

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ - SC
CURSO DE MATEMÁTICA — LICENCIATURA

TAÍS CRISTINA DREON

MANDALAS E A GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Chapecó/SC

2021

TAÍS CRISTINA DREON

MANDALAS E A GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Rosane Rossato Binotto

Chapecó/SC

2021

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Dreon, Taís Cristina
MANDALAS E A GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL II /
Taís Cristina Dreon. -- 2021.
46 f.:il.

Orientadora: Prof^a. Dr^a Rosane Rossato Binotto

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2021.

1. Educação Matemática. I. Binotto, Rosane Rossato,
orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III.
Título.

TAÍS CRISTINA DREON

MANDALAS E A GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 21/10/2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof.ª Dr.ª Rosane Rossato Binotto – UFFS
Orientadora

Prof.ª Dr.ª Nilce Fátima Scheffer – UFFS
Avaliadora

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS
Avaliador

Dedico este trabalho à minha família e ao meu
namorado, que sempre me apoiaram para que
eu pudesse concluir meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos.

Aos familiares e amigos, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava aos estudos.

À professora Rosane, por ter sido minha orientadora e ter desempenhado tal função com dedicação e amizade.

Aos professores do curso por todo conhecimento repassado durante este período.

A Universidade Federal da Fronteira Sul por proporcionar um ambiente com estrutura e tranquilidade para os estudos.

Aos meus colegas de curso, com quem convivi durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formanda.

“O êxito da vida não se mede pelo caminho que você conquistou, mas sim pelas dificuldades que superou no caminho”.

Abraham Lincoln

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo construir Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA) baseados em mandalas geométricas e realizar análise de possibilidades e potencialidades de conteúdos de geometria e interação por meio de um exercício de imaginação pedagógica. Os quatro OVA foram construídos utilizando-se o *software* GeoGebra, em que foi disponibilizado o protocolo de construção de cada um deles. Trata-se de uma pesquisa qualitativa propositiva em que os quatro OVA apresentados foram considerados dados da pesquisa e a partir de sua análise individual descreveram-se conteúdos de geometria presentes neles, bem como outras potencialidades observadas como benefícios da interação com o objeto e até a possibilidade de relacionar Matemática e Arte com a realização de um trabalho interdisciplinar. Por fim realizou-se uma classificação dos conteúdos de geometria presentes nesses OVA, em quadros, por ano, do Ensino Fundamental II, conforme objetos de conhecimento presentes na BNCC, para as unidades temáticas Geometria e, Grandezas e Medidas. Como conclusão pode-se elencar que a partir dos OVA foi possível elencar objetos de conhecimento tais como polígonos, simetrias, estudo do círculo e da circunferência, entre vários outros. Ainda se destaca que um deles, o OVA 1, representa uma mandala mais simples e apresenta mais possibilidades de se explorar conteúdos de geometria.

Palavras-chave: Mandalas. Ensino de Geometria. GeoGebra. Imaginação Pedagógica. Objetos Virtuais de Aprendizagem.

ABSTRACT

This work aimed to build Virtual Learning Objects (VLO) based on geometric mandalas and analyze the possibilities and potential of geometry and interaction content through an exercise in pedagogical imagination. The four (VLO) were built using the GeoGebra software, in which the construction protocol for each of them was made available. This is a qualitative propositional research in which the four presented VLO were considered research data and, based on their individual analysis, geometry contents present in them were described, as well as other potentialities observed as benefits of interaction with the object and even the possibility of relating Mathematics and Art with the realization of an interdisciplinary work. Finally, there was a classification of the geometry contents present in these VLO, in tables, per year, of Elementary School II, according to knowledge objects present in the BNCC, for the thematic units Geometry and, Quantities and Measures. As a conclusion it can be listed that from the VLO it was possible to list objects of knowledge such as polygons, symmetries, study of the circle and circumference, among many others. It should also be noted that the first represents a simpler mandala and presents more possibilities to explore geometry content.

Keywords: Mandalas. Teaching Geometry. GeoGebra. Pedagogical Imagination. Virtual Learning Objects.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 1: Ilustração de uma roda.	18
Figura 2: Mandalas construídas manualmente.	19
Figura 3: Mandala construída no GeoGebra.....	19
Figura 4: OVA 1 - Mandala com 3 lados27	27
Figura 5: OVA 1 - Mandala com 12 lados27	27
Figura 6: OVA 2.....	29
Figura 7: OVA 3.....	31
Figura 8: OVA 4 com 10 repetições.....	32
Figura 9: OVA 4 com 30 repetições.....	32

QUADROS

Quadro 1: Conhecimentos geométricos - 6º ano33	33
Quadro 2: Conhecimentos geométricos - 7º ano34	34
Quadro 3: Conhecimentos geométricos - 8º ano34	34
Quadro 4: Conhecimentos geométricos - 9º ano35	35
Quadro 5: Protocolo de construção do OVA 1.....41	41
Quadro 6: Protocolo de construção do OVA 2.....42	42
Quadro 7: Protocolo de construção do OVA 3.....43	43

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. REVISÃO DE LITERATURA	14
2.1. ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA	14
2.1.1.A geometria do ensino fundamental II na BNCC	16
2.2. MANDALAS GEOMÉTRICAS	16
2.3. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA	19
2.3.1.Objetos virtuais de aprendizagem	22
2.4. ANÁLISE DE POSSIBILIDADES E IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA	23
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	25
4. DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DOS DADOS.....	26
4.1. OS OVA E UMA DESCRIÇÃO DE POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES	26
4.1.1. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 1	26
4.1.2. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 2	29
4.1.3. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 3	30
4.1.4. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 4	31
4.2. CLASSIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS	33
4.2.1. Descrição dos Conteúdos do 6º Ano	33
4.2.2. Descrição dos Conteúdos do 7º Ano	33
4.2.3. Descrição dos Conteúdos 8º Ano	34
4.2.4. Descrição dos Conteúdos 9º Ano	35
4.3. OUTRAS CONCLUSÕES	35
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
REFERÊNCIAS	38
APÊNDICE A - PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO.....	41

1. INTRODUÇÃO

A geometria é uma das grandes áreas da Matemática e está constantemente presente no cotidiano das pessoas. No contexto educacional atual, muitos estudiosos reconhecem que a geometria tem sido pouco trabalhada nas escolas e tem sido desde muito tempo um grande desafio para os professores de Matemática, pois momentaneamente os estudantes compreendem os conceitos, porém mais tarde se questionados já não lembram mais.

Como forma de superar esses desafios, pode-se destacar a utilização de metodologias ou estratégias para o ensino da geometria que valorizem a representação visual aliada às definições formais. Ao explorar a representação visual em uma atividade, o professor tem em mãos um material em que poderá pautar sua aula e proporcionar aos estudantes uma maneira mais significativa de compreender os conceitos.

A fim de explorar a representação visual de elementos da geometria, escolheu-se trabalhar com mandalas geométricas. Para tanto, elaborou-se esse trabalho em que se propõe construir Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA) baseados em mandalas geométricas fazendo uso de ferramentas de desenho geométrico do *software* GeoGebra, como uma metodologia alternativa ao ensino de geometria. Além disso, descrevem-se algumas possibilidades e potencialidades desses OVA, para a exploração de conteúdos de geometria do Ensino Fundamental, por meio do exercício da imaginação pedagógica.

Mandala é uma expressão derivada do sânscrito, língua ancestral da Índia, e significa “círculo sagrado”. São desenhos tidos como símbolos sagrados em algumas religiões e representam ciclos e portais de energia. Já as mandalas geométricas são desenhos com representações de círculos, circunferências, triângulos, quadrados, linhas e curvas, que seguem um padrão geométrico.

Ao propor essa temática busca-se produzir um material de geometria dinâmica a ser destinado a professores da Educação Básica com potencialidades para contribuir para o ensino e a aprendizagem dos estudantes.

Para tanto define-se o seguinte problema de pesquisa para nortear o trabalho: Quais possibilidades e potencialidades de interação e de conteúdos de geometria, do Ensino Fundamental II, podem ser exploradas em OVA construídos a partir de mandalas geométricas?

A fim de responder ao problema de pesquisa, o objetivo geral deste trabalho é indicar possibilidades e potencialidades de interação e de conteúdos de geometria, do Ensino

Fundamental II, que podem ser explorados em OVA construídos a partir de mandalas geométricas.

Elencam-se como objetivos específicos:

- (i) Definir o que são mandalas geométricas;
- (ii) Construir objetos virtuais de aprendizagem baseados em mandalas geométricas utilizando-se ferramentas de desenho geométrico do *software* GeoGebra;
- (iii) Apontar potencialidades e possibilidades de conteúdos de geometria e de interação dos OVA, por meio de um exercício de imaginação pedagógica;
- (iv) Classificar os conteúdos de geometria obtidos, por ano escolar do Ensino Fundamental II, conforme objetos de conhecimento e unidades temáticas Geometria e, Grandezas e Medidas, presentes na BNCC.

O interesse por esta pesquisa referente a utilização de ferramentas alternativas para o ensino, na Educação Básica, deu-se através de experiências em componentes curriculares durante a graduação. Por exemplo, nos componentes curriculares Metodologia do Ensino da Matemática e Laboratório de Matemática, foram discutidas e elaboradas metodologias alternativas de ensino através da confecção de materiais concretos e utilização de tecnologias digitais.

Ainda, a vivência do Estágio Curricular Supervisionado I também despertou esse interesse. Durante a realização deste estágio foram realizadas oficinas de reforço e na oportunidade trabalhei com revisão de conteúdos para uma prova de recuperação com a utilização de ferramentas alternativas para ensino, diferentes daquelas utilizadas pelo professor em sala. O resultado dessas oficinas foi positivo, os estudantes em sua maioria alcançaram notas superiores às das provas, o que evidencia a necessidade de mudança do ensino através da utilização de metodologias que atribuam significado à aprendizagem.

Além disso, no que tange à escolha pela aplicação no campo da geometria, no Ensino Fundamental, deu-se pelo meu interesse pessoal pela área e sua grande relevância no contexto escolar, pois acredito que este tipo de abordagem possa contribuir para o desenvolvimento de sujeitos críticos e pensantes com relação ao mundo à sua volta.

Neste contexto, trata-se de um trabalho, em que a escolha do tema mandala deve-se ao fato de ser um material rico para discussão de uma grande quantidade de conceitos geométricos, além da exploração da construção de mandalas utilizando-se tecnologias digitais, bem como a possibilidade de explorar possibilidades e potencialidades dos OVA construídos por meio de um exercício de imaginação pedagógica.

O presente trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos. Na introdução justifica-se a pertinência e seleção do tema, formula-se o problema, delinham-se o objetivo geral e os objetivos específicos que determinam o estudo. No segundo capítulo apresenta-se a revisão de literatura, em que se discorre sobre ensino e aprendizagem em geometria. Além disso, realiza-se uma breve descrição sobre objetos de conhecimento de geometria, do Ensino Fundamental II, presentes na BNCC. Na sequência citam-se alguns trabalhos que tratam do uso de mandalas no ensino, discorre-se acerca da utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática e OVA. Por fim, descreve-se sobre imaginação pedagógica.

No terceiro capítulo, apresenta-se a metodologia do trabalho. Trata-se de uma pesquisa qualitativa propositiva em que se elabora um material que poderá ser disponibilizado para professores de Matemática para o estudo de geometria no Ensino Fundamental.

No quarto capítulo, apresentam-se os OVA baseados na construção de mandalas geométricas, construídos no *software* GeoGebra e para cada um desses OVA descrevem-se os conteúdos de geometria, grandezas e medidas do Ensino Fundamental II, por meio de um exercício de imaginação pedagógica. Além dos conteúdos de geometria, grandezas e medidas apontam-se outras potencialidades dos OVA construídos. Em um segundo momento, classificam-se esses conteúdos de geometria conforme descrito na metodologia. No quinto capítulo apresentam-se as considerações finais do trabalho. No Apêndice A, apresenta-se o protocolo de construção dos OVA 1, 2 e 3.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo apresenta-se a revisão de literatura que norteia este trabalho. Discorre-se sobre ensino e aprendizagem em geometria. Também se discorre sobre a importância de sua representação visual para o ensino, além dos objetos de conhecimento de geometria do Ensino Fundamental II, presentes na BNCC. Na sequência, citam-se trabalhos que abordam o uso de mandalas no ensino de geometria. Discorre-se também sobre tecnologias digitais e o seu uso para o ensino, a fim de definir e situar OVA, neste contexto. Por fim, apresenta-se a pesquisa de possibilidades em Matemática, segundo Skovsmose, conhecida como exercício de imaginação pedagógica.

2.1. ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

O ensino de geometria tem sido um tema constante de pesquisa e discussão na área da Educação Matemática acerca dos seus métodos, isso porque em muitos momentos a geometria não é trabalhada em sala de aula ou a metodologia aplicada por professores não atende as expectativas dos estudantes criando dificuldades na compreensão dos conteúdos e afastando-os da Matemática.

A geometria é uma das grandes áreas da Matemática e segundo Oliva (1981, p. 28 *apud* Souza; Lopo, 2019) “é uma das áreas mais antigas de estudos e surgiu da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos, etc”. Ela é intuitiva e concreta e está constantemente presente no cotidiano das pessoas, sendo indispensável estudá-la, como destaca LORENZATO (1995, p. 5):

[...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem habilidade, dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar da Geometria como a fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se incompleta.

Concorda-se com o autor que a geometria estimula a percepção visual das pessoas, o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, e que por estar ligada a realidade e presente no cotidiano das pessoas, estudá-la auxilia na interpretação do espaço em que elas vivem.

O autor ainda reforça quais conteúdos de geometria devem ser estudados, uma vez que eles estão presentes no cotidiano:

[...] mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria. (LORENZATO, 1995. p. 9).

A importância de se estudar geometria desde os anos iniciais da educação básica é justificada pelo papel que ela desempenha no desenvolvimento lógico de cada indivíduo, conforme destacado por Fainguelernt (1995):

[...] a geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor, quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. Através do processo ensino-aprendizagem da Geometria, o aprendiz tem a capacidade de ativar suas estruturas mentais, facilitando a passagem do estágio das operações concretas para o de operações formais. A Geometria é, portanto, um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar [...]. (FAINGUELERNT, 1995, p. 9).

Formas e ideias geométricas estão presentes nas construções antigas e modernas, na construção de mapas, na natureza com representações de espirais, esferas, e hexágonos perfeitos em árvores, flores e favos de mel. Assim, o fato de a geometria fazer parte da vida, permite a realização de uma abordagem crítica da realidade, relacionando o conteúdo com situações concretas do cotidiano. Essa abordagem provoca e desperta o interesse do estudante e deixa explícita a importância dos conceitos e linguagens geométricas.

Considerando sua importância, é fundamental proporcionar aos estudantes uma experiência que trabalhe um paralelo entre as definições formais e a representação visual com o intuito de assegurar a compreensão dos conceitos geométricos. Lorenzato (2016, *apud* Kamanski e Silva, 2016), comenta “sobre as possibilidades da utilização de materiais concretos levantarem questionamentos que, de outra forma, poderiam não surgir”. Ao fazer uso de um material visual para trabalhar um conceito o professor pode promover em sala uma rica discussão no intuito de construir os conceitos em conjunto com os estudantes.

A geometria é uma ampla área para trabalhar situações-problema que promovam e estimulem os estudantes a observar, explorar, perceber e identificar diferenças e semelhanças. Nesse contexto, PAIS (1996, p. 68), destaca que “a representação dos conceitos geométricos por um desenho é um dos recursos didáticos mais fortemente consolidados no ensino e na aprendizagem da geometria”. Com a realização de exercícios de geometria com o uso de representações o estudante tem a possibilidade produzir estímulos para ativar e desenvolver

suas estruturas mentais e assim facilitar sua aprendizagem e a construção do seu pensamento lógico.

A aprendizagem em matemática não é adquirida a partir de repetições e de um ensino mecânico, ela necessita o desenvolvimento do caráter investigativo do estudante. Assim, para SOUZA, *et al.* (2017), tratando-se da aprendizagem no campo da geometria, “os estudantes descobrem relações e desenvolvem a percepção espacial construindo, desenhando, medindo, visualizando, comparando, transformando e classificando figuras”.

Essa ideia está presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - Ensino Fundamental onde é destacada a importância “da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação”. Ainda o documento cita que a apropriação dos significados matemáticos por parte dos estudantes está ligada às conexões que estes estabelecem com os mais diversos materiais e também com os demais componentes curriculares.

2.1.1. A geometria do ensino fundamental II na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo, que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver na Educação Básica. Na BNCC Ensino Fundamental II, o componente curricular de Matemática apresenta dentre as cinco unidades temáticas a Geometria e, Grandezas e Medidas. Nesta unidade do 6º ao 9º Ano, alguns dos objetos de conhecimento da unidade temática Geometria que devem ser trabalhados são polígonos e polígonos regulares, retas paralelas, perpendiculares, figuras semelhantes, triângulos, simetrias, circunferência, mediatriz e bissetriz e da unidade temática Grandezas e Medidas são ângulos, perímetro e área de polígonos e comprimento da circunferência (BRASIL, 2018).

Neste trabalho, a partir da análise de possibilidades dos OVA construídos, inicialmente, descrevem-se conteúdos de geometria. Na sequência classificam-se esses conteúdos por ano do Ensino Fundamental II, a partir dos objetos de conhecimento presentes na BNCC.

2.2. MANDALAS GEOMÉTRICAS

Nesse contexto de valorização das representações visuais pode-se destacar a ligação entre a matemática e a arte. Apesar de seus conteúdos serem tratados de forma isolada na

Educação Básica, as duas áreas têm muito em comum e podem auxiliar o estudante a produzir e expressar suas ideias e interpretações na Matemática, com o auxílio da arte.

As mandalas são consideradas de origem oriental, e são uma das formas de arte mais antigas da humanidade. Elas representam cura e espiritualidade e são utilizadas por budistas e hindus na prática de orações e meditações, pois ajudam na concentração. Os mais variados tipos de mandalas podem ser encontradas em todas as religiões, assim como na psicologia, na arquitetura e na arte, elas podem constituir um interessante objeto de estudo para a geometria, uma vez que a beleza e a harmonia expressas dependem de uma estrutura geométrica. Conforme YAMADA (2013, p. 3):

A mandala vem de uma palavra em sânscrito que significa “círculo, centro, circunferência” e apresenta figuras inscritas criadas com base em uma estrutura geométrica, constituída por retas e arcos que partem de pontos correspondentes à divisão igualitária da circunferência, podendo apresentar características fortemente simétricas.

Conforme SOUZA, *et al.* (2017): “Os desenhos de Mandalas apresentam uma estrutura diferenciada, que é constituída por desenhos geométricos, formados por eixos simétricos que dividem o espaço em partes iguais que se cruzam no centro do círculo.” Assim, pode-se destacar nas mandalas um grande potencial para explorar conceitos e relações geométricas, conforme destaca Ramos:

A proposta de construção de Mandalas apresenta grande potencial de exploração e fixação de conceitos geométricos, assim como de estudo de relações geométricas e de sobreposição de figuras e linhas, além de melhorar a percepção visual dos estudantes. (RAMOS, 2016, p. 21).

YAMADA (2013, p. 3), também enfatiza que as mandalas “apresentam um grande potencial na exploração de conceitos de divisão geométrica de círculos, na criação de estruturas tomando como base essas divisões e na fixação desses conteúdos.”

O ensino de geometria através da construção de mandalas é um tema ainda pouco presente na literatura e que vem sendo explorado mais nos últimos anos em trabalhos acadêmicos. Em sua maioria, esses trabalhos têm como foco principal a elaboração de uma sequência de atividades, com o objetivo de construir e explorar elementos e conceitos geométricos presentes em mandalas. Pode-se destacar entre eles, um estudo que traz uma análise das mandalas presentes em diferentes culturas e contextos e que desenvolve uma sequência de atividades utilizando construção de mandalas com régua e compasso e com o *software* GeoGebra, para estudar simetria no 7º Ano do Ensino Fundamental (SILVA, 2020).

Destaca-se também o trabalho de Ramos (2016), que descreve e analisa uma intervenção pedagógica realizada com a construção de mandalas, para trabalhar conteúdos matemáticos com o 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola. Ainda, destaca-se um trabalho que traz uma breve discussão relacionando geometria e arte e que descreve uma prática de construção de mandalas com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de relacionar conteúdos matemáticos com arte (SOUZA, *et al*, 2017).

Conforme enfatizado por CHULEK, *et al* (2018) as mandalas estão presentes em nossa volta, e que quando observado com atenção elas podem ser encontradas na arquitetura e na natureza. Neste trabalho as autoras trazem exemplos de mandalas presentes em nosso cotidiano, como, por exemplo, a laranja, a teia de aranha que tem um centro definido e toda estrutura da teia converge para esse centro, e a roda de um veículo. A Figura 1 representa a ilustração da roda de um veículo. Analisando-se essa figura pode-se observar um padrão geométrico presente, como por exemplo, cinco ângulos congruentes medindo 72° .

Figura 1: Ilustração de uma roda.



Fonte: CHULEK, *et al* (2018, p. 8)

Ainda, CHULEK, *et al* (2018) destacam que quando observadas mandalas já prontas é possível relacionar a conceitos básicos da geometria, já quando é construída uma mandala pode-se aprofundar mais o estudo e abranger uma gama maior de conceitos.

Assim, uma mandala geométrica é um desenho de formas geométricas concêntricas, ou seja, que se desenvolvem a partir de um mesmo centro. Ela pode ser composta de retas, circunferências ou outras curvas, quadrados ou outros polígonos.

Com relação à construção de mandalas geométricas ela pode ser realizada utilizando-se instrumentos de desenho geométrico: compasso, régua e transferidor. As figuras 2-a) e 2-b), apresentam, respectivamente, uma mandala sendo construída, em dois estágios.

Figura 2: Mandalas construídas manualmente.

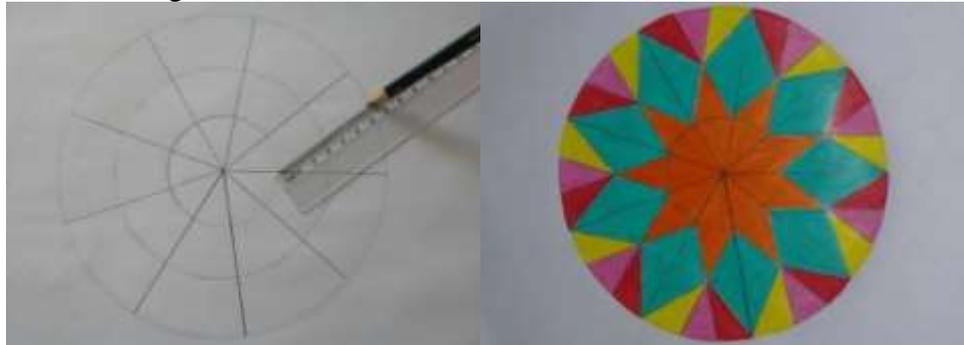


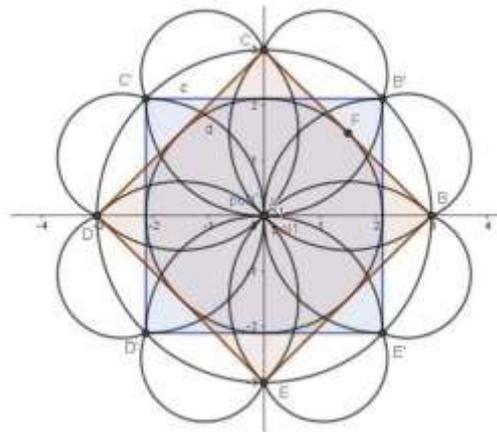
Figura 2-a)

Figura 2-b)

Fonte: Kamanski e Silva (2016)

A Figura 3 apresenta uma mandala construída no GeoGebra.

Figura 3: Mandala construída no GeoGebra.



Fonte: Silva (2020, p. 57)

Esta é uma mandala mais elaborada. Percebe-se que uma mandala construída em um *software* de geometria dinâmica traga muitas possibilidades de interação do estudante com a atividade elaborada.

2.3. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), ou simplesmente, tecnologias digitais podem ser definidas como um conjunto de recursos tecnológicos utilizados de forma integrada com um objetivo comum, elas podem ser utilizadas nas mais diversas formas, na indústria, no comércio, na educação, etc.

Vive-se em um mundo de constantes e grandes avanços e transformações tecnológicas e esse desenvolvimento reflete diretamente na vida humana e, portanto, torna-se necessário utilizá-la também na educação para o ensino. Para Oliveira e Moura (2015, p. 76): “A utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino, é cada vez mais necessária, pois torna a aula mais atrativa, proporcionando aos estudantes uma forma diferenciada de ensino”.

O cenário educacional atual, apesar de apresentar algumas dificuldades com relação a utilização das TIC, como a falta de domínio das ferramentas por parte dos professores e a falta de estrutura, vem apresentando constantes mudanças no que diz respeito à inclusão dessas tecnologias nas escolas. Nesse contexto Martins (2008) destaca que:

As tecnologias de informação e comunicação (TICs) apresentam novas possibilidades para o indivíduo vivenciar processos criativos, estabelecendo aproximações e associações inesperadas, juntando significados anteriormente desconexos e ampliando a capacidade de interlocução por meio das diferentes linguagens que tais recursos propiciam (MARTINS, 2008).

Com relação à utilização das TIC na sociedade e no ensino Felipe (2015, p. 10) afirma que:

[...] a introdução das tecnologias de informação e comunicação (TICs) na sociedade, foi motivo de uma mudança comportamental e social nitidamente vista e aqueles que não acompanham o desenvolvimento das mesmas ficam excluídos desse processo social e são denominados analfabetos digitais. Sendo algo tão viável é óbvio que a educação, princípio norteador do ser humano, não poderia ficar de fora desse contexto, visto que é muito o leque de contribuição das tecnologias no processo ensino-aprendizagem [...]. (FELIPE, 2015, p. 10).

Na atualidade ainda é muito comum alguns estudantes não possuírem, em sua casa computador, *tablet* ou *smartphone*, com bom acesso à internet. Nesse sentido, compete à escola cumprir o seu papel de inclusão digital e igualdade social levando, conforme destaca Felipe (2015, p. 15): “de maneira prática e dinâmica as TICs para dentro do ambiente escolar visando uma universalização de acesso às novas tecnologias”. Para o autor, “a forma como o sistema educacional incorpora as TICs afeta diretamente a diminuição da chamada exclusão digital existente no país”. Assim a inserção de tecnologias nas atividades escolares permite que esses estudantes passem a ter acesso, a conhecer e aprender a manusear e trabalhar com

essas ferramentas. A incorporação das TIC no contexto escolar favorece a inclusão social e a preparação do indivíduo para o mercado de trabalho.

Neste sentido, conforme está na BNCC, durante a Educação Básica deve-se assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais, sendo uma delas, a competência cinco, que trata da necessidade da compreensão, do uso e da criação de tecnologias digitais de informação e comunicação, de modo consciente e crítico, tanto para comunicação quanto para o ensino e a aprendizagem de conteúdos:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

Com relação a utilização de TIC nas aulas de matemática, Scheffer (2012, p. 31) afirma que: “a incorporação de novos recursos tecnológicos na sala de aula de matemática resulta na criação de ambientes de aprendizagem que levam o estudante ao desenvolvimento de novos conceitos e à consolidação da aprendizagem”. Concorda-se com a autora que também defende que a utilização de tecnologias desenvolve habilidades como leitura, imaginação, criatividade e exercício dos conteúdos que já conhece.

De acordo com Henz (2008) quando se fala em métodos de ensino é comum ouvir reclamações dos estudantes de que as aulas são monótonas e que não há uma ligação entre o conteúdo trabalhado e o cotidiano do estudante, assim a autora destaca que “uma das maneiras de tornarmos as aulas de Matemática mais atraentes é utilizarmos recursos tecnológicos como auxílio”. Portanto, a utilização de tecnologias pode proporcionar novas formas de aprendizagem que estimulam a participação e o interesse dos estudantes e contribua para que esses compreendam os conceitos ensinados. A utilização da tecnologia pode auxiliar o professor a diversificar suas metodologias de ensino, sendo possível criar aulas dinâmicas que provoquem questionamentos que resultarão em novos conhecimentos.

Ainda com relação ao uso de tecnologias para as aulas de geometria, Puentes (2017, p. 45) enfatiza que: “A geometria é considerada a parte mais importante do currículo matemático do aluno” e que:

O uso de *softwares* de geometria dinâmica aumenta significativamente as possibilidades de melhoria das práticas pedagógicas em sala de aula e, com isso, a aprendizagem dos estudantes. Estes *softwares* são caracterizados por ambientes virtuais interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Desde esse ponto de vista, tais dispositivos tecnológicos

facilitam a compreensão de conceitos e propriedades envolvidos. (PUENTES, 2017, p. 45).

Dentre esses vários *softwares* de geometria pode-se destacar o GeoGebra. Desenvolvido e idealizado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um *software* livre e gratuito que permite trabalhar geometria de maneira dinâmica abordando vários conteúdos matemáticos e com a possibilidade de se trabalhar em vários níveis de ensino. Para Cattai (2007, *apud* Costa; Lacerda, 2013, p. 4):

[...] o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. (CATTAI *apud* Costa; Lacerda, 2013, p. 4).

Com relação a utilização do *software* GeoGebra nas aulas de Matemática, Medina e Leineker (2014) enfatizam que:

Trabalhando com esta ferramenta os alunos podem fazer manipulações das construções realizadas. Fazer conexão entre a geometria e a álgebra. Ao realizar as manipulações, respeitando as estruturas das construções, possibilita ao educando a análise das propriedades envolvidas, e através da visualização desenvolvam o raciocínio geométrico. (MEDINA E LEINEKER, 2014).

Concorda-se com os autores que o GeoGebra se apresenta como uma ferramenta tecnológica eficaz no ensino de Matemática pois permite a construção, visualização e investigação de uma gama de conceitos matemáticos.

2.3.1. Objetos virtuais de aprendizagem

Utilizando-se o GeoGebra, pretende-se construir alguns Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA) baseados em mandalas geométricas. Segundo Audino (2010), OVA é qualquer material digital que possa ser utilizado e reutilizado para dar suporte ao processo de ensino. De acordo com SPINELLI (2007, p. 7):

Um objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade. [...] dessa forma, pode compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades e integrando a metodologia adotada para determinado trabalho.

Os autores GUARDA E PETRY (2020, p. 717), consideram que: “os OVA constituem-se como elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, contribuindo na motivação e interação dos estudantes, permitindo uma visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados”, ressaltando, porém, a necessidade de complementação dos estudos através de sistematizações para o desenvolvimento de habilidades da representação descritiva desses objetos. Os autores ainda destacam que “no âmbito escolar, o objeto virtual de aprendizagem tem por finalidade dinamizar o processo de ensino e aprendizagem focado na construção do conhecimento científico. *Softwares*, como GeoGebra, são utilizados como ferramenta na construção de OVA”.

Neste trabalho, utilizou-se o *software* GeoGebra para a elaboração de OVA por esse ser um *software* livre, de fácil acesso e manuseio.

2.4. ANÁLISE DE POSSIBILIDADES E IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA

A partir da elaboração dos OVA pretende-se realizar uma análise de possibilidades e potencialidades a serem exploradas nesses OVA, por meio de um exercício de imaginação pedagógica, conforme proposto por Skovsmose (2015).

Ele propôs trabalhar com pesquisas de possibilidades em Matemática, que, segundo Skovsmose (2015, p. 69-70): “inclui não somente um estudo de ‘o que é’ ou ‘o que é construído’, mas também um estudo de ‘o que não é’ e ‘o que poderia ser construído’”. Para tanto, ele sugere que se considere uma situação imaginada ou uma situação arranjada para efetuar tal pesquisa. A questão é que uma situação imaginada pode estar longe da realidade, além de incluir esperanças, aspirações parciais e inconsistentes. Já a situação arranjada pode ser mais complexa, mas é um tipo de situação intermediária, que, segundo SKOVSMOSE (2015, p. 75): “[...] mas que oferece-nos uma maneira de olhar para o que se imaginava.”

Essa pesquisa de possibilidades, conforme Skovsmose (2015), quando ela se refere à escolarização e à educação, é denominada imaginação pedagógica. Segundo esse autor “[...] tal imaginação pode sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis.” (SKOVSMOSE, 2015, p. 76).

Por fim, pretende-se explorar os conceitos de Geometria presentes nesses objetos. Para tanto, será realizado um exercício de imaginação pedagógica tendo como objetivo identificar possibilidades e potencialidades quanto aos OVA construídos, pois conforme destacado por KLEEMANN e PETRY (2020, p. 236): “Quando são desenvolvidas ou

apresentadas novas propostas metodológicas para o ensino de matemática é importante fazer um exercício de imaginação pedagógica.”

O exercício da imaginação pedagógica estimula o desenvolvimento do raciocínio exploratório, onde o pesquisador vai analisando possibilidades, buscando informações, explorando e aprimorando e comparando ideias que permitem adquirir resultados para análise realizada.

Concorda-se com os autores que a realização do exercício de imaginação pedagógica se apresenta como uma atividade eficaz na investigação das possibilidades relacionadas a novas metodologias e objetos de ensino. Com relação a utilização de mandalas no ensino de geometria a realização do exercício se mostra extremamente necessária, pois, por se tratar de um objeto de estudo ainda pouco conhecido e explorado, muitas são as desconfianças com relação a sua aplicabilidade na Matemática. A partir da realização do exercício estimulando o raciocínio exploratório, será possível identificar as potencialidades das mandalas no ensino de geometria.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho consiste numa pesquisa qualitativa propositiva em que se elaboram quatro OVA, usando o *software* GeoGebra, a fim de disponibilizar, aos professores de Matemática, ferramentas que possam contribuir para a compreensão de conceitos e aprendizagem em geometria, no Ensino Fundamental II. Justifica-se ela ser propositiva neste sentido.

A pesquisa qualitativa busca interpretar através de uma análise exploratória os OVA construídos. GARNICA (1999, p. 8) afirma que “na pesquisa qualitativa, a trajetória de análise dos dados coletados e disponíveis, principalmente, na forma de descrições, é toda ela interpretativa”. Assim a pesquisa qualitativa não trabalha com quantitativos, MINAYO (2001, p. 14) deixa claro essa ideia: “A pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis”.

Considerando os OVA como dados de pesquisa, desenvolve-se um estudo de possibilidades e potencialidades de conteúdos e interação desses OVA, por meio de um exercício de imaginação pedagógica, na perspectiva proposta por Skovsmose. Esta análise realiza-se a partir das percepções da autora deste trabalho.

Por fim, organiza-se em quadros, por ano, do Ensino Fundamental II, conteúdos de geometria, grandezas e medidas presentes nesses OVA, conforme objetos de conhecimento presentes na BNCC.

4. DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DOS DADOS

Com o intuito também de disponibilizar um material para professores do Ensino Fundamental, inicialmente, apresentam-se os OVA, sendo que para os OVA 1, 2 e 3, o protocolo de construção encontra-se no Apêndice A. Para cada um dos OVA apresentados realiza-se uma descrição de potencialidades e possibilidades, por meio da imaginação pedagógica. Na segunda seção organiza-se em quadros, por ano, do Ensino Fundamental II, os conteúdos de geometria presentes nesses OVA. Essa classificação é realizada com base nos objetos de conhecimento propostos na BNCC, para as unidades temáticas Geometria, Grandezas e Medidas.

Os OVA aqui apresentados poderão ser construídos pelo professor em conjunto com seus estudantes, a partir dos roteiros descritos e disponibilizados no Apêndice A. Essa construção conjunta poderá contribuir para a argumentação e a compreensão de conceitos de forma significativa pelo estudante.

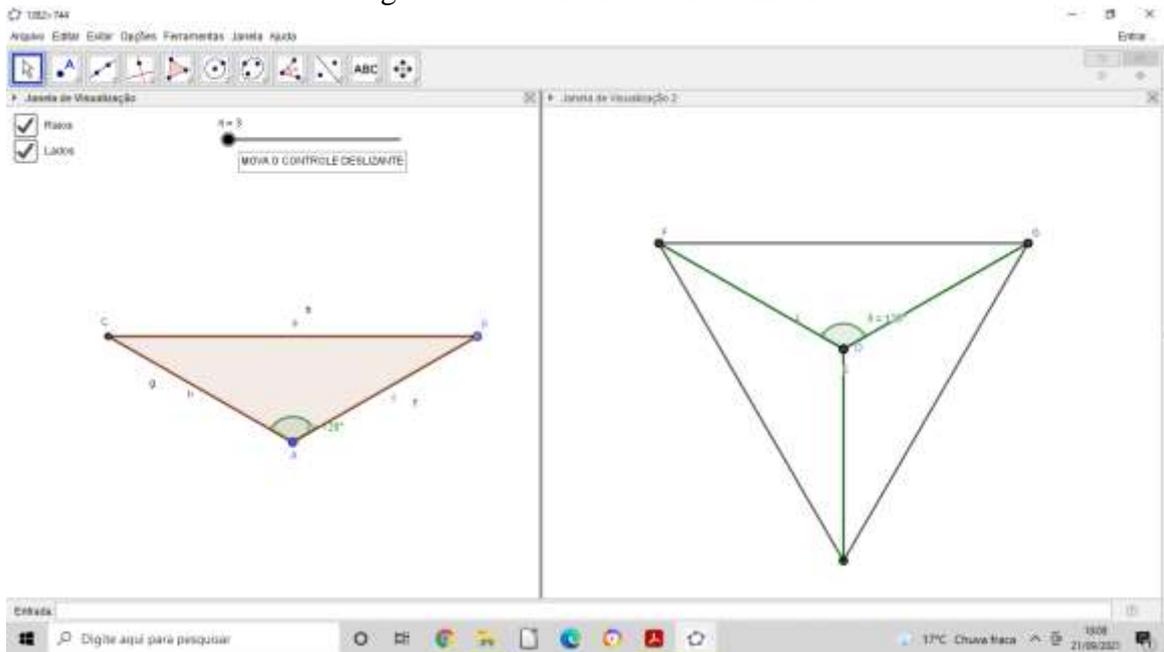
4.1. OS OVA E UMA DESCRIÇÃO DE POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES

Nesta seção apresentam-se os OVA construídos e para cada um deles realiza-se uma descrição de possibilidades e potencialidades realizada por meio de um exercício de imaginação pedagógica. Apresentam-se percepções da autora desse estudo, após a construção e interação com o material, analisando e descrevendo possibilidades ou potencialidades dos OVA para se trabalhar geometria no Ensino Fundamental II.

4.1.1. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 1

O primeiro objeto (OVA 1), Figura 4 e Figura 5, representa uma mandala, que é um polígono regular, composta por triângulos. A mandala possui um controle deslizante que pode variar o número de lados desse polígono, de três a doze.

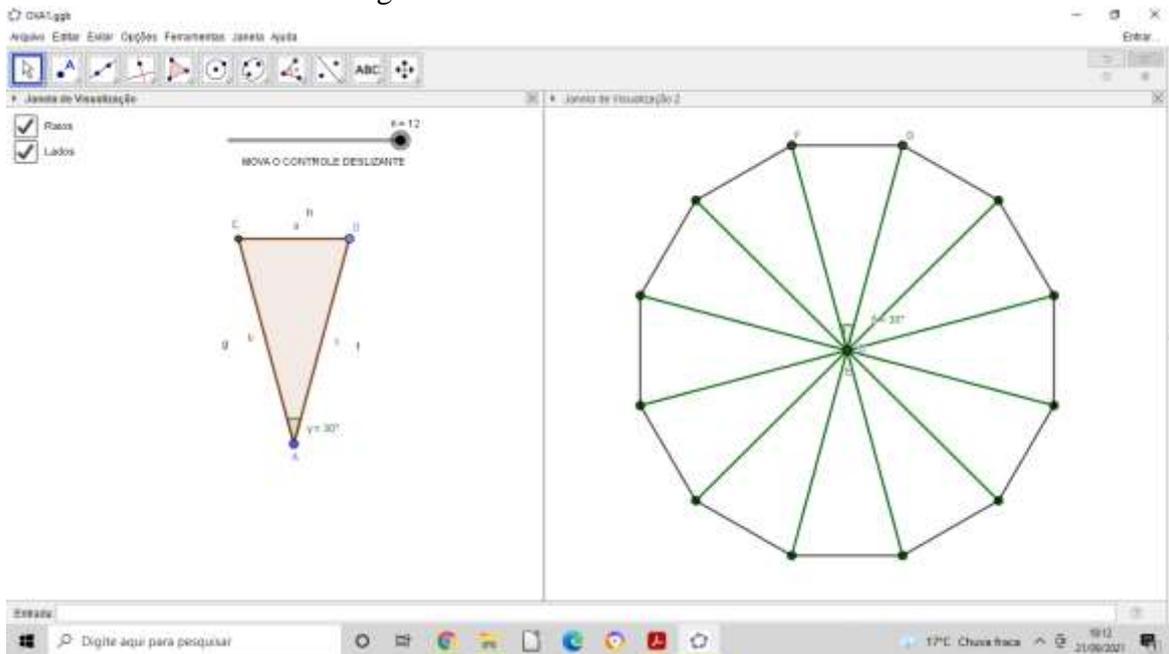
Figura 4: OVA 1 - Mandala com 3 lados



Fonte: adaptado pela autora de <https://www.geogebra.org/m/evhphp9t>

A Figura 5 apresenta o OVA 1 com 12 lados que é obtido a partir da manipulação controle deslizante.

Figura 5: OVA 1 - Mandala com 12 lados



Fonte: adaptado pela autora de <https://www.geogebra.org/m/evhphp9t>

Este objeto apresenta um controle deslizante permitindo formar um polígono regular de 3 lados até um polígono regular de 12 lados. Sempre que utilizado, o controle irá variar o número de lados do polígono, mas a mandala será sempre formada em seu interior por triângulos.

Utilizando o OVA 1 podem ser explorados conteúdos relacionados ao tópico de ângulos, como reconhecer os elementos que compõem um ângulo e sua classificação com relação à medida em: agudo, reto, obtuso e raso além da construção geométrica dos ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° . Também pode ser explorada a bissetriz de um ângulo.

Observando o ângulo γ representado nas Figuras 4 e 5, do triângulo ABC, utilizando $n=3$ o ângulo γ mede 120° . Já para $n=12$ o ângulo γ mede 30° . Assim, tem-se que a alteração no número de lados implica em uma mudança nas medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos que compõem a mandala.

Portanto, a partir da utilização do controle deslizante podem ser exploradas várias propriedades ligadas aos triângulos. Entre os conteúdos que podem ser trabalhados pode-se destacar a identificação dos elementos básicos como: vértices, ângulos e lados, condição de existência de um triângulo, classificação do triângulo quanto a medida dos seus lados em: equilátero, isósceles e escaleno, classificação do triângulo quanto a medida dos seus ângulos internos em: retângulo, obtusângulo e acutângulo. Ainda, podem ser analisadas propriedades como: a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , o menor lado é sempre oposto ao menor ângulo interno e o maior lado é sempre oposto ao maior ângulo interno.

Movimentando o controle deslizante podem ser comparados os triângulos formados quando, por exemplo, $n=5$ e $n=10$. A comparação busca identificar se os triângulos formados com $n=5$ são semelhantes aos triângulos formados com $n=7$, explorando os casos de semelhanças de triângulos, sendo eles: caso ângulo, ângulo (AA), caso lado, lado, lado (LLL) e caso lado, ângulo, lado (LAL). Também, podem ser analisados com essa mandala a congruência de triângulos, explorando os casos: três lados congruentes, dois lados congruentes e o ângulo formado por eles também congruente e dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruente. A análise utilizando a mandala busca verificar se existe a congruência e a semelhança, e caso exista identificar qual o caso.

Utilizando $n=4$, o polígono externo será um quadrado, formado internamente por 4 triângulos sendo que o ângulo $\gamma=90^\circ$. A partir dessa mandala podem ser exploradas as relações trigonométricas ou razões trigonométricas seno, cosseno e tangente que relacionam as medidas dos lados de um triângulo retângulo com as medidas de seus ângulos.

Considerando o polígono externo de $n=3$ até $n=12$ lados, podem ser explorados conteúdos ligados a esses polígonos, como o que é um polígono, nomenclatura, apótema, polígonos côncavos e convexos. Ademais pode ser trabalhada a classificação dos polígonos em regulares e irregulares, analisando as medidas de todos lados e de todos os ângulos internos.

Também pode ser explorado o cálculo de área dos polígonos de $n=5$ até $n=12$ lados, a partir do cálculo da área de um triângulo.

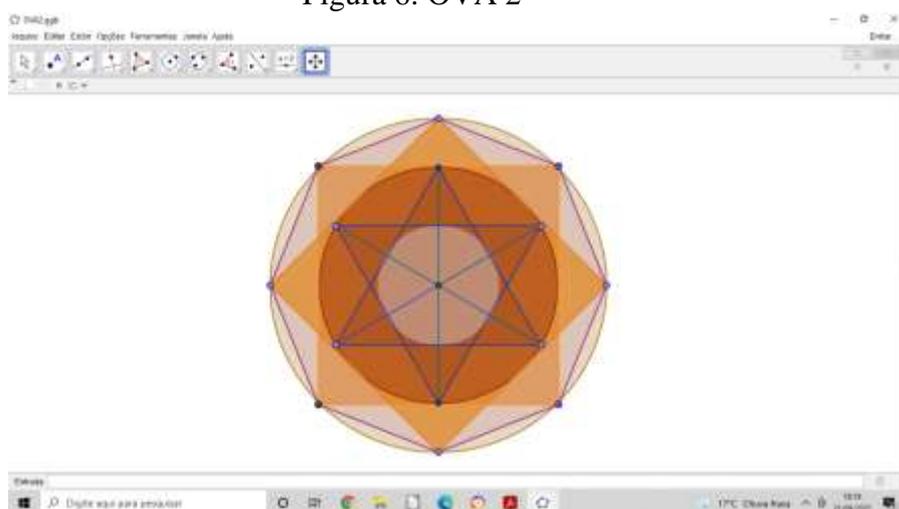
Por meio do OVA 1 podem ser exploradas questões de raciocínio lógico que estimulem os estudantes a pensar, como por exemplo, sabendo que o triângulo ABC é escaleno e que a medida do ângulo $\gamma=120^\circ$, qual é a medida dos outros dois ângulos? A partir dessa questão pode ser trabalhado com os estudantes a equação $120^\circ + 2x = 180^\circ$, para solucionar o problema proposto.

Portanto, por meio da análise de possibilidades observamos várias potencialidades, listadas acima, do OVA 1 para estudo da geometria no Ensino Fundamental II.

4.1.2. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 2

O segundo objeto (OVA 2), Figura 6, representa uma mandala composta por círculos, triângulos, quadrados e um octógono.

Figura 6: OVA 2



Fonte: A autora – GeoGebra

O OVA 2 é formado de círculos, quadrados, triângulos e um octógono. Nele pode ser explorada a definição de círculo e de circunferência, e propriedades relacionadas a eles.

Podem ser identificados a partir da mandala o raio e o diâmetro das três circunferências. A partir da identificação do diâmetro pode-se explorar a razão entre o comprimento de qualquer circunferência ou perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro sempre resulta em um mesmo número, essa constante foi chamada de pi, denotada pelo símbolo π . A partir dessa razão, encontra-se a expressão que possibilita determinar o comprimento da circunferência ou perímetro em função do raio. Utilizando as cores presentes na mandala é possível fazer um comparativo e estabelecer a diferença entre a definição de circunferência e a de círculo.

Com relação ao círculo, utilizando-se o OVA 2 é possível calcular a área dos três círculos presentes. Ainda, é possível identificar elementos como corda, arco, setor circular e segmento circular.

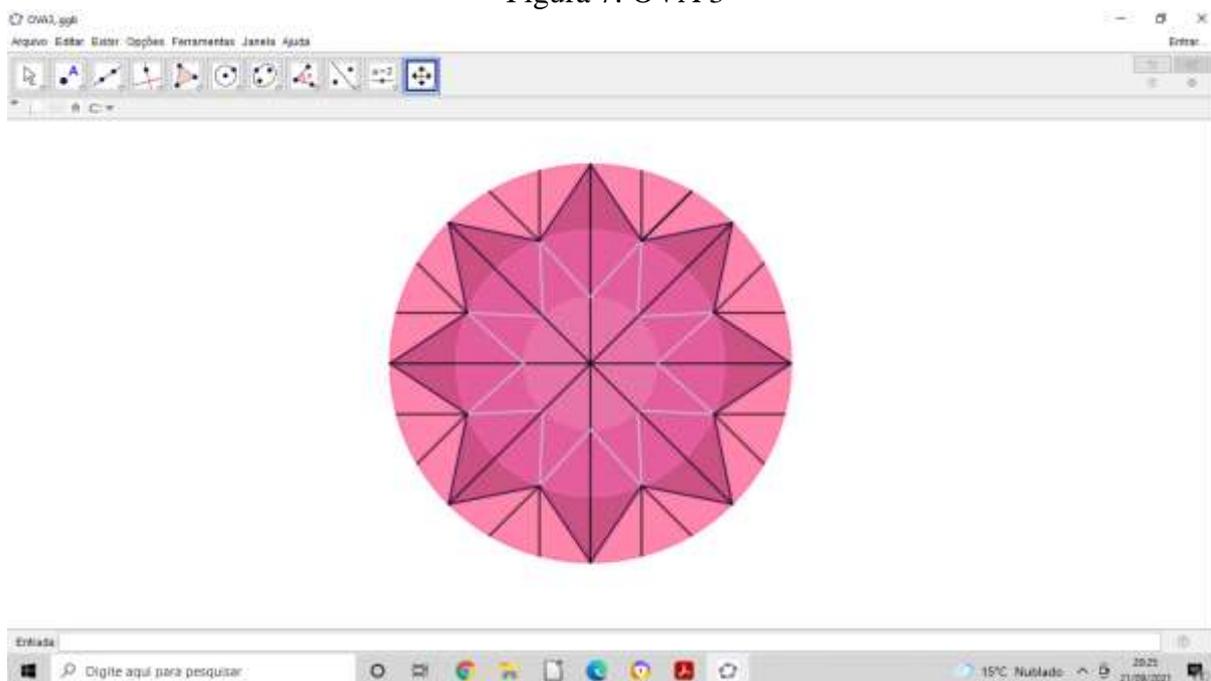
Na mandala podemos observar polígonos inscritos e circunscritos. Polígonos inscritos são aqueles que estão no interior de uma circunferência, de modo que todos os seus vértices são pontos dela. Já os polígonos circunscritos estão no exterior de uma circunferência e apresentam todos os seus lados tangentes a ela. No OVA 2 todos os pontos do octógono são pertencentes à circunferência, nessa situação tem-se que o octógono é inscrito na circunferência ou que a circunferência circunscreve o polígono. Observando os dois quadrados e a circunferência que está no seu interior, todos os lados do polígono são tangentes à circunferência, nesse caso é o polígono que circunscreve a circunferência ou a circunferência está inscrita no polígono.

Observando a construção do objeto, pode-se notar que o conceito de mediatriz pode ser explorado, visto que o quadrado cor laranja claro foi construído a partir da construção da mediatriz de dois segmentos. Traçando a mediatriz dos segmentos que formam o lado do quadrado laranja escuro, os pontos em que a mediatriz interceptou a circunferência maior foram ligados através de quatro segmentos formando o quadrado laranja claro.

4.1.3. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 3

O terceiro objeto (OVA 3), Figura 7, representa uma mandala composta por círculos e polígonos côncavos.

Figura 7: OVA 3



Fonte: A autora - GeoGebra

O terceiro objeto foi elaborado a partir da construção de retas paralelas e da mediatriz de alguns segmentos. A partir do OVA pode ser explorada a simetria reflexiva e de rotação.

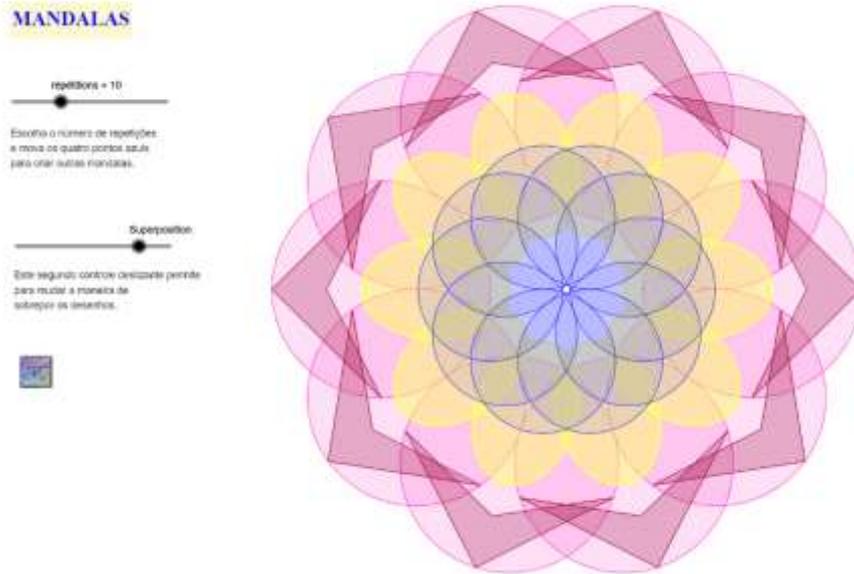
A simetria reflexiva também conhecida como do espelho ou axial, quando uma linha passa sobre a figura de tal maneira que as duas partes ficam exatamente iguais. Considerando o OVA 3, se traçado um eixo de simetria sobre o eixo y serão formadas duas partes iguais, assim também acontece se traçado no eixo x ou em qualquer outro eixo que passe pelo centro da mandala. A simetria de rotação ou central acontece se, ao girar uma figura ao redor de um ponto, ela fica exatamente com o mesmo formato como na posição original, isso pode ser observado rotacionando o OVA 3.

Assim como no objeto anterior, podem ser explorados os conceitos de círculo e circunferência, raio e diâmetro e suas relações. Ainda, podem ser explorados polígonos côncavos e convexos visto que a mandala apresenta dois polígonos convexos com 16 lados.

4.1.4. Análise de Possibilidades e Potencialidades do OVA 4

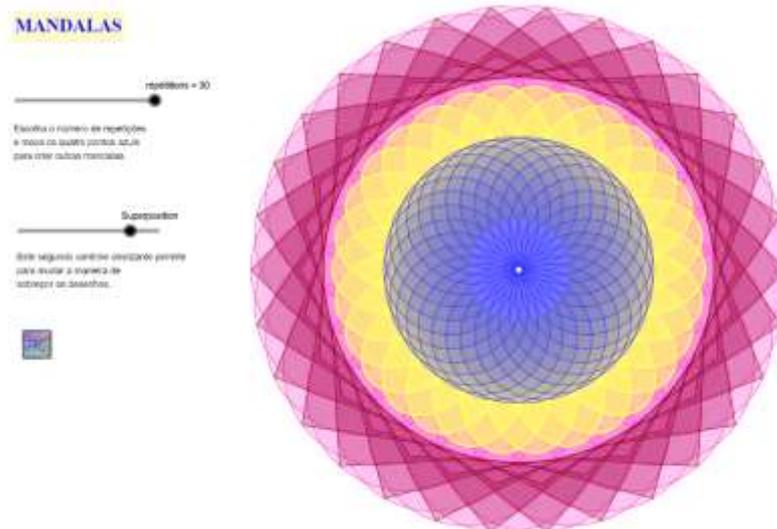
O OVA 4 representado nas figuras 8 e 9 foi retirado do GeoGebra versão on-line e pode ser acessado em: <https://www.geogebra.org/m/SUC9GxNK>.

Figura 8: OVA 4 com 10 repetições



Fonte: <https://www.geogebra.org>

Figura 9: OVA 4 com 30 repetições



Fonte: <https://www.geogebra.org>

O passo a passo para construção do OVA 4 está disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/SUC9GxNK> -> opções -> protocolo de construção.

O OVA 4, permite explorar conceitos tais como: simetria, ângulos e circunferências, além de outros conteúdos de ensino superior. Nesse objeto fica evidente a relação matemática e arte, a mandala é uma representação artística que se assemelha ao desenho de uma flor e é dotada de um padrão geométrico em sua construção.

4.2. CLASSIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS

Nesta seção agrupa-se em quadros os resultados da análise de possibilidade de conteúdos de geometria, por ano do Ensino Fundamental II, considerando objetos de conhecimento e as unidades temáticas Geometria, Grandezas e Medidas. Não se faz distinção dos objetos de conhecimento e suas respectivas unidades temáticas.

4.2.1. Descrição dos Conteúdos do 6º Ano

Quadro 1: Conhecimentos geométricos - 6º ano

6º Ano	
OVA	Objetos de Conhecimento
OVA 1	<ul style="list-style-type: none"> - Polígonos: nomenclatura quanto ao número de lados, vértices e ângulos, e classificação em regulares e não regulares; - Características dos triângulos e classificação em relação às medidas dos lados e dos ângulos; - Construção de figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução.
OVA 2	<ul style="list-style-type: none"> - Definição e propriedades de quadrado, triângulo e octógono.
OVA 3	<ul style="list-style-type: none"> - Construção de retas paralelas fazendo uso de <i>softwares</i>;
OVA 4	<ul style="list-style-type: none"> - Construção de figuras semelhantes.

Fonte: A autora.

Analisando o quadro acima podemos identificar que em relação ao 6º ano o objeto que apresenta mais possibilidades de interação é o OVA 1. Tendo como base os objetos de conhecimento da BNCC, o OVA 1 permite explorar grande parte dos conteúdos de geometria plana previstos para o 6º ano.

Os demais objetos apresentam menos possibilidades para se trabalhar com o 6º ano, podendo ser trabalhado um objeto do conhecimento para cada um deles.

4.2.2. Descrição dos Conteúdos do 7º Ano

Quadro 2: Conhecimentos geométricos - 7º ano

7º Ano	
OVA	Objetos de Conhecimento
OVA 1	- Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos;
OVA 2	- A circunferência como lugar geométrico; - Círculo.
OVA 3	- Simetrias: translação, rotação e reflexão;
OVA 4	- Simetrias: translação, rotação e reflexão;

Fonte: A autora.

Para o 7º ano os quatro OVA apresentam potencialidades. O OVA 2 é o que apresenta mais possibilidades, permitindo um estudo da circunferência e do círculo. Os OVA 3 e 4 possibilitam o estudo da simetria, um conteúdo que na maioria das vezes não é trabalhado durante a educação básica. A simetria é bastante visual, assim, a utilização desses objetos facilita seu ensino pois estimula o raciocínio e a compreensão através da representação visual do conceito.

4.2.3. Descrição dos Conteúdos 8º Ano

Quadro 3: Conhecimentos geométricos - 8º ano

8º Ano	
OVA	Objetos de Conhecimento
OVA 1	- Congruência de triângulos; - Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
OVA 2	- Mediatriz como lugar geométrico.
OVA 3	- Mediatriz como lugar geométrico.
OVA 4	- Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.

Fonte: A autora.

Para o 8º ano podemos destacar nos OVA 2 e 3 a possibilidade de estudo do conceito de mediatriz. Observando as figuras 6 e 7 aparentemente não é possível identificar nenhuma mediatriz, no entanto, observando o protocolo de construção dos OVA, quadros 6 e 7 é possível verificar que a ferramenta mediatriz do *software* GeoGebra foi utilizada durante a construção desses objetos. Dessa forma, conforme já destacado anteriormente é muito importante realizar a construção dos OVA o professor junto com os estudantes, explorando cada ferramenta utilizada, assim a quantidade de conceitos que podem ser trabalhados com os OVA se torna maior.

4.2.4. Descrição dos Conteúdos 9º Ano

Quadro 4: Conhecimentos geométricos - 9º ano

9º Ano	
OVA	Objetos de Conhecimento
OVA 1	- Semelhança de triângulos; - Polígonos regulares.
OVA 2	- Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; - Polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência.
OVA 3	-
OVA 4	-

Fonte: A autora.

Com relação aos conteúdos do 9º ano previstos na BNCC, os OVA 1 e 2 apresentam duas possibilidades cada. O OVA 1 assim como nos anos anteriores apresenta possibilidades relacionadas a triângulos e estudo dos polígonos. O OVA 2 possibilita o estudo de polígonos inscritos e circunscritos na circunferência e também permite a exploração das relações entre arcos e ângulos na circunferência.

Já para os OVA 3 e 4 não foram identificadas na visão da autora potencialidades para se trabalhar conteúdos do 9º ano.

4.3. OUTRAS CONCLUSÕES

Foram apresentados 4 OVA sendo que dois mais simples e dois mais elaborados em que o uso do geogebra facilita bastante a construção. De fato, a partir dos OVA foi possível

elencar objetos de conhecimento tais como polígonos, simetrias, estudo do círculo e da circunferência, entre vários outros destacados nos quadros anteriores.

A partir da classificação/descrição realizada acima pode-se concluir que dos quatro OVA, o OVA 1 apesar de no contexto das mandalas representar uma construção mais simples é o objeto que apresenta mais possibilidades de se explorar conteúdos de geometria, enquanto o OVA 4 que representa uma mandala muito mais elaborada é o que apresenta menos possibilidades.

Pode-se destacar que utilizando o OVA 1 pode ser estudado quase todos os conteúdos de geometria plana previstos para o 6º ano. Ainda, podemos destacar que a utilização do controle deslizante nesse objeto permite a realização de várias provocações nos estudantes estimulando o desenvolvimento do raciocínio exploratório.

Para o OVA 2, que também representa uma mandala mais simples, salienta-se as várias possibilidades de exploração a partir dos conceitos de circunferência e círculo. Já os OVA 3 e 4 apresentam-se como uma excelente ferramenta para o estudo das simetrias.

Além das possibilidades de se explorar conteúdos de geometria e descrevê-los por ano ou série do Ensino Fundamental II em cada um dos OVA apresentados, podem-se destacar outras potencialidades. A realização de um trabalho interdisciplinar não foi abordada, mas a construção de mandalas permite explorar conceitos matemáticos e estéticos, de forma interdisciplinar, tais como a simetria e a disposição harmônica dos polígonos, demonstrando que há possibilidade de articulação entre os componentes curriculares de Arte e Matemática.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se construir OVA utilizando uma abordagem ainda pouco explorada para ensinar conceitos de geometria, a construção de mandalas utilizando-se o GeoGebra. Foram apresentados três OVA baseados em mandalas geométricas, acompanhados de um exercício de imaginação pedagógica, para indicar possibilidades e potencialidades que podem ser exploradas na Educação Básica. Pode-se verificar, por meio dos quadros anteriores e do exercício de imaginação pedagógica, que existem vários conceitos geométricos, que fazem parte do currículo da Educação Básica, que permitem utilizar esses OVA.

Destaca-se a importância de os docentes buscarem alternativas de intermediação entre as formas de representação de objetos de estudos da Matemática para a consolidação do processo de aprendizagem, de forma a desenvolver nos estudantes habilidades de representação dos conceitos estudados. A utilização de ferramentas tecnológicas na prática docente apresenta-se como um aliado para despertar o interesse e o comprometimento dos estudantes na construção do conhecimento. Neste sentido, a fim de produzir um material para professores utilizarem apresenta-se o protocolo de construção dos OVA.

O trabalho desenvolvido, parte do pressuposto de que a geometria trata de conteúdos importantes e que as representações visuais melhoram significativamente o desempenho do estudante na área. O objetivo principal era indicar possibilidades e potencialidades de interação e de conteúdos de geometria que podem ser explorados em OVA elaborados a partir de mandalas geométricas como estratégias diferenciadas para aprender geometria e também identificar a sua presença no meio em que se vive. A prática com a construção de mandalas é desafiadora e pode conquistar o estudante, sendo um recurso facilitador e ao mesmo tempo motivador do processo ensino, dando ênfase na relação teoria e prática, para que os estudantes possam, a partir do concreto, abstrair conceitos para uma aprendizagem mais significativa.

REFERÊNCIAS

AUDINO, D. F; NASCIMENTO, R. S. **Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos uma nova proposição aplicada à educação.** Revista Contemporânea de Educação, 10(5): 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 07 abr. 2021.

COSTA, A. P. D; LACERDA, G. H. D. O uso do GeoGebra no ensino de Geometria: um estudo com estudantes do Ensino Fundamental. **Educação, Escola e Sociedade**, Montes Claros, v. 6, n. 6, p. 31-42, 2013. Anual.

FACHIN, O. **Fundamentos de metodologia.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

FAINGUELERNT, E. K. **REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO ATRAVÉS DA INFORMÁTICA.** 1996. 382 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação, Coordenação de Programas de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1996. Disponível em: <https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/1339609295.pdf>. Acesso em 18/08/2021.

FELIPE, F. A. M. **O USO DAS TIC NAS AULAS DE MATEMÁTICA.** 2015. 43 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Aberta do Brasil e Instituto Ufc Virtual da Universidade Federal do Ceará, Quixadá, 2015. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/35895/1/2015_tcc_famfelipe.pdf. Acesso em 18/08/2021.

GUARDA, S. M.; PETRY, V. J, Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem Visando a Compreensão e a Representação de Elementos da Geometria Analítica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, 33 (1):707-7017, 2020.

GARNICA, V. M. (1999). Filosofia da educação matemática: Algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa. In M. A. Bicudo (Ed.), **Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas** (pp. 59- 74). São Paulo: Editora UNESP. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Vicente.pdf. Acesso em 05/10/2021.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no Clique e na palma das mãos: Contribuições de uma dinâmica de aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental.** 2017. 108f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, UFRRJ, Seropédica (RJ), 2017. Disponível em: <<http://cursos.ufrj.br/posgraduacao/ppgeducimat/files/2015/02/Marcos-Paulo-Henrique.pdf>>. Acesso em: 06/04/2021.

HENZ, C. C. *et al.* **O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA.** 2008. 29 f. Monografia - Curso de Matemática, Departamento das Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões,

Erechim, 2008. Disponível em:
https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/850.pdf. Acesso em: 28/07/2021.

KAMANSKI, L.M.; SILVA, F. R. D, **Estudo das Geometrias a Partir da Construção de Mandalas**. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE (edição online), v. 1, 2016. Disponível em:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unioeste_lonymariakamanski.pdf>. Acesso em 06/04/2021.

KLEEMANN, R.; PETRY, V. J, Desenvolvimento De Um Exercício De Imaginação Pedagógica A Partir De Uma Proposta Metodológica Interdisciplinar. **Investigações em Ensino De Ciências (online)**, v. 25, p. 232-251, 2020.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? A Educação Matemática em Revista – Geometria, Blumenau, SC: SBEM – **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, ano III, n.4, p.3-13, 1º semestre 1995. Disponível em:
http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf. Acesso em: 18/08/2021.

MARTINSI. M.C. **Situando o uso da mídia em contextos educacionais**. 2008. Disponível em: <http://midiasnaeducacao-joanirse.blogspot.com/2008/12/situando-o-uso-da-mdia-emcontextos.html> Acesso em 16/08/2021.

MEDINA, M. B. *et al.* **O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA NO 8º ANO**. 2014. 18 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Programa de Desenvolvimento Educacional (Pde), Pato Branco, 2014. Disponível em:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_artigo_marivania_bonometti_medina.pdf. Acesso em: 26 jul. 2021.

MINAYO, M. C. D. S. (org.). Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade. 18 ed. Petrópolis: **Vozes**, 2001. Disponível em:
http://www.faed.udesc.br/arquivos/id_submenu/1428/minayo__2001.pdf . Acesso em 05/10/2021.

OLIVEIRA, C. D.; MOURA, S. P. TICs na educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. **Pedagogia em Ação**, v. 7, nº 1, p. 75-94, dez. 2015. Disponível em:
<http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/view/11019/8864>. Acesso em: 04 jul. 2021.

PAIS, L. C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 4, n. 6, p. 65-74, dez. 1996. Disponível em:
<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646739/13641>. Acesso em 26/07/2021.

PUNTES, R. V. **Tecnologias de informação e comunicação no ensino de Matemática**. 2017. 69 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. Disponível em:
<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25245/1/Tecnologias%20de%20informacao%20e%20comunicacao.pdf>. Acesso em 16/08/2021.

RAMOS, A. P. D. O. **Mandalas e a Construção de Saberes em Arte e Matemática**. 2016. 28f. Monografia (Licenciatura em Ciências Exatas - Matemática) - Universidade Federal do Pampa, UNIPAMPA, Caçapava do Sul (RS), 2016. Disponível em: <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/cienciasexatas/files/2014/06/TCC_AnaPaula2016-2.pdf>. Acesso em: 09/04/2021.

ROCHA, A. A. D., **A Construção De Mandalas Geométricas Como Recurso Didático**. 2017. Disponível em: <http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20180320141358.pdf>. Acesso em 05/04/2021.

SCHEFFER, N. F.. A argumentação em matemática na interação com tecnologias. **Ciência e Natura**, v. 34, p. 23-38, 2012.

SILVA, H. P. D. **O Uso de Mandalas como Estratégia Para o Ensino de Simetrias**. 2020. 77f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, São Paulo (SP), 2020. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=5561_6333f571bde7a44116108848ba3747faec4058f8>. Acesso em: 09/04/2021.

SKOVSMOSE, O. (2015). Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In B. S., D´Ambrosio, & C. E., Lopes (Orgs.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. (pp. 63-90). Campinas, SP: Mercado de Letras.

SPINELLI, W. **Os Objetos Virtuais de Aprendizagem: ação, criação e conhecimento**. s/d. Disponível em: <<http://www.lapef.fe.usp.br/rived/textoscomplementares/textoImodulo5.pdf>>. Acesso em 10/04/2021.

SOUZA, A. M.; LOPO, A. B, A Geometria na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Ensino Fundamental. In: Encontro Baiano de Educação Matemática, EBEM, XVIII., 2019, Ilhéus. **Anais... Ilhéus**.

SOUZA, M. B. *et al.* **Matematicando: A Geometria nas Mandalas**. Signos, Lajeado, v. 38, n. 1, p. 97 - 117, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.22410/issn.1983-0378.v38i1a2017.1387>>. Acesso em 09/04/2021.

YAMADA, T. R. U. **A abordagem com Mandalas na formação do professor de Matemática**. Disponível em: https://silo.tips/queue/a-abordagem-com-mandalas-na-formaao-do-professor-de-matematica?&queue_id=-1&v=1629328687&u=MTc3Ljc1LjEzMjY4OQ==. Acesso em 18/08/2021.

APÊNDICE A - PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO

Apresenta-se uma sequência de passos ou também conhecidos como protocolos de construção para o GeoGebra dos OVA 1, 2 e 3.

Quadro 5: Protocolo de construção do OVA 1

Passo	Nome	Caixa de entrada
1	Número n	$n = 3$
2	Ângulo α	$(360^\circ) / n$
3	Ângulo β	$(180^\circ - \alpha) / 2$
4	Número r	$r = 5$
5	Ângulo σ	$(180^\circ - \alpha) / 2$
6	Número apótema (apo)	$r \cos(\pi / n)$
7	Número pro	$(apo + r) / 2$
8	Ponto A	$A = (0, 0)$
9	Ponto B	$B = 5(\cos(\beta), \text{sen}(\beta))$
10	Ponto C	$C = 5(\cos(\beta + \alpha), \text{sen}(\beta + \alpha))$
11	Lista l1	Sequência($(r \cos(i (360^\circ)/n + \sigma), r \text{sen}(i (360^\circ) / n + \sigma))$, i, 1, n, 1)
12	Segmento f	$f = \text{Segmento}(A, B)$
13	Segmento g	$g = \text{Segmento}(A, C)$
14	Segmento h	$h = \text{Segmento}(B, C)$
15	Caminho poligonal i	CaminhoPoligonal(Anexar(l1, Elemento(l1, 1)))
16	Ponto D	$D = (0, 0)$
17	Triângulo t1	Polígono(D, B, C)
18	Segmento b	$b = \text{Segmento}(C, D, t1)$
19	Segmento a	$a = \text{Segmento}(B, C, t1)$
20	Segmento c	$c = \text{Segmento}(D, B, t1)$
21	Valor booleano d	Pertence Região(D, t1)
22	Sequência l2	Sequência(Girar(D, $i (360^\circ) / n$), i, 1, n, 1)
23	Ponto E	$E = (x(D), y(D))$
24	Ângulo γ	Ângulo(B, A, C)
25	Ponto F	$F = (x(\text{Elemento}(l1, 1)), y(\text{Elemento}(l1, 1)))$

26	Ponto G	$(x(\text{Elemento}(11, \text{Comprimento}(11))), y(\text{Elemento}(11, \text{Comprimento}(11))))$
27	Número m	$m = \text{Inclinação}(\text{Reta}(F, G))$
28	Lista l3	$\text{Sequência}(\text{Segmento}((r \cos(i (360^\circ) / n + \sigma), r \sin(i (360^\circ) / n + \sigma)), A), i, 1, n, 1)$
29	Ângulo δ	$\hat{\text{Ângulo}}(G, D, F)$

Fonte: A autora.

Quadro 6: Protocolo de construção do OVA 2

Passo	Nome	Caixa de entrada	Passo	Nome	Caixa de entrada
1	Ponto A	$A = (0,0)$	30	Ponto O	$O = (-2.8, 0)$
2	Círculo c	$\text{Círculo}(A, 1)$	31	Ponto P	$P = (0, -2.8)$
3	Círculo d	$\text{Círculo}(A, 1.98)$	32	Ponto Q	$Q = (2.8, 0)$
4	Ponto B	$B = (0, 1.98)$	33	Polígono2(q1)	$\text{Polígono}(N, O, P, Q)$
5	Ponto C	$C = (-1.71, -1)$	34	Segmento q	$\text{Segmento}(Q, N, q1)$
6	Ponto D	$D = (1.71, -1)$	35	Segmento p	$\text{Segmento}(P, Q, q1)$
7	Triângulo1(t1)	$\text{Polígono}(B, C, D)$	36	Segmento o	$\text{Segmento}(O, P, q1)$
8	Segmento c1	$\text{Segmento}(D, B, t1)$	37	Segmento n	$\text{Segmento}(N, O, q1)$
9	Segmento b	$\text{Segmento}(C, D, t1)$	38	Círculo r	$\text{Círculo}(A, N)$
10	Segmento d1	$\text{Segmento}(B, C, t1)$	39	Segmento i1	$\text{Segmento}(I, O, \text{pol2})$
11	Ponto E	$E = (0, -1.98)$	40	Segmento p1	$\text{Segmento}(P, I, \text{pol2})$
12	Ponto F	$F = (1.71, 1)$	41	Segmento j1	$\text{Segmento}(J, P, \text{pol2})$
13	Ponto G	$G = (-1.71, 1)$	42	Segmento q1	$\text{Segmento}(Q, J, \text{pol2})$
14	Triângulo2(t2)	$\text{Polígono}(E, F, G)$	43	Segmento k1	$\text{Segmento}(K, Q, \text{pol2})$
15	Segmento f	$\text{Segmento}(G, E, t2)$	44	Segmento n1	$\text{Segmento}(N, K, \text{pol2})$
16	Segmento e	$\text{Segmento}(F, G, t2)$	45	Segmento h1	$\text{Segmento}(H, N, \text{pol2})$
17	Segmento g	$\text{Segmento}(E, F, t2)$	46	Segmento o1	$\text{Segmento}(O, H, \text{pol2})$
18	Ponto H	$H = (-2, 2)$	47	Polígono 3	$\text{Polígono}(O, H, N, K, Q, J, P, I)$
19	Ponto I	$I = (-2, -2)$	48	Segmento p2	$\text{Segmento}(P, O, q2)$
20	Ponto J	$J = (2, -2)$	49	Segmento q2	$\text{Segmento}(Q, P, q2)$
21	Ponto K	$K = (2, 2)$	50	Segmento n2	$\text{Segmento}(N, Q, q2)$
22	Segmento k	$\text{Segmento}(M, J, \text{pol1})$	51	Segmento o2	$\text{Segmento}(O, N, q2)$
23	Segmento j	$\text{Segmento}(L, M, \text{pol1})$	52	Segmento q2	$\text{Polígono}(O, N, Q, P)$

24	Ponto M	$M = \text{Polígono}(J, K, 4)$	53	Segmento l	Segmento(A, F)
25	Ponto L	$\text{Polígono}(J, K, 4)$	54	Segmento m	Segmento(A, E)
26	Segmento i	$\text{Segmento}(K, L, \text{pol1})$	55	Segmento s	Segmento(A, B)
27	Segmento h	$\text{Segmento}(J, K, \text{pol1})$	56	Segmento t	Segmento(A, G)
28	Polígono 1	$\text{Polígono}(J, K, 4)$	57	Segmento a	Segmento(A, D)
29	Ponto N	$N = (0, 2.8)$	58	Segmento f1	Segmento(A, C)

Fonte: A autora.

Quadro 7: Protocolo de construção do OVA 3

Passo	Nome	Caixa de entrada	Passo	Nome	Caixa de entrada
1	Ponto A	Interseção(EixoX, EixoY)	64	Segmento j_1	Segmento(J_1, S, pol3)
2	Círculo c	Círculo(A, 1)	65	Polígono 3	Polígono(J_1, S, K_1, U, L_1, W, M_1, A_1, N_1, C_1, O_1, E_1, P_1, G_1, Q_1, I_1)
3	Círculo d	Círculo(A, 2)	66	Segmento b_2	Segmento(B, G_1, pol4)
4	Círculo e	Círculo(A, 3)	67	Segmento l_2	Segmento(E_1, B, pol4)
5	Ponto B	$B = (-3, 0)$	68	Segmento k_2	Segmento(K, E_1, pol4)
6	Ponto C	$C = (3, 0)$	69	Segmento g_2	Segmento(C_1, K, pol4)
7	Segmento f	Segmento(B, C)	70	Segmento e_2	Segmento(E, C_1, pol4)
8	Ponto D	$D = (0, 3)$	71	Segmento f_2	Segmento(A_1, E, pol4)
9	Ponto E	$E = (0, -3)$	72	Segmento j_2	Segmento(J, A_1, pol4)
10	Segmento g	Segmento(D, E)	73	Segmento w_1	Segmento(W, J, pol4)
11	Segmento h	Segmento(B, E, pol1)	74	Segmento c_2	Segmento(C, W, pol4)
12	Polígono 1	Polígono(B, E, 4)	75	Segmento u_1	Segmento(U, C, pol4)
13	Mediatriz l	Mediatriz(B, D)	76	Segmento i_2	Segmento(I, U, pol4)
14	Mediatriz m	Mediatriz(D, C)	77	Segmento s_2	Segmento(S, I, pol4)
15	Ponto H	Interseção(e, l, 2)	78	Segmento d_2	Segmento(S, I, pol4)
16	Ponto I	Interseção(e, m, 2)	79	Segmento d_1	Segmento(I_1, D, pol4)
17	Ponto J	Interseção(e, l, 1)	80	Segmento h_2	Segmento(H, I_1, pol4)
18	Ponto K	Interseção(e, m, 1)	81	Segmento b_1	Segmento(G_1, H, pol4)
19	Segmento n	Segmento(B, K, pol2)	82	Polígono 4	Polígono(G_1, H, I_1, D, S, I, U, C, W, J, A_1, E, C_1, K, E_1, B)
20	Polígono 2	Polígono(B, K, 8)	83	Reta m_2	Reta(S, A_1)

21	Mediatrizf_1	Mediatriz(B, H)	84	Reta n_2	Reta(I_1, C_1)
22	Mediatriz g_1	Mediatriz(H, D)	85	Reta p_2	Reta(E_1, W)
23	Mediatriz h_1	Mediatriz(D, I)	86	Reta q_2	Reta(U, G_1)
24	Mediatriz i_1	Mediatriz(I, C)	87	Reta a_2	Reta(U, G_1)
25	Ponto R	Interseção(d, g, 1)	88	Reta f_3	Reta(C_1, U)
26	Ponto S	Interseção(d, h_1, 2)	89	Reta r_2	Reta(G_1, A_1)
27	Ponto T	Interseção(d, m, 2)	90	Reta t_2	Reta(I_1, W)
28	Ponto U	Interseção(d, i_1, 2)	91	Ponto R_1	Interseção(e, m_2, 1)
29	Ponto V	Interseção(d, f, 2)	92	Segmento g_3	Segmento(S, R_1)
30	Ponto W	Interseção(d, f_1, 1)	93	Ponto S_1	Interseção(e, a_2, 1)
31	Ponto Z	Interseção(d, l, 1)	94	Segmento h_3	Segmento(S, S_1)
32	Ponto A_1	Interseção(d, g_1, 1)	95	Segmento i_3	Segmento(S_1, S)
33	Ponto B_1	Interseção(d, g, 2)	96	Ponto T_1	Interseção(e, f_3, 2)
34	Ponto C_1	Interseção(d, h_1, 1)	97	Segmento j_3	Segmento(U, T_1)
35	Ponto D_1	Interseção(d, m, 1)	98	Ponto U_1	Interseção(e, q_2, 1)
36	Ponto E_1	Interseção(d, i_1, 1)	99	Segmento k_3	Segmento(U, U_1)
37	Ponto F_1	Interseção(d, f, 1)	100	Ponto V_1	Interseção(e, p_2, 2)
38	Ponto G_1	Interseção(d, f_1, 2)	101	Segmento l_3	Segmento(W, V_1)
39	Ponto H_1	Interseção(d, l, 2)	102	Ponto W_1	Interseção(e, t_2, 2)
40	Ponto I_1	Interseção(d, g_1, 2)	103	Segmento m_3	Segmento(W, W_1)
41	Ponto J_1	Interseção(c, g, 1)	104	Ponto Z_1	Interseção(e, r_2, 2)
42	Ponto K_1	Interseção(c, m, 2)	105	Segmento n_3	Segmento(A_1, Z_1)
43	Ponto L_1	Interseção(c, f, 2)	106	Ponto A_2	Interseção(e, m_2, 2)
44	Ponto M_1	Interseção(c, l, 1)	107	Segmento p_3	Segmento(A_1, A_2)
45	Ponto N_1	Interseção(c, g, 2)	108	Ponto B_2	Interseção(e, n_2, 2)
46	Ponto O_1	Interseção(c, m, 1)	109	Segmento q_3	Segmento(C_1, B_2)
47	Ponto P_1	Interseção(c, f, 1)	110	Ponto C_2	Interseção(e, f_3, 1)
48	Ponto Q_1	Interseção(c, l, 2)	111	Segment r_3	Segmento(C_1, C_2)
49	Segmento t_1	Segmento(I_1, J_1, pol3)	112	Ponto D_2	Interseção(e, a_2, 2)
50	Segmento r_1	Segmento(Q_1, I_1, pol3)	113	Segmento s_3	Segmento(E_1, D_2)
51	Segmento q_1	Segmento(G_1, Q_1, pol3)	114	Ponto E_2	Interseção(e, p_2, 1)
52	Segmento p_1	Segmento(P_1, G_1, pol3)	115	Segmento t_3	Segmento(E_1, E_2)

53	Segmento e_1	Segmento(E_1, P_1, pol3)	116	Ponto F_2	Interseção(e, q_2, 2)
54	Segmento o_1	Segmento(O_1, E_1, pol3)	117	Segmento a_3	Segmento(G_1, F_2)
55	Segmento c_1	Segmento(C_1, O_1, pol3)	118	Ponto G_2	Interseção(e, r_2, 1)
56	Segmento n_1	Segmento(N_1, C_1, pol3)	119	Segmento b_3	Segmento(G_1, G_2)
57	Segmento a_1	Segmento(A_1, N_1, pol3)	120	Ponto H_2	Interseção(e, t_2, 1)
58	Segmentom_1	Segmento(M_1, A_1, pol3)	121	Segmento c_3	Segmento(I_1, H_2)
59	Segmento w	Segmento(W, M_1, pol3)	122	Ponto I_2	Interseção(e, n_2, 1)
60	Segmento l_1	Segmento(L_1, W, pol3)	123	Segmento d_3	Segmento(I_1, I_2)
61	Segmento u	Segmento(U, L_1, pol3)	124	Segmento e_3	Segmento(H, J)
62	Segmento k_1	Segmento(K_1, U, pol3)	125	Segmento f_4	Segmento(K, I)
63	Segmento s_1	Segmento(S, K_1, pol3)			

Fonte: A autora.