UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

RENAN PARISE

GEOMETRIA ESFÉRICA: UM ESTUDO UTILIZANDO OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM

CHAPECÓ

2021

RENAN PARISE

GEOMETRIA ESFÉRICA: UM ESTUDO UTILIZANDO OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

CHAPECÓ

2021

RENAN PARISE

GEOMETRIA ESFÉRICA: UM ESTUDO UTILIZANDO OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 13/10/2021.

BANCA EXAMINADORA

Rosane Rossato Binotto

Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto - UFFS
Orientadora

Profa. Dra. Janice Teresinha Reichert - UFFS
Avaliadora

Prof. Dr. Vitor José Petry - UFFS
Avaliador

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Parise, Renan
GEOMETRIA ESFÉRICA:: UM ESTUDO UTILIZANDO OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM / Renan Parise. -- 2021.
54 f.:il.

Orientadora: Doutora Rosane Rossato Binotto

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2021.

1. Geometria Esférica, Geometrias Não Euclidianas, GeoGebra, Objetos Virtuais de Aprendizagem, Imaginação Pedagógica.. I. Binotto, Rosane Rossato, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais por sempre me apoiarem.
- À minha família, que sempre me auxiliou nesta caminhada.
- À minha orientadora, Profa. Rosane, pela orientação, pelos ensinamentos, pela paciência, dedicação e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.
- Aos meus colegas e amigos do curso, que me acompanharam nesta jornada.
- Aos professores da Universidade Federal Fronteira Sul, pelos ensinamentos.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo geral elaborar Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA) para o ensino de geometria esférica e analisar as possibilidades e potencialidades desses OVA. Para isso realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa propositiva e descritiva. E também, uma pesquisa bibliográfica sobre aspectos da história e dos principais matemáticos que contribuíram para o surgimento dessa geometria. Munidos desses conhecimentos sobre os fundamentos da geometria esférica propomos uma sequência de OVA construídos no GeoGebra, abordando modelo de representação dessa geometria, elementos primitivos, a versão do postulado das paralelas, distância, ângulos, polígonos esféricos, cálculo de área de polígonos e soma dos seus ângulos internos. Além disso, considerando esses OVA como dados de pesquisa realizamos uma análise de possibilidades e potencialidades por meio de um exercício de imaginação pedagógica em cada OVA. Como conclusões obtemos que os OVA podem ajudar na aprendizagem da geometria esférica, pois permitem uma interação com as propriedades e definições.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Geometrias Não Euclidianas, GeoGebra, Objetos Virtuais de Aprendizagem, Imaginação Pedagógica.

ABSTRACT

This work presents has general objective elaborate a sequence of Virtual Learning Objects (VLO) for learning of spherical geometry and analyze the possibilities and potential these VLO. For it, we make a qualitative, descriptive and porposeful research. Besides, we make a bibliographic research about the history and mathematicians that help to discovery this geometry. This way, we propose a sequence of VLO made in GeoGebra, that's VLO represent this geometry like, primitive elements, the version of the postulate of parallels, distance, angles, spherical polygons, area calculation polygons and the sum of their internal angles. Furthermore, we considered like research data that's VLO for we made a analysis of possibilities and potentialities using pedagogical imagination in each VLO and after that, it's done in all work. How conclusions we had that VLO can help the learnig of spherical geometry, cause they allow an interaction with the properties and definitions.

Keywords: Spherical Geometry, Non Euclidean Geometry, GeoGebra. Virtual Learning Objects, Pedagogical Imagination.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana, sistematizada pelos gregos, em torno de 300 a.C., na obra chamada *Os Elementos* (escrita por Euclides) apresentou um problema que perdurou aproximadamente dois mil anos, o quinto axioma ou quinto postulado de Euclides também conhecido como postulado das paralelas: "Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m." (BARBOSA, 2012, p. 99).

Muitos matemáticos acreditavam que esse axioma poderia ser caracterizado como uma proposição devido ao tamanho do seu enunciado e pelo fato dele ter sido apresentado tardiamente na obra *Os Elementos*. Foram muitas as tentativas de demonstrá-lo, mas todas sem sucesso. Estas tentativas culminaram com o surgimento de novas geometrias, no século XIX, denominadas geometrias não euclidianas.

A geometria esférica, tema deste trabalho, é uma das geometrias não euclidianas. Ela é muito útil para descrever a geometria que pode ser aplicada no globo terrestre, se considerarmos a Terra como uma esfera perfeita ao invés de um elipsoide[1].

Por se tratar de uma geometria que usa como representação uma esfera, pretendemos explorar o estudo da geometria esférica por meio de Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA), elaborados no GeoGebra, para facilitar a compreensão do estudante.

O interesse pelas geometrias não euclidianas ocorreu quando assisti uma palestra ministrada pelo Prof. Dr. Ari João Aiolf da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) sobre esse tema e também pela curiosidade para aprender mais sobre essas geometrias.

Observamos que, muitos cursos de licenciatura em Matemática não possuem uma disciplina que aborda as geometrias não euclidianas (em específico a geometria esférica). E esse conteúdo também não está presente na disciplina de Matemática do Ensino Médio.

Neste sentido, elaboramos esse trabalho a fim de contribuir com um material para trabalhar a geometria esférica, em um curso de Matemática. Além disso, mostramos as possi-

[1]Forma da Terra, pois, ela é achatada nos polos.

bilidades e potencialidades desse material elaborado.

Diante disto, propomos como questão de pesquisa: Quais possibilidades e potencialidades podem ser exploradas em OVA de geometria esférica?

Elencamos como objetivo geral deste trabalho elaborar uma sequência de OVA para o ensino da geometria esférica e analisar as possibilidades e potencialidades desses OVA.

Ainda, a fim de responder a questão de pesquisa e atender o objetivo geral proposto elencamos como objetivos específicos:

- Realizar um estudo bibliográfico de aspectos da história e dos principais matemáticos que contribuíram para o surgimento das geometrias não euclidianas, com destaque para a geometria esférica, a fim de entender seu processo de criação.
- Estudar teoria, conceitos e propriedades da geometria esférica com o objetivo de entendê-la.
- Construir uma sequência de OVA sobre conceitos e propriedades da geometria esférica, usando o *software* GeoGebra.
- Realizar uma análise de possibilidades e potencialidades dos OVA elaborados por meio de um exercício de imaginação pedagógica.

Realizamos um trabalho de pesquisa de natureza qualitativa, propositiva e descritiva com o aporte de pesquisa bibliográfica. Os dados considerados são os OVA elaborados. Além disso, realizamos uma análise de possibilidades desses OVA, por meio de uma descrição dessas possibilidades.

O presente trabalho é dividido em seis capítulos, sendo que no primeiro capítulo temos a Introdução.

No segundo capítulo discorremos sobre OVA e imaginação pedagógica, além de tratarmos das contribuições do uso de tecnologias digitais no ensino de Geometria.

No terceiro capítulo apresentamos uma abordagem histórica da geometria euclidiana, com destaque para o problema que levou ao surgimento das geometrias não euclidianas. Também elencamos os principais matemáticos que descobriram as geometrias não euclidianas.

No quarto capítulo apresentamos a metodologia do trabalho. No quinto capítulo apresentamos a sequência com os OVA elaborados. Nesses OVA abordamos algumas das propriedades e definições da geometria esférica. Também realizamos uma análise de possibilidades e potencialidades que podem ser exploradas nesses OVA, destacando as possibilidades de interagir com estes objetos, e como consequência, isto facilitaria o entendimento das definições e propriedades da geometria esférica.

Por fim, no sexto capítulo apresentamos as considerações finais.

2 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO, OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo abordamos o uso de tecnologias digitais de comunicação para o ensino, em particular para o ensino de geometria. Também discorremos sobre Objetos Virtuais de Aprendizagem e Imaginação Pedagógica na perspectiva de Skovsmose.

2.1 AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E INFORMAÇÃO E O ENSINO

Com o advento da internet, cada vez mais a sociedade mundial está conectada à rede mundial de computadores, acelerando assim o processo de informatização e globalização. A educação também está passando por este processo de informatização e, neste sentido as tecnologias da informação e comunicação (TIC) estão mais presentes na sala de aula. Conforme GUARDA (2018, p. 79) “A utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem reporta a sala de aula ao momento contemporâneo de inovação."

Desta forma, as TIC proporcionam para os professores a possibilidades do uso de novas tecnologias para auxiliar no ensino dos alunos, pois, segundo Feitosa (2020), quando rejeitamos o uso das TIC para o ensino acabamos por enfraquecer o ensino, prejudicando assim as metas desejadas. Desta forma as TIC abrem novos leques para se pensar na educação, como podemos observar em OLIVEIRA (2020, p. 202):

> As TIC trouxeram para o ensino novos modos para se pensar e fazer a Educação. Por meio de ferramentas digitais, o ensino e a aprendizagem ganharam espaço virtual e digital que permitem aos envolvidos no processo um ensino que acompanhe essa nova realidade dos dias atuais.

Observamos que as TIC trouxeram um grande número de *softwares* voltados para o ensino, principalmente voltados para o ensino da geometria, pois estes facilitam a visualização, como podemos ver em FERRI, SCHIMIGUEL e CALEJON (2013, n.p.):

> O software didático tem a capacidade de aumentar o componente visual do matemático atribuindo um papel importante na formação de exibição matemática. [...] é possível dizer que o software torna-se ator no processo de fazer matemática.

Como um dos objetivos do trabalho é construir OVA escolhemos o *software* GeoGebra para realizar essas construções. Ele foi desenvolvido e idealizado por Markus Hohenwarter. O GeoGebra é um *software* livre e gratuito que permite trabalhar geometria de maneira dinâmica abordando vários conteúdos matemáticos e com a possibilidade de se trabalhar em vários níveis de ensino.

Para CATTAI (2007, p. 4-5):

> [...] o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Com relação a utilização do GeoGebra nas aulas de Matemática, Medina e Leineker (2014) enfatizam que:

> Trabalhando com esta ferramenta os alunos podem fazer manipulações das construções realizadas. Fazer conexão entre a geometria e a álgebra. Ao realizar as manipulações, respeitando as estruturas das construções, possibilita ao educando a análise das propriedades envolvidas, e através da visualização desenvolvam o raciocínio geométrico. (MEDINA e LEINEKER, 2014, n.p.).

Por todas essas vantagens apresentadas escolhemos esse *software* e acreditamos que ela possa ser uma ferramenta digital com muito potencial para auxiliar no ensino.

2.1.1 OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM

As ferramentas digitais que auxiliam na aprendizagem podem ser definidas como Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA). De acordo com SPINELLI (2007, p. 7),

> Um objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade. [...] dessa forma, pode compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades e integrando a metodologia adotada para determinado trabalho.

Com relação as contribuições dos OVA para o ensino e a aprendizagem, segundo GUARDA e PETRY (2020, p. 717):

> considera-se que os OVA constituem-se como elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, contribuindo na motivação e interação dos alunos, permitindo uma visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados, necessitando, porém, uma complementação através de sistematizações e principalmente no desenvolvimento de habilidades da representação descritiva desses objetos.

Neste sentido são criados OVA para o ensino da geometria esférica, que usa como modelo de representação geométrica uma esfera. Pontos, segmentos e retas são representados por pontos, arcos, geodésicas ou circunferências máximas, respectivamente, contidas em uma esfera.

Os conceitos básicos para entender a geometria esférica são os conceitos da geometria plana. A fim de familiarizar o estudante com os conceitos e as propriedades básicas da geometria esférica, quase todas as propriedades e definições possuem um OVA para auxiliar no seu entendimento. Assim, o estudante poderá interagir com o objeto dinâmico o que poderá contribuir para o entendimento dos conceitos e propriedades.

Os OVA apresentados neste trabalho foram elaborados no GeoGebra, um *software* de Matemática, voltado para a geometria dinâmica com distribuição livre, disponível para *download* nos sistemas operacionais Windows, Linux, bem como para os sistemas IOS ou Android. Também pode ser usado on-line em qualquer navegador.

Como supracitado neste capítulo, que atualmente a sociedade está cada vez mais conectada a internet, os OVA desenvolvidos neste trabalho estão disponíveis de modo on-line por meio do link https://www.geogebra.org/m/qesh4faz. Este link direcionara o leitor para um livro desenvolvido no GeoGebra pelo autor contendo todos os OVA apresentados neste trabalho.

2.2 IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA

A partir da elaboração dos OVA pretende-se realizar uma análise de possibilidades e potencialidades a serem exploradas nesses OVA, por meio de um exercício de imaginação pedagógica, conforme proposto por Skovsmose.

Skovsmose (2015) propôs trabalhar com pesquisas de possibilidades em Matemática, que “inclui não somente um estudo de ‘o que é’ ou ‘o que é construído’, mas também um estudo de ‘o que não é’ e ‘o que poderia ser construído’ ”. (SKOVSMOSE, 2015, p. 69-70).

Para tanto, ele sugere que se considere uma situação imaginada ou uma situação arranjada para efetuar tal pesquisa. A questão é que uma situação imaginada pode estar longe da realidade, além de incluir esperanças, aspirações parciais e inconsistentes. Já a situação arranjada pode ser mais complexa, mas é um tipo de situação intermediária, "[...] mas que oferece-nos uma maneira de olhar para o que se imaginava." (SKOVSMOSE, 2015, p. 75).

A pesquisa de possibilidades, conforme Skovsmose (2015), quando ela se refere à escolarização e à educação, é denominada imaginação pedagógica. Segundo o autor, "tal imaginação pode sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis" (SKOVSMOSE, 2015, p. 76).

Para fazer a análise das possibilidades, segundo Lima (2021), é necessário a partir dos exercícios de imaginação pedagógica, analisar as formas de levá-la a uma situação corrente ou real.

Para exemplificar o que é imaginação pedagógica, neste sentido, podemos entendê-la como um processo alternativo de pensar na abordagem do ensino da geometria esférica usando os OVA, imaginado uma situação em que o estudante interaja com os OVA e analise-os para facilitar a compreensão das propriedades da geometria esférica.

3 HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Neste capítulo apresentamos aspectos históricos da geometria euclidiana baseado nos trabalhos de Euclides, matemático grego que viveu por volta de 300 a. C.. Também apresentamos os motivos que levaram ao surgimento das geometrias não euclidianas e os seus criadores.

3.1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Como ponto de partida, neste trabalho, consideramos a matemática grega desenvolvida de 600 a 300 a.C., apesar de outras sociedades também terem contribuído para o desenvolvimento da matemática neste período e até antes dele, como as sociedades egípcia, hindu, chinesa e babilônica. Não comentamos as contribuições destas sociedades. A sociedade grega foi a primeira sociedade a tratar a matemática de uma forma axiomática, "Enquanto egípcios e babilônicos perguntavam 'como ?' Os filósofos gregos passaram a indagar 'por quê ?' " (SILVA, 2014, p. 71).

Segundo EVES (2004), o primeiro matemático grego de destaque foi Tales de Mileto, que viveu por volta de 600 a.C., e realizou grandes contribuições para o estudo da geometria do ponto de vista abstrato.

Por volta de 300 a. C., viveu o matemático Euclides, no entanto pouco se sabe sobre sua vida, conforme especificado por Eves, "É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e personalidade de Euclides." (EVES, 2004, p. 167).

Uma das contribuições de Euclides foi sistematizar e organizar todas as descobertas matemáticas em uma obra denominada *Os Elementos*. Essa obra era um conjunto de treze livros, abordando temas da geometria, teoria dos números e álgebra geométrica. Muitos dos resultados presentes nesta obra não foram descobertos por Euclides, porém, a sua grande contribuição se deve à organização destes conteúdos a partir de um sistema axiomático.

Euclides baseou o desenvolvimento de sua obra em cinco conceitos primitivos (não precisam de definição) e cinco axiomas ou postulados (verdades assumidas), descritos em Presmic (2014, p. 2) por:

Conceitos primitivos

I. Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.

II. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

III. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

IV. Coisas que coincidem umas com a outras, são iguais.

V. O todo é maior do que qualquer uma das partes.

Axiomas

I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos.

II. Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta.

III. Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer.

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. Quinto Postulado: Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

A obra *Os Elementos* é uma das mais importantes obras de geometria plana e espacial, denominada geometria euclidiana, com seu conteúdo sendo ensinado até hoje na Educação Básica e nos cursos de Matemática, de Ensino Superior.

Euclides formulou o quinto postulado (também conhecido como postulado das paralelas ou axioma das paralelas de Euclides) de modo eficiente e elegante. Porém esse postulado causou uma "crise"na matemática pois muitos matemáticos desconfiavam que ele não era um postulado e sim uma proposição. Como ele foi apresentado tardiamente na obra *Os Elementos* (seu uso aparece nas proposições 27 a 32), muitos resultados foram provados sem utilizá-lo e também seu enunciado parecia muito grande em relação ao enunciado dos demais postulados.

Foram muitas as tentativas de demonstrar este postulado, mas todas sem sucesso. Nestas tentativas de demonstrá-lo os matemáticos se depararam com a descoberta de novos conhecimentos, que acarretou no surgimento de novas geometrias, no século XIX, denominadas geometrias não euclidianas, a geometria elíptica (e, é claro esférica) e a geometria hiperbólica.

3.2 TENTATIVAS DE DEMONSTRAÇÃO DO POSTULADO DAS PARALELAS

A fim de entender melhor o quinto postulado e a própria geometria euclidiana, por aproximadamente dois mil anos, matemáticos tentaram demonstrá-lo ou substituí-lo por outro axioma, denominado substituto, que não alterasse as propriedades da geometria desenvolvida por Euclides. Na sequência destacamos algumas dessas tentativas de demonstração e alguns desses substitutos.

Sobre os substitutos do quinto postulado uma das versões mais conhecidas foi a elaborada pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819), que de acordo com Barbosa pode ser enunciado: “Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m.” (BARBOSA, 2012, p. 99).

Na sequência apresentamos outros substitutos para o quinto postulado (EVES, 2004, p. 539):

Alguns Substitutos do Quinto Postulado

1. Há pelo menos um triângulo cuja a soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso.

2. Existe um par de triângulos semelhantes e não-congruentes.

3. Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos.

4. Por três pontos não-colineares pode-se traçar uma circunferência.

5. Por qualquer ponto no interior de um ângulo menor que 60^o pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.

Como consequência do problema do quinto postulado perdurar aproximadamente dois mil anos, foi seu grande número de demonstrações, com nenhuma obtendo exito. Segundo EVES (2004), algumas das investigações científicas que mais se aproximaram da validade ou não deste postulado foram realizadas por Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

3.3 O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

O crédito para a descoberta das geometrias não euclidianas se deve a três matemáticos que desenvolveram sua teoria de forma independente e quase ao mesmo tempo, sendo eles o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856).

Estes matemáticos, diferentemente de Saccheri, Legendre e Lambert, desenvolveram teorias matemáticas a partir da negação do quinto postulado. Negando-o e adaptando esta negação na versão do axioma Playfair, obtemos as seguintes possibilidades: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais que uma reta ou nenhuma reta paralela a reta dada.

Atribui-se a Gauss, a descoberta dos primórdios das geometrias não euclidianas, porém, ele não publicou seus resultados, apesar dele ser considerado um dos maiores matemáticos que já existiu, sendo conhecido como o Príncipe dos Matemáticos.

Lobachevsky foi aluno, professor e reitor da Universidade de Kazan, sendo ele o primeiro a publicar uma obra sobre geometrias não euclidianas, em 1829. Como seu trabalho foi escrito em russo, fatores como a pouca globalização que se tinha na época atrapalharam a divulgação e o conhecimento de seu trabalho por outros matemáticos europeus.

Bolyai era filho de Wolfgang Bolyai, amigo de Gauss, sendo que eles estudaram juntos o quinto postulado. Wolfgang chegou a prevenir seu filho para evitar este conteúdo, como podemos ver em um trecho de uma de suas cartas.

> Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de saúde, paz de espírito e felicidade na vida! (PRESMIC, 2014, p. 10).

Bolyai publicou seus resultados sobre as geometrias não euclidianas em um apêndice de um livro de seu pai.

Atribui-se a Lobachevsky e Bolyai a descoberta da geometria hiperbólica. Esta geometria possui como quinto postulado: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais do que uma reta paralela a reta dada. Os demais axiomas da geometria euclidiana continuam válidos nessa geometria, bem como os resultados deles dependentes.

A geometria esférica, caso particular da geometria elíptica, foi desenvolvida em 1854 por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), considerado o aluno mais brilhante de Gauss. Ele descartou a possibilidade da infinitude da reta, propriedade usada por Saccheri, Legendre, Lambert, Gauss, Bolyai e Lobachevsky para desenvolver sua geometria. Riemann propôs que a reta é ilimitada, com isso, foi possível desenvolver uma geometria em que não existe nenhuma reta paralela a uma reta dada. Essa geometria é denominada geometria elíptica.

Como consequência do surgimento das geometrias não euclidianas, a obra *Os Elementos* precisava de uma revisão, e esta foi feita pelo matemático David Hilbert (1862-1943) na obra *Os Fundamentos da Geometria*.

4 METODOLOGIA

Este trabalho é de natureza qualitativa, propositiva e descritiva com o aporte de pesquisa bibliográfica. A pesquisa bibliográfica foi utilizada para fazermos um levantamento da história das geometrias não euclidianas e da sua teoria. A partir disso foram elaborados OVA de modo a construir uma sequência para o ensino da geometria esférica, tendo deste modo um caráter propositivo. Além disso, realizamos uma análise de possibilidades destes objetos, no sentido de Skovsmose, por meio de um exercício de imaginação pedagógica, caracterizando como uma pesquisa descritiva. Os dados considerados são os OVA elaborados.

Como não trabalhamos com a quantificação de dados este trabalho de pesquisa é de natureza qualitativa, pois, segundo GODOY (1995, p. 58) "a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados."

Ela é propositiva pois elaboramos uma sequência de OVA composta pelo conteúdo de geometria esférica. Propomos também esse material como uma forma de auxiliar o ensino desse conteúdo.

Sobre a pesquisa descritiva, segundo GERHARDT e SILVEIRA (2009, p. 37) ela busca "descrever os fatos e fenômenos de determinada realidade".

Considerando os OVA elaborados como dados de pesquisa, realizamos um estudo deles fazendo uma descrição por meio de um exercício de imaginação pedagógica das possibilidades e potencialidades matemáticas e de outras naturezas que podem ser exploradas nestes objetos e no seu uso.

Essa análise foi realizada a partir das percepções do autor desse trabalho, sendo estas percepções vistas então por um aluno no final da graduação de Matemática.

Com relação a metodologia de pesquisa bibliográfica, é uma metodologia de pesquisa que proporciona uma nova visão sobre o assunto, segundo MARCONI e LAKATOS, uma pesquisa bibliográfica

> A pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange toda a bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc. [...] Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto. (MARCONI e LAKATOS, 2003, p. 183).

Além disso, conforme esses autores a pesquisa bibliográfica,

> não é repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras. (MARCONI, LAKATOS, 2003, p.183).

É feito o uso da pesquisa bibliográfica para a construção da história de como surgiu as geometrias não euclidiana e para se fazer o embasamento teórico das propriedades da geometria esférica.

5 OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E ANÁLISE DE POSSIBILIDADES

Neste capítulo apresentamos a sequência dos OVA construídos. Estes OVA abordam definições e propriedades da geometria esférica. Além disso apresentamos um estudo de possibilidades e potencialidades desses OVA por meio de um exercício de imaginação pedagógica, realizado pelo autor deste trabalho. Ressaltamos que esta análise é realizada de modo individual em cada OVA apresentado e também na seção 5.3, de modo mais geral.

As propriedades e teoremas aqui apresentados foram retirados, principalmente, de ALVES (2009), SANTOS e OLIVEIRA (2018), SILVA (2018) e SILVA (2015). Todos os OVA foram construídos no *software* GeoGebra, disponíveis de modo on-line por meio do link https://www.geogebra.org/m/qesh4faz.

Também comparamos, neste trabalho, algumas das propriedades da geometria esférica com elementos do globo terrestre, pois consideramos o planeta Terra como uma esfera ao invés de um elipsoide.

Destacamos que todos os OVA criados, possuem como centro da esfera o ponto A, centrado na origem e igual a 1. Tais medidas não implicam nas propriedades que serão apresentadas, pois, nas demonstrações não consideraremos estas medidas.

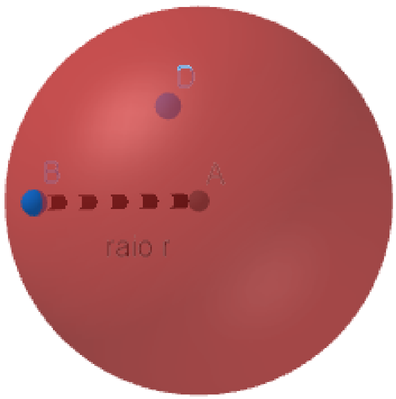
5.1 ELEMENTOS DA ESFERA

Iniciamos esse estudo com a definição, os elementos e as propriedades básicas da esfera.

5.1.1 OVA 1 - DEFINIÇÃO DA ESFERA

A fim de definir uma esfera iniciamos com o OVA 1. Podemos solicitar ao estudante que movimente o ponto B pertencente a superfície da esfera e o ponto D não pertencente a superfície esférica, e analizar o que acontece o que acontece com as distâncias entre A e B e, A e D, isto é, $d(A,B)$ e $d(A,D)$, respectivamente.

Figura 1: OVA 1 - Esfera e Região Esférica



Fonte: O autor.

A conclusão é que movendo o ponto B, a distância $d(B,A)$ será sempre a mesma, já movendo o ponto D, a distância $d(D,A)$ mudará sendo no máximo igual a $d(B,A)$.

A partir do OVA 1, Figura 1, podemos definir esfera (ou superfície esférica) e região esférica.

Definição 5.1 (Esfera ou superfície esférica)**.** *Seja A um ponto no espaço e $r > 0$ um número real. Chama-se esfera de centro A e raio r o conjunto de todos os pontos C do espaço tais que a distância entre A e C é igual a r, isto é, $d(A,C) = r$.*

Definição 5.2 (Região Esférica)**.** *A região esférica de centro A e raio r é o conjunto de todos os pontos D do espaço, tais que $d(A,D) \leq r$.*

Este OVA representa o modelo de representação de pontos na geometria esférica. Pontos na geometria esférica são representados por letras maiúsculas.

O próximo OVA é sobre elementos da esfera.

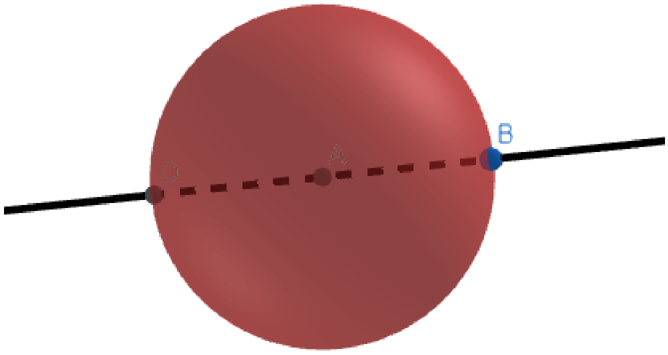
5.1.2 OVA 2 - EIXO, DIÂMETRO E POLOS

Neste OVA solicitamos ao estudante que observe a diferença entre um eixo e um diâmetro da esfera. Ele pode tentar mover os pontos B e D obtidos da interseção da reta r com a esfera de centro A e observar o que acontece.

Neste OVA temos uma reta euclidiana r que passa pelo centro da esfera e um segmento de reta contido nesta reta com extremos na esfera. Além dos pontos B e D contidos na esfera.

A partir disso podemos definir eixo, diâmetro e polos de uma esfera.

Figura 2: OVA 2 - Eixo e Diâmetro de uma Esfera



Fonte: O autor.

Definição 5.3 (Eixo)**.** *É qualquer reta que contém o centro A de uma esfera.*

Na sequência temos a definição de diâmetro. Notamos que o eixo e o diâmetro são muito similares. A diferença está que o eixo é uma reta euclidiana que passa pelo centro da esfera e o diâmetro é um segmento que passa pelo centro da esfera, ligando dois de seus pontos.

Definição 5.4 (Diâmetro)**.** *Chamamos de diâmetro da esfera um segmento que une dois pontos da esfera e que contém o seu centro.*

Definição 5.5 (Polos)**.** *Chamamos de polos os pontos de intersecção do eixo com a esfera.*

Ainda, analisando a Figura 2 podemos observar que os polos são os pontos B e D.

Assim, se movermos a reta r obteremos novos pontos como polos, pois sua interseção com a esfera gerará em outras coordenadas polos, que são pontos que continuarão pertencentes a esfera.

Como exemplo, podemos pensar no polo Norte e polo Sul da Terra. Neles temos um marco delimitando os 24 fusos horários do planeta.

A próxima definição é sobre pontos antípodas. Não elaboramos um OVA específico para ilustrar esta definição, pois é possível usar o OVA 2, Figura 2. Neste OVA dizemos que B é antípoda de D.

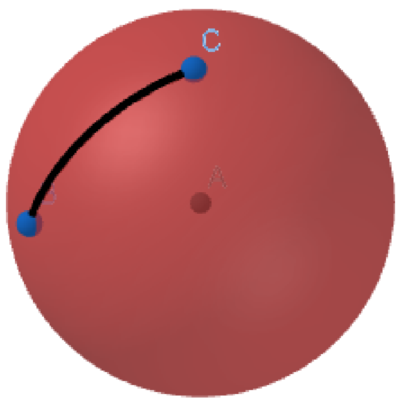
Definição 5.6 (Pontos Antípodas)**.** *Dados B e C pontos pertencentes a uma esfera. O ponto B é dito o antípoda de C se são pontos extremos de um diâmetro.*

5.1.3 OVA 3 - ARCO E OVA - 4 MERIDIANO

Elaboramos dois OVA para exploramos os conceitos de arco e meridiano.

Inicialmente, podemos solicitar ao estudante que mova os pontos B e C, pertencentes a superfície esférica ligados pelo arco, Figura 3, e que observe o que acontece.

Figura 3: OVA 3 - Arco



Fonte: O autor.

Ele deverá concluir que esses pontos estão na esfera.

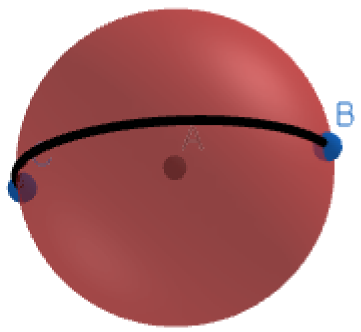
$\widehat{BC}$ é denominado arco de circunferência.

Podemos concluir também que se movermos um dos dois pontos extremos deste arco é possível diminuí-lo até esses pontos coincidirem ou aumentá-lo, formando uma circunferência na esfera, até os pontos serem novamente coincidentes.

Definição 5.7 (Arco)**.** *Denomina-se por arco $\widehat{BC}$ o segmento que liga dois pontos distintos B e C da esfera.*

Também definimos meridiano, a partir da exploração do OVA 4, Figura 4.

Figura 4: OVA 4 - Meridiano



Fonte: O autor.

Definição 5.8 (Meridiano)**.** *Um meridiano é uma semicircunferência máxima cujo plano de intersecção com a esfera contém o eixo que liga os polos.*

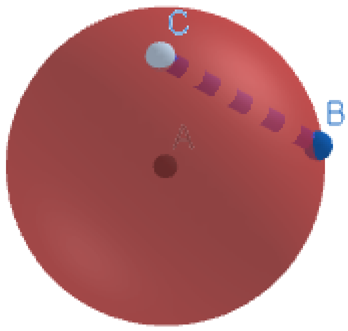
Como exemplo, no globo terrestre, temos o Meridiano de Greenwich. Podemos também entender um meridiano como um arco maior.

5.1.4 OVA 5 - CORDA

No OVA 5, Figura 5, exploramos segmentos que ligam pontos da esfera, mas que não necessariamente formam um diâmetro.

Neste OVA o estudante poderá mover os pontos B e C, que pertencem a esfera, e notar que o segmento BC aumentará de tamanho se os pontos são afastados e consequentemente diminuirá de tamanho se aproximarmos eles.

Figura 5: OVA 5 - Corda



Fonte: O autor.

O segmento BC é denominado corda de uma esfera. De modo geral temos:

Definição 5.9 (Corda)**.** *O segmento que une dois pontos distintos da esfera é chamado de corda.*

Um diâmetro é um exemplo de uma corda.

Notamos que uma corda é um segmento da geometria euclidiana e que está contido numa região esférica e não na esfera, somente seus extremos estão na esfera.

Antes de definirmos o que é uma geodésica, apresentamos o Teorema 5.1 que nos mostra como obter uma geodésica. O OVA 6, Figura 6, ilustra esse teorema.

Para construir esse OVA consideramos uma esfera e um plano passando pela sua origem.

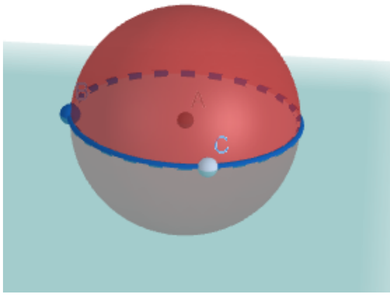
Teorema 5.1. *A intersecção de uma esfera com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio que a esfera.*

Demonstração:
Seja A a esfera de centro A e raio r e seja α o plano que passa por A. Queremos mostrar que $A \cap \alpha = \{B \in \alpha : d(B,A) = r\}$.

Dado um $B' \in (A \cap \alpha)$, então $B' \in A$ e $B' \in \alpha$. Então como $B' \in A$ implica que $d(B', A) = r$ e $B' \in \alpha$, logo $A \cap \alpha = \{B' \in \alpha : d(B', A) = r\}$, onde isto representa uma circunferência.

□

Figura 6: OVA 6 - Interseção de um plano α e uma esfera S



Fonte: O autor.

Podemos solicitar ao estudante que manipule o OVA 6, movimentando os pontos B e C pertencentes ao plano e a esfera, sendo o plano formado pelos pontos A,B, e C, e perceba o que ocorre.

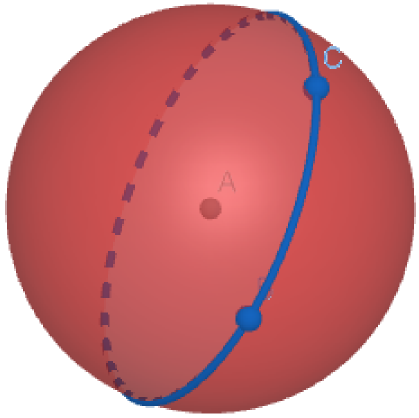
Como conclusão, como o plano passa pelo centro da esfera sua interseção com ela é sempre uma circunferência máxima.

5.1.5 OVA 7 - GEODÉSICA

Neste OVA, Figura 7, ilustramos uma esfera e uma circunferência máxima nela obtida conforme descrito no Teorema 5.1.

Podemos solicitar ao estudante que mova os pontos B ou C (pertencente a circunferência máxima) ao longo da circunferência e ao redor da esfera e observe o que acontece.

Figura 7: OVA 7 - Geodésica ou circunferência máxima



Fonte: O autor.

Essa circunferência é denominada geodésica.

No OVA7, ao movermos os pontos B e C ao redor da esfera observamos que a circunferência continua sendo máxima, ou seja, continuamos com uma geodésica. E se movermos os pontos na geodésica, temos que estes continuam pertencentes a geodésica, mesmo movimentando a geodésica.

De modo geral, uma geodésica é definida por:

Definição 5.10 (Geodésica)**.** *Seja S uma esfera de centro A e raio r. Denominamos geodésica ou circunferência máxima a circunferência em S de centro A e raio r.*

Um arco de uma geodésica é um segmento na geometria esférica.

Um arco de uma geodésica é uma curva que minimiza a distância entre dois pontos na esfera, ou seja, é o menor arco que liga dois pontos distintos.

5.1.6 OVA 8 - PARALELO E EQUADOR

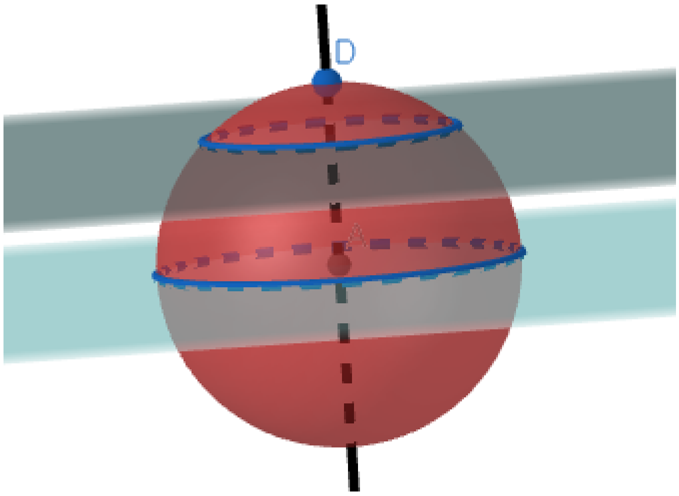
Na sequência apresentamos mais algumas propriedades da esfera: equador e paralelos.

Consideramos uma esfera e um eixo. Traçamos dois planos sendo um deles perpendicular a esse eixo passando pelo centro da esfera e o outro plano paralelo a esse plano, mas não coincidente, conforme o OVA 8, Figura 8.

As intersecções desses planos com a esfera são circunferências.

Podemos solicitar aos estudantes para tentarem mover essas circunferências e verificar o que acontece.

Figura 8: OVA 8 - Equador e paralelo



Fonte: O autor.

Essas circunferências são definidas por:

Definição 5.11 (Equador)**.** *É uma circunferência máxima cujo o plano é perpendicular ao eixo.*

Definição 5.12 (Paralelo)**.** *E uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo. Ela é paralela ao equador.*

Não é possível mover o equador de seu posição, senão ele não atenderia mais a definição de equador. Já o paralelo pode ser movido, no entanto ele não pode ser coincidente com o equador e nem com o ponto D. É fácil perceber que quanto mais movermos o paralelo para próximo do equador maior ele será e quanto mais próximo do polo ele for menor ele será.

É possível notar nesta figura que o paralelo é menor que o equador.

Como exemplos, no globo terrestre de equador temos a Linha do Equador e como paralelos temos o Trópico de Capricórnio, o Trópico de Câncer, o Círculo Polar Ártico e o Círculo Polar Antártico.

Na próxima seção definimos elementos da geometria esférica.

5.2 A GEOMETRIA ESFÉRICA

A geometria esférica é uma geometria não euclidiana em que são válidos os quatro primeiros postulados de Euclides, da geometria euclidiana, e todos os resultados que dependem destes e mais o quinto postulado que é dado por: por um ponto fora de uma reta, não se pode traçar nenhuma reta paralela a reta dada.

Da mesma forma, segundo HILBERT (2005), temos que os 21 axiomas elaborados por ele para a geometria euclidiana são válidos para a geometria esférica, fazendo-se necessário apenas alguns ajustes nestes.

Como modelo de representação desta geometria usamos a esfera. Nesta geometria os pontos são pontos dados na esfera, os segmentos são arcos contidos na esfera e as retas são dadas por:

Definição 5.13 (Reta)**.** *Uma reta na geometria esférica é qualquer geodésica ou circunferência máxima.*

Temos que um exemplo de reta na geometria esférica que é a linha do equador.

Destacamos algumas propriedades presentes nessa geometria:
1. Dois pontos não determinam necessariamente uma única reta;
2. As retas na esfera possuem comprimento finito;
3. Não existem retas paralelas na geometria esférica.

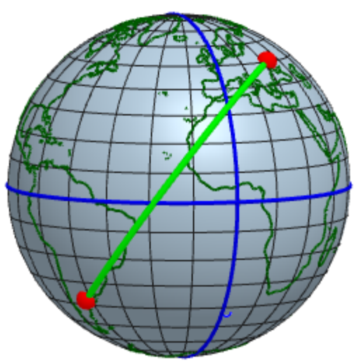
Elas serão exploradas em OVA nas próximas subseções.

Antes de darmos sequência ao estudo da geometria esférica vamos ilustrar dois exemplos de OVA construídos por Carmen Mathias, professora da UFSM, disponível em https://www.geogebra.org/m/qvzrwuma, em que é possível ver como uma geodésica ficaria no plano cartesiano usando o globo terrestre (Terra) e um mapa.

5.2.1 OVA 9 - ARCO NO GLOBO TERRESTRE E OVA 10 - ARCO EM UM MAPA

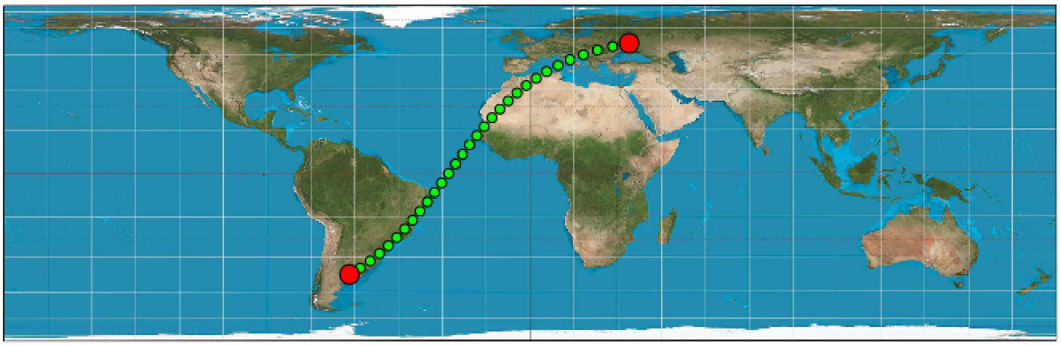
Nestes dois OVA, solicitamos ao estudante que mova, por exemplo, um dos dois pontos do arco do OVA 9, para qualquer parte do globo terrestre, e observe o resultado no OVA 10, que é uma planificação desse arco.

Figura 9: OVA 9 - Arco no Globo Terrestre



Fonte: https://www.geogebra.org/m/qvzrwuma. Acesso em: 18 set. 2021.

Figura 10: OVA 10 - Arco em um mapa



Fonte: https://www.geogebra.org/m/qvzrwuma. Acesso em: 18 set. 2021.

Esses OVA ilustram muito bem as diferenças do que são segmentos nas geometrias esférica e euclidiana.

Nestes OVA o estudante poderá notar que se aproximar os pontos, o arco planificado no OVA 10 ficará semelhante à um segmento da geometria euclidiana.

Na sequência apresentamos mais definições e resultados da geometria esférica como: distância entre pontos, ângulos, triângulo esférico, quadrado, polígono e cálculo de área.

5.2.2 VERSÃO DO QUINTO POSTULADO NA GEOMETRIA ESFÉRICA

No OVA 11 exploramos a versão do quinto postulado na geometria esférica.

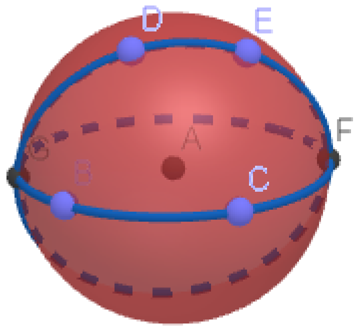
Postulado 5.1 (Quinto postulado na geometria esférica)**.** *Dada uma reta e um ponto fora dela não existe nenhuma reta passando por esse ponto e paralela a reta dada.*

Na verdade, nesta geometria, não existem retas paralelas.

Dada uma geodésica em uma esfera e um ponto fora dela podemos perguntar ao estudante para ele explorar se é possível construir uma geodésica passando por esse ponto e que não intercepta a geodésica dada.

Vejamos que o OVA 11 apresenta a solução para essa questão. Dada uma geodésica nomeada por m passando por B e C e um ponto D fora dela. Considere uma das geodésicas que passa por D (aquela que passa por D e E). Podemos solicitar ao estudante que tente mover o ponto D para tentar deixar estas geodésicas paralelas.

Figura 11: OVA 11 - Ponto fora de uma reta



Fonte: O autor.

O estudante concluirá que no OVA 11 ao movimentar o ponto D ele não conseguirá deixar estas geodésicas paralelas, elas sempre terão pontos de intersecção.

Isso é justificado pelo próximo teorema.

Teorema 5.2. *Consideramos a circunferência máxima m que passa por B e C. Dado um ponto D na esfera, não pertencente a essa circunferência, então toda circunferência máxima que passa por D intersecta c.*

Demonstração:
Dada uma esfera com centro em A, temos que toda a reta pode ser obtida com a intersecção de um plano α passando por A.

Então vamos supor que exista um plano β paralelo e não coincidente a α, tal que a intersecção de β com a superfície esférica com centro em A gere uma reta que passa por C e é paralela a m.

Mas isto gera uma contradição, pois se α passa por A, logo β não pode passar por A para ser paralelo à α. Logo a intersecção de β com superfície esférica com centro em A não gera uma reta que passa por C.

□

Podemos observar que este teorema nos mostra que não existem retas paralelas na geometria esférica e assim, não vale o postulado das paralelas da geometria euclidiana na geometria esférica.

O OVA 11 também pode ser utilizado para mostrar a seguinte propriedade: Dois pontos não determinam necessariamente uma única reta.

É possível observar que os pontos antipodas F e G, possuem duas retas passando por eles. Além disso, é possível notar que pode-se passar infinitas retas nos pontos F e G.

Corolário 5.2.1. *Na esfera, duas circunferências máximas sempre se intersectam em dois pontos antípodas.*

Demonstração:
Dada uma esfera com centro em A e duas retas geradas pela interseção dos planos α e β com a esfera. Temos que ambos os planos passam por A e $\alpha \nparallel \beta$.

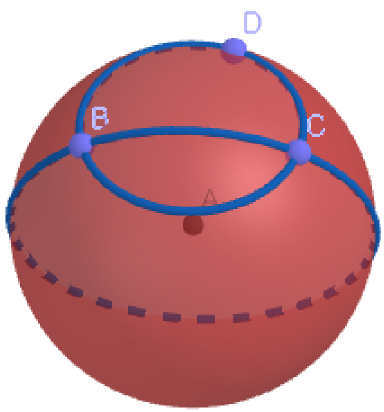
Se analisarmos $\alpha \cap \beta$, temos que isto gera uma reta euclidiana passando por A, logos esta reta euclidiana intersecta a esfera gerando dois pontos antípodas.

□

5.2.3 OVA 12 - DISTÂNCIA ENTRE PONTOS

O OVA 12 tem por objetivo explorar o cálculo da distância entre pontos na geometria esférica. Neste OVA, podemos solicitar ao estudante que mova qualquer um dos pontos B, C ou D e analise qual será a menor distância do ponto B ao C, sendo que m representa a reta que passa por B e C, os pontos B, C e D pertencem a uma circunferência qualquer e $\widehat{BC}$ é o arco menor.

Figura 12: OVA 12 -Distância entre pontos



Fonte: O autor.

O estudante pode concluir que quanto maior for a distância, mais fácil será perceber que o menor caminho para os pontos B e C será por $\widehat{BC}$ pertencente a m.

A seguir temos a definição que diz que o menor caminho entre dois pontos é pelo arco menor da geodésica.

Definição 5.14. *A distancia d(B, C) entre dois pontos B e C, pertencentes a uma esfera A, é o comprimento do arco menor* $\widehat{BC}$ *da circunferência máxima que passa por B e C.*

Apesar de os paralelos terem uma circunferência menor que a geodésica, dois pontos pertencentes ao arco desta circunferência não são o menor caminho entre estes dois pontos da superfície esférica, mas sim o arco da geodésica, como mostra o teorema na sequência.

Teorema 5.3. *O menor caminho entre dois pontos em uma esfera A é um arco de uma circunferência máxima.*

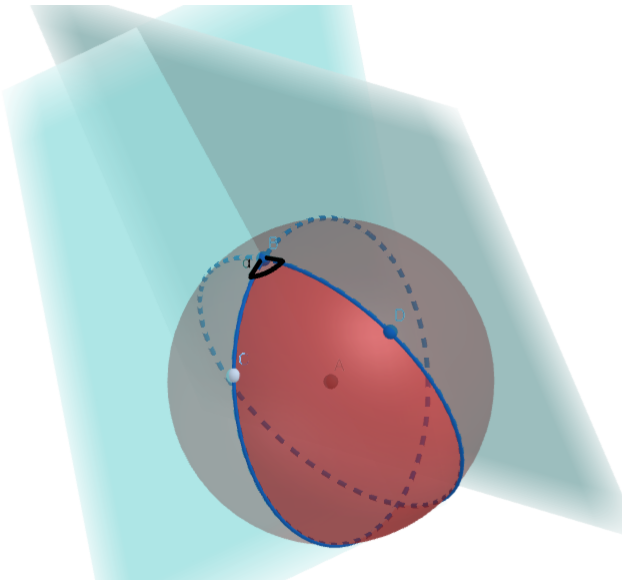
Não apresentamos a demonstração deste teorema pois ela usa conceitos de trigonometria esférica, sendo que esse conteúdo não é abordado neste trabalho. Essa demonstração pode ser encontrada em (ALVES, 2009, p. 71) ou (SILVA, 2018, p. 70).

5.2.4 OVA 13 - ÂNGULO ESFÉRICO

No OVA 13, Figura 13, consideramos a intersecção de dois planos que passam pelo centro da esfera. Neste OVA ilustramos o ângulo de duas geodésicas, sendo obtido pelo ângulo formado pela intersecção de dois planos.

No OVA 13 o estudante poderá mover os pontos B, C ou D pertencentes as geodésicas e aos planos, e notar que o ângulo irá mudar, diminuindo se as geodésicas se aproximarem e aumentando se afastarem.

Figura 13: OVA 13 - Ângulo esférico



Fonte: O autor.

Como na geometria euclidiana, o ângulo na geometria esférica pode ser entendido como o ângulo entre dois planos concorrentes. Assim se movermos os planos e consequentemente as geodésica, obteremos um novo ângulo.

Definição 5.15 (Ângulo Esférico)**.** *O ângulo esférico entre duas circunferências máximas (ou de dois arcos de circunferências máximas), é o ângulo formado pelos planos que contêm as circunferências máximas.*

Podemos também entender como ângulo esférico sendo o ângulo formado pelas retas tangentes na interseção das geodésicas, sendo que estas retas tangentes pertencem aos planos que geram as geodésicas.

Esta definição será usada adiante, por enquanto não vamos calcular medida de ângulos. Isso será feito em outros OVA.

Na sequência exploramos a construção e a definição de alguns polígonos na esfera. Diferente da geometria euclidiana, em que precisamos de pelo menos três segmentos para definirmos o menor polígono euclidiano (triângulo), na geometria esférica precisamos apenas de dois segmentos (arcos) para definirmos o menor polígono esférico (fuso).

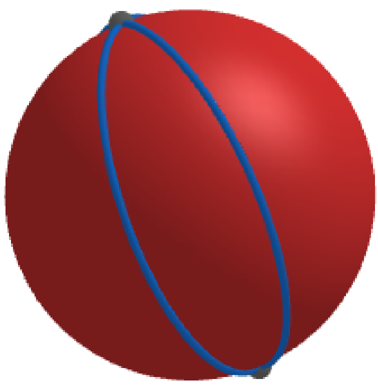
Iniciamos com o fuso esférico, na sequência apresentamos triângulo esférico, polígono qualquer e quadrado esférico.

5.2.5 OVA 14 - FUSO ESFÉRICO

Na Figura 14 apresentamos o OVA 14 que representa um fuso esférico. Podemos solicitar ao estudante que mova as geodésicas que possuem como pontos de interseção dois pontos antípodas, afastando-as ou aproximando-as. Enquanto as geodésicas são movimentadas o estudante pode analisar quando a área do fuso será maior ou menor.

Neste OVA não destacamos os pontos que geram as geodésicas, pois o intuito é que o estudante apenas as movimente.

Figura 14: OVA 14 - Fuso esférico



Fonte: O autor.

Concluímos que, neste OVA 14 que quanto mais afastarmos o fuso maior será a área e quanto mais aproximarmos menor ela será.

Definição 5.16 (Fuso Esférico)**.** *Um fuso é a região da esfera compreendida entre duas circunferências máximas. Essas circunferências têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados os vértices do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo α entre os duas circunferências máximas que constituem os lados do fuso.*

Lembrando a definição de ângulo, temos que quanto maior o ângulo, mais afastados estarão os arcos da geodésica e consequentemente maior será a área do fuso esférico, e caso ocorra o contrário, temos que quanto menor o ângulo, menor será sua área. Se o ângulo for zero não temos área.

Na sequência apresentamos um teorema para nos auxiliar no cálculo de área de um fuso esférico.

Teorema 5.4. *A área de um fuso é proporcional ao seu ângulo, logo se o ângulo de um fuso mede α radianos em uma esfera de raio r, então sua área será $2\alpha r^2$.*

Demonstração:
Antes de demonstrarmos este teorema lembramos que a fórmula para o cálculo da área de uma esfera de raio r é dada por $4\pi r^2$. Podemos observar que esta fórmula "pode"dividir a esfera em quatro partes, onde cada parte possui um ângulo π e está sob um hemisfério.

Se juntarmos duas partes da esfera obtemos o fuso $2\pi r^2$. Podemos notar então, que o fuso esférico é uma parte da área da superfície esférica. E assim segue o resultado quando substituimos π por α.

□

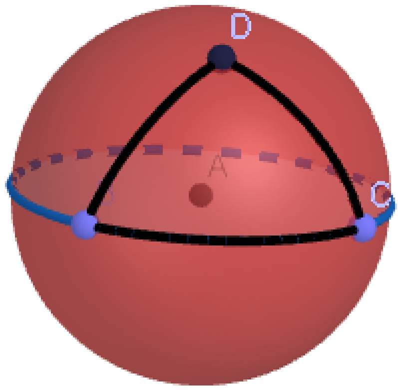
É fácil perceber que se obtemos um fuso esférico, assim como temos os pontos antípodas, teremos um "fuso antípoda"com os mesmos vértices e mesma área.

5.2.6 OVA 15 - TRIÂNGULO ESFÉRICO

No OVA 15, Figura 15, exploramos o triângulo esférico tendo como base o arco de uma geodésica. Podemos solicitar ao estudante que mova os pontos B e C da base do triângulo e o ponto D pertencente a esfera e o observar o que acontece.

No OVA 15 também podemos solicitar ao estudante que explore as propriedades de triângulo, questionando se existem triângulos escalenos, isósceles e equiláteros.

Figura 15: OVA 15 - Triângulo esférico



Fonte: O autor.

O estudante poderá concluir que ao movimentar os pontos da base, ele continuará obtendo um triângulo esférico. No entando, ao movimentar o ponto D, o estudante poderá notar que quanto mais o ponto D se aproxima da da base menor serão os ângulos e se o ponto D pertencer a base, logo não terá mais um triângulo esférico mas sim um arco.

Da mesma forma, se o estudante afastar o ponto D da base, de modo que ele se aproxime da geodésica que contém a base, maior será o triângulo. Caso o ponto D pertença a geodésica, então não existirá mais o triângulo, pois seus lados estarão todos contidos na geodésica.

Notará também que ao movimentar os vértices, que nesta geometria existem triângulos escalenos, isósceles e equiláteros

Definição 5.17. *Sejam B, C e D três pontos distintos sobre um mesmo hemisfério da esfera A, e não pertencentes a mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se triangulo esférico.*

Temos que o triângulo fica sobre um mesmo hemisfério, pois a geodésica divide a esfera um duas partes iguais.

No próximo teorema apresentamos a fórmula para o cálculo de área de um triângulo esférico.

Teorema 5.5 (Teorema de Girard)**.** *Se α, β e γ são ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então*

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{X}{r^2},$$

onde X é a área do triângulo, r é o raio da esfera que o contém e α, β e γ são menores que 180^o.

Demonstração:
Dada uma esfera com centro em A, que contenha o triângulo esférico BCD.

Se usarmos o ponto B e seu ponto antípoda B', obtemos um fuso esférico e seu fuso antípoda, onde a área deles pode ser calculada por $2\left(2\alpha r^2\right)$. Temos também que cada ponto possui um ponto antípoda, logo, teremos um triângulo antípoda $B'C'D'$.

No cálculo destes dois fusos esféricos, foi calculado a área dos dois triângulo dentro de cada fuso esférico.

Calculando analogamente para os outros dois pontos obtemos $2\left(2\beta r^2\right)$ e $2\left(2\gamma r^2\right)$. Se somarmos estas três equações não obteremos a área da esfera, pois, foi calculado a área de BCD e $B'C'D'$ duas vezes a mais, para isto basta subtrair quatro vezes X, onde X é a área do triângulo BCD tal que BCD é congruente à $B'C'D'$.

$$2\left(2\alpha r^2\right)+2\left(2\beta r^2\right)+2\left(2\gamma r^2\right)-4X$$

Com esta equação podemos obter a área da esfera, então igualando a fórmula da área da esfera e efetuando os cálculos:

$$4\alpha r^2+4\beta r^2+4\gamma r^2-4X=4\pi r^2 \Longrightarrow$$

$$4\left(\alpha r^2+\beta r^2+\gamma r^2\right)=4\pi r^2+4X \Longrightarrow$$

$$\alpha r^2+\beta r^2+\gamma r^2=\pi r^2+X \Longrightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{X}{r^2}.$$

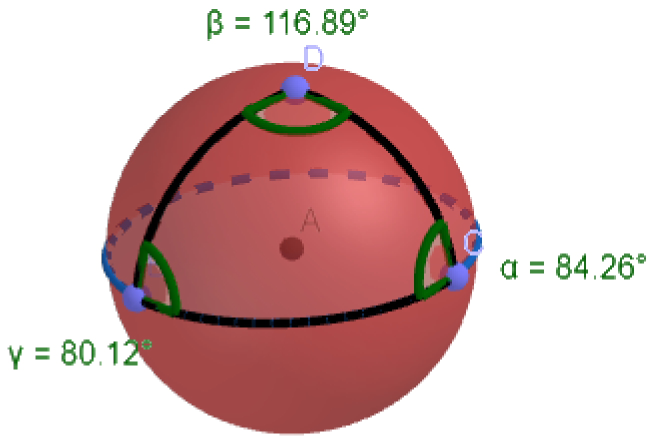
$\square$

Do Teorema de Girard podemos reescrever a fórmula para o cálculo da área de triângulos esféricos da seguinte forma: $X=r^2\left(\alpha+\beta+\gamma-\pi\right)$.

Na sequência temos o OVA 16 que apresenta um triângulo esférico e a medida aproximada de seus ângulos internos. A medida dos ângulos não é exata porquê na construção do OVA 16, a invés de usarmos retas tangentes para definirmos os ângulos (propriedade comentada após a definição de ângulo esférico), foram usadas retas secantes para facilitar a visualização e construção do OVA, tendo assim um valor aproximado.

Para a sua construção usamos uma esfera com centro $A = (0,0,0)$, raio[1] $r = 1$, e coordenadas dos pontos B, C e D dadas por: $B = (-0,51,\ -0,86,\ -0,06)$, $C = (1,\ -0,05,\ 0,04)$ e $D = (0,09,\ -0,14,\ 0,99)$.

Figura 16: OVA 16 - Triângulo esférico e seus ângulos internos



Fonte: O autor.

Para construirmos o OVA 16, usamos uma aproximação, usando definição de ângulo, definimos ele como sendo o ângulo dos planos que geram a geodésica, logo será o ângulo formado pelas retas pertencentes ao plano e tangentes a esfera. Então, neste OVA 16 foi considerado como ângulo esférico o ângulo formado por duas retas secantes, ao invés de uma reta tangente. Isto se deve pela dificuldade da construção de tal OVA, porém tais retas secantes possuem uma boa aproximação para o valor do ângulo, ao invés de uma reta tangente.

Para calcularmos a área do triângulo da Figura 16, basta usarmos a fórmula do Teorema de Girard, e substituir tais valores.

$$X = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \Longrightarrow$$

$$X = 1^2(84,26 + 116,89 + 80,12 - 180) \Longrightarrow$$

$$X = 1(281,27 - 180) \Longrightarrow$$

$$X = 101,27 u.a.$$

[1]Todos os OVA possuem o mesmo centro e raio.

Antes de apresentarmos os Corolários 5.5.1 e corolário 5.5.2, que tratam da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico podemos solicitar ao estudante para explorar esse OVA e verificar o que acontece com a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. O estudante poderá verificar tais propriedades movimentando qualquer um dos pontos B, C ou D deste OVA.

Para os ângulos dados a soma dos ângulos internos é $281,27^0$, sendo maior do que 180^0.

Além disso, o estudante poderá mover o vértice do triângulo que não pertence a base e o aproximá-lo da base e neste caso sua medida ficará muito próxima de 180^0. Se o afastarmos da base, podemos notar que ele se aproximará de 540^0 e sua área será quase igual a meia esfera.

No entanto ele não pode tocar a geodésica que passa por B e C, pois assim formaria um ângulo de 540^0 e seria então um fuso esférico ao invés de um triângulo.

O OVA 16 também pode ser usado para investigar mais propriedades de triângulos. Por exemplo, será que nesta geometria existem triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos?

O estudante poderá notar que tais triângulos podem ser encontrados, no entanto, estas definições não são válidas para todos os tipos de triângulos esféricos, já que nem todos se encaixam nestas definições. Desta forma, na geometria esférica são denominados apenas os triângulos polares, aqueles que possuem os três ângulos iguais a 90^0.

O Teorema de Girard também nos permite concluir sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Corolário 5.5.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π ou* 180^0.

Demonstração:
Para demonstrar isto basta usar a igualdade $X = r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$, em que $\alpha,\ \beta$ e γ em $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ apresentam a medida de ângulos internos de um triângulo.

Observamos que para termos uma área temos que ter $X > 0$. Para que isso ocorra devemos ter $\alpha+\beta+\gamma-\pi > 0$ e assim $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ ou $\alpha+\beta+\gamma > 180^0$.

□

Corolário 5.5.2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é menor que* 540^0.

Demonstração:
Queremos mostrar que $\alpha+\beta+\gamma < 540^0$. Para isto basta usar a definição de triângulo esférico.

Temos que um triângulo esférico é a união de três arcos tal que os três não pertençam para a mesma geodésica e pela definição temos que os ângulos são menores que 180^0. Isto ocorre porque se algum dos ângulos $\alpha,\ \beta$ ou γ for igual a 180^0 então teremos um fuso esférico.

Logo, dados dois pontos pertencentes a uma mesma geodésica e se considerarmos um terceiro ponto do triângulo, de modo que ele esteja muito perto da geodésica, teremos que $\alpha+\beta+\gamma<540^0$.

□

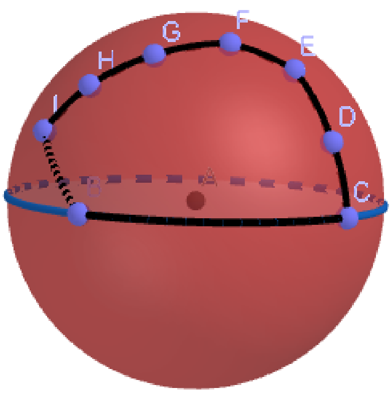
Vejamos que esse é um resultado que muda quando comparado com a geometria euclidiana em que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^0. Essa mudança ocorre porque esse resultado depende do quinto postulado para provar a sua validade.

No próximo OVA exploramos a generalização de polígonos esféricos e na sequência destacamos alguns polígonos mais familiares.

5.2.7 OVA 17 - POLÍGONO ESFÉRICO

No OVA 17, o estudante pode movimentar qualquer um de seus pontos pertencentes a esfera A e observar o que acontece.

Figura 17: OVA 17 - Polígono esférico



Fonte: O autor.

Se o estudante mover qualquer um de seu pontos, tal figura continuará sendo um polígono esférico com n lados,desde de que estes pontos não pertençam à geodésica da base, pois, senão ele se tornaria um polígono de $n-1$ lados (mesmo caso do triângulo esférico, Figura 15).

Definição 5.18. *Um polígono esférico é uma região limitada por um número finito de arcos de círculos máximos de tal maneira que os arcos formam uma curva fechada em A que divide A em exatamente duas regiões. Um polígono esférico P é convexo se quaisquer dois pontos de P podem ser ligados por um arco (de uma geodésica) que está inteiramente contido em P.*

O teorema na sequência apresenta a fórmula para calcular a área de um polígono qualquer.

Teorema 5.6. *Seja P um polígono de n lados em uma esfera (com cada um dos seus n lados sendo um arco de um círculo máximo), e sejam θ_1, θ_2 ... θ_n os ângulos interiores do polígono. Então a área do polígono é dada por $X = r^2[\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n - (n-2)\pi]$.*

Demonstração:
Esta demonstração é para um polígono convexo, onde o conceito de convexo é o mesmo da geometria plana.

Dado um polígono qualquer, temos que todo o polígono pode ser dividido em triângulos, assim se calcularmos a área destes triângulos X_{Ti}, obteremos a área do polígono.

$$X = X_{T1} + X_{T2} + X_{T3} + ... + X_{Tn} \quad \Longrightarrow$$

$$X = [r^2\,(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi)] + [r^2\,(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi)] + [r^2\,(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - \pi)] + ... +$$

$$+ [r^2\,(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - \pi)] \quad \Longrightarrow$$

$$X = r^2[(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi)] + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi)] + (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - \pi)] + ... + (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - \pi)].$$

sendo que os ângulos α_n e β_n são os ângulos da base e γ_n possuem a mesma origem.

Somando α_1 com β_2 obteremos θ_1 e assim suscessivamente:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= \theta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 &= \theta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_n + \beta_1 &= \theta_n. \end{aligned}$$

Se analisarmos agora os γ_n, temos que a soma deles será de 360º, logo será igual a 2π. Escrevendo a igualdade novamente com estes novos resultados e colocados os π_n em evidência obtemos:

$$X = r^2(\sum_{i=}^{n}(\alpha_i + \beta_i) + \sum_{i=}^{n}(\gamma i) - n\pi) \quad \Longrightarrow$$

$$X = r^2(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n + 2\pi - n\pi) \quad \Longrightarrow$$
$$X = r^2(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n - (n-2)\pi).$$

□

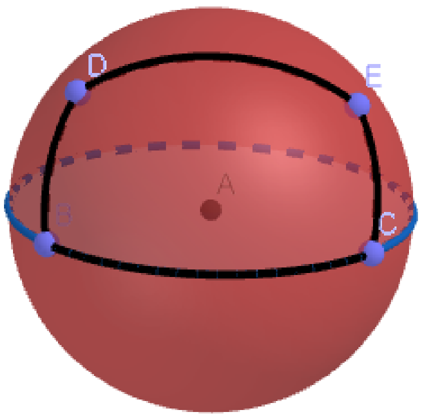
Com esta fórmula podemos calcular a área de qualquer polígono esférico.

A seguir temos o caso específico do quadrilátero convexo.

5.2.8 OVA 18 - QUADRILÁTERO ESFÉRICO

Neste OVA 18, assim como no caso do triângulo e de um polígono qualquer, podemos solicitar ao estudante que movimente os pontos do quadrilátero esférico e analise o que acontece.

Figura 18: OVA 18 - Quadrilátero esférico



Fonte: O autor.

Ele observará que movendo qualquer um de seu pontos da base, continuará tendo um quadrilátero esférico.

No entanto, caso o estudante mova o ponto D ou E, assim como no triângulo, se eles se aproximarem da base a área do quadrilátero esférico irá diminuir, e se eles se afastarem da base a área irá aumentar.

Porém os pontos D e E não devem tocar a geodésica que contém a base do quadrilátero. Caso um ponto (D ou E) esteja na geodésica que passa por B e C, a Figura 18 se tornará um triângulo.

Definição 5.19. *Sejam B, C, D e E quatro pontos distintos sobre um mesmo hemisfério da esfera A, e não pertencentes a mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se quadrilátero esférico.*

O próximo teorema apresenta a fórmula para o cálculo da área de um quadrilátero esférico.

Teorema 5.7. *A fórmula para o cálculo da área de um quadrilátero esférico convexo BCDE é dada por* $X = r^2[\alpha+\beta+\gamma+\theta-2\pi]$*, onde* α *é o ângulo formado por* $\widehat{BC}$ *e* $\widehat{BE}$*,* β *é formado por* $\widehat{CB}$ *e* $\widehat{CD}$*,* γ *é formado por* $\widehat{DC}$ *e* $\widehat{DE}$ *e* θ *é formado por* $\widehat{ED}$ *e* $\widehat{EB}$*, estes ângulos sendo menores que* 180^o.

Demonstração:
Para calcular a área de BCDE traçamos uma diagonal $\widehat{BD}$, formando assim dois triângulos esféricos.

Esta diagonal divide os ângulos α em α_1 e α_2 e o ângulo γ em γ_1 e γ_2. Pelo Teorema de Girard, podemos calcular a área destes triângulos obtendo:

$$X_1 = r^2[\alpha_1+\beta+\gamma_1-\pi]$$

e

$$X_2 = r^2[\gamma_2+\theta+\alpha_2-\pi].$$

Somando X_1 e X_2 obtemos a área do quadrilátero dada por:

$$X = X_1+X_2 \ = \ r^2\alpha_1+r^2\beta+r^2\gamma_1-\pi+r^2\gamma_2+r^2\theta+r^2\alpha_2-\pi \qquad \Longrightarrow$$

$$X = r^2(\alpha_1+\alpha_2)+r^2\beta+r^2(\gamma_1+\gamma_2)+r^2\theta-2\pi.$$

Podemos escrever $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ e $\gamma = \gamma_1+\gamma_2$. Substituindo estas igualdades na equação anterior obtemos a fórmula para o cálculo da área de um quadrilátero qualquer:

$$X = r^2\alpha+r^2\beta+r^2\gamma+r^2\theta-2\pi.$$

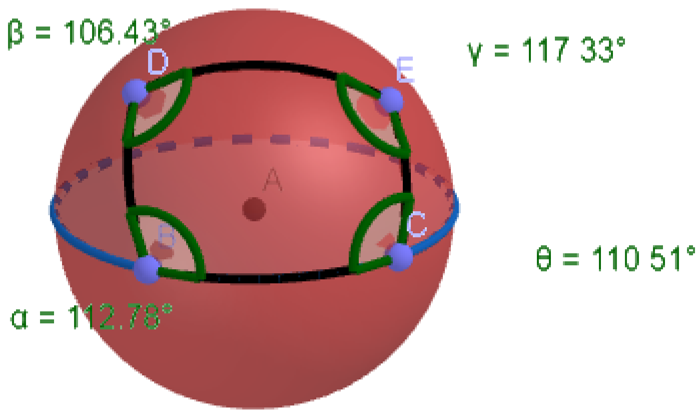
Podemos reescrever esta fórmula obtendo:

$$X = r^2[\alpha+\beta+\gamma+\theta-2\pi].$$

□

Assim como no OVA 16, apresentamos um exemplo de quadrilátero esférico no OVA 19. Assim como no OVA 16 os ângulos do OVA 19 foram aproximados por retas secantes.

Figura 19: OVA 19 - Exemplo de quadrilátero esférico



Fonte: O autor.

Neste OVA 19 a esfera possui como centro A=(0, 0, 0), raio $r = 1$, e a coordenadas de seus vértices são: B=(-0,04, -1, -0,01), C=(0,97, -0,24, 0), D=(-0,34, -0,59, 0,73) e E=(0,73, 0,08, 0,68).

Usando o resultado do Teorema 5.7 para o cálculo da área de quadriláteros esféricos obtemos:

$$X = r^2(\alpha + \beta + \gamma + \theta - \pi) \quad \Longrightarrow$$

$$X = 1^2(112,78 + 106,43 + 117,33 + 110,51 - 180) \quad \Longrightarrow$$

$$X = 1(447,05 - 180) \quad \Longrightarrow$$

$$X = 267,05 \; u.a.$$

Podemos utilizar o OVA 19 para investigar sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico. Nesta caso, a soma dos ângulos internos é $447,05^0$, sendo maior que 360^0. Podemos mover os vértices deste quadrilátero obtendo novos ângulos a fim de mostrar que essa soma é sempre menor do que 720^0.

Esses dois resultados são comprovados pelo Corolário 5.7.1 e Corolário 5.7.2.

Corolário 5.7.1. *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico é maior que* 360^0.

Demonstração:
Assim como fizemos no Corolário 5.5.1, a área deve assumir um valor positivo e maior que zero, implicando que $\alpha+\beta+\gamma+\theta > 2\pi$ ou $\alpha+\beta+\gamma+\theta > 360^0$.

□

Corolário 5.7.2. *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico é menor que* 720^0.

Demonstração:
Do Teorema 5.7 temos que os ângulos de um quadrilátero são menores que 180^0, se somarmos os ângulos com valor igual a 180^0, obteremos 720^0, logo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é menor que 720^0.

□

Temos que cada ângulo interno do quadrilátero é menor do que 180^0, pois, se fossem iguais a 180^0, os pontos pertenceriam a geodésica da base.

O estudante poderá verificar tais propriedades para outros valores movimentando qualquer um dos pontos B, C,D e E.

Com isso finalizamos a apresentação da sequência de OVA, abordando conteúdos de geometria esférica.

5.3 ANÁLISE DE POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES DOS OVA

Para a realização desse trabalho propomos como questão de pesquisa: Quais possibilidades e potencialidades podem ser exploradas em OVA de geometria esférica?

Algumas possibilidades e potencialidades de explorar os OVA de geometria esférica construídos já foram descritas individualmente quando da sua apresentação, pois algumas delas são específicas do objeto e da definição ou propriedade abordados.

De modo geral podemos destacar outras dessas possibilidades e potencialidades tais como, a visualização, a possibilidade de interação com o objeto, o movimento, a possibilidade de obter algumas conclusões, por exemplo, quando trabalhamos com a soma dos ângulos internos de polígonos, em particular, dos triângulos o estudante poderá interagir com o OVA, movimentando seus pontos e acabará por obter novos arcos e ângulos. Desta forma ele poderá deduzir as propriedades dos Corolários 5.5.1 e 5.5.2, deduzindo assim que um triângulo esférico terá um ângulo maior que 180^0 e menor que 540^0.

Sobre os apresentados gostaríamos de salientar que para estudar as geometrias não euclidianas é necessário que o estudante possua conhecimentos sobre a geometria plana e espacial, a chamada geometria euclidiana.

A abordagem que foi proposta aqui para auxiliar em uma sequencia de atividades, pode ou não fazer uso do Capítulo 3, já que este aborda apenas a história do surgimento das geometrias não euclidianas. Tal capítulo não implica nas propriedades desta geometria.

Uma das possibilidades para o ensino da geometria esférica usando os OVA desenvolvidos é seguir as definições no Capítulo 5, onde são abordado os elementos da geometria esférica, definições e propriedades.

Outra possibilidade para o ensino da geometria esférica pode ser o de apresentar as definições e permitir que o estudante tente construir os OVA, deste modo ele poderá interagir com as propriedades e facilitar sua compreensão.

Por fim, concluímos que as atividades elaboradas pode desenvolver no estudante uma melhor percepção do mundo que o cerca e de fenômenos físicos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término deste trabalho, podemos perceber que as geometrias não euclidianas são um campo muito vasto, abrindo a possibilidade de fazer futuros trabalhos nesta área. Pode-se observar neste trabalho o quão vasto são as geometrias não euclidianas, pois, abordamos apenas a geometria esférica, destacando a história das geometrias não euclidianas e algumas de suas propriedades e teoremas para elaborar os OVA. No entanto, não foi possível abordar conceitos como a trigonometria esférica ou se aprofundar nas aplicações da geometria esférica.

Apesar de ser um conteúdo extenso, neste trabalho conseguimos abranger nossos objetivos realizando um sequência de OVA para a geometria esférica e analisar as possibilidades e potencialidades de cada OVA e na obra como um todo. Podemos concluir que os OVA podem ajudar na aprendizagem da geometria esférica, pois, permitem uma interação com as propriedades e definições, facilitando a compreensão.

O entendimento da geometria esférica pode facilitar a compreensão que possuímos da Terra e suas propriedades geográficas, pois, como visto muitas propriedades da geometria esférica possuem a mesma nomenclatura de conceitos geográficos.

Com a construção histórica das geometrias não euclidianas realizada no terceiro capítulo, o estudante pode também assimilar os diferentes cenários em que surgiram a geometria euclidiana e a geometria não euclidiana.

Desenvolver este trabalho foi gratificante, apesar de não possuir esta disciplina no curso de matemática, tive minha curiosidade incitada sobre geometrias não euclidianas, fazendo-me pesquisar sobre tal tema e a refletir sobre suas propriedades, e isso acabou auxiliando-me para a realização da análise das possibilidades e potencialidades dos OVA.

Este trabalho também me aprimorou no uso GeoGebra, um *software* que pouco usava até então mas que é muito útil para o ensino, como é possível observar neste trabalho quando é feito a análise das possibilidades e potencialidades nos OVA criados.

REFERÊNCIAS

ALVES, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. In: Revista de Iniciação Científica OBMEP, Rio de Janeiro: IMPA 2009.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

CATTAI, A. P. O GeoGebra nas aulas de Matemática. In: **I Encontro de Matemática** do CEFET-BA, Salvador: CEFET-BA, 2007. Disponível em: https://1library.org/article/geogebra-uso-da-tecnologia-nas-aulas-matem%C3%A1tica.yj73gd5y. Acesso em 14 set. 2021.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FEITOSA, M. C.*et al*. O uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino inversas e logarítmicas. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 2, p. 2003, 18 ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3952/2737. Acesso em: 14 set. 2021.

FERRI, J.; SCHIMIGUEL, J.; L. M. C. CALEJON. O uso do GeoGebra no ensino de mateática. **Revista Gestão Universitária**.18 dez. 2013. Disponível em: http://www.gestaouniversitaria.com.br/artigos/uso-do-geogebra-no-ensino-de-matematica. Acesso em: 26 set. 2021.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/213838/000728731.pdf?sequence=1. Acesso em:19 set. 2021.

GODOY, A.S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rae/a/wf9CgwXVjpLFVgpwNkCgnnC/?lang=ptformat=pdf. Acesso em: 19 set. 2021.

GUARDA, S. M. **Objetos Virtuais de Aprendizagem e sua aplicação no ensino de conceitos da geometria analítica**. 2018. 82 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2018. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/2663. Acesso em: 29 abr. 2021.

GUARDA, S. M., PETRY, V. J, Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem Visando a Compreensão e a Representação de Elementos da Geometria Analítica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, 33 (1):707-7017, 2020.

HILBERT, D. **The Foundations of Geometry**. Project Gutenberg, 2005. *E-book*. Disponível em: https://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf. Acesso em: 28 jul. 2021

LIMA, P. C.; Imaginação pedagógica, educação matemática e inclusão: em busca de possibilidades para as aulas de Matemática. **Intermaths**. Vol. 2, n. 1, p. 121-137, 2021. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/download/8595/5927. Acesso em: 19 set. 2021.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. V. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MEDINA, M. B.; LEINEKER, L. R. O uso do software GeoGebra no ensino da geometria no 8º ano. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**, v. 1, 2014. Disponível em:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes$_{p}de/2014/2014_{u}nicentro_{m}$
$26set$.2021.

OLIVEIRA, N. P. *et al*. A evolução da universidade no contexto do ensino a distância e das TICs. **Texto Livre Linguagem e Tecnologia**, Belo Horizonte, MG, v. 12, n. 2, p. 201-215, mai.-ago. 2020. Disponível em:
https://periodicos.ufmg.br/index.php/textolivre/article/view/24378/19499. Acesso em: 14 set. 2021.

PRESMIC, J. de G. **Geometrias não euclidianas**. 2014. 50 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/18074. Acesso em: 15 dez. 2020.

SANTOS, R. A.; OLIVEIRA, J. de. **Trigonometria Triangular Esférica**. RCT – Revista de Ciência e Tecnologia. RCT v.4.n.6 (2018). Disponível em: https://revista.ufrr.br/rct/article/view/4645. Acesso em: 15 dez. 2020.

SILVA, D. de F. da. **Áreas de figuras planas e geometria esférica**. 2018. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Natal, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/26170. Acesso em: 15 dez. 2020.

SILVA, E. R. da. **O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas**. 2014. 211 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/8551. Acesso em: 29 abr. 2021.

SKOVSMOSE, O. (2015). **Pesquisando o que não é, mas poderia ser**. In B. S., D´Ambrosio, C. E., Lopes (Orgs.). Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. (pp. 63-90). Campinas, SP: Mercado de Letras.

SPINELLI, W. Os **Objetos Virtuais de Aprendizagem: ação, criação e conhecimento**. s/d. Disponível em:
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6749/mod$_{r}esource/content/2/Objetos_{d}e_{a}prendi$
$zagem.pdf. Acesso em$: 10 *abr*. 2021.