



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

**SIMULAÇÃO DA FORMAÇÃO DA ESTRUTURA EM "TEIA" DA  
MATÉRIA ESCURA**

**SIDNÉIA TATIANE PLESS**

REALEZA

2019

# SIMULAÇÃO DA FORMAÇÃO DA ESTRUTURA EM "TEIA" DA MATÉRIA ESCURA

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
grau de Licenciada em Física da Universidade  
Federal da Fronteira Sul.

Orientador: Prof. Dr. Tobias Heimfarth

REALEZA

2019

### **Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS**

Pless, Sidnéia Tatiane  
SIMULAÇÃO DA FORMAÇÃO DA ESTRUTURA EM "TEIA" DA  
MATÉRIA ESCURA / Sidnéia Tatiane Pless. -- 2019.  
51 f.:il.

Orientador: Dr. Tobias Heimfarth.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de  
Física-Licenciatura , Realeza, PR , 2019.

1. Cosmologia. 2. Matéria Escura. 3. Simulação  
Cosmológica. 4. Universo. I. Heimfarth, Tobias, orient.  
II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

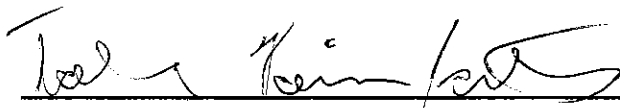
**SIMULAÇÃO DA FORMAÇÃO DA ESTRUTURA EM "TEIA" DA  
MATÉRIA ESCURA**


**SIDNÉIA TATIANE PLESS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora constituída de acordo as Normas de Trabalho de Conclusão de Curso estabelecidas pelo Colegiado do Curso de Graduação em Licenciatura em Física, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Licenciada em Física.

Aprovado em: 10 de julho de 2019

Por:

  
Orientador: Prof. Dr. Tobias Heimfarth

  
Banca: Prof. Dr. Eduardo de Almeida

  
Banca: Prof. Dr. Leonardo de Lima

## AGRADECIMENTOS

Agradecer é a melhor forma de comemorar os grandes acontecimentos.

Eis-me aqui para agradecer!

Primeiramente a Deus que nos momentos mais difíceis foi o meu melhor amigo, escutando minhas reclamações, e também me concedendo grandes bênçãos, sendo a força e o equilíbrio que me manteve firme nessa trajetória.

Agradecer a minha família que sempre esteve do meu lado nessa caminhada, que por mais difícil que tenha sido eu consegui chegar ao final, com o apoio de todos vocês.

Agradecer ao meu namorado Jaderson Budke, que sempre que eu estava a ponto desistir ele me fazia enxergar um lado positivo em tudo o que estava acontecendo, obrigado por ser meu apoio, meu porto seguro.

Agradecer a Deus os amigos que conquistei durante todo esse processo de busca pelo conhecimento, uns chegaram e partiram mais rápidos que outros, alguns levarei comigo para o restante da minha vida, mesmo que percamos contato, estarão guardados na minha memória.

Agradecer em especial ao meu Orientador Dr. Tobias Heimfarth, que teve muita paciência para juntos construirmos esse trabalho. Agradeço também pelos puxões de orelha, pois, sem eles não teria sempre buscado melhorar. Obrigado estar sempre disposto a ajudar, obrigado por dividir comigo um pouco do seu conhecimento.

Obrigado aos Técnicos de Laboratório de Física da UFFS, por nos ajudarem com a questão computacional do nosso trabalho.

Muito Obrigado a todos!

“A mais bela coisa que podemos vivenciar é o mistério. Ele é fonte de qualquer arte verdadeira e qualquer ciência. Aquele que desconhece esta emoção, aquele que não para mais para pensar e não se fascina, está como morto: seus olhos estão fechados.”

Albert Einstein

## RESUMO

O universo sempre foi motivo de curiosidade e estudo. Por milhares de anos o desejo de entender sua origem e funcionamento tem estado conosco e essa curiosidade acabou por gerar muitas vezes idéias de cosmologia imaginativas. Acreditou-se por muito tempo na hipótese do mesmo ser estático, ou seja estar parado em grandes escalas, posteriormente surgiram teorias de que ele estaria se expandindo mas esta expansão estaria desacelerando devido à atração gravitacional de toda a matéria nele contida. A teoria aceita atualmente é a de que o universo está se expandindo de forma acelerada. Chegou-se a este modelo com o auxílio do desenvolvimento tecnológico, pois com o avanço das técnicas de observação e posterior o estudo do deslocamento das galáxias foi possível observar o aumento da velocidade de recessão de galáxias em função de sua distância. A hipótese mais aceita como causa da expansão do universo é a energia escura, energia presente em pequena densidade em todo espaço gerando uma pressão negativa. Por outro lado a matéria visível não é suficiente para explicar uma série de fenômenos observados, como o perfil da velocidade de rotação de um grande número de galáxias e também a evolução da distribuição da matéria no universo que observamos hoje. A hipótese mais aceita atualmente que é capaz de explicar estes dados é a matéria escura, que interage muito fracamente com a matéria bariônica, no caso mais simples, somente pela interação gravitacional. Embora não se tenha detectado diretamente a matéria escura e tampouco a energia escura, pode-se explorar a influência destas na formação do universo através de simulações numéricas. Dessa forma o que pretendemos com esse trabalho é nos aprofundarmos no tema da formação das estruturas de larga escala do universo através do estudo da base teórica e realização de uma simulação numérica da evolução da matéria escura regida somente pela interação gravitacional, desde sua distribuição inicial quase homogênea até o aparecimento da estrutura em forma de teia. Esta evolução se dá em um espaço em expansão. Para estas simulações será utilizado um pacote de software aberto dedicado a este fim e disponível ao público. A técnica numérica utilizada será a de N-corpos.

**Palavras-chave:** Universo, matéria escura, energia escura, simulação;

## ABSTRACT

The universe has always been a matter of curiosity and study. For thousands of years the desire to understand its origin and functioning has been with us, and this curiosity has often generated imaginative ideas of cosmology. It was long believed that the Universe was static, that is, it remains at rest at large scales, later theories emerged that it would be expanding but that expansion would be slowing due to the gravitational pull of all the matter contained therein. The theory currently accepted is that the universe is in accelerated expansion. It was possible to observe the increase of the recession velocity of galaxies as a function of their distance. The most accepted hypothesis for the cause of the expansion of the universe is the dark energy, a small energy density present in all space generating a negative pressure. On the other hand, the visible matter is not enough to explain a series of observed phenomena, such as the rotational velocity profile of a large number of galaxies and also the evolution of the distribution of matter in the universe that we observe today. The most accepted hypothesis currently capable of explaining this data is dark matter, which interacts very weakly with baryonic matter, in the simplest case, only by gravitational interaction. Although dark matter and dark energy have not been detected directly, one can explore their influence on the formation of the universe through numerical simulations. Thus, what we intend with this work is to delve into the theme of the formation of the large scale structures of the universe through the study of the theoretical basis and the realization of a numerical simulation of the evolution of dark matter governed only by gravitational interaction, from its almost homogeneous initial distribution until the appearance of the web-shaped structure. This evolution takes place in an expanding space. For these simulations an open software package dedicated for this purpose and publicly available will be used. The numerical technique used will be that of N-bodies.

**Key-words: universe, dark matter, dark energy, simulation.**



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Conteúdo do Universo [2]. . . . .	8
Figura 2 – Representação da teia cósmica desenvolvida através do simulador "Illustris"[6]. . . . .	9
Figura 3 – Massa $m$ contida no volume $V$ [8]. . . . .	13
Figura 4 – Geometria do Universo [22] . . . . .	18
Figura 5 – Imagem inicial da malha . . . . .	40
Figura 6 – NPG - Ponto de grade mais próximo . . . . .	42
Figura 7 – CIC - Cloud-in-Cell . . . . .	42
Figura 8 – TSC - Interpolações de ordem superior . . . . .	43
Figura 9 – A primeira imagem representa a estrutura da matéria escura em forma de "teia" para $a = 0,02$ . A segunda imagem para $a = 0,5$ e por fim a terceira imagem com $a = 1$ que representa a estrutura em "teia" da matéria escura na idade atual do universo. . . . .	45

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1	CONTEXTO HISTÓRICO E RELEVÂNCIA DO TEMA . . . . .	8
1.2	OBJETIVOS . . . . .	9
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	10
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1	GRAVIDADE NEWTONIANA . . . . .	11
2.1.1	Leis de Newton do movimento . . . . .	11
2.1.2	Primeira lei de Newton . . . . .	11
2.1.3	Segunda lei de Newton . . . . .	11
2.1.4	Terceira lei de Newton . . . . .	11
2.1.5	Conservação do momento . . . . .	12
2.1.6	Lei de Newton da gravitação universal . . . . .	12
2.2	GEOMETRIA DO UNIVERSO . . . . .	15
2.2.1	A Métrica Robertson-Walker . . . . .	15
2.3	MODELO COSMOLÓGICO FLRW . . . . .	19
2.3.1	Equações de Friedmann . . . . .	19
2.4	COSMOLOGIA NEWTONIANA . . . . .	25
2.5	TEORIA DA PERTURBAÇÃO NEWTONIANA . . . . .	28
2.6	EQUAÇÕES PARA FLUIDOS ESPECÍFICOS . . . . .	30
2.7	FLUTUAÇÕES DE MATÉRIA . . . . .	34
<b>3</b>	<b>SIMULAÇÕES COSMOLÓGICAS . . . . .</b>	<b>35</b>
3.0.1	O método partícula-partícula . . . . .	35
3.0.2	Percurso de Árvore . . . . .	36
3.0.3	Partícula-Malha . . . . .	36
3.0.4	Partícula-Partícula/Partícula-Malha . . . . .	37
3.1	PARTÍCULA - MALHA . . . . .	37
3.1.1	Método PM . . . . .	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .</b>	<b>45</b>
4.1	RESULTADOS DA SIMULAÇÃO . . . . .	45
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>49</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTO HISTÓRICO E RELEVÂNCIA DO TEMA

A cosmologia surgiu para entendermos o universo e, no sentido mais amplo do termo, refere-se a nossa compreensão de cosmos, ou seja, a totalidade de todas as coisas [1]. No último século houveram grandes avanços na compreensão física do universo em grandes escalas, sua origem, estrutura e evolução, área de pesquisa a qual chamamos de cosmologia física. A cosmologia física surgiu com o advento da relatividade geral um século atrás.

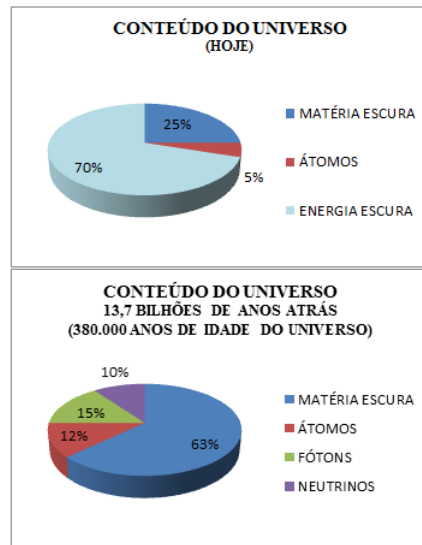


Figura 1 – Conteúdo do Universo [2].

Observações nos mostram que o universo é homogêneo e isotrópico e está expandindo desde o alvorecer no Big Bang 13,8 bilhões de anos atrás. Na cosmologia moderna o modelo padrão do universo tem sido aquele que diz que o universo é composto por 70% de energia escura, 25% de matéria escura e somente 5% de matéria normal [1] como descrito na Figura 1. A matéria normal refere-se a átomos e tudo mais dentro do modelo padrão da física de partículas, cuja natureza nós entendemos intimamente. Sabemos da importância da matéria normal ou também chamada de matéria bariônica, mas sobre os dois componentes escuros que dominam universo temos poucas pistas sobre a verdadeira natureza de ambos.

A partir do estudo do movimento das estrelas e do meio interestelar pode-se chegar a uma conclusão da quantidade de matéria que compõe uma galáxia, porém o que se observa é que a velocidade das estrelas e do meio interestelar é muito maior do que a esperada pela matéria bariônica que a constitui, ou seja, através da velocidade encontrada, a quantidade de matéria deveria ser muito maior do que aquela que podemos detectar, daí surgiu a ideia de que nestes objetos deve haver uma grande quantidade de matéria

que contribui para o campo gravitacional, matéria essa de composição desconhecida, chamada de matéria escura, que recebe essa denominação por não interagir com a radiação eletromagnética, dessa forma não pode ser detectada em nenhuma faixa de espectro eletromagnético [3][4].

A distribuição das galáxias no universo não segue um padrão, dessa forma realiza-se o mapeamento da distribuição das mesmas através de linhas espectrais. Se o observador ver uma linha espectral maior do que o comprimento que deveria ser visto na Terra, significa que a galáxia está se afastando, ou seja, houve um deslocamento para o vermelho (redshift), se o comprimento for menor do que na Terra, significa que a galáxia está se aproximando de nós, ou seja, teve um deslocamento para o azul (blueshift). Através desses mapeamentos os astrônomos puderam perceber que há estruturas em forma de filamento que ligam os aglomerados de galáxias, e que existem também entre essas ligações espaços vazios. Esses filamentos que interligam aglomerados de galáxias, formam a chamada teia cósmica conforme pode ser visto na Figura 2, como através de observações das galáxias se chegou a conclusão que as mesmas são formadas por uma grande quantidade de matéria escura, sabemos que essa matéria escura contribui para essa formação em teia do universo [5]. É essa estrutura em forma de teia que vamos desenvolver para a matéria escura através da simulação com a qual iremos trabalhar.

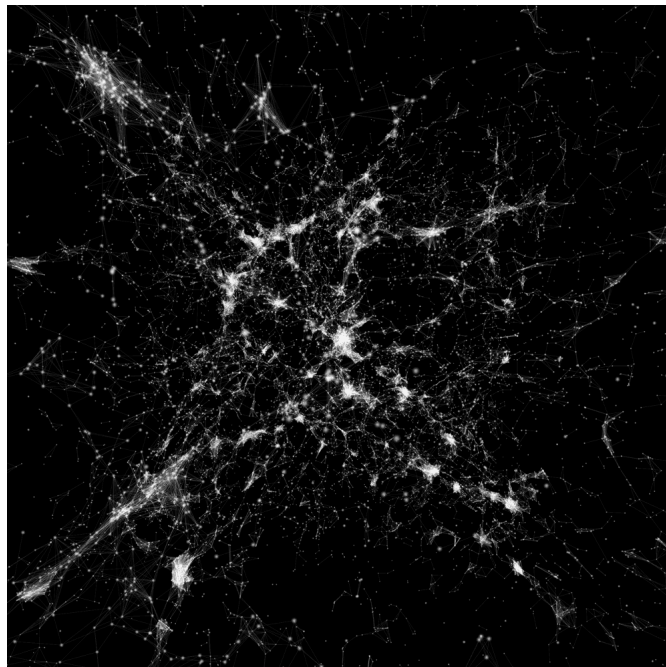


Figura 2 – Representação da teia cósmica desenvolvida através do simulador "Illustris"[6].

## 1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como principais objetivos:

- Fundamentar as bases teóricas envolvidas na formação das estruturas em forma de teia, em um modelo onde a matéria escura interagindo gravitacionalmente domina a dinâmica do universo em expansão.
- Realizar o embasamento teórico da simulação cosmológica de N-corpos da matéria escura, para que dessa forma possamos compreender seu funcionamento.
- Realizar uma simulação computacional da formação das estruturas em forma de teia da matéria escura utilizando o CONCEPT (COsmological N-body CodE in PyThon)

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 1 - No primeiro capítulo do presente trabalho você encontrou uma breve introdução a temas como cosmologia, composição do universo e matéria escura, assuntos esses que serão trabalhados no decorrer do material, bem como a apresentação dos principais objetivos que almejamos alcançar.

O Capítulo 2 - Nesse capítulo você encontrará a fundamentação teórica que servirá como base para a simulação da evolução da distribuição da matéria escura em forma de "teia", trataremos temas como: Gravidade Newtoniana, Métrica e a Teoria da Relatividade Geral, Modelo Cosmológico FLRW, Cosmologia Newtoniana, Teoria da Perturbação Newtoniana, Equações para Fluidos Específicos, Flutuações da Matéria.

O Capítulo 3 - Nesse capítulo desenvolveremos a simulação cosmológica, tanto a parte teórica, quanto a parte prática, nele esta explícito alguns métodos que são utilizados para simulações N-corpos, bem como desenvolvido de forma mais aprofundada o método Partícula Malha o qual será utilizado para obter a estrutura em forma de "teia" da matéria escura.

O Capítulo 4 - Nesse capítulo apresentaremos o resultado da simulação através do uso da simulação N-corpos, mais especificamente o método Partícula Malha, bem como o nosso entendimento sobre esse resultado.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 GRAVIDADE NEWTONIANA

#### 2.1.1 Leis de Newton do movimento

Isaac Newton unificou as leis de Kepler do movimento planetário com a teoria de Galileo Galilei da queda de corpos. Newton publicou suas leis de movimento e gravitação universal em *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, comumente conhecido como *Principia*, em 1687 [7].

#### 2.1.2 Primeira lei de Newton

"Um corpo em repouso tende a permanecer em repouso e um corpo em movimento tende a permanecer em movimento até que uma força externa atue sobre ele" [7].

Um objeto que esta se movendo a uma velocidade constante, tende a resistir a qualquer mudança no seu movimento, essa resistência é chamada de inércia [7].

#### 2.1.3 Segunda lei de Newton

"A força resultante atuando sobre um corpo é proporcional ao produto de sua massa pela aceleração que foi por ele adquirida" [7].

A segunda lei de Newton mostra como um objeto será afetado se tiver uma força externa agindo sobre ele [7], e é descrita por:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

$\vec{F}$  é a força;

$m$  é a massa;

$\vec{a}$  é aceleração.

A relação acima mostra que menos força, com aceleração fixa, é necessária para mover algo mais leve, o que significa que objetos menos massivos têm um coeficiente de inércia menor e, assim sendo, o contrário também é válido [7].

#### 2.1.4 Terceira lei de Newton

"Para toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade, considerando a ação de dois corpos, um agindo sobre o outro, todas as forças atuam em pares, iguais em intensidade, mas em direções opostas" [7].

A terceira lei de Newton estabelece que a força num objeto é sempre devida a outro objeto [7].

### 2.1.5 Conservação do momento

A combinação da segunda e terceira leis de Newton mostra que o momento de um sistema colisional deve ser conservado. Isto significa que o momento total de dois objetos permanecerá o mesmo antes e depois de uma colisão, considerando que esses objetos não sofram a ação de nenhuma força externa. [7].

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.2)$$

$$\Delta \vec{p} = -\Delta \vec{p} \quad (2.3)$$

### 2.1.6 Lei de Newton da gravitação universal

Newton afirmou que a força da gravidade é sempre atrativa, afeta tudo que tenha massa e não tem nada a ver com a carga ou composição química de um objeto. Isto significa que pode explicar tanto a força que faz com que os planetas orbitem o Sol - como descrito por Kepler - como a força descendente que faz com que os objetos acelerem em direção à Terra - como descrito por Galileu [7].

A lei da gravitação universal de Newton afirma que dois corpos atraem-se com força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, e ainda que toda massa atrai todas as outras massas do universo [7]. A força da interação gravitacional entre duas massas pontuais de valor  $m_1$  e  $m_2$  é dada por

$$|\vec{F}| = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (2.4)$$

onde  $r$  é a distância entre as massas e  $G$  é uma constante gravitacional [7]. A direção desta força é dada pelo segmento de reta que as liga, e sempre atrativa.

A atração gravitacional de corpos extensos é mais complicada, entretanto para objetos esféricos como planetas e estrelas, esta age como se toda as suas massas estivessem concentradas no seu centro.

Outra forma de expressar as interações gravitacionais pode ser feita através da formulação por campos:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (2.5)$$

onde  $\vec{g}$  é o campo gravitacional que depende da distribuição de matéria do sistema. Consideramos então um volume  $V$  que contenha a massa  $m$  e que  $\hat{n}$  seja o versor normal ao elemento de superfície  $d\vec{a}$  que limita o volume  $V$  [8] temos então:

$$d\vec{a} = \hat{n} da \quad (2.6)$$

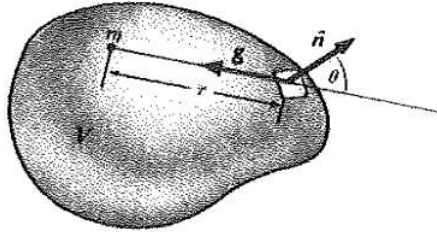


Figura 3 – Massa  $m$  contida no volume  $V$  [8].

Para uma superfície aberta temos o fluxo que descreve a intensidade do campo através dessa superfície é definido por:

$$I = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} da \quad (2.7)$$

Para uma determinada superfície fechada, a Lei de Gauss para o campo gravitacional é:

$$\oint \vec{g} \cdot dS = -4\pi G \int \rho \cdot dV \quad (2.8)$$

$\rho$  é a densidade volumétrica de massa.

O fluxo do campo gravitacional em uma superfície fechada  $S$  é proporcional a quantidade de massa no volume  $V$  gerado por  $S$ ;

Aplicando o teorema da divergência temos:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV = \oint_S \vec{g} \cdot \hat{n} da = -4\pi G \int_V \rho dV \quad (2.9)$$

Como esta relação vale para qualquer volume  $V$ , tem-se que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (2.10)$$

Por outro lado o campo gravitacional produzido por um dado elemento infinitesimal de volume é radial, de modo que<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> O rotacional de qualquer gradiente é nulo.



$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad (2.11)$$

Desta forma é possível escrever o campo como o gradiente de um potencial.

$$\vec{g} = -\nabla \phi \quad (2.12)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional e respeita:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \quad (2.13)$$

A equação acima é a equação de Poisson. O método partícula-malha se utiliza desta equação para simular as interações gravitacionais.

Durante muito tempo as leis de Newton foram suficiente para explicar os fenômenos mecânicos e gravitacionais, mas ao tratar da mecânica de uma partícula no limite de altas velocidades as referidas leis eram limitadas [9].

Surgem aí as teorias relativísticas, a restrita e a geral, a primeira para explicar fenômenos mecânicos, estabelecendo uma velocidade limite na natureza, e a segunda para explicar a gravitação, ao substituir a noção de força gravitacional pela de curvatura do espaço-tempo [9].

A gravitação newtoniana passou a ser substituída pela relatividade geral, pois ela era, além de capaz de reproduzir os resultados newtonianos no limite de campos fracos e baixas velocidades através do uso da geometria Riemanniana, também descreve com sucesso o outro extremo. Essa teoria relativística ligada a geometria Riemanniana formulada em um espaço-tempo quadri-dimensional, parece ser impossível ser entendida sem todo o aparato matemático [9].

Em 1930, os trabalhos de E. A. Milne e W. H. McCrea conseguiram mostrar que a cosmologia poderia ser trabalhada não somente através da relatividade geral, mas poderia ter uma forma mais simples como a encontrada na física Newtoniana, sendo trabalhada pelas leis da dinâmica e gravitação newtoniana e para considerar a expansão acrescentamos a constante cosmológica. [9].

Desta forma, tem-se a possibilidade de usar um tratamento Newtoniano, para problemas até então delegados somente ao âmbito da cosmologia relativística. De fato, como veremos no decorrer deste trabalho, a cosmologia Newtoniana é capaz de descrever a evolução do Universo durante toda a fase dominada pela matéria (desde que,  $p = 0$ , ou seja, que a pressão seja muito menor que a densidade de energia) acrescentando a constante cosmológica [9].

## 2.2 GEOMETRIA DO UNIVERSO

Uma das hipóteses mais simplificadoras das teorias cosmológicas é chamada de Princípio Cosmológico, que tem por base duas características do Universo: que ele é homogêneo e isotrópico, quando examinado por um observador típico [10].

- Homogeneidade: em larga escala a densidade média do Universo é igual em toda a sua extensão.
- Isotropia: a forma em que o Universo se apresenta é a mesma em qualquer direção.

Dessa forma temos um Universo uniforme em larga escala, ou seja, não há diferenciação de um lugar à outro, nem mesmo de uma direção à outra.

O estudo do universo como um todo não começa com seu conteúdo mas sim com sua geometria. A geometria detalhada do espaço-tempo é complicada refletindo a distribuição de todas as coisas embutidas dentro dela como descrito pelas equações de campo de Einstein. Entretanto, como descrito pelo Princípio Cosmológico, o universo é homogêneo em grande escala, dessa forma a curvatura média é constante em todo o espaço. Dependendo da distribuição de energia e momento das coisas embutidas uma curvatura constante pode gerar três geometrias diferentes: hiperbólicas, euclidianas e elípticas [1].

Vamos utilizar a métrica para iniciarmos o estudo das diferenças descritas acima, primeiramente vamos definir o que é a métrica.

Métrica: é uma função diferenciável que tem um papel dual [11]:

- definir a distância entre dois pontos quaisquer de um espaço;
- através dela é possível determinar o menor caminho entre dois pontos de um espaço.

### 2.2.1 A Métrica Robertson-Walker

A métrica de Robertson-Walker é métrica mais geral que garante um Universo homogêneo e isotrópico, dessa forma nessa seção vamos realizar uma evolução histórica, até chegarmos à métrica enunciada.

Em 1854, Riemann desenvolveu uma geometria na qual ele sugeria que o Universo poderia possuir uma geometria curva no espaço quadridimensional(ou seja, que deve cobrir as três dimensões espaciais e o tempo)[12]. A forma mais geral da métrica de Riemann neste espaço é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2 + 2g_{0\mu}dtdx^\mu - \gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (2.14)$$

$ds$  é o elemento de linha do espaço-tempo, ou métrica do espaço-tempo.  $\mu$  e  $\nu$  possuem os valores 0, 1, 2, 3 onde 0 representa a coordenada temporal e o restante as coordenadas espaciais.  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço-tempo.  $\gamma_{ij}$  é a métrica das três dimensões espaciais.

A isotropia garante que todos os componentes  $g_{0\mu}$  sejam nulos, pois se não fosse assim existiriam direções privilegiadas. Adotando o tempo medido no referencial em que  $dl = 0$  como a coordenada temporal  $g_{00} = c^2$  [13], podemos reescrever o elemento de linha como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (2.15)$$

Os primeiros modelos cosmológicos eram baseados na geometria de um Universo plano, ou seja, com curvatura espacial nula [12]. Dessa forma, o elemento de linha espacial de uma hipersuperfície tridimensional plana pelo teorema de Pitágoras é dado por:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.16)$$

Se substituirmos (2.16) em (2.15) encontraremos a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.17)$$

Já em 1922, Friedmann supôs que a parte espacial do Universo pudesse ser uma hipersuperfície tridimensional de uma quadri-esfera (Universo fechado, com curvatura espacial positiva e constante) [12]. Os pontos contidos em uma quadri-esfera são os quais as coordenadas respeitam:

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (2.18)$$

$a$  é o raio do Universo no modelo proposto.

O elemento de linha no espaço quadridimensional é dado por:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (2.19)$$

Isolando  $x_4$  para nos restringirmos a superfície da quadri-esfera

$$x_4^2 = a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (2.20)$$

Do ponto de vista dos diferenciais, tem-se que para uma hipersuperfície qualquer:

$$dx_4 = \frac{\partial x_4}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_4}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_4}{\partial x_3} dx_3 \quad (2.21)$$

Da equação (2.20) temos que:

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{\sqrt{a^2 - \sum_{j=1, j \neq i}^3 x_j^2}} dx_i \quad (2.22)$$

Com  $i = 1, 2, 3$

Substituindo as derivadas (2.22) em (2.21) temos:

$$dx_4^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2} \quad (2.23)$$

Portanto o elemento de linha da quadri-esfera é:

$$dl^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.24)$$

Este espaço quadridimensional pode ser descrito, por coordenadas hiperesféricas, onde é necessário mais um ângulo  $\chi$  além das usuais coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  [12], cujas relações com as coordenadas cartesianas são:

$$x_1 = a \operatorname{sen} \chi \cos \theta$$

$$x_2 = a \operatorname{sen} \chi \cos \theta \cos \phi$$

$$x_3 = a \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$x_4 = a \cos \chi$$

Com  $0 \leq \chi \leq \pi$ . Desta forma o elemento de linha na hiperfície da quadri-esfera se reduz à:

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi d\Omega^2) \quad (2.25)$$

Onde  $d\Omega$  é o elemento de ângulo sólido<sup>2</sup>  $\Omega = \frac{A}{r^2}$  onde  $d\Omega = \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$ . Considerando  $\operatorname{sen} \chi = r$  temos que:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi \Rightarrow dr = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \chi} d\chi \Rightarrow d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} dr \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.25) temos:

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.27)$$

<sup>2</sup> Ângulo sólido  $\Omega$  é a razão entre a área e o quadrado do raio (partindo do centro) considerando uma superfície esférica.

Substituindo (2.27) em (2.15) obtemos então:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.28)$$

A equação acima é a métrica de Friedmann para o Universo fechado com curvatura espacial positiva constante. Da mesma forma Friedmann trabalhou para obter a métrica para um Universo aberto com curvatura negativa, que está descrita abaixo [12]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left( \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.29)$$

Em 1935 e 1936 Robertson e Walker propuseram que o Universo poderia ser a hiperfície tridimensional de uma quadri-geometria, eles acrescentaram ao seu trabalho uma constante de curvatura, demonstrando assim uma métrica que garantia homogeneidade e isotropia para a geometria do espaço tempo. Essa métrica levou o seus respectivos nomes Métrica de Robertson-Walker, mesmo sendo praticamente a mesma métrica descrita por Friedmann, a única diferença entre ambos os estudos é a constante de curvatura, que permite modificar a métrica, sendo as três curvaturas possíveis: negativa (Universo Hiperbólico), positiva (Universo Hiperesférico) e nula (Universo Plano) [12].

A métrica de Robertson- Walker é:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.30)$$

$k$  é a constante de curvatura que pode assumir os valores de  $k = -1, 0, 1$ .

Em relação a curvatura temos que se  $k$  for positiva, então o Universo é hiperesférico, se  $k$  for zero, o Universo é plano e se  $k$  for negativo o Universo é hiperbólico, conforme podemos ver na figura abaixo [12]. A partir de observações temos que o universo tem a constante de curvatura  $K = 0$ , ou seja, o universo é plano.

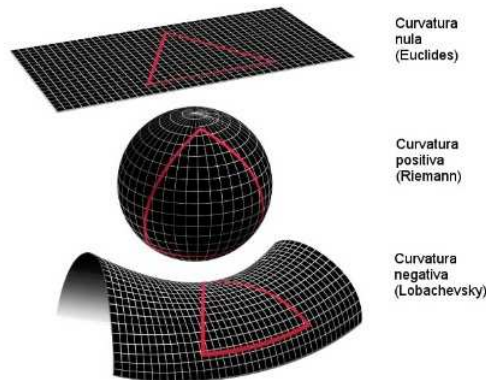


Figura 4 – Geometria do Universo [22]

Até o presente momento trabalhamos com hiperfícies estáticas, ou seja, a constante  $a$  não tem dependência no tempo cósmico. Entretanto, podemos assumir que  $a = a(t)$  e reescrever a métrica como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.31)$$

$r$  é a coordenada co-móvel, coordenada essa que evolui junto com a expansão, ou seja, um observador parado que também faz parte dessa expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes de tempo [12].

A equação acima é a métrica de Friedmann-Lemaître -Robertson-Walker. A FLRW é uma solução das equações de campo de Einstein, a qual descreve um universo em contração ou expansão, homogêneo e isotrópico [1].

## 2.3 MODELO COSMOLÓGICO FLRW

Esse modelo cosmológico tem como principal objetivo descrever a evolução histórica do Universo, é baseado nas equações de Friedmann-Lemaître e a sua geometria é dada pela métrica de Robertson-Walker [12],[13].

A partir dessa seção, até o final desse capítulo, utilizaremos um sistema de dados no qual consideraremos, a constante de Newton e a velocidade da luz igual a um,  $G = 1$  e  $c = 1$ . Esse sistema será desprezado no próximo capítulo.

### 2.3.1 Equações de Friedmann

As equações de Friedmann são formadas por uma série de equações que tem como finalidade descrever a evolução temporal, bem como a evolução da expansão do universo [12], ou seja, um conjunto de equações diferenciais para  $a(t)$  em função das características médias do cosmos (densidade de energia, constante cosmológica, pressão e curvatura).

As equações supra citadas apresentam soluções para as equações de Einstein para um fluido perfeito<sup>3</sup>. Esse conjunto de equações respeitam três hipóteses básicas:

- O Princípio Cosmológico.

O princípio cosmológico que leva ao elemento de linha de Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.32)$$

---

<sup>3</sup> Fluido perfeito pode ser definido como um fluido isotrópico, que não possui viscosidade, e no qual a densidade é constante. [25]

$a(t)$  fator de escala (Universo contraindo ou expandindo)

$k$  constante de curvatura (pode assumir os valores -1,0,1)

- O Postulado de Weyl<sup>4</sup>.

O Postulado de Weyl introduz o fluido perfeito cujo tensor energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

$p$  pressão;

$\rho$  densidade de massa;

$u_\mu$  quadri-velocidade;

$g_{\mu\nu}$  métrica.

- As equações de campo de Einstein dadas por:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

$G_{\mu\nu}$  componentes do tensor de Einstein;

$\mu$  e  $\nu$  - variam de 0 a 3.

Para calcular as componentes do tensor de Einstein, primeiramente precisamos calcular as componentes do tensor de Ricci, posteriormente o valor do escalar de curvatura, e por fim as componentes do tensor energia-momento [12].

Para começar vamos usar a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.35)$$

Escrevendo a métrica como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.36)$$

Onde:

$$x^0 = ct; x^1 = r; x^2 = \theta; x^3 = \phi$$

---

<sup>4</sup> Postulado de Weyl: No postulado Weyl define que o espaço é preenchido por um fluido estacionário, as partículas que se movem nesse fluido encontram no espaço-tempo um conjunto de geodésicas temporais, cada geodésica passará por um ponto, e não irão se cruzar. Desta maneira, existe uma e apenas uma geodésica passando através de cada ponto do espaço-tempo. Consequentemente, a matéria em qualquer ponto possui uma única velocidade([12], pg 121)

Para:

$$g_{\mu\nu} = 0, \forall \mu \neq \nu$$

$$g_{\mu\nu} \neq 0, \forall \mu = \nu$$

Dessa forma as componentes não nulas são:

$$g_{00} = 1$$

$$g_{11} = \frac{-a^2}{1-kr^2}$$

$$g_{22} = -a^2 r^2$$

$$g_{33} = -a^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Pelo postulado de Weyl:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

No referencial co-móvel o fluido é estacionário, logo sua quadri-velocidade, que é a derivada do quadri vetor posição em relação ao tempo próprio  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ , é dada por  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Desta forma as componentes do tensor energia-momento são [12]:

$$T_{00} = (\rho + p)u_0 u_0 - pg_{00} = (\rho + p)g_{0\mu} u^\mu u_0 - pg_{00} = (\rho + p)g_{00} u^0 u_0 - pg_{00} = \rho \quad (2.37)$$

$$T_{0i} = (\rho + p)u_0 u_i - pg_{0i} = (\rho + p)g_{0k} u^k u_i = 0 \quad (2.38)$$

$$T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j - pg_{ij} = (\rho + p)g_{ik} u^k u_j - pg_{ij} = -pg_{ij} \quad (2.39)$$

Agora para calcular as componentes do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  é necessário ter as componentes do Tensor de Ricci, que é obtido através do tensor de Riemann (também chamado de tensor de Riemann Christoffel)  $R_{\mu\nu\alpha}^\alpha$  que é dado por:

$$R_{\mu\nu\alpha}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (2.40)$$

onde a vírgula denota a derivada covariante, e  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  é o símbolo de Christoffel (ou conexão afim) que é definido por:

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}) \quad (2.41)$$

Portanto temos que o Tensor de Ricci é:



$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} \quad (2.42)$$

E o escalar de curvatura é:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.43)$$

Para os componentes necessários temos deduções parecidas com as realizadas anteriormente, deduções estas muito maçantes, e por este motivo, apenas apresentaremos os resultados descritos abaixo:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.44)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (2.45)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (2.46)$$

$$R_{33} = r^2 \text{sen}^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (2.47)$$

Substituindo as equações (2.44) à (2.47) na equação (2.43), temos que o escalar de curvatura é:

$$\begin{aligned} R &= g^{ij} R_{ij} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= 1\left[-3\frac{\ddot{a}}{a}\right] + \left[\frac{1 - kr^2}{-a^2}\right]\left[\frac{1 - kr^2}{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}\right] + \\ &[-a^2 r^2][r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)] + [-a^2 r^2 \text{sen}^2\theta][r^2 \text{sen}^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)] \\ R &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} \\ &= -\frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{6\dot{a}^2}{a^2} - \frac{6k}{a^2} \\ &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right] \quad (2.48) \end{aligned}$$

Agora substituindo as equações (2.37) à (2.47) na equação (2.34) que é:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} G_{00} - \Lambda g_{00} &= 8\pi T_{00} \\ R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R - \Lambda g_{00} &= 8\pi\rho \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\left(-\frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{6\dot{a}^2}{a^2} - \frac{6k}{a^2}\right) - \Lambda &= 8\pi\rho \\ \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi\rho \end{aligned} \quad (2.49)$$

Definindo:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (2.50)$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned} G_{ij} - \Lambda g_{ij} &= 8\pi T_{ij} \\ R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} &= -8\pi p g_{ij} \end{aligned}$$

Aqui só restam os termos  $i = j$ , temos então:

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R - \Lambda g_{ii} = -8\pi p g_{ii}$$

Para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} G_{11} - \Lambda g_{11} &= 8\pi T_{11} \\ R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R - \Lambda g_{11} &= -8\pi p g_{11} \\ \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} + \frac{a^2}{2(1 - kr^2)}\left(-\frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{6\dot{a}^2}{a^2} - \frac{6k}{a^2}\right) + \frac{\Lambda a^2}{1 - kr^2} &= \frac{8\pi p a^2}{1 - kr^2} \\ a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k - 3(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\ -2a\ddot{a} - k - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda &= -8\pi p \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando a equação (2.50) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi p \\
\frac{2\ddot{a}}{a} &= 8\pi p - \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} + \Lambda \\
\frac{2\ddot{a}}{a} &= \frac{24\pi p}{3} - \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{2\Lambda}{3} \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{12\pi p}{3} - \frac{4\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Para  $i = 2$

$$\begin{aligned}
G_{22} - \Lambda g_{22} &= 8\pi T_{22} \\
R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R - \Lambda g_{22} &= -8\pi p g_{22} \\
r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) - \frac{1}{2}(-a^2 r^2)(-6[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}]) - \Lambda(-a^2 r^2) &= 8\pi(-p(-a^2 r^2)) \\
r^2 a \ddot{a} + 2r^2 \dot{a}^2 + 2r^2 k - 3a^2 r^2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3a^2 r^2 \frac{\dot{a}^2}{a} - 3a^2 r^2 \frac{k}{a^2} + \Lambda a^2 r^2 &= 8\pi p a^2 r^2 \\
a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k - \frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a} - 3k + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\
-\frac{2\ddot{a}a^2}{a} - \frac{\dot{a}^2 a}{a} - k + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\
-\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \Lambda &= 8\pi p \\
\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda &= -8\pi p
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Para  $i = 3$

$$\begin{aligned}
G_{33} - \Lambda g_{33} &= 8\pi T_{33} \\
R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R - \Lambda g_{33} &= -8\pi p g_{33} \\
r^2 \sin^2\theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) - \frac{1}{2}(-a^2 r^2 \sin^2\theta)(-6[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}]) - \Lambda(-a^2 r^2 \sin^2\theta) &= -8\pi p(-a^2 r^2 \sin^2\theta) \\
r^2 \sin^2\theta a \ddot{a} + 2r^2 \sin^2\theta \dot{a}^2 + 2r^2 \sin^2\theta k - 3a^2 r^2 \sin^2\theta \frac{\ddot{a}}{a} - 3a^2 r^2 \sin^2\theta \frac{\dot{a}^2}{a} - & \\
3kr^2 \sin^2\theta + \Lambda a^2 r^2 \sin^2\theta &= 8\pi p a^2 r^2 \sin^2\theta \\
a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k - 3a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 - 3k + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\
-2\ddot{a}a - \dot{a}^2 - k + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2
\end{aligned}$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p \quad (2.54)$$

Dessa forma temos que  $i = 1$ ,  $i = 2$  e  $i = 3$  obtemos o mesmo resultado, ou seja, as componentes se equivalem, isso comprova a isotropia do universo, ou seja, a forma em que o Universo se apresenta é a mesma em qualquer direção. Assim sendo as equações de Friedmann são:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (2.55)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.56)$$

$\Lambda \Rightarrow$  constante cosmológica.

$a \Rightarrow$  fator de escala do Universo.

$k \Rightarrow$  curvatura gaussiana.

Sabemos que  $\rho$  e  $p$  são funções de  $a$  e o parâmetro de Hubble, definido como  $H$ , é a taxa de expansão do Universo.

O parâmetro de Hubble pode sofrer alterações no tempo se os outros componentes da equação forem dependentes do tempo. Se aplicarmos a um fluido a equação de estado dado, as equações de Friedmann irão descrever a evolução do Universo no tempo bem como a sua geometria, como função da densidade do fluido [12].

A métrica FLRW [12] fornece uma solução que descreve um Universo preenchido por um fluido ideal, o qual tem sua densidade e pressão dada pelas equações de Friedmann.

## 2.4 COSMOLOGIA NEWTONIANA

Vamos definir alguns parâmetros para a cosmologia newtoniana que iremos trabalhar. Primeiro definimos um espaço tridimensional com um parâmetro temporal  $t$ , o material que o compõe é um fluido perfeito o qual pode ser caracterizado mediante sua densidade  $\rho$ , sua velocidade  $v$ , sua pressão  $p$ , e o potencial gravitacional  $\phi$ . O comportamento dessas grandezas são determinadas pela equação de continuidade, a equação de Euler e a equação de Poisson [14].

A equação da continuidade que implica em conservação da massa, é descrita por:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.57)$$

A equação de Euler relaciona gravitação e pressão e é descrita por<sup>5</sup>:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = -\nabla\phi - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (2.58)$$

E por fim temos a Equação de Poisson, que relaciona o campo com sua fonte geradora, descrita por:

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho \quad (2.59)$$

Para que a densidade, a velocidade e o potencial gravitacional descritos nas equações acima evoluam temporalmente de forma satisfatória é necessário que os parâmetros iniciais sejam bem definidos, pois qualquer alteração nesses parâmetros, causa alterações nos resultados esperados [15], [14].

A cosmologia Newtoniana é importante, pois é através da evolução temporal desses parâmetros, definidos acima, que iremos conseguir realizar a evolução temporal da matéria escura.

Como estamos trabalhando com a matéria escura nossos cálculos estão voltados para as flutuações da matéria sem pressão, dessa forma este termo será desprezado. Portanto a equação de Euler é reescrita como  $\frac{d}{dt}\vec{v} = -\nabla\phi$ .

Uma das formas de obter a equação Poisson para a gravitação newtoniana descrita acima é através da simplificação das equações de Einstein, para isso utilizamos o limite newtoniano que assume campos gravitacionais fracos e baixas velocidades [1].

Temos que a equação de campo de Einstein é dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.60)$$

Definimos então:

$$\mu, \nu = 0$$

$$R = 8\pi T$$

$$T_{00} = \rho$$

$$T_{\mu i} = 0$$

$\rho$  densidade de matéria.

---

<sup>5</sup> Aqui temos a derivada total em relação ao tempo ou seja, ela representa a mudança de uma variável que depende do tempo, tempo este que evolui com o movimento da massa. Já a derivada parcial que veremos adiante ela representa a mudança de uma variável dependente do tempo que não evolui, ou seja é um tempo fixo [16].

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  para limites de campos fracos, usamos essa relação, que é a equação da métrica de Minkowski perturbada.

$$h_{\mu\nu} \ll 1$$

$$g_{00} = \eta_{00}$$

O traço do tensor energia-momento é descrito por:

$$T = T_{00} \quad (2.61)$$

Temos também que a partir da equação (2.60), e com o parâmetros definidos acima podemos escrever :

$$R_{00} = \frac{1}{2}R \quad (2.62)$$

Reescrevendo a equação de Einstein temos;

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (2.63)$$

Sabendo que  $R = 8\pi T$  e  $T_{00} = \rho$  temos que  $R_{00} = 4\pi\rho$

Para as componentes 00 do tensor de Ricci temos:

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha 0,0}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{0\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\beta} \approx \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} \quad (2.64)$$

Desprezando as derivadas temporais, pois estamos utilizando campos fracos e de baixa velocidade, ou seja, campos considerados estáticos, e sabendo que os símbolos de Christoffel são dados como derivadas do tensor métrico:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}) \quad (2.65)$$

Temos então:

$$\Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} = R_{00} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}(g_{\beta 0,0} + g_{\beta 0,0} - g_{00,\beta}) \quad (2.66)$$

$$= -\frac{1}{2}g_{\alpha}[\eta^{\beta\alpha}h_{00,\beta}] \quad (2.67)$$

$$= -\frac{1}{2}g_{\alpha}h_{00,\alpha}^{\alpha} \quad (2.68)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (2.69)$$

Novamente desprezando as derivadas temporais bem como os termos de segunda ordem, pois somente os termos de primeira ordem são utilizados na perturbação da métrica e escolhendo  $h_{00} = 2\phi$ , lembrando que  $R_{00} = 4\pi\rho$ . Substituindo na equação acima teremos:

$$4\pi\rho = \frac{1}{2} \nabla^2 2\phi \quad (2.70)$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho \quad (2.71)$$

que é a equação de Poisson, dessa forma podemos perceber que partindo das equações da relatividade geral podemos recuperar a equação para a gravitação newtoniana.

Usamos o limite de campos fracos e baixas velocidades, ou seja, consideramos campos estáticos, para recuperar a equação de Poisson. Fazendo isso acabamos por causar uma inutilidade nas equações da seção anterior, pois as equações de Friedmann, só tem utilidade se tivermos a evolução temporal da densidade, e para isso é necessário derivar a equação de Friedmann em relação ao tempo e relacionar com a equação aceleração. Como não há aceleração, pois consideramos campos estáticos, as equações de Friedmann perdem seu significado [17].

## 2.5 TEORIA DA PERTURBAÇÃO NEWTONIANA

Para entendermos a formação de estruturas através da Cosmologia Newtoniana, é necessário entender a evolução das flutuações da matéria.

Sabemos que o nosso Universo está se expandindo, ou seja, a distância entre objetos está sempre aumentando com o passar do tempo. Essa distância é definida por  $r$  (que é a coordenada co-móvel) [18].

$$r = a(t)x \quad (2.72)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala e  $x$  posição do objeto em coordenadas locais.

Podemos perturbar a matéria para que através de flutuações que essas perturbações vão gerar, possamos entender a formação das estruturas no universo.

Essas perturbações implicam na reformulação da densidade, da velocidade, da pressão e do potencial gravitacional conforme descrito abaixo.

A velocidade é então descrita por:

$$\frac{\partial r}{\partial t} \equiv v = \dot{a}x + a\frac{\partial x}{\partial t} = aHx + u \quad (2.73)$$

onde o primeiro termo é a constante de Hubble, e o segundo  $u$  é a velocidade que podemos tratar como uma perturbação, chamada de velocidade peculiar.

A densidade com o parâmetro de perturbação já inserido é descrita por:

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(x, t)] \quad (2.74)$$

Da mesma forma que a densidade a pressão com parâmetro de perturbação é descrita por:

$$p = \bar{p}(t) + \delta p \quad (2.75)$$

O potencial gravitacional como a perturbação é:

$$\phi = \bar{\phi}(x, t) + \Phi \quad (2.76)$$

$\Phi$  é o potencial gravitacional perturbado.

Todas as derivadas espaciais são em coordenadas co-móveis  $r$ .

Temos então que a equação da continuidade é descrita por:

$$(1 + \delta)\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \cdot \nabla \delta + \bar{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta)(aHr + u)] = 0 \quad (2.77)$$

Juntando os termos de forma a separá-los em ordem zero, primeira e segunda ordem onde podemos perceber essa separação através do uso de colchetes temos:

$$\left[\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H\right] + \left[\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H\right)\delta + \bar{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla \cdot u\right] + \left[\frac{\bar{\rho}}{a}(u \cdot \nabla \delta + \nabla \delta \cdot u)\right] = 0 \quad (2.78)$$

Para obter a aproximação linear devemos desprezar os termos de segunda ordem e utilizar o de ordem zero nos termos de primeira ordem.

A perturbação da densidade de primeira ordem é:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot u = 0 \quad (2.79)$$

Para a equação de Euler perturbada temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Hu = -\frac{1}{a\bar{\rho}} \nabla \delta p + \frac{1}{a} \nabla \Phi \quad (2.80)$$



Para a equação de Poisson perturbada temos:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi a^2 \bar{\rho} \delta \quad (2.81)$$

Derivando (2.79) em relação ao tempo temos:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{1}{a} H \nabla \cdot u + \frac{1}{a} \nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.82)$$

Combinando a equação acima, como as equações de Euler e Poisson perturbadas temos:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{1}{a} H \nabla \cdot u - \frac{1}{a} \nabla \cdot \left( H u + \frac{1}{a \bar{\rho}} \nabla \delta p - \frac{1}{a} \nabla \Phi \right) = 0 \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{2}{a} H \nabla \cdot u - \frac{1}{a^2 \bar{\rho}} \nabla^2 \delta p + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi \bar{\rho} \delta - \frac{1}{a^2 \bar{\rho}} \nabla^2 \delta p = 0 \quad (2.85)$$

Como já dissemos anteriormente nossos cálculos estão voltados para as flutuações de matéria sem pressão, então  $\frac{1}{a^2 \bar{\rho}} \nabla^2 \delta p = 0$ , assim sendo, reescrevemos a equação acima como:

$$\ddot{\delta} + 2H \dot{\delta} - 4\pi \bar{\rho} \delta = 0 \quad (2.86)$$

A equação acima é o resultado final da linearização das equações do fluido [1], realizada através do uso da cosmologia newtoniana considerando a expansão.

## 2.6 EQUAÇÕES PARA FLUIDOS ESPECÍFICOS

Nessa seção vamos trabalhar com os tipos de fluidos específicos do nosso Universo. A matéria não relativística é usada como um nome coletivo para todos os fluidos sem pressão, matéria escura e matéria bariônica sendo os principais exemplos [1].

A equação de Friedmann é dada por  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , dessa forma podemos relacionar a densidade, o fator de escala e a geometria do universo da seguinte forma:

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \left( H^2 - \frac{k}{a^2} \right) \quad (2.87)$$

Se considerarmos  $k = 0$ , temos o universo plano, para o qual a densidade crítica é definida como  $\rho_c = \frac{3}{8\pi} H_0^2$ . Definimos também o parâmetro de densidade:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (2.88)$$

Temos então que os parâmetros de densidade da matéria, da radiação e da constante cosmológica são:

$$\Omega_m = \frac{8\pi\rho_m}{3H_0^2} \quad (2.89)$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi\rho_r}{3H_0^2} \quad (2.90)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.91)$$

Já a equação de estado é descrita por [16]:

$$w = \frac{p}{\rho} \quad (2.92)$$

As formas mais simples de matéria no universo tem uma equação de estado constante.

- matéria  $\rightarrow w_m = 0$
- radiação  $\rightarrow w_r = \frac{1}{3}$
- constante cosmológica (energia escura)  $\rightarrow w_\Lambda = -1$

A densidade tem dependência em relação ao fator de escala. Portanto:

$$\rho \propto a^{-n}$$

$n$  é relacionado ao parâmetro da equação de estado descrito por:

$$n = 3(1 + \omega)$$

Para a matéria temos que a densidade em relação ao fator de escala é dada por:

$$\rho_m \propto a^{-3}$$

Para a radiação temos:

$$\rho_r \propto a^{-4}$$

Para a constante cosmológica temos:

$$\rho_{\Lambda} \propto 1$$

Na equação de Friedmann, não é feita distinção entre matéria escura e bariônica, e assim estes têm efeitos idênticos no Universo como um todo. O componente mais importante do universo é a energia escura cuja natureza é desconhecida, uma das possibilidades de energia escura é a constante cosmológica, correspondendo a uma densidade de energia constante com uma pressão negativa associada.

“A constante cosmológica é também chamada energia do vácuo, por ser supostamente gerada por flutuações quânticas no vácuo - pares virtuais de matéria e antimatéria virtuais, constantemente sendo criadas e destruídas em um tempo muito pequeno de forma a não ferir a lei macroscópica de conservação da matéria.” (SARAIVA, OLIVEIRA FILHO, MULLER,2014, pg 8).

Da segunda equação de Friedmann (2.56), vemos que a energia escura é a única dessas três componentes que contribuem positivamente para a aceleração  $\ddot{a}$  da expansão.

Os valores mais bem aceitos dos atuais parâmetros cosmológicos são [1]:

$$\left[ \begin{array}{l} \Omega_{\Lambda,0} = 0,691 \pm 0,006 \\ \Omega_{m,0} = 0,309 \pm 0,006 \\ \Omega_{r,0} \approx 8,4 \times 10^{-5} \\ H_0 = (67,7 \pm 0,5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \end{array} \right. \quad (2.93)$$

Nosso Universo com estes três componentes tem então a seguinte equação de Friedmann:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4}} \quad (2.94)$$

Temos então a seguinte divisão, no princípio a radiação era o componente dominante, depois passou a ser a matéria a componente dominante do universo, por fim nos tempos atuais é a energia escura quem o domina, sendo que esta caminha para a dominação total [1]. Em cada época de dominação dois componentes são tudo o que precisamos para modelar com precisão o Universo. Dessa forma como nosso estudo quer entender o Universo presente, deixamos de lado a radiação. Para descobrir quando isso é possível, calculamos o valor no qual a radiação e a matéria são igualmente importantes:

$$\Omega_r = \Omega_m$$

$$a_{rm} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}$$

$$\Omega_{r,0} \approx 8,4 \times 10^{-5}$$

$$\Omega_{m,0} = 0,309 \pm 0,006$$

$$a_{rm} = 2,7 \times 10^{-4}$$

Da mesma forma, a equivalência entre matéria / energia escura ocorre em  $a_{m\Lambda}$ :

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Omega_{m,0} = 0,309 \pm 0,006$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0,691 \pm 0,006$$

$$a_{m\Lambda} = 0,76$$

Para a dominação completa, as taxas de expansão podem ser facilmente calculadas usando o componente único da equação de Friedmann,  $\dot{a} = H_0 a^{-\frac{1}{2}(1+3\omega)}$ , e considerando as equações de estado, para dominação por cada um dos três tipos de fluidos, nós temos então:

$$\dot{a} = \begin{cases} H_0 a^{-1} \rightarrow (\text{radiação}) \\ H_0 a^{-\frac{1}{2}} \rightarrow (\text{matéria}) \\ H_0 a \rightarrow (\text{energia escura}) \end{cases} \quad (2.95)$$

$$\dot{a} = \begin{cases} (2H_0 t)^{\frac{1}{2}} \rightarrow (\text{radiação}) \\ \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow (\text{matéria}) \\ C e^{H_0 t} \rightarrow (\text{energia escura}) \end{cases} \quad (2.96)$$

$C \rightarrow$  constante de integração.

## 2.7 FLUTUAÇÕES DE MATÉRIA

As eras de dominação da matéria são descritas pela equação da continuidade que descreve a densidade perturbada.

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{1}{a} H \nabla \cdot u + \frac{1}{a} \nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.97)$$

Como já vimos na seção 2.5 a perturbação nas componentes do universo causam flutuações, que nos permitem entender a formação de estruturas no Universo, no nosso caso em particular queremos compreender e analisar a estrutura da matéria escura.

Temos três eras de dominação, a dominação pela matéria, radiação e energia escura.

Na era de dominação por matéria temos que as perturbações de densidade crescem linearmente, levando ao agrupamento da matéria [1].

Na era dominada pela radiação temos que a taxa de expansão é maior para essa era do que é para a era dominada por matéria, dessa forma esperamos que se tenha menos aglomeração nessa época inicial. As perturbações de matéria crescem apenas logaritmicamente nessa fase, ou seja, nenhuma estrutura significativa é formada antes da matéria começar a dominar[1], salientando que a matéria bariônica não forma nenhuma estrutura, mas a matéria escura que não interage com a radiação já se condensa nessa época.

Na era dominada pela energia escura as flutuações da densidade da matéria param de crescer.[1].

Códigos numéricos podem ser usados para resolver as equações diferenciais lineares (relativísticas) que governam as flutuações da matéria. Estes cálculos são feitos frequentemente no espaço de Fourier, além de definir uma série de parâmetros iniciais é importante iniciar a simulação em um determinado momento, para que as flutuações de matéria sejam descritas com precisão pela teoria de perturbação linear. Essa simulação que constitui o código numérico N-corpo nada mais é que uma simulação do campo de densidade [1]. Esse código numérico será abordado no próximo capítulo.

### 3 SIMULAÇÕES COSMOLÓGICAS

Para entendermos uma das maiores componentes do universo a matéria escura, vamos nos utilizar das simulações cosmológicas de N-corpos. As simulações gravitacionais de N-corpos, isto é soluções numéricas das equações propostas de N-partículas que interagem gravitacionalmente, são amplamente utilizados como ferramentas da astrofísica [30].

O coração de qualquer código cosmológico de N - corpos é o seu solver<sup>1</sup> gravitacional, isto se deve ao fato de que a gravidade domina a formação da estrutura na escala cosmológica [30].

Temos dessa forma quatro métodos a serem discutidos:

- Partícula-partícula PP
- Percurso de Árvore
- Partícula de malha PM
- Partícula-partícula/partícula-malha (p3m)

Para conseguirmos reproduzir uma simulação da evolução do universo partindo de uma distribuição quase homogênea de matéria escura até a formação das macroestruturas em forma de "teia", devemos primeiramente entender cada método.

De acordo com Dakin (2015) e Diaz (2013) os métodos são descritos da seguinte forma:

#### 3.0.1 O método partícula-partícula

O PP método é o mais simples do solver gravitacional em simulações cosmológicas de N-corpos. O formalismo mais simples para gravitação newtoniana é a equação originalmente apresentada pelo próprio Newton conhecida como lei da gravitação universal de Newton. Neste formalismo a matéria consiste de partículas que interagem aos pares. Este é também o formalismo utilizado pelo método PP daí o nome de partícula-partícula ou método direto.

Esse método foi desenvolvido na década de 1960 por Sebastian von Hoerner.

Como sabemos o sistema é constituído por inúmeras partículas, todas sob influência de suas forças gravitacionais, a simulação de N-corpos Partícula-Partícula (PP) integra

---

<sup>1</sup> O solver é um software matemático, voltado para resolver um determinado problema, ele se utiliza das descrições genéricas do problema cria uma solução e cria ainda um diretório ou biblioteca onde problemas semelhantes ao original podem ser facilmente resolvidos.

todas as forças sem realizar qualquer tipo de simplificação ou aproximação, fazendo com que não haja perdas de precisão na simulação. Esta precisão vem com o preço de um baixo desempenho (computacional), já que para atualizar cada partícula, a informação de todas as outras é necessária. Esse método se mostra muito preciso, mas com baixo desempenho devido a sua alta complexidade.

### 3.0.2 Percurso de Árvore

Pode-se melhorar o método PP sem uma perda considerável da precisão, agrupando as partículas distantes, de forma a não calcular a força individual de cada uma, mas sim do grupo todo com aproximadamente a mesma posição. Sabemos que quanto maior a distância entre as partículas menor a força, para buscar um melhor desempenho essa força é desprezada, considerando somente uma força resultante destas partículas. Esta abordagem é a utilizada pelo método de percurso de árvore, desenvolvido por Barnes e Hut.

Este método nos permite tratar um grupo de partículas como uma sendo uma só. Nesse método o espaço é subdividido em uma árvore, no qual cada folha contém apenas uma partícula. Cada nó interno desta árvore possui uma partícula no centro de massa, calculada a partir de todos seus filhos.

Esse método apresenta um grande ganho no desempenho, porém há uma grande perda de precisão, devido ao tamanho das áreas que são unificadas em um único ponto.

### 3.0.3 Partícula-Malha

O método Partícula-Malha, PM, discretiza o espaço, esta divisão permite que o cálculo da força resultante em cada partícula seja resumido ao cálculo do potencial em cada ponto da malha. Na sequência é realizada a atualização de cada partícula.

O método tem com princípio a criação de uma malha sobre o espaço que contém as partículas a serem simuladas. Para dar sequência basta resolver a equação do potencial nos pontos desta malha e então calcular a força em cada ponto da malha pelo gradiente do potencial. Para encontrar a força em uma partícula fora dos pontos da malha, consideramos a mais próxima ou a interpolação dos potenciais vizinhos.

Esse método possui alto desempenho, porém cria uma limitação espacial, que impede que fenômenos pequenos sejam modelados de forma correta. A aproximação do potencial da célula impede que interações entre partículas dentro dessa mesma célula sejam calculadas de forma correta.

### 3.0.4 Partícula-Partícula/Partícula-Malha

O método Partícula-Malha Partícula-Partícula (PPPM, ou P3M) tem como objetivo corrigir o problema do método Partícula-Malha com os fenômenos que ocorrem em pequena escala, ou seja resolver a questão da interação partícula-partícula dentro da célula, ou seja, os chamados fenômenos de curto-alcance.

A ideia do método PPPM é simples: separar o cálculo da força em forças de curto alcance e de longo alcance. O método Partícula-Malha é utilizado para as forças de longo alcance, já o método Partícula-Partícula é utilizado para curtas distâncias, dessa forma corrigindo a falha do método partícula - malha.

Esse método apresenta uma nova relação entre precisão/desempenho em relação ao método anterior, relação essa bem equilibrada, devido ao fato de utilizar o método PM para longo alcance e o PP para curto alcance. Porém, por ainda possuir uma parcela onde o cálculo é aproximado (utilização do método Partícula-Malha), sua precisão é inferior ao método Partícula-Partícula.

## 3.1 PARTÍCULA - MALHA

Como sabemos as simulações N-corpos são de grande importância para a cosmologia moderna, pois, permitem o estudo da evolução gravitacional considerando a evolução temporal de um determinado sistema de partículas [20].

Para termos uma simulação de qualidade é preciso [20]:

- gerar condições iniciais adequadas e precisas, que são as posições e velocidades iniciais das partículas,
- resolver de forma mais precisa possível as equações de movimento, que determinam as trajetórias das partículas.

Podemos descrever o sistema cuja evolução gravitacional queremos simular por uma única função de distribuição de partículas:

$$f = \vec{f}(x, v, t) \quad (3.1)$$

A função  $f$  descreve a densidade de massa no espaço de fase<sup>2</sup> das partículas.

---

<sup>2</sup> Espaço de fase é a representação da dinâmica das componentes de um sistema. Uma trajetória no espaço de fase representa a evolução temporal do sistema, através da evolução de suas componentes.



Vamos assumir um sistema com uma quantidade muito grande de partículas, desconsiderando as interações entre partículas, para focar no campo gravitacional resultante, dessa forma descrevemos um fluido sem colisão gravitacional. Esse sistema tem a evolução temporal descrita pela equação de Boltzmann sem colisão [20]:

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (3.2)$$

Onde o primeiro e o segundo termo da soma correspondem a propagação das partículas, e o terceiro termo se refere às forças exercidas sobre as partículas por uma influência externa (não pelas próprias partículas).

Na equação acima o potencial  $\phi$  é a solução da equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(x, t) = 4\pi G \int f(x, v, t) dv \quad (3.3)$$

As equações acima (Boltzmann e Poisson) fazem o sistema de Poisson-Vlasov, no qual o espaço de fases conserva as características do sistema ao longo da evolução temporal [20].

A simulação de N-corpos é baseada no uso de um número finito de partículas, utilizadas como amostra da função de distribuição contínua  $f$ . Criamos um sistema discreto de  $N$  partículas com características que se aproximam das mesmas do sistema base. Para tal esquema podemos escrever um novo sistema de equações:

$$\ddot{x}_i = -\nabla \phi(x_i) \quad (3.4)$$

$$\phi(x) = -G \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{(x - x_j)^2 + \varepsilon^2} \quad (3.5)$$

$\varepsilon$  é o parâmetro de suavização da força gravitacional, visa garantir que a dinâmica resultante do sistema seja sem colisão. A inclusão deste termo traz alguns benefícios [20]:

- evita que as partículas que se aproximam umas das outras em ângulos elevados acabem se afastando.
- faz o tempo de relaxamento (retorno de um sistema perturbado ao equilíbrio) de dois corpos grande o suficiente.
- permite a integração do sistema através de métodos de integração de ordem inferior, ou seja, transforma uma integral de múltiplas funções em uma integral simples, alterando a ordem na qual as integrações são realizadas.

A suavização da força gravitacional, tem também uma desvantagem: para separações entre partículas a força computada torna-se um método numérico utilizado em simulações de N-corpos não newtonianas. A escala espacial de  $\varepsilon$  define o limite do intervalo dinâmico de um experimento numérico, define também até que ponto um dado sistema de N-corpos transporta informações físicas confiáveis [20].

Existem vários métodos que permitem a solução do sistema N-corpos, cada uma com suas próprias vantagens e desvantagens. O método PM, é mais simples e rápido.

### 3.1.1 Método PM

Antes de começarmos a explicar o método PM, vamos relembrar um pouco do que trabalhamos até aqui.

Primeiro chegamos a equação de Poisson para a gravidade newtoniana, equação essa usada para descrever as interações gravitacionais no método PM.

No segundo momento desse trabalho definimos a geometria do universo, que estamos simulando, através da métrica FLRW. Após definida a geometria foi a vez de definir através da cosmologia newtoniana o material que compõe o universo bem como o comportamento das grandezas que são necessárias para iniciarmos a simulação, que são velocidade, densidade, o potencial gravitacional, parâmetros esses estão associados a evolução temporal do sistema.

Para continuarmos, precisamos entender como são formadas as estruturas do universo e de que forma elas evoluem, e como já descrevemos as estruturas são formadas a partir de flutuações de matéria, e para gerar essas flutuações precisamos perturbar o material que o compõem, ou seja perturbar os parâmetros que definimos acima, na seção 2.5 trabalhamos com essas perturbações.

Como já estudamos, sabemos que o universo é formado por eras de dominação, matéria, radiação e energia escura. Temos valores de parâmetros bem definidos para essas épocas de dominação.

A partir das eras de dominação podemos entender que as flutuações formam estruturas apenas na fase dominada por matéria, portanto na simulação as flutuações são utilizadas para justificar o uso somente da matéria escura, bem como o intervalo de tempo simulado.

A imagem acima serve para ilustrar como as partículas estavam distribuídas na malha antes de aplicarmos as condições iniciais que precisávamos para simular a formação da estrutura em "teia" da matéria escura. Essa imagem mostra como as partículas estavam todas desorganizadas na malha, sem possuir parâmetros de posição definidas. As próximas

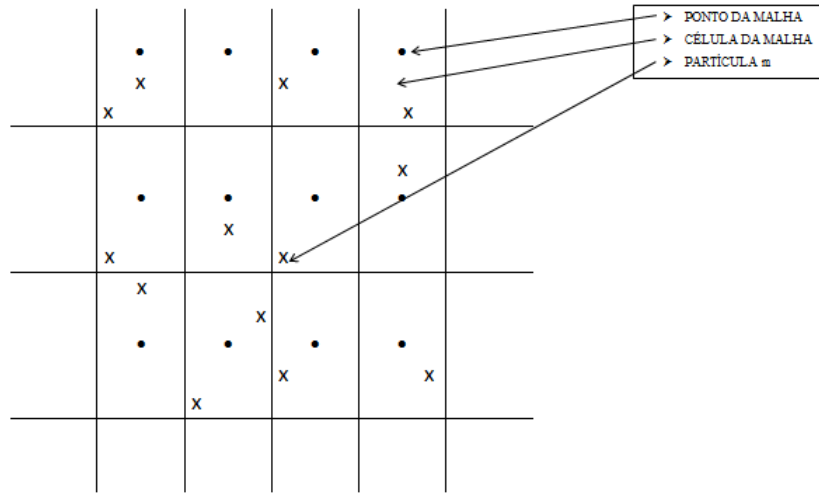


Figura 5 – Imagem inicial da malha

imagens que já possuem parâmetros iniciais definidos serão encontradas no decorrer dessa descrição do método PM.

No método PM através da convolução da densidade com a função de Green, podemos encontrar a equação de Poisson para o potencial gravitacional no espaço real [20].

$$\phi(x) = \int g(x - x')\rho(x)dx' \quad (3.6)$$

Ao escolhermos a função de Green, devemos considerar as condições de contorno relacionadas com o tempo, a função de Green é usada para descrever o comportamento dinâmico de um sistema. No espaço de Fourier, a convolução é substituída por uma simples multiplicação como descrito abaixo:

$$\widehat{\phi}(k) = \widehat{g}(k) \cdot \widehat{\rho}(k) \quad (3.7)$$

Para obter  $\rho(x)$ , definimos uma malha com células cúbicas que possuam uma largura  $h$ . Todas as partículas recebem uma função especial de “forma”  $S(x)$ , que deve ser entendida como campos de densidade de partículas individuais de massa unitária. Cada célula com um centro  $x_m$  recebe uma contribuição fracionaria de massa. [20]. A contribuição de massa para uma dada célula é dada por:

$$W(x_m - x_i) = \int_{x_m - \frac{h}{2}}^{x_m + \frac{h}{2}} S(x' - x_i)dx' = W_{p,i} = \int \prod\left(\frac{x' - x_m}{h}\right)S(x' - x_i)dx' \quad (3.8)$$

onde:

$$\prod(x) = 1 \forall |x| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Pi(x) = 0 \forall |x| \geq \frac{1}{2}$$

$\Pi$  Função de cartola<sup>3</sup>

Portanto, a função de atribuição em massa terá a forma de uma convolução:

$$W(x) = \Pi\left(\frac{x}{h}\right) \star S(x) \quad (3.9)$$

A densidade é descrita pela soma da contribuição de todas as partículas, conforme descrito abaixo:

$$\rho(x_m) = \frac{1}{h^3} \sum_{i=1}^N m_i W(x_i - x_m) \quad (3.10)$$

onde  $m_i$  é a massa da  $i$ -ésima partícula. Existem três funções usadas para  $S(x)$ :

$$NGP : S(x) = \delta_D(x) \quad (3.11)$$

$$CIC : S(x) = \frac{1}{h^3} \Pi\left(\frac{x}{h}\right) \star \delta_D(x) \quad (3.12)$$

$$TSC : S(x) = \frac{1}{h^3} \Pi\left(\frac{x}{h}\right) \star \frac{1}{h^3} \Pi\left(\frac{x}{h}\right) \quad (3.13)$$

onde  $\delta_D(x)$  é a função delta de Dirac e as siglas significam:

- Ponto de grade mais próximo (NGP): A massa de cada partícula  $m_i$  é atribuída ao ponto de grade mais próximo da massa. Na Figura 6, isso significaria atribuir a massa inteira da partícula à célula 2. O NGP também é chamado de interpolação de ordem zero [21].
- Cloud-in-Cell - Nuvem na célula (CIC): A massa de cada partícula é distribuída sobre as quatro células mais próximas, de acordo com a função de distribuição (nuvem). Na Figura 7, quase toda a massa seria atribuída à célula 2, então aproximadamente a mesma quantidade para as células 1 e 4 e, finalmente, cerca de 1/16 para a célula 3. A CIC implementa a interpolação de primeira ordem (linear)[21].
- Interpolações de ordem superior: A função de distribuição ao redor da partícula pode ser feita para cobrir ainda mais células, resultando em interpolações de ordem mais alta, por exemplo, como visto na figura 8. TSC (nuvem de formato triangular)[21].

<sup>3</sup> Função de Cartola refere-se a várias técnicas de filtragem de espaço real ou no de Fourier. O nome da cartola origina-se da forma do filtro, que é uma função retangular [1]

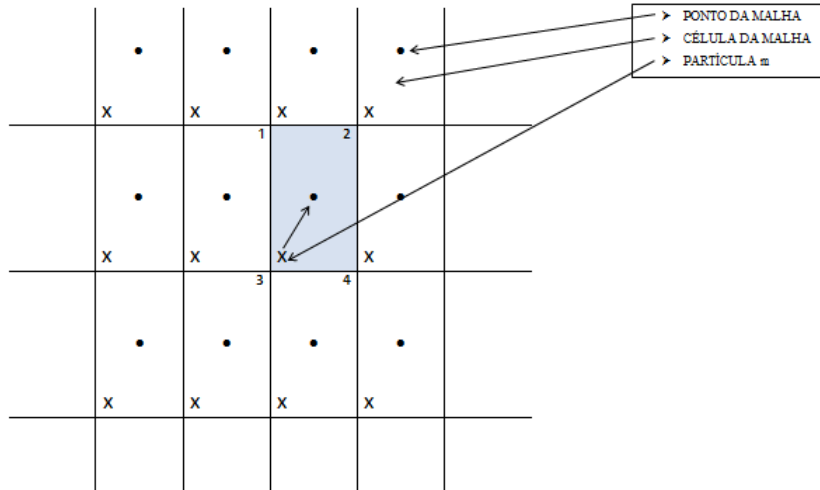


Figura 6 – NPG - Ponto de grade mais próximo

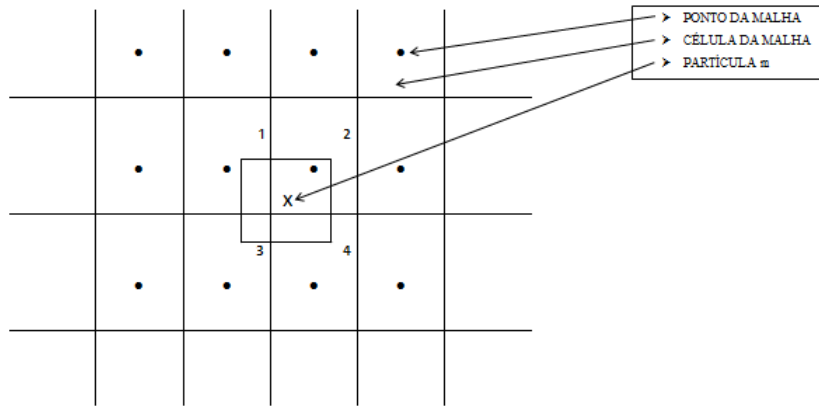


Figura 7 – CIC - Cloud-in-Cell

Como já definimos a densidade de massa  $\rho(x_m)$  na malha, agora através da Transformada Rápida de Fourier (FFT) vamos obter a densidade no espaço de Fourier,  $\rho(k_m)$ .

Vamos multiplicar o resultado da FFT pela função de Green e fazer uma transformada inversa de Fourier, isso resultará no potencial gravitacional do espaço real computado em todas as células da malha  $x_m$  [20].

Através do método de diferenças finitas, calculamos agora o campo de força descrito abaixo:

$$\check{F} = -\nabla\phi \quad (3.14)$$

O CONCEPT usa uma interpolação de quarta ordem:

$$\check{F}_{(i),j,k}^{(x)} = -\frac{4}{3} \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2h} + \frac{1}{3} \frac{\phi_{i+2,j,k} - \phi_{i-2,j,k}}{4h}, 0 \leq i, j, k \leq M \quad (3.15)$$

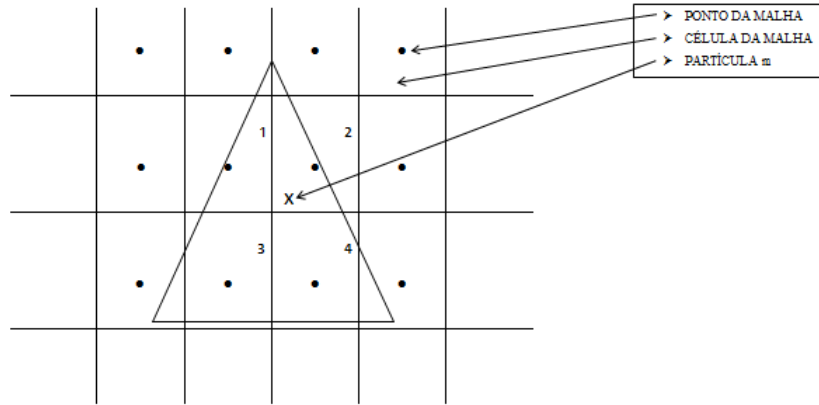


Figura 8 – TSC - Interpolações de ordem superior

onde  $x_m = (i, j, k)$  e componentes  $j, k$  do campo de força  $\check{F}$  são obtidos analogamente.

Agora devemos voltar o campo de força para a posição inicial de cada partícula, devemos usar a mesma forma de interpolação usada na atribuição de densidade para garantir a conservação do momento.

$$F(x_i) = \sum_m W(x_i - x_m) \check{F}_m \quad (3.16)$$

A principal vantagem dos métodos PM é a velocidade. As etapas mais lentas são as FFTs [12].

Para lembrarmos o método PM pode ser descrito pelas etapas a seguir [1].

1. Atribua massas de partículas à malha  $\rho$ . Os pontos aos quais devem ser atribuídas massas estão distribuídos perto da localização da partícula. Para a interpolação cíclica, consideramos então os oito pontos da malha que compartilham a massa da partícula. Adicionamos pseudo pontos à malha, pseudo pontos são pontos adicionados a malha para que esta alcance a periodicidade<sup>4</sup> necessária, a inclusão destes pseudos pontos na malha embora não altere o número de pontos da malha, eles alteram o tamanho das células. Após eles garantirem a periodicidade eles são desconsiderados por enquanto.

2. Transforme  $\rho FFT \rightarrow \check{\rho}$ . A transformada de Fourier deve ser feita localmente, substituindo os valores de densidade na malha pelos valores da transformada de Fourier.

3. Calcule  $\check{\phi}$  para  $\check{\rho}$ . Esse cálculo serve para desconvolucionar a atribuição da massa. Precisamos resolver a equação de Poisson, transformando os valores da malha em

<sup>4</sup> Na simulação os conteúdos da malha (as partículas) é repetido periodicamente em todas as direções. Essa periodicidade torna obrigatório a homogeneidade em escalas maiores que o tamanho da caixa, para garantir essa periodicidade, adicionamos os pseudos pontos na malha [6].

valores potenciais. A última coisa que precisamos fazer antes de sair do espaço de Fourier é atribuir manualmente  $\tilde{\phi}'(0) = 0$ . Esse ultimo passo corresponde a subtrair a densidade média, se não subtrairmos explicitamente a densidade média, um  $FFT$  inverso de  $\tilde{\phi}'(k_p)$  resultará em um erro após muitas implementações de  $FFT$ .

4. Transforme  $\check{\phi}FFT^{-1} \rightarrow \phi$ . A transformada de Fourier deve ser feita no local. Vamos adicionar novamente os valores aos pseudo pontos, pois aqui eles são necessários para a interpolação. Seus valores são simplesmente cópias dos valores dos pontos reais. Aqui além dos pseudo pontos adicionamos pontos fantasmas, que são pontos adicionais ao redor da malha que servem para garantir que o operador de diferenças finitas funcione, os valores atribuídos a esses pontos fantasmas é o mesmo dos ponto reais. Após essa atribuição todos os pontos podem ser diferenciados.

5. Calcule as forças de  $\phi$  por meio de diferenças finitas. Para calcular o campo gravitacional através do operador de diferenças finitas, devemos escolher uma precisão de quarta ordem. Este operador usa os pontos fantasmas para realizar a diferenciação dos pontos mais externos. Quando  $g'(r_p)$  foram encontrados, os pontos fantasmas não são mais necessários.  $g'$  é um campo vetorial, dessa forma criamos uma nova malha e vamos calculando um  $g'$  por vez.

6. Interpolar as forças na malha de volta para as posições das partículas. Essa interpolação resulta na aceleração real em cada posição de partícula. Para a escolha da interpolação cíclica, é novamente utilizado os oito pontos vizinhos. As forças são agora dadas trivialmente por  $F_i = m_i g_i$ .

Assim terminamos o método PM.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

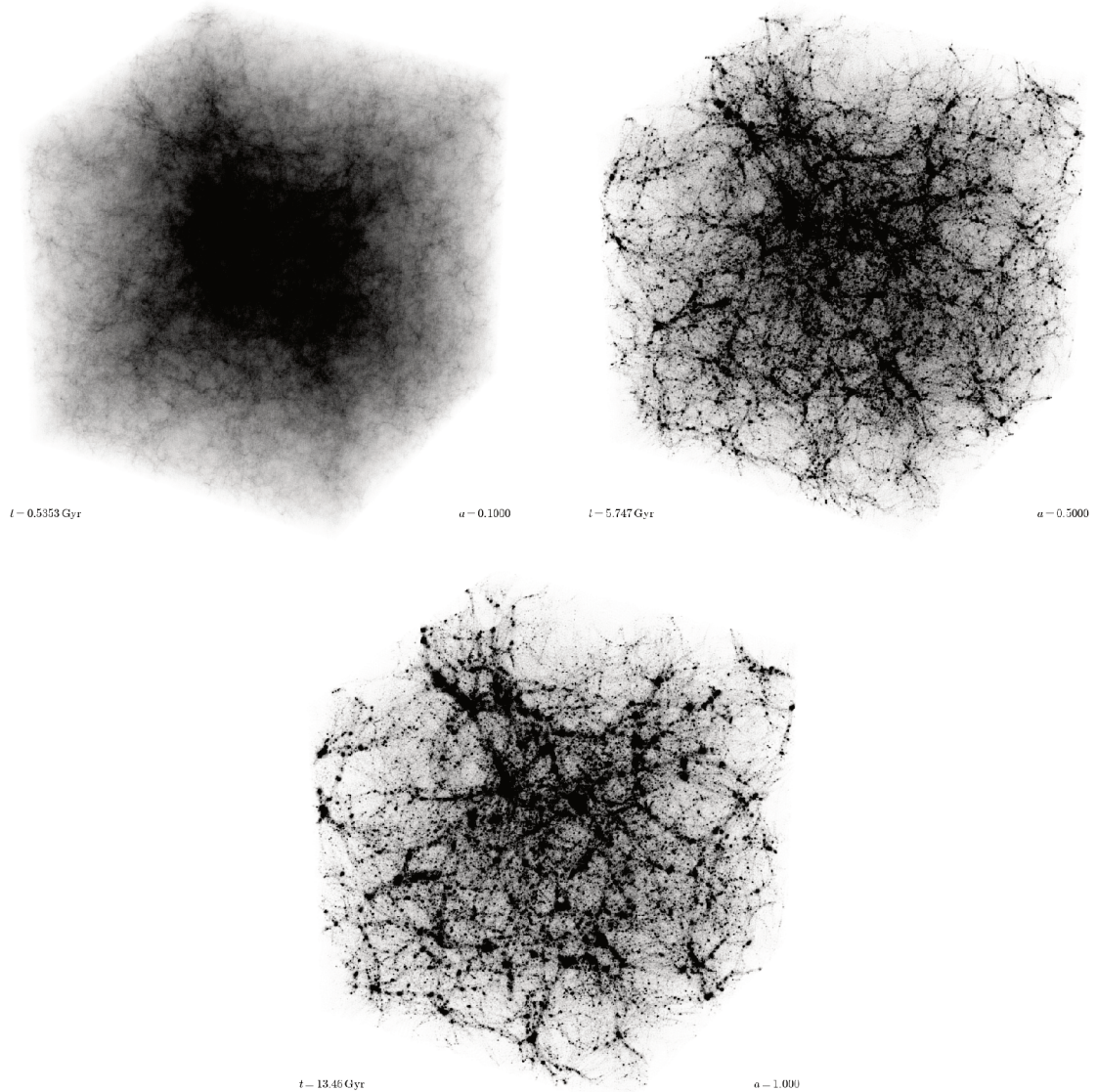


Figura 9 – A primeira imagem representa a estrutura da matéria escura em forma de "teia" para  $a = 0,02$ . A segunda imagem para  $a = 0,5$  e por fim a terceira imagem com  $a = 1$  que representa a estrutura em "teia" da matéria escura na idade atual do universo.

Como descrevemos na introdução a estrutura do universo tem a forma de uma teia, a partir da Figura 2, podemos perceber essa formação em forma de teia. Através da Figura 9, que conseguimos através da simulação, obtivemos uma imagem semelhante para a formação da estrutura da matéria escura. A teia cósmica que é a rede de ligação que conecta todos os componentes do universo tem contribuição significativa da matéria escura.



A forma da teia cósmica, é garantida pelas interações gravitacionais entre matéria escura e matéria bariônica, são essas interações que garantiram que as imagens acima tivessem a forma de estrutura em teia. As interações gravitacionais e sua evolução temporal, bem como a evolução dos demais parâmetros da matéria, tornam possível a visualização da expansão cósmica[5].

Como já discutido anteriormente sabemos que o universo está se expandindo, através da Figura 9, podemos perceber essa expansão mais claramente. A primeira imagem onde as partículas de matéria escura aparecem mais agrupadas, faz referência aos parâmetros iniciais definidos para realizar a simulação com o fator de escala do Universo em expansão definida como  $a = 0,02$ . Já a segunda e terceira imagem, além do fator de expansão, possuem o fator de evolução temporal, vemos a diferença também entre as duas últimas imagens, pois como já estudamos com a evolução temporal, temos também a evolução da expansão.

O objetivo deste trabalho além de fazer todo o estudo sobre as teorias necessárias para que pudéssemos trabalhar com os códigos cosmológicos N-corpos, era realizar a simulação da formação das estruturas em forma de "teia" da matéria escura com a melhor resolução possível para o equipamento disponível, o resultado pode ser visto na Figura 9.

Para realizar a simulação utilizamos o CONCEPT (Código cosmológico de N-corpo no PyThon) é um código livre e aberto para simulações cosmológicas. O CONCEPT pode ser executado no Linux, embora o seu resultado seja mais satisfatório ao utilizar sistemas computacionais paralelos com memória distribuída. O código cosmológico supra citado é escrito quase que totalmente na linguagem Python [1].

O CONCEPT é capaz de desenvolver a evolução temporal, suportando as flutuações da matéria, bem como a própria métrica, de forma a realizar a simulação de forma satisfatória. Além disso, ele também é responsável pela geração das condições iniciais bem como da correção da gravidade sempre que necessário [1].

Ao realizar a simulação através do CONCEPT alguns parâmetros iniciais foram necessários, conforme descrito abaixo:

Condições iniciais:

- Definimos um nome: componentes da matéria, e o tipo de material que trabalharemos, definido no sistema como espécies: partículas de matéria.
- Utilizamos uma quantidade finita de partículas definidas nessa simulação por  $N = 256^3$ .

Parâmetros cosmológicos:

- $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  - Constante de Hubble.
- $\Omega_{CDM} = 0,30$  - Porcentagem de matéria escura presente no Universo.
- $a$  inicial = 0,02 - Fator de escala para o Universo em expansão.

Parâmetros físicos:

- Primeiro utilizamos a força de interação gravitacional da matéria.
- Em seguida incluímos o parâmetro de suavização, para garantir um sistema sem colisão.

A partir dos parâmetros definidos acima, conseguimos reproduzir a simulação da evolução do universo partindo de uma distribuição quase homogênea de matéria escura até a formação das macroestruturas em forma de "teia".

## 5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho realizamos um estudo voltado para a área da cosmologia, mais especificamente nos propusemos a entender uma das componentes presente no universo, a matéria escura. Nos propusemos a estudá-la através de uma simulação cosmológica de N-corpos o CONCEPT, para que além de facilitar o entendimento da formação da matéria escura, pudéssemos entender como ela evolui devido a expansão do universo.

Trabalhamos conceitos físicos que seriam imprescindíveis para realizar a simulação, pois não bastaria realizar a simulação, precisaríamos entender como cada função se aplicava dentro desse universo permeado por essa matéria ainda pouco conhecida. Funções essas que também seriam necessárias para rodar o código cosmológico.

Com as imagens obtidas através do CONCEPT (Figura 9), concluímos que nosso principal objetivo nesse trabalho foi alcançado, ou seja, conseguimos desenvolver os conceitos físicos necessários, e aplicar esses conceitos no código cosmológico, e como resultado obtivemos as imagens da formação da estrutura em forma "teia" da matéria escura, bem como conseguimos compreender seu comportamento associado a expansão do universo, como já descrevemos na seção anterior.

A cosmologia é uma área magnífica, com inúmeras possibilidades de descobertas e estudo, não que todo o aparato matemático seja trivial, pois realmente não é, mas se pensarmos na questão histórica e teórica, deixando um pouco de lado a matematização, a mesma apresenta temas que muitas vezes não são levados, ou quando são, é de maneira bem sucinta, ao conhecimento dos alunos até mesmo nas universidades. A cosmologia possui áreas que fazem os alunos quererem buscar conhecer mais sobre o assunto, portanto temos como sugestão que mais temas dessa área, como matéria escura, energia escura, expansão do universo, Hubble, entre tantos outros, sejam pensados na grade de formação acadêmica, contribuindo assim, para a difusão desses conhecimentos.

## 6 REFERÊNCIAS

[1] DAKIN, Jeppe Mosgaard. Computing Dark Universes: Cosmological N-body Simulations of Dark Matter. 2015. Disponível em: <<http://users-phys.au.dk/jmd/github/concept/mastersthesis.pdf>>. Acesso em: 30 maio 2018.

[2] ESTADOS UNIDOS DA AMÉRICA. NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. . CONTENT OF THE UNIVERSE. 2013. Disponível em: <<https://map.gsfc.nasa.gov/media/080998/index.html>>. Acesso em: 18 jun. 2019.

[3] KLEBIS, Daniela. ENERGIA ESCURA E MATÉRIA ESCURA: Um universo a desvendar. 2017. Disponível em: <<http://pre.univesp.br/energia-escura-e-materia-escura.Ww7nVe4vy1v>>. Acesso em: 30 maio 2018.

[4] SARAIVA, Maria de Fátima O.. O conteúdo do universo. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fatima/ead/universo-atual.htm>>. Acesso em: 30 maio 2018.

[5] WUENSCHÉ, Carlos Alexandre. COSMOLOGIA. 2003. Disponível em: <<http://mtc-m16c.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/jeferson/2003/08.14.14.57/doc/publicacao.pdf?metadataarepository=sid.inpe.br/jeferson/2003/08.14.14.57.41mirror=sid.inpe.br/mtc-m18@80/2008/03.17.15.17.24>>. Acesso em: 11 jul. 2019.

[6] RADCLIFFE INSTITUTE AT HARVARD UNIVERSITY (Estados Unidos da América). Cosmic Web. 2011. Disponível em: <<http://cosmicweb.barabasilab.com/>>. Acesso em: 11 jul. 2019.

[7] KLUS, Helen. How We Came to Know the Cosmos: Space Time. The Star Garden, 2014. Disponível em: <<http://www.thestargarden.co.uk/Newtons-theory-of-gravity.html>>. Acesso em: 18 jun. 2019.

[8] COLAÇO, Leonardo Ribeiro. Cosmologia Newtoniana e Lagrangeana: aplicações e limitações. [S. l.], 2014. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/8293/1/PDF20-20Leonardo20Ribeiro20ColAC3A7o.pdf>>. Acesso em: 18 jun. 2019.

[9] FABRIS, J.C.; VELTEN, H.E.S. Cosmologia neo-Newtoniana: um passo intermediário em direção à Relatividade Geral. Cornell University, 30 jun. 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1207.0060.pdf>>. Acesso em: 18 jun. 2019.

[10] SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira; OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; MULLER, Alexei Machado. Fundamentos de Astronomia e Astrofísica para EAD: Galáxias e Cosmologia. 2014. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fatima/faad.htm>>. Acesso em: 30 maio. 2018.

- [11] ABRAMO, Raul. Introdução à Cosmologia Física. e-Disciplinas Sistema de Apoio às Disciplinas, 2015. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=7127>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [12] DELBEM, Nilton Flávio. Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos. 2010. Dissertação de Pós-Graduação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) - Acadêmico, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94340/delbemnfmercla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [13] PEREIRA, Stella Fernandes. Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais. 2006. Dissertação de Mestrado (Instituto de Física) - Acadêmico, Universidade de Brasília, 2006. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/2318/1/dissertacaoStella20Fernandes20Pereira.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [14] RAINSFORD, Tamath. Newtonian and Post-Newtonian Cosmology. 2000. Disponível em: <https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/19818/2/02whole.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2019.
- [15] MARTTENS, R.f. Vom; RIBEIRO, F.k.; ZIMDAHL, W.. Perturbações cosmológicas e a taxa de crescimento das flutuações da matéria. Revista Brasileira de Ensino de Física, Vitória, v. 34, n. 1, p.1-9, 27 fev. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v34n1/v34n1a10.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [16] CECHIN, Lucas. Derivadas Total e Parcial. 2012. Disponível em: <http://meteorologica.blogspot.com/2012/01/derivadas-total-e-parcial.html>. Acesso em: 11 jul. 2019.
- [17] GRAMS, Guilherme. Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos. 2013. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/32105/R20-20D20-20GUILHERME20GRAMS.pdf;jsessionid=6C36606FAABC641C9DCB0C31BFD9EC28?sequence=1>. Acesso em: 11 jul. 2019.
- [18] PETER, Patrick. Cosmological perturbation theory. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1303.2509.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2019.
- [19] DÍAZ, Diego Herbin Stalder. UM NOVO SIMULADOR DE N-CORPOS PARA COSMOLOGIA COMPUTACIONAL UTILIZANDO GPUS. 2013. Disponível em: <http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.08.17.58/doc/publicacao.pdf>. Acesso em: 30 maio 2018.
- [20] HELLWING, Wojciech. A short introduction to numerical methods used in cosmological N-body simulations. 2015. Disponível em: <https://www.pta.edu.pl/pliki/proc/kielce15/v2p58.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.

- [21] LINDHOLM, Tancred. N-body algorithms. [S. l.], p. 1-16, 1999. <http://www.cs.hut.fi/~ctl/NBody.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [22] ALMEIDA, Alvaro Augusto W. de. Einstein e a Relatividade Geral. 2013. Disponível em: <<https://pt.slideshare.net/alvaug/relatividade-geral-mai2013pub>>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [23] COLLODEL, Lucas Gardai. Tópicos de Cosmologia. Tópicos de Cosmologia, [S. l.], 2014. Disponível em: <http://fisica.ufpr.br/grad/cosmologia.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [24] COSTA FILHO, Francisco Geraldo da. Alguns Aspectos da Teoria de Gravidade Modificada. 2015. TESE DE DOUTORADO (Física) - Acadêmico, Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9829/2/Arquivototal.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [25] GOMES, Maria Helena Rodrigues. APOSTILA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS., Juiz de Fora, p.1-79. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/engsanitariaeambiental/files/2012/09/Apostila-de-MecC3A2nica-dos-Fluidos.pdf>>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [26] MULLER, Alexei Machado. Fundamentos de Astronomia e Astrofísica para o Ensino Superior na Modalidade a Distância. [S. l.], 2013. Disponível em: <http://lief.if.ufrgs.br/pub/cref/n30Muller/index3.htm>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [27] OLIVEIRA, Tiago Bruno Rafael de Freitas. Teorias f(R) de Gravidade na Formulação de Palatini. 2010. Dissertação (Departamento de Física Teórica e Experimental) - Acadêmico, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/18587/1/ThiagoBRFODISSE-RT.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [28] PELICER, Mateus Reinke. Cálculo Tensorial e Relatividade Geral. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) - Acadêmico, Universidade Estadual de Maringá, 2016. Disponível em: <http://site.dfi.uem.br/wp-content/uploads/2018/01/TCC-Bacharelado-Mateus-Reinke-Pelicer.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [29] SANOJA, Alberto. Evolução Cosmológica de Perturbações de Densidade Inhomogêneas. 2010. TESE DE DOUTORAMENTO (Física Teórica) - Acadêmico, Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, 2010. Disponível em: <https://repositorio.une-sp.br/bitstream/handle/11449/101327/sanojaadrift.pdf?sequence=1>. Acesso em: 18 jun. 2019.
- [30] TRENTI, Michele; HUT, Piet. N-body simulations (gravitational). 2008. Disponível em: <[http://www.scholarpedia.org/article/N-body\\_simulations\(gravitational\)](http://www.scholarpedia.org/article/N-body_simulations(gravitational))> .Acesso em : 30maio2018.

[31] VIGLIONI, Arthur and SOARES, Domingos. Observações sobre as soluções clássicas da equação de Friedmann. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2011, vol.33, n.4, pp.4702-4702. ISSN 1806-1117. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400023>.

[32] MALOSSI, Rodrigo MÓr. A Física de Partículas e o Universo Primordial: um estudo sobre a obtenção da densidade de relíquia de partículas estáveis. 2015. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/132115/000983048.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 18 jun. 2019.