuras geométricas.

Como a maioria das atividades analisadas abordou a recomposição de figuras a partir das subfiguras, o olhar não-icônico de inventor foi o segundo olhar mais requisitado, atrás apenas do olhar botanista. Os olhares de construtor e de agrimensor também foram exigidos durante as atividades, mas não com tanta frequência quanto o inventor. Isso também está em sintonia com a proposta de Duval para o ensino de geometria, pois o autor reitera a importância do olhar não icônico que permite operar sobre a figura, indo além da identificação da forma figural.

Ao analisar as três coleções, todas as considerações aqui registradas dizem respeito somente a elas. Não se pode generalizar para as demais coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas pelo PNLD/2020. Assim, é possível que haja um número diverso de atividades que abordam o tangram em outros livros didáticos, sites, artigos, entre outros, ou que possibilitam uma interação entre aluno e diversos assuntos matemáticos.

Finalizando, as atividades contempladas nas coleções analisadas possibilitaram a mobilização simultânea e articulada entre diferentes apreensões geométricas, entre apreensões e olhares, e entre os olhares, em particular a articulação das apreensões perceptiva e operatória. As apreensões e os olhares foram potencializados quando o tangram foi usado como recurso didático. Contudo, mesmo quando os autores o abordaram como figura, ele desempenhou seu papel na exploração heurística, corroborando com a proposta de Duval para um ensino de geometria mais voltado às qualidades visuais da figura.

8 REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edição 70, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 06 maio. 2021.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa.** São Paulo, 2004, v. 30, n. 3, p. 549-566.

COSTA, S M da. **Tangram e resolução de problemas: desafios e possibilidades.** 2019. 127p. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, PB, 2019.

DANTE, L R. **Projeto: Teláris Matemática.** 3.ed.- São Paulo: Ática, 2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

__________Semiosis y pensamiento humano - Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: Myrian Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

__________ Les conditions conitives de l‟apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

___________ Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

__________ Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n.1, p. 118-138, 2012a.

__________Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012b.

FACHIN, O. **Fundamentos de metodologia**. São Paulo: Saraiva, 2006.

FLORES, C. R; MORETTI, M. T. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Pernambuco. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Pernambuco: UFP, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais

__________As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **Revemat**, Florianópolis, v 1.1, p. 5 -13, UFSC: 2006.

GIOVANNI J; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. 4ª edição. São Paulo: FTD, 2018.

GONÇALVES, F A; *et al*.. **Materiais manipulativos para o ensino de figuras planas.** São Paulo: Mathema, 2012. 176 p. (Coleção mathemoteca; 4)

LAKATOS, E M; MARCONI, M de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LORENZATO, S. **Para Aprender a Matemática**. Campinas, São Paulo: Autores Associados. 2008. (Coleção formação de professores).

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 2ª. ed. rev. - Campinas, SP: Autores associados, 2009. (Coleção formação de professores).

LOPES, A J. O perímetro do tangram e suas aplicações no desenho industrial. **Educação Matemática em Revista**. Março, 2009.

MARTINS, A C P; *et al*.. **O ensino da geometria por meio do tangram no 9º ano do ensino fundamental**. 2015, 45f. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal do Amapá, Santana, 2015.

MENONCINI, L. **O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área**. 2018, 274f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2018.

MORAIS, C. D. P. **Nuevos estudios sencillos de leo brouwer:** a utilização da teoria da Gestalt no processo de elaboração da performance instrumental, 2017. 163 f. Dissertação (Mestrado em Música) - Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2017.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria**: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 249f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Revista Acta Scientiae**. v.15, 2013.

MORETTI, M T; BRANDT, C F. **A Confluência de Ideias para Criar um Espaço de aprendizagem em Geometria**, 2013. Disponível em http://www4.pucsp.br/IIIpesquisaedmat/download/resumos/GD10-Geo-mericles-celia-fim.pdf

PATARO, P M; BALESTRI, R. **Matemática Essencial.** 1ª edição. São Paulo: Scipione, 2018.

POLLON, R. **Tangram:** Material Didático Para Resolução de Problemas no 6º ano**.** Cadernos PDE. Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Guarapuava PR. Paraná: 2013.

PONTES, D F.N, LOPES, S C. da C. Uso do tangram como material lúdico em sala de aula. Relato de experiência. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. 10, 2016. São Paulo. **Anais eletrônicos do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016. Disponível em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7241_4187_ID.pdf

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTANA, W. M. G. **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área:** uma análise dos 1ivros didáticos para as séries finais do Ensino Fundamental. 2006, 189f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2006.

SANTOS, S F dos. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações**. 2019, 136f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, 2019.

SMOLE, K S; *et al*. **Figura e Formas.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

SOUZA, E R de; *et al*..**A Matemática das sete peças do tangram**. 2ª edição. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1997.

SOUZA, R N S de; MORETTI, M T. A Desconstrução dimensional e a mobilização dos registros de representação. In: VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 7, 2017, Rio Grande do Sul. **Anais eletrônicos do VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática.** Canoas, RS. ULBRA, 2017.

Tangram: texto instrucional. **Ensinar hoje.**
Disponível em https://ensinarhoje.com/tangram-texto-instrucional/. Acesso em: 04/12/2020.

WAGNER, E. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf