



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL – UFFS
***CAMPUS CHAPECÓ* — SC**
CURSO DE MATEMÁTICA — LICENCIATURA

GABRIEL LUIZ MARTINELLI

**DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR EM UMA REGIÃO PLANA COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO MISTAS, UTILIZANDO O MÉTODO DE
CRANK-NICOLSON**

Chapecó/SC

2020

GABRIEL LUIZ MARTINELLI

**DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR EM UMA REGIÃO PLANA COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO MISTAS, UTILIZANDO O MÉTODO DE
CRANK-NICOLSON**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do
grau de Licenciado em Matemática da
Universidade Federal da Fronteira Sul.

Orientação: Prof. Dr. Vitor José Petry

Chapecó/SC

2020

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Martinelli, Gabriel Luiz
DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR EM UMA REGIÃO PLANA
COM CONDIÇÕES DE CONTORNO MISTAS, UTILIZANDO O MÉTODO DE
CRANK-NICOLSON / Gabriel Luiz Martinelli. -- 2020.
57 f.

Orientador: Doutor Vitor José Petry

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2020.

1. Matemática. 2. Modelagem matemática. 3. Campos de
temperatura. 4. Crank-Nicolson. I. Petry, Vitor José,
orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III.
Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

GABRIEL LUIZ MARTINELLI

**DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR EM UMA REGIÃO PLANA COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO MISTAS, UTILIZANDO O MÉTODO DE
CRANK-NICOLSON**

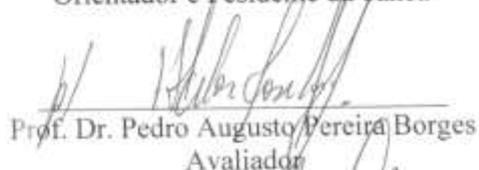
Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do
grau de Licenciado em Matemática da
Universidade Federal da Fronteira Sul.

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi defendido e aprovado pela banca em
25/01/2021.

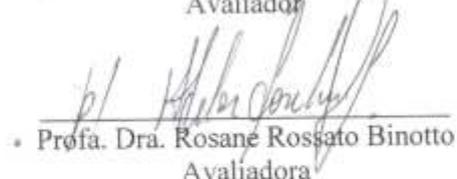
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Vitor José Petry
Orientador e Presidente da banca



Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges
Avaliador



Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto
Avaliadora

Obs.: De acordo com o Ofício-Circular nº 8/2020 – PROGRAD (10.17.08.19), o presidente assina "em todos os espaços, sendo o presidente representante dos demais participantes da banca".

“Aos meus pais”

AGRADECIMENTOS

Ao professor Vitor José Petry, pela orientação, ensinamentos, paciência, dedicação e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Pedro Augusto Pereira Borges e a professora Rosane Rossato Binotto, por fazerem parte da banca avaliadora, pelas contribuições dadas ao trabalho.

Aos meus professores de Ensino Médio, professor Vanderlei Petry e professora Muriel Clasen dos Santos Eyng, por me incentivarem a seguir na área das exatas.

À minha família, pelo apoio durante a graduação.

À minha namorada Luani Maria Seibel, pelo apoio e ajuda em todos os momentos.

Aos professores da Universidade Federal Fronteira Sul, pelos ensinamentos na trajetória do curso.

Aos professores que organizaram e implantaram o curso de Licenciatura em Matemática.

À UFFS por disponibilizar o curso.

RESUMO

No presente trabalho busca-se determinar o campo de temperatura em um ambiente que possui condições de fronteira mistas e é utilizado para a realização de pintura industrial. O objetivo foi de adaptar um modelo matemático sobre a distribuição do calor em um determinado ambiente, para assim, estipular a temperatura em pontos internos e nas fronteiras, isoladas e não-isoladas, além de calcular o potencial energético dos geradores de calor, juntamente com sua velocidade e sua temperatura e mostrar que a matemática é importante e está presente nesse ambiente. Para alcançar isso, foram desenvolvidas simulações numéricas a partir do modelo definido para a resolução do problema. A solução do problema de transferência de calor foi aproximada, usando o método implícito de Crank-Nicolson, um esquema em diferenças finitas centrais para aproximar as derivadas espaciais e diferenças avançadas para a derivada temporal. Por fim, observou-se como funciona o fluxo de calor no ambiente em que ocorre o processo de pintura.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Campos de temperatura; Método de Crank-Nicolson.

ABSTRACT

The present work seeks to determine the temperature field in an environment that has mixed boundary conditions and is used for industrial painting. The objective was to adapt a mathematical model on the distribution of heat in a given environment, in order to stipulate the temperature at internal points and at the borders, isolated and non-isolated, in addition to calculating the energy potential of heat generators, together with its speed and temperature and show that mathematics is important and is present in that environment. To achieve this, numerical simulations were developed based on the model defined for solving the problem. The solution to the heat transfer problem was approximated, using the implicit Crank-Nicolson method, a scheme in central finite differences to approximate the spatial derivatives and advanced differences for the temporal derivative. Finally, it was observed how the heat flow works in the environment where the painting process occurs.

Keywords: Mathematical modeling; Temperature fields; Crank-Nicolson method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 REVISÃO LITERÁRIA.....	12
2.1 Pintura Industrial.....	12
2.2 Equações Diferenciais Parciais (EDP)	14
2.3. Equações Diferenciais Parciais de 2ª Ordem	14
2.3.1 Discreminante de Uma EDP.....	15
2.4 Equação do Calor	16
2.5 Método Matemático	17
2.5.1 Método das Diferenças Finitas	18
2.5.2 Método de Crank-Nicolson	20
2.5.3 Condições de Fronteira	21
2.6.0 Geradores de Calor	22
2.6.1 Gás Natural	24
2.6.2 Fluxo de Ar	25
2.6.3 Determinação da Temperatura.....	26
3 PROCEDIMENTOS DE SOLUÇÃO	27
4 RESULTADOS	44
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

1. INTRODUÇÃO

A principal justificativa para realização da presente pesquisa, se deu pela discussão ocorrida no ambiente industrial apresentado acerca do uso e da aplicação da matemática no processo de pintura. Com isso, o desafio de provar a aplicação real e os benefícios que o uso correto pode proporcionar foram os pilares motivacionais para conclusão do estudo.

No presente trabalho, foi modelado matematicamente o processo de distribuição e transferência de calor em um ambiente real usado para realização da pintura em superfícies metálicas, trata-se de uma empresa da área metal mecânica localizada no município de Chapecó, cujo nome será omitido por questões de confidencialidade. A transferência de calor é a energia térmica em trânsito, devido a uma diferença de temperaturas no espaço. A transferência ocorre por três formas diferentes: condução, convecção¹ e radiação térmica, porém, no modelo adotado neste trabalho, foi considerado apenas as duas primeiras formas.

O objetivo geral é calcular o campo de temperatura, em função do tempo, em todo o domínio considerado da descrição do problema.

Os objetivos específicos são:

- 1 Estabelecer um modelo matemático para descrever o campo de temperatura em um determinado ambiente;
- 2 Determinar a temperatura em pontos internos e nas fronteiras, isoladas e não-isoladas termicamente;
- 3 Calcular o potencial energético dos geradores de calor, juntamente com a velocidade e a temperatura dos mesmos;
- 4 Mostrar que fenômenos podem ser descritos de forma matemática e são importantes e presentes em ambientes de produção industrial.

¹ Transferência de calor que ocorre em fluidos que apresentam diferenças de temperatura em seu conteúdo. Quando é fornecido calor a um fluido, formam-se correntes convectivas, que transmitem o calor até que todo o fluido entre em equilíbrio térmico.

Esse trabalho é organizado em quatro capítulos, sendo o primeiro, esta breve introdução. No segundo capítulo foi feita uma revisão de literatura sobre o assunto em tela apresentando a equação do calor, o método de Crank-Nicolson, as definições de condições de fronteira e os cálculos utilizados para determinar as informações sobre os geradores de calor.

No terceiro capítulo são apresentados os procedimentos de resolução, onde foi discretizado as equações diferenciais, visando a obtenção de um sistema de equações algébricas, usando o Método de Crank-Nicolson. Esse sistema, com a aplicação das condições de contorno foi escrito na forma matricial para posterior implementação computacional usando o *software* Matlab.

No quarto capítulo foi apresentado alguns dos resultados obtidos nas simulações numéricas feitas a partir da implementação desenvolvida.

Por fim, são apresentadas algumas considerações finais, em que são feitas reflexões sobre os experimentos e os resultados alcançados.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. PINTURA INDUSTRIAL

A pintura líquida sobre estruturas metálicas tem uma grande importância no ramo metalúrgico e da engenharia. A película de tinta aplicada sobre as superfícies oferece proteção contra as intempéries, como por exemplo: a chuva, o vento, o calor e a umidade, aumentando assim a vida útil do metal e garantindo uma maior durabilidade das construções. Tendo em vista sua importância econômica, todo o processo de pintura, seja em indústrias ou nos canteiros de obras, deve ser acompanhado por profissional e seguir as normas definidas pelo fornecedor da tinta usada. A qualidade do resultado da pintura tem influência do tratamento de superfície, limpeza de impurezas, acompanhamento do ponto de orvalho e a cura (secagem).

Ao ser observado mais de perto todo o processo, é possível notar que não realizar o procedimento norteado pelas normas pode acarretar graves consequências, sejam elas instantâneas ou mesmo, futuras. Ao construir e moldar estruturas com o aço, antes da pintura, temos um teor de oxidação alto, com isso, o contato direto com água ou com um ambiente apresentando alta umidade pode interferir na durabilidade do material. As principais consequências são a ferrugem abaixo da película de tinta e com isso o “apodrecimento” da peça metálica, que dependendo do grau pode gerar um colapso em toda estrutura.

Cientes dos problemas que a umidade causa no metal, acompanhar o ponto de orvalho se torna essencial e importante. O ponto de orvalho é conhecido como a temperatura que a umidade presente no ar se condensa sobre os objetos, e relaciona a temperatura ambiente, no momento da pintura, com a umidade relativa do ar (URA), que é a relação entre a quantidade de água existente no ar e a quantidade máxima que poderia haver na mesma temperatura, ou seja, a umidade de saturação. Para garantir que essa variável não interferirá no processo de pintura, somente poderá se dar esse processo se o objeto a ser protegido com a camada de tinta estiver 3°C acima do ponto de orvalho, exemplificando: se o ponto de orvalho no dia for 15°C, o objeto a ser pintado deverá estar no mínimo a 18°C, assim é praticamente nula a chance desse fator gerar a oxidação abaixo da película.

Dessa maneira, o ambiente que é utilizado para realização da pintura líquida precisa ter controle térmico para que a temperatura ambiente e/ou a URA estejam

propícias para a realização do processo. Deste modo, foi buscado um modelo matemático que represente a distribuição de calor nesse ambiente, para assim poder visualizar como esse procedimento se comporta com o passar do tempo.

Assim, a modelagem matemática foi importante nessa tarefa. A modelagem matemática “[...] consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual [...].” (BASSANEZI, 2002, p. 24).

Segundo Biembengut e Hein (2005), a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir. Os autores têm a Modelagem Matemática como o processo que “traduz” os fenômenos presentes no mundo real para o mundo matemático. Usada como metodologia de ensino e aprendizagem, “parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema.” (BIEMBENGUT; HEIN, 2005, p. 28).

Diversos autores, como Biembengut (1999), Bassanezi (2002), Biembengut e Hein (2005), D’Ambrósio (1986), Barbosa (2001), entre outros, sugerem que a Modelagem Matemática seja o caminho para descrever situações do mundo real no ambiente matemático. Segundo Oliveira *et al*:

O objetivo principal do processo de modelar é chegar a um conjunto de expressões aritméticas de fórmulas, equações algébricas, gráficos ou representações que levem a deduções soluções, e aplicações de dados que foram coletados. (OLIVEIRA *et al*, 2015, p. 2)

Com isso, foi possível perceber o quanto a Modelagem Matemática é importante e se faz presente em todas as áreas, sendo o método utilizado para esboçar os eventos retratados em situações reais na linguagem matemática. Dessa forma, foi presente nesse trabalho e fundamental para concluí-lo.

Muitos fenômenos naturais estudados na Física, Engenharia e Biologia são escritos na linguagem matemática, criando assim os modelos matemáticos. Situações envolvendo movimento de fluidos, fluxo de corrente elétrica, dissipação de calor, propagação de ondas sísmicas e crescimento populacional, são exemplos de situações que podem ser descritas através das Equações Diferenciais Parciais (EDP’s).

2.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Segundo Magalhães (2012, p. 2), por definição: “uma equação diferencial parcial (EDP) de ordem m é uma igualdade envolvendo uma função de n variáveis ($n \geq 2$) e suas respectivas derivadas parciais de até ordem m ($m \geq 1$), ou seja, é uma igualdade do tipo:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0 \quad (1)$$

Onde $u = u(x_1, \dots, x_n)$ e F é uma função qualquer. ”

As equações diferenciais parciais possuem uma família de soluções e não apenas uma única solução que as satisfaçam. Contudo, dada uma condição inicial e uma condição de contorno a EDP, sob determinadas condições, existe a garantia da existência e unicidade da solução.

As equações diferenciais podem ser classificadas ainda quanto à linearidade, a ordem e o grau. A equação pode ser linear ou não-linear. Uma equação diferencial é linear se ela for linear na função desconhecida e em todas as suas derivadas, com coeficientes dependendo apenas das variáveis independentes.

A ordem da equação diferencial parcial é determinada pela ordem da maior derivada presente na equação.

2.3. EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL DE 2ª ORDEM

Dentre algumas aplicações das EDP's de 2ª ordem, podemos destacar as leis da física como: Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, equações de Maxwell, Navier-Stokes e da Mecânica Quântica de Schrodinger que são descritas por equações diferenciais que relacionam o espaço e suas derivadas com o tempo.

As Equações Diferenciais Parciais bidimensionais de segunda ordem têm a seguinte forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F(u) = G(x, y) \quad (2)$$

Onde A, B, C, D, E e G são funções que dependem de x e y .

2.3.1. Discriminante de uma EDP

A definição e implementação do discriminante é descrita por Sodré (2003, p. 9), da seguinte forma:

Considerando a EDP linear descrita na Equação (2), onde os coeficientes são as funções A , B , C , D , E e F , tal que:

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0 \quad (3)$$

e $G = G(x, y)$ é uma função real definida sobre $M \subset \mathbb{R}^2$. Associada a esta EDP, é construído a equação diferencial ordinária característica:

$$A(x, y)(dy)^2 - B(x, y)(dx)(dy) + C(x, y)dx^2 = 0 \quad (4)$$

Observamos que o coeficiente de $B = B(x, y)$ é negativo. O discriminante desta EDP é definido como:

$$\Delta = \Delta(x, y) = B(x, y)^2 - 4(x, y)C(x, y) \quad (5)$$

As EDP's de segunda ordem, são divididas em equações elípticas, equações parabólicas e equações hiperbólicas. As equações parabólicas são adequadas para modelar problemas de difusão, enquanto as elípticas são para problemas de equilíbrio e as hiperbólicas para problemas de convecção. A classificação, segundo Nascimento (2013), ocorre em função do valor do discriminante da EDP, e ela será:

- Hiperbólica se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$. Como exemplo a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2};$$

- Elíptica se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$. Por exemplo, a Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

- Parabólica se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$. Aqui, como exemplo a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.4. EQUAÇÃO DO CALOR

A equação do calor é classificada como uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem. Segundo Incropera (2008, p. 44), essa equação determina o campo de temperatura, ou seja, representa como a temperatura varia com a posição no meio, considerando o processo de difusão de calor. Neste caso, por se tratar de um ambiente bidimensional, temos quatro variáveis, sendo três variáveis independentes x, y e t e uma variável dependente $u(t, x, y)$, ficando na sua forma adimensional:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

onde $\alpha = \frac{1}{\Re \cdot Pr} \in \mathbb{R}$ em que \Re e Pr os números adimensionais de Reynolds e Prandtl, respectivamente.

Através da equação do calor, é possível expressar um equilíbrio fundamental, ou seja, a taxa de calor que entra em qualquer parte do ambiente é igual a taxa de absorção de calor naquele local.

Acrescentando os termos convectivos² (além dos difusivos³) a equação fica:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -u \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

Onde:

- u = componente do vetor velocidade na direção x ;
- v = componente do vetor velocidade na direção y ;

2 Convecção é um dos processos de transferência de calor que ocorre por meio da movimentação interna de fluidos, como a água ou o ar atmosférico, graças ao empuxo atmosférico.

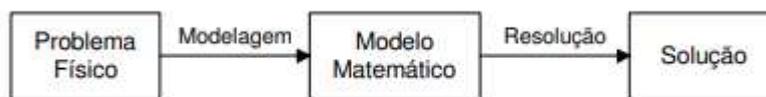
3 Difusão é um processo físico em que substâncias são transportadas de uma região mais concentrada para outra menos concentrada de maneira aleatória e espontânea.

- Re = coeficiente adimensional de Reynolds⁴;
- Pr = coeficiente adimensional de Prandtl⁵.

2.5. MÉTODO NUMÉRICO

Os Métodos Numéricos são algoritmos compostos por um número finito de operações envolvendo apenas números, como as operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta a uma tabela de valores, consulta a um gráfico, arbitramento de um valor, entre outras formas. (SANCHES *et al*, 2007).

Figura 1 - Esquema de representação do uso dos métodos numéricos



Fonte: SANCHES *et al*, 2007, p. 01

Nesse sentido, a modelagem é a fase da obtenção do modelo matemático que representa o problema físico.

Segundo Silva:

Modelo matemático é uma formulação matemática baseada em hipóteses que tentam representar fenômenos físicos ou biológicos, com a finalidade de gerar uma equação que possa estimar quantitativamente tal (is) fenômeno (s) a um determinado nível de probabilidade α . Um modelo apresenta apenas uma visão ou cenário de um fragmento do todo. Normalmente, para estudar um determinado fenômeno complexo, criam-se vários modelos. Os modelos matemáticos são utilizados praticamente em todas as áreas científicas, como, por exemplo, na biologia, química, física, economia, engenharia e na própria matemática pura. (SILVA, 2008, p. 1)

Resolução é a fase de obtenção da solução através da aplicação de métodos numéricos.

4 É um número adimensional usado em mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de determinado fluido sobre uma superfície.

5 É um número adimensional que aproxima a razão de difusividade de momento e difusividade térmica de um fluido.

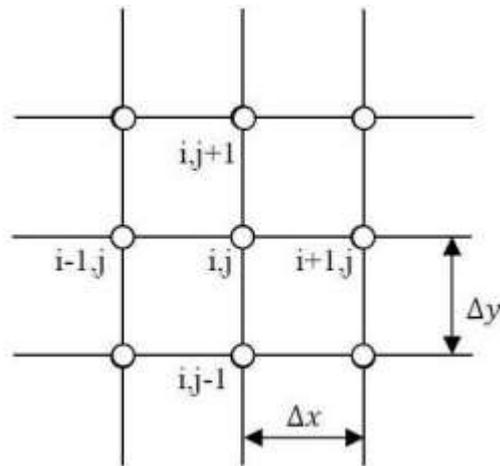
Neste t3pico, 3 feita a discretiza33o em diferen3as finitas usando um esquema impl3cito: o m3todo de Crank-Nicolson.

2.5.1. M3todo das diferen3as finitas

Para trabalhar de forma computacional com um problema diferencial 3 necess3rio expressar de forma correta o dom3nio onde o problema ser3 desenvolvido. Como normalmente n3o 3 poss3vel obter solu33es num3ricas sobre o dom3nio, por se tratar de uma regi3o cont3nua e haver uma infinidade de pontos envolvidos, em um primeiro momento o dom3nio 3 reduzido a uma quantidade finita de pontos onde as solu33es foram obtidas. Essa quantidade finita de pontos ser3 chamada de malha.

A Figura 2, representa uma malha cartesiana ortogonal em um ambiente bidimensional (o foco desse trabalho). Qualquer ponto (x_i, y_i) fica representado na malha por (i, j) e os vizinhos a esse ponto v3m representados por $(i \pm 1, j \pm 1)$.

Figura 2 - Malha computacional bidimensional



Fonte: MELO, 2011, p. 18

Ap3s efetuada a delimita33o do dom3nio, foi aplicado o M3todo das Diferen3as Finitas (MDF) para determinar as inc3gnitas. Esse processo consiste em substituir as derivadas existentes na equa33o original por f3rmulas discretas de diferen3as, que s3o aproxima33es das derivadas. A aplica33o dessas f3rmulas gera um sistema de equa33es alg3bricas que ap3s solucionadas fornecem os valores para as inc3gnitas. Nos m3todos num3ricos de um modo geral 3 permitido observa33es importantes em termos

computacionais para matrizes de coeficientes que foram produzidas quando o MDF foi empregado. Em suma, o Método das Diferenças Finitas consiste em resolver a equação diferencial em pontos discretos. A malha é regular, com isso os pontos são equidistantes. O uso dessa técnica, procura escrever os operadores diferenciais em sua forma discreta.

Por definição, a derivada de uma função $u(x)$ em um ponto x_i é dada por:

$$\frac{dU}{dx}(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_i+h) - U(x_i)}{h} \quad (7)$$

Onde $h = \Delta t$. De forma aproximada, porém finita, podemos escrever:

- Diferença Finita Progressiva: $U'_i \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$ (8)

- Diferença Finita Central: $U''_i \approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$ (9)

- Diferença Finita Regressiva: $U'_i \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$ (10)

Onde:

$$h = \frac{x_n - x_1}{n-1} \quad (11)$$

$$x_i = x_1 + (i-1)h \quad (12)$$

$$U_{i+1} = U(x_i + h) \quad (13)$$

$$U_i = U(x_i) \quad (14)$$

$$U_{i-1} = U(x_i - h) \quad (15)$$

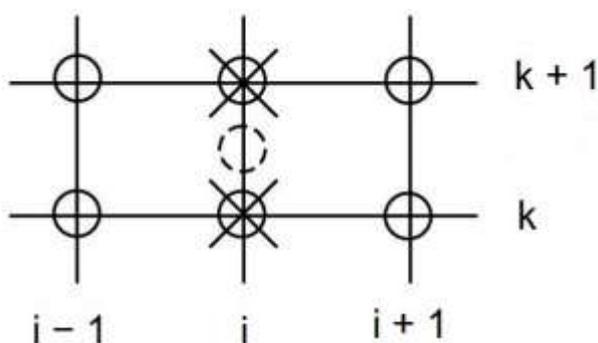
Diversos esquemas de interpolação temporal são usuais nos métodos das diferenças finitas para a solução do problema da equação do calor, podendo ser métodos implícitos e métodos explícitos. O método de Crank-Nicolson, que é um exemplo de método implícito. Na sequência é descrito esse método.

2.5.2. Método de Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson foi desenvolvido por Jonh Crank e Phyllis Nicholson na metade do século XX. Na análise numérica, ele é um método de diferenças finitas utilizado para resolução numérica da equação de calor e EDP's similares. É um método implícito de segunda ordem no tempo e de segunda ordem no espaço.

Nesse método, é proposto um esquema implícito alternativo para obter um valor mais aproximado do valor real da derivada de segunda ordem no espaço e primeira ordem no tempo da equação de difusão. Para alcançar esse fim, aproximações para as diferenças são implementadas no ponto médio do incremento de tempo.

Figura 3 - Representação do Método de Crank-Nicolson



Fonte: SOUZA, 2003, p. 5

Para as equações de difusão ele é muito estável, mas em soluções aproximadas, quando tivermos uma razão de tempo pelo espaço significativamente grande, geralmente superior a $\frac{1}{2}$, podem ocorrer oscilações significativas.

A equação para o método de Crank-Nicolson é a combinação de dois métodos: Método de Euler Explícito em n e de Euler Implícito em $n+1$, não sendo considerado a média entre os dois métodos, já que a solução tem uma dependência implícita.

Para a situação bidimensional, tem-se:

Euler Explícito:

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = U_{i,j}^n \left(u, x, y, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

Euler Implícito:

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = U_{i,j}^{n+1} \left(u, x, y, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

Das equações (14) e (15), é descrito o Método de Crank–Nicolson para situações bidimensionais:

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^{n+1} \left(u, x, y, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + U_{i,j}^n \left(u, x, y, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \quad (16)$$

A função U deve ser discretizada no espaço por diferenças finitas centrais, sendo assim um método implícito. Para obter o valor posterior de U no tempo, um sistema de equações algébricas precisará ser resolvido.

O método de Crank – Nicolson é amplamente utilizado para resolução da Equação do Calor, Equação (4).

2.5.3. Condições de fronteira

Segundo Gervásio (2019), em problemas envolvendo Equações Diferenciais, as condições de fronteira são interpretadas como um conjunto de restrições que determinam a variação de temperatura nos contornos, ao longo do tempo, e nos pontos internos, no estado inicial. Assim, a distribuição de temperatura no ambiente é uma decorrência das condições térmicas de fronteira estabelecidas.

As condições de contorno, ainda segundo Gervásio (2019), são classificadas de acordo com as informações disponíveis. No processo de transferência de calor, temos três condições mais utilizadas: Dirichlet, Neumann e Robin, conhecidas respectivamente como condições de 1ª espécie, 2ª espécie e 3ª espécie. Nesse trabalho, foram utilizadas as condições de 1ª e 2ª espécies.

As condições de contorno de Dirichlet, são denominadas assim em homenagem a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, e pressupõem o conhecimento dos valores da variável principal da φ da EDP, nos contornos:

$$\begin{cases} \varphi(x_1, y_1, z_1, \dots) = \varphi_1 \\ \varphi(x_2, y_2, z_2, \dots) = \varphi_2 \\ \varphi(x, y, z, \dots) = f(x) \end{cases} \quad (18)$$

onde φ_1 e φ_2 são números dados, ou seja, ela estabelece valores que as funções que compõem o sistema devem ter em pontos localizados nas fronteiras e $f(x)$ é a função que expressa a restrição de condição inicial ao qual o sistema está submetido.

As condições de contorno de Neumann recebem esse nome em homenagem a Carl Neumann, elas especificam valores que a derivada da variável principal φ da EDP deve assumir no contorno do domínio. As condições de Neumann, colocam uma derivada normal a direção da variável do contorno, associadas ao fluxo. É possível denotá-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1) &= \varphi_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2) &= \varphi_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x_n) &= f(x) \end{aligned} \tag{19}$$

onde φ_1 e φ_2 são números dados e n denota a normal ao contorno.

2.6. GERADORES DE CALOR

Nesse tópico são explorados os geradores de calor usados no ambiente, visto que as informações disponíveis não são suficientes para concluir o estudo. Na Figura 5, estão expostas as informações existentes e que são importantes para determinar os dados que nos faltam. Na figura 6, tem-se a representação de forma ilustrativa de como funciona os gerados estudados.

Figura 5 - Informações presentes nos geradores



Fonte: Autor, 2019

Figura 6 - Representação do funcionamento dos geradores de calor



Fonte: Manual técnico Biemmedue, 2019, p. 59

Assim, foi feita a apresentação das normas referentes ao combustível usado para geração de calor, o Gás Natural, e os cálculos utilizados para obtenção da velocidade e do calor gerado a partir das informações presentes na figura 5.

2.6.1. Gás natural

Segundo a Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP):

Gás Natural é uma substância composta por hidrocarbonetos que permanecem em estado gasoso nas condições atmosféricas normais. É essencialmente composta pelos hidrocarbonetos metano (CH_4), com teores acima de 70%, seguida de etano (C_2H_6) e, em menores proporções, o propano (C_3H_8), usualmente com teores abaixo de 2%. (Site da ANP).

Atualmente é amplamente usado nas indústrias em equipamentos utilizados para geração de calor devido ao seu poder calorífico. Para regulamentar, o Gás Natural deve seguir algumas normas, nacionais e internacionais, que são a ISO 6976, ASTM D 358 e a NBR 15213.

Esses documentos especificam o método para o cálculo do poder calorífico, da densidade absoluta, a densidade relativa e o índice de Wobbe⁶ do gás natural seco e outros combustíveis gasosos, a partir da composição molar do gás obtida por cromatografia em fase gasosa. Como descrito na ISO 6976:

Os métodos de cálculo dos valores das propriedades em uma base molar, de massa ou de volume são aplicáveis a qualquer gás natural, substituto do gás natural ou outro combustível que seja normalmente gasoso, exceto que para propriedades com base em volume. (ISO 6976:2016).

Assim, foram utilizados alguns dados fornecidos por esses documentos para auxiliar a deduzir a quantidade de calor gerada pelos geradores presentes no ambiente estudado, como o Poder Calorífico Superior (PCS)⁷, além de dados para conversão de unidades.

Esse processo foi de extrema importância para ao final da pesquisa determinar o campo de temperatura, visto que foi descoberto quanto calor é gerado em cada gerador, levando em consideração a potência do equipamento e o combustível utilizado.

⁶ É uma medida do conteúdo energético de um gás, medido com base no seu poder calorífico por unidade de volume à pressão e temperatura padrão, utilizada como indicador da interoperabilidade de equipamentos, face à mudança do gás combustível que os alimenta.

⁷ Representa o calor liberado pela combustão tendo toda a água resultante na fase líquida.

2.6.2. Fluxo de ar

Como nas informações fornecidas pela empresa que produziu os equipamentos responsáveis pela geração de calor não possui qual a velocidade que o ar sai de cada gerador, foi utilizado dos meios necessários para determinar essa variável importante.

Podemos observar, pela Figura 5, que é exposto o dado da vazão de ar no período de uma hora com o gerador operando em capacidade máxima. Assim, foi utilizado o cálculo da vazão em uma seção transversal para descobrir a velocidade do ar:

$$Z = \frac{A \cdot \Delta S}{\Delta t} \quad (20)$$

Onde:

Z = Volume de fluido;

A = Área da seção transversal;

ΔS = Distância;

Δt = Tempo.

Como $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v$, então:

$$Z = A \cdot v \quad (21)$$

Com v representando a velocidade.

Assim, utilizando esse método extraído da física, além de algumas conversões de unidades e medidas, é possível determinar a velocidade do ar na saída dos geradores.

2.6.3. Determinação da temperatura

O próximo passo é determinar a temperatura que cada gerador aquece o ar, para isso novamente foram utilizados de métodos físicos, conversões de unidades e medidas e também as informações contidas na Figura 5

Primeiramente foi utilizado o cálculo da densidade:

$$d = \frac{m}{v} \quad (22)$$

Onde:

d = Densidade;

m = Massa:

V = Volume.

Como foi calculado em relação ao ar, é utilizado $d = 1,2754 \frac{kg}{m^3}$, com o objetivo de encontrar o valor de m . Em seguida, foi utilizado o cálculo envolvendo o calor específico, com objetivo de determinar a capacidade térmica:

$$c = \frac{C}{m} \quad (23)$$

Tendo:

c = Calor específico;

C = Capacidade térmica;

m = Massa.

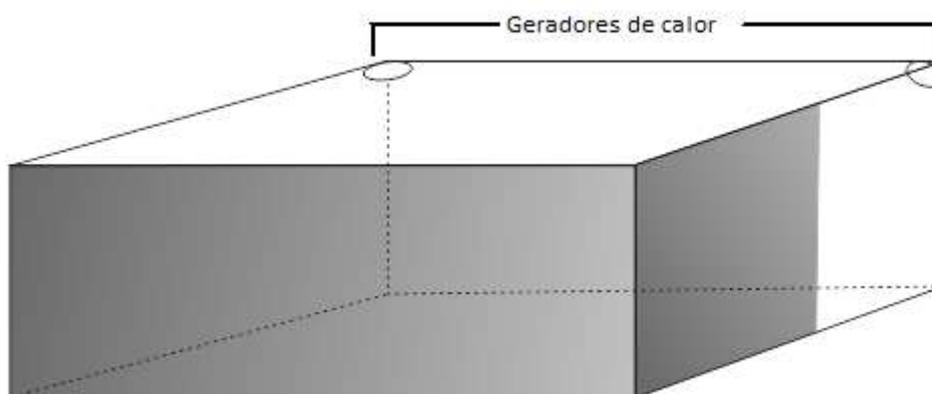
Foi utilizado $c = 0,24 \frac{cal}{g^{\circ}C}$. Após determinada a capacidade térmica, foi realizado a razão com o poder calorífico dos geradores e dessa forma foi descoberto qual a variação de temperatura da entrada até a saída, como ilustrado na Figura 6.

Após determinadas essas variáveis é possível elaborar como se distribui o campo de temperatura no ambiente em relação ao tempo.

3. PROCEDIMENTOS DE SOLUÇÃO

O ambiente estudado no problema se encontra em uma empresa da área metal mecânica localizada na cidade de Chapecó, Santa Catarina. Esse ambiente é o local onde é realizado a pintura de superfícies metálicas, com isso, possui um certo controle de temperatura e de umidade relativa do ar por meio de geradores de calor posicionados em locais estratégicos, como mostra a figura 7.

Figura 7 - Ilustração representando o ambiente e a posição dos geradores de calor

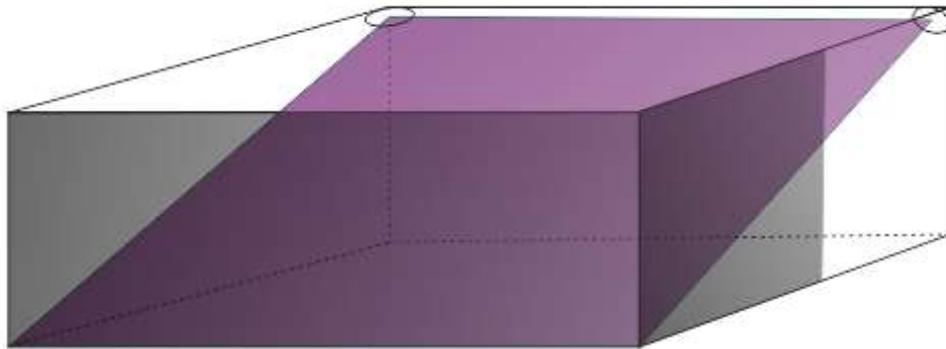


Fonte: Autor, 2020

Nesse esboço, tem-se a representação de forma ilustrativa do local. Nela é possível visualizar os dois geradores nos cantos superiores voltados para o centro. Por ser um ambiente industrial para pintura, o local possui isolamento térmico no lado oposto aos geradores e também em parte da parede direita, representados na ilustração com a cor mais escura.

Com o objetivo de conseguir trabalhar de forma mais simplificada, foi utilizado a representação de um plano bidimensional traçado da aresta superior, onde se encontram os geradores, até a aresta contrária inferior, onde se encontra a parede isolada, como representado na Figura 8, tomando o cuidado para que os eixos centrais da saída de ar dos geradores pertençam ao plano considerado.

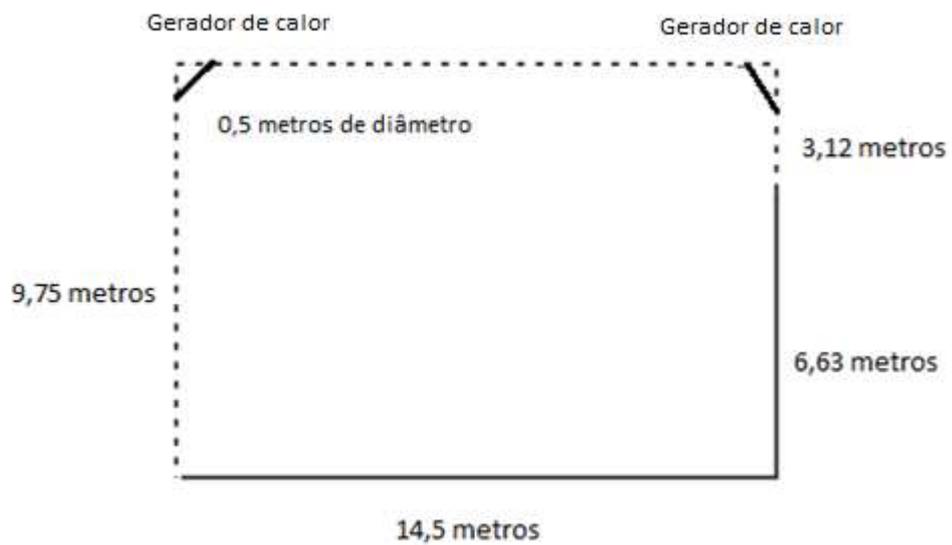
Figura 8 - Ilustração representando o plano traçado.



Fonte: Autor,2020

Desta forma, o plano fica representado de acordo com a Figura 9.

Figura 9 - Ilustração do plano traçado na Figura 9



Fonte: Autor, 2020

A partir desse plano foi possível determinar como se distribui o campo de temperatura nesse ambiente e a temperatura que cada ponto alcança. Como essa é uma

seção plana, o gerador não é mais representado por uma circunferência, e sim, por um segmento de reta.

O próximo passo é construir o perfil de velocidade a partir dos geradores de calor, ou seja, visualizar como a corrente de ar gerada circula pelo ambiente. Para isso, foi utilizado o método Sola, descrito por Petry e Weber apresentado no artigo “*Simulação Numérica da Concentração de uma Substância Diluída em um Fluido com Fluxo em torno de Obstáculos Sólidos*” (2016, p. 2-3).

Desta forma, foi calculado primeiramente qual é a velocidade do ar na saída de cada um dos geradores. Pelas informações contidas na placa de identificação, apresentada na Figura 5, que cada gerador tem uma vazão de $6000 \frac{m^3}{h}$, e com essa informação, foi possível calcular a velocidade com que o ar sai dos geradores.

Usando as taxas de conversão de unidades, tem-se que:

$$6000 \frac{m^3}{h} \cdot \frac{h}{3600s} = 6000m^3 \cdot \frac{1}{3600s} \quad \text{implica em}$$
$$\frac{6000m^3}{3600s} \cong 1,67 \frac{m^3}{s} \quad (24)$$

Dessa forma, foi possível definir qual é a vazão em segundos para cada um dos geradores. Para definir a velocidade, foi usado a Equação (21).

$$Z = A \cdot v \quad \text{implica em}$$

$$Z = 1,67 \frac{m^3}{s}$$

$$A = \pi r^2 = 3,14159 \cdot (0,25m)^2 \cong 0,1963m^2$$

Como v é a incógnita,

$$1,67 \frac{m^3}{s} = 0,1963m^2 \cdot v, \text{ e assim,}$$

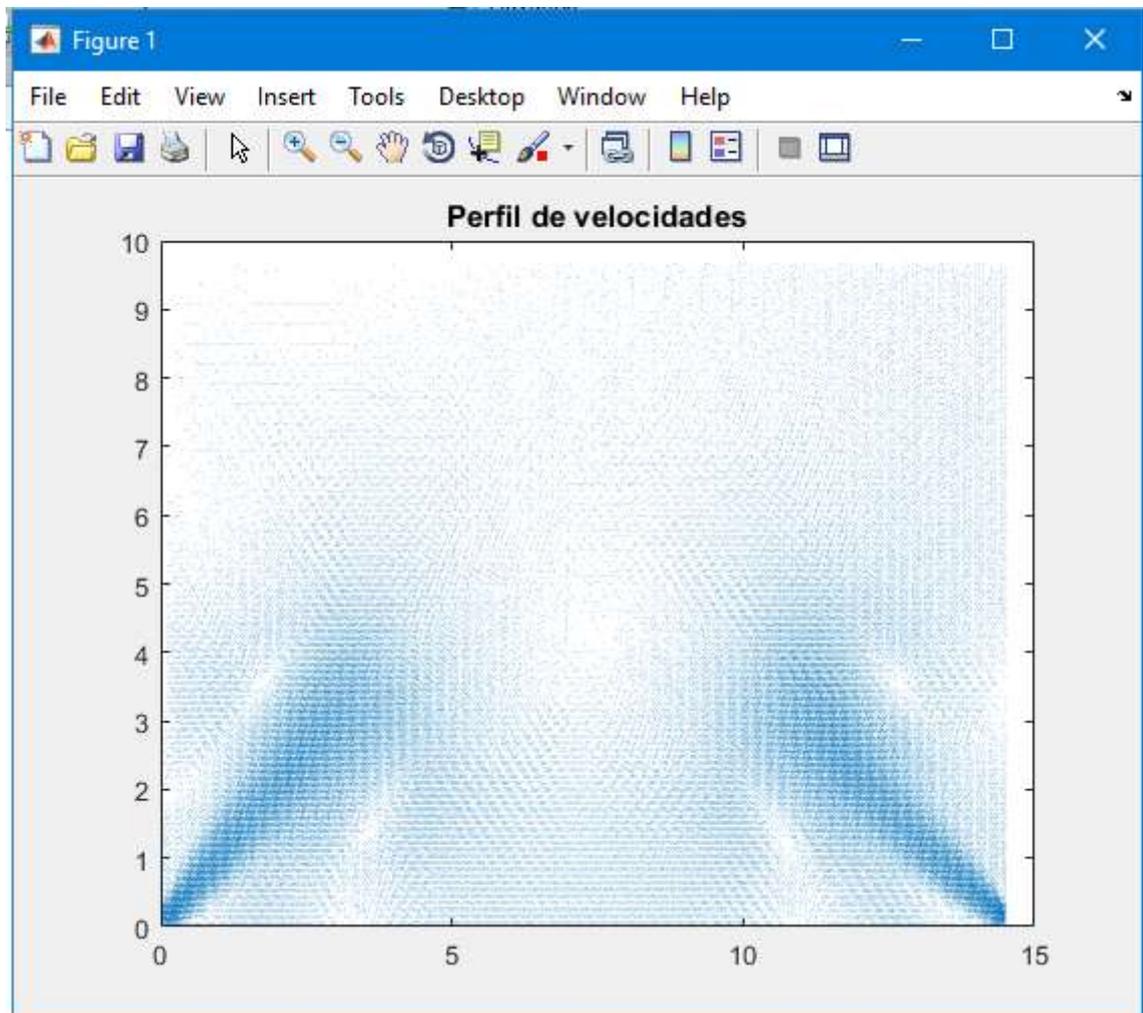
$$v = 8,5 \frac{m}{s}$$

Logo, a velocidade de cada gerador, operando em máximo desempenho, é de $8,5 \frac{m}{s}$.

Para efeitos de simulação, foram consideradas as equações na forma adimensional, sendo usado o Número de Reynolds igual a 200. Desta maneira, possuímos

todos os dados necessários para a construção do perfil de velocidade. Com o auxílio do software Matlab, o fluxo está representado pela Figura 10.

Figura 10 - Perfil de velocidade



Fonte: Autor, 2020

Para definir a temperatura que cada gerador aquece o ar, foi recorrido novamente a Figura 5. Foi possível observar que o consumo médio de Gás Natural é de $9,82 \frac{kg}{h}$. Tendo por definição que $1 \frac{kg}{h} = 1,266 \frac{m^3}{kg}$. Realizando a conversão, tem-se que cada gerador gasta $12,48276 \frac{m^3}{h}$ de gás natural.

São expressos pelos documentos citados na Subseção 2.6.1, que o Poder Calorífico do Gás Natural varia entre $35000 \frac{kJ}{m^3}$ à $43000 \frac{kJ}{m^3}$. Para determinar o poder calorífico, foi utilizado a média desses valores. Assim,

$$39000 \frac{kJ}{m^3} \cdot 12,48276 \frac{m^3}{h} = 486827,64 \frac{kJ}{h} \quad (25)$$

Realizando a conversão, tem-se um poder calorífico de $116354,6 \frac{kcal}{h}$, que é o valor aproximado expresso pelos dados do equipamento presentes na Figura 5.

Utilizando a Equação (21):

$$1,2754 \frac{kg}{m^3} = \frac{m}{6000m^3} \text{ o que implica} \\ m = 7652,4 \frac{kg}{h} \text{ que equivale a } m = 7652400 \frac{g}{h} \quad (26)$$

E utilizando a Equação (22):

$$0,24 \frac{cal}{g^{\circ}C} = \frac{C}{7652400 \frac{g}{h}} \text{ o que implica} \\ C = 1836576 \frac{cal}{h} \text{, ou ainda,} \\ C = 1836,576 \frac{kcal}{h} \quad (27)$$

Para determinar a variação de temperatura do ar, foi realizado a razão do poder calorífico com a capacidade térmica, desta maneira:

$$Temperatura = \frac{116354,6 \frac{kcal}{h}}{1836,576 \frac{kcal}{h}} \text{ o que implica} \\ Temperatura \cong 63,35^{\circ}C \quad (28)$$

Ou seja, a variação de temperatura entre o ar que entra no gerador pela parte traseira, e sai pela parte dianteira é de aproximadamente $63,35^{\circ}C$.

Contudo, para facilitar o processo de programação e auxiliar na resolução simplificada do problema, foi feito uma equivalência, onde a maior temperatura do

domínio será representado pelo número 1 e os locais com temperatura ambiente foram representados pelo número 0 (isso também decorre do processo de adimensionalização das equações). Com a variação definida em um intervalo menor, a eficácia do programa de resolução fica mais significativa e com os resultados melhor validados.

Foram consideradas condições de contorno de Neumann (ou seja, isolamento térmico) nos locais onde se encontram paredes, elas delimitam o domínio. Na posição dos reatores, foram consideradas condições de Dirichlet e nas regiões de fronteira de livre circulação de ar, a aproximação das condições de fronteira foi feita por extrapolação, onde foi considerado uma média ponderada entre os dois nós vizinhos à fronteira, na direção normal desta. A condição inicial foi definida no domínio, considerando a temperatura ambiente em todo o domínio, exceto nos pontos correspondentes à posição dos geradores de calor. A Equação (4) foi resolvida na sua forma adimensional, usando o método implícito de Crank-Nicolson em diferenças finitas centrais para aproximar as derivadas espaciais e diferenças avançadas para a derivada temporal.

Para isso, teremos que $i=0, 1, \dots, I$, onde I é o número de pontos da malha na direção x , da mesma forma, $j=0, 1, \dots, J$, onde J é o número de pontos da malha na direção y e n sendo a quantidade de interações, $n= 0, 1, \dots, n$.

Desta maneira, segue a discretização da Equação (7):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -u \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Eq. 7})$$

Tem-se que $\frac{1}{Re.Pr} = \alpha$, assim:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{-u}{2} \left[\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] - \frac{v}{2} \left[\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + \\ & \frac{\alpha}{2} \left[\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
& U_{i,j}^{n+1} \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \right] + U_{i+1,j}^{n+1} \left[\frac{u \Delta t}{4 \Delta x} - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} \right] + U_{i-1,j}^{n+1} \left[\frac{-u \Delta t}{4 \Delta x} - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} \right] + \\
& U_{i,j+1}^{n+1} \left[\frac{v \Delta t}{4 \Delta y} - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} \right] + U_{i,j-1}^{n+1} \left[\frac{-v \Delta t}{4 \Delta y} - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} \right] = U_{i,j}^n \left[1 - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \right] + \\
& U_{i+1,j}^n \left[\frac{-u \Delta t}{4 \Delta x} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} \right] + U_{i-1,j}^n \left[\frac{u \Delta t}{4 \Delta x} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} \right] + U_{i,j+1}^n \left[\frac{-v \Delta t}{4 \Delta y} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} \right] + \\
& U_{i,j-1}^n \left[\frac{v \Delta t}{4 \Delta y} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} \right]
\end{aligned} \tag{30}$$

Foi definido como $r_x = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$; $r_y = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$; $S_x = \frac{u \Delta t}{4 \Delta x}$ e $S_y = \frac{v \Delta t}{4 \Delta y}$. Com isso, a equação ficou:

$$\begin{aligned}
& U_{i,j}^{n+1} \left[1 + r_x + r_y \right] + U_{i+1,j}^{n+1} \left[S_x - \frac{r_x}{2} \right] + U_{i-1,j}^{n+1} \left[-S_x - \frac{r_x}{2} \right] + U_{i,j+1}^{n+1} \left[S_y - \frac{r_y}{2} \right] + \\
& U_{i,j-1}^{n+1} \left[-S_y - \frac{r_y}{2} \right] = U_{i,j}^n \left[1 - r_x - r_y \right] + U_{i+1,j}^n \left[-S_x + \frac{r_x}{2} \right] + U_{i-1,j}^n \left[S_x + \frac{r_x}{2} \right] + \\
& U_{i,j+1}^n \left[-S_y + \frac{r_y}{2} \right] + U_{i,j-1}^n \left[S_y + \frac{r_y}{2} \right]
\end{aligned} \tag{31}$$

Realizando uma nova simplificação, $\delta x = S_x - \frac{r_x}{2}$; $\delta y = S_y - \frac{r_y}{2}$; $\gamma_x = S_x + \frac{r_x}{2}$; $\gamma_y = S_y + \frac{r_y}{2}$; $d_1 = 1 + r_x + r_y$ e $d_2 = 1 - r_x - r_y$. Com isso, foi obtido a equação:

$$\begin{aligned}
& d_1 U_{i,j}^{n+1} + \delta x U_{i+1,j}^{n+1} - \gamma_x U_{i-1,j}^{n+1} + \delta y U_{i,j+1}^{n+1} - \gamma_y U_{i,j-1}^{n+1} = \\
& d_2 U_{i,j}^n - \delta x U_{i+1,j}^n + \gamma_x U_{i-1,j}^n - \delta y U_{i,j+1}^n + \gamma_y U_{i,j-1}^n
\end{aligned} \tag{32}$$

Note que é necessário calcular os valores de $\delta_x, \delta_y, \gamma_x, \gamma_y, d_1, d_2, r_x, r_y, S_x$ e S_y para cada célula da malha, levando em conta as componentes da velocidade da referida célula e sua posição em relação ao domínio (ponto interno, ponto externo ou de fronteira em relação ao domínio de fluxo).

O vetor U^n representa o valor da temperatura no instante n em cada posição do domínio e é expresso por:

$$U^n = [U_{1,1}^n \ U_{2,1}^n \ \dots \ U_{I,1}^n \ U_{1,2}^n \ U_{2,2}^n \ \dots \ U_{I,2}^n \ \dots \ U_{1,J}^n \ U_{2,J}^n \ \dots \ U_{I,J}^n]^T$$

Para resolver essa equação para U^{n+1} , foi preciso definir uma condição inicial U^n que deu início ao processo de resolução. Desta forma, para o problema, foi tomado o vetor U^0 , onde foi considerado a temperatura máxima nos geradores e a temperatura ambiente nos demais pontos.

As condições de fronteira foram definidas da seguinte forma: nos locais onde se encontram as paredes e possuem isolamento térmico, foram consideradas as condições de Neumann (a derivada parcial de U na direção normal é nula), nos geradores usamos condições de Dirichlet (temperatura máxima e fixa nesses pontos) e nos demais pontos de fronteira usamos uma extrapolação (que consiste em considerar uma média ponderada das duas células vizinhas na mesma direção).

Desta maneira, aplicando essas condições na Equação (32), tem-se que:

Para $i = 1$ até 5 e $j = 1$

$$1. U_{i,1}^{n+1} = 1. U_{1,j}^n \quad (33)$$

Para $i = 6$ até $I - 5$ e $j = 1$,

$$U_{i,j-1} = 0,75.U_{i,j} + 0,25.U_{i,j+1} \Rightarrow U_{i,0} = 0,75.U_{i,1} + 0,25.U_{i,2}$$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned} & (d_1 - 0,75\gamma_y)U_{i,1}^{n+1} + \delta_x U_{i+1,1}^{n+1} - \gamma_x U_{i-1,1}^{n+1} + (\delta_y - 0,25\gamma_y)U_{i,2}^{n+1} = \\ & (d_2 + 0,75\gamma_y)U_{i,1}^n - \delta_x U_{i+1,1}^n + \gamma_x U_{i-1,1}^n - (\delta_y - 0,25\gamma_y)U_{i,2}^n \end{aligned} \quad (34)$$

Para $i = I - 4$ até I e $j = 1$

$$U_{i,1}^{n+1} = U_{i,1}^n \quad (35)$$

Em (33) e (35) os demais coeficientes são nulos.

Para $j = J$, aplicando as condições de Neumann, tem-se $U_{i,J+1} = U_{i,J-1}$.

Assim:

$$\begin{aligned} & d_1 U_{1,J}^{n+1} + \delta_x U_{i+1,J}^{n+1} - \gamma_x U_{i-1,J}^{n+1} + (\delta_y - \gamma_y)U_{i,J-1}^{n+1} = \\ & d_2 U_{1,J}^n - \delta_x U_{i+1,J}^n + \gamma_x U_{i-1,J}^n - (\delta_y - \gamma_y)U_{i,J-1}^n \end{aligned} \quad (36)$$

Para $i = 1$ e $j = 1$ até 5 ,

$$U_{1,j}^{n+1} = U_{1,j}^n \quad (37)$$

Para $i = 1$ e $j = 6$ até q , ponto em que termina a área livre e inicia o perímetro isolado. Com isso $U_{0,j} = 0,75.U_{1,j} + 0,25.U_{2,j}$, realizando a substituição:

$$\begin{aligned} & (d_1 - 0,75\gamma_x)U_{1,j}^{n+1} + (\delta_x - 0,25\gamma_x)U_{2,j}^{n+1} + \delta_y U_{1,j+1}^{n+1} - \gamma_y U_{2,j-1}^{n+1} = \\ & (d_2 + 0,75\gamma_x)U_{1,j}^n - (\delta_x - 0,25\gamma_x)U_{2,j}^n - \delta_y U_{1,j+1}^n + \gamma_y U_{2,j-1}^n \end{aligned} \quad (38)$$

Para $i = 1$ e $j = q + 1$ até $J - 1$, nesse intervalo, foi considerado a parede isolada termicamente, desta maneira se utiliza as condições de Neumann, com isso $U_{0,j} = U_{2,j}$, assim:

$$\begin{aligned} & d_1 U_{1,j}^{n+1} + (\delta_x - \gamma_x)U_{2,j}^{n+1} + \delta_y U_{1,j+1}^{n+1} - \gamma_y U_{1,j-1}^{n+1} = \\ & d_2 U_{1,j}^n - (\delta_x - \gamma_x)U_{2,j}^n - \delta_y U_{1,j+1}^n + \gamma_y U_{1,j-1}^n \end{aligned} \quad (39)$$

Para $i = 1$ e $j = J$,

$$\begin{aligned} & d_1 U_{1,J}^{n+1} + (\delta_x - \gamma_x)U_{2,J}^{n+1} + (\delta_y - \gamma_y)U_{1,J-1}^{n+1} = \\ & d_2 U_{1,J}^n - (\delta_x - \gamma_x)U_{2,J}^n - (\delta_y - \gamma_y)U_{1,J-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (40)$$

Em (37) os demais coeficientes são nulos.

Para $i = 1$ e $j = 1$ até 5,

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n \quad (41)$$

Para $i = 1$ e $j = 6$ até $J - 1$,

$$\begin{aligned} & (d_1 + 0,75\delta_x)U_{i,j}^{n+1} - (\gamma_x - 0,25\delta_x)U_{i-1,j}^{n+1} + \delta_y U_{i,j+1}^{n+1} - \gamma_y U_{i,j-1}^{n+1} = \\ & (d_2 - 0,75\delta_x)U_{i,j}^n + (\gamma_x - 0,25\delta_x)U_{i-1,j}^n - \delta_y U_{i,j+1}^{n+1} + \gamma_y U_{i,j-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (42)$$

Para $i = 1$ e $j = J$,

$$\begin{aligned} & (d_1 + 0,75\delta_x)U_{i,J}^{n+1} - (\gamma_x - 0,25\delta_x)U_{i-1,J}^{n+1} + \\ & (d_2 + 0,75\delta_x)U_{i,J}^n + (\gamma_x - 0,25\delta_x)U_{i-1,J}^n - \end{aligned} \quad (43)$$

Em (41) os demais coeficientes são nulos.

Após essa discretização da equação e aplicação das condições de contorno, o problema pode ser escrito na forma matricial:

$$A.C^{n+1} = B.C^n \quad (44)$$

onde A e B são matrizes formadas por blocos, conforme segue:

$$A = \begin{bmatrix} D & M & \dots & 0 & 0 \\ P & J & N & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & P & J & N & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & R & S & T & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & R & S & T & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R & K & T & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R & K & T \\ 0 & 0 & \dots & V & K \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} Q & -M & \dots & 0 & 0 \\ -P & W & -N & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & -P & W & -N & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & -R & L & -T & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & -R & L & -T & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -R & G & -T & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -R & G & -T \\ 0 & 0 & \dots & -V & G \end{bmatrix}$$

sendo os blocos contidos na matriz A definidos por:

Os blocos 0 são matrizes nulas. Todos os blocos são matrizes quadradas de ordem I . As matrizes A e B tem J blocos em cada linha e em cada coluna e, portanto, são matrizes quadradas de ordem $I \times J$, onde I e J representam a quantidade de células contidas na malha nas direções x e y , respectivamente. A formulação aqui exposta considera as condições de contorno especificadas para o problema em questão.

4. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações e com isso as consequências de toda análise envolvendo o problema. Para isso, é usado um fluxo do ar, pelo domínio, em duas dimensões, calculado conforme descrito em (44). Considera-se o domínio de fluxo ao local total da análise, a fim de simular o local onde é realizada a pintura no ambiente industrial, conforme mostrado na figura 11.

Figura 11 - Domínio do fluxo



Fonte: Autor,2020

Estando a entrada do fluxo nos lados superiores, direito e esquerdo, conforme apresentado na figura 11, foi considerado nestas simulações os números adimensionais, $Re=100$ e $Sc=0,7$. O problema apresenta as condições de entrada de Neumann, de Dirichlet e também a extrapolação, conforme descrito no capítulo anterior. Também foi considerado que o gerador de calor possui em sua saída 0,5 metros de diâmetro e uma malha com 352×234 células. As simulações estão representadas conforme as figuras 12 a 20.

Figura 12 – Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=0$, $t^*=10$, $t^*=20$ e $t^*=30$

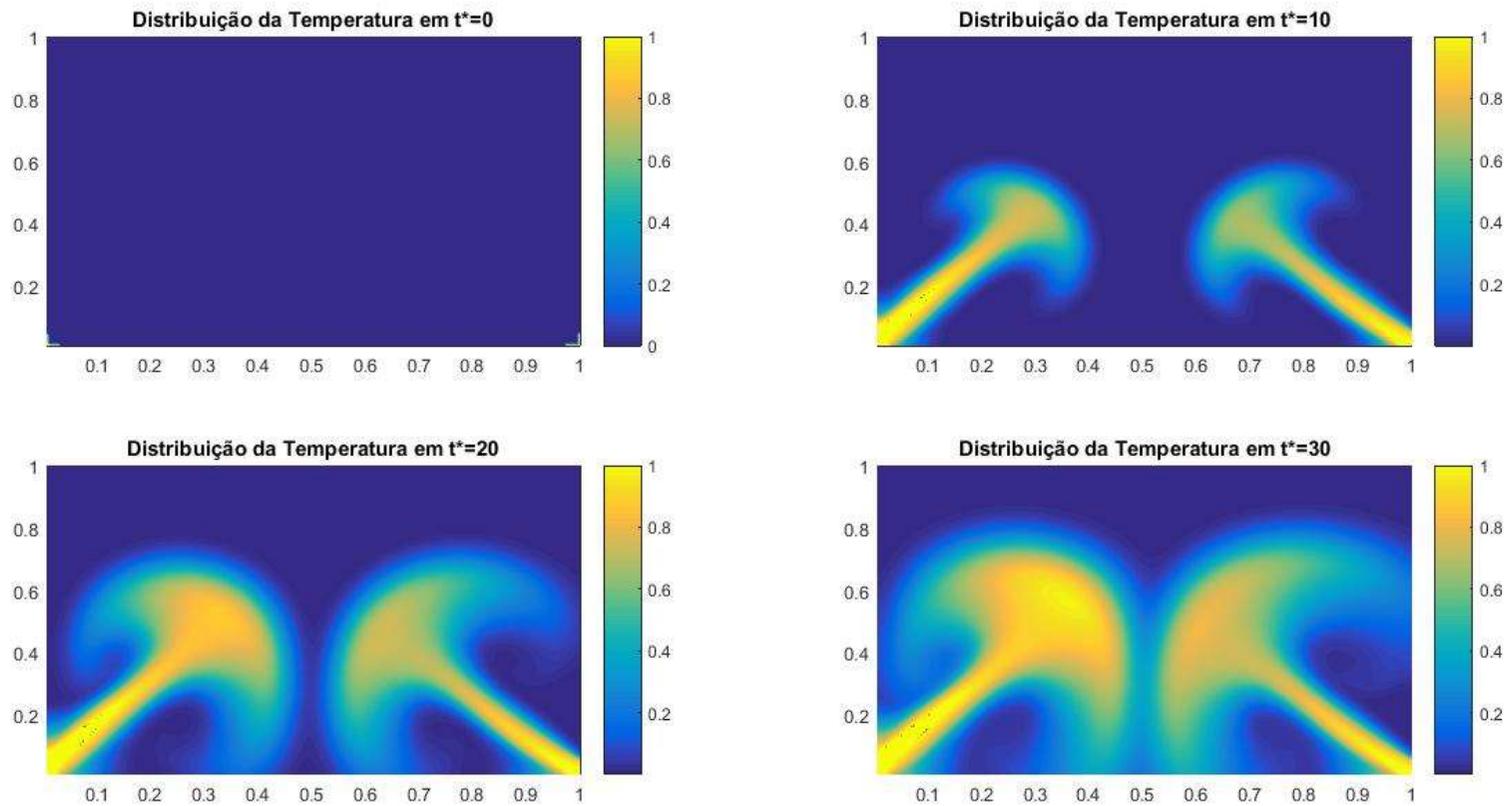


Figura 13 – Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=40$, $t^*=50$, $t^*=60$ e $t^*=70$

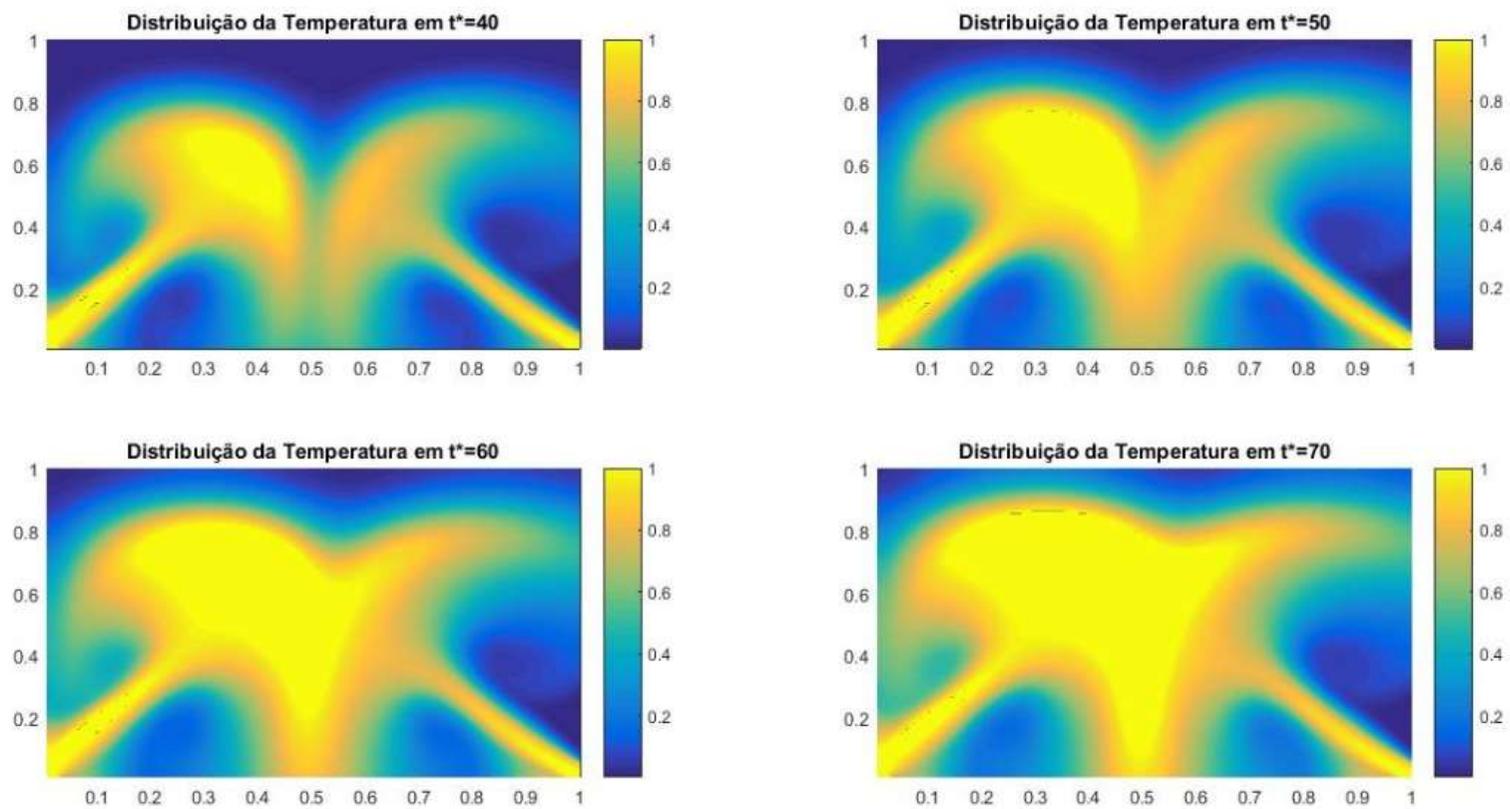


Figura 14 – Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=80$, $t^*=90$, $t^*=100$ e $t^*=110$

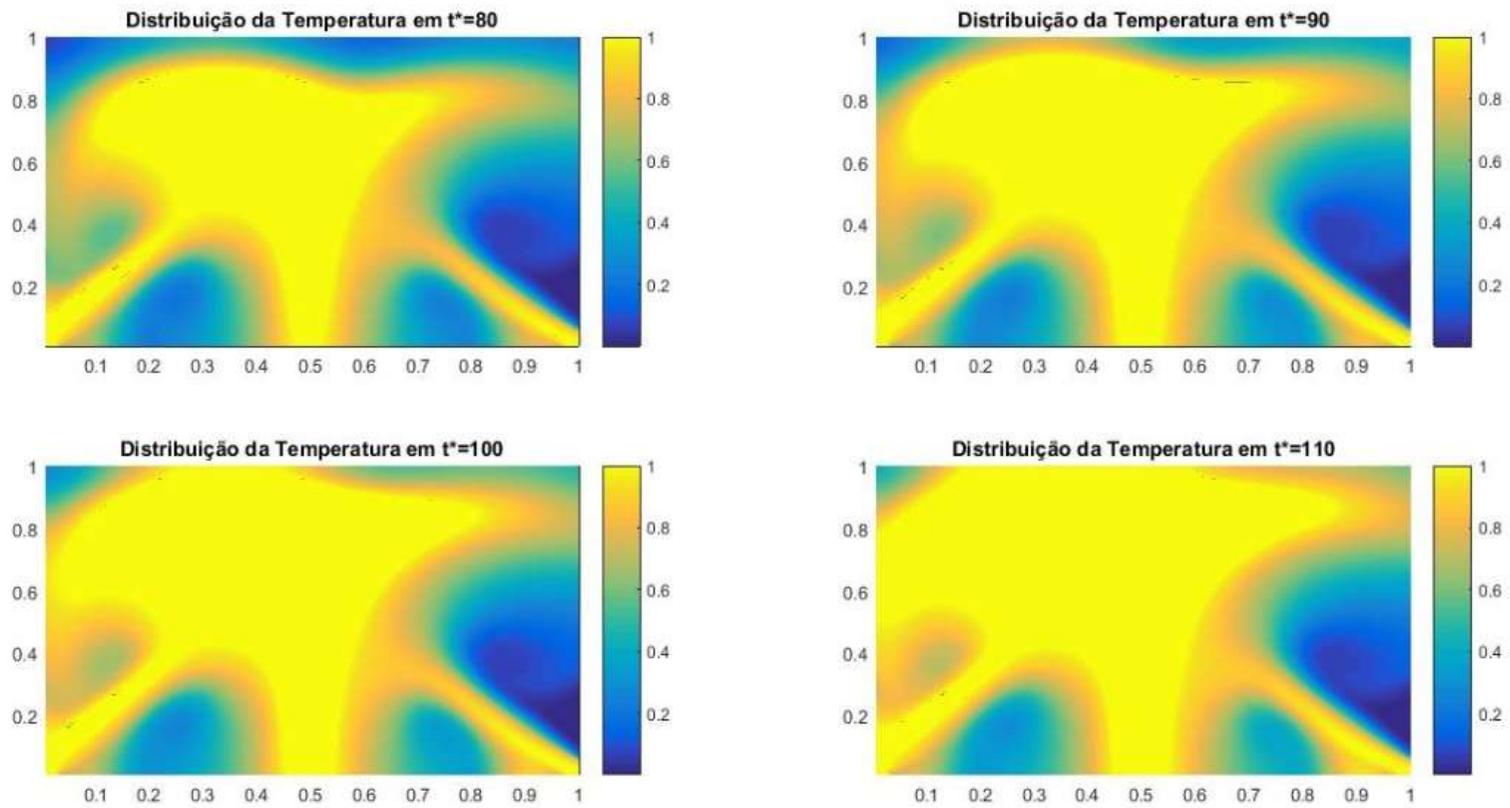


Figura 15 - Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=160$, $t^*=170$, $t^*=180$ e $t^*=190$

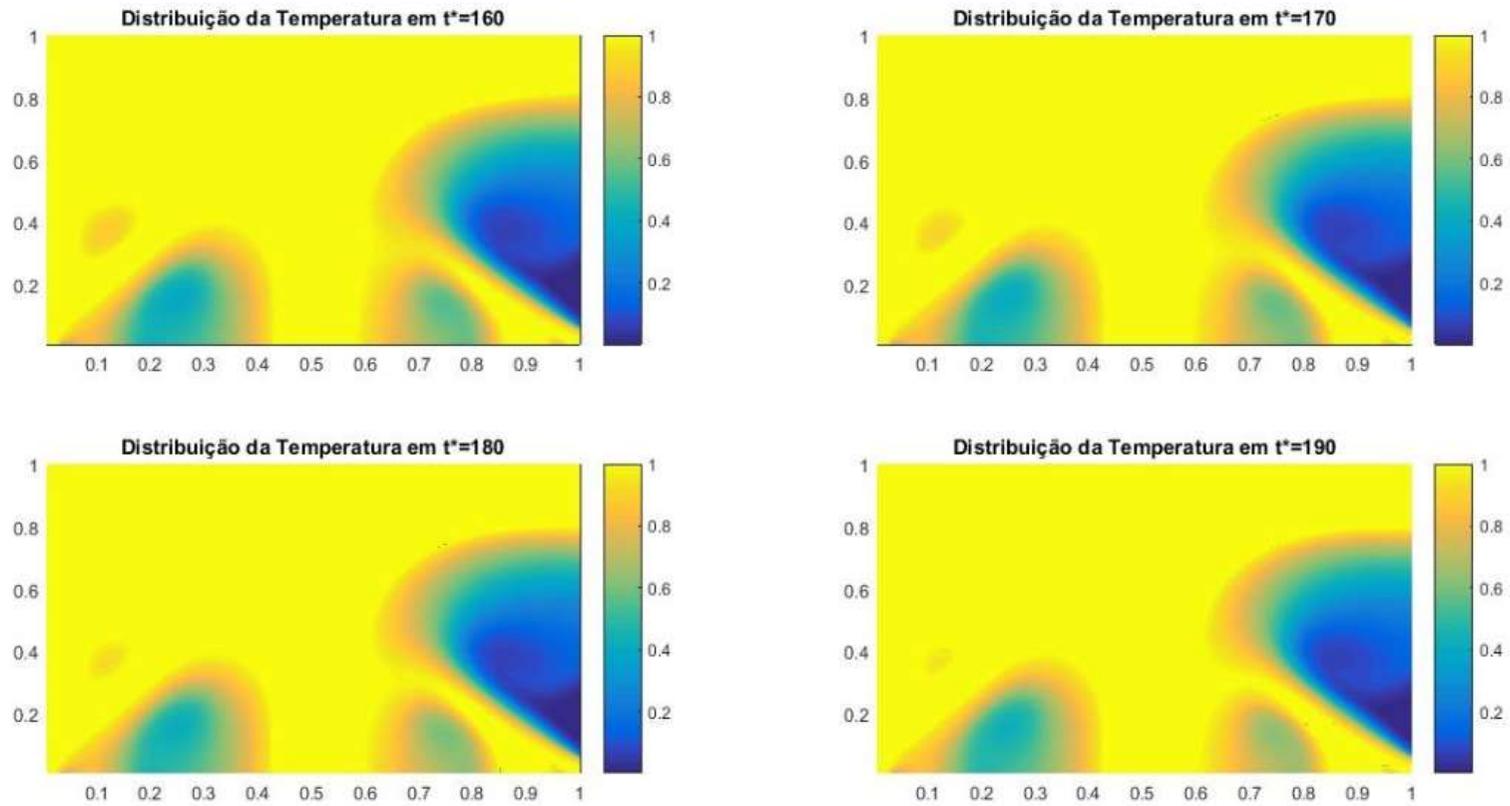


Figura 16 - Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=200$, $t^*=210$, $t^*=220$ e $t^*=230$

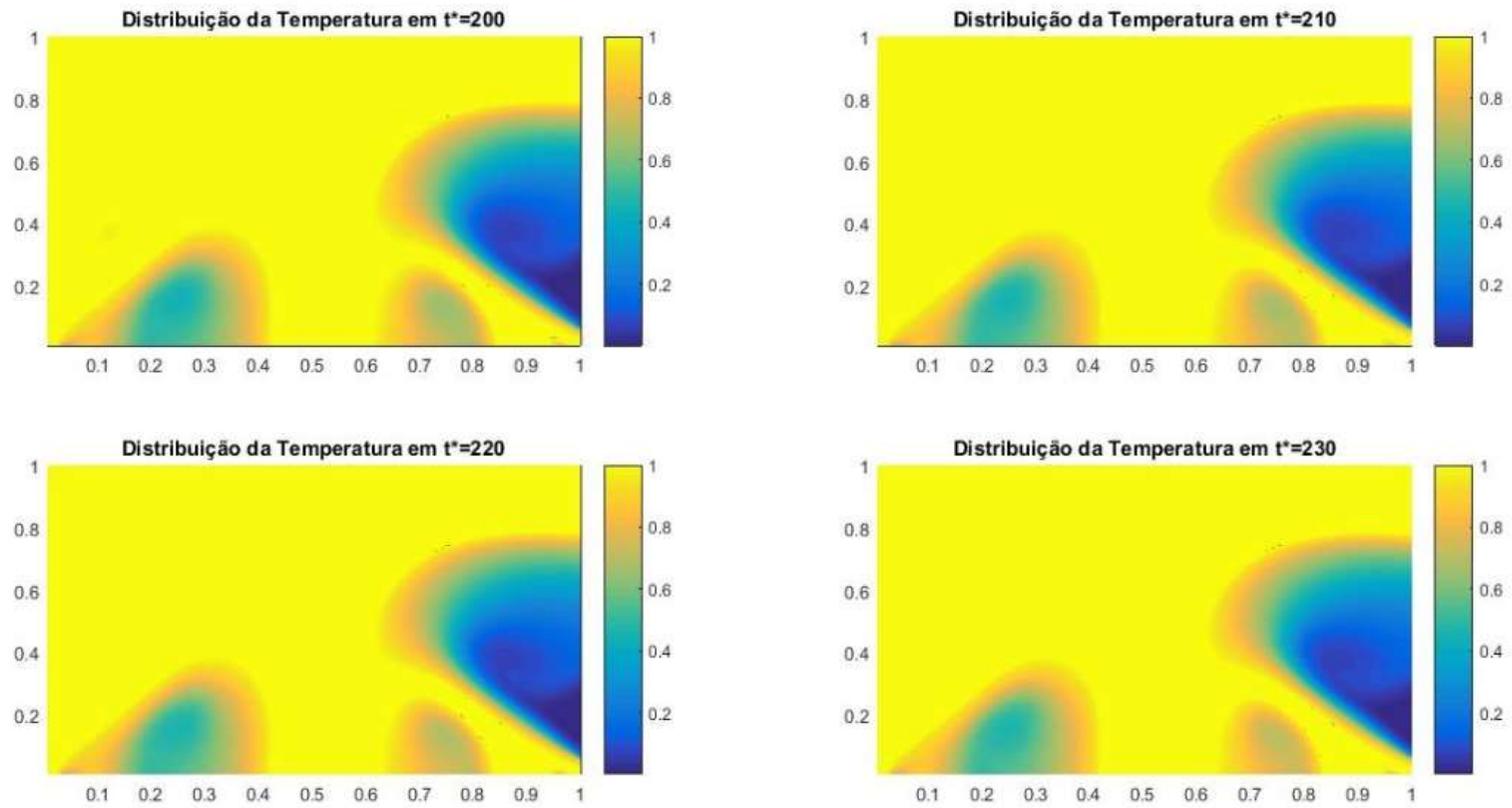


Figura 17 - Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=250$, $t^*=300$, $t^*=350$ e $t^*=400$

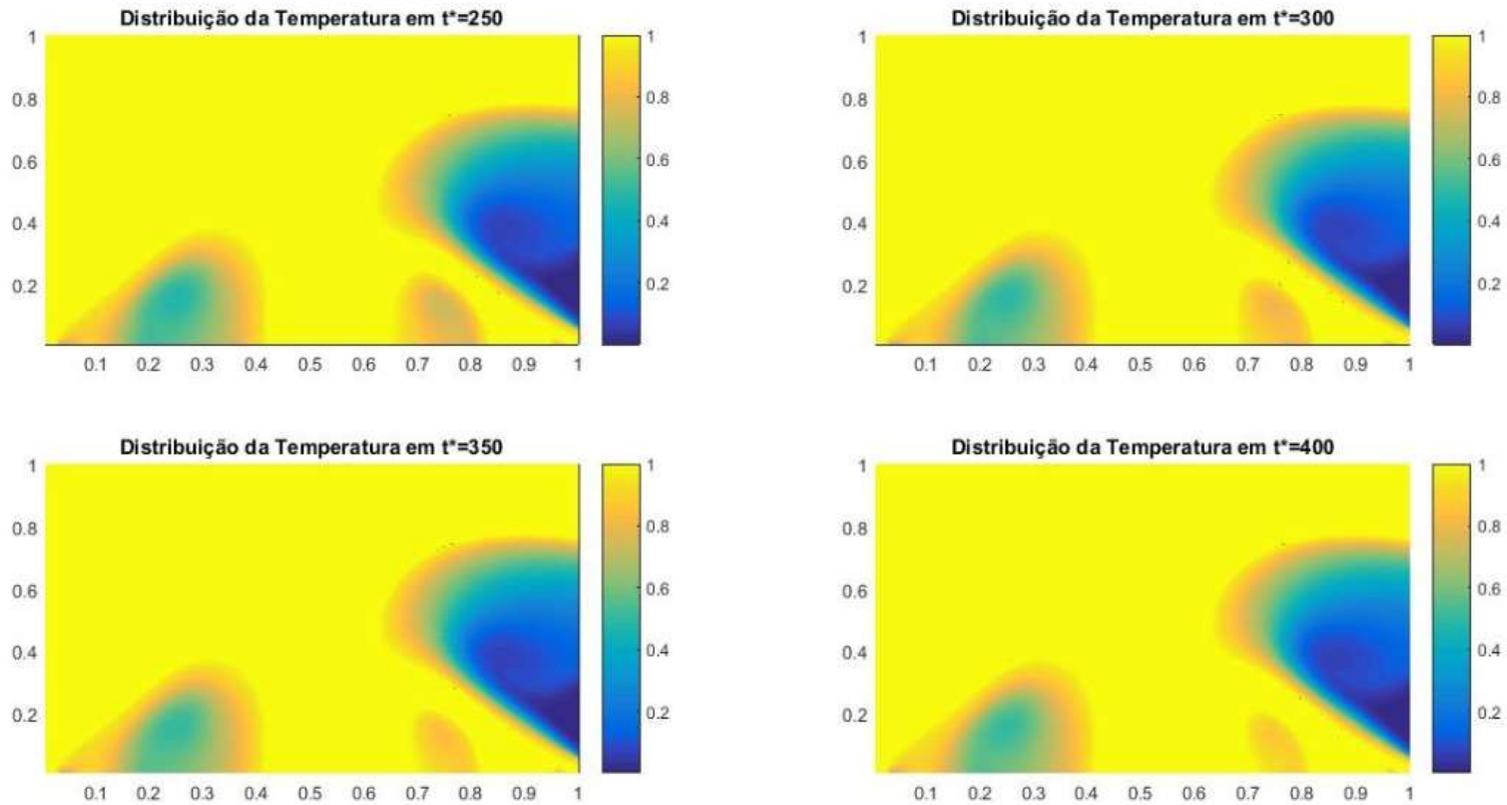


Figura 18 - Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=450$, $t^*=500$, $t^*=550$ e $t^*=600$

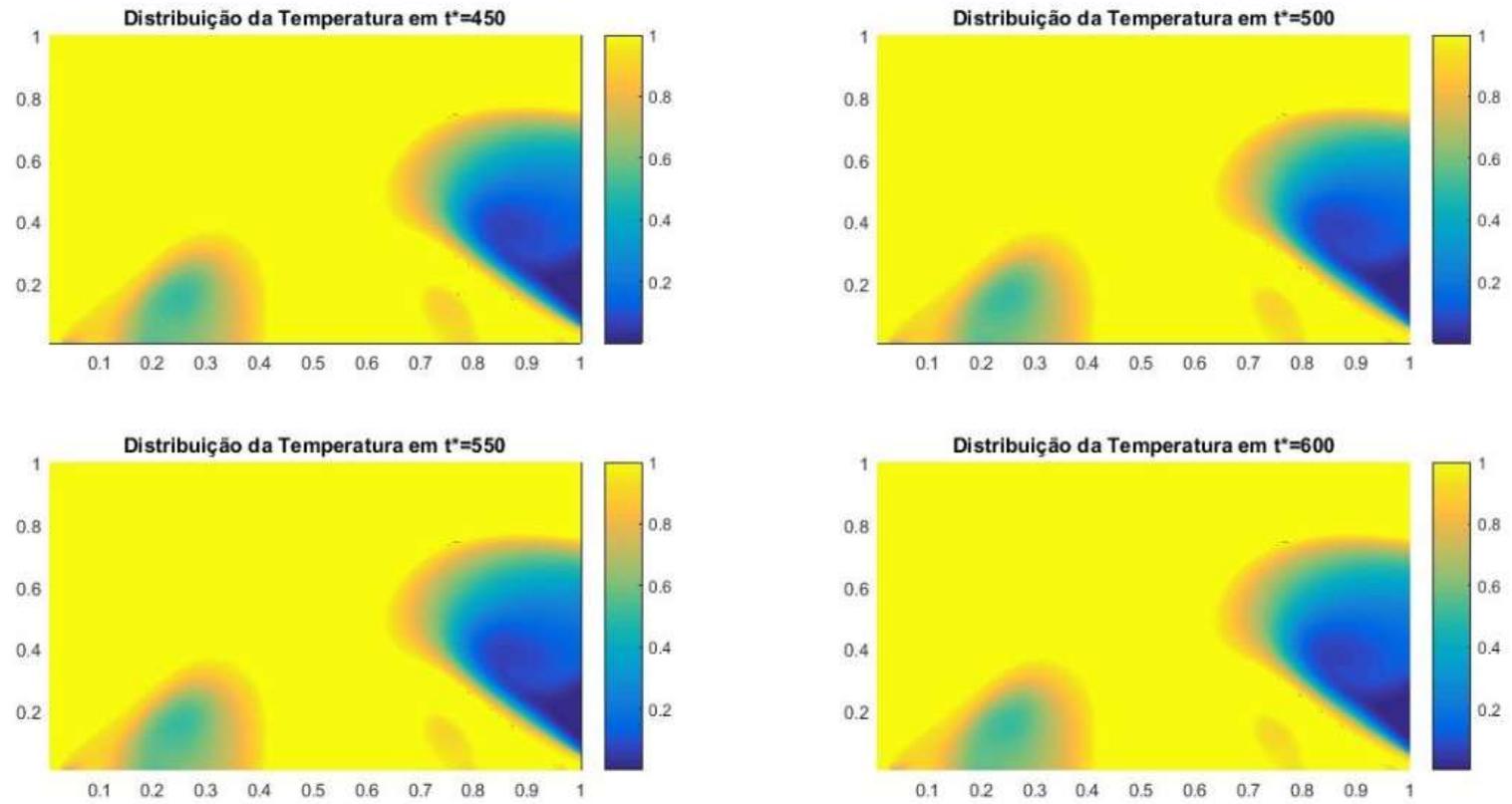


Figura 19 - Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=650$, $t^*=700$, $t^*=750$ e $t^*=800$

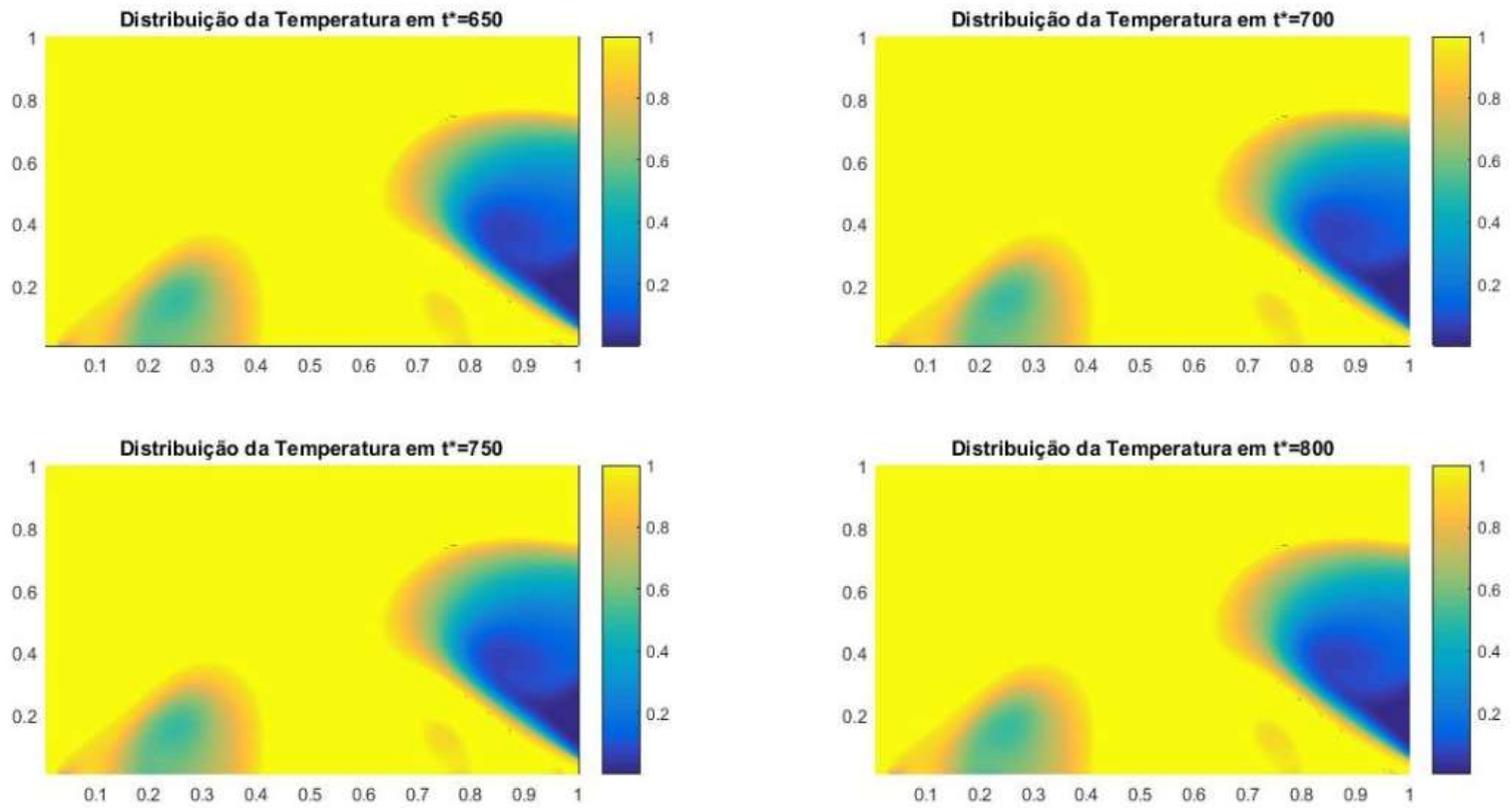
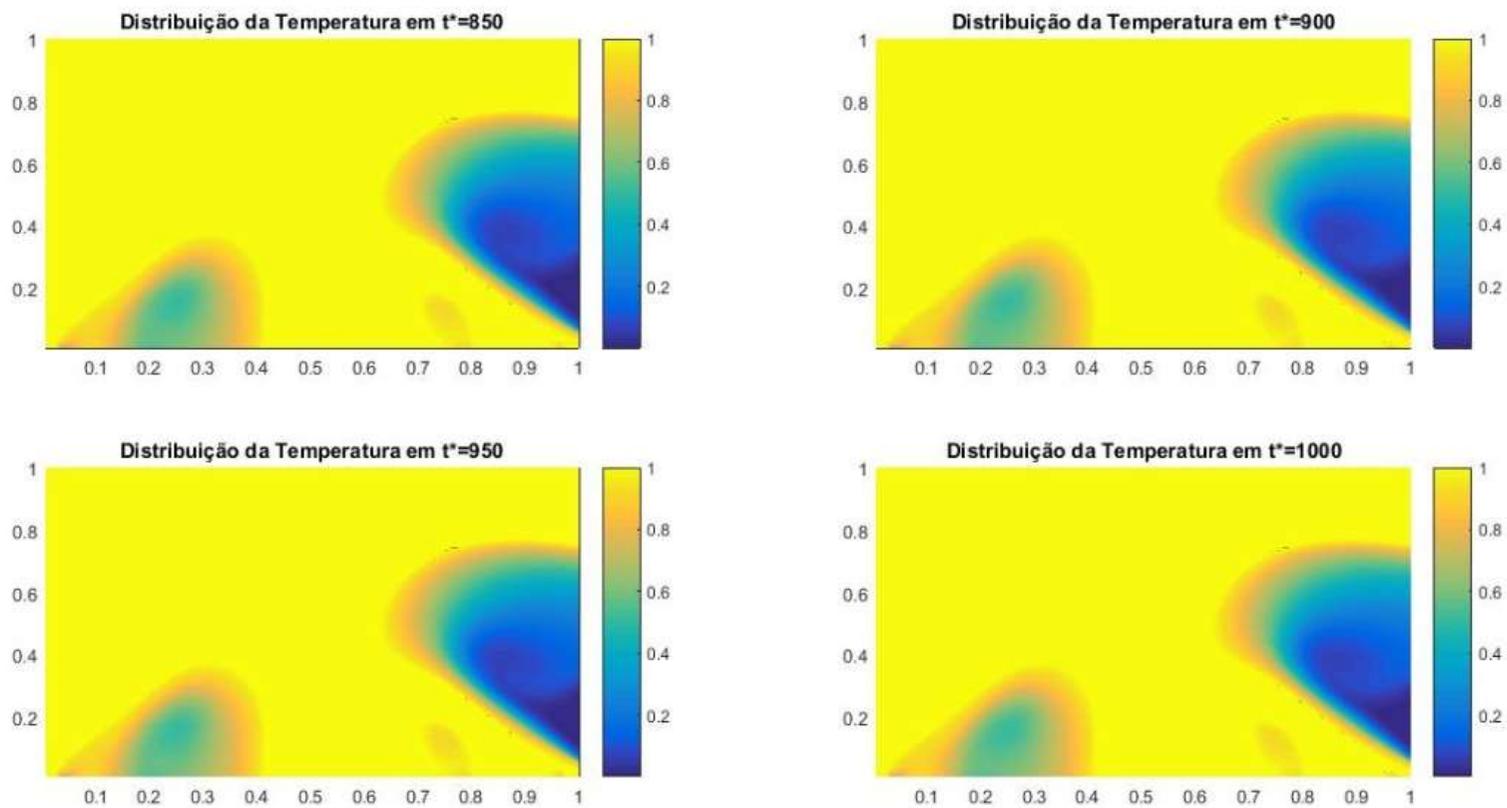


Figura 20 - Campo de temperatura no domínio para o tempo (adimensional) $t^*=850$, $t^*=900$, $t^*=950$ e $t^*=1000$



Fonte: Autor, 2020

Na simulação representada nestas figuras foi considerado a temperatura de valor igual a 1,0 (adimensional) nas cinco primeiras células da malha, isto é, para $i = 1$ até 5 e $i = I - 4$ até I , quando $j = 1$ e com $j = 1$ até 5 quando $i = 1$ e $i = I$, enquanto que nas demais células tem-se $U_{i,j}^0 = 0$. Foi observado a temperatura elevada na saída dos geradores de calor no início da simulação, ocorrendo paulatinamente a distribuição desta temperatura por todo o domínio. Foi observado ainda valores mais acentuados da temperatura nas posições em que o módulo do vetor velocidade é maior, o que tem relação direta com as linhas de fluxo, proporcionando aumento da convecção para estas regiões e também com os ambientes onde possuem isolamento térmico, onde retarda a dissipação de calor. Após passado algum tempo, o valor da temperatura se mantém nas saídas dos geradores de calor, visto que nesta posição sempre será com a temperatura máxima do domínio. Para simulações com tempos maiores, os valores das temperaturas entram praticamente em regime estacionário, não apresentando alterações significativas em relação ao apresentado para $t^*=1000$ (adimensional).

Isto sugere que o quantitativo de calor que passa pela saída dos geradores para manter a temperatura constante é aproximadamente igual à quantidade que é dissipada, principalmente nos locais que não possuem isolamento térmico.

Também foi possível perceber, que a distribuição da temperatura pelo domínio tende a alcançar o valor máximo do sistema principalmente nos locais que possuem as paredes com isolamento, ou seja, o local como um todo fica com a temperatura elevada e conseqüentemente com uma menor taxa de umidade relativa do ar.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como visto neste trabalho, foi analisado de forma matemática um ambiente industrial de pintura presente em uma metalúrgica. O objetivo foi verificar como se dava o fluxo de calor e conseqüente distribuição de temperatura, o que pode ter importância significativa para otimizar a queima de gás para regular o ponto de orvalho e, com isso, contribuir como ferramenta funcional para auxiliar em processos de pintura.

Foi possível perceber, por meio das simulações, que a temperatura no local fica elevada após o funcionamento dos geradores de calor, o que certamente leva a uma diminuição considerável da URA e, conseqüentemente, do ponto de orvalho, o que possibilita a realização da pintura industrial em condições ideais. Com a construção e representação ilustrativa de nosso método, conseguimos expressar o desempenho do sistema utilizado.

Além disso, foi possível definir a temperatura em cada ponto da malha do ambiente analisado, assim percebendo que os locais que não possuem paredes com isolamento térmico apresentam uma grande dissipação e com isso a temperatura nesses locais é menor, isso sugere que para um ambiente de pintura ideal, mais locais devem possuir isolamento.

Com as informações insuficientes presentes nos geradores, foi buscado a determinação dos dados inexistentes em normas regulamentadoras e conversões e princípios físicos, com isso foi alcançado o objetivo e descoberto qual é velocidade e a temperatura na saída dos dutos dos geradores, informações essenciais para o funcionamento do método em aplicações reais. Porém, nas simulações feitas, por facilidade, considerou-se apenas uma situação para os números adimensionais envolvidos nas equações. Simulações com outros números adimensionais podem ser feitas e em caso de aplicação em situação real, é possível calcular, com base nos dados fornecidos no equipamento, os respectivos valores desses números adimensionais.

Assim, ao término desse trabalho, foi possível mostrar que a matemática está presente e é importante nos ambientes industriais, visto que com o uso correto pode se tornar uma ferramenta respeitável para aumentar a produtividade e regular os gastos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGÊNCIA NACIONAL DE PETRÓLEO, GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS (ANP). Gás Natural. Disponível em: <http://www.anp.gov.br/gas-natural>. Acesso em 27 de outubro de 2020.

BARBOSA, J.C. Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado) Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo, 2001.

BARROS, T., MEDEIROS, F., DANTAS, M., Modelagem da catenária através de equações diferenciais ordinárias, JEPEX 2009 – Recife, PE

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M.S. Modelagem matemática e implicações no ensino aprendizagem de matemática. Blumenau: FURB, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. Modelagem Matemática No Ensino. São Paulo: Editora Contexto, 2005.

D'AMBROSIO, U. Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática. Campinas: Sannus, 1986.

MAGALHÃES, Paulo Marcelo Dias de. INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS. 2012. Disponível em: <http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap1.pdf>. Acesso em 14 de outubro de 2020.

NASCIMENTO, Joelma do Socorro Miranda do. Método das diferenças finitas: aplicação na equação do calor. 2013. f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá - AP, 2013.

OLIVEIRA, Laís Lima Silva de, CONCEIÇÃO, Elizeu de Jesus da, BARBOSA, Rodney Alves. Aprendendo matemática por meio da modelagem matemática aplicada a cultura do maracujá. 2015. Disponível em:

[https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/APREDENDO-MATEM% c3% 81TICA-POR-MEIO-DA-MODELAGEM-MATEM% c3% 81TICA-APLICADA-A-CULTURA-DO-MARACUJ% c3% 81.pdf](https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/APREDENDO-MATEM%c3%81TICA-POR-MEIO-DA-MODELAGEM-MATEM%c3%81TICA-APLICADA-A-CULTURA-DO-MARACUJ%c3%81.pdf). Acesso em 20 de outubro de 2020.

PETRY, Vitor J., WEBER, Pedro E. Simulação Numérica da Concentração de uma Substância Diluída em um Fluido com Fluxo em Torno de Obstáculos Sólidos. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017

SANCHES, Ionildo José, FURLAN, Diógenes Cogo. Métodos Numéricos. Universidade Federal do Paraná - Departamento de Informática, Curitiba, 2007.

SILVA, J.A., Estimativa de crescimento em altura de Leucena [Leucaena leucocephala (Lam.) de Wit.] por meio do Modelo ARIMA. Dissertação de Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada – UFRPE. Recife, 2008.

SODRÉ, Ulysses. Equações Diferenciais Parciais. 2003. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edp.pdf>. Acesso em 15 de outubro de 2020.