



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

LUCAS WURSTER CENDRON

NÚMEROS COMPLEXOS:
UM ESTUDO DE SUAS APLICAÇÕES

CHAPECÓ

2021

LUCAS WURSTER CENDRON

**NÚMEROS COMPLEXOS:
UM ESTUDO DE SUAS APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão do Curso de graduação
apresentado como requisito parcial para obtenção do grau
de Licenciado em Matemática da Universidade Federal
da Fronteira Sul.

Orientadora: Profa. Dra. Lucia Menoncini

CHAPECÓ

2021

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Cendron, Lucas Wurster
Números Complexos: Um estudo de suas aplicações /
Lucas Wurster Cendron. -- 2021.
52 f.:il.

Orientadora: Profa. Dra. Lucia Menoncini

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2021.

1. Matemática. 2. Números Complexos. 3. História dos
Números Complexos. 4. Aplicações dos Números Complexos.
I. Menoncini, Lucia, orient. II. Universidade Federal da
Fronteira Sul. III. Título.

LUCAS WURSTER CENDRON

NÚMEROS COMPLEXOS
UM ESTUDO DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso de graduação
apresentado como requisito parcial para obtenção do grau
de Licenciado em Matemática da Universidade Federal
da Fronteira Sul.

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi definido e aprovado pela banca em: 21/01/2021

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Lucia Menoncini – UFFS

Orientadora

Profa. Dra. Divane Marcon – UFFS

Prof. Me. Edson Ribeiro dos Santos – UFFS

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Kelly e Gilson e irmão Thiago, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o percurso.

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer como pessoa e formando.

Finalmente, aos professores, por todos os conselhos, pela ajuda e pela paciência com a qual guiaram o meu aprendizado, em especial à professora Lucia Menoncini, por ter sido um verdadeiro farol durante a minha navegação nas águas turvas do tema deste projeto. Grato por tudo.

*“Algo aqui não faz sentido. Vamos cutucar isso
com um graveto.”*

(Steven Moffat)

RESUMO

Com o advento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018, o ensino dos Números Complexos foi oficialmente removido do currículo das instituições de Educação Básica. O documento não menciona as razões para tal remoção, mas o que se observa nos materiais didáticos da Educação Básica, até então vigentes, é a ênfase nos aspectos teóricos e um grande vácuo no que tange à contextualização e à aplicabilidade desses números. Buscando minimizar este vácuo, o presente trabalho busca introduzir a história dos Números Complexos e apresentar suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, configurando-se como produto de consulta para estudantes e professores. Ademais, uma breve revisão dos conceitos e propriedades envolvidos foi elaborada para a compreensão das aplicações, de modo a evitar a necessidade de investigação externa. A partir do levantamento de materiais em diversas mídias, foram exploradas aplicações na Geometria Plana e Fractal, na Engenharia Elétrica, na Física e na Computação Gráfica, constatando-se que os Números Complexos tocam crucialmente diversos ramos da vida moderna e que seu estudo como mera curiosidade abstrata menospreza sua relevância.

Palavras-chave: Números Complexos. História dos Números Complexos. Aplicações dos Números Complexos.

ABSTRACT

With the advent of the National Common Curricular Base (BNCC) in 2018, the teaching of Complex Numbers was officially removed from the curriculum of Basic Education institutions. The document does not mention the reasons for such removal, but what is observed in Basic Education didactic materials is the emphasis on theoretical aspects and a great vacuum regarding the contextualization and applicability of these numbers. Seeking to minimize this vacuum, the present work aims, therefore, to study the history of the Complexes and to present their applications in several areas of knowledge, configuring itself as a consultation product for students and teachers. In addition, a brief conceptual review was designed to understand the applications, in order to avoid the need for external research. From the survey of materials in various medias, services in plane and fractal geometry, electrical engineering, physics and computer graphics were explored, realizing that Complex Numbers crucially touch various branches of modern life and that their study as mere abstract curiosity belittles its relevance.

Keywords: Complex Numbers. History of Complex Numbers. Applications of Complex Numbers.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.....	18
FIGURA 2 – O PLANO COMPLEXO.	19
FIGURA 3 – MÓDULO E ARGUMENTO.....	20
FIGURA 4 – SOMA DE NÚMEROS COMPLEXOS.	21
FIGURA 5 – SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS.	21
FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE $z \cdot i$	22
FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA 1.	24
FIGURA 8 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1.	25
FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA 2.	25
FIGURA 10 – IDENTIFICAÇÃO DOS VÉRTICES A, B, C, D COM NÚMEROS COMPLEXOS.	26
FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA 3.	27
FIGURA 12 – QUADRADO DE CENTRO E.	28
FIGURA 13 – CONJUNTO DE JULIA, $c = -1,25+0i$	31
FIGURA 14 – ALGUNS CONJUNTOS DE JULIA.	31
FIGURA 15 – CONJUNTO DE MANDELBROT CONTÉM OS CONJUNTOS DE JULIA.....	32
FIGURA 16 – REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DA FONTE DE TENSÃO ELÉTRICA.	33
FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DE UM RESISTOR.	34
FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DE UM CAPACITOR.	34
FIGURA 19 – REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DE UM INDUTOR.	34
FIGURA 20 – CIRCUITO RL SÉRIE.	35
FIGURA 21 – CIRCUITO RC PARALELO.	37
FIGURA 22 – CIRCUITO RLC SÉRIE.	38
FIGURA 23 – A FR DE F1 E F2 NO PLANO COMPLEXO.....	40
FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA 8.	41
FIGURA 25 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA 8.	42
FIGURA 26 – UMA VISUALIZAÇÃO DO CONJUNTO DOS QUATÉRNIOS.	43
FIGURA 27 – ROTAÇÃO DO PONTO (10, 0, 0) EM TORNO DE Z.	45
FIGURA 28 – ROTAÇÃO DE (-10, 0, 0) EM TORNO DE Y.	47

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 PERCURSO METODOLÓGICO	12
3 UMA BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	14
4 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	18
4.1 NÚMERO COMPLEXO.....	18
4.1.1 Forma Algébrica.....	18
4.2 PLANO COMPLEXO.....	19
4.2.1 Forma Trigonométrica.....	20
4.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES.....	20
5 APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS	23
5.1 GEOMETRIA PLANA	23
5.2 FRACTAIS.....	29
5.3 ENGENHARIA ELÉTRICA.....	32
5.4 FÍSICA	39
5.5 COMPUTAÇÃO GRÁFICA (QUATÉRNIOS)	43
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que prevê o conjunto progressivo de aprendizagens essenciais que alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, homologado no ano de 2018.

Com o advento e a implementação da BNCC, professores e pesquisadores de todo o país vêm prestando-se a debater e analisar os conteúdos escolhidos para a formulação inicial dos currículos das redes escolares, bem como as competências e habilidades previstas no documento. Para Young (2014), não há questão educacional mais crucial que o currículo, postulando a necessidade que os teóricos se debrucem sobre como desenvolver currículos que ampliem, e não somente reproduzam, as oportunidades de aprendizagem. Diante disso, a ausência de certos domínios do conhecimento matemático na BNCC, em particular para a etapa do Ensino Médio, torna-se um grande tópico de contestação e discussão por parte de pesquisadores e educadores.

Os Números Complexos¹, objeto de estudo essencial a diferentes campos da Matemática e demais áreas do conhecimento, é um destes domínios não contemplados na BNCC. As razões para a ausência deste tema não são explicitadas no documento, nem em versões preliminares que o discutiram. Entretanto, podem estar associadas ao fato de que o tema se propunha essencialmente a um estudo teórico, sem contemplar questões voltadas às aplicações, como se observa em livros didáticos. Nestes materiais, os Números Complexos são introduzidos por meio de definições e propriedades e praticamente não há menções sobre sua aplicabilidade. Ademais, os aspectos históricos são usados como anedota, biografando matemáticos famosos como Cardano, Euler e Gauss que aparecem em destaque.

Analisando trabalhos apresentados e publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) também se evidenciou um hiato de produções nacionais que reúnem as aplicabilidades dos Complexos para consulta imediata. Dos trabalhos apresentados no ENEM entre os anos de 1987 a 2016, somente as publicações de Silva (2001) e Vidal *et al.* (2016) trouxeram discussões sobre o eixo aplicado ou o eixo histórico dos Números Complexos. Silva (2001) apresenta um breve resumo da Teoria dos Quatérnios. Um campo de estudo que vem sendo utilizado na Computação Gráfica pelo fato de diminuir custos e aumentar a eficiência dos algoritmos de rotação em três dimensões. Vidal *et al.* (2016) verifica a presença do contexto histórico dos Números Complexos em alguns livros didáticos do Ensino Médio para refletir

¹ Ao longo do trabalho, poderá ser utilizada a expressão Complexos para se referir a Números Complexos.

sobre o quanto estas obras valorizam a História da Matemática enquanto ferramenta útil na aprendizagem. Neste último, constatou-se a tendência predominante de abordagem dos aspectos teóricos dos Números Complexos em detrimento das aplicações.

Diante da escassez de estudos que versam sobre a aplicabilidade dos Números complexos, indagamo-nos: Como os Números Complexos podem ser aplicados em situações-problemas em diferentes áreas do conhecimento? Esta pesquisa procura, então, responder essa pergunta ao investigar a aplicabilidade dos Complexos, explorando as questões históricas que motivaram sua criação/descoberta e os teoremas associados a seu proveito empírico e experimental.

Para isso, o percurso metodológico adotado no trabalho parte de uma pesquisa bibliográfica e tem como objetivo contemplar e explicitar a aplicabilidade dos Números Complexos. Encontramos na literatura materiais de diferentes áreas do conhecimento que sinalizavam tais aplicações e a partir destes, buscamos desenvolver alguns aspectos teóricos com intuito de proporcionar ao leitor melhor compreensão acerca da forma como os Números Complexos estavam sendo aplicados.

Quanto à estrutura do trabalho, ele foi dividido em seis capítulos. O primeiro compreende a Introdução. O segundo capítulo versa sobre a metodologia adotada na pesquisa. O capítulo três relata brevemente a rica história dos Números Complexos, de sua descoberta no século XVI até a modernidade. A importância deste capítulo se dá por entendermos que todo conhecimento científico deve estar vinculado à história do seu desenvolvimento e que se compreenda que ele é construído ao longo do tempo, pelas mãos de inúmeros estudiosos. O capítulo quatro fornece definições e propriedades atreladas às aplicações que são discutidas no capítulo posterior. Não pretendemos provar ou aprofundar tais definições e propriedades, apenas incorporá-los ao trabalho de modo a sinalizar a relação teoria e prática. O quinto capítulo, foco deste estudo, explora as aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana e Fractal, na Engenharia Elétrica, na Física e na Computação Gráfica. Já no capítulo seis estão contempladas as considerações finais desta produção.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Esta pesquisa insere-se numa perspectiva exploratória do tipo produto, por contemplar e explicitar a aplicabilidade dos Números Complexos.

Pesquisas deste tipo têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o assunto, visando o aprimoramento de ideias. Assim, seu planejamento é bastante flexível e envolve levantamento bibliográfico na maioria dos casos (GIL, 2008). Neste sentido, a pesquisa bibliográfica

[...] busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica. Para tanto, é de suma importância que o pesquisador realize um planejamento sistemático do processo de pesquisa, compreendendo desde a definição temática, passando pela construção lógica do trabalho até a decisão da sua forma de comunicação e divulgação (BOCCATO, 2006, p. 266).

Sendo assim, é no esforço de descobrir o que já foi produzido cientificamente em uma determinada área do conhecimento que a pesquisa bibliográfica assume importância fundamental, impulsionando o aprendizado, o amadurecimento, os avanços e as novas descobertas nas diferentes áreas do conhecimento.

Diante da gama de aplicabilidades dos Números Complexos, Gil (2008) afirma, ainda, que a pesquisa bibliográfica permite uma cobertura muito ampla de fenômenos, o que é particularmente vantajoso a este trabalho uma vez que os dados disponíveis se encontram dispersos por diferentes mídias.

Esta pesquisa foi, então, realizada com base nas oito fases da pesquisa bibliográfica percebidas por Lakatos e Marconi (2003).

a) escolha do tema;

A partir de inclinação pessoal e investigação dos trabalhos sobre Números Complexos do ENEM, garantindo o caráter inovador do estudo.

b) Elaboração do plano de trabalho;

O projeto de pesquisa contemplava o cronograma com as atividades e datas a serem desenvolvidas para alcançar o objetivo deste estudo.

c) Identificação

A partir da indicação de livros e artigos pertinentes aos Números Complexos, verificando a relevância à pesquisa a partir do título, sumário e resumo.

d) Localização

A localização das obras foi realizada na biblioteca da UFFS, Biblioteca Virtual SciELO, Banco de Teses CAPES e ResearchGate, procurando-se pelas palavras-chave: Números Complexos, Aplicações, História da Matemática, Números Imaginários, Quatérnios.

e) Compilação

Feita principalmente a partir de meios digitais para nortear o estudo das aplicações. Dezoito artigos, quatro monografias, seis dissertações e duas teses salvas via *download*, cinco livros físicos coletados.

f) Fichamento

Os títulos foram classificados nas categorias:

- Material Histórico, contemplando a história dos Números Complexos;
- Material Teórico, contemplando as propriedades matemáticas dos Complexos;
- Material Aplicado, contemplando as aplicações diretas encontradas. Estes foram subdivididos conforme a área do conhecimento:
 - Geometria Plana;
 - Geometria Fractal;
 - Engenharia Elétrica;
 - Física;
 - Quatérnios.

g) Análise e Interpretação

Averiguação dos resultados e valor oferecido ao tema pesquisado. Seleção de aplicações e questões-problema.

h) Redação

Composição deste trabalho.

3 UMA BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Quando pequenos, temos certeza absoluta de que as melhores histórias começam com *Era uma vez*. Quando adultos, sabemos que boas histórias advêm de qualquer início.

Esta aqui, começa com a descoberta de um papiro datado ao Egito Antigo (3100 a.C. – 30 a.C.) que sugeria que esta civilização era muito mais matematicamente avançada do que se pensava. A escrita apresentava um exemplo numérico de como calcular o volume V de um tronco de pirâmide quadrada, sugerindo enfaticamente que os antigos egípcios conheciam a fórmula

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2),$$

na qual a e b são as medidas das arestas dos quadrados e h é a altura.

Incrível! Um problema, porém, atormentava os matemáticos da época. As medidas a e b eram facilmente mesuráveis, mas numa pirâmide sólida, medir h era quase impossível.

Uma solução só veio a ser encontrada no século I por Heron da Alexandria (10 d.C. – 80 d.C.) que mostrou que

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

sendo c a medida da altura de uma das faces triangulares da pirâmide quadrada.

O momento de glória de Heron foi curto, entretanto. Usando $a = 28$, $b = 4$ e $c = 15$, ele tropeçou no mistério matemático que só seria levado a sério nos próximos 1500 anos:

$$h = \sqrt{15^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 2(12)^2} = \sqrt{225 - 288} = \sqrt{-63}$$

Este é o primeiro registro conhecido de raiz quadrada de um número negativo (NAHIN, 1998).

Embora alguns matemáticos, como Diofanto de Alexandria (nascido entre 201 e 214 e falecido entre 284 e 298), tenham flertado com a ideia, com o passar dos séculos o consenso era de que tal operação era simplesmente absurda. Contudo, isso mudou com o costume dos duelos matemáticos, uma prática comum na Europa do século XVI, que alimentava o ego de professores pretensiosos (WOO, 2015).

Os duelos funcionavam basicamente assim: caso mais de um acadêmico se candidatasse à ternura em universidades prestigiadas, eles competiam pela vaga. Cada candidato apresentava aos demais problemas a serem resolvidos. A lógica era: quem resolvesse mais problemas

deveria ser o melhor matemático e, portanto, merecedor da posição. Esta prática levou muitos matemáticos da época a esconderem suas descobertas, uma vez que deste modo poderiam apresentar problemas de respostas conhecidas somente por si mesmos a seus competidores.

Um destes duelos iniciou-se por volta de 1510, quando um matemático italiano chamado Scipione del Ferro (1465 – 1526), motivado por problemas geométricos, encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com p e q positivos, mas morreu sem publicar sua descoberta. Seu pupilo, Antonio Maria Fior (século XV — século XVI) foi um dos poucos privilegiados com o conhecimento da fórmula. Armado deste conhecimento, em 1535 Fior desafia Niccollo Fontana (1500 – 1557), matemático que vinha ganhando renome no país. Fontana, hoje conhecido como Tartaglia (*aquele que gagueja*), temendo ser desafiado com equações cúbicas, debruçou-se sobre o problema, encontrando não só a fórmula de del Ferro, como também uma solução para equações da forma $x^3 + px = q$ horas antes do início do duelo (NAHIN, 1998).

Enquanto Fior não conseguiu resolver nenhum dos 30 problemas propostos por Tartaglia, este resolveu todos os 30 de Fior.

Atento a este desenvolvimento, Girolamo Cardano (1501-1576), prolífico polímata que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, arrancou de Tartaglia a fórmula, mas não sua demonstração, e jurou silêncio absoluto sobre o tema (EVES, 2004).

Cardano acabou demonstrando a fórmula ele mesmo e publicando a descoberta em 1545 em *Ars Magna* (*A grande arte*) recebendo o reconhecimento histórico do que ficaria conhecida como a Fórmula de Cardano. Assim, partindo da equação

$$x^3 + mx = n$$

da identidade

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$$

e considerando

$$3ab = m$$

e

$$a^3 - b^3 = n$$

então x é dado por $a - b$. Resolvendo para a e b o sistema formado pelas duas últimas equações obtém-se a referida fórmula:

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

$$b = \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

e assim x fica determinado (ROQUE, 2012).

Diante destas expressões, aparece uma dificuldade. Para a equação $x^3 = 15x + 4$, por exemplo, o resultado seria $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 209), “Cardano sabia que não existe raiz quadrada de número negativo, e no entanto, ele sabia que $x = 4$ é uma raiz. Não conseguiu entender como sua regra faria sentido em tal situação”, sendo Rafael Bombelli (1526 – 1572), o primeiro a tentar dar sentido a este resultado.

O século XVII foi o palco de uma verdadeira explosão na matemática: o estudo da geometria pura cede espaço para o estudo de outras geometrias; a aritmética se enriquece com numerosos resultados e a sua transição para a álgebra é facilitada pelo estudo de fórmulas válidas para números arbitrários e pela pesquisa de soluções gerais, trazendo como resultado a valorização da linguagem simbólica trabalhada por François Viète (1540 – 1603). Aqui, destaca-se o trabalho desenvolvido por René Descartes (1596 – 1650) e John Wallis (1616 – 1703). Descartes cunhou o termo *números imaginários* ao afirmar que raízes quadradas de números negativos representavam impossibilidades geométricas.

Um século se passaria até que a representação dos Números Complexos no plano tomasse forma, mas Wallis chegou muito perto, tropeçando na ideia de que a manifestação geométrica dos números imaginários seria um movimento *vertical* em relação aos números reais (NAHIN, 1998), o que poderia ser uma sinalização da ideia do plano de Argand-Gauss.

Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Leonhard Euler (1707 – 1783) no século XVIII. Dentre suas inúmeras contribuições destaca-se o uso da letra i substituindo $\sqrt{-1}$. Ele ainda passou a estudar números da forma $z = a + bi$ em que a e b são reais. Estes, receberam o nome de Números Complexos.

Utilizando a escrita dos Números Complexos em sua forma polar

$$z = p(\cos\theta + i\sin\theta)$$

e a fórmula de Moivre,

$$z^n = p^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Euler demonstra a identidade

$$e^{i\pi} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Além disso, mostrou que as soluções de $z^n = w$ são Complexos da forma

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Com isso, os matemáticos da época passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Vários estudiosos tentaram provar esta conjectura e Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1784) publicou, em 1746, algo que considerou uma prova deste fato. Entretanto, um jovem matemático mostrou que tal prova era insatisfatória e ilusória e apresentou uma demonstração correta. Este matemático foi Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Aos 21 anos, em 1799, Gauss apresentou o que ainda hoje é considerada a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos (BOYER, 2012). Nela está a prova do Teorema Fundamental da Álgebra, cuja denominação foi dada pelo próprio Gauss. Esse teorema afirma que **toda equação polinomial de coeficientes complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa. Ademais, toda equação de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas.**

Este teorema alterou completamente o modo como eram trabalhados os polinômios e as funções de grau n , derivando-se daí, inúmeras aplicações nas ciências, com destaque para a Física, Computação e Engenharia.

4 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

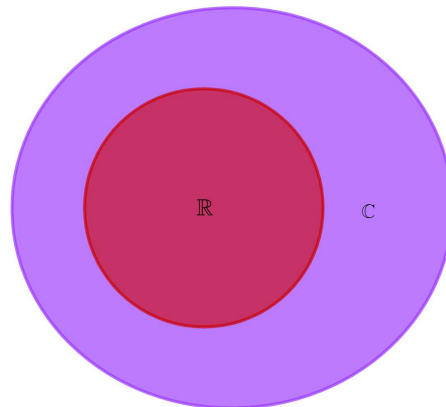
Para o pleno aproveitamento deste material, ficam expostos aqui, conceitos relevantes utilizados nas aplicações dos Números Complexos estudadas e que subsidiam uma melhor compreensão destas.

4.1 NÚMERO COMPLEXO

O conjunto dos Números Complexos, denotado por $\mathbb{C}$, é composto por todos os números da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Neste conjunto estão definidas as operações de igualdade, adição, multiplicação e divisão.

Pode-se dizer que o conjunto dos Complexos estende os Números Reais, não sendo, porém, um conjunto ordenado.

Figura 1 – O conjunto dos Números Complexos.



Fonte: Autor.

4.1.1 Forma algébrica de um número complexo

Todo número complexo z pode ser escrito na forma algébrica

$$z = a + bi$$

em que:

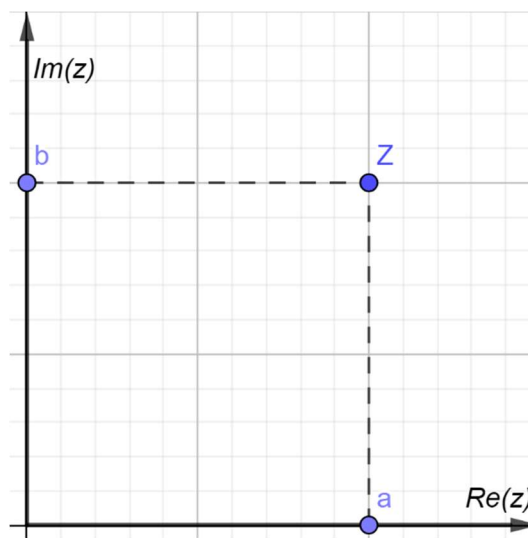
$$Re(z) = a \rightarrow \text{Parte real de } z.$$

$$Im(z) = b \rightarrow \text{Parte imaginária de } z.$$

4.2 PLANO COMPLEXO

O Plano Complexo, também chamado de Plano de Argand-Gauss, é uma representação geométrica do conjunto dos números complexos. Um número complexo $z = a + bi$ também pode ser escrito como par ordenado $z = (a, b)$, o que facilita a sua representação no plano complexo. Nele, a parte real de um Número Complexo é representada pela reta das abscissas e a parte imaginária pela reta das ordenadas.

Figura 2 – O plano complexo.



Fonte: Autor

Módulo: Seja $z \in \mathbb{C}$. Denota-se, a partir do Teorema de Pitágoras, o módulo do número complexo z como:

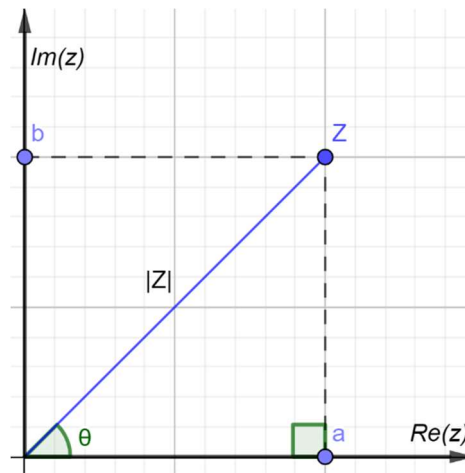
$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento: É o ângulo entre o eixo Ox e o segmento $\overline{OZ}$, representado por θ .

A Figura 3 contém a representação gráfica do módulo de z e do argumento θ .

Figura 3 – Módulo e Argumento



Fonte: Autor

4.2.1 Forma Trigonométrica

A representação trigonométrica de um complexo z é dada por

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

sendo θ o argumento de z . De fato, pode-se escrever a e b em função de θ e $|z|$ utilizando a trigonometria no triângulo retângulo:

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\theta$$

Daí, substituindo na forma algébrica de z , chega-se:

$$z = |z|\cos\theta + |z|\sin(\theta)i$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

4.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES

Soma: Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, define-se a soma $z_1 + z_2$ como:

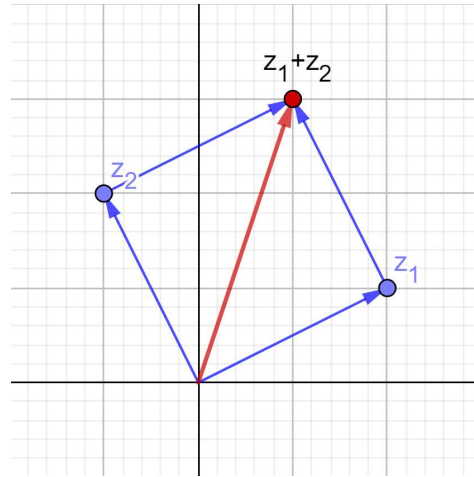
$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

Geometricamente, a soma de dois números complexos é representada pela diagonal do paralelogramo construído sobre os números dados. Para exemplificar, considere $z_1 = -1 + 2i$ e $z_2 = 2 + i$. Tem-se a soma:

$$z_1 + z_2 = 1 + 3i.$$

Graficamente, tem-se:

Figura 4 – Soma de Números Complexos.



Fonte: Autor

Subtração: Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, define-se a subtração $z_1 - z_2$ como:

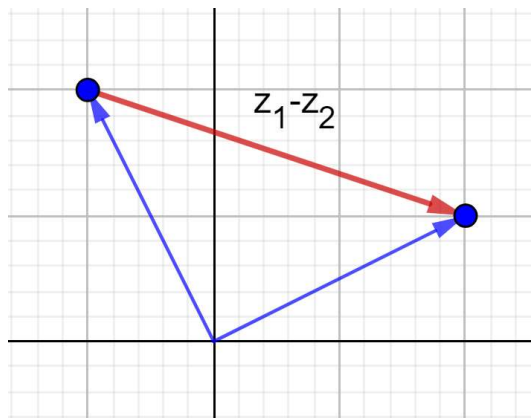
$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$$

Geometricamente, a diferença entre dois números complexos z_1, z_2 é representada por $\overrightarrow{z_1 z_2}$. Tomando como exemplo os mesmos números $z_1 = -1 + 2i$ e $z_2 = 2 + i$, tem-se que a diferença:

$$z_1 - z_2 = -3 + i.$$

A Figura 5 mostra a representação de $\overrightarrow{z_1 z_2} = z_1 - z_2$.

Figura 5 – Subtração de Números Complexos.



Fonte: Autor

Produto: Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, define-se a multiplicação $z_1 \cdot z_2$ como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \quad (i^2 = -1)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd$$

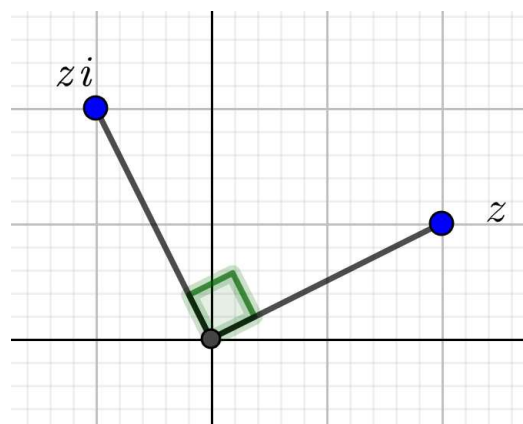
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Geometricamente, multiplicar um número complexo z por i implica em uma rotação de 90° em torno da origem, no sentido anti-horário. Considere $z = a + bi$. Multiplicando z por i , tem-se:

$$z \cdot i = (a + bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$$

A Figura 6 traz a representação de z e de $z \cdot i$.

Figura 6 – Representação geométrica de $z \cdot i$.



Fonte: Autor

Conjugado: Seja $z \in \mathbb{C}$. Denota-se o conjugado por $\bar{z} = a - bi$.

Divisão: Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$. A divisão é dada por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} + \frac{c - di}{c - di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 - (di)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac - bd) + (ad + bc)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

5 APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os Números Complexos possuem diversas aplicações tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Associados a outros conteúdos matemáticos, promovem técnicas alternativas de demonstração e resolução de problemas, resgatando conceitos e atribuindo a estes, significados.

Há áreas do conhecimento em que são considerados essenciais e outras em que são importantes facilitadores de cálculos. Conforme Motta (1999, p. 5), “os Números Complexos desempenham um papel sumamente importante nos mais diversos ramos da Matemática e, através destes, em muitas das aplicações a outras áreas do conhecimento”.

Mediante revisão bibliográfica, apresentam-se algumas aplicações dos Complexos na Geometria Plana, Geometria Fractal, Engenharia Elétrica, Física e na Computação Gráfica através dos quatérnios.

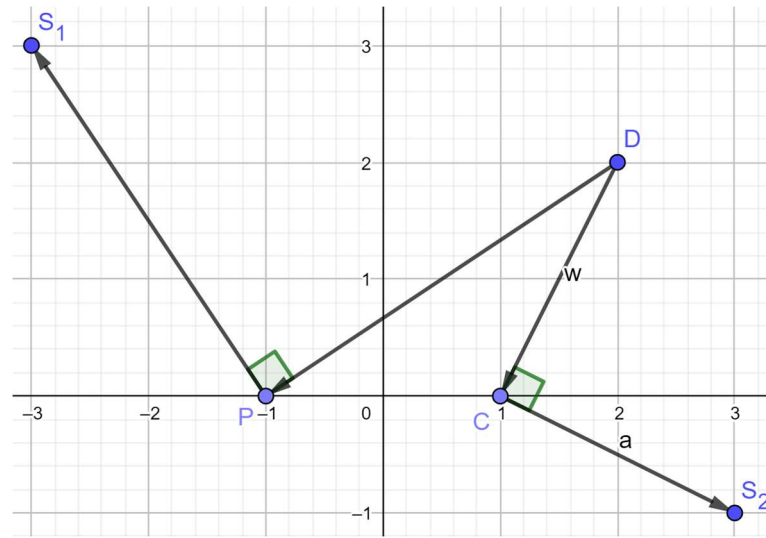
5.1 GEOMETRIA PLANA

Através do uso do plano de Argand-Gauss e da descrição de rotações em $\mathbb{C}$, podemos encontrar diversas aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana.

As representações geométricas dos problemas a seguir foram esboçadas no *software* GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>).

Problema 1 (Adaptado de ZINGA, 2018, p. 34): Um tesouro está escondido numa ilha. Nessa ilha, existem apenas duas árvores: uma palmeira P e um coqueiro C , conforme a Figura 7. Partindo do ponto D em que desembarcar, conte os seus passos com muito cuidado. Quando chegar à palmeira, vire 90 graus à direita e caminhe, sempre em linha reta, exatamente o mesmo número de passos que tinha dado do ponto de desembarque até a palmeira. Enterre aí uma estaca S_1 . Volte ao ponto de desembarque, caminhe na direção do coqueiro, conte os seus passos, vire 90 graus à esquerda e caminhe exatamente o mesmo número de passos que tinha dado desde o ponto de desembarque até ao coqueiro. Enterre aí a segunda estaca S_2 . O tesouro está escondido a meio caminho entre as estacas S_1 e S_2 . Quais são as coordenadas do tesouro?

Figura 7 – Representação geométrica do Problema 1.



Fonte: Autor

Solução: Queremos encontrar as coordenadas do tesouro. Tome o ponto de desembarque como

$$D = a + bi$$

O ponto onde a primeira estaca é colocada é dado por S_1 . Observe que o segmento $\overline{PS_1}$ é obtido de $\overline{PD}$ por uma rotação de 90° no sentido anti-horário, ou seja, $\overline{PS_1} = i \cdot \overline{PD}$. Como

$$\overline{PD} = D - P = (a + bi) - (-1) = (1 + a) + bi,$$

tem-se

$$\overline{PS_1} = i \cdot \overline{PD} = i[(1 + a) + bi] = -b + (1 + a)i.$$

O ponto onde a segunda estaca é colocada é dado por S_2 . Observe que $\overline{CS_2}$ é obtido de $\overline{CD}$ por uma rotação de 90° no sentido horário, ou seja, $\overline{CS_2} = -i \cdot \overline{CD}$. Como

$$\overline{CD} = D - C = (a + bi) - 1 = (a - 1) + bi,$$

temos

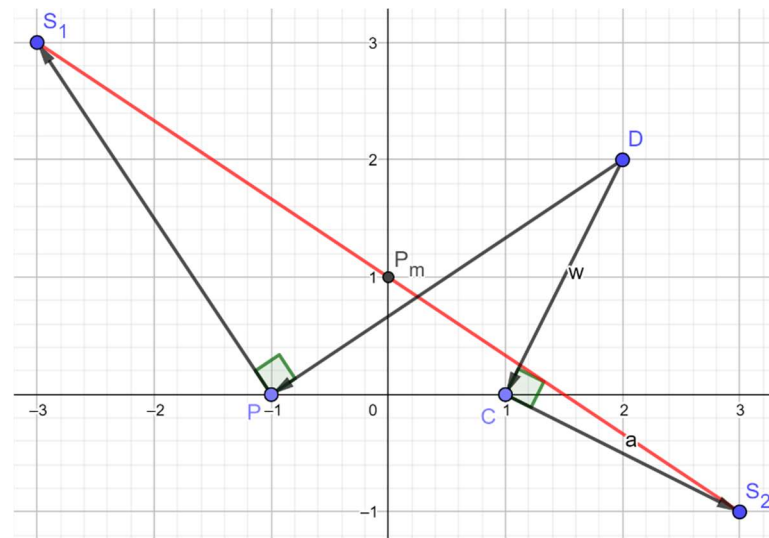
$$\overline{CS_2} = -i \cdot \overline{CD} = -i \cdot [(a - 1) + bi] = b + (1 - a)i.$$

Tendo os valores das coordenadas de S_1 e S_2 , podemos encontrar o ponto médio P_m . Para tal, deve-se somar S_1 e S_2 e dividir por 2, ou seja:

$$P_m = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{[-b + (1 + a)i] + [b + (1 - a)i]}{2} = \frac{2}{2}i = i.$$

Portanto, o ponto médio P_m do segmento $\overline{S_1S_2}$ é o imaginário i e as coordenadas do tesouro são dadas por $(0, 1)$. Geometricamente, tem-se:

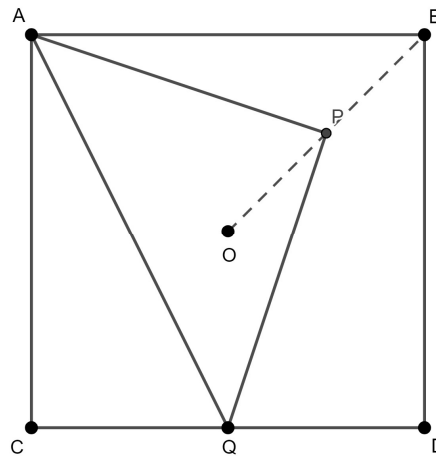
Figura 8 – Solução do Problema 1.



Fonte: Autor

Problema 2 (ZINGA, 2018, p. 31): É dado um quadrado ABCD com centro em O. Sejam P o ponto médio do segmento $\overline{BO}$ e Q o ponto médio de $\overline{CD}$. Prove que o triângulo $\triangle APQ$ é retângulo e isósceles.

Figura 9 – Representação geométrica do Problema 2.

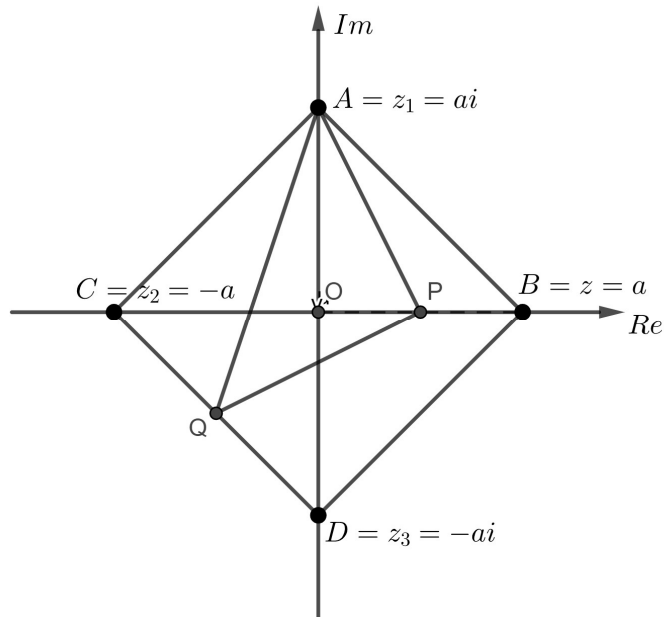


Fonte: Autor

Solução:

Tome os pontos A, B, C e D como ai , a , $-a$ e $-ai$, respectivamente. De fato, de acordo com a Figura 10, considerando o número complexo $z = a$ e sabendo que a multiplicação de um número complexo z por i resulta em uma rotação de 90° em sentido anti-horário, então tem-se: $z_1 = a \cdot i$, $z_2 = ai \cdot i = -a$, $z_3 = -a \cdot (i) = -ai$.

Figura 10 – Identificação dos vértices A, B, C, D com Números Complexos.



Fonte: Autor

Para provar que o triângulo APQ da Figura 9 é retângulo, basta mostrar que $\overline{PQ}$ é resultado da rotação de $\overline{PA}$, 90° em sentido anti-horário, isto é, $\overline{PQ} = i \cdot \overline{PA}$. E tendo em conta que $P = \frac{a}{2}$ e $Q = \frac{-a-ai}{2}$, tem-se:

$$\overline{PQ} = Q - P = \frac{(-a - ai)}{2} - \frac{a}{2} = \frac{-2a - ai}{2}$$

$$\overline{PA} = A - P = ai - \frac{a}{2} = \frac{2ai - a}{2}$$

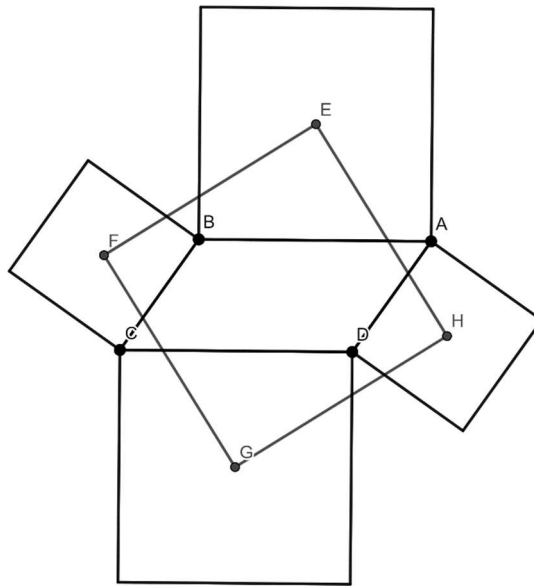
Logo,

$$i \cdot \overline{PA} = i \cdot \left(\frac{2ai - a}{2} \right) = \frac{2ai^2 - ai}{2} = \frac{-2a - ai}{2} = \overline{PQ}$$

Como $\overline{PQ} = i \cdot \overline{PA}$, então os lados $\overline{PA}$ e $\overline{PQ}$ do triângulo APQ possuem a mesma medida e portanto, ΔAPQ é isósceles.

Problema 3 (NEVES, 2014, p. 45): Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo $ABCD$. Mostre que os centros desses quatro quadrados são vértices de outro quadrado.

Figura 11 – Representação geométrica do Problema 3.



Fonte: Autor

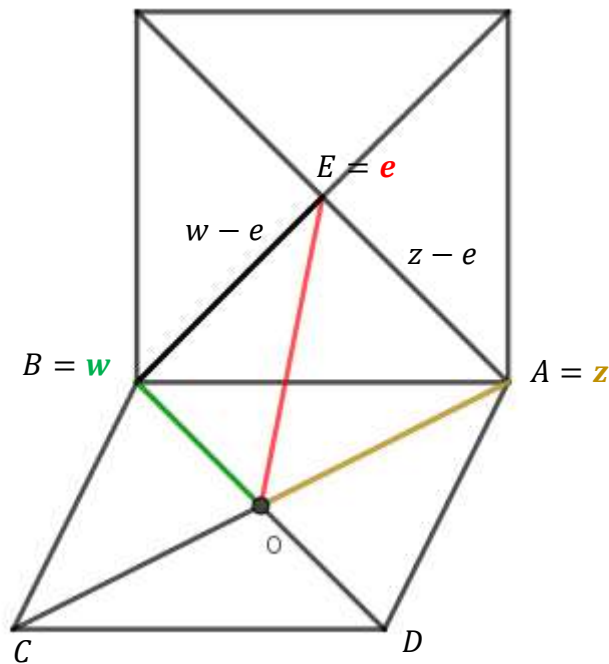
Solução: Vamos tomar os pontos A e B como os complexos z e w , respectivamente. Considerando o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo $ABCD$ como a origem do plano complexo, os pontos C e D são $-z$ e $-w$, respectivamente.

Sejam E, F, G, H lugares geométricos dos complexos e, f, g, h .

Inicialmente vamos fazer os cálculos considerando o quadrado de centro E e posteriormente, estendê-los analogamente para os quadrados de centro F, G e H .

No quadrado de centro E , o triângulo EAB é isósceles e retângulo, pois de acordo com as propriedades do quadrado, as diagonais são ortogonais e bissetrizes dos ângulos internos. Assim, distância $d(E, A) = d(E, B)$ e $EA \perp EB$. Como o triângulo EAB é isósceles, observando a Figura 12 temos que $z - e = w - e$.

Figura 12 – Quadrado de centro E.



Fonte: Autor

Para rotacionar o vetor $w - e$, 90° em sentido anti-horário, é preciso multiplicá-lo por i . Assim, tem-se que:

$$z - e = (w - e)i$$

$$z = e + (w - e)i$$

$$z = e + wi - ei$$

$$z - wi = e(1 - i)$$

$$e = \frac{z - wi}{1 - i} = \frac{(z - wi) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{z + zi - wi + w}{1 - i^2} = \frac{(z + w) + (z - w)i}{2}$$

De modo análogo, chega-se a:

$$f = \frac{w + zi}{1 - i} = \frac{(w + zi) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{(w - z) + (z + w)i}{2}$$

$$g = \frac{-z + wi}{1 - i} = \frac{(-z + wi) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{(-w - z) + (w - z)i}{2}$$

$$h = \frac{-w - zi}{1 - i} = \frac{(-w - zi) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{(-w + z) + (-w - z)i}{2}$$

Para demonstrar que $EFGH$ é um quadrado, basta verificar que a medida dos quatro lados são iguais e que um dos ângulos é reto.

$$d(EF) = |f - e| = \left| \frac{(w - z) + (z + w)i}{2} - \frac{(z + w) + (z - w)i}{2} \right| = |-z + wi|$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(-z)^2 + (w)^2} = \sqrt{z^2 + w^2} \\
d(FG) = |g - f| &= \left| \frac{(-w - z) + (w - z)i}{2} - \frac{(w - z) + (z + w)i}{2} \right| = |-w - zi| \\
&= \sqrt{(-w)^2 + (-z)^2} = \sqrt{z^2 + w^2} \\
d(GH) = |h - g| &= \left| \frac{(-w + z) + (-w - z)i}{2} - \frac{(-w - z) + (w - z)i}{2} \right| = |z - wi| \\
&= \sqrt{(z)^2 + (-w)^2} = \sqrt{z^2 + w^2} \\
d(HE) = |e - h| &= \left| \frac{(z + w) + (z - w)i}{2} - \frac{(-w + z) + (-w - z)i}{2} \right| = |w + zi| \\
&= \sqrt{(w)^2 + (z)^2} = \sqrt{z^2 + w^2}
\end{aligned}$$

Como os quatro lados são iguais, resta demonstrar que um dos ângulos é reto. Para isso, basta mostrar que $\overline{EH} = \overline{EF} \cdot i$.

De fato,

$$\overline{EF} \cdot i = (f - e)i = (-z + wi) \cdot i = -w - zi = h - e = \overline{EH}$$

Portanto $EFGH$ é um quadrado.

5.2 FRACTAIS

Os fractais são normalmente conhecidos por serem geradores de figuras, mas além de produzir belas imagens, a geometria fractal é importante no estudo de sistemas dinâmicos ou sistemas em movimento, que são imprevisíveis sob certas condições. Esse conhecimento é usado na previsão do clima, no estudo do movimento das estrelas e galáxias do sistema solar (MELLO; BARROSO, 2005), na análise de pulsos elétricos no cérebro e de batimentos cardíacos. “Nesta geometria são encontradas formas de descrever os vários fenômenos na natureza, onde não podem ser utilizadas as geometrias tradicionais” (LOPES; CABRAL; ALVES, 2011, p. 5).

Ainda segundo Lopes, Cabral e Alves (2011, p. 6), “os fractais permitem modelar qualquer coisa da natureza na tela de um computador graças aos Números Complexos, pois a produção de cada imagem se resume a uma fórmula iterativa no plano complexo”. Com isso, constata-se que alguns fractais importantes podem ser obtidos pela iteração de funções envolvendo variáveis complexas, entre os quais estão o conjunto do matemático polonês Benôit Mandelbrot e os fractais de Julia.

Julia e Mandelbrot estudaram o que acontece com a imagem de funções quadráticas do tipo $f(z) = z^2 + c$ ou $z_{n+1} = z_n^2 + c$ para um z complexo inicial e c complexo constante (um número complexo fixo). No Plano Complexo, quando se aplica iteradamente na função as imagens obtidas com o valor de z inicial, chegando ao estudo de órbitas e pontos fixos atratores e repulsores. Uma órbita que *escapa* é assim chamada quando a função tende para o infinito. As sementes ou os valores de z_0 da iteração das órbitas que não escapam, formam o conjunto completo de Julia, que é uma coleção de todas as **sementes**, na qual as **órbitas** da iteração quadrática $z \rightarrow z^2 + c$ não tendem para o infinito.

As **sementes** são os números complexos z_0 em $z_{n+1} = z_n^2 + c$ e as **órbitas** são os valores da parte real e parte imaginária de c , os quais não podem tender ao infinito durante as iterações. Cada constante c , na iteração da função quadrática $z \rightarrow z^2 + c$, tem seu próprio conjunto de Julia (DEVANEY, 1999).

Vamos exemplificar a construção de um conjunto de Julia para a semente $z_0 = 0 + 0,5i$ e $c = -1,25 + 0i$, com 15 iterações. A Tabela 1 mostra as 15 primeiras iterações da construção do conjunto de Julia.

Tabela 1 – Iterações para a construção de um conjunto de Julia.

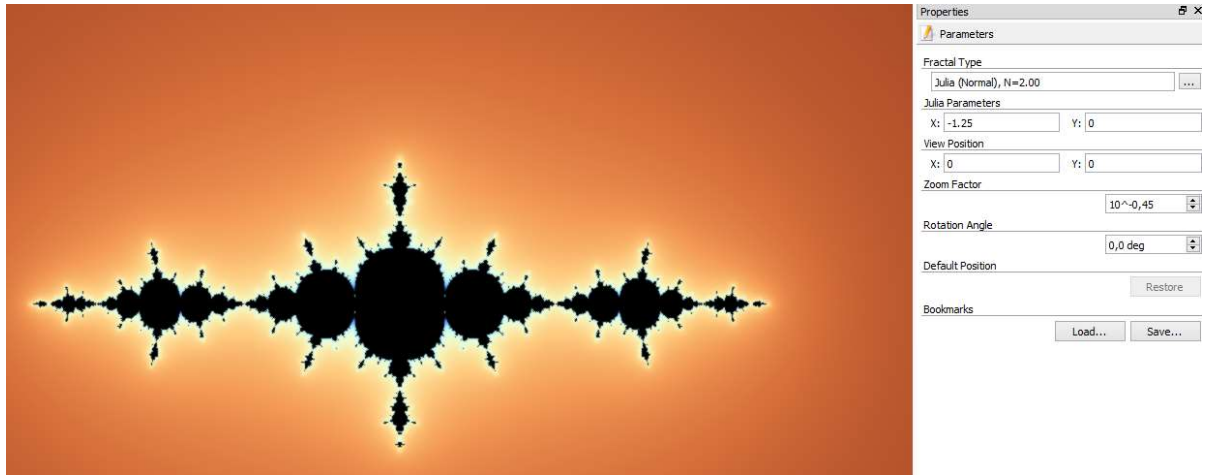
<i>n</i>	$z_n = a + bi$			c		$z_{n+1} = z_n^2 + c$	
	z_n	a	bi	A	bi	a	bi
0	z_0	0	0,5	-1,25	0	-1,5	0
1	z_1	-1,5	0	-1,25	0	1	0
2	z_2	1	0	-1,25	0	-0,25	0
3	z_3	-0,25	0	-1,25	0	-1.1875	0
4	z_4	-1.1875	0	-1,25	0	0.1602	0
5	z_5	0.1602	0	-1,25	0	-1.2243	0
6	z_6	-1.2243	0	-1,25	0	0.249	0
7	z_7	0.249	0	-1,25	0	-1.188	0
8	z_8	-1.188	0	-1,25	0	0.1613	0
9	z_9	0.1613	0	-1,25	0	-1.224	0
10	z_{10}	-1.224	0	-1,25	0	0.2481	0
11	z_{11}	0.2481	0	-1,25	0	-1.1884	0
12	z_{12}	-1.1884	0	-1,25	0	0.1624	0
13	z_{13}	0.1624	0	-1,25	0	-1.2236	0
14	z_{14}	-1.2236	0	-1,25	0	0.2473	0
15	z_{15}	0.2473	0	-1,25	0	-1.1888	0

Fonte: Autor

Os valores de a e b não tendem ao infinito e portanto, a semente $z_0 = 0 + 0,5i$ pertence a um conjunto de Julia. Caso os valores de a e b tendessem a infinito, então a semente não pertenceria ao referido conjunto.

Usando o *software* Fraqtive (<https://fraqtive.mimec.org/>) para gerar fractais, chegamos à representação geométrica do conjunto de Julia para $c = -1,25 + 0i$. Neste programa, a construção independe do valor de z_0 .

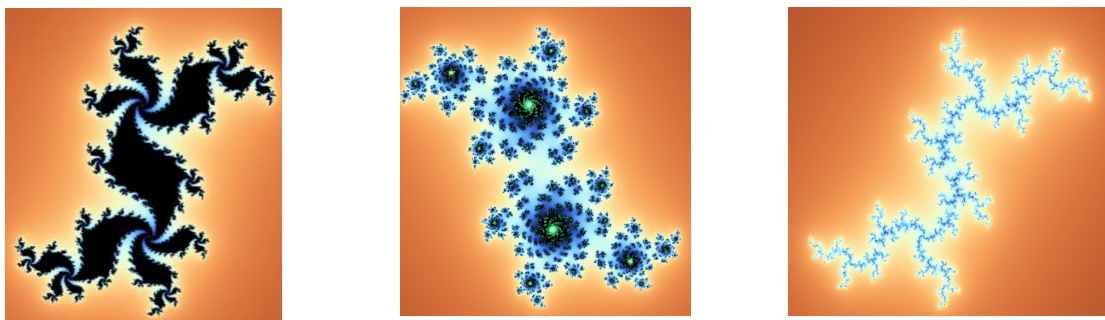
Figura 13 – Conjunto de Julia, $c = -1,25 + 0i$.



Fonte: Autor

De forma análoga geramos outros conjuntos de Julia:

Figura 14 – Alguns conjuntos de Julia.



$$c = 0,3 + 0,5 i$$

$$c = 0,15 - 0,6 i$$

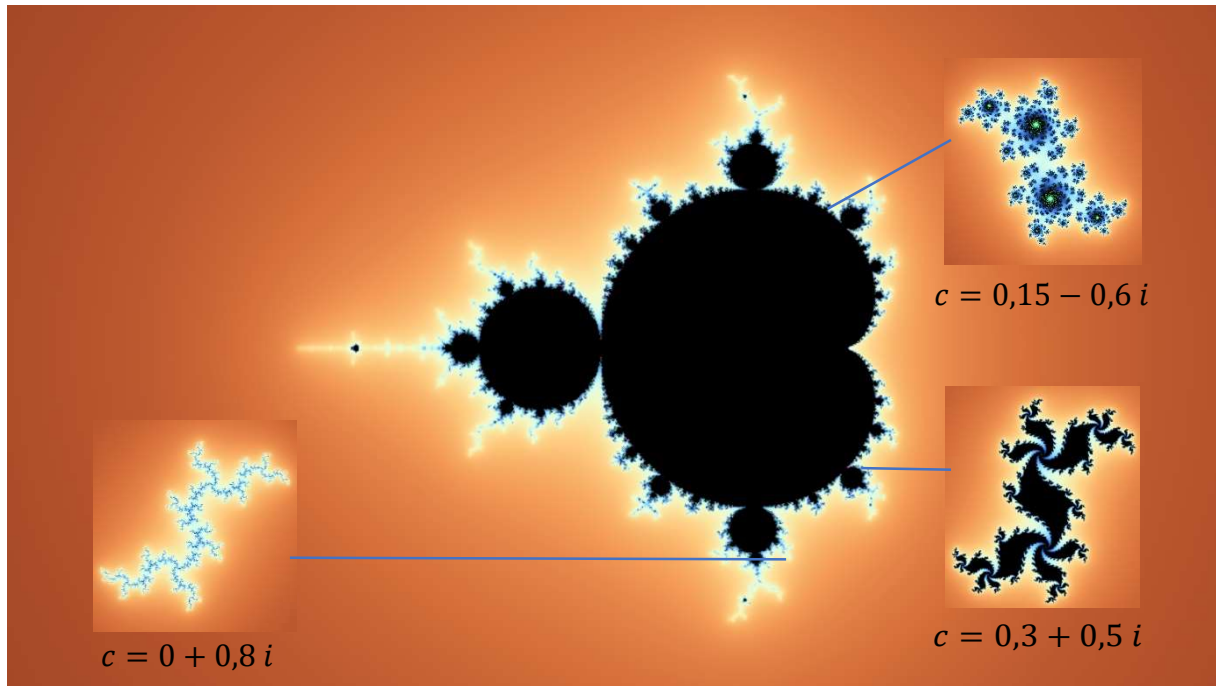
$$c = 0 + 0,8 i$$

Fonte: Autor

O conjunto de Mandelbrot é gerado pela iteração da função quadrática $f(z) = z^2 + c$, sempre iniciando a iteração com z inicial igual a zero, na busca de constantes complexas c , para os quais a órbita não escapa para o infinito. Esse conjunto de pontos c no plano de Argand-Gauss define o conjunto de Mandelbrot (DEVANEY, 1999).

Dentro do conjunto de Mandelbrot estão todos os valores da constante complexa c da função quadrática $z^2 + c$ que formam os conjuntos de Julia possíveis, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 – Conjunto de Mandelbrot contém os conjuntos de Julia.



Fonte: Autor

A figura acima mostra os três conjuntos de Julia gerados na Figura 14 e que pertencem ao conjunto de Mandelbrot.

5.3 ENGENHARIA ELÉTRICA

Para a compreensão desta seção, é importante que descrevamos brevemente alguns conceitos associados à engenharia elétrica.

Corrente elétrica (I), diz respeito ao movimento de elétrons que acontece no interior de diferentes materiais. A corrente elétrica, denotada por I , mede o número de elétrons que atravessam um corpo condutor durante um determinado intervalo de tempo. Essa carga é medida em ampère (A) através da fórmula

$$I = \frac{V}{Z}$$

em que V é a tensão elétrica e Z é a impedância.

A corrente é dita ser **contínua** quando possui sentido e intensidade constantes, como em uma pilha, e **alternada** quando o sentido e a intensidade variam, como acontece nas usinas. Nos circuitos de corrente alternada se encontram consideráveis aplicações dos Números Complexos.

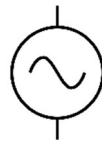
Tensão elétrica (V), é a diferença de potencial elétrico (DDP), entre dois pontos, capaz de gerar uma força que movimenta os elétrons entre esses dois pontos distintos no espaço, ou seja, é a quantidade de energia necessária para movimentar os elétrons, gerando uma corrente elétrica. Em uma pilha, por exemplo, existe uma DDP entre o polo negativo e o polo positivo. Sua unidade de medida é o Volt (V).

Para o estudo de correntes alternadas, essa medida será dada por meio da expressão

$$V(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

que representa o comportamento de uma onda em movimento harmônico simples análoga a uma função cossenoide com amplitude A e frequência ω , medida em radianos por segundo (SANTOS, 2011). A Figura 16 apresenta sua representação em diagramas de circuitos.

Figura 16 – Representação simbólica da fonte de tensão elétrica.



Fonte: Autor

Circuito se refere a um caminho fechado que permite a passagem de corrente elétrica por meio de fios condutores que ligam elementos elétricos como resistores, capacitores e indutores. Em um diagrama de circuito, ele é a linha que conecta todos os componentes e fecha o *loop*.

São denominados circuitos em **série** aqueles que determinam somente um caminho, fazendo com que os componentes liguem-se na mesma ordem e direção, como nas lâmpadas de natal. Se uma delas queima, todas as subsequentes param de funcionar pois o caminho foi cortado. Já os chamados circuitos em **paralelo** descrevem múltiplos caminhos, dividindo a corrente elétrica ao longo do percurso, como acontece em uma instalação elétrica residencial. Uma tomada que queimada não altera o funcionamento das demais.

Um **resistor** é um componente de controle em um circuito elétrico. Ele transforma parte da energia elétrica que passa por ele em energia térmica, possibilitando que outras componentes recebam níveis de corrente adequados. O valor que mede as características de um material que

dificultam a passagem de corrente elétrica recebe o nome de **resistência (R)** e é medido em Ohms (Ω) (LIMA, 2017). A Figura 17 apresenta sua representação em diagramas de circuitos.

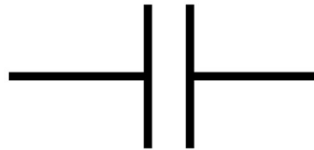
Figura 17 – Representação simbólica de um resistor.



Fonte: Autor

Os **capacitores** armazenam cargas elétricas para curto uso caso a corrente seja obstruída. O valor que descreve a capacidade de armazenamento de um capacitor é chamado **capacitância (C)** e é medido em Farad (F). A Figura 18 apresenta sua representação em diagramas de circuitos.

Figura 18 – Representação simbólica de um capacitor.



Fonte: Autor

De funcionamento similar, os **indutores** armazenam energia através de campos magnéticos visando impedir variações na corrente. O valor que descreve a capacidade de armazenamento de um indutor é chamado **indutância (L)** e é medido em Henry (H). A Figura 19 apresenta sua representação em diagramas de circuitos.

Figura 19 – Representação simbólica de um indutor.



Fonte: Autor

Reatância (X) representa a redução total da passagem de corrente realizada por capacitores e indutores. Sua unidade de medida é o Ohm (Ω)

Calculamos a reatância de um indutor L através da fórmula

$$X_L = \omega L$$

em que ω é a frequência da corrente e L é sua indutância.

Por outro lado, calculamos a reatância de um capacitor C através da fórmula

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

em que ω é a frequência da corrente e C é sua capacitância (SANTOS, 2011).

Impedância (Z) é a oposição que um circuito elétrico faz à passagem de corrente elétrica quando é submetido a uma tensão. Sua unidade de medida também é o Ohm (Ω).

Para circuitos em série, a impedância é dada pelo Número Complexo

$$Z = R + Xi$$

em que R é a soma das resistências dos resistores de um circuito e X a soma das reatâncias.

Já em circuitos em paralelo, a impedância deve ser calculada por

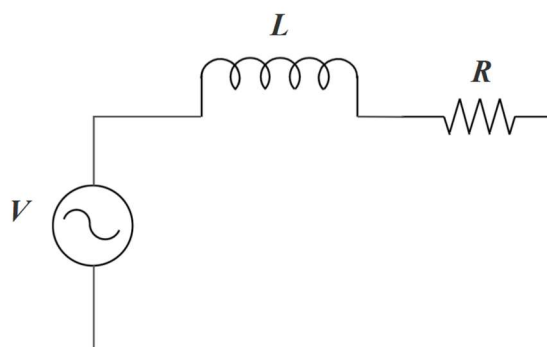
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Xi}$$

Os Complexos nos auxiliarão na determinação da impedância em circuitos RL (formado apenas por indutores e resistores), RC (formado apenas por capacitores e resistores) e RLC (que contém resistores, indutores e capacitores).

Nos problemas que seguem, os circuitos foram esboçados utilizando o *software* SmatDraw (<https://www.smartdraw.com/>).

Problema 4 (Adaptado de LIMA, 2017, p. 49): Considere um circuito RL em série como o da Figura 20. Calcule a impedância e a corrente do circuito sabendo que a indutância de $L = 20 \text{ mH}$, a resistência de $R = 1 \text{ k}\Omega = 10000 \Omega$, e que a tensão da fonte $V = 10\cos(10000t) \text{ V}$.

Figura 20 – Circuito RL Série.



Fonte: Autor

Solução: Temos:

$$V = 10\cos(10000t) \text{ V.}$$

$$L = 20 \text{ mH.}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega.$$

Queremos encontrar a impedância Z .

Como temos um circuito RL em série, sua impedância é dada por

$$Z = R + Xi$$

Mas o circuito tem somente um indutor (L), então $X = X_L = \omega L$.

Da expressão da tensão da fonte, temos que

$$V = A \cdot \cos(\omega t)$$

e neste circuito nos foi dado que

$$V = 10\cos(10000t)$$

então

$$\omega = 10000 \text{ rad/s}$$

Ademais, sabemos que $L = 20 \text{ mH}$, mas precisamos dessa medida em H . Logo,

$$L = 20 \text{ mH} = 20 \cdot 10^{-3} = 0,02$$

como indicado pelo prefixo mili (m) do Sistema Internacional de Unidades.

Assim,

$$X_L = 10000 \cdot 0,02$$

$$X_L = 200 \Omega$$

e a impedância é

$$Z = 1000 + 200i \Omega$$

Para encontrar a corrente I do circuito, vamos calcular o módulo de Z

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{1000^2 + 200^2} \approx 1019,80 \Omega$$

e seu argumento

$$\begin{cases} 1000 = 1019,80 \cos \theta \\ 200 = 1019,8 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \theta \approx 11,31^\circ$$

Usando a notação dos engenheiros, $Z \approx |Z| \angle \theta$ para a fórmula trigonométrica $|Z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ do número complexo Z , chegamos à expressão $Z \approx 1019,80 \angle 11,31^\circ \Omega$.

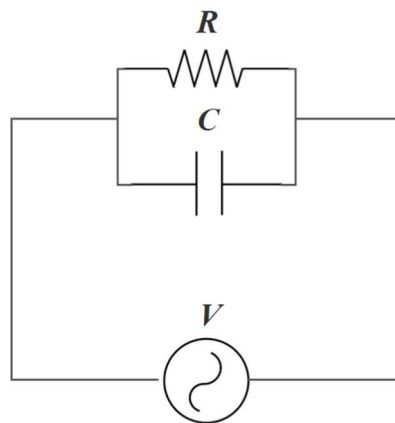
Como $V \approx A \angle \omega t = 10 \angle 10.000t$, então a corrente I no circuito será:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle 10.000t}{1019,80 \angle 11,31^\circ}$$

$$I \approx 0,00981 \angle 10000t - 11,31^\circ \text{ A}$$

Problema 5 (Adaptado de LIMA, 2017, p. 53): Considere um circuito RC em Paralelo como o da Figura 21, com capacitor $C = 1 \mu F$, resistor $R = 1 k\Omega$ e com tensão da fonte alternada $V = 10\cos(5000t) V$. Calcule a impedância do circuito.

Figura 21 – Circuito RC Paralelo.



Fonte: Autor

Solução: Temos:

$$V = 10\cos(5000t) V.$$

$$C = 1 \mu F.$$

$$R = 1 k\Omega.$$

Queremos encontrar a impedância Z .

Como temos um circuito RC em paralelo, sua impedância é dada por

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Xi}.$$

O circuito tem somente um capacitor (C), então $X = X_c = -\frac{1}{\omega C}$.

Da expressão da tensão da fonte, temos que

$$V = A \cdot \cos(\omega t)$$

e neste circuito nos foi dado que

$$V = 10\cos(5000t)$$

então

$$\omega = 5000 \text{ rad/s}$$

Ademais, sabemos que $C = 1 \mu F$ mas precisamos dessa medida em F . Logo

$$C = 1 \mu F = 1 \cdot 10^{-6} = 0,000001$$

como indicado pelo prefixo micro (μ) do Sistema Internacional de Unidades.

Assim,

$$X_C = -\frac{1}{5000 \cdot 0,000001}$$

$$X_C = -200 \, \Omega$$

e a impedância é

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C i}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{1000} - \frac{1}{200i}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{i - 5}{1000i}$$

$$Z = \frac{1000i}{-5 + i}$$

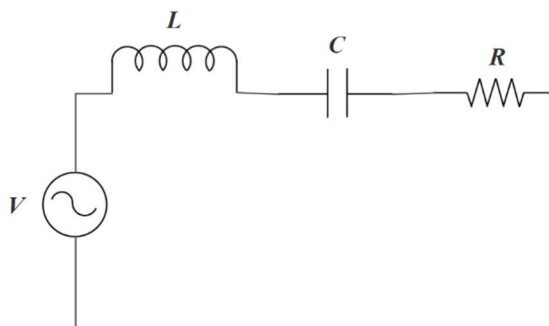
$$Z = \frac{1000i(-5 - i)}{-5 + i(-5 - i)}$$

$$Z = \frac{1000 - 5000i}{26}$$

$$Z \approx 38,46 - 192,31i \, \Omega$$

Problema 6 (Adaptado de LIMA, 2017, p. 55): Considere um circuito RLC em série como o da Figura 22 com capacitor $C = 1 \, \mu F$, $L = 10 \, mH$, resistor $R = 1 \, k\Omega$ e com tensão da fonte alternada $V = 20\cos(1000t) \, V$. Calcule a impedância do circuito.

Figura 22 – Circuito RLC Série.



Fonte: Autor

Solução: Temos:

$$V = 20\cos(1000t) \, V.$$

$$L = 10 \, mH.$$

$$C = 1 \, \mu F.$$

$$R = 1 \, k\Omega.$$

Queremos encontrar a impedância Z .

Como temos um circuito RL em série, sua impedância é dada por

$$Z = R + Xi.$$

O circuito tem um indutor e um capacitor, então $X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

Da expressão da tensão da fonte, temos que

$$V = A \cdot \cos(\omega t)$$

e neste circuito nos foi dado que

$$V = 20 \cos(1000t)$$

então

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

Daí,

$$X_C = -\frac{1}{1000 \cdot 0,000001}$$

$$X_C = -1000 \Omega$$

e

$$X_L = 1000 \cdot 0,01$$

$$X_L = 10 \Omega$$

e a impedância é

$$Z = R + (X_L + X_C)i$$

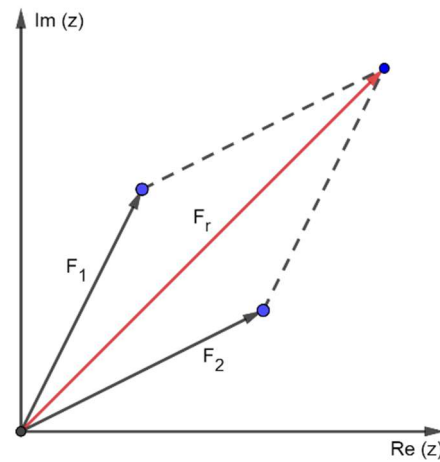
$$Z = 1000 + (10 - 1000)i$$

$$Z = 1000 - 990i \Omega$$

5.4 FÍSICA

A própria representação dos Números Complexos como vetor e suas operações estabelecem relações entre esses números e a Física. Essa correspondência entre as operações com complexos e as transformações geométricas é muito útil na Física quando se trabalha com grandezas vetoriais como força, velocidade, aceleração, etc.

Por exemplo, os Números Complexos podem ser usados para determinar a força resultante que age sobre um corpo no qual atuam várias forças. Considere as forças F_1 e F_2 atuando sobre um corpo representado na origem do plano complexo, conforme figura a seguir.

Figura 23 – A F_r de F_1 e F_2 no Plano Complexo

Fonte: Autor

Essas duas forças provocam o mesmo efeito que uma única força, denominada força resultante (F_r), que possui o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido que o vetor soma $F_1 + F_2$, ou seja,

$$F_r = F_1 + F_2.$$

Além da força resultante, podemos aplicar os Números Complexos para estudar o Centro de Massa de um corpo plano, sendo este o ponto em que toda a massa de um corpo pode ser considerada como concentrada, facilitando cálculos variados. Para isso, vamos considerar um conjunto de pontos materiais, de massas $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$, localizados nos afixos dos respectivos números complexos $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos definir o centro de massa como o complexo z dado por

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Problema 7 (ELI, 2014, p. 87): Considerando três pontos materiais de massas 2kg, 3kg e 5kg localizados no plano de Argand-Gauss nos afixos dos complexos $z_1 = 6 + 3i$, $z_2 = -2 + 4i$ e $z_3 = 6i$, determine o centro de massa desse conjunto de pontos.

Solução: Temos:

Um ponto material localizado no complexo $z_1 = 6 + 3i$ de massa 2kg.

Um ponto material localizado no complexo $z_2 = -2 + 4i$ de massa 3kg.

Um ponto material localizado no complexo $z_3 = 6i$ de massa 5kg.

Substituindo os dados em

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

obtemos

$$z = \frac{2 \cdot (6 + 3i) + 3 \cdot (-2 + 4i) + 5 \cdot 6i}{2 + 3 + 5}$$

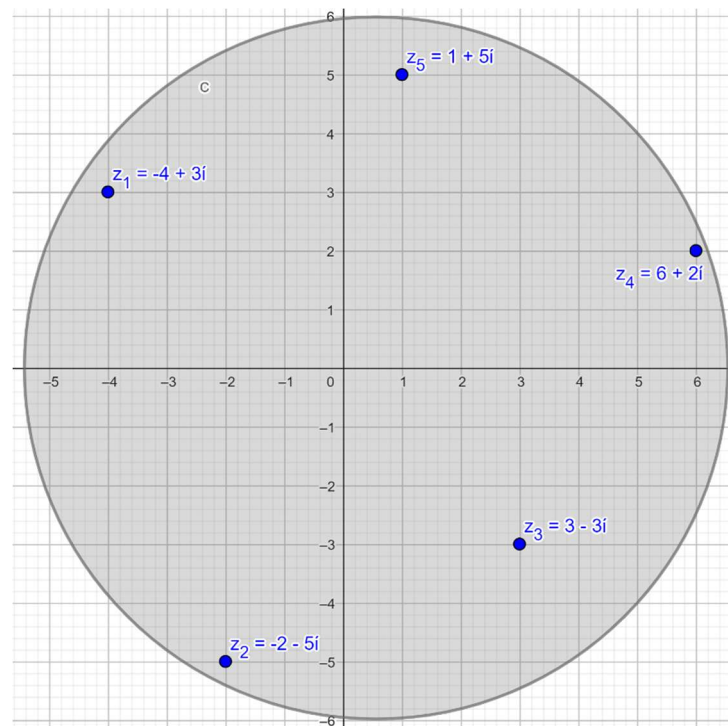
$$z = \frac{6 + 48i}{10}$$

$$z = \frac{3}{5} + \frac{24}{5}i$$

que é o Centro de Massa do sistema.

Problema 8 (Elaborado pelo autor): Um garçom quer carregar uma bandeja, de formato redondo, com cinco copos representados por z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e dispostos conforme a Figura 24. Sabendo que cada copo pesa $1kg$, encontre o ponto em que o garçom deve posicionar sua mão para equilibrar a bandeja.

Figura 24 – Representação geométrica do Problema 8.



Fonte: Autor

Solução:

Temos:

Um ponto material localizado no complexo $z_1 = -4 + 3i$ de massa $1kg$.

Um ponto material localizado no complexo $z_2 = -2 - 5i$ de massa $1kg$.

Um ponto material localizado no complexo $z_3 = 3 - 3i$ de massa $1kg$.

Um ponto material localizado no complexo $z_4 = 6 + 2i$ de massa $1kg$.

Um ponto material localizado no complexo $z_5 = 1 + 5i$ de massa $1kg$.

Substituindo em

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

obtemos

$$z = \frac{1 \cdot (6 + 2i) + 1 \cdot (1 + 5i) + 1 \cdot (-4 + 3i) + 1 \cdot (-2 - 5i) + 1 \cdot (3 - 3i)}{1 + 1 + 1 + 1 + 1}$$

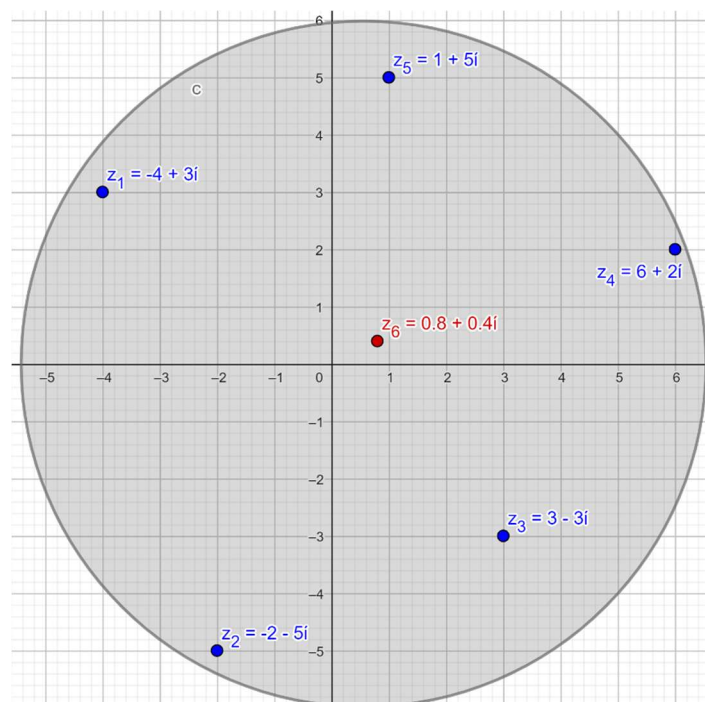
$$z = \frac{4 + 2i}{5}$$

$$z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

que é o Centro de Massa do sistema e o ponto onde o garçom deve posicionar sua mão.

Representando geometricamente o centro de massa $z_6 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, temos:

Figura 25 – Solução do Problema 8.



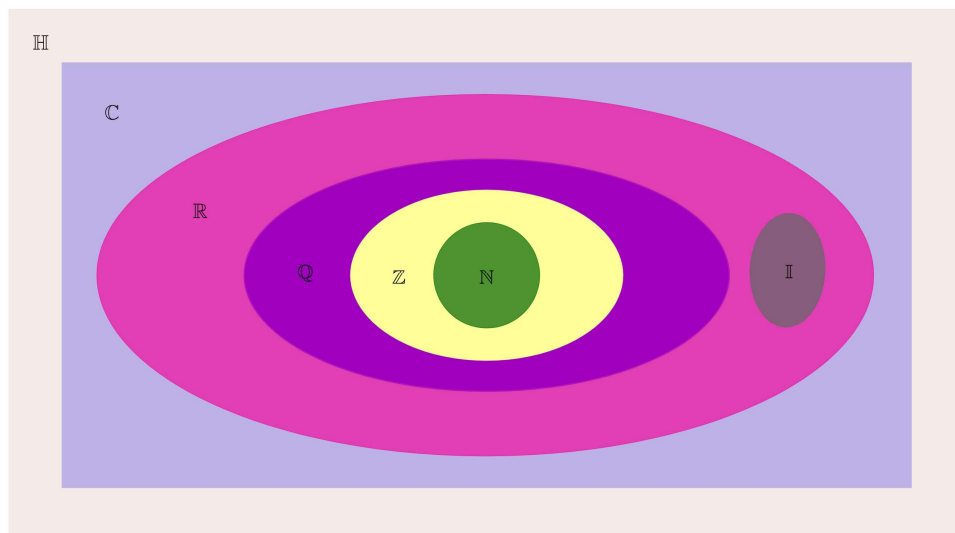
Fonte: Autor

5.5 COMPUTAÇÃO GRÁFICA (QUATÉRNIOS)

A realização de rotações no espaço tridimensional é utilizada em várias áreas do conhecimento, tais como as Geociências, a Robótica e a Computação Gráfica. Existem diversas maneiras de representá-las: os ângulos de Euler, a matriz de Rodrigues, a matriz fundamental e os quatérnios.

Os quatérnios são representados pelo símbolo $\mathbb{H}$ e são uma generalização do conjunto dos números complexos, podendo ser considerados números hipercomplexos de ordem quatro (GALO; TOZZI, 2001). A Figura 26 mostra a representação dos quatérnios.

Figura 26 – Uma visualização do Conjunto dos Quatérnios.



Fonte: Autor

Os quatérnios possuem quatro parâmetros que são números reais usualmente chamados de a, b, c , e d . De forma similar aos números complexos, os quatérnios possuem uma parte real e uma imaginária, porém apresentam três componentes diferentes para sua parte imaginária, os quais chamaremos de i, j e k .

Um quatérnio, portanto, é um número da forma:

$$p = (a, b, c, d)$$

ou

$$p = a + bi + cj + dk$$

ou

$$p = (s, \vec{v})$$

onde s é um escalar que representa sua parte real e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é um vetor de três componentes que representa sua parte imaginária.

Análogo aos complexos, temos que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Por definição

$$ij = k$$

$$ji = -k$$

$$jk = i$$

$$ki = j$$

e o conjugado de um quatérnio $p = (s, \vec{v})$ é representado por $\bar{p}$, definido como

$$\bar{p} = (s, -\vec{v})$$

Dados dois quatérnios quaisquer p_1 e p_2 , o produto será:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 = & a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1 (b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2 (b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ & + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k \end{aligned}$$

A partir do produto de dois quatérnios, podemos descrever como eles podem ser usados para representar rotações (BIASSI; GATASS, 2002).

Seja um ponto $\vec{r}$ representado pelo quatérnio $p = (0, \vec{r})$, uma rotação anti-horária de um ângulo θ ao redor do eixo definido pelo vetor unitário $\vec{n}$ é

$$R_q(p) = q \cdot p \cdot \bar{q}$$

em que

$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n} \right)$$

A parte real do resultado será zero e a parte imaginária conterá o resultado da rotação.

Problema 9: Gire o ponto $(10, 0, 0)$ 180 graus em torno do eixo Z.

Solução: Temos:

O ponto dado $\vec{r} = (10, 0, 0)$.

O quatérnio $p = (0, \vec{r}) = (0, 10, 0, 0)$.

Como o eixo de rotação é $Z = (0, 0, 1)$, então $\vec{n} = Z = (0, 0, 1)$.

Logo, obtemos o quatérnio $q = \left(\cos\left(\frac{180^\circ}{2}\right), \sin\left(\frac{180^\circ}{2}\right) \vec{n} \right) = (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ \vec{n}) = (0, 1, (0, 0, 1)) = (0, 0, 0, 1)$ e seu conjugado $\bar{q} = (0, 0, 0, -1)$.

Usando a expressão $R_q(p) = q \cdot p \cdot \bar{q}$, segue que

$$R_q(p) = (0, 0, 0, 1)(0, 10, 0, 0)(0, 0, 0, -1)$$

Usando a multiplicação quatérnia dois a dois

$$\begin{aligned} q \cdot p = & a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ & + (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k \end{aligned}$$

temos

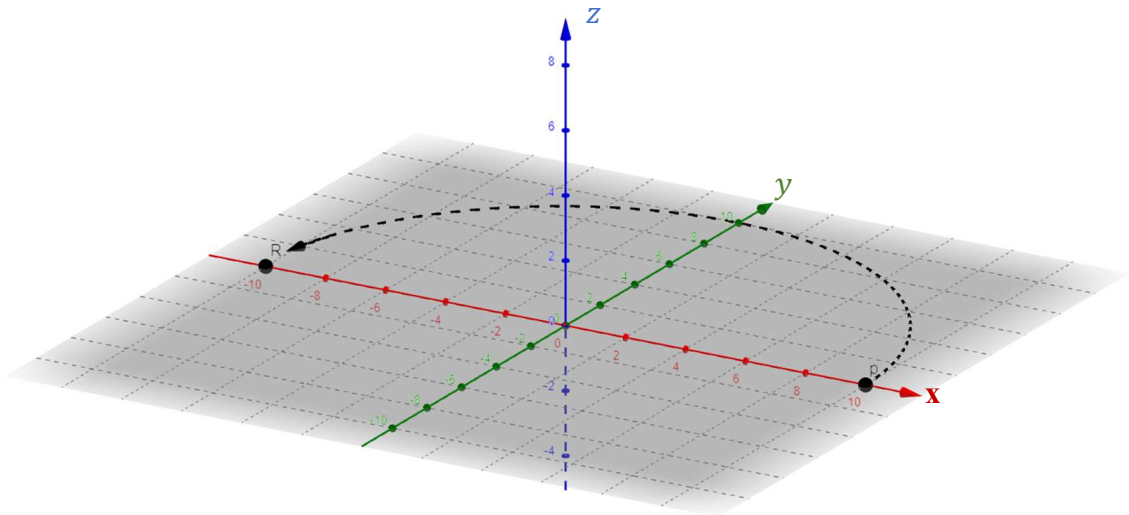
$$\begin{aligned} q \cdot p &= (0, 0, 0, 1)(0, 10, 0, 0) \\ q \cdot p &= 0 \cdot 0 - (0 \cdot (10) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) + 0 \cdot (10i + 0j + 0k) + 0 \cdot (0i + 0j + 1k) \\ &+ (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0)i + (1 \cdot (10) - 0 \cdot 0)j + (0 \cdot 0 - 0 \cdot (10))k \\ q \cdot p &= 10j = (0, 0, 10, 0) \end{aligned}$$

Aplicando novamente a multiplicação quatérnia dois a dois, temos:

$$\begin{aligned} R_q(p) &= (q \cdot p) \cdot \bar{q} = (0, 0, 10, 0)(0, 0, 0, -1) \\ R_q(p) &= 0 \cdot 0 - (0 \cdot 0 + (10) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)) + 0 \cdot (0i + 0j + (-1)k) + 0 \cdot (0i + 10j + 0k) \\ &+ ((10) \cdot (-1) - 0 \cdot 0)i + (0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1))j + (0 \cdot 0 - (10) \cdot 0)k \\ R_q(p) &= q \cdot (p \cdot \bar{q}) = -10i = (0, -10, 0, 0) \end{aligned}$$

Assim, a rotação de 180° do ponto $\vec{r} = (10, 0, 0)$ em torno do eixo Z resulta no ponto $R_q(p) = (0, -10, 0, 0)$ que corresponde ao vetor $(-10, 0, 0)$, conforme figura abaixo:

Figura 27 – Rotação do ponto $(10, 0, 0)$ em torno de Z.



Fonte: Autor.

Problema 10: Agora gire o ponto obtido no Problema 9, 90 graus em torno do eixo Y .

Solução: Temos:

O ponto dado $\vec{r} = (-10, 0, 0)$.

O quatérnio $p = (0, \vec{r}) = (0, -10, 0, 0)$.

Como o eixo de rotação é $Y = (0, 1, 0)$, então $\vec{n} = Y = (0, 1, 0)$.

Logo, obtemos o quatérnio

$$q = \left(\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right), \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\vec{n} \right) = (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ \vec{n}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0, 1, 0) \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \text{ e seu conjugado } \bar{q} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Usando a expressão $R_q(p) = q \cdot p \cdot \bar{q}$, segue que

$$R_q(p) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) (0, -10, 0, 0) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

Usando a multiplicação quatérnia dois a dois

$$q \cdot p = a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1 (b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2 (b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k$$

temos

$$\begin{aligned} q \cdot p &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) (0, -10, 0, 0) \\ q \cdot p &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \left(0 \cdot (-10) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-10i + 0j + 0k) \\ &\quad + 0 \cdot \left(0i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + 0k \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - 0 \cdot 0 \right) i + (0 \cdot (-10) - 0 \cdot 0) j \\ &\quad + \left(0 \cdot 0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-10) \right) k \\ q \cdot p &= -\frac{10\sqrt{2}}{2} i + \frac{10\sqrt{2}}{2} k = -5\sqrt{2}i + 5\sqrt{2}k = (0, -5\sqrt{2}, 0, 5\sqrt{2}) \end{aligned}$$

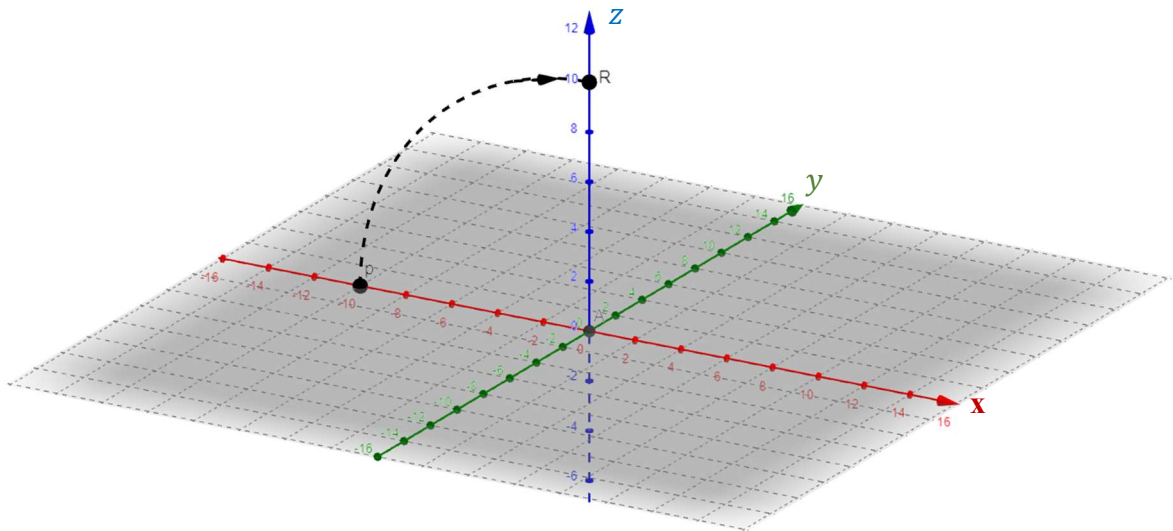
Aplicando novamente a multiplicação quatérnia dois a dois, temos:

$$R_q(p) = (q \cdot p) \cdot \bar{q} = (0, -5\sqrt{2}, 0, 5\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-5\sqrt{2} \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 5\sqrt{2} \cdot 0 \right) + 0 \cdot \left(0i - \frac{\sqrt{2}}{2}j + 0k \right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-5\sqrt{2}i + 0j + 5\sqrt{2}k) + \left(0 \cdot 0 - 5\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) i \\
&\quad + (5\sqrt{2} \cdot 0 - (-5\sqrt{2}) \cdot 0)j + \left(-5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 0 \cdot 0 \right) k \\
R_q(p) &= q \cdot (p \cdot \bar{q}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-5\sqrt{2}) + 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) k \\
&= (5 - 5)i + (5 + 5)k = 10k = (0,0,0,10)
\end{aligned}$$

Assim, a rotação de 90° do ponto $\vec{r} = (-10,0,0)$ em torno do eixo Y resulta no ponto $R_q(p) = (0,0,0,10)$ que corresponde ao vetor $(0,0,10)$, conforme a Figura 28.

Figura 28 – Rotação de $(-10, 0, 0)$ em torno de Y .



Fonte: Autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não conhecemos as razões que justificaram a retirada dos Complexos na Educação Básica. Contudo, diante do presente trabalho, que mostrou um pouco de como estes números aparecem nas diferentes áreas do conhecimento, é possível afirmar que a Matemática da Educação Básica se empobreceu. Mais, lamentamos que os estudantes deste nível de ensino não terão a oportunidade de estudar essa temática tão importante para a evolução das ciências e da sociedade.

Ao pesquisar sobre a história dos Números Complexos, realizando uma retomada histórica e conceitual do conteúdo, pôde-se ampliar e aprofundar os conhecimentos prévios. Outrossim, permitiu visualizar que as situações que motivaram sua descoberta eram de natureza empírica, o que veio se perdendo ao longo do ensino, conforme observamos em livros didáticos e em artigos científicos. A ênfase nestes materiais, direciona o estudo para os aspectos teóricos e para o uso de fórmulas em detrimento da história e das aplicações.

Apresentando as aplicações, complementadas pela revisão de conceitos, concluiu-se que os Números Complexos tocam uma ampla rede de facetas do cotidiano e do conhecimento científico. Voltados à própria Matemática, verificou-se que os Complexos podem ser utilizados de forma a facilitar a obtenção de diversos resultados da Geometria Plana uma vez que descrevem rotações em duas dimensões de forma muito eficiente. Além disso, sua iteração encontra conjuntos de Julia e, conseqüentemente, o conjunto de Mandelbrot na Geometria Fractal. Os Complexos ainda aparecem no cálculo da impedância e corrente de circuitos na Engenharia Elétrica e o Plano de Argand-Gauss estabelece fortes correspondências com o Plano Cartesiano na disciplina de Física. Por último, observamos que sua extensão, o conjunto dos quatérnios, é uma das alternativas usadas para descrever rotações tridimensionais em *softwares* de Computação Gráfica.

Sentimos dificuldades para encontrar materiais que discutissem situações-problemas envolvendo o tema, especialmente sobre os quatérnios, mas isso não nos impediu de alcançar os objetivos que consistiam em explicitar algumas aplicabilidades dos Números Complexos, de forma a atribuir sentido e significado ao estudo deste conteúdo.

Concluimos que os Números Complexos é um assunto fascinante que abre espaço para questionamentos em diversos ramos da Matemática. Vislumbramos que este estudo chegue ao alcance de estudantes e professores da Educação Básica, bem como enriqueça o trabalho no Ensino Superior sendo motivador a professores e estudantes, ao valorizar seu estudo prático,

desmistificando a falsa visão dos Números Complexos como tópico intangível nos diversos níveis da educação.

REFERÊNCIAS

- BIASSI, S. C; GATASS, M. **Utilização de quatérnios para representação de rotações em 3D**. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/Quaternios.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2020.
- BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. **Rev. Odontol. Univ. Cidade São Paulo**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006.
- BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- DEVANEY, R. **Fractals: A Tool Kit of Dynamic Activities**. 1. ed. Nova York: Key Curriculum Press, 1999.
- ELI, J. **Números Complexos e suas Aplicações**: Uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2014.
- EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. São Paulo: Unicamp, 2004.
- FEITOSA, L. F. **Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- GALO, M; TOZZI, C. L. A representação de matrizes de rotação e o uso de quatérnios em Ciências Geodésicas. **Série em Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 1, p. 214-231, 2001.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- LIMA, H. M. **Aplicação de Números Complexos em Circuitos Elétricos**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.
- LOPES, A. C. M; CABRAL, V. P. G; ALVES, F. J. C. Números complexos na vida real: Uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII, 2011, Belém. **Anais [...]**. Belém: SBEMPA, 2011.
- MARCONI, M. A; LAKATOS, E. M. **Fundamentos da Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo, SP: Atlas S.A., 2003.
- MELLO, J. L. P; BARROSO, J. M. **Matemática: construção e significado**: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2005.
- MOTTA, E. Aplicações dos Números Complexos à Geometria. **Revista Eureka**, Rio de Janeiro, n. 6, p. 30-38, 1999.

NAHIN, P. J. **An imaginary tale**. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1998.

NEVES, R. C. **Aplicações de Números Complexos em Geometria**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, K. V. **Fundamentos da Eletricidade**. 1. ed. Manaus: Centro de Educação Tecnológica do Amazonas, 2011.

SILVA, L. P. Quatérnios: Os Números Complexos do Espaço Quadridimensional. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII., 2001, Rio de Janeiro. **Anais Eletrônicos** [...]. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/enemVII.zip>.

VIDAL, F. A. *et al.* Reflexões sobre a história da matemática abordada nos livros didáticos do ensino médio: uma análise da história da estatística e dos números complexos. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII., 2016, São Paulo. **Anais Eletrônicos** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais>.

WHO CARES ABOUT COMPLEX NUMBERS?? Eddie Woo, 2015. 1 vídeo (13m52s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=19c4c3SwtS8>. Acesso em: 04 nov. 2019.

YOUNG, M. Teoria do currículo: o que é e por que é importante. **Cad. Pesqui.**, São Paulo, v. 44, n. 151, p. 190-202, mar. 2014.

ZINGA, T. C. M. **Aplicação dos Números Complexos em Geometria**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2018.