

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS REALEZA
CURSO DE FÍSICA - LICENCIATURA

Gabriel Vinicius Vian

Introdução à Eletrodinâmica e Cromodinâmica Quântica

Realeza

2022

Gabriel Vinicius Vian

Introdução à Eletrodinâmica e Cromodinâmica Quântica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Física - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado(a) em Física.

Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Física - Licenciatura

Orientador: Tobias Heimfarth

Coorientador: Leonardo de Lima

Realeza

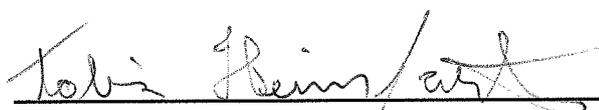
2022

Gabriel Vinicius Vian

Introdução à Eletrodinâmica e Cromodinâmica Quântica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Física - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado(a) em Física.

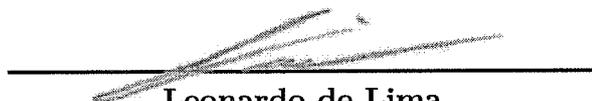
Trabalho aprovado. Realeza, 29 de março de 2022:



Tobias Heimfarth
Orientador



Everton Artuso
Convidado 1



Leonardo de Lima
Convidado 2



Danuce Marcele Dudek
Membro da banca

Realeza
2022

Este trabalho é dedicado à minha família.

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados ao professor Leonardo de Lima e à professora Danuce Dudek por todos esses anos de aprendizado e orientação. Agradeço também a meus familiares por todo o apoio irrestrito nesses anos de formação, a meus amigos por todo apoio e momentos felizes proporcionados (em especial ao Giovani, Robison e Daniel).

Agradeço à Universidade Pública, em especial à Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS, por me conceder acesso à educação superior gratuita e de qualidade.

Agradeço às agências de fomento à Pesquisa, em especial à Fundação Araucária, pelo amparo à minha pesquisa.

Agradeço também aos demais professores que compuseram minha vida acadêmica.

Por fim, agradeço ao Anderson por todo seu companheirismo e alegrias proporcionadas.

“Um físico é apenas a forma que um átomo encontrou de olhar para si mesmo.” (Niels Bohr)

Resumo

O modelo padrão (MP) constitui-se em um conjunto de teorias que versam sobre a estrutura da matéria, tratando-se de um arcabouço teórico que estuda os constituintes fundamentais da mesma e suas interações. As interações descritas pelo modelo são: eletromagnética, responsável pela força entre cargas, forte, responsável por manter os núcleos atômicos coesos e pela atração entre os quarks, e fraca, responsável pelos decaimentos. Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo apresentar e utilizar o ferramental teórico da teoria da interação eletromagnética, a Eletrodinâmica Quântica (QED), e da teoria da interação forte, a Cromodinâmica Quântica (QCD), para cálculos de grandezas associadas a alguns processos envolvendo partículas. Inicialmente, alguns elementos conceituais do MP são apresentados a fim de introduzir o leitor nessa temática. Na sequência, para apresentação das ferramentas da QED e QCD, são introduzidos tensores, notação de Einstein e métodos perturbativos. A partir desses aspectos, estuda-se a equação de Schrödinger e soluciona-se a mesma via métodos perturbativos (solução de ordem um no potencial V). Tal solução subsidia a relação entre amplitude de transição e diagramas de interação. Posteriormente, realiza-se o mesmo procedimento para equações de campo de Klein-Gordon e Dirac, e relaciona-se as amplitudes de transição dessas equações com diagramas de Feynman. Essas relações são então sistematizadas nas Regras de Feynman para QED. Alguns elementos conceituais da QCD são expostos, bem como suas regras de Feynman. Na sequência, espalhamentos são apresentados e então analisados à luz das regras de Feynman. A partir dessas análises obtém-se resultados, isto é, grandezas como seções de choque e potenciais de interação, que subsidiam discussões. Os resultados apresentados mostram que as teorias utilizadas possuem boa corroboração experimental e também mostram como se dá a construção e fundamentação das teorias do MP, como a QCD.

Palavras-chave: Física de Partículas; Métodos Perturbativos; Eletrodinâmica Quântica; Cromodinâmica Quântica.

Abstract

The standard model (SM) is a set of theories that deal with the structure of matter, a theoretical framework that studies its fundamental constituents and their interactions. The interactions described by the model are: electromagnetic, responsible for the force between charges, strong, responsible for keeping atomic nuclei together and for the attraction between quarks, and weak, responsible for decays. Thus, the present work aims to present and use the theoretical tools of the theory of electromagnetic interaction, Quantum Electrodynamics (QED), and of the theory of strong interaction, Quantum Chromodynamics (QCD), for calculations of quantities associated with some processes involving particles. Initially, some conceptual elements of the SM are presented in order to introduce the reader to this theme. Next, to present the QED and QCD tools, tensors, Einstein notation and perturbative methods are introduced. From these aspects, the Schrödinger equation is studied and it is solved using perturbative methods (order one solution in the potential V). Such a solution supports the relationship between transition amplitude and interaction diagrams. Subsequently, the same procedure is performed for the Klein-Gordon and Dirac field equations, and the transition amplitudes of these equations are related to Feynman diagrams. These relationships are then systematized in Feynman's Rules for QED. Some conceptual elements of QCD are exposed, as well as its Feynman rules. Next, scatterings are presented and then analyzed in light of Feynman's rules. From these analyses, results are obtained, that is, quantities such as cross-sections and interaction potentials, which give support to discussions. The results presented show that the theories used have good experimental corroboration and also show how the construction and foundation of SM theories, such as QCD, takes place.

Keywords: Particle Physics; Perturbative Methods; Quantum Electrodynamics; Quantum Chromodynamics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.	13
2.1	O Modelo Padrão	13
2.1.1	O que é o Modelo Padrão?	13
2.1.2	Quarks e Léptons	13
2.1.3	Partículas Mediadoras.	17
2.2	Diagramas de Feynman	19
2.3	Tensores e Notação de Einstein.	22
2.3.1	Tensores.	22
2.3.2	Notação de Einstein.	25
2.3.2.1	Noções preliminares.	25
2.3.2.2	Produto interno na notação de Einstein.	26
2.3.2.3	Covariância e Contravariância	30
2.3.2.4	Derivadas covariante e contravariante de Lorentz.	30
2.4	Métodos Perturbativos	31
2.5	Solução perturbativa da equação de Schrödinger com potencial dependente do tempo	32
2.5.1	Teoria Quântica de Campos	32
2.5.2	Equação de Schrödinger.	34
2.5.3	Tratamento perturbativo para a equação de Schrödinger.	36
2.5.4	Relação entre os termos de T_{fi} e os diagramas de Feynman.	43
2.6	Eletrodinâmica Quântica	45
2.6.1	Equação de Klein-Gordon.	45
2.6.2	Transformações de Calibre.	48
2.6.3	Equação de Klein-Gordon invariante sob transformações de calibre.	51
2.6.4	A seção de choque em termos da amplitude invariante \mathfrak{M} .	58
2.6.5	Variáveis de Mandelstan.	67
2.6.6	Equação de Dirac.	69
2.6.7	Corrente j^μ da equação de Dirac.	73
2.6.8	Soluções da equação de Dirac para partícula livre em repouso.	74
2.6.9	Soluções da equação de Dirac para partícula livre.	79
2.6.10	Antipartículas	81
2.6.11	Normalização dos espinores e relação de completeza.	82
2.6.12	Equação de Dirac com termo de interação.	84

2.7	Regras De Feynman para a Eletrodinâmica Quântica	91
2.7.1	Vetores de Polarização	93
2.8	Cromodinâmica Quântica	94
2.8.1	Hadronização	95
2.8.2	Espalhamentos elétron-próton.	97
2.8.3	pártons e quarks.	102
2.8.4	Liberdade Assintótica.	104
2.9	Regras De Feynman para a Cromodinâmica Quântica	108
3	APLICAÇÕES DAS TEORIAS.	112
3.1	Aniquilação de par elétron pósitron seguida de criação de par múon-anti múon.	112
3.2	Espalhamento elétron múon no referencial do laboratório.	117
3.3	Espalhamento de aniquilação elétron pósitron - quark antiquark e hadronização.	121
3.4	Espalhamento quark antiquark	123
3.5	Espalhamento elétron próton	128
3.6	Modelo párton.	131
4	DISCUSSÕES E ANÁLISES DOS RESULTADOS.	134
4.1	Aniquilação de par elétron pósitron seguida de criação de par múon-anti múon.	134
4.2	Espalhamento elétron múon no referencial do laboratório.	135
4.3	Espalhamento de aniquilação elétron pósitron - quark antiquark e hadronização.	137
4.4	Espalhamento quark antiquark	138
4.5	Espalhamento elétron próton	139
4.6	Modelo párton.	141
5	CONCLUSÃO	144
	REFERÊNCIAS	145
	APÊNDICES	152
	APÊNDICE A – PROVA DA INVARIÂNCIA DA EQUAÇÃO DE KG SOB TRANSFORMAÇÃO DE CALIBRE.	153

APÊNDICE B – MAIS EXEMPLOS SOBRE COMO LER DIAGRAMAS PARA A UTILIZAÇÃO DAS REGRAS DE FEYNMAN.	155
APÊNDICE C – CÁLCULOS REALIZADOS PARA SE CHEGAR NAS EQ. (3.33) E (3.35).	158

1 Introdução

O Modelo Padrão (MP) constitui-se em um conjunto de teorias que versam sobre a estrutura da matéria, tratando-se de um arcabouço teórico que estuda os constituintes fundamentais da mesma e suas interações. Ele é, atualmente, a teoria científica mais bem sucedida no entendimento da estrutura elementar da matéria, com excelente acordo com os resultados experimentais (OERTER, 2006, p. 10; PERKINS, 2000, p. 7; HUSTON; RABBERTZ; ZANDERIGHI, 2020, p. 22).

Para o MP, as partículas elementares são os blocos básicos que constituem a matéria e pode-se interagir com as mesmas apenas na escala subatômica. Ao todo existem dezoito partículas elementares que formam a matéria, sendo estas divididas em: quarks, léptons, partículas mediadores de interação e o Bóson de Higgs. Segundo o MP, as partículas elementares interagem entre si através de quatro forças que existem na natureza, sendo estas: a força gravitacional, a força eletromagnética, a força forte e a força fraca. Cada uma dessas forças, com exceção da força gravitacional, é descrita por uma teoria quântica diferente, sendo a força forte descrita pela Cromodinâmica Quântica (QCD – *Quantum Chromodynamics*), a força eletromagnética descrita pela Eletrodinâmica Quântica (QED – *Quantum Electrodynamics*) e força fraca descrita pela Dinâmica de Sabor Quântica (QFD – *Quantum Flavordynamics*). Atualmente, a força gravitacional não está incorporada no modelo padrão, pois ainda não existe uma teoria quântica de gravidade (SHELLARD, 2012, p. 133), isto é, a força da gravidade não apresenta a mesma estrutura que as outras interações (MOREIRA, 2011, p. 123) e talvez levem-se séculos para se detectar a partícula mediadora da força gravitacional (o gráviton¹) (GRIFFITHS, 2008, p. 18) . A força gravitacional é bem descrita pela Relatividade Geral de Einstein.

Por intermédio das teorias do MP pode-se estudar diferentes tipos de interações (também chamadas de espalhamentos) que ocorrem entre partículas e extrair desses grandezas observáveis (isto é, que são mensuráveis em laboratório) como a seção de choque diferencial ou total.

A obtenção dos observáveis associados a um espalhamento é feita utilizando-se diagramas de Feynman, que são representações das interações a partir das quais pode-se realizar o computo dos observáveis de forma rápida e de fácil memorização. O diagrama para um determinado processo contribui com termos oriundos das soluções das equação de campo, que são equações que descrevem sistemas com partículas com determinado número quântico de spin, e objetos do espaço do spin (matrizes gama) ou do espaço da cor (vetores de cor).

¹ A maioria das teorias formuladas para a gravitação quântica, embora incompletas, propõem o gráviton como partícula mediadora.

Tendo isso em vista, o presente trabalho tem como problemática: Como utilizar o ferramental teórico do MP para cálculos de grandezas (como seção de choque e potencial de interação) para espalhamentos envolvendo partículas? O objetivo do trabalho é, portanto, apresentar e aplicar algumas ferramentas de duas teorias do MP, a QED e a QCD, no estudo de espalhamentos. Tais ferramentas são os diagramas de Feynman e as Regras de Feynman da QED e da QCD, quais têm relação com as soluções perturbativas das equações de campo para cada partícula.

Nesse trabalho os espalhamentos estudados serão simples, de baixa ordem perturbativa, e os resultados obtidos já constam na literatura.

A metodologia utilizada para construção desse trabalho foi de caráter exploratório. Esse tipo de metodologia, frequentemente feita através de levantamentos bibliográficos, tem como objetivo proporcionar uma visão mais geral acerca de um determinado tema, podendo ser a primeira etapa de uma investigação mais ampla (GIL, 2008, p. 27). Desse modo, para o levantamento bibliográfico deste trabalho seguiu-se critérios de: relevância da obra para área, complexidade da obra e significância histórica da obra para a área de Física de partículas.

Inicialmente, na Fundamentação Teórica, aspectos elementares do MP serão apresentados, tais como: quais são as partículas elementares, quais são as propriedades que elas dispõem e como elas interagem. Também serão apresentados algumas ferramentas matemáticas como Tensores, Notação de Einstein e Métodos perturbativos. A partir dessas ferramentas matemáticas serão apresentadas as equações de campo, bem como suas soluções, via métodos perturbativos. Por fim, as soluções serão relacionadas com os diagramas de Feynman e por fim as regras de Feynman serão apresentadas. No capítulo de Aplicação das teorias as ferramentas apresentadas serão empregadas para o compute de seção de choque, e outras grandezas, de alguns espalhamentos. Os resultados obtidos dos cálculos efetuados no capítulo de Aplicação das teorias serão analisados e discutidos no capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

2 Fundamentação Teórica.

2.1 O Modelo Padrão

2.1.1 O que é o Modelo Padrão?

O MP “[...] sumariza tudo que sabemos sobre a estrutura fundamental da matéria e energia. Ele fornece uma imagem detalhada dos blocos de construção básicos a partir dos quais tudo é feito.” (OERTER, 2006, p.10). Esse arcabouço teórico foi desenvolvido através da colaboração de vários cientistas ao longo do século XX, “uma tapeçaria tecida por muitas mãos” nas palavras de Sheldon Glashow (GLASHOW, 1980, p. 539).

O MP tem grande corroboração experimental, visto que passou por várias décadas tendo suas previsões testadas e confirmadas (CHARLEY, 2021), e é, na opinião de muitos Físicos, a melhor teoria da estrutura da matéria dos tempos atuais (MOREIRA, 2011, p. 97), talvez o pináculo do intelecto humano (OERTER, 2006, p. 11). Kane (2003, p. 70) corrobora, afirmando que o MP é

A mais sofisticada teoria matemática sobre a natureza. Apesar da palavra “modelo” em seu nome, o Modelo Padrão é uma teoria abrangente que especifica o que são as partículas básicas e como elas interagem. Tudo que acontece no nosso mundo (exceto pelos efeitos da gravidade) resulta do Modelo Padrão.

O MP prevê a existência de 18 partículas elementares. Esse número de partículas elementares do MP quase dobra¹ considerando-se as antipartículas, visto que para toda partícula elementar ordinária existe uma antipartícula associada, e.g.²: para um elétron existe o antielétron (também chamado de pósitron). Elas são partículas idênticas às partículas elementares ordinárias, mas com duas diferenças: i. toda partícula de antimatéria tem a carga oposta a sua partícula; ii. quando uma antipartícula entra em contato com sua partícula correspondente elas podem se aniquilar transmutando-se em fótons com energia igual ou superior a energia associada a massa de cada partícula.

2.1.2 Quarks e Léptons

Uma classe de partículas elementares são os quarks³, partículas pontuais de carga elétrica fracionária e número quântico de spin 1/2 (em unidades da constante de Dirac $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-16} eV \cdot s$).

¹ Não dobra exatamente, pois partículas como fóton, glúon, Z^0 e H são suas próprias antipartículas.

² e.g. é a abreviação de “exempli gratia”, expressão latina que significa “por exemplo”.

³ O nome quark foi escolhido pelo físico que propôs o modelo dos quarks, Murray Gell Mann. Ele retirou o nome “quark” de um poema de James Joyce, tal palavra, oriunda do dialeto inglês “quawk”, significa grasnar ou coaxar (AHDICIONARY, 2022).

Número quântico de spin s , ou simplesmente spin, é uma grandeza quantizada proporcional ao autovalor do operador de momentum angular de spin \hat{S}^2 . Quando fala-se em partícula com spin para cima, ou spin para baixo, refere-se ao número quântico magnético de spin m_s que é proporcional à componente z do momento angular de spin S_z . Para $m_s = 1/2$ fala-se que a partícula tem spin para cima, para $m_s = -1/2$ fala-se que a partícula tem spin para baixo.

Estados ligados de quarks formam partículas compostas chamadas de hádrons⁴, que são categorizados em mésons⁵, quando são formados por pares quark-antiquark (a antipartícula de um quark é um antiquark), e bárions⁶, quando são formados por três quarks, ou três antiquarks. Um exemplo de bárion é o próton, partícula muito conhecida por compor os núcleos atômicos. Ao todo existem seis quarks de diferentes sabores (chamam-se os tipos de quarks de sabores): u (quark up), c (quark charm), e t (quark top), de carga $+2/3$, e d (quark down), s (quark strange) e b (quark bottom) de carga $-1/3$. Os pares de quarks u - d , c - s e b - t formam gerações de quarks, sendo que cada geração difere pela massa dos quarks que a compõem. Os quarks das segundas e terceira geração (c - s e b - t , respectivamente) são mais massivos e instáveis, e os quarks da primeira (u - d) são menos massivos e estáveis, podendo ser encontrados em regimes de baixa energia. O próton, ao qual pode-se referir como p , é formado por um estado ligado de três quarks: dois quarks u e um quark d .

$$p = u + u + d \quad (2.1)$$

A soma das cargas elétricas desses quarks resulta na carga elétrica resultante do p , que é $+1$ (carga elétrica $+1$ significa que o próton possui uma unidade de carga elétrica elementar que é $1,602176634 \cdot 10^{-19}$ C), sendo que nesse caso o quark u tem carga elétrica de $2/3$ e o quark d tem carga elétrica de $-1/3$. Outro bárion que pode ser obtido por intermédio de combinações de quarks é o nêutron n :

$$n = d + d + u \quad (2.2)$$

Pelo nêutron ser um bárion neutro, a soma da carga dos quarks que o compõem é igual a zero. Além de carga e massa quarks também possuem a cor, sendo esta uma propriedade dos quarks responsável pela dinâmica de interação através da força forte entre

⁴ Do grego *hadros* que significa grande, largo, forte (ETYMONLINE, 2021a), por conta dessas partículas interagirem via força forte. Tal nome foi sugerido pela primeira vez em um trabalho publicado na Conferência Internacional de Física de Altas Energias de 1962 pelo físico russo Lev Okun (OKUN, 1962, p. 845).

⁵ Do grego *mesos* que significa médio (ETYMONLINE, 2021c), devido a massa intermediária dessas partículas. O nome inicialmente dado foi mesotron, por Anderson e Neddermeyer, que estudaram a partícula experimentalmente, posteriormente em 1939 o físico indiano Homi J. Bhabha sugeriu o nome abreviado meson (GARISTO, 2017; GRIFFITHS, 2008, p. 19).

⁶ Do grego *barys* que significa pesado (GARISTO, 2017), por conta dessas partículas serem mais pesadas que os mésons. O nome foi utilizado pela primeira vez em 1953 pelo físico neerlandês Abraham Pais, na conferência de Kyoto (Japão) (PAIS, 1953, p. 457).

eles – trata-se de uma propriedade como a carga elétrica –, e existem 3 cores: vermelho (*red* – *r*), azul (*blue* – *b*) e verde (*green* – *g*); e três anticores: antivermelho (*antired* – \bar{r}), antiazul (*antiblue* – \bar{b}) e antiverde (*antigreen* – \bar{g}).

Outra categoria de partícula elementar prevista pelo MP é a dos léptons⁷. Os léptons são partículas elementares, assim como os quarks. Dentre elas há os elétrons (e^-), os múons (μ^-) e os taus (τ^-).

Todos os léptons possuem número quântico de spin 1/2, diferem pela massa e não interagem via força forte. Há léptons carregados, com carga -1 e outros léptons com carga nula, que são os neutrinos ν . Existem três neutrinos cada um associado a um dos léptons supracitados: o ν_e (neutrino do elétron), o ν_μ (neutrino do múon) e o ν_τ (neutrino do tau). Os neutrinos são partículas de massa pequena, próxima de zero e interagem via interação fraca – por isso são de difícil detecção.

Léptons como o elétron fazem parte da estrutura atômica, sendo encontrados ao redor do núcleo atômico, na eletrosfera. Além disso, o e^- é considerada a primeira partícula elementar descoberta. Sua descoberta surge a partir dos trabalhos de Thomson (1897), nos quais ele estuda a natureza dos raios catódicos. Nesse trabalho de 1897, Thomson sequer menciona o nome elétron, no entanto é a partir deste que Thomson inicia um programa de pesquisa para caracterizar o elétron, culminando em seu modelo atômico (do pudim de passas) apresentado em Thomson (1904).

É importante ressaltar a noção de partícula elétrica elementar presente nos átomos não era uma ideia de Thomson, já estando presente nas hipóteses de cientistas desde 1820 (BASSALO, 2012, p. 74). Dentre estes, pode-se citar alguns como o filósofo natural Richard Laming, que publica entre 1838 e 1845 trabalhos nos quais apresenta a ideia de um átomo elétrico como sendo um dos constituintes fundamentais da matéria (FARRAR, 1969, p. 249 e 250). Já o físico Wilhelm Weber propôs em 1862 e 1871 que haviam partículas imponderáveis e eletrizadas em torno do átomo, atraídas para seu centro por uma força elétrica (BASSALO, 2012, p. 74). Por fim, George Stoney, físico irlandês, chegou à noção de carga elementar em 1874 (chamada por ele de quantidade unitária de eletricidade) e expôs tal ideia em seu trabalho intitulado “*On the physical units of nature*” em 1881 (STONE, 1881, p. 383; WAYMAN, 1998, p. 159). Foi também Stoney quem sugeriu o nome elétron em uma carta dirigida à revista *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* em 1894 (STONE, 1894, p. 419). Em seus trabalhos, como Thomson (1897), Thomson (1899) e Thomson (1904), Thomson não se refere às partículas como “elétrons”, ao invés disso usa o termo corpúsculos.

Os outros léptons seriam teorizados (neutrinos) e descobertos, ou descobertos e

⁷ Do grego *leptos*, que significa pequeno e leve (ETYMONLINE, 2021b). O nome foi cunhado por Christian Møller (físico dinamarquês) e Abraham Pais em 1946 (GARISTO, 2017; FRASER, 2000, p. 46).

depois encaixados no MP (como é o caso do μ^- e lépton τ^-) a partir da década de 30. O neutrino, por exemplo, foi uma hipótese proposta inicialmente por Wolfgang Pauli, posteriormente aprimorada por Enrico Fermi, em 1934, para explicar o perfil experimental de energia dos elétrons emitidos no decaimento beta (WILSON, 1968, p. 1151).

$$n \rightarrow e^- + \nu \quad (2.3)$$

Este só seria detectado experimentalmente em 1955 por Reines e Cowan (ANICIN, 2005, p. 8).

Já o múon foi inicialmente detectado por Anderson e Nethermeyer, em 1936, e posteriormente melhor compreendido por experimentos posteriores feitos por Lattes e colaboradores em 1947 (GRIFFITHS, 2008, p. 19). Inicialmente acreditava-se que o múon era um méson previsto por Yukawa, e foi-se entender que tratava-se de um lépton posteriormente. Por fim, o tau foi descoberto experimentalmente em 1975 (GRIFFITHS, 2008, p. 47).

Embora sejam pouco conhecidos pelo público em geral, léptons como múons e neutrinos têm servido à algumas aplicações tecnológicas na área de segurança.

Devido a sua abundância proveniente dos raios cósmicos, os múons, por exemplo, têm sido utilizados em mapeamentos de segurança de veículos e contêineres, para detecção de objetos muito densos, feitos de urânio e plutônio. Por intermédio de detectores de múons acima e abaixo do veículos, que detectam como os múons são espalhados, é possível reconstruir computacionalmente os objetos que causaram o espalhamento (MINKEL, 2005, p. 36). O estudo do espalhamento dessas partículas também pode ser empregado para o mapeamento de locais de importância arqueológica, como foi feito na pirâmide de Gizé, a fim de se detectar câmaras secretas (MARCHANG, 2017).

Já os neutrinos, devido a sua produção em decaimentos nucleares, podem ter uma aplicação tecnológica no monitoramento de produção de plutônio para fins bélicos em usinas nucleares, ao se observar a taxa de neutrinos, espectro de energia de neutrinos e evolução temporal do espectro e taxa de neutrinos (BERNSTEIN et al., 2020, p. 011003-10). No entanto, devido a sua difícil detecção e a dificuldade de eliminar ruídos de radiação do ambiente ainda são um desafio para essa tecnologia (BERNSTEIN et al., 2020, p.011003-1 e 011003-12).

O lépton τ^- , por sua vez, já é um lépton que não possui aplicações conhecidas, visto que é o mais difícil de produzir por ser o mais massivo (ver figura (1)), só ocorrendo em aceleradores de partículas e reações de extrema energia na natureza.

É importante mencionar que embora as classificações bárion, méson e lépton tenham sido historicamente formuladas com base na massa das partículas, atualmente essa classificação não é mais válida, pois, por exemplo, o lépton τ^- tem uma massa maior que o próton. Atualmente, o que distingue essas classes de partículas é o fato de que os

léptons não interagem via força forte, enquanto os bárions e mésons (que formam o grupo dos hádron) o fazem.

2.1.3 Partículas Mediadoras.

As outras partículas do MP são as mediadoras de interação. Cada uma das forças mencionadas (forte, fraca e eletromagnética) ocorre por intermédio da troca de partículas mediadoras. No MP, a interação entre partículas se dá através de campos, como o elétrico ou gravitacional, mas estes são quantizados e não contínuos – isso implica que a energia é carregada por estes campos em pacotes discretos, ou quanta. Assim, as interações entre partículas se dão pela troca de um quantum de campo e esse quantum é uma partícula mediadora. A noção de interação por intermédio de campos quantizados tem internalizada em si a teoria da relatividade, haja vista que essas interações ocorrem em uma velocidade finita respeitando o limite da relatividade (as interações não são instantâneas, se dão em velocidades que não ultrapassam a velocidade da luz).

As partículas mediadoras são: o fóton γ , para o caso das interações eletromagnéticas; o glúon g para o caso da força forte; e as partículas W^+ , W^- e Z^0 , para a interação fraca. O fóton é uma partícula com massa e carga nula, devido a sua massa nula o alcance da interação que ele media é infinita (SHELLARD, 2012, p. 125). O glúon, assim como o fóton, também tem carga elétrica e massa nula. Por conta da massa nula do glúon, poder-se-ia inferir que o alcance da força forte é infinito, no entanto, devido a efeitos quânticos, as interações fortes são confinadas ao interior dos hádrons, restringindo seu alcance. As partículas da força fraca, diferindo dos fótons e glúons são massivas e portanto o alcance dessa força é pequeno (GRIFFITHS, 2008, p. 48). Por fim, destaca-se que enquanto os fótons não interagem diretamente entre si, os glúons e os bóson da força fraca o fazem.

Por fim, a última das partículas elementares é o bóson de Higgs. Essa partícula é um quantum do campo de Higgs⁸, um campo que permeia todo o universo e é responsável por dar massa às partículas. Qualquer partícula que interage com o campo de Higgs tem massa e tão mais massiva a partícula será quanto mais ela interagir com o campo de Higgs.

Alguns podem cair no erro conceitual de acreditar que a massa de todos os corpos decorre do campo de Higgs, mas isso não é verdade. A massa de repouso de quarks e léptons, decorre deles interagirem com o mecanismo de Higgs, de fato. Mas a massa total de um bárion, como um p , é muito maior que a massa de repouso dos quarks constituintes. Boa parte da massa do p decorre da energia de ligação entre os quarks que o constituem. Portanto

$$M_p > 2m_u + m_d \quad (2.4)$$

⁸ Essa forma de encarar o bóson de Higgs – como um quantum do campo de Higgs – se estende a todas as outras partículas elementares. Nessa visão cada partícula elementar seria um quantum em seu respectivo campo. Essa forma de encarar as partículas é retomada, sem muito detalhamento, na subseção (2.5.3).

Onde M_p é a massa do p e m_u e m_d são as massas dos quarks u e d. Como, na relatividade massa se equivale a energia, então a energia no interior de um bárion como o p constitui sua massa muito mais que a massa de repouso dos seus quarks, gerada pelo mecanismo de Higgs.

Por fim, essas dezoito partículas do MP podem ser sistematizadas por intermédio de uma tabela como a da figura (1). Nessa se encontram as massas, carga e número quântico de spin de cada uma das partículas supracitadas. É importante destacar que nessa tabela as massas das partículas estão em unidades de eV/c^2 , que é uma unidade de massa conveniente. Um eV/c^2 equivale uma massa de $1,7 \times 10^{-36}$ kg. Por fim, essas são as partículas que compõem o MP.

Figura 1 – Partículas elementares do MP

O Modelo Padrão: a nova tabela periódica

		férmions			bósons	
		I	II	III		
quarks	massa	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
	carga	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
	spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
		u up	c charm	t top	g glúon	H Higgs
		$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
		d down	s strange	b bottom	γ fóton	
léptons		$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$	
		-1	-1	-1	0	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
		e elétron	μ múon	τ tau	Z bóson Z	
	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 80.39 \text{ GeV}/c^2$		
	0	0	0	± 1		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		
	ν_e neutrino do elétron	ν_μ neutrino do múon	ν_τ neutrino do tau	W bóson W		

Fonte: REIS (2021, p. 230).

2.2 Diagramas de Feynman

Para os estudos das interações entre partículas parte-se dos diagramas de Feynman, que são diagramas de Minkowski⁹ a partir dos quais podem se calcular, de forma rápida, grandezas de interesse para uma dada interação.

Segundo Aguilar (2018, p. e4205-1), os diagramas representam a forma como as partículas interagem segundo um modelo ou teoria do MP (como a QED por exemplo), e sua vantagem reside na forma simples como estes transmitem os conceitos físicos sem a necessidade de vários cálculos complexos que são subjacentes aos diagramas. Os diagramas são ferramentas desenvolvidas por Richard Feynman em sua formulação para QED e são empregadas amplamente em todos os ramos teóricos do MP: QED, QCD e QFD.

As grandezas de interesse para uma dada interação, que podem ser obtidas dos diagramas, são usadas para o cálculo de observáveis físicos (como a seção de choque). A extração de tais grandezas a partir de um diagrama é feita utilizando-se das regras de Feynman – um conjunto de técnicas mnemônicas¹⁰, ou seja, técnicas de fácil memorização. As regras de Feynman serão apresentadas em uma seção específica para as mesmas e mais detalhes sobre como empregar as mesmas serão expressos no capítulo de Aplicação das teorias.

Segundo Aguilar (2018, p. e4205-3), os diagramas trazem em si os seguintes estágios de uma interação entre partículas:

$$\text{partículas iniciais} \rightarrow \text{interação} \rightarrow \text{partículas finais} \quad (2.5)$$

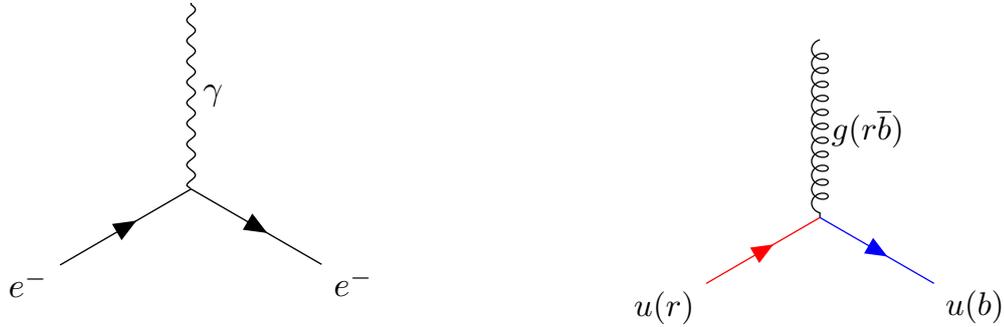
A construção de um diagrama é feita a partir de junções dos vértices, como os da figura (2) e tais junções devem obedecer um conjunto de regras de acordo com cada teoria do MP. Na figura (2a) há um vértice da QED, ele é composto por um e^- que entra (elétrons ou outras partículas de spin 1/2 são representados por linhas contínuas com seta), emite um γ (fótons são representados por linhas onduladas), e sai. Segundo as regras da QED, um vértice de uma interação eletromagnética deve sempre ser composto por duas linhas de partículas carregadas e um γ . Quaisquer vértices que não cumpram essa exigência não são permitidos na QED, e.g. vértices formados por três γ . Na figura (2b) há um vértice de QCD, onde um quark de sabor u e cor r entra, emite um glúon de cores $r\bar{b}$ e e sai com a cor b . Nos vértices da QCD os glúons mudam as cores dos quarks e para que essa quantidade se conserve o glúon deve portar uma cor e uma anticor, ambas correspondentes a cor dos quarks do vértice. Na QCD os vértices podem ser feitos com duas linhas de quarks e um glúon, analogamente ao vértice da QED. Contudo, diferente

⁹ Nesse trabalho utiliza-se o eixo da coordenada temporal apontando para direita e o eixo da coordenada espacial apontando para cima.

¹⁰ Mnemônico vem do grego *mnēmonikos* que significa “de ou pertencente à memória” (ETYMONLINE, 2021d).

da QED, a QCD também permite a existência de vértices formados por três ou quatro glúons .

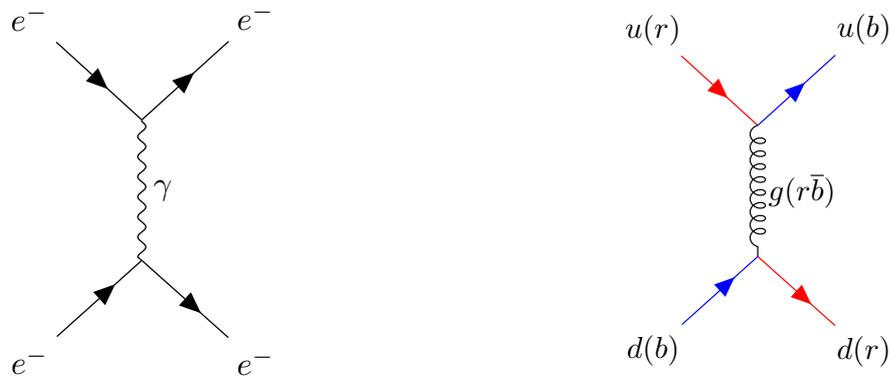
Figura 2 – Vértices da interação Eletromagnética e da interação Forte.



(a) Vértice da interação Eletromagnética. Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017). (b) Vértice da interação Forte. Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

Com a junção de vértices pode-se formar diagramas tais como os diagramas da figura (3).

Figura 3 – Diagramas de Feynman para a interação Eletromagnética e da interação Forte.



(a) Diagrama de Feynman para a interação entre dois elétrons. Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017). (b) Diagrama de Feynman para a interação entre dois quarks. Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017)

O diagrama da esquerda representa o processo

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \tag{2.6}$$

Que é um processo simples da QED. Nele é possível ver que dois e^- entram pela esquerda, interagem via troca de um γ , e saem pela direita. Esse transmite energia e momentum entre os e^- , o fóton a entidade responsável pela força eletromagnética de repulsão entre os e^- .

O diagrama da direita representa o processo

$$u + d \rightarrow u + d \quad (2.7)$$

Trata-se de um processo simples da QCD da interação de dois quarks via troca de um glúon. Os quarks u e d entram pela esquerda, trocam o glúon, e saem pela direita. Esse glúon comunica a interação de atração que mantém esses quarks unidos pela força forte, para a formação de Hádrons. O glúon troca as cores dos quarks: ao ser emitido ele leva a cor do quark u de r para b e ao ser absorvido pelo quark d ela muda sua cor de b para r .

Em ambos os diagramas o tempo corre da esquerda para a direita e as partículas são representadas como setas indo no sentido positivo do tempo. Setas indo no sentido negativo do tempo representam antipartículas nos diagramas de Feynman, o tratamento às antipartículas será melhor estudado na subseção (2.6.10) da seção sobre Eletrodinâmica Quântica (2.6).

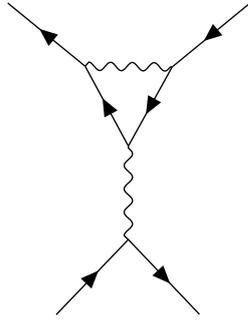
Por fim, é importante esclarecer que um diagrama de Feynman é uma representação para fins físico-matemáticos que, embora represente um processo Físico, não necessariamente dita como o processo ocorre, pois para um mesmo processo, como o (2.6), existem inúmeros diagramas possíveis. Além disso, as linhas dos diagramas não devem ser confundidas com as trajetórias reais das partículas, e em particular o ângulo específico em que as linhas são desenhadas não tem significado. Como para um dado processo pode haver mais de um diagrama, cada diagrama vai contribuir para o computo da amplitude invariante do mesmo.

Conforme será exposto na subseção (2.5.4), existem diagramas de Feynman de ordem mais elevada que dizem respeito a expansões perturbativas de amplitude invariante de ordem mais alta. Um diagrama de ordem mais alta é um diagrama que possui mais elementos, como os expostos na figura (4)

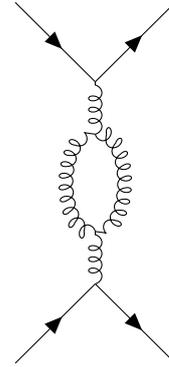
Quanto mais precisos os resultados, mas diagramas associados a uma interação devem ser considerados e maior a ordem dos mesmos. A título de exemplo, para o cômputo do momentum magnético anômalo do elétron $(g - 2)/2$ considerou-se expansões perturbativas de ordem dez, oriundas da contribuição de doze mil seiscentos e noventa e dois diagramas de Feynman (AOYAMA et al., 2012, p. 111807-1).

Destaca-se que cálculo do momentum magnético anômalo do elétron é uma grandeza de grande importância para a corroboração da QED e do MP, haja vista que existe uma concordância muito boa entre o valor de $(g - 2)/2$ previsto teoricamente e o testado experimentalmente. O resultado teórico obtido por Aoyama et al. (2012, p. 111807-2) é de $(g - 2)/2 = 0,00115965218178$, já o valor experimental de $(g - 2)/2$ mais preciso que se tem acesso é o apresentado no trabalho de Hanneke, Fogwell e Gabrielse (2008, p. 120801-3), dado por $(g - 2)/2 = 0,00115965218073$. Comparando-se os dois valores, verifica-se que há um concordância de até onze casas decimais.

Figura 4 – Dois exemplos de diagramas de Feynman de ordem maior.



(a) Diagrama de Feynman para uma interação eletromagnética com duas trocas de fótons. Fonte: Adaptado de (TEX.STACKEXCHANGE, 2020)



(b) Diagrama de Feynman da interação entre quarks com a inclusão de um loop de glúon. Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017)

2.3 Tensores e Notação de Einstein.

Nessa seção será introduzido os conceitos de tensor e será apresentada a notação de Einstein na notação quadrvetorial.

2.3.1 Tensores.

Essa subseção sobre tensores foi construída a partir das seções 5.1 e 5.2 do capítulo 5 de Neto (2010).

Entidades matemáticas úteis à física (vetores, funções, matrizes, etc.) podem ser determinadas de forma rigorosa e conveniente através da forma como estas se transformam. Tomando-se os vetores como exemplo, poder-se-ia dizer que vetor é todo objeto que possui módulo, direção e sentido. No entanto, essa definição não é rigorosa, afinal existem objetos matemáticos dotados dessas três propriedades que não são vetores. Assim, a forma mais adequada de se caracterizar um vetor é definindo-o a partir da forma como ele se transforma sob uma transformação de mudança de base. Primeiramente, define-se um vetor genérico \vec{V} da seguinte forma

$$\vec{V} = V_i \hat{e}_i, \quad (2.8)$$

onde V_i são as componentes do vetor e \hat{e}_i são os versores da base na qual \vec{V} está escrito. Nesse trabalho adota-se a convenção de Einstein para somas, a qual estabelece que índices repetidos são somados, omitindo-se o símbolo de soma Σ . Desse modo, na eq. (2.8) há uma soma implícita em i . É possível mostrar que a forma como \vec{V} muda sob uma transformação de base sem linha para uma base com linha ($\vec{V} \rightarrow \vec{V}'$) é

$$\vec{V}' = a_{ij} V_j \hat{e}'_i. \quad (2.9)$$

Onde \hat{e}_i' é o versor da base linha e a_{ij} é o objeto responsável pela transformação de \vec{V} , dado por

$$a_{ij} = \hat{e}_j \hat{e}_i' . \quad (2.10)$$

Novamente há somas implícitas em i e j , nas eq. (2.9) e (2.10). Pode se escrever (2.9) apenas em termos das componentes transformadas

$$V_i' = a_{ij} V_j . \quad (2.11)$$

Ou na forma vetorial, com a presença do versor da base linha

$$\vec{V}' = V_i' \hat{e}_i' . \quad (2.12)$$

Assim, define-se um vetor como qualquer objeto cujas componentes se transformam sob a transformação (2.11). Essa definição é mais rigorosa e será útil para definir-se outros objetos.

É sabido que vetores são objetos cujo módulo é invariante sob transformações de mudança de base¹¹. Lançando-se mão dessa propriedade, tem-se que

$$V_i' V_i' = V_j V_j . \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.13), tem-se

$$a_{ij} a_{ik} V_j V_k = V_j V_j . \quad (2.14)$$

Na eq. (2.14) um índice foi modificado afim de se preservar corretamente as somas. Para que (2.14) seja igual à (2.13)

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{ij} . \quad (2.15)$$

O objeto δ_{ij} é chamado de delta de Kronecker e é dotada da seguinte propriedade

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k, \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases} \quad (2.16)$$

A qual se aplica a somas, e.g.

$$V_i \delta_{ij} = \sum_{i=0}^N V_i \delta_{ij} = V_0 \delta_{0j} + V_1 \delta_{1j} + \dots + V_j \delta_{jj} + \dots + V_N \delta_{Nj} \quad (2.17)$$

Pela (2.16)

¹¹ Uma forma heurística de se conceber a propriedade de invariância do módulo do vetor é imaginar o vetor como uma flecha cujo comprimento não é afetado caso a flecha seja transladada no espaço ou seja submetida a rotações, que é o efeito de transformação de mudança de base.

$$V_i \delta_{ij} = \sum_{i=0}^N V_i \delta_{ij} = 0 + 0 + \dots + V_j 1 + \dots + 0 = V_j . \quad (2.18)$$

A delta de Kronecker será amplamente utilizada nesse trabalho e estabelece a condição de ortonormalidade entre diferentes bases.

Tendo em vista a definição estabelecida para o vetor, dada por (2.11) e (2.12), define-se o tensor como sendo uma generalização do vetor. Tensor é um objeto matemático que engloba em si não apenas o vetor, mas também os escalares e objetos mais gerais. Um tensor de ordem zero T_0 (escalar) é caracterizado pela transformação de mudança de base (entre bases linha e não linha)

$$T'_0 = T_0 . \quad (2.19)$$

Vê-se que o escalar é invariante sob mudanças de base. Um tensor de ordem um é um vetor, que é caracterizado pela transformação de mudança de base (2.11). Um tensor de ordem dois é caracterizado pela mudança de base

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} . \quad (2.20)$$

Um tensor de ordem três é caracterizado pela mudança de base

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} . \quad (2.21)$$

Um exemplo de tensor de ordem dois é a delta de Kronecker, definida em (2.15). Tal objeto se transforma como segue

$$\delta'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} . \quad (2.22)$$

Como há uma soma implícita em l do lado direito de (2.22)

$$\delta'_{ij} = a_{ik} \sum_l a_{jl} \delta_{kl} , \quad (2.23)$$

$$\delta'_{ij} = a_{ik} a_{jk} . \quad (2.24)$$

Pela definição da delta (2.15)

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij} . \quad (2.25)$$

Fica evidente, a partir da transformação da delta, que esse tensor de ordem dois é invariante sob transformações de mudanças de base.

Ao passo que o índice i em V_i representa as componentes de \vec{V} que podem ser representadas em um vetor linha ou coluna, os índice i e j em δ_{ij} representam as componentes da delta em uma representação matricial, onde o i identifica a i-ésima linha da matriz

e j a j -ésima coluna da matriz. Apenas tensores de ordem dois podem ser representados por matrizes, mas em geral, qualquer tensor de ordem n pode ser representado por um vetor coluna, no entanto é incomum utilizar-se dessas representações, sendo muito mais conveniente escreve-los com os índices.

2.3.2 Notação de Einstein.

Tendo definido os tensores, agora a notação de Einstein será abordada. A notação de Einstein é uma notação utilizada para se escrever tensores usando índices mudos (μ , ν , ρ , etc.). Esses índices se relacionam uns com os outros, possibilitando somas entre componentes de tensores, de modo que tais somas sejam invariantes sob transformações de Lorentz.

2.3.2.1 Noções preliminares.

Primeiramente, define-se o espaço tempo de Minkowski que é, simplificada, uma estrutura matemática sobre qual pode-se construir a teoria da relatividade restrita utilizando-se de quadrivetores e notação de Einstein. Doravante, assumir-se-a a estrutura matemática do espaço tempo de Minkowski, bem como a notação de Einstein.

No estrutura matemática do espaço tempo de Minkowski o produto interno entre dois tensores de ordem um, i.e.¹² vetores, não é sempre um número positivo, como assumia-se no espaço euclidiano. No espaço de Minkowski assume-se objetos chamados de quadrivetores. Um quadrivetor A^μ é um tensor de ordem um (um vetor) cujas quatro componentes são dadas por

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3). \quad (2.26)$$

Em (2.26) a presença do índice mudo μ , da notação de Einstein, indica as componentes do quadrivetor. A componente A^0 é chamada de componente temporal e as componentes A^1 , A^2 e A^3 são chamadas de componentes espaciais.

O quadrivetor A^μ está expresso na representação contravariante, que é denotada pelo índice mudo μ sobrescrito. É possível modificar A^μ tornando-o um quadrivetor expresso na representação covariante A_μ com o índice mudo μ para baixo (os motivos pelos quais os quadrivetores levam os nomes de covariante ou contravariante serão explicitados mais adiante nessa subseção). Tal transformação se dá por intermédio do produto de A^μ com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que subscreve o índice de A^μ

$$A_\mu = A^\nu g_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Na eq. (2.27), A^μ foi escrito do lado direito como A^ν , mas isso não muda nada no quadrivetor, foi apenas uma mudança de índice. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é um tensor de

¹² i.e. é uma abreviação de “id est”, uma expressão latina que significa “isto é”.

ordem dois que pode ser representado por uma matriz 4x4 cuja diagonal vale (+1,-1,-1,-1) e todos os outros termos valem zero. O produto matricial do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pelo quadrivetor A^ν retorna

$$A_\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3). \quad (2.28)$$

Para voltar ao quadrivetor original, basta fazer a modificação de índice $A_\mu \rightarrow A^\nu$ e multiplicar pelo tensor métrico com os índices sobrescritos $g^{\mu\nu}$

$$A^\mu = A_\nu g^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Em coordenadas cartesianas e espaço euclidiano, as componentes do tensor métrico com índices subscrito s são iguais as do tensor métrico com índices sobrescritos.

O tensor métrico também pode transformar tensores de qualquer ordem maior ou igual a um, sobrescrevendo e subscrivendo índices, dos mesmos. Para um tensor de ordem 2 $s^{\mu\lambda}$

$$s_\rho^\lambda = g_{\mu\rho} s^{\mu\lambda}. \quad (2.30)$$

Para transformar o índice λ basta multiplicar o lado direito por outro tensor métrico

$$s_{\rho\omega} = g_{\lambda\omega} g_{\mu\rho} s^{\mu\lambda}. \quad (2.31)$$

Para um tensor de ordem 3 $s^{\alpha\mu\lambda}$

$$s_{\beta\rho\omega} = g_{\alpha\beta} g_{\lambda\omega} g_{\mu\rho} s^{\alpha\mu\lambda}. \quad (2.32)$$

E assim por diante.

Nos exemplos acima mostrou-se como faz-se para subscriver índices de tensores genéricos s . Para sobrescrever os índices dos mesmos, basta multiplica-los pelos tensores métricos com índices sobrescritos correspondentes.

2.3.2.2 Produto interno na notação de Einstein.

O produto interno na notação de Einstein é definido como

$$A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^N A^\mu B_\mu. \quad (2.33)$$

Para quadrivetores $N = 3$, assim

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu. \quad (2.34)$$

Na notação de Einstein índices repetidos se somam se um estiver subscrito e outro sobrescrito. Qualquer expressão com dois índices repetidos sempre devem obrigatoriamente estarem somados. Logo, a expressão

$$A^\mu B^\mu, \quad (2.35)$$

está errada e deve ser escrita como

$$A^\mu B_\mu, \quad (2.36)$$

tendo como resultado uma soma como (2.34). Caso os dois índices fiquem sobrescritos, a expressão deve ser escrita como

$$A^\mu B^\nu, \quad (2.37)$$

tendo como resultado um tensor de ordem dois, com dezesseis possibilidades, uma para cada combinação de índices μ e ν . Qualquer expressão com três índices repetidos está incorreta.

Correndo-se a soma do lado direito de (2.34) em (2.34)

$$A^\mu B_\mu = (A^0 B_0) + (A^1 B_1) + (A^2 B_2) + (A^3 B_3). \quad (2.38)$$

Escrevendo-se os termos do quadrivetor B_μ com os índices para cima como em (2.29), tem-se

$$A^\mu B_\mu = (A^0 B^0) - (A^1 B^1) - (A^2 B^2) - (A^3 B^3). \quad (2.39)$$

É conveniente escrever os termos de 1 a 3 dos quadrivetores com notação de vetor, e.g. $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A})$. Reescrevendo (2.39) dessa forma

$$A^\mu B_\mu = (A^0 B^0) - \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (2.40)$$

Assim, conforme supracitado no começo da subseção, o produto interno na notação de Einstein não é positivo definido, podendo ser negativo caso o produto das partes espaciais dos quadrivetores seja maior que o produto das partes temporais.

É importante deixar claro que embora A^μ esteja escrita como (A^0, \vec{A}) , o \vec{A} se trata apenas das componentes 1,2 e 3 do quadrivetor A^μ . Ademais, para fins e uniformização notacional vale a pena esclarecer: quando escreve-se o quadrivetor na forma A^μ entende-se que A^μ são as componentes do quadrivetor quando ele já está expandindo em uma base; já quando escreve-se apenas A entende-se que é o quadrivetor escrito independente de bases, apenas como um objeto abstrato que pode ser, eventualmente, escrito em uma base \hat{e}_μ

Uma forma de se escrever o produto interno (2.33) é

$$A \cdot B, \quad (2.41)$$

quando o produto interno é entre vetores espaciais \vec{A} e \vec{B} escreve-se

$$\vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (2.42)$$

Uma propriedade importante do produto interno na notação de Einstein (2.16), no espaço tempo de Minkowski, é que quando ele é realizado entre quadrivetores quaisquer, o resultado é um invariante sob transformações de Lorentz, que pode ser chamado de escalar (vide

eq. (2.19)). Essa propriedade se aplica à quadrivetores importantes para a física, como posição-tempo x^μ e quadrimomentum P^μ (GRIFFITHS, 2008, p. 93; HALZEN; MARTIN, 1984, p. 73). Em unidades naturais, x^μ é dado por

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}), \quad (2.43)$$

com $x^0 = t$. Já o quadrimomentum P^μ é dado por

$$P^\mu = (E, \vec{p}), \quad (2.44)$$

onde E é a energia e \vec{p} o momentum de um corpo.

Assim, o fato de um produto entre quadrivetores quaisquer é invariante faz com que $x \cdot x$, $x \cdot P$ e $P \cdot P$ sejam escalares. No contexto da relatividade restrita, construída no espaço de Minkowski, $\Delta x \cdot \Delta x$ é o intervalo invariante ao quadrado (Δs^2) entre dois eventos e $P \cdot P = m^2 c^4$ é a massa, ou massa invariante, de uma partícula.

O quadrado do intervalo invariante $\Delta s^2 = \Delta x \cdot \Delta x$, com $\Delta x = x_1 - x_2$, é usado para caracterizar eventos, de modo que o módulo ao quadrado da diferença entre as coordenadas de um eventos x_1 e um outro evento x_2 no espaço e no tempo pode ser de três tipos:

$$\Delta x \cdot \Delta x = \begin{cases} > 0, & \text{intervalo do tipo temporal: os eventos podem ter relação causal;} \\ < 0, & \text{intervalo do tipo espacial: os eventos não podem ter relação causal;} \\ = 0, & \text{intervalo do tipo luminoso: os eventos podem ser conectados por um pulso luminoso ;} \end{cases} \quad (2.45)$$

Já a relação $P \cdot P = m^2$ expressa que a massa de uma partícula é invariante frente a mudanças de referencial. Esse resultado é de grande importância para esse trabalho e será demonstrada na seção (3.2).

No contexto da notação de Einstein, a transformação de Lorentz Λ_μ^ν existe como um tensor de ordem dois que desempenha o mesmo papel que o tensor a_{ij} da subseção (2.3.1), isto é, é o tensor responsável por transformar os quadrivetores escritos em uma base \hat{e}_μ para outra \hat{e}'_μ .

No caso das transformações de Lorentz, elas preservam o produto interno (2.33), visto que estes são invariantes sob tais transformações. Esse fato é facilmente demonstrável, ao assumir-se que um tensor de transformação de Lorentz Λ_μ^ν faz um quadrivetor A^μ ir de A^μ para A'^ν (a mudança de índice não é relevante.). Assim, uma transformação de Lorentz Λ_μ^ν age da seguinte forma

$$A'^\nu = \Lambda_\mu^\nu A^\mu \quad (2.46)$$

Conforme supramencionado, a transformação de Lorentz preserva o produto interno definido com a notação de Einstein (2.33). Essa propriedade implica, conforme será demonstrado a seguir, em uma propriedade análoga à (2.25).

Assumindo que a transformação de Lorentz preserva o produto interno, tem-se que

$$A' \cdot B' = A \cdot B . \quad (2.47)$$

Escrevendo-se

$$A' \cdot B' = A'_\nu B'^\nu . \quad (2.48)$$

Lançando-se mão de (2.27) para escrever A'_ν e (2.46) para escrever B'^ν , tem-se

$$A' \cdot B' = A'^\omega g_{\omega\nu} B'^\delta \Lambda_\delta^\nu . \quad (2.49)$$

Escrevendo-se A'^ω utilizando-se de (2.46)

$$A' \cdot B' = (A^\lambda \Lambda_\lambda^\omega) g_{\omega\nu} B'^\delta \Lambda_\delta^\nu , \quad (2.50)$$

$$A' \cdot B' = A^\lambda B'^\delta (\Lambda_\lambda^\omega \Lambda_\delta^\nu g_{\omega\nu}) . \quad (2.51)$$

Substituindo-se (2.51) em (2.47)

$$A^\lambda B'^\delta (\Lambda_\lambda^\omega \Lambda_\delta^\nu g_{\omega\nu}) = A \cdot B . \quad (2.52)$$

Escrevendo-se $A \cdot B$ com a soma de índices e reescrevendo-se A com (2.27)

$$A^\lambda B'^\delta (\Lambda_\lambda^\omega \Lambda_\delta^\nu g_{\omega\nu}) = A^\varphi B^\beta g_{\varphi\beta} . \quad (2.53)$$

A eq. (2.53) vale para quaisquer quadrivetores A e B arbitrários, de onde segue-se que

$$(\Lambda_\lambda^\omega \Lambda_\delta^\nu g_{\omega\nu}) = g_{\lambda\delta} . \quad (2.54)$$

Eis o resultado que expressa que o tensor métrico é invariante sob transformações de Lorentz. Na expressão acima, para manter a covariância (conservação de índices subscritos) trocou-se os índices da direita durante a passagem da (2.53) para (2.54).

A eq. (2.54) é o análogo, para o espaço tempo de Minkowski, da invariância da delta de Kronecker em (2.25). Além disso, a (2.54) também é a condição para que o produto interno na notação de Einstein seja invariante.

A soma de índices repetidos pode ser usada para expressar o quadrivetor (2.26) escrito em uma base \hat{e}_μ

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu = A^0 \hat{e}_0 - A^1 \hat{e}_1 - A^2 \hat{e}_2 - A^3 \hat{e}_3 = A^0 \hat{e}_0 - \vec{A} . \quad (2.55)$$

Por intermédio da soma de índices também é possível mostrar que o produto matricial do tensor métrico consigo mesmo, com índices distintos, resulta na delta de Kronecker

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu . \quad (2.56)$$

Devido ao fato de que a representação matricial da delta de Kronecker é uma matriz $\mathbb{1}$ – recorde-se de que tensores de ordem dois podem ser representados na forma matricial –, evidencia-se que a relação entre tensor métrico com índices sobrescritos $g^{\mu\nu}$ e tensor métrico com índices subscritos $g_{\mu\nu}$ é a de que um é o inverso do outro. Isso decorre do fato de que uma matriz M vezes sua inversa M^{-1} resulta na identidade.

2.3.2.3 Covariância e Contravariância

Quando uma expressão é escrita utilizando-se de notação de Einstein é dito que a mesma é covariante. É vantajoso fazer isso, visto que os termos dessa expressão escritos com notação de Einstein serão dotados da propriedade terem o produto interno invariante sob transformações de Lorentz.

Uma expressão ser covariante significa que ela tem a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Além disso, deve conservar o número de índices que não estão somados, isto que dizer que “se uma equação é covariante de Lorentz, devemos nos garantir de que todos os índices não repetidos (índices altos e baixos separadamente) estão igualados nos dois lados da equação, e que todos os índices repetidos aparecem uma vez como índice sobrescrito e uma vez como índice subscrito (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 73).”

Já para quadrivetores, quando se afirma que as componentes de um quadrivetor estão escritas na representação contravariante A^μ (índice para cima), isso significa que o quadrivetor A está expresso em uma base da seguinte forma

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu . \quad (2.57)$$

Isso implica que as componentes do quadrivetor, dadas por A^μ , são transformadas pela transformação de Lorentz Λ_μ^ν , que é a transformação inversa à aplicada na base \hat{e}_μ , que seria Λ_ν^μ . A matriz inversa de Λ_μ^ν é Λ_ν^μ (pode ser também denotada por $\tilde{\Lambda}_\nu^\mu$).

É por isso que a representação das componentes do quadrivetor A com o índice para cima é chamada de contravariante, pois A^μ se transforma com a transformação inversa, ou contrária, a transformação da base \hat{e}_μ .

Por outro lado, quando se afirma que as componentes do quadrivetor estão escritas na representação covariante A_μ (índice para baixo), isso decorre do fato de que A_μ tem a mesma transformação que a base \hat{e}_μ , dada por Λ_ν^μ .

2.3.2.4 Derivadas covariante e contravariante de Lorentz.

É conveniente definir-se a derivada covariante de Lorentz ∂_μ e a contravariante de Lorentz ∂^μ . Essas derivadas serão amplamente utilizadas no trabalho e serão chamadas genericamente de derivadas de Lorentz. A derivada ∂^μ é dada por

$$\partial^\mu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) . \quad (2.58)$$

A derivada covariante ∂_μ é dada por

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (2.59)$$

O produto interno, invariante, da derivada covariante com a derivada contravariante é

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.60)$$

A eq. (2.60) é chamada de operador de d'Alembert ou d'Alembertiano. Algumas referências definem-no como \square^2 .

Por último, para fins de uniformização notacional: neste trabalho será utilizado \vec{p} para o momentum espacial, $|\vec{p}|$ como módulo do momentum espacial, P para o quadrimomentum abstrato, independente de uma base, e P^μ para as componentes do quadrimomentum, quando este está expandido em uma base.

2.4 Métodos Perturbativos

A Teoria Perturbativa (TP), ou Métodos Perturbativos, consiste, segundo [BENDER e ORZAG \(1999, p. 319\)](#), em “um conjunto de métodos iterativos¹³ a fim de se obter uma solução aproximada para problemas envolvendo um parâmetro pequeno ξ .”

Desse modo, os Métodos Perturbativos empregam o uso de soluções aproximadas escritas em termos de ξ . Através dessa abordagem pode-se decompor uma solução dada por uma expressão difícil em uma série perturbativa, que consiste em um número infinito de termos mais simples em função de ξ . Essa técnica é interessante quando os primeiros termos da série perturbativa são os elementos mais importantes da solução, de modo que os de grau mais alto pouco contribuam ([BENDER; ORZAG, 1999, p. 319](#)).

A Teoria Perturbativa teve sua origem a partir do estudo de problemas de Mecânica Celeste, em meados do século XVIII, principalmente com os trabalhos de Alexis Claude de Clairaut que levavam em conta o efeito que outros planetas tinham nas orbitas de objetos como a Lua (no estudo do sistema Terra - Lua) e o cometa Halley (no estudo do sistema Cometa - Sol) ([BOCCALETTI; PUCACCO, 2002, p. 2-3](#)). Devido a natureza da força gravitacional, cuja interação é proporcional a massa e inversamente proporcional ao quadrado da distância, as órbitas destes corpos são dominadas pelo corpo central (o sol e a Terra, respectivamente), sendo o efeito dos outros planetas de ordem de magnitude muito menor – podendo ser parametrizado por um pequeno fator ξ , que é o o parâmetro perturbativo no contexto da Mecânica Celeste. Segundo [Boccaletti e Pucacco \(2002, p. 5\)](#),

¹³ O processo de iteração (de “métodos iterativos”) consiste na solução de uma equação original substituindo soluções aproximadas na mesma repetidas vezes a fim de ir refinando cada vez mais a solução final.

o conceito “perturbação” nesse contexto diz respeito à mudanças na órbita dos objetos em decorrência da ações (de natureza gravitacional) muito pequenas de outros corpos celestes . Dai vem o nome “perturbativo” em Teoria Perturbativa.

Essa abordagem mais precisa surgiu em resposta ao aperfeiçoamento dos dados astronômicos, visto que geralmente empregava-se a aproximação na qual a força gravitacional entre o objeto e os outros planetas, quais não estavam envolvidos no sistema tratado, podia ser negligenciada, já que a força gravitacional objeto-Sol, ou objeto-Terra, era predominante nos sistemas estudados (BOGOLYUBOV, 2011). Um grande triunfo dos métodos perturbativos aplicados à Mecânica Celeste foi a previsão corroborada experimentalmente para a órbita de Urano levando em consideração a perturbação ocasionada por um objeto transuraniano, que posteriormente seria descoberto como sendo Netuno (JONES, 1984, p. 278-279; BOGOLYUBOV, 2011).

Nos estudos desempenhados nesse trabalho, a TP terá um importante papel, pois será a partir dela que obter-se-ão soluções importantes para a análise de espalhamentos.

Nas seções (2.5), (2.6.3) e (2.6.12) serão desenvolvidos cálculos que empregam métodos perturbativos.

2.5 Solução perturbativa da equação de Schrödinger com potencial dependente do tempo

Nesta seção serão obtidos, via métodos perturbativos, resultados importantes a partir do formalismo de Schrödinger que serão posteriormente estendidos e comparados com os resultados dos formalismos quânticos relativísticos (Klein-Gordon e Dirac).

Em um primeiro momento, discorre-se a respeito da Teoria Quântica de Campos conceitualmente, em seguida introduz-se o formalismos de Schrödinger, resolve-se a equação de Schrödinger para um espalhamento empregando-se os métodos da TP e por fim discute-se os resultados obtidos.

2.5.1 Teoria Quântica de Campos

O domínio do MP é o domínio da Teoria Quântica de Campos (QFT – *Quantum Field Theory*), que é a teoria por trás do mesmo – é ela o pavimento sobre qual se edificam todas as teorias do MP. A tabela (1) expressa onde essa teoria se localiza no âmbito dos domínios da Física:

A QFT trata, portanto, de entidades muito pequenas – de natureza quântica – e que possuem velocidades relativísticas – isto é, se movem próximo a velocidade da luz.

Tabela 1 – Domínios da Física e respectivas teorias.

	Pequeno →	
Rápido ↓	Mecânica Clássica	Mecânica Quântica
	Mecânica Relativística	Teoria Quântica de Campos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse arcabouço teórico são estudados os campos que mediam as forças entre partículas com carga elétrica, carga cor (dos quarks), etc . E tais campos são quantizados, ou seja, eles transferem energia respeitando a quantização de Planck – por isso o nome Teoria Quântica de Campos – e a Relatividade Restrita. As partículas mediadoras, já citadas anteriormente, são quanta desses campos de interação. As partículas não mediadoras também são tratadas como perturbações em campos associados a elas na QFT.

Essa noção de campos associados a partículas envolve uma discussão da QFT em maior detalhe técnico por ser um tópico demasiado avançado. Esse trabalho se eximirá de tal discussão.

A QFT também abrange um comportamento muito importante: as flutuações no vácuo quântico. O vácuo não é de fato vazio, mas permeado de flutuações quânticas – que consistem no aparecimento e desaparecimento de pares partículas antipartículas que se aniquilam. Pode-se ter, portanto, em um dado instante t_0 , um sistema onde não há nenhuma partícula. Já no instante t_1 , pode-se ter duas partículas no mesmo sistema, e no instante t_3 retorna-se ao vazio do instante inicial. Esse fenômeno será retomado na subseção (2.8.4) da seção de Cromodinâmica Quântica, e na seção (4.6) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

As flutuações no vácuo são uma propriedade oriunda da junção da Mecânica Quântica com a Relatividade restrita, de modo que a QFT constitui-se no arcabouço teórico capaz de prever e analisar esse fenômeno de variação no número de partículas em um dado sistema. Nas palavras de Zee (2010, p.3):

É na confluência peculiar da relatividade especial e da mecânica quântica que surge um novo conjunto de fenômenos: as partículas podem nascer e as partículas podem morrer. É esta questão de nascimento, vida e morte que requer o desenvolvimento de um novo assunto em física, o de teoria quântica de campos.

Assim, a QFT ampara eficientemente o estudo de sistemas cujo número de partículas varia. E isso inclui espalhamentos (ou decaimentos) onde novas partículas surgem

$$A + B \rightarrow C + D + E \tag{2.61}$$

Se as partículas iniciais A e B têm energia maior que a massa de repouso de C, D e E, e todas as leis de conservação forem respeitadas, essa reação poderá ocorrer.

2.5.2 Equação de Schrödinger.

Conforme supracitado, a QFT é uma a teoria Quântica Relativística. Para limites de baixas velocidade o formalismo ondulatório de Schrödinger pode descrever satisfatoriamente um sistema composto por uma, ou mais partículas, por intermédio da equação de Schrödinger. No caso de um sistema com uma única partícula, a equação de Schrödinger é

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.62)$$

Também é escrita como

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.63)$$

Com o operador Hamiltoniano \hat{H} dado por $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t)$. Onde $h = 4.135667696 \cdot 10^{15} eV \cdot s$ é a constante de Planck, m é a massa da partícula, $\Psi(\vec{r}, t)$ é a função de onda associada à partícula, E é a energia total da partícula e V é a energia potencial do sistema, que pode ser abreviadamente chamada de potencial. O potencial é uma grandeza que caracteriza um campo vetorial de forças, visto que o gradiente do mesmo é igual à menos a força que age no sistema.

Conforme já mencionada, a equação de Schrödinger não é relativística, isso decorre do fato dela ser construída a partir da relação clássica de energia $E = \frac{p^2}{2m} + V$ (EISEBERG; RESNICK, 1979, p. 180). O formalismo ondulatório de Schrödinger foi proposto em 1926 por Erwin Schrödinger, tendo sido construído levando-se em consideração o comportamento ondulatório das partículas, oriundo do postulado de De Broglie, e o comportamento corpuscular das ondas eletromagnéticas, oriundo do postulado de Einstein (EISEBERG; RESNICK, 1979, p. 175).

O postulado de De Broglie estabelece que uma partícula com momentum p tem uma onda associada a si, cujo comprimento de onda é dado por

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (2.64)$$

Tal postulado implica que entes quânticos tidos como partículas podem apresentar comportamentos ondulatórios.

O postulado de De Broglie foi proposto em 1924 e corroborado a partir dos resultados apresentados no trabalho de Davisson e Germer, onde verificou-se que elétrons espalhados sobre alvos de níquel apresentam um comportamento de difração que é explicado pelo postulado de De Broglie (DAVISSON; GERMER, 1927, p. 559).

Já o postulado de Einstein estabelece que as ondas eletromagnéticas, com frequência ν , podem ser analisadas como sendo compostas por pacotes de energia, que ele chamou de quanta luz, que obedecem a relação de quantização de Planck

$$\text{Energia de um quantum de luz} = h\nu . \quad (2.65)$$

Atualmente, o quantum de luz proposto por Einstein é o fóton γ da QED, a partícula da quantização do campo eletromagnético e responsável por mediar interações eletromagnética. O nome fóton para o quantum de luz de Einstein¹⁴ foi adotado a partir da proposta do físico-químico estadunidense Gilbert Lewis, em uma carta para a revista Nature em 1926 (LEWIS, 1926, p. 874).

Essa ideia de Einstein para os quanta de luz foi constituída a fim de se resolver o problema do efeito fotoelétrico, em 1905 (EINSTEIN, 1967, p. 104). Posteriormente, ela foi utilizada por Compton para modelagem de espalhamentos de ondas eletromagnéticas de comprimento de onda do raios X por elétrons (COMPTON, 1923a, p. 486). A modelagem foi corroborada por experimentos apresentados por Compton no qual ele espalhou raios X em um alvo de Molibdênio (COMPTON, 1923b, p. 410 e 413).

A corroboração de Compton é considerado um marco para a aceitação da hipótese de Einstein de que a luz é formada por entidades discretas. A incorporação dessas à QFT se deu posteriormente, com o desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (GRIFFITHS, 2008, p. 17).

Assim, essas são as duas principais ideias que fundamentam a construção do formalismo de Schrödinger, cujo cerne é a eq. (2.62). A partir da equação de Schrödinger é possível extrair a função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ associada a partícula, que descreve matematicamente a onda associada a partícula (EISEBERG; RESNICK, 1979, p. 183). O módulo ao quadrado de $\Psi(\vec{r}, t)$ é a função densidade de probabilidade de posição da partícula, de modo que $\int_{z_a}^{z_b} \int_{y_a}^{y_b} \int_{x_a}^{x_b} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dx dy dz$ é a probabilidade de se encontrar a partícula na região do espaço delimitada pelo volume $V = (x_b - x_a)(y_b - y_a)(z_b - z_a)$, no instante t (GRIFFITHS, 2011b, p. 2). Essa interpretação probabilística se justifica na ideia de que o movimento da partícula com momentum p está atrelado à propagação da onda associada à mesma, de modo que a partícula tem maior probabilidade de estar onde a amplitude da $\Psi(\vec{r}, t)$ (que descreve a onda associada à partícula) for maior (EISEBERG; RESNICK, 1979, p. 183).

Para um sistema quântico que se encontra em auto estado de energia E_n , tem-se que o mesmo é descrito por:

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi_n(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(\vec{r}, t) . \quad (2.66)$$

¹⁴ O nome vem do grego *photo-* “luz” + *on* “unidade” (ETYMONLINE, 2021e).

Para uma partícula livre, ou seja, na ausência de V , a equação de Schrödinger (2.66) pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi_n(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n(\vec{r},t). \quad (2.67)$$

Onde tomou-se $V = 0$ em (2.66). A equação (2.67) tem como solução uma função de onda separada em um termo com dependência espacial e um com dependência harmônica temporal, característica do movimento harmônico simples (MHS)¹⁵:

$$\Psi_n(\vec{r},t) = \psi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.68)$$

Tal solução, ao ser substituída nos dois lados da (2.67) resulta em

$$\hat{H}_0\psi_n(\vec{r}) = E_n\psi_n(\vec{r}). \quad (2.69)$$

Onde $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2$ é o operador hamiltoniano com $V = 0$. A dependência temporal é anulada e obtêm-se uma relação do autovalor de energia E_n e autofunção ψ_n (a eq. (2.69)), ambos para o sistema no estado n .

2.5.3 Tratamento perturbativo para a equação de Schrödinger.

Nessa subseção será construída uma solução da equação de Schrödinger a partir de métodos perturbativos para o caso em que estuda-se uma partícula espalhada de um estado inicial para um estado final. Os resultados subsidiarão discussões que serão realizadas ao longo do trabalho a respeito da relação entre termos de ordem perturbativa e diagramas de Feynman. Essa subseção se baseia na seção 3.6 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Considera-se agora o caso de um sistema que é composto por uma partícula que muda seu estado n com o passar do tempo. A partícula é espalhada de um estado inicial para um estado final por um potencial que age no sistema. Nesse caso a solução da equação de Schrödinger geral (2.62), com um potencial $V(\vec{r},t)$, pode ser escrita como uma combinação linear de uma amplitude a_n dependente do tempo e da solução (2.68):

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^n a_n(t)\psi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.70)$$

Na eq.(2.70) assume-se que o conjunto de autofunções $\{\psi_n\}$ é completo, o que permite escrever Ψ como combinação linear de todos os estados ($n = 1, n = 2, n = 3\dots$). O fato desta equação ser construída a partir de soluções para o caso da equação de Schrödinger da partícula livre implica que a partícula descrita por (2.70) é espalhada de um estado inicial de partícula livre para outro estado final de partícula livre.

¹⁵ É importante deixar claro que o aparecimento da solução característica do MHS (a exponencial da eq. (2.68)) não implica que a partícula estudada está realizando um MHS, ou que a equação de Schrödinger é uma equação de MHS. Trata-se apenas de uma solução característica de problemas de MHS que é um termo da solução da eq. (2.67).

Além disso, tal equação transmite a informação de que a função de onda tem embutida dentro de si a soma de todos os estados possíveis. Antes da medição o sistema quântico é uma superposição (soma) de todos os possíveis estados, e quando o sistema é submetido ao ato de medição a função de onda Ψ_n fica determinada, n assume algum valor e o sistema se fixa em um estado.

A variável a_n representa a amplitude de probabilidade do sistema quântico se encontrar no n-ésimo estado, em um dado instante t. Portanto, segue-se que a probabilidade de se medir o sistema no estado n, dada por P, é

$$P_n(t) = |a(t)|^2 = a_n(t)a_n^*(t), \quad (2.71)$$

onde $a_n^*(t)$ é o complexo conjugado da amplitude. A amplitude é uma variável de interesse para o estudo da evolução de sistemas, pois sua derivada temporal provê o entendimento de como a probabilidade do sistema estar em dado estado muda no tempo. Substituindo a solução (2.70) na eq. (2.62)

$$\left[-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \left(\sum_{n=1}^n a_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^n a_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \right), \quad (2.72)$$

$$\sum_{n=1}^n V(\vec{r}, t) a_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} = i\hbar \sum_{n=1}^n \frac{da_n}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.73)$$

Onde utilizou-se o fato de que o operador $-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2$ agindo sobre a solução (2.70) se anula com um dos termos oriundos da derivada do lado direito. Utilizou-se também a relação de autovalores e autofunções (2.69).

Daqui em diante serão utilizadas unidades naturais¹⁶, isto é

$$\hbar \rightarrow 1, \quad c \rightarrow 1. \quad (2.74)$$

Lançando-se mão de (2.74), pode-se reescrever a (2.73) como:

$$\sum_{n=1}^n V(\vec{r}, t) a_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} = i \sum_{n=1}^n \frac{da_n}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t}. \quad (2.75)$$

Multiplicando a (2.75) pelo complexo conjugado da autofunção relativa ao estado f e integrando sobre todo espaço S

$$\int_S \psi_f^*(\vec{r}) \sum_{n=1}^n V(\vec{r}, t) a_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} d\vec{r} = i \int_S \psi_f^*(\vec{r}) \sum_{n=1}^n \frac{da_n}{dt} \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} d\vec{r}, \quad (2.76)$$

$$\sum_{n=1}^n a_n \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} d\vec{r} = i \sum_{n=1}^n \frac{da_n}{dt} e^{-iE_n t} \int_S \psi_f^*(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.77)$$

¹⁶ Pela (2.74), tempo e espaço, bem como energia, massa e momentum passam a ter dimensões equivalentes.

Valendo-se do fato de que o conjunto das autofunções $\{\Psi_n\}$ é ortonormal, ou seja

$$\int_S \psi_f^*(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{fn} . \quad (2.78)$$

Tem-se

$$\sum_{n=1}^n a_n \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} d\vec{r} = i \sum_{n=1}^n \frac{da_n}{dt} e^{-iE_n t} \delta_{fn} . \quad (2.79)$$

Correndo a soma do lado direito e levando em conta que por conta da delta de Kroenecker sobram apenas os termos referentes ao f-ésimo estado

$$\sum_{n=1}^n a_n \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} d\vec{r} = i \frac{da_f}{dt} e^{-iE_f t} , \quad (2.80)$$

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_{n=1}^n a_n \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_n(\vec{r}) e^{it(E_f - E_n)} d\vec{r} . \quad (2.81)$$

Correndo-se a soma na eq. (2.81) e assumindo-se que em um tempo arbitrário $-T/2$, que é antes da interação ocorrer, o único estado do sistema é $n=i$, ou seja

$$a_n(-T/2) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = i \\ 0, & \text{se } n \neq i . \end{cases} \quad (2.82)$$

Assim, quando o sistema está no tempo $-T/2$, a eq. (2.81) é dada por

$$\left. \frac{da_f}{dt} \right|_{t=-T/2} = -i \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, -T/2) \psi_i(\vec{r}) e^{-iT/2(E_f - E_i)} d\vec{r} . \quad (2.83)$$

Para o estudo de espalhamentos, onde partículas interagem entre si e o potencial do sistema é gerado por uma das partículas, pode-se assumir que o potencial é pequeno, de alcance finito e duração limitada. Esse tipo de abordagem é característico do tratamento de espalhamentos. Desse modo, tendo em vista o potencial pequeno, assume-se que as condições do estado dado por $n=i$ se mantenham ao longo do tempo, até que o sistema evolua ao estado f . Assim, para qualquer tempo t antes do sistema evoluir para o estado f , a eq. (2.83) se mantém verdadeira, de modo que podemos escreve-la como

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) e^{it(E_f - E_i)} d\vec{r} . \quad (2.84)$$

Integrando-se (2.84) com respeito ao tempo entre os intervalos $-T/2$ e t obtêm-se

$$a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t dt \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) e^{it(E_f - E_i)} d\vec{r} . \quad (2.85)$$

A eq. (2.85) é uma solução perturbativa de primeira ordem para a equação diferencial (2.84), pois assumiu-se um potencial $V(\vec{r}, t)$ pequeno (o potencial é proporcional a um parâmetro perturbativo genérico ξ) e $a_f(t)$ está escrita em termos de tal parâmetro. Desse

modo, essa solução é uma primeira aproximação de série perturbativa. É importante deixar claro que a solução (2.85) não é analítica, mas sim uma primeira aproximação. As soluções de a_f em ordem maior podem ser obtidas via métodos perturbativos, e isso será demonstrado mais adiante nessa subseção.

Considera-se que em $t=+T/2$ a interação do sistema com o potencial cessa e este chega ao estado f.

$$a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) e^{it(E_f - E_i)} d\vec{r}. \quad (2.86)$$

Onde escreveu-se a_f em função do limite superior da integral do tempo. Estando fixo o estado inicial $n=i$ e considerando que V faz o sistema evoluir até um estado $n=f$, a expressão (2.86) é a amplitude de probabilidade do sistema evoluir do estado i até o estado f , a qual será chamada de amplitude de transição do sistema de $i \rightarrow f$. Definindo-se $T_{fi} \equiv a_f(T/2)$, tem-se que

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_S [\psi_f(\vec{r}) e^{-itE_f}]^* V(\vec{r}, t) [\psi_i(\vec{r}) e^{-itE_i}] d\vec{r}. \quad (2.87)$$

Como as autofunções dependem do vetor posição \vec{r} e as exponenciais dependem do tempo, pode-se escrever o produto destas como uma nova função de onda $\phi(\mathbf{x})$ escrita em função do quadrivetor posição-tempo \mathbf{x} . Pode-se fazer o mesmo com o potencial $V(\vec{r}, t)$. Desse modo a (2.87) fica

$$T_{fi} = -i \int_{\mathbf{x}} [\phi_f(\mathbf{x})]^* V(\mathbf{x}) [\phi_i(\mathbf{x})] d^4 \mathbf{x}. \quad (2.88)$$

Onde $\phi(\mathbf{x}) = \psi(\vec{r}) e^{-itE}$, com $\mathbf{x} = x^\mu \hat{e}_\mu$ e $x^\mu = (t, \vec{r})$.

Conforme supracitado, no contexto de espalhamentos assume-se que o potencial tem uma duração finita, agindo apenas quando as partículas se aproximam, visto que este é oriundo da interação entre as mesmas. Tendo essa assunção em vista, pode se considerar que o potencial V é independente do tempo durante o momento em que as partículas interagem (entre $-T/2$ e $T/2$, para $T/2 < t$ e $t < -T/2$, $V(\vec{r}, t) = 0$). Com $V(\mathbf{x}) \rightarrow V(\vec{r})$, pode-se escrever a expressão (2.88) da seguinte forma

$$T_{fi} = -i \left[\int_S [\psi_f(\vec{r})]^* V(\vec{r}) [\psi_i(\vec{r})] d\vec{r} \right] \int_{-T/2}^{T/2} e^{it(E_f - E_i)} dt. \quad (2.89)$$

Onde dividiu-se as integrais em uma do espaço e uma do tempo. A integral do tempo pode ser feita tomando-se T arbitrariamente grande, isto é, fazendo seus limites irem de $-\infty$ até $+\infty$.

$$T_{fi} = -i \left[\int_S [\psi_f(\vec{r})]^* V(\vec{r}) [\psi_i(\vec{r})] d\vec{r} \right] \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{it(E_f - E_i)} dt. \quad (2.90)$$

Fazendo-se isso, tal integral resulta na delta de Dirac para a energia (NETO, 2010, p. 201). A integral do espaço pode ser escrita como V_{fi} .

$$T_{fi} = -i V_{fi}(\vec{r}) [2\pi \delta(E_f - E_i)]. \quad (2.91)$$

A delta de Dirac é uma generalização da delta de Kronecker para o caso das integrais, visto que que

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = a, \\ 0, & \text{se } x \neq a, \end{cases} \quad (2.92)$$

com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1, \quad (2.93)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (2.94)$$

É possível perceber uma analogia entre a delta de Dirac e a delta de Kronecker comparando-se (2.92) com (2.16).

A presença da delta na eq. (2.91) expressa a conservação da energia na transição do estado i para o f (pois a delta força $E_i = E_f$). Nesse caso, tem-se a energia bem definida – incerteza de energia é pequena. Isso implica, pelo princípio da incerteza energia-tempo, que o tempo entre os dois estados de energia i e f é infinitamente grande, já que o δt do princípio da incerteza energia-tempo é o tempo que o sistema leva pra mudar substancialmente, não o desvio padrão dos tempos (GRIFFITHS, 2011b, p. 88). Assim, faz-se necessário definir outra variável que contorne essa limitação: a taxa de variação temporal da probabilidade do estado evoluir de i para f , chamada de transição de probabilidade por unidade de tempo:

$$W \equiv \frac{|T_{fi}|^2}{T}. \quad (2.95)$$

Substituindo (2.91) em (2.95)

$$W = \frac{|V_{fi}(\vec{r})|^2 [4\pi^2 \delta^2(E_f - E_i)]}{T}. \quad (2.96)$$

Como $\delta^2(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \cdot \delta(E_f - E_i)$

$$W = \frac{|V_{fi}(\vec{r})|^2 [4\pi^2 \delta(E_f - E_i) \cdot \delta(E_f - E_i)]}{T}. \quad (2.97)$$

Escrevendo-se uma das deltas em (2.97) como $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2\pi} e^{it(E_f - E_i)} dt$,

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}(\vec{r})|^2 [4\pi^2 \delta(E_f - E_i)] \left[\int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{it(E_f - E_i)} dt}{2\pi} \right]. \quad (2.98)$$

Considerando a ação de filtragem da delta sobre a exponencial da (2.98), fazendo $E_f = E_i$.

$$\delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} e^{it(E_f - E_i)} dt = \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} e^{it(E_i - E_i)} dt = \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} dt. \quad (2.99)$$

A rigor a delta só filtra quando é corrida por uma integral, mas esse passo pôde ser efetivado agora, pois posteriormente tal delta será corrida por uma integral. Assim

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}(\vec{r})|^2 [2\pi\delta(E_f - E_i)] \left[\int_{-T/2}^{T/2} dt \right]. \quad (2.100)$$

Integrando o diferencial dt em (2.100) e avaliando nos limites

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}(\vec{r})|^2 [2\pi\delta(E_f - E_i)] T. \quad (2.101)$$

Simplificando os T, e aplicando o limite

$$W = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (2.102)$$

A eq. (2.102) tem um significado físico, ao serem estabelecidas condições iniciais e finais. Seja $\rho(E_f)$ a densidade de estados finais, de modo que $\rho(E_f)dE_f$ seja o número de estados finais com energia no intervalo entre E_f e $E_f + dE_f$. Integrar a (2.102) sobre tal densidade resulta em

$$W_{fi} = 2\pi \int \rho(E_f) dE_f |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (2.103)$$

$$W_{fi} = 2\pi \rho(E_i) |V_{fi}|^2. \quad (2.104)$$

O resultado (2.104) é conhecido como Regra de Ouro de Fermi e ele dá a transição de probabilidade por unidade de tempo para um dado estado de energia E_i . A transição de probabilidade por unidade de tempo (2.95) será utilizada mais adiante na obtenção do observável seção de choque σ .

Conforme supracitado, o valor de T_{fi} obtido em (2.91) é um termo perturbativo de primeira ordem de uma expansão perturbativa em termos de V. Com a assunção de que potencial V é pequeno, pode-se refinar o resultado de T_{fi} empregando TP a fim de obter-se os termos perturbativos de ordem 2, por iteração.

Primeiramente, toma-se a (2.85) e faz-se $f \rightarrow n$, onde n é um estado intermediário. Assim

$$a_n(t) = -i \int_{-T/2}^t dt' \int_S \psi_n^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) e^{it'(E_n - E_i)} d\vec{r}. \quad (2.105)$$

Isso implica que o potencial levará o sistema inicialmente de um estado i para um estado intermediário n, depois levará o sistema do estado n para um estado f. Assumir esses estados intermediários é o caminho para se obter os termos de ordem 2 da série perturbativa.

Substituindo (2.105) em (2.81)

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_{n \neq i}^n \left[-i \int_{-T/2}^t dt' \int_S \psi_n^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) e^{it'(E_n - E_i)} d\vec{r} \right] \int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_n(\vec{r}) e^{it(E_f - E_n)} d\vec{r}. \quad (2.106)$$

Na expressão acima, a soma foi restringida para não passar pelo estado $n = i$, qual já está presente na expressão. Sejam

$$\int_S \psi_n^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) d\vec{r} \equiv V_{ni}, \quad (2.107)$$

e

$$\int_S \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}, t) \psi_n(\vec{r}) d\vec{r} \equiv V_{fn}. \quad (2.108)$$

Fazendo (2.108) e (2.107) em (2.106)

$$\frac{da_f}{dt} = (-i)^2 \sum_{n \neq i}^n \int_{-T/2}^t dt' V_{ni} e^{it'(E_n - E_i)} V_{fn} e^{it(E_f - E_n)}. \quad (2.109)$$

Reescrevendo (2.109)

$$\frac{da_f}{dt} = (-i)^2 \sum_{n \neq i}^n V_{ni} V_{fn} \int_{-T/2}^t dt' e^{it'(E_n - E_i)} e^{it(E_f - E_n)}. \quad (2.110)$$

Integrando-se (2.110) com respeito a t' entre os intervalos $-\infty$ e t :

$$\frac{da_f}{dt} = (-i)^2 \sum_{n \neq i}^n V_{ni} V_{fn} i \frac{e^{it(E_n - E_i - i\epsilon)}}{E_i - E_n + i\epsilon} e^{it(E_f - E_n)}. \quad (2.111)$$

O acréscimo do termo $i\epsilon$, com $\epsilon > 0$ é realizado a fim de que a integral sobre t venha a convergir. Integrando a (2.111) com respeito a t , avaliando a integral entre $-T/2$ e $T/2$ e tomando $\lim_{T \rightarrow \infty}$, tem-se

$$a_f(T/2) \equiv T_{fi} = -i \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n \neq i}^n V_{ni} V_{fn} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{it(E_f - E_i - i\epsilon)}}{E_i - E_n + i\epsilon} dt. \quad (2.112)$$

Na expressão (2.112) escreveu-se a_f em função do limite superior da integral e utilizou-se a definição $a_f(T/2) \equiv T_{fi}$. É sabido que a integral da (2.112), juntamente com o limite, resulta na delta de Dirac da energia (pode-se desprezar o termo da exponencial com $i\epsilon$). Assim

$$T_{fi} = -i \sum_{n \neq i}^n V_{ni} V_{fn} \frac{2\pi \delta(E_f - E_i)}{E_i - E_n + i\epsilon}. \quad (2.113)$$

Eis o termo de ordem dois da expansão perturbativa de T_{fi} . A expansão perturbativa de ordem 2 para T_{fi} é obtida ao somar-se a expressão (2.113) com a (2.91)

$$T_{fi} = -iV_{fi}2\pi\delta(E_f - E_i) - 2\pi \sum_{n \neq i}^n V_{ni}V_{fn} \frac{\delta(E_f - E_i)}{E_i - E_n + i\epsilon}. \quad (2.114)$$

É possível obter a (2.113) trocando-se V_{fi} por uma expansão perturbativa de V_{fi} de ordem dois dada por

$$V_{fi} = V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni}. \quad (2.115)$$

É possível perceber a partir desses resultados que existem estados intermediários n entre i e f para as expansões perturbativas de ordem maior. Quanto maior a ordem da expansão maior é o número de estados intermediários entre i e f .

A aproximação de ordem um da expansão perturbativa de T_{fi} , a qual considera que o estado é levado de i até f por V , contém apenas um termo com uma potência de V . Na expansão perturbativa de próxima ordem, V leva o sistema do estado i pra um estado intermediário n , depois de n pra f , e isso faz a expressão conter um termo com duas potências de V , mais um termo com a potência de ordem um em V . Na terceira ordem haveriam dois estados intermediários, e isso faria a expressão conter um termo com três potências de V , e assim por diante. Por intermédio das expansões de segunda ordem, terceira, etc. . . , é possível obter uma melhor aproximação para a solução $a_n(t)$. O presente trabalho irá trabalhar apenas com a primeira aproximação.

2.5.4 Relação entre os termos de T_{fi} e os diagramas de Feynman.

Conforme explicitado na seção (2.2), os diagramas de Feynman são ferramentas a partir das quais pode-se realizar o computo da amplitude invariante. Essa grandeza será definida na seção seguinte (seção (2.6)), mas nesse momento pode-se esclarecer que tal grandeza é oriunda da amplitude de transição do sistema T_{fi} , isso implica que os diagramas de Feynman servem para se computar termos de T_{fi} de forma rápida, dispensando cálculos que partem de equações dinâmicas de sistemas, como a equação de Schrödinger.

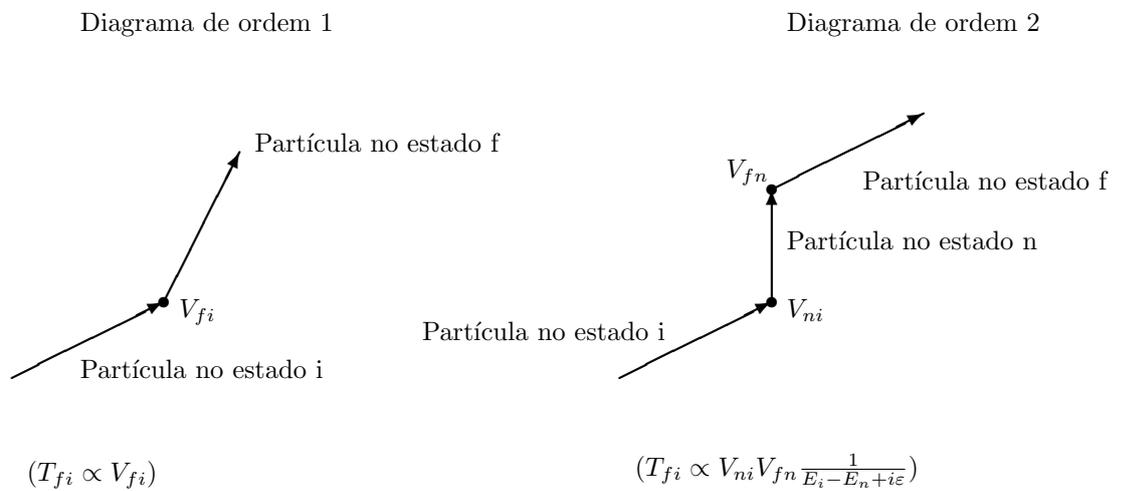
Há uma correspondência entre os diagramas de Feynman e os termos da expansão perturbativa da amplitude de transição do sistema. Termos de ordem maior das expansões perturbativas da T_{fi} correspondem a diagramas de Feynman de ordens maiores.

A ordem de um diagrama é definida pelo número de vértices que ele contém, onde cada vértice representa um estado intermediário. Assim, quanto maior for a ordem do diagrama, maior é a ordem do termo da expansão perturbativa de T_{fi} ao qual ele diz respeito.

Vários diagramas podem ser usados para o cômputo da expansão perturbativa de T_{fi} , quanto mais diagramas forem usados e maior a ordem deles mais preciso será o computo T_{fi} .

Para o caso do T_{fi} calculado a partir da equação de Schrödinger cada vértice do diagrama, que representa um estado intermediário n , vai contribuir com um termo referente ao potencial V e cada linha interna um propagador $\frac{1}{E_i - E_n}$ (ver figura (5)).

Figura 5 – Representações de vértices de diagramas de Feynman de primeira e segunda ordem e as respectivas contribuições no computo da amplitude invariante



Elaborado pelo autor.

Assim, para o cômputo de uma expansão de segunda ordem de T_{fi} considerar-se-á a contribuição dos dois diagramas da figura (5), que pode ser sistematizada como segue :

$$T_{fi}^{\text{ordem dois}} = (T_{fi}^{\text{termo de ordem um}} \propto V_{fi}) + \left(T_{fi}^{\text{termo de ordem dois}} \propto V_{fn} V_{ni} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} \right). \quad (2.116)$$

Assim, uma leitura e análise dos diagramas, levando-se em conta como cada elemento do diagrama contribui para a amplitude de transição, permite a obtenção de T_{fi} ao qual eles correspondem. Nessa subseção limitou-se a explicar como os diagramas correspondem à amplitude de transição. Detalhes de como se lê diagramas usando regras de Feynman para a obtenção de termos de T_{fi} serão dados no capítulo de Aplicação das teorias (3).

Esse tratamento dos diagramas de Feynman diz respeito a uma evolução do sistema estudada sob o formalismo de Schrödinger, ou seja, não é um tratamento relativístico. Na seção seguinte (seção (2.6)) serão apresentadas equações que relativísticas para o estudo de sistemas com partículas. Será também exposta a forma como os diagramas de Feynman se relacionam com T_{fi} para tais equações, que é análoga a forma como os diagramas se

relacionam com os termos perturbativos de T_{fi} para o formalismo de Schrödinger, embora seja feito com termos diferentes.

2.6 Eletrodinâmica Quântica

Nessa seção serão expostos as formulações necessárias para se tratar de espalhamentos de partículas relativísticas com spins 0, por intermédio da equação de Klein-Gordon, e para sistemas com partículas relativísticas de spin $\frac{1}{2}$, por intermédio da equação de Dirac. Deste modo, introduzem-se nessa seção duas das principais equações da teoria do MP para as interações eletromagnéticas, i.e. a QED.

Essas equações são equações que tratam de sistemas quânticos levando em conta a relatividade restrita e por intermédio delas serão obtidas as expressões de T_{fi} , bem como a relação dessas expressões com os diagramas de Feynman.

É necessário estabelecer um limite nesse ponto: essas equações dinâmicas de MQ relativística não são como a equação de Schrödinger, são equações chamadas de equações dinâmicas de campos que descrevem o movimento de campos associados a partículas. A QFT trabalha associando um campo a cada partícula de modo que partículas são excitações, perturbações, em tais campos. Esse tratamento qual considera as partículas excitações em campos abstratos é do escopo da Teoria Quântica de Campos, e uma discussão mais aprofundada desse tópico foge do escopo deste trabalho.

2.6.1 Equação de Klein-Gordon.

A equação dinâmica para sistemas quânticos com spin 0, que leva em consideração a relatividade restrita, é a equação de Klein-Gordon (equação KG). A equação KG, segundo (KRAGH, 1984, p. 1024) é uma extensão relativística da equação de Schrödinger, e leva esse nome em homenagem à Oscar Klein e Walter Gordon.

Tal equação foi obtida primeiramente por Schrödinger, em 1925, mas ele não chegou a publicar esse feito (KRAGH, 1984, p. 1024). Foi na primavera de 1926, após Schrödinger ter publicado sua formulação ondulatória da Mecânica Quântica, que Klein publicou sua formulação relativística da equação de Schrödinger (KRAGH, 1984, p. 1026). Nesse mesmo ano, independentemente e simultaneamente, diversos físicos, incluindo Walter Gordon, chegaram no mesmo resultado (KRAGH, 1984, p. 1030-1031; PEDUZZI, 2010, p. 13)

A equação de KG se apresentava como uma equação que descrevia o comportamento elétrons sob ação de potenciais levando em conta a relatividade restrita, no entanto ela não obteve corroboração experimental, se mostrando incapaz de prever as energias relativas a estrutura fina do espectro do hidrogênio (PEDUZZI, 2010, p. 12-13). Apesar de sua falha para a descrição dos elétrons, labor qual a equação de Dirac cumpre com êxito, a equação

de KG descreve adequadamente sistemas compostos por partículas de spin 0 – chamadas de bósons.

Isto se verificou intermédio de trabalhos posteriores de Pauli e Weisskopf com a equação de KG e através da descoberta dos mésons¹⁷, a partir de 1934, objetos que podiam ser estudados com tal equação. (KRAGH, 1984, 1031).

Desse modo, “desde meados da década de 30, a equação de KG é reconhecida como pertencente às equações fundamentais da QFT (KRAGH, 1984, p. 1031).”

A demonstração da equação de KG que segue-se foi feita a partir das seções 3.3 e 3.4 do capítulo 3 de Halzen e Martin (1984). Para se demonstrar a equação de KG parte-se da dispersão relativística da energia, dada por

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 . \quad (2.117)$$

Onde p é o momentum de uma partícula e m sua massa. Realizando-se a substituição de operadores diferenciais da MQ $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ e $p \rightarrow -i\nabla$, disponíveis em Eiseberg e Resnick (1979, p. 194), na eq. (2.117), e multiplicando-a por ϕ pela direita, obtém-se

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\nabla^2\phi + m^2\phi . \quad (2.118)$$

Rearranjando a eq. (2.118)

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi . \quad (2.119)$$

Na eq. de KG, o ϕ é o campo que descreve partícula de spin zero, assim no contexto da Teoria Quântica de Campos ϕ é chamada de campo de K.G.. Analogamente à função de onda do formalismo ondulatório Ψ , o campo ϕ descreve o comportamento de uma partícula em um sistema. Reescrevendo a eq. (2.119) com o operador de d'Alembert (vide (2.60))

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 . \quad (2.120)$$

Eis a equação de KG para uma partícula livre. Sua solução é dada por

$$\phi = Ne^{-iP^\mu x_\mu} . \quad (2.121)$$

Onde N é a constante de normalização, P^μ e x_μ são os quadrivetores quadrimomentum e posição-tempo. Tomando-se a eq. (2.118), multiplicando-a por $-i\phi^*$ e subtraindo dela seu complexo conjugado vezes $-i\phi$, obtém-se, de forma compacta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot [-i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0 . \quad (2.122)$$

¹⁷ Os quais podem se apresentar com spin 0 quando o par quark-antiquark do mésons estão com as direções z dos momenta angular de spin antiparalelas.

Denotando-se a densidade de probabilidade $\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)$ e a densidade de fluxo, cuja unidade nesse caso é $\frac{\text{n}^\circ \text{ de partículas}}{\text{área} \cdot \text{segundo}}$, $\vec{j} = -i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$, obtém-se uma equação da continuidade a partir da equação de KG.

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.123)$$

Fluxo é uma grandeza não vetorial que expressa a quantidade de algo (massa, carga, campo, número de partículas, etc.) que atravessa uma determinada superfície por unidade de tempo. Ele tem como dimensões $\frac{\text{quantidade}}{\text{tempo}}$. A densidade de fluxo por sua vez é uma grandeza que expressa a quantidade de algo que atravessa uma dada área por unidade de tempo por unidade de área. A densidade de fluxo é vetorial, tendo direção e sentido determinados por onde a quantidade flui no espaço. A relação entre fluxo e densidade de fluxo é $\Phi = \int_A \vec{\rho} \cdot d\vec{A}$. Onde Φ é o fluxo de algo, $\vec{\rho}$ é uma expressão genérica pra densidade de fluxo e $d\vec{A}$ é um vetor normal à superfície de uma área qualquer A através da qual a quantidade flui.

A eq. (2.123) expressa que uma divergência da densidade do fluxo de partículas ($\nabla \cdot \vec{j}$) positiva, em uma determinada região do espaço, corresponde a variação temporal negativa da densidade de probabilidade de posição de partículas em tal região. Como a densidade de fluxo \vec{j} corresponde a uma quantidade de partículas fluindo no espaço por unidade de área por unidade de tempo, o divergente positivo de \vec{j} em uma dada região do espaço expressa que mais partículas saem da região do que entram, logo o fato disso se equivaler à diminuição da probabilidade de se encontrar partículas na região com o passar do tempo ($-\frac{\partial \rho}{\partial t}$) é coerente e expressa a conservação de probabilidade¹⁸.

Substituindo-se a solução (2.121) na expressão de ρ , obtém-se que

$$\rho = 2E|N|^2. \quad (2.124)$$

O que expressa uma proporcionalidade entre a densidade de probabilidade e a energia. Contudo, pela (2.117) existem soluções negativas de energia, o que impossibilita uma interpretação probabilística de ρ , visto que isso leva a probabilidades negativas. Uma das contribuições de Pauli e Weisskopf para a reinterpretação da equação de KG em 1934 foi uma nova interpretação da densidade de probabilidade e a densidade de fluxo:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow -e\rho \\ \vec{j} &\rightarrow -e\vec{j}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

¹⁸ Uma analogia útil para se pensar a equação da continuidade ($\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$) é imaginar que a densidade de fluxo \vec{j} descreve o trânsito de água que parte de uma torneira acima de um balde de volume V , que está furado. Assim, \vec{j} descreve a quantidade de água que flui no espaço por área por segundo e ρ , nesse caso, diz respeito a quantidade de água por m^3 no balde de volume V . Imaginando-se que inicialmente há uma quantidade de água no balde, conforme a água flui para o mesmo pela torneira tem-se que $\nabla \cdot \vec{j} > 0$, avaliado em V , expressa que há mais quantidade de água saindo pelo buraco do balde do que entrando no mesmo pela torneira. A consequência disso é que com o passar do tempo, a quantidade de água por m^3 dentro de V tenderá a diminuir e eventualmente o balde ficará vazio. É isso que a equação da continuidade expressa.

Que levou ρ a ser interpretado como densidade de carga das partículas, solucionando assim o problema de ρ poder ser negativo. A densidade de fluxo passou a ser interpretada como a corrente elétrica \vec{J} , i.e. cargas por unidade de área por unidade de tempo.

Assim, define-se

$$\begin{aligned}\rho &= -ie \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \\ \vec{J} &= ie(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*).\end{aligned}\tag{2.126}$$

A equação (2.126) pode ser expressa em uma única expressão no formalismo quadrivetorial, com notação de Einstein. Define-se então, o quadrivetor corrente

$$j^\mu = (\rho, \vec{J}),\tag{2.127}$$

j^μ pode ser expresso de forma compacta lançando-se mão da derivada covariante de Lorentz

$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*).\tag{2.128}$$

Além disso, a equação da continuidade (2.123) pode ser escrita de forma covariante usando o quadrivetor corrente (2.127) e a derivada covariante de Lorentz (2.59) como segue

$$\partial_\mu j^\mu = 0.\tag{2.129}$$

2.6.2 Transformações de Calibre.

Nessa subsecção será abordado a transformação de calibre. Tal subsecção foi construída a partir das seção 10.1 do capítulo 10 de Griffiths (2011a).

As equação de Maxwell (2.130)–(2.133), em unidades naturais, são

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \tag{2.130} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.132}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.131} \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{2.133}$$

É sabido que o campo magnético pode ser escrito por intermédio do vetor potencial magnético \vec{A} , a partir da expressão

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.\tag{2.134}$$

Ao substituir-se (2.134) na lei de Faraday (2.132) obtém-se uma expressão para \vec{E} em termos de A e da energia potencial elétrica por unidade carga Φ , dada por

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\tag{2.135}$$

Assim, \vec{A} e Φ são objetos que caracterizam \vec{E} e \vec{B} . Transformações de calibre, são mudanças realizadas em \vec{A} e Φ que mantém os campos magnético e elétrico, dados por (2.134) e (2.135) inalterados. Trata-se de uma simetria, isto é, uma transformação (no presente caso, uma mudança em \vec{A} e Φ) que não altera o objeto de interesse (\vec{B} e \vec{E}). Mudanças que mantém objetos de interesse invariantes são de grande interesse para a Física, pois existe uma conexão entre propriedades de simetria e grandezas conservadas (LEMOS, 2013, p. 71), e.g. conservação de energia está relacionada a invariância do sistema sob translações temporais, conservação de momentum está relacionada com invariância do sistema sob translações espaciais, e assim por diante. No MP as simetrias desempenham um importante papel, estando em paralelo com seu desenvolvimento (OERTER, 2006, p. 13).

A simetria de transformação de calibre está relacionada com a conservação das correntes das partículas \vec{J} (EPSTEIN, 1973, p. 1592). Tal transformação é dada tomando-se

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (2.136)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \lambda. \quad (2.137)$$

Onde λ é uma função arbitrária. A escolha de λ pode ser realizada buscando-se satisfazer qualquer condição desejada sobre o divergente de \vec{A} , de modo que há várias escolhas possíveis de λ chamadas de calibres. Um exemplo é o calibre de Lorentz, no qual toma-se λ de modo a satisfazer a expressão

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.138)$$

O calibre de Lorentz (2.138) é relevante, pois a partir dele pode-se obter expressões úteis para o desenvolvimento da QED. Pode-se assim, utilizar o mesmo para se anular o termo dentro do parenteses da direita na expressão

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\vec{J}. \quad (2.139)$$

A qual pode ser obtida fazendo-se (2.134) em (2.133) e usando a propriedade $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. Com o calibre de Lorentz a eq. (2.139) se reduz à

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{J}. \quad (2.140)$$

Pode-se obter uma expressão análoga à (2.140) para Φ fazendo-se (2.135) em (2.130) e usando o calibre de Lorentz

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho. \quad (2.141)$$

O calibre de Lorentz possibilitou a obtenção das expressões (2.140) e (2.141), as quais podem ser reescritas em uma única expressão usando notação de Einstein para quadrivetores.

Multiplicando-se (2.140) e (2.141) por -1

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = \rho, \quad (2.142)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}. \quad (2.143)$$

Agora, lançando mão da definição do operador de d'Alembert (2.60)

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = \rho, \quad (2.144)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = \vec{J}. \quad (2.145)$$

Pode-se reduzir as eq. (2.144) e (2.145) a uma única equação definindo-se o quadri-
vetor potencial A^μ , cujas componentes são dadas por

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}), \quad (2.146)$$

e lançando mão do quadri-
vetor corrente j^μ (vide (2.127)) é possível sintetizar (2.144) e (2.145) em

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = j^\mu. \quad (2.147)$$

A partir da eq. (2.147) pode-se recuperar duas das quatro equações de Maxwell (eq. (2.130) e (2.133)) escritas com o calibre de Lorentz.

Na eq. (2.147) a componente zero é a eq. (2.144) e a componente espacial é a eq. (2.145). A partir da definição do quadri-
vetor potencial eletromagnético A^μ , pode-se escrever a transformação de calibre dada por (2.136) e (2.137) de forma reduzida como

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda. \quad (2.148)$$

E por intermédio de A^μ o calibre de Lorentz (2.138) fica

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.149)$$

A expressão (2.147), qual leva em consideração o calibre de Lorentz, será empregada na próxima seção (2.6.3) para o estudo da equação de KG com potencial.

2.6.3 Equação de Klein-Gordon invariante sob transformações de calibre.

Nessa subsecção a equação de KG será estudada a partir da introdução do potencial eletromagnético $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, dado pela eq. (2.146), a fim de descrever uma partícula carregada interagente. Para a elaboração da mesma foram seguidas as seções 4.1 e 4.2 do capítulo 4 de Halzen e Martin (1984).

A forma correta de introduzir A^μ é tal que a equação de K.G. permaneça invariante sob as transformações de calibre. Para tal, toma-se a seguinte substituição no operador da derivada covariante de Lorentz

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu - ieA^\mu . \quad (2.150)$$

A demonstração de que a transformação (2.150) torna a equação de KG invariante sob transformações de calibre se encontra no apêndice (A). Substituindo-se (2.150) na equação de KG (2.120) obtém-se

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = -V\phi . \quad (2.151)$$

Com V sendo o termo de interação, não se tratando da energia potencial do sistema – que nesse caso é dada por A^μ . O termo V governa a forma como a interação ente as partículas ocorre no espalhamento.

O termo V , introduzido a partir de (2.151), é dado por

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 . \quad (2.152)$$

O termo de interação do sistema V está escrito em termos da carga elétrica elementar e , que é um termo muito pequeno (da ordem de magnitude de 10^{-19}). Tendo isso em vista, pode-se aproximar o potencial apenas pelo termo de ordem um em e , desprezando o termo com e^2

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) . \quad (2.153)$$

Pode-se substituir o termo de interação na amplitude de transição T_{fi} de ordem um em V ¹⁹ obtida em (2.88). Embora essa expressão de T_{fi} , dada por (2.88), tenha sido demonstrada via equação de Schrödinger²⁰, é possível mostrar, de forma análoga, que tal expressão de T_{fi} também é obtida para a equação de KG. Assim,

$$T_{fi} = i \int_{\mathbf{x}} [\phi_f(\mathbf{x})]^* ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) [\phi_i(\mathbf{x})] d^4 \mathbf{x} . \quad (2.154)$$

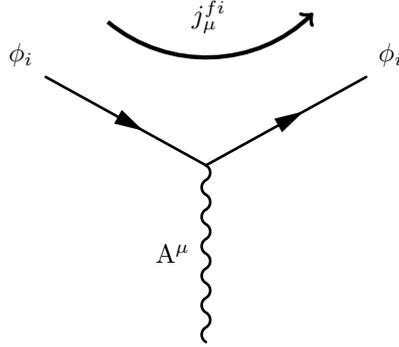
A amplitude (2.154) está em ordem um de e , e diz respeito a um diagrama de Feynman de ordem um em e , análogo ao diagrama de ordem um em V da figura (5). A diferença é que

¹⁹ Mesmo que a expressão (2.88) esteja escrita em termos de uma energia potencial V , pode-se realizar uma transposição da mesma para o caso da equação de KG, visto que neste a o termo de interação desempenha um papel idêntico a energia potencial do sistema, no sentido de espalhar a partícula.

²⁰ Que tem derivada temporal de ordem 1, diferente da equação de KG, cuja derivada temporal é de ordem 2.

nesse diagrama, feito a partir da equação de KG, o termo de interação (que desempenha o papel análogo ao potencial) está explícito em termos do operador de d'Alembert e a carga elementar e . A representação do diagrama que diz respeito ao T_{fi} de (2.154) é dado pela figura (6)

Figura 6 – Diagramas de Feynman de primeira de ordem um em e .



Adaptado de : [Tex.stackexchange \(2013\)](#).

Na figura (6) o quadrivetor potencial eletromagnético A^μ é representado como um fóton, que faz a partícula evoluir do estado representado pelo campo ϕ_i para o estado representado pelo campo ϕ_f . O termo j_μ^{fi} é a corrente de transição, i.e. a corrente quadrivetorial que representa a transição da partícula de $i \rightarrow f$.

Ao desenvolver-se a integral de (2.154), verifica-se que a mesma se divide em uma soma de duas integrais. Pode-se resolver a integral da primeira soma

$$\int_{\mathbf{x}} [\phi_f]^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4 \mathbf{x} , \quad (2.155)$$

lançando-se mão da integração por partes com $u = [\phi_f]^*$ e $dv = \partial_\mu (A^\mu \phi_i)$ e com intervalo de integração de $-\infty$ até ∞ , assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\phi_f]^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4 \mathbf{x} = [\phi_f]^* A^\mu \phi_i \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_\mu [\phi_f]^*) A^\mu \phi_i d^4 \mathbf{x} . \quad (2.156)$$

Considerando que o termo $[\phi_f]^* A^\mu \phi_i \Big|_{-\infty}^{\infty}$ vai a zero em (2.156), pois A^μ vai a zero no infinito, e substituindo tal resultado em (2.154), obtém-se

$$T_{fi} = -i^2 e \left(\int_{\mathbf{x}} (\partial_\mu [\phi_f]^*) A^\mu \phi_i d^4 \mathbf{x} \right) + i^2 e \left(\int_{\mathbf{x}} [\phi_f]^* A^\mu (\partial_\mu \phi_i) d^4 \mathbf{x} \right) . \quad (2.157)$$

Fatorando A^μ , que é um objeto que comuta com todos os outros objetos de (2.157)

$$T_{fi} = iA^\mu \left(ie \int_{\mathbf{x}} [\phi_f]^* (\partial_\mu \phi_i) d^4 \mathbf{x} - ei \int_{\mathbf{x}} (\partial_\mu [\phi_f]^*) \phi_i d^4 \mathbf{x} \right). \quad (2.158)$$

Reescrevendo (2.158) como

$$T_{fi} = -iA^\mu \int_{\mathbf{x}} -ie([\phi_f]^* (\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu [\phi_f]^*) \phi_i) d^4 \mathbf{x}. \quad (2.159)$$

É perceptível que o termo $-ie([\phi_f]^* (\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu [\phi_f]^*) \phi_i)$ tem a mesma forma que o quadrivetor corrente obtido em (2.128). Assim, lançando mão da eq. (2.128), escreve-se tal termo como j_μ^{fi} , que é chamado de corrente de transição, i.e. o quadrivetor corrente que expressa a evolução da partícula espalhada de $i \rightarrow f$,

$$T_{fi} = -i \int_{\mathbf{x}} A^\mu j_\mu^{fi} d^4 \mathbf{x}. \quad (2.160)$$

Eis a expressão que relaciona a corrente de transição j_μ^{fi} com a amplitude de transição. A corrente de transição

$$j_\mu^{fi} = -ie([\phi_f]^* (\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu [\phi_f]^*) \phi_i). \quad (2.161)$$

pode ser escrita em termos da solução da equação de KG para partícula livre (2.121). Ao se derivar a solução (2.121) com o operador da derivada covariante deve-se levar em consideração que ∂_μ deriva apenas com respeito as componentes do quadrivetor x^μ , assim

$$\partial_\nu \phi = \partial_\nu N e^{-iP_\mu x^\mu} = -iN P_\mu e^{-iP_\mu x^\mu}. \quad (2.162)$$

Além disso, a (2.162) possui quatro componentes, uma para cada componente do quadrivetor, isto é

$$\begin{aligned} & N \partial_\nu e^{-iP_\mu x^\mu} : \\ & N \frac{\partial}{\partial t} e^{-iP^0 x^0} = -iN P^0 e^{-iP^0 x^0}, \quad \text{para a parte temporal;} \\ & N \frac{\partial}{\partial x^1} e^{iP^1 x^1} = iN P^1 e^{iP^1 x^1}, \quad \text{para a parte espacial } x^1; \\ & N \frac{\partial}{\partial x^2} e^{iP^2 x^2} = iN P^2 e^{iP^2 x^2}, \quad \text{para a parte espacial } x^2; \\ & N \frac{\partial}{\partial x^3} e^{iP^3 x^3} = iN P^3 e^{iP^3 x^3}, \quad \text{para a parte espacial } x^3. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Levando-se em consideração (2.162), a (2.161) fica

$$j_\mu^{fi} = -eN_i N_f (P_i + P_f)_\mu e^{i(P_f - P_i)_\mu x^\mu}. \quad (2.164)$$

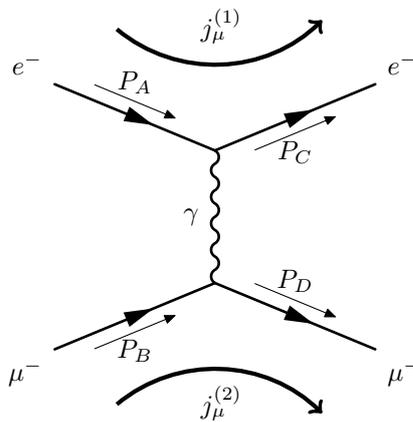
Analogamente ao caso da solução da equação de Schrödinger (2.70), o fato da corrente de transição ter sido escrita com uma solução da partícula livre no estado inicial e uma solução da partícula livre no estado final indica que a partícula é espalhada de um estado

descrito pela solução de partícula livre em i para um estado descrito pela solução de partícula livre em f .

É possível escrever o termo de ordem dois em e para T_{fi} ao se escrever o termo A^μ em (2.160) em função da corrente de transição j_μ^{fi} de uma segunda partícula que gera o A^μ . Para tal, considera-se inicialmente um espalhamento auxiliar e um diagrama de Feynman auxiliar a partir dos quais serão feitos os cálculos. O diagrama de Feynman correspondente a ordem dois (em e) da amplitude de transição para o espalhamento de um e^- por um μ^- . Esse é dado pela figura (7) e representa o espalhamento

$$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^- . \quad (2.165)$$

Figura 7 – Diagrama de Feynman para o espalhamento (2.165).



Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/cms/wiki) (2021).

O diagrama dado pela figura (7), associa uma corrente de transição $j_\mu^{(1)}$ ao elétron e uma corrente de transição $j_\mu^{(2)}$ ao múon. Além disso, tais partículas portam quadrimomenta iniciais e finais P_A e P_C , para o caso do e^- , e P_B e P_D no caso do μ^- .

O diagrama (7) é uma junção de outro vértice de partícula ao diagrama (6). O potencial eletromagnético A^μ é gerado pela presença do múon que espalha o elétron por intermédio da troca de um fóton γ . Analogamente ao caso do diagrama da figura (6), no diagrama (7), o γ passa a representar a ação do potencial eletromagnético A^μ , visto que o fóton é um quantum do campo eletromagnético.

Para escrever A^μ em termos de $j_\mu^{(2)}$ lança-se mão da expressão (2.147), a qual foi demonstrada lançando-se mão do calibre de Lorentz.

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = j_\mu^{(2)} . \quad (2.166)$$

Uma solução de A^μ para (2.166) é dada por

$$, A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad (2.167)$$

com $q = P_D - P_B$. Para obter-se (2.167), basta tomar $A^\mu = \epsilon^\mu e^{-iq^\mu x_\mu}$ onde ϵ^μ é a polarização do fóton (a temática de polarização do fóton é tratada na subseção (2.7.1)).

Assumindo-se que a corrente em (2.160) é a corrente do elétron j_μ^1

$$T_{fi} = \int_{\mathbf{x}} -i A^\mu j_\mu^{(1)} d^4 \mathbf{x} . \quad (2.168)$$

Substituindo (2.167) em (2.168)

$$T_{fi} = -i \int_{\mathbf{x}} j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu d^4 \mathbf{x} . \quad (2.169)$$

A expressão para a corrente do múon é análoga à do elétron (2.164)

$$j_{(2)}^\mu = -e N_B N_D (P_D + P_B)^\mu e^{i(P_D - P_B)^\mu x_\mu} . \quad (2.170)$$

Fazendo $i \rightarrow A$ e $f \rightarrow C$ na corrente do elétron (2.164), e substituindo-a, juntamente com (2.170), em (2.169)

$$T_{fi} = -i \int_{\mathbf{x}} (-e N_A N_C (P_A + P_C)_\mu e^{i(P_C - P_A)^\mu x_\mu}) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e N_B N_D (P_D + P_B)^\mu e^{i(P_D - P_B)^\mu x_\mu}) d^4 \mathbf{x} . \quad (2.171)$$

Reorganizando (2.171) e somando os termos das exponenciais

$$T_{fi} = -i N_A N_C N_B N_D e (P_A + P_C)_\mu \left(\frac{-1}{q^2} \right) e (P_D + P_B)^\mu \int_{\mathbf{x}} e^{i(P_C - P_A + P_D - P_B)^\mu x_\mu} d^4 \mathbf{x} . \quad (2.172)$$

Embora na (2.171) houvesse uma exponencial elevada a $P_\mu x^\mu$ e outra elevada a $P^\mu x_\mu$, foi possível somar os expoentes dessas exponenciais, visto que $P_\mu x^\mu = P^\mu x_\mu$.

A exponencial em (2.172) pode ser escrita como

$$\int_{\mathbf{x}} e^{i(P_C - P_A + P_D - P_B)^\mu x_\mu} d^4 \mathbf{x} = \int_{x^0} e^{i(P_C - P_A + P_D - P_B)^0 x^0} dx^0 \int_{x^1} e^{-i(P_C - P_A + P_D - P_B)^1 x^1} dx^1 \int_{x^2} e^{-i(P_C - P_A + P_D - P_B)^2 x^2} dx^2 \int_{x^3} e^{-i(P_C - P_A + P_D - P_B)^3 x^3} dx^3 . \quad (2.173)$$

Com os intervalos de integração dessas integrais indo de $-\infty$ até ∞ cada uma dessas integrais resulta em uma delta de Dirac

$$\int_{\mathbf{x}} e^{i(P_C - P_A + P_D - P_B)^\mu x_\mu} d^4 \mathbf{x} = 2\pi \delta(i(P_C^0 - P_A^0 + P_D^0 - P_B^0)) 2\pi \delta(-i(P_C^1 - P_A^1 + P_D^1 - P_B^1)) 2\pi \delta(-i(P_C^2 - P_A^2 + P_D^2 - P_B^2)) 2\pi \delta(-i(P_C^3 - P_A^3 + P_D^3 - P_B^3)) . \quad (2.174)$$

Lançando-se mão do fato de que (vide (GRIFFITHS, 2008, p. 425))

$$\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}. \quad (2.175)$$

Tem-se que

$$\int_{\mathbf{x}} e^{i(P_C - P_A + P_D - P_B)^\mu x_\mu} d^4 \mathbf{x} = 2\pi\delta(P_C^0 - P_A^0 + P_D^0 - P_B^0)2\pi\delta(P_C^1 - P_A^1 + P_D^1 - P_B^1) \quad (2.176)$$

$$2\pi\delta(P_C^2 - P_A^2 + P_D^2 - P_B^2)2\pi\delta(P_C^3 - P_A^3 + P_D^3 - P_B^3),$$

visto que módulo de i e $-i$ é um (basta tomar $x = 0$ e $y = \pm 1$ em $z = x + yi$ tal que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (AVILA, 2008, p. 6)).

Escrevendo o produto das deltas em (2.176) como

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B) = 2\pi\delta(P_C^0 - P_A^0 + P_D^0 - P_B^0)2\pi\delta(P_C^1 - P_A^1 + P_D^1 - P_B^1) \quad (2.177)$$

$$2\pi\delta(P_C^2 - P_A^2 + P_D^2 - P_B^2)2\pi\delta(P_C^3 - P_A^3 + P_D^3 - P_B^3).$$

A eq. (2.177) é o análogo quadridimensional de $\delta(\vec{r})$, qual pode ser escrita como $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ (GRIFFITHS, 2008, p. 427). Embora em (2.177), no lado esquerdo os quadrimomenta estão escritos em notação independente de base, no lado direito os termos que constam dentro de cada delta são as componentes (0,1,2,3) dos mesmos.

Substituindo-se (2.177) em (2.172), obtém-se

$$T_{fi} = -iN_A N_C N_B N_D e(P_A + P_C)_\mu \left(\frac{-1}{q^2} \right) e(P_D + P_B)^\mu (2\pi)^4 \delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B). \quad (2.178)$$

Escrevendo de forma mais compacta

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^4(P_D + P_C - P_B - P_A) \mathfrak{M}. \quad (2.179)$$

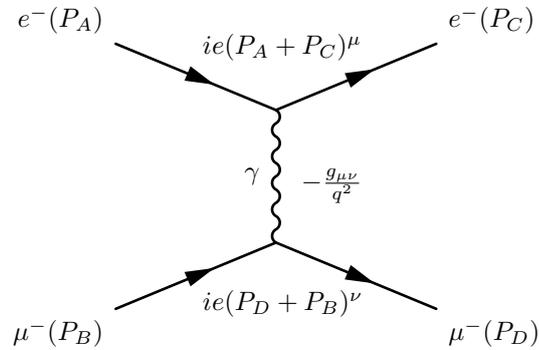
Onde \mathfrak{M} é a amplitude invariante, uma variável de interesse dada por

$$-i\mathfrak{M} = (ie(P_A + P_C)^\mu) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie(P_B + P_D)^\nu). \quad (2.180)$$

As T_{fi} obtidas em (2.160) e (2.178) são invariantes sob transformações de Lorentz, visto que envolvem produtos internos na notação de Einstein.

A (2.178) é um termo de ordem dois da expansão perturbativa de T_{fi} em função de e , e está associada ao diagrama de Feynman de ordem dois em e , dado pela figura (7). A partir do resultado (2.178), pode-se construir uma figura como (5), que especifica as contribuições de cada termo do diagrama para a amplitude de transição. Feito isto, as contribuições de cada termo do diagrama de Feynman para a amplitude de transição (2.178) estão expostos na figura (8).

Figura 8 – Diagrama de Feynman de primeira de ordem em e e suas contribuições no computo de amplitude de transição.



Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/cms/wiki/) (2021).

Nesse caso, pode-se observar que cada vértice contribui com um termo $ie(P_i + P_f)^\mu$ e o estado intermediário representado pelo fóton contribui com um termo $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$. Apesar do T_{fi} de ordem dois obtido via equação de KG ser diferente do T_{fi} de ordem dois para equação de Schrödinger, o diagrama (8) é análogo ao diagrama de ordem dois da figura (5), pois nele há um estado intermediário, representado pelo fóton, bem como um estado inicial i e final f . O estado inicial i é dado pelo μ^- com P_B e pelo e^- com P_A e o estado final f é dado pelo μ^- com P_D e pelo e^- com P_C . A diferença é que o diagrama da figura (8) contribui com termos de $ie(P_i + P_f)^\mu$ e $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$, além de ter os estados i e f ocupados por duas partículas, ao passo que o diagrama de ordem dois da figura (5) contribui com potenciais V e $\frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon}$, e tem os estados i e f ocupado por uma partícula.

Assim como no caso da equação de Schrödinger, um maior número de estados intermediário no diagrama de Feynman levaria a termos de série perturbativa de maior ordem.

Uma leitura e análise do diagrama da figura (7), levando-se em conta como cada elemento do diagrama contribui para a amplitude de transição, permite a obtenção de \mathfrak{M} ao qual ele corresponde. Nessa subseção limitou-se a explicar como o diagrama se relaciona com a amplitude invariante. Detalhes de como se lê diagramas usando regras de Feynman para a obtenção de termos de T_{fi} serão dados no capítulo de Aplicação das teorias (3).

Embora a expressão (2.178) tenha sido obtida a partir do espalhamento (2.165), ela se aplica para qualquer espalhamento. Poder-se-ia obter a mesma amplitude de transição caso fosse tomado a corrente do elétron como geradora do potencial A^μ que espalha o μ^-

2.6.4 A seção de choque em termos da amplitude invariante \mathfrak{M} .

Essa subseção demonstrará a obtenção do observável seção de choque σ em termos da amplitude invariante \mathfrak{M} . Tendo sido elaborada a partir da seção 4.3 do capítulo 4 de Halzen e Martin (1984).

Comparando-se o diagrama da figura (8) com as eq. (2.178) e (2.180) faz-se possível perceber que os diagramas de Feynman servem para computar diretamente a amplitude invariante \mathfrak{M} , que é parte da amplitude de transição T_{fi} . Na realidade, para fins de obtenção de observáveis, \mathfrak{M} é mais relevante que T_{fi} , sendo essencial no cálculo da seção de choque, por exemplo.

\mathfrak{M} é invariante sob transformações de Lorentz e ela multiplicada pelo seu complexo conjugado, i.e. $|\mathfrak{M}|^2$, é uma função densidade de probabilidade (*probability density function* - pdf) associada a algum parâmetro. Ela pode ser parametrizada por várias quantidades, como os ângulos que definem a direção do momentum das partículas espalhadas.

Para encontrar a relação da amplitude invariante com a seção de choque é necessário retomar a solução da equação de KG para a partícula livre (2.121), e ajustar a constante de normalização N da mesma. O ρ associado a tal solução, dado por (2.124), sob a reinterpretção de de Pauli e Weisskopf significa número de partículas por unidade de volume. Com isso, ρd^3x passa a significar o número de partículas dentro do volume dado pelo elemento d^3x . Desse modo, para um volume arbitrário V

$$\int_V \rho dV = \# \text{ partículas dentro de } V. \quad (2.181)$$

Impondo-se que dentro de um volume arbitrário V há $\frac{2E}{m}$ partículas de massa m , determina-se a constante N substituindo-se (2.124) em (2.181)

$$\int_V 2E|N|^2 dV = \frac{2E}{m}. \quad (2.182)$$

A integral (2.182) é trivial e dela segue-se que

$$N = \frac{1}{\sqrt{Vm}}. \quad (2.183)$$

Considerando-se agora um espalhamento do tipo

$$A + B \rightarrow C + D. \quad (2.184)$$

Escreve-se a transição de probabilidade por tempo e volume para tal espalhamento W como sendo

$$W = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}. \quad (2.185)$$

A expressão (2.185) é a mesma que (2.95), a única diferença é o termo V no denominador. O V no denominador decorre do fato de que T_{fi} associado a equação de KG (2.179) possui

uma delta de Dirac para conservação dos momenta espaciais, o que elimina a incerteza no momentum e faz a incerteza da posição (x,y e z) tender ao infinito, vide princípio da incerteza posição-momentum. Assim como a delta da energia em (2.91) fez o intervalo de tempo entre os estados i e f tender ao infinito, a delta dos quadrimomenta em (2.179) faz o intervalo de tempo entre os estados i e f tender ao infinito e faz os intervalos espaciais ocupados pelas partículas, Δx , Δy e Δz , entre os estados i e f fiquem impossíveis de serem determinados. Isso faz com que o volume ocupado pelas partículas durante a transição $i \rightarrow f$ seja indeterminado também. Assim, uma forma de se resolver o problema do intervalo de tempo infinito entre os estados e o volume indeterminado na eq. (2.179) em decorrência da $\delta^4((P_C - P_A + P_D - P_B)^\mu)$ é tomar a W dada pela eq.(2.185).

O termo $|T_{fi}|^2$, na (2.185) é dado multiplicando-se (2.179) pelo seu complexo conjugado, que resulta em

$$|T_{fi}|^2 = N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2 (2\pi)^8 (\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B))^2 |\mathfrak{M}|^2. \quad (2.186)$$

Escrevendo-se $(2\pi)^8 (\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B))^2$ por intermédio de (2.177)

$$(2\pi)^8 (\delta^4((P_C - P_A + P_D - P_B)^\mu))^2 = [2\pi\delta(P_C^0 - P_A^0 + P_D^0 - P_B^0)]^2 [2\pi\delta(P_C^1 - P_A^1 + P_D^1 - P_B^1)]^2 \\ [2\pi\delta(P_C^2 - P_A^2 + P_D^2 - P_B^2)]^2 [2\pi\delta(P_C^3 - P_A^3 + P_D^3 - P_B^3)]^2. \quad (2.187)$$

Escrevendo-se cada termo quadrático de (2.187) de forma semelhante à

$$(2\pi\delta(b-a))^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K/2}^{K/2} e^{ix(b-a)} dx (2\pi\delta(b-a)). \quad (2.188)$$

Tem-se que

$$(2\pi)^8 (\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B))^2 = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(P_C - P_A + P_D - P_B)^0 x^0} dx^0 \right) (2\pi\delta(P_C^0 - P_A^0 + P_D^0 - P_B^0)) \\ \left(\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X/2}^{X/2} e^{-i(P_C - P_A + P_D - P_B)^1 x^1} dx^1 \right) (2\pi\delta(P_C^1 - P_A^1 + P_D^1 - P_B^1)) \\ \left(\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{-Y/2}^{Y/2} e^{-i(P_C - P_A + P_D - P_B)^2 x^2} dx^2 \right) (2\pi\delta(P_C^2 - P_A^2 + P_D^2 - P_B^2)) \\ \left(\lim_{Z \rightarrow \infty} \int_{-Z/2}^{Z/2} e^{-i(P_C - P_A + P_D - P_B)^3 x^3} dx^3 \right) (2\pi\delta(P_C^3 - P_A^3 + P_D^3 - P_B^3)). \quad (2.189)$$

Fazendo-se como feito na expressão (2.99), na qual utilizou-se a propriedade da filtragem da delta sem usar a integral e integrando os exponenciais.

$$(2\pi)^8 (\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B))^2 = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} T \right) (2\pi\delta(P_C^0 - P_A^0 + P_D^0 - P_B^0)) \\ \left(\lim_{X \rightarrow \infty} X \right) (2\pi\delta(P_C^1 - P_A^1 + P_D^1 - P_B^1)) \left(\lim_{Y \rightarrow \infty} Y \right) (2\pi\delta(P_C^2 - P_A^2 + P_D^2 - P_B^2)) \\ \left(\lim_{Z \rightarrow \infty} Z \right) (2\pi\delta(P_C^3 - P_A^3 + P_D^3 - P_B^3)). \quad (2.190)$$

Tomando-se X , Y e Z como sendo intervalos espaciais ocupados pelas partículas, tal que $XYZ = V$, pode-se reescrever

$$(2\pi)^8(\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B))^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} TV(2\pi)^4\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B). \quad (2.191)$$

Substituindo-se (2.191) em (2.186)

$$|T_{fi}|^2 = N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2 |\mathfrak{M}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} TV(2\pi)^4\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B). \quad (2.192)$$

Substituindo-se (2.192) em (2.185)

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2 |\mathfrak{M}|^2 TV(2\pi)^4\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B)}{TV}. \quad (2.193)$$

Simplificando-se (2.193)

$$W = N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2 |\mathfrak{M}|^2 (2\pi)^4\delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B). \quad (2.194)$$

Considerando-se um espalhamento do tipo (2.184), com um feixe de partículas A incidindo sobre um alvo estacionário composto por partículas B , tem-se que n_S é o número de espalhamentos (interações de A com B que resultam em $A + B \rightarrow C + D$) por unidade de tempo em um dado volume. O número de partículas B por volume no alvo é n_B e o número de partículas do feixe que atravessam uma área unitária perpendicular à velocidade do feixe v_A por unidade de tempo é igual ao fluxo do feixe, dado por $F = n_A v_A$, com n_A sendo o número de partículas por unidade de volume do feixe.

O número de espalhamentos n_S se relaciona com o fluxo do feixe $n_A v_A$ e o número de partículas do alvo n_B por intermédio de uma constante de proporcionalidade σ . Escrevendo-se em termos matemáticos

$$n_S = \sigma n_B (n_A v_A). \quad (2.195)$$

Onde σ é chamada seção de choque. O termo n_S pode ser escrito como

$$n_S = \frac{[\# \text{ estados finais acessíveis às partículas resultantes do espalhamento}]}{[\text{Transição de probabilidade por unidade de tempo}]}. \quad (2.196)$$

É sabido que a transição de probabilidade por unidade de tempo é dada pela eq. (2.95), assim

$$n_S = \frac{[\# \text{ estados finais acessíveis às partículas resultantes do espalhamento}]}{n_B (n_A v_A)} \cdot W. \quad (2.197)$$

Substituindo-se (2.197) em (2.195) e resolvendo para σ

$$\sigma = \frac{[\# \text{ estados finais acessíveis às partículas resultantes do espalhamento}] \cdot W}{n_B (n_A v_A)}. \quad (2.198)$$

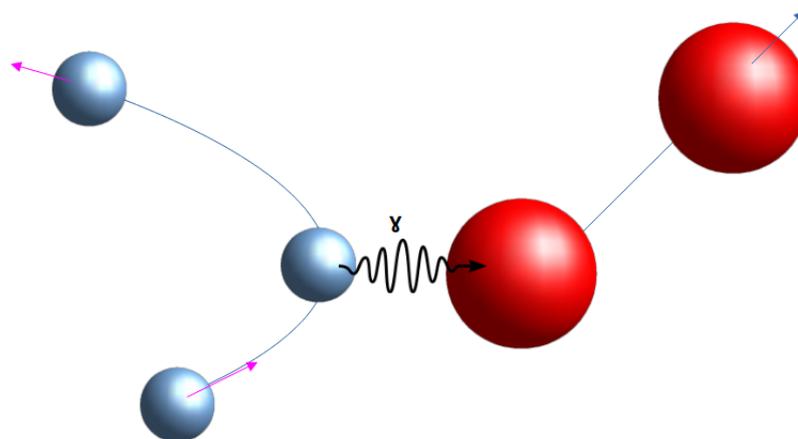
Antes de retomar a eq. (2.198), é necessário discorrer a respeito do significado da grandeza σ .

A seção de choque σ é uma quantidade em unidades de área, proporcional à probabilidade do espalhamento acontecer, com respeito a probabilidade não acontecer. Devido a essa proporcionalidade, comumente afirma-se que essa quantidade representa a probabilidade intrínseca de um dado espalhamento. É importante deixar claro que σ é proporcional a essa probabilidade, mas não é a probabilidade em si, visto que a seção de choque tem unidades de área.

De forma simples, pode-se pensar em σ como sendo a área do alvo que se apresenta ao feixe (GRIFFITHS, 2008, p. 199), desse modo quanto maior for σ , maior será a probabilidade da interação acontecer. Em uma interação em que duas partículas, ou dois feixes de partículas, lançam-se uma sobre a outra a seção de choque é a área efetiva, área de contato, de interação entre as partículas, ou entre as partículas do feixe.

Essa é uma analogia clássica, para fins heurísticos, que serve para se conceber o sentido da seção de choque. No entanto, ela é equivocada no âmbito das interações entre partículas elementares, visto que partículas elementares ao interagirem não se tocam ou colidem-se como bolas de bilhar, na verdade elas apenas interagem via troca de partículas mediadoras (ver figura (9)). É mais correto, portanto, pensar em σ como sendo uma constante de proporcionalidade entre o fluxo inicial de partículas, o número de partículas no alvo e o número de espalhamentos, que tem unidades de área e representa a probabilidade intrínseca de um espalhamento.

Figura 9 – Representação da interação entre duas partículas.



Elaborado pelo autor.

Outra grandeza relevante é a seção de choque diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Classicamente, pensando que as partículas interagem como bolas de bilhar, a seção de choque diferencial

seria a área de interação entre tais partículas de modo que os produtos das interações fossem espalhados em uma determinada direção no espaço delimitada pelo ângulo sólido $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, em coordenadas esféricas.

No entanto, essa analogia clássica não é verossímil para partículas elementares. Assim, restringe-se a uma interpretação que considera $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ como sendo a distribuição de seção de choque σ por ângulo θ ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$ tem simetria azimutal, i.e. é igual para qualquer ângulo ϕ). Logo, nas regiões do espaço descritas por Ω nas quais $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ for maior, maior será a probabilidade da interação ocorrer espalhando partículas em tais regiões.

A seção de choque diferencial tem tal significado, pois ela é proporcional ao módulo ao quadrado da amplitude invariante \mathfrak{M} – conforme será mostrado adiante –, que é uma pdf associada a algum parâmetro, como o ângulo de espalhamento dos produtos de uma interação θ . Como $|\mathfrak{M}(\theta)|^2$ expressa a probabilidade de se encontrar produtos do espalhamento por ângulo θ , então $\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ integrada entre intervalos angulares θ e ϕ desejados é proporcional a probabilidade da interação ocorrer espalhando partículas na direção do espaço definida por tais intervalos angulares. Varrendo todo o espaço na integral de $\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ obtém-se σ .

Retomando a eq. (2.198), pode-se obter o # estados finais acessíveis às partículas lançando-se mão do resultado da MQ que diz que o número de estados acessíveis a uma partícula, em uma caixa com volume V e com momentum espacial entre $|\vec{p}|$ e $|\vec{p}| + d^3|\vec{p}|$, é dado por

$$\# \text{ estados finais acessíveis dentro da caixa com volume } V = \frac{V d^3|\vec{p}|}{(2\pi)^3}. \quad (2.199)$$

Como no volume V há $\frac{2E}{m}$ partículas, dividindo-se (2.199) pelo número de partículas obtém-se o # estados finais acessíveis por partícula. Levando em consideração que no espalhamento estudado duas partículas (C e D) são espalhadas, tem-se que o # estados finais acessíveis às partículas resultantes do espalhamento, por partícula, (o qual será chamado de ζ) é o produto do # estados finais acessíveis dentro da caixa, por partícula, para cada partícula, i.e.

$$\zeta = \left(\frac{V d^3|\vec{p}_C| m_C}{(2\pi)^3 2E_C} \right) \left(\frac{V d^3|\vec{p}_D| m_D}{(2\pi)^3 2E_D} \right). \quad (2.200)$$

Considerando-se que o espalhamento (2.184) acontece com o alvo, composto pelas partículas B , estacionário sendo atingido por um feixe de partículas A , tem-se que o número de partículas por volume n_A do feixe é dado por,

$$n_A = \frac{2E_A}{V m_A}. \quad (2.201)$$

Deste modo, o fluxo do feixe F é dado por

$$F = v_A \frac{2E_A}{V m_A}. \quad (2.202)$$

Analogamente à (2.201), o número de partículas por volume no alvo n_B é dado por

$$n_B = \frac{2E_B}{Vm_B}. \quad (2.203)$$

Substituindo-se (2.194), (2.200), (2.201) e (2.203) em (2.198)

$$d\sigma = \frac{N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2}{v_a 2E_A 2E_B} |\mathfrak{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B) \frac{V d^3|\vec{p}_C|}{2E_C} \frac{V d^3|\vec{p}_D|}{2E_D} V^2 m_A m_B m_C m_D. \quad (2.204)$$

Na expressão (2.204) $|\vec{p}|$ é módulo de momentum espacial e P o quadrimomentum expresso na notação independente de base, é importante deixar essa diferença notacional clara para evitar confusão. Substituindo-se (2.183) em (2.204)

$$d\sigma = \frac{V^2}{v_a 2E_A 2E_B} \frac{m_A m_B m_C m_D}{V^4 m_A m_B m_C m_D} |\mathfrak{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^4(P_C - P_A + P_D - P_B) \frac{V d^3|\vec{p}_C|}{2E_C} \frac{V d^3|\vec{p}_D|}{2E_D}. \quad (2.205)$$

É possível verificar que a normalização em termos de Vm desaparece em (2.205). A expressão está escrita em forma diferencial, pois as partículas espalhadas ocupam estados associados à $d^3|\vec{p}|$. A seção de choque σ é obtida ao se integrar sobre todo o espaço a seção de choque diferencial, a qual será obtida em seguida, a partir de (2.205).

A expressão (2.205) ser inversamente proporcional à velocidade do feixe v_A faz sentido, pois segundo Griffiths (2008, p. 199) em uma noção mais elementar de σ , pode-se esperar que essa probabilidade intrínseca do espalhamento ocorrer tenda a ser maior conforme maior for o tempo que as partículas incidentes passem nas vizinhanças do alvo. Isso quer dizer que a seção de choque deve ser inversamente proporcional à velocidade do feixe de partículas.

Apesar dessa expectativa, na realidade o comportamento da seção de choque é drasticamente modificado nas vizinhanças de valores de energia que se igualem aos valores de energia mínimos para se produzir “ressonâncias hadrônicas”. Quando a energia do feixe passa por um valor de energia no qual partículas do feixe e do alvo tendem a interagir, estados ligados de vida muito curta, i.e. ressonâncias hadrônicas, são criados. Em um gráfico de seção de choque por velocidade do feixe ou energia do feixe as ressonâncias aparecem como picos e são uma das principais formas de se detectar novas partículas (GRIFFITHS, 2008, p. 199).

Esses estados só são criados quando a energia do feixe chega na energia mínima para sua criação, que é a energia associada a massa de repouso dessas ressonâncias. Assim, é muito comum haver picos em curvas experimentais de seção de choque que cubram grandes intervalos de energia.

Pode-se escrever a (2.205) de forma compacta

$$d\sigma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{F} dQ, \quad (2.206)$$

onde F (fluxo do feixe) e dQ (espaço de fase invariante) são dados por

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(P_C + P_D - P_A - P_B) \frac{d^3|\vec{p}_C|}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3|\vec{p}_D|}{(2\pi)^3 2E_D}, \quad (2.207)$$

$$F = v_A 2E_A \cdot 2E_B. \quad (2.208)$$

Para o caso onde há uma colisão colinear entre os feixes de partículas A e B , F é escrito das seguintes formas

$$F = 4((P_A \cdot P_B)^2 - m_A^2 m_B^2)^{1/2}, \quad (2.209)$$

$$F = |\vec{v}_A - \vec{v}_B| 2E_A 2E_B, \quad (2.210)$$

$$F = 4(|\vec{p}_A| E_B + |\vec{p}_B| E_A). \quad (2.211)$$

Tanto F quanto dQ são invariantes sob transformações de Lorentz.

Para obter-se a seção de choque diferencial, partir-se-a do espalhamento (2.184) analisado no referencial do centro de massa, ou centro de momentum (abreviadamente: ref. do CM). Neste referencial a soma dos momenta espaciais das partículas é sempre nulo, para um espalhamento como (2.184) isso implica que as partículas A e B devem ter momenta espaciais iguais em módulo e direção, mas com sentidos opostos, ou devem estar em repouso. O mesmo vale para as partículas resultantes do espalhamento C e D . Tendo essas considerações em vista, escreve-se para o ref. do CM

$$\begin{aligned} |\vec{p}_i| &= |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B|, \\ |\vec{p}_f| &= |\vec{p}_C| = |\vec{p}_D|. \end{aligned} \quad (2.212)$$

Por conservação de energia

$$E_A + E_B = E_C + E_D. \quad (2.213)$$

Considerando-se que no ref. do CM as partículas A e B se aproximam com momenta iguais, dados por $|\vec{p}_i|$, pode-se lançar mão da (2.211) escrevendo F como

$$F = 4|\vec{p}_i|(E_B + E_A). \quad (2.214)$$

Definindo-se neste momento a variável de Mandelstan s no ref. do CM, que será melhor explicada na subseção (2.6.5), como sendo $s = (E_A + E_B)^2 = (E_C + E_D)^2$, tem-se que

$$F = 4|\vec{p}_i|\sqrt{s}. \quad (2.215)$$

Para o termo dQ , dado por (2.207), toma-se a delta $\delta^4(P_C + P_D - P_A - P_B)$ como

$$\delta^4(P_C + P_D - P_A - P_B) = \delta(E_C + E_D - E_A - E_B) \delta(\vec{p}_C + \vec{p}_D - \vec{p}_A - \vec{p}_B). \quad (2.216)$$

Onde, $\delta(\vec{p}_C + \vec{p}_D - \vec{p}_A - \vec{p}_B) = \delta(P_C^1 + P_D^1 - P_A^1 - P_B^1)\delta(P_C^2 + P_D^2 - P_A^2 - P_B^2)\delta(P_C^3 + P_D^3 - P_A^3 - P_B^3)$. No ref. do CM os momenta \vec{p}_A e \vec{p}_B são iguais em módulo e direção, mas com sentidos opostos, i.e.

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B. \quad (2.217)$$

Substituindo (2.217) em (2.216)

$$\delta^4(P_C + P_D - P_A - P_B) = \delta(E_C + E_D - E_A - E_B)\delta(\vec{p}_C + \vec{p}_D). \quad (2.218)$$

Substituindo-se (2.218) em (2.207) e integrando em $d^3|\vec{p}_C|$, entre $-\infty$ e ∞

$$dQ = \int_{p_C} (2\pi)^4 \delta(E_C + E_D - E_A - E_B) \delta(\vec{p}_C + \vec{p}_D) \frac{d^3|\vec{p}_C|}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3|\vec{p}_D|}{(2\pi)^3 2E_D}. \quad (2.219)$$

Pela filtragem da delta, a integral em (2.219) faz $\vec{p}_C \rightarrow -\vec{p}_D$ em toda a expressão. Assim, os termos em dependentes de \vec{p}_C ficam em função de \vec{p}_D em (2.219). Isto é $E_C(|\vec{p}_C|) \rightarrow E_C(|\vec{p}_D|)$. Após a integração sobre $|\vec{p}_C|$, a expressão (2.219) fica

$$dQ = (2\pi)^4 \delta(E_C(p_D) + E_D - E_A - E_B) \frac{d^3|\vec{p}_D|}{(2\pi)^3 2E_D (2\pi)^3 2E_C(p_D)}. \quad (2.220)$$

Agora é necessário modificar a variável da delta da energia em (2.220). Para tal, lança-se mão da dispersão relativística dada por (2.117), de modo que a delta da energia fica

$$\begin{aligned} \delta(E_C(|\vec{p}_D|) + E_D - E_A - E_B) &= \delta(\sqrt{(|\vec{p}_D|^2 + m_C^2)} + \sqrt{(|\vec{p}_D|^2 + m_D^2)} - \sqrt{(|\vec{p}_A|^2 + m_A^2)} \\ &- \sqrt{(|\vec{p}_B|^2 + m_B^2)}). \end{aligned} \quad (2.221)$$

Seja $g(|\vec{p}_D|)$ uma função dada por

$$g(|\vec{p}_D|) = \sqrt{(|\vec{p}_D|^2 + m_C^2)} + \sqrt{(|\vec{p}_D|^2 + m_D^2)} - \sqrt{(|\vec{p}_A|^2 + m_A^2)} - \sqrt{(|\vec{p}_B|^2 + m_B^2)}. \quad (2.222)$$

Tal que

$$\delta(g(|\vec{p}_D|)) = \delta(\sqrt{(|\vec{p}_D|^2 + m_C^2)} + \sqrt{(|\vec{p}_D|^2 + m_D^2)} - \sqrt{(|\vec{p}_A|^2 + m_A^2)} - \sqrt{(|\vec{p}_B|^2 + m_B^2)}). \quad (2.223)$$

A função (2.222) é nula para $|\vec{p}_D|$, dado por

$$|\vec{p}_D| = \left[\frac{1}{4\beta^2} ((m_D)^2 - (m_C)^2 - \beta^2)^2 - m_C^2 \right]^{1/2}. \quad (2.224)$$

Onde $\beta = \sqrt{(|\vec{p}_A|^2 + m_A^2)} + \sqrt{(|\vec{p}_B|^2 + m_B^2)}$. Segundo Griffiths (2008, p. 426), uma delta dada por $\delta(f(x))$ pode ser escrita como $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x')}{|f'(x')|}$, onde x' é um elemento do domínio de $f(x)$, tal que $f(x') = 0$, e $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, assim

$$\delta(g(|\vec{p}_D|)) = \frac{\delta(|\vec{p}_D| - |\vec{p}_D'|)}{|g'(|\vec{p}_D'|)|}. \quad (2.225)$$

A derivada da função (2.222) avaliada em $|\vec{p}_D|$ é

$$g'(|\vec{p}_D|) = |\vec{p}_D| \left(\frac{1}{E_D(|\vec{p}_D|)} + \frac{1}{E_C(|\vec{p}_D|)} \right). \quad (2.226)$$

Com E_D e E_C dados pela relação de dispersão relativística. Substituindo-se (2.226) em (2.225)

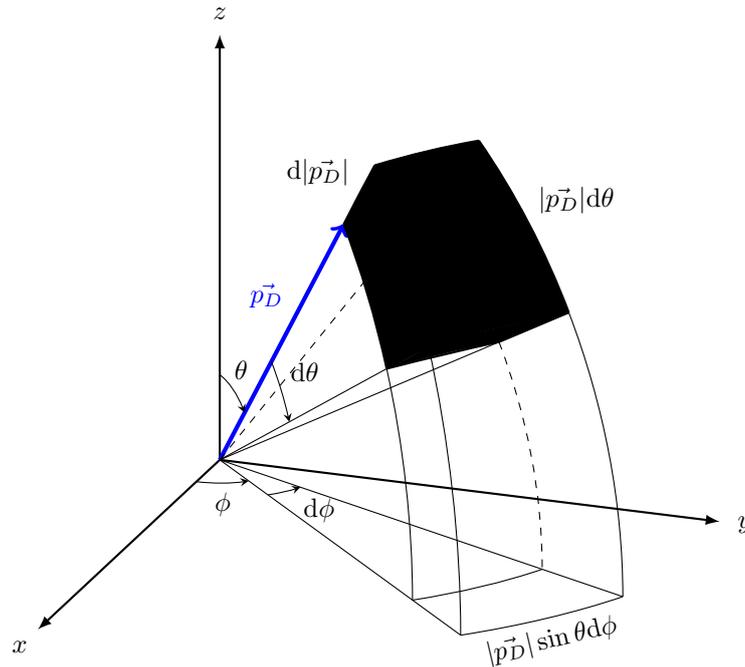
$$\delta(g(|\vec{p}_D|)) = \frac{\delta(|\vec{p}_D| - |\vec{p}'_D|)}{\left| |\vec{p}_D| \left(\frac{1}{E_D(|\vec{p}_D|)} + \frac{1}{E_C(|\vec{p}_D|)} \right) \right|}. \quad (2.227)$$

A (2.228) é delta da energia $\delta(E_C(|\vec{p}_D|) + E_D - E_A - E_B)$ presente em (2.220).

Sabe-se que $d^3|\vec{p}_D|$ é um cubo de lados $d|\vec{p}_D|_x$, $d|\vec{p}_D|_y$ e $d|\vec{p}_D|_z$. Lançando-se mão da figura (10), pode-se verificar que $d^3|\vec{p}_D|$ escrito em coordenadas esféricas é dado por

$$d^3|\vec{p}_D| = \sin \theta |\vec{p}_D|^2 d|\vec{p}_D| d\theta d\phi \quad (2.228)$$

Figura 10 – Elemento volumétrico de momentum $d^3|\vec{p}_D|$ escrito em coordenadas esféricas.



Adaptado de : [Tex.stackexchange](https://tex.stackexchange.com/) (2014).

Substituindo-se (2.227) e (2.228) em (2.220) e integrando a expressão com respeito à $|\vec{p}_D|$, entre $-\infty$ e ∞

$$dQ = \int_{|\vec{p}_D|} (2\pi)^4 \frac{\delta(|\vec{p}_D| - |\vec{p}'_D|)}{\left| |\vec{p}_D| \left(\frac{1}{E_D(|\vec{p}_D|)} + \frac{1}{E_C(|\vec{p}_D|)} \right) \right|} \frac{\sin \theta |\vec{p}_D|^2 d|\vec{p}_D| d\theta d\phi}{(2\pi)^3 2E_D (2\pi)^3 2E_C(|\vec{p}_D|)}. \quad (2.229)$$

A delta faz $|\vec{p}_D| \rightarrow |\vec{p}'_D|$ em (2.229), desse modo

$$dQ = (2\pi)^4 \frac{|\vec{p}'_D|^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\left| |\vec{p}'_D| \left(\frac{1}{E_D(|\vec{p}'_D|)} + \frac{1}{E_C(|\vec{p}'_D|)} \right) \right| (2\pi)^3 2E_D(|\vec{p}'_D|) (2\pi)^3 2E_C(|\vec{p}'_D|)} . \quad (2.230)$$

Escrevendo $\sin \theta d\theta d\phi$ como $d\Omega$ em (2.230) e simplificando os termos $|\vec{p}'_D|$

$$dQ = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}'_D| d\Omega}{4(E_D(|\vec{p}'_D|) + E_C(|\vec{p}'_D|))} . \quad (2.231)$$

Como $|\vec{p}'_D|$ é o momentum que zera as energias da delta (2.221), pode-se afirmar que trata-se do momentum final do sistema $|\vec{p}_f|$ que garante a conservação de energia no ref. do CM. Escrevendo-se $E_D + E_C$ como \sqrt{s} , tem-se que

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{|\vec{p}_f| d\Omega}{4\sqrt{s}} . \quad (2.232)$$

Finalmente, substituindo-se (2.215) e (2.232) em (2.206),

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathfrak{M}|^2 . \quad (2.233)$$

Eis a seção de choque diferencial no ref. do CM.

2.6.5 Variáveis de Mandelstan.

Antes de seguir, é necessário introduzir as variáveis de Mandelstan. Tais variáveis são invariantes frente a transformações de Lorentz, portanto, calcular elas no ref. do CM ou no ref. do laboratório, i.e. o referencial onde há um feixe de partículas incidindo sobre um alvo estacionário, é equivalente. Para uma interação do tipo (2.184), as variáveis de Mandelstan são

$$s \equiv (P_A + P_B)^2 = (P_C + P_D)^2 , \quad (2.234)$$

$$t \equiv (P_A - P_C)^2 = (P_D - P_B)^2 , \quad (2.235)$$

$$u \equiv (P_A - P_D)^2 = (P_C - P_B)^2 . \quad (2.236)$$

A partir de (2.234), no ref. do CM, pode-se recuperar a expressão utilizada anteriormente, dada por $s = (E_A + E_B)^2$. Para tal, toma-se o lado direito de (2.234) e desenvolve-se o quadrado

$$s = (P_A + P_B)^2 = P_A^2 + P_B^2 + 2P_A \cdot P_B . \quad (2.237)$$

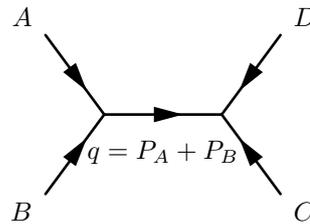
Na expressão (2.237), $P_A^2 = P_A^\mu P_{A\mu} = E_A^2 - |\vec{p}_A|^2$, analogamente para P_B^2 , e $2P_A \cdot P_B = 2P_A^\mu P_{B\mu} = 2E_A E_B - 2|\vec{p}_A||\vec{p}_B|$. No entanto, no ref. do CM $p_A = p_B$, deste modo

$$s = E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B = (E_A + E_B)^2 . \quad (2.238)$$

Diferentes topologias de diagramas de Feynman codificam diferentes formas dos quadrimomenta serem carregados pelas partículas virtuais e isto constitui diferentes canais de interação.

Uma interação de canal s, mostrada na figura (11), ocorre quando a partícula virtual carrega um quadrimomentum q igual a soma dos quadrimomenta iniciais das partículas A e B . O quadrimomentum q carregado pela partícula mediadora é dado por $q = \sqrt{s}$, por esse motivo é dito que o diagrama ocorre no canal s.

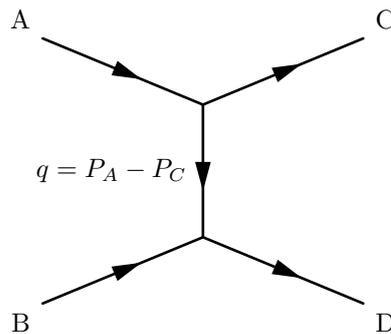
Figura 11 – Diagrama característico da interação que ocorre no canal s.



Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/cms/wiki) (2021).

Uma interação no canal t, mostrada na figura (12), ocorre quando a partícula virtual carrega um quadrimomentum q igual à diferença entre os quadrimomenta inicial e final das partículas conectadas por um vértice (A e C ou B e D). Como q é dado por $q = \sqrt{t}$, diz-se que o diagrama ocorre no canal t.

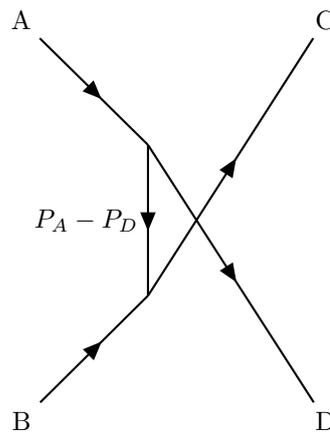
Figura 12 – Diagrama característico da interação que ocorre no canal t.



Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/cms/wiki) (2021).

Uma interação no canal u, mostrada na figura (13), ocorre quando a partícula virtual carrega um quadrimomentum q igual à diferença entre os quadrimomenta inicial e final das partículas conectadas por um vértice. É a mesma coisa que o canal t, mas com as partículas C e D trocadas, além do formato do diagrama ser diferente. Como q é dado por $q = \sqrt{u}$, diz-se que o diagrama ocorre no canal u.

Figura 13 – Diagrama característico da interação que ocorre no canal u.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

2.6.6 Equação de Dirac.

Agora, o estudo de espalhamentos reais envolvendo partículas com $s = 1/2$ ocorrerá a partir da introdução da equação de Dirac. Embora a equação de K.G. tenha sido usada para análise do espalhamento (2.165), ela não é adequada para isto, visto que é uma equação de campo para objetos de spin 0, que não é o caso das partículas de tal espalhamento, que possuem spin $s = 1/2$.

Na presente subseção será demonstrada a equação de Dirac para uma partícula livre. Para tal demonstração consultou-se as seções 2.1 e 2.2 do capítulo 2 de Neto (2019).

Paul Dirac publicou uma teoria relativística para descrever o comportamento do elétron em 1928. Ele foi motivado pela insuficiência da MQ em prever a estrutura fina dos espectros do átomo de hidrogênio, e sabia que era necessário uma formulação relativística da MQ para poder prever tal resultado experimental (CARUSO, 2012, p. 115).

Dirac já conhecia a equação de KG (KRAGH, 1984, p. 1031), e construiu sua equação a partir da mesma (2.119), mas diferiu ao considerar que a equação relativística para a MQ não poderia ter derivada temporal de ordem dois. A derivada temporal deveria ser de ordem um, como na equação de Schrödinger, além disso como na relatividade tempo e espaço são equivalentes a equação que ele procurava deveria ter derivadas de ordem um no espaço também, diferente da equação de Schrödinger. (NETO, 2019, p. 22; PEDUZZI, 2010, p. 16).

Assim, Dirac assume uma equação como a de Schrödinger (2.63)

$$\hat{H}_D \Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial t} . \quad (2.239)$$

Onde \hat{H}_D é o hamiltoniano de Dirac – que possui derivadas de ordem um no espaço. Ele assume também que a (2.117) deve ser obedecida. Uma equação que incorpora todas essas condições (derivadas temporal e espacial de ordem um e que obedeça a dispersão

relativística de energia) é

$$(E - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m)\Psi = 0. \quad (2.240)$$

Onde $\vec{\alpha}$ e $\alpha^0 \equiv \beta$ são operadores, que são representados como matrizes, e \vec{p} é o momentum da partícula descrita por Ψ . Os operadores de (2.240) são construídos de modo a garantir as condições supracitadas sejam satisfeitas, além disso o termo de energia e momentum podem ser substituídos pelos operadores da MQ ($E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ e $|\vec{p}| \rightarrow -i\nabla$).

Exigir que (2.117) seja satisfeita é o mesmo que exigir que

$$(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)\Psi = 0, \quad (2.241)$$

seja verdade.

A (2.241) é a equação de KG escrita sem tomar-se os operadores da MQ para energia e momentum e com um campo de Dirac Ψ no lugar do campo de KG ϕ . Assume-se que qualquer solução para o campo de Dirac Ψ tem que satisfazer equação de KG também, mas a recíproca não é verdade, i.e. soluções da equação de KG Φ não satisfazem a eq de Dirac.

Agora serão analisadas as condições que devem ser obedecidas pelos operadores $\vec{\alpha}$ e α^0 para que a (2.241) seja obtida a partir de (2.240). Multiplicando-se (2.240) pela esquerda por $(E + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)$ obtém-se

$$(E^2 - \beta^2 m^2 - (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) - ((\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\beta m + \beta m(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})))\Psi = 0. \quad (2.242)$$

Reescrevendo-se $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$ como

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) = \sum_k (\alpha^k)^2 (p^k)^2 + \sum_{\substack{k \\ k>\ell}} (\alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k) p^k p^\ell. \quad (2.243)$$

Onde $k = 1, 2, 3$ e os termos α^k e p^k são as k -ésimas componentes de $\vec{\alpha}$ e \vec{p} . Também considerou-se que $\vec{\alpha}$ e \vec{p} são de espaços distintos e portanto comutam. Substituindo-se (2.243) em (2.242)

$$\left(E^2 - \beta^2 m^2 - \sum_k (\alpha^k)^2 (p^k)^2 + \sum_{\substack{k \\ k>\ell}} (\alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k) p^k p^\ell - ((\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\beta m + \beta m(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})) \right) \Psi = 0. \quad (2.244)$$

Agora, considerando-se que \vec{p} comuta com β também, pode-se escrever

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\beta m + \beta m(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) = \sum_k (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k. \quad (2.245)$$

Substituindo-se (2.245) em (2.244), tem-se

$$\left(E^2 - \beta^2 m^2 - \sum_k (\alpha^k)^2 (p^k)^2 + \sum_{\substack{k \\ k>\ell}} (\alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k) p^k p^\ell - \sum_k (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k \right) \Psi = 0. \quad (2.246)$$

Para a eq. (2.241) seja obedecida as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$(\alpha^k)^2 = \mathbb{1}, \quad (2.247) \quad \alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k = 0, \quad (2.249)$$

$$(\beta)^2 = \mathbb{1}, \quad (2.248) \quad \alpha^k \beta + \alpha^\ell \alpha^k = 0. \quad (2.250)$$

Assim, a eq. (2.240) é a equação de relativística para o e^- livre, estando satisfeitas as eq. (2.247)-(2.250).

Conforme supramencionado, os operadores α^0 e α^k são matrizes. Podem ser, deste modo, representados como

$$\alpha^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.251)$$

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \sigma^k \\ \sigma^k & -\mathbb{0} \end{pmatrix}. \quad (2.252)$$

Onde $\mathbb{1}$ representa o elementos de uma matriz identidade 2×2 e $\mathbb{0}$ representa o elementos de uma matriz 2×2 composta apenas por zeros. Os termos σ^k são as matrizes de Pauli, o que implica que $\vec{\alpha}$ de (2.240) é um vetor cujas componentes são matrizes. As matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.253)$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.254)$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.255)$$

Tais matrizes fazem parte dos operadores para se obter a projeção do momentum angular de spin S na direção definida pelo eixo k , dados por $S_k = \frac{1}{2}\sigma^k$ (GRIFFITHS, 2011b, p. 130-131). O aparecimento das matrizes de Pauli implica que o momentum angular de spin é uma grandeza que aparece com naturalidade na equação de Dirac. Diferente da equação de Schrödinger, na qual é necessário colocar o spin à mão, na equação de Dirac o spin do elétron aparece sem imposições prévias, sem hipóteses ad-hoc²¹. (REIS, 2021, p. 170; PEDUZZI, 2010, 18).

As eq. (2.251)-(2.252) são chamadas de representações de Dirac α^0 e α^k . Naturalmente, existem outras representações. Para escrever a equação de Dirac na forma covariante, define-se as matrizes gama

$$\gamma^\mu = (\alpha^0, \alpha^0 \alpha^k) = (\beta, \beta \alpha^k). \quad (2.256)$$

²¹ Segundo Blackburn (2006, p. 6) é uma hipótese “[...] adotada com a única finalidade de salvar uma teoria de dificuldades ou da refutação, sem que haja qualquer motivo racional independente dessa finalidade.”.

Tal que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.257)$$

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.258)$$

O quadrivetor γ^μ é um quadrivetor cujas componentes são as matrizes gama. Multiplicando-se a (2.240) por β pela direita e escrevendo $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$

$$\left(\beta i \frac{\partial}{\partial t} + \beta \vec{\alpha} \cdot \nabla - (\beta)^2 m \right) \Psi = 0. \quad (2.259)$$

Lembrando que $\beta = \alpha^0 = \gamma^0$ e lançando-se mão de (2.59), (2.248) e (2.256), pode-se escrever

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \mathbb{1}m)\Psi = 0. \quad (2.260)$$

Eis a equação de Dirac na forma covariante. A eq. (2.260) diz respeito a uma partícula livre, a obtenção da equação Dirac com um potencial agindo no sistema será feita na subseção (2.6.12).

Por intermédio das matrizes gama, pode-se reescrever as condições (2.247)-(2.250) como

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.261)$$

A eq. (2.261) é chamada de relação de anticomutação das matrizes gama. Esses objetos são do espaço do spin, i.e. um espaço de objetos matemáticos que dizem respeito ao momentum angular de spin e grandezas relacionadas ao mesmo, e.g. m_s e s . Objetos desse espaço são as matrizes gama, as matrizes de Pauli e as soluções da equação de Dirac. Tais objetos se relacionam entre si por relações de comutação específicas, como a (2.261). Objetos de espaços diferentes do espaço do spin, como o quadrimomentum P , que pertence ao espaço usual, comutam normalmente com objetos do espaço do spin.

Levando em conta que a derivada covariante em (2.260) engloba em suas componentes $\frac{\partial}{\partial t}$ e ∇ , pode-se reescreve-la usando-se os operadores diferenciais da MQ para deixa-la em termos de momentum e energia. Primeiramente, na eq. (2.260), sobrescreve-se o índice μ de ∂ e subscreve-se o índice de γ . Isso pode ser feito, pois não altera o resultado do produto interno. Assim lançando-se mão de (2.58) e dos operadores da MQ para momentum e energia, tem-se

$$i\partial_\mu = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) = (E, \vec{p}) = P^\mu. \quad (2.262)$$

Substituindo-se (2.262) na eq. (2.260) com o índice de ∂ sobrescrito e o índice de γ subscrito, tem-se

$$(\gamma_\mu P^\mu - \mathbb{1}m)\Psi = 0. \quad (2.263)$$

Devido à natureza das matrizes gama, deve-se tomar o conjugado hermitiano (\dagger) das mesmas ao invés de simplesmente o complexo conjugado. O conjugado hermitiano de uma matriz A , segundo [Neto \(2010, p. 48\)](#) consiste na operação de tomar-se a transposta de A (A^T) seguida do complexo conjugado ($*$). Tendo a operação do conjugado hermitiano sido definida, uma propriedade importante dessa operação com respeito as matrizes gama é

$$(\gamma^\mu)^\dagger = (\gamma^0, \gamma^k)^\dagger = (\gamma^0, -\gamma^k). \quad (2.264)$$

A (2.264) também pode ser escrita como

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (2.265)$$

2.6.7 Corrente j^μ da equação de Dirac.

Nessa subseção, a corrente j^μ associada a equação de Dirac será obtida. Para a construção da mesma foi seguida a seção 5.2 do capítulo 5 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Desenvolvendo-se a soma sobre o índice μ em (2.260), obtém-se

$$(i\gamma^0\partial^0 - i\gamma^k\partial^k - m)\Psi = 0. \quad (2.266)$$

Lembrando-se que a componente espacial da derivada contravariante de Lorentz (2.58) é $-\nabla$ – são os componentes do operador ∇ –, escreve-se

$$i\gamma^0\frac{\partial\Psi}{\partial t} + i\gamma^k\frac{\partial\Psi}{\partial x^k} - m\Psi = 0, \quad (2.267)$$

com $k = 1, 2, 3$. Aplicando-se o conjugado hermitiano em (2.267)

$$-i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\gamma^0 - i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x^k}(-\gamma^k) - m\Psi^\dagger = 0. \quad (2.268)$$

O conjugado hermitiano incide sobre cada termo em (2.267), de tal modo que o \dagger age sobre cada elemento dos produtos da eq. (2.267), isto é: $(i\gamma^0\frac{\partial\Psi}{\partial t})^\dagger = (i)^\dagger(\gamma^0)^\dagger(\frac{\partial\Psi}{\partial t})^\dagger$.

Conforme será esclarecido na subseção (2.6.8), as soluções Ψ têm a forma de uma matriz 1×4 , deste modo as derivadas de Ψ em (2.267) são matrizes 1×4 . Por conta disso, em (2.267) os operadores γ se encontram antes das derivadas de Ψ . Com a tomada do conjugado hermitiano sobre (2.267) as matrizes dadas pelas derivadas de Ψ são transpostas, i.e. as derivadas de Ψ passam de matrizes 1×4 para matrizes 4×1 . Como uma matriz 4×1 só pode ser multiplicada por uma matriz 4×4 (os operadores γ são matrizes 4×4) pela direita, então é necessário trocar as derivadas de Ψ de lugar com os operadores γ sob ação do conjugado hermitiano. As matrizes γ embora transpostas continuam sendo matrizes 4×4 .

Multiplicando (2.268) por γ^0 pela direita, lançando mão do fato de que $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$ e definindo-se o $\bar{\Psi}$ adjunto como sendo

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0, \quad (2.269)$$

obtem-se

$$i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0. \quad (2.270)$$

A equação da continuidade escrita na forma covariante (2.129) pode ser escrita a partir de (2.270). Para tal, primeiro multiplica-se a eq. (2.260) pela esquerda por $\bar{\Psi}$ e a eq. (2.270) por Ψ pela direita. Adicionando-se as duas equações

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) + (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi = \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0. \quad (2.271)$$

Eis a equação da continuidade a partir da equação de Dirac. No lado direito de (2.271) a equação está expressa subtendendo-se que o operador ∂_μ agirá sobre o termo entre parênteses utilizando-se da regra do produto. Além disso, a derivada covariante de Lorentz não deriva o quadrivetor γ^μ , visto que suas componentes são matrizes cujos elementos são constantes.

Da (2.271) identifica-se

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (2.272)$$

como sendo o quadrivetor deduzido a partir da equação de Dirac que satisfaz a equação da continuidade. j^μ ainda não pode ser chamado de quadrivetor de corrente, pois inicialmente, identifica-se j^0 como a densidade de probabilidade e j^k , $k = 1, 2, 3$ como a densidade de fluxo.

A densidade de probabilidade

$$j^0 \equiv \rho = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\Psi, \quad (2.273)$$

é positiva. Em (2.273) utilizou-se (2.269). O fato de ρ ser positiva decorre dos esforços de Dirac no sentido de obter uma equação cuja solução tivesse uma interpretação análoga a da equação de Schrödinger (NETO, 2019, p. 22), afinal uma das motivações originais de Dirac era remover a densidade de probabilidade negativa que decorria da formulação relativística da MQ de Klein-Gordon (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 100).

Assim, a interpretação original de Dirac para a j^μ associado a sua equação. foi probabilística. Com a reinterpretação de Weisskopf e Pauli, realizada em 1934, a j^μ da equação de Dirac, tal como ocorreu com a da equação de KG, passa a ter uma interpretação de quadrivetor de corrente. Fazendo-se a mesma adaptação feita em (2.125)

$$j^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (2.274)$$

é o quadrivetor corrente associado a equação de Dirac.

2.6.8 Soluções da equação de Dirac para partícula livre em repouso.

Nessa subseção será tratada das soluções da equação de Dirac para partícula livre no caso em que a partícula está em repouso, i.e. $\vec{p} = \vec{0}$. As soluções serão estudadas, e

partir das mesmas será discutida a interpretação de Dirac para as soluções de energia negativa, qual deu origem a noção de anti partícula.

Para construção dessa subseção seguiu-se a seção 5.3 do capítulo 5 de [Halzen e Martin \(1984\)](#). Também será tratado nessa subseção a interpretação dada às soluções de energia negativa que emergem da equação de Dirac, bem como sua importância para o MP.

Partindo-se da eq (2.239), lançando-se mão da substituição do operador da MQ $E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ no lado direito da mesma

$$\hat{H}_D \Psi = E \Psi . \quad (2.275)$$

A (2.275) representa o fato de que o operador hamiltoniano sempre retorna a energia do sistema como autovalor (o campo Ψ é autofunção). Passando o termo $E\Psi$ para a esquerda e multiplicando a expressão por -1

$$E\Psi - \hat{H}_D \Psi = 0 . \quad (2.276)$$

Comparando-se (2.276) com (2.240) obtém-se

$$\hat{H}_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m . \quad (2.277)$$

Deste modo, (2.239) pode ser escrita como

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\Psi = E\Psi . \quad (2.278)$$

Na (2.278), novamente foi usado o operador de energia da MQ. Além disso, a (2.278) é uma forma mais simples de escrever a equação de Dirac, sem as matrizes gama ou a derivada de Lorentz, qual será empregada mais adiante a fim de se encontrar as soluções do espinor u e de energia E que satisfaçam a equação de Dirac para uma partícula livre em repouso.

Para uma partícula livre, assume-se a solução dada por

$$\Psi = u(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} , \quad (2.279)$$

onde $u(\vec{p})$ é um espinor, i.e. uma parte da solução da equação de Dirac relacionada diretamente ao número quântico magnético de spin m_s , sendo representado por uma matriz coluna de quatro componentes ([NETO, 2019](#), p. 23).

Substituindo-se (2.279) em (2.263) e dividindo-se os dois lados por $e^{-iP_\mu x^\mu}$

$$(\gamma^\mu P_\mu - m)u = 0 . \quad (2.280)$$

Lançando-se mão de $\not{P} = \gamma^\mu P_\mu$, que é chamado de quadrimomentum em notação slash de Feynman, tem-se

$$(\not{P} - m)u = 0 . \quad (2.281)$$

A equação de Dirac para o espinor u , com a notação slash de Feynman será utilizada na subseção (2.6.11) a fim de se obter a relação de completeza.

Agora, para obter as soluções do espinor u para a equação de Dirac para partícula livre em repouso, bem como as soluções de energia E , lança-se mão da eq. (2.278). Para obter a equação de Dirac para partícula livre em repouso a partir de (2.278), basta tomar $\vec{p} = \vec{0}$ em (2.278), assim

$$\beta m \Psi = E \Psi . \quad (2.282)$$

Substituindo-se (2.279) em (2.282) e dividindo-se os dois lados por $e^{-iP_\mu x^\mu}$ obtém-se

$$\beta m u = E u . \quad (2.283)$$

Escrevendo-se βm na forma matricial, vide (2.257) (lembrando que $\beta = \gamma^0 = \alpha^0$), tem-se

$$\begin{pmatrix} m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} u = E u . \quad (2.284)$$

A eq. (2.284) tem uma forma característica de equação de autovalores e autovetores. Há quatro soluções de autovalores de E e autovetores (espinores) u para (2.284). As soluções de E (que são autovalores) associados à (2.284) são $E_1 = m$, $E_2 = m$, $E_3 = -m$ e $E_4 = -m$. Os espinores associados são

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.285)$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.286)$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.287)$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.288)$$

Assim, verifica-se que a (2.283) admite quatro soluções possíveis de E e u . Cada solução de E está associada a um espinor u , e tais soluções são coerentes com a relação de dispersão relativística (2.117) pro caso em que $\vec{p} = \vec{0}$.

Segundo REIS (2021, p. 170), cada espinor e energia E representam um estado do elétron

$$\begin{aligned} u_1 \text{ com } E_1 = m \rightarrow e^- \text{ com } E > 0 \text{ e com número quântico magnético de spin } m_s = +1/2, \\ u_2 \text{ com } E_2 = m \rightarrow e^- \text{ com } E > 0 \text{ e com número quântico magnético de spin } m_s = -1/2, \\ u_3 \text{ com } E_3 = -m \rightarrow e^- \text{ com } E < 0 \text{ e com número quântico magnético de spin } m_s = +1/2, \\ u_4 \text{ com } E_4 = -m \rightarrow e^- \text{ com } E < 0 \text{ e com número quântico magnético de spin } m_s = -1/2. \end{aligned} \quad (2.289)$$

As soluções que descrevem partículas com energia negativa são uma consequência da dispersão relativística de energia (2.117) e não é possível propor uma formulação que unifique MQ e Relatividade sem obter tais soluções (REIS, 2021, p. 171).

Contudo, apesar de sua inevitabilidade, tais soluções trazem um grande problema teórico, pois segundo a teoria quântica de radiação formulada pelo próprio Dirac, e publicada um ano antes de sua formulação relativística da mecânica quântica, um e^- em um estado de energia excitado, i.e. um estado de energia maior que um estado de energia mínima, sempre emite um fóton espontaneamente a fim de ir para o estado de menor energia. Assim, um elétron em estado de energia negativa não tem nenhum limite de energia mínima que interrompa sua emissões de fótons, o que levaria a uma emissão indefinida de fótons para um elétron indo para estados de energia cada vez mais menores. Esse problema foi exposto em 1929 por Oscar Klein, que demonstrou que é possível que um elétron real, no estado de menor energia, emita um fóton com energia maior que duas vezes a sua massa de repouso, caindo em um estado de energia negativa e iniciando a emissão indefinida de fótons (esse problema ficou conhecido como paradoxo de Klein) (BASSALO, 2012, p. 77).

Diante desse problema com as soluções de $E < 0$, em 1930, Dirac concebeu uma interpretação na qual ele propunha que o vácuo seria constituído por uma infinidade de estados com energia negativa, todos ocupados por e^- com $E < 0$, e por uma infinidade de estados de energia positiva desocupados. Para evitar o paradoxo de Klein, Dirac invoca o princípio da exclusão de Pauli, que estabelece que duas partículas de número quântico de spin $1/2$ não podem ocupar o mesmo estado, desta forma um elétron não consegue ir para um estado de energia negativa, pois todos esses estados já estão ocupados por outros elétrons. Essa infinidade de estados de energia negativa foi chamada de mar de Dirac (BASSALO, 2012, p. 77). Desse modo, as soluções com $E < 0$ dizem respeito a elétrons ocupando esses estados de energia negativa no vácuo.

Essa interpretação, apesar de parecer estranha, dá origem a um novo fenômeno: o surgimento de um par elétron-antielétron no vácuo.

Na ocasião em que em que um dos e^- ocupando estado de energia negativa do vácuo absorvesse um fóton com energia maior que a energia da sua massa de repouso,

este elétron passaria a ocupar um estado de energia positiva se tornando um elétron com energia positiva. Na transição, tal elétron deixaria um buraco no Mar de Dirac, um estado de energia negativa vazio no vácuo (BASSALO, 2012, p. 77). Esse buraco no Mar de Dirac se comportaria como uma partícula de energia e carga positivas, i.e. seria uma outra partícula com carga positiva (NETO, 2019, p. 28).

Dirac inicialmente chamou a partícula de carga positiva de antielétron (o qual será denotado por e^+) e pensava que tal partícula tratava-se do próton, pois a única partícula com carga positiva conhecida à época era o próton. Entre 1930 e 1931, Oppenheimer e Weyl demonstraram que essa partícula deveria ter a mesma massa que o elétron (BASSALO, 2012, p. 77; CARUSO, 2012, p. 117).

A descoberta experimental do antielétron, nomeado de pósitron no artigo em que a descoberta foi relatada (ANDERSON, 1933, p. 493), foi feita em 1932 por Carl Anderson, ao estudar trajetórias de partículas oriundas de raios cósmicos em câmaras de Wilson. A descoberta foi acidental, mas Anderson relata que conhecia a teoria de Dirac, embora não estivesse a par de todos os seus detalhes (CARUSO, 2012, p. 177).

A nova interpretação que Dirac dá ao vácuo, de um local que não é vazio, foi consolidada pela descoberta do pósitron e permanece até hoje, em sua essência, válida (CARUSO, 2012, p. 120). Apesar disso, é importante destacar que a interpretação original de Dirac a respeito do vácuo, como espaço com infinitos estados de energia negativa ocupados foi reformulada e não está correta, pois leva à problemas como: vácuo com carga infinita e a possibilidade que infinitos bósons (partículas com número quântico de spin inteiro, que não respeitam o princípio de exclusão de Pauli) ocupem um único estado do vácuo. O que permaneceu dessa interpretação foi a essência da mesma, i.e. a ideia de vácuo como uma entidade complexa, não puramente vazia.

Assim, a importância da formulação de Dirac é bem evidente, visto que ela unifica relatividade com MQ, prevê a existência das antipartículas e lançou as bases para uma nova visão de vácuo.

Uma nova forma de lidar com as soluções de energia negativa foi formulada posteriormente por Stückelberg em 1941 e por Feynman em 1948. Essa formulação perdura até hoje, tendo sido adotada pelo MP. Trata-se de interpretar as soluções de $E < 0$ como expressões para partículas com energia negativa se propagando para trás no tempo, ou equivalentemente como antipartículas (com carga oposta às partículas originais) com energia positiva se propagando para frente no tempo (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 77).

A interpretação de Stückelberg e Feynman resulta em uma corrente j^μ positiva para os pósitrons

$$j^\mu(e^+) = +e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (2.290)$$

É devido a essa interpretação que nos diagramas de Feynman as antipartículas são

representadas por flechas andando para trás no tempo.

É importante deixar claro que antipartículas não voltam no tempo, a interpretação de Stückelberg e Feynman é puramente matemática e decorre das soluções de energia negativa para as anti partículas. No mundo real, antipartículas andam para frente no tempo, assim como partículas.

2.6.9 Soluções da equação de Dirac para partícula livre.

Nessa subseção será tratada da solução da equação de Dirac para partícula livre no caso em que a partícula é dotada de momentum \vec{p} . Para tal seguiu-se a seção 5.3 do capítulo 5 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Para $\vec{p} \neq \vec{0}$ a (2.278) em forma matricial, com o campo dado por (2.279), é

$$\begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} u = Eu. \quad (2.291)$$

Na eq. (2.291) simplificou-se o exponencial da solução (2.279) dos dois lados. A presença das matrizes de Pauli em (2.291) decorre do fato de que o operador α^k é escrito em termos das matrizes σ^k , vide eq. (2.252). Escrevendo-se o espinor u como um vetor com dois elementos, u_A e u_B , cada um com duas componentes, tem-se

$$\begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}. \quad (2.292)$$

Realizando o produto em (2.292), tem-se que

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = (E - m)u_A, \quad (2.293)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B. \quad (2.294)$$

Assim como no caso da partícula em repouso, na solução das eq. (2.293) e (2.294) há quatro soluções de espinor e energia. Duas soluções são de $E < 0$ e duas são de $E > 0$.

Para as soluções com $E > 0$, toma-se

$$u_A^S = \chi^S, \quad (2.295)$$

onde, segundo [Griffiths \(2011b, p. 130\)](#), χ^S são espinores usados para representar o estado geral de um partícula com número quântico de spin $s = 1/2$, i.e. um férmion. Por exemplo, $\chi^{S=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa um férmion com um número quântico magnético de spin para

cima ($m_s = 1/2$) e $\chi^{S=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa um férmion com número quântico magnético de spin para baixo ($m_s = -1/2$).

Já as componentes u_B do espinor u , para $E > 0$, são

$$u_B = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^S. \quad (2.296)$$

Sintetizando as soluções do espinor u com $E > 0$, através das eq. (2.295) e (2.296), tem-se

$$u^S = N \begin{pmatrix} \chi^S \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^S \end{pmatrix}, \quad (2.297)$$

onde N é a constante de normalização. Da (2.297) obtém-se

$$u^1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.298)$$

que representa um e^- com energia positiva e com número quântico magnético de spin para cima, e

$$u^2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix}, \quad (2.299)$$

que representa um e^- com energia positiva e com número quântico magnético de spin para baixo.

Para as soluções com energia negativa $E < 0$, tem-se as seguintes soluções para u_A e u_B

$$u_A = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^S, \quad (2.300)$$

$$u_B = \chi^S. \quad (2.301)$$

Assim, as soluções para o espinor u com $E < 0$ são dadas por

$$u^{S+2} = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \chi^S \\ \chi^S \end{pmatrix}. \quad (2.302)$$

De onde segue-se

$$u^3 = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.303)$$

como sendo a solução que representa um e^- com energia negativa e com número quântico magnético de spin para cima, e

$$u^4 = N \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.304)$$

a solução que representa um e^- e com número quântico magnético de spin para baixo.

Eis as soluções para o espinor u para a equação de Dirac da partícula livre no caso em que $\vec{p} \neq \vec{0}$.

Para essas soluções pode-se verificar que as mesmas são ortogonais, isto é

$$(u^R)^\dagger u^S = 0, \quad (2.305)$$

com $S = 1, 2$ e $R = 3, 4$.

2.6.10 Antipartículas

Nessa seção será apresentado tratamento dado aos espinores associados ao elétron com energia negativa à luz da interpretação de Stückelberg-Feynman para tais soluções. Para elaboração desta subseção foi seguido a seção 5.4 do capítulo 5 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Para um elétron livre com momentum \vec{p} e energia $E > 0$, o campo Ψ é dado por

$$\Psi = u^{S=1,2}(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu}. \quad (2.306)$$

Para um pósitron que, pela interpretação de Stückelberg-Feynman, pode ser pensado como um e^- com $-\vec{p}$ (lembre-se que nessa interpretação anti partícula é igual a partícula indo pra trás no tempo, por isso o momentum espacial negativo) e $-E$, tem-se que

$$\Psi = u^{S=3,4}(-\vec{p}) e^{-i[-P_\mu]x^\mu} \equiv v^{S=2,1}(\vec{p}) e^{iP_\mu x^\mu}. \quad (2.307)$$

Assim, introduz-se os espinores do pósitron $v^{S=2,1}$ por conveniência notacional. A partir de agora os espinores u^3 e u^4 , dados por (2.303) e (2.304) serão denotados por v^2 e v^1 respectivamente.

Para um e^- com $E < 0$ e $\vec{p} < \vec{0}$, tem-se em (2.281)

$$(-\not{P} - m)u(-\vec{p}) = 0. \quad (2.308)$$

Multiplicando-se os dois lados de (2.308) por -1 e lançando mão da notação dos espinores do pósitron (2.307), obtém-se

$$(\not{P} + m)v(\vec{p}) = 0. \quad (2.309)$$

Os resultados obtidos nessa subsecção são de grande importância para o tratamento das anti partículas. Daqui em diante, tratar-se-ão as anti partículas por intermédio dos espinores v , a luz da interpretação de Stückelberg-Feynman, no qual e^- com energia negativa é e^+ com energia positiva.

2.6.11 Normalização dos espinores e relação de completeza.

Nessa subsecção será efetuada a normalização dos espinores u e v e serão apresentadas relações importantes entres os mesmos. Para a elaboração da mesma foi seguida a seção 5.5 do capítulo 5 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Assim como foi feito na subsecção (2.6.4), nessa subsecção será encontrada a constante de normalização N associada aos espinores do campo de Dirac.

Para tal considera-se inicialmente a densidade de carga j^0 da corrente de Dirac j^μ reinterpretada por Weisskopf e Pauli. Então, toma-se j^0 sem o termo $-e$ da reinterpretação, j^0 sem o termo $-e$ representa a densidade volumétrica de partículas ρ , qual é expressa pela eq. (2.273).

Impondo que no volume V há $2E$ partículas, tem-se que

$$\int_V \rho dV = 2E . \quad (2.310)$$

Fazendo-se (2.273) em (2.310) obtém-se

$$\int_V \Psi^\dagger \Psi dV = 2E . \quad (2.311)$$

Substituindo-se (2.278) em (2.311)

$$\int_V u^\dagger u dV = 2E . \quad (2.312)$$

Integrando-se (2.312) e impondo um volume unitário

$$u^\dagger u = 2E . \quad (2.313)$$

Para (2.313) ser satisfeita tem-se que

$$u^{(R)\dagger} u^S = 2E \delta_{RS} . \quad (2.314)$$

Com R e $S = 1, 2$. Para o espinor do pósitron

$$v^{(R)\dagger} v^S = 2E \delta_{RS} . \quad (2.315)$$

Substituindo-se (2.297) em (2.314) obtém-se

$$N = \sqrt{E + m} . \quad (2.316)$$

A normalização (2.316) vale para os espinores de antipartícula também, qual é possível obter por substituindo os espinores v^2 e v^1 , dados respectivamente por (2.303) e (2.304), na eq. (2.315).

É possível obter a equação de Dirac para os espinores adjuntos \bar{u} . Para tal, basta tomar o conjugado hermitiano sobre (2.280), assim

$$(\gamma^\mu P_\mu u)^\dagger - (mu)^\dagger = 0. \quad (2.317)$$

Como $\gamma^\mu P_\mu$ é uma matriz 4×4 já que é uma soma de quatro matrizes multiplicadas por componentes de P^μ , então $\gamma^\mu P_\mu$ deve ser multiplicado pela direita por u , visto que u é uma matriz 1×4 . Quando toma-se o \dagger em u ele se torna uma matriz 4×1 , por isso é necessário que u^\dagger multiplique $\gamma^\mu P_\mu$ pela direita, assim

$$(\gamma^\mu P_\mu u)^\dagger = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger P_\mu. \quad (2.318)$$

Em (2.318) evidencia-se que \dagger não tem efeito sobre P_μ , visto que P_μ representa apenas as componentes do quadrivetor momentum P , que são números, quais comutam com u e γ .

Fazendo-se (2.318) em (2.317)

$$u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger P_\mu - mu^\dagger = 0. \quad (2.319)$$

Multiplicando (2.319) pela direita por γ^0 e lançando mão de (2.265) e (2.269) obtém-se

$$\bar{u}(\not{P} - m) = 0. \quad (2.320)$$

Pode-se realizar os mesmos passos para encontrar-se a equação de Dirac para os espinores adjuntos do pósitron \bar{v} , partindo-se de (2.309) obtém-se

$$\bar{v}(\not{P} + m) = 0. \quad (2.321)$$

A partir de (2.314) e (2.315) é possível mostrar que

$$\bar{u}^S u^S = 2m, \quad (2.322)$$

e

$$\bar{v}^S v^S = -2m. \quad (2.323)$$

Para chegar nessas relações, basta fazer-se o produto de qualquer espinor (u^S ou v^S) sob ação de \dagger , e multiplicado por γ^0 pela direita, por outro espinor (u^S ou v^S) sem essas alterações.

Das expressões para os espinores (2.297) e (2.302), lembrando-se de (2.307) para os espinores do pósitron, é possível obter a relação de completeza

$$\sum_{S=1,2} u^S(\vec{p}) \bar{u}^S(\vec{p}) = \not{P} + m, \quad (2.324)$$

$$\sum_{S=1,2} v^S(\vec{p}) \bar{v}^S(\vec{p}) = \not{P} - m. \quad (2.325)$$

2.6.12 Equação de Dirac com termo de interação.

Nessa subseção será obtida a equação de Dirac com termo de interação, bem como os termos de série perturbativa de T_{fi} a partir da mesma e serão associados tais termos à diagramas de Feynman. Para a elaboração dessa parte foram seguidas as seções 6.1 e 6.2 do capítulo 6 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Para obter-se a equação de Dirac com termo de interação faz-se uso da substituição

$$P^\mu \rightarrow P^\mu + eA^\mu, \quad (2.326)$$

em (2.263). Trata-se de uma substituição análoga à substituição (2.150) feita na equação de KG. Tal substituição é a feita a fim de tornar a equação de Dirac invariante sob transformações de calibre e possibilita que se introduza um termo de interação V em termos de A^μ na mesma²².

A substituição (2.326) em (2.263) leva a

$$(\gamma_\mu P^\mu - m)\Psi = \gamma^0 V \Psi. \quad (2.327)$$

Em (2.327)

$$\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu. \quad (2.328)$$

Multiplicando-se (2.328) pela esquerda por γ^0 e lançando-se mão de (2.248) (lembrando-se que $\gamma^0 = \alpha^0 = \beta$)

$$V = -e\gamma^0 \gamma_\mu A^\mu. \quad (2.329)$$

Assim, realizando-se adaptações (como $\phi \rightarrow \Psi$ e $V_{\text{potencial}} \rightarrow V_{\text{termo de interação}}$) na amplitude de transição T_{fi} de ordem um em V , dada por (2.88), e substituindo-se (2.329) na mesma tem-se

$$T_{fi} = ie \int_x \bar{\Psi}_f \gamma_\mu A^\mu \Psi_i d^4 \mathbf{x}. \quad (2.330)$$

Em (2.330) utilizou-se (2.269) para escrever $\Psi_f^\dagger \gamma^0 = \bar{\Psi}_f$. Embora (2.88) tenha sido obtida para a equação de Schrödinger, ela é naturalmente estendível à equação de Dirac, visto que a equação de Dirac (2.239) tem a mesma forma que a de Schrödinger (2.63). Assim, a partir da mesma sequência de passos pode se obter uma equação idêntica à (2.88) para a equação de Dirac.

Lançando-se mão de (2.274) escreve-se a corrente de transição eletromagnética j_μ^{fi} como

$$j_\mu^{fi} = -e \bar{\Psi}_f \gamma_\mu \Psi_i. \quad (2.331)$$

Substituindo-se a solução da partícula livre (2.278) em (2.331)

$$j_\mu^{fi} = -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(P_f - P_i)_\mu x^\mu}. \quad (2.332)$$

²² A invariância da equação de Dirac transformada por (2.326) sob transformações de calibre não será demonstrada nesse trabalho, pois ela é análoga à demonstração feita para a equação de KG, presente no apêndice (A).

Assim como no caso da eq. (2.164), a corrente de transição ter sido escrita com uma solução da partícula livre no estado inicial e uma solução da partícula livre no estado final indica que a partícula é espalhada de um estado descrito pela solução de partícula livre em i para um estado descrito pela solução de partícula livre em f .

Substituindo-se (2.331) em (2.330), lembrando-se que A^μ é um objeto do espaço usual e portanto comuta com os campos $\bar{\Psi}_f$ e Ψ_i , tem-se

$$T_{fi} = -i \int_{\mathbf{x}} j_\mu^{fi} A^\mu d^4 \mathbf{x}. \quad (2.333)$$

A amplitude (2.333) está em ordem um de e , e diz respeito a um diagrama de ordem um em e , dado pela figura (14b)

Figura 14 – Diagramas de ordem um em e representando contribuições para T_{fi} .



- (a) Vértice da interação obtido a partir da equação de KG. Adaptado de : [Tex.stackexchange \(2013\)](#).
 (b) Vértice da interação obtido a partir da equação de Dirac. Adaptado de : [Tex.stackexchange \(2013\)](#).

Na figura (14) é possível ver como cada termo dos diagramas de ordem um contribuem para a amplitude de transição para o caso de uma transição $i \rightarrow f$ de partícula de spin zero, descrita pela equação de KG (diagrama da figura (14a)), e para o caso de uma transição $i \rightarrow f$ de partícula de spin 1/2, descrita pela equação de Dirac (figura (14b)).

Por intermédio da figura (14b) é possível ver que para o caso do espalhamento de férmions (partícula com spin 1/2), o vértice do diagrama de Feynman contribui com um termo $ie\gamma^\mu$, e as flechas do diagrama contribuem com um espinores u_i e \bar{u}_f ²³. Para o caso da flecha entrando no vértice a contribuição é u_i (matriz coluna) que diz respeito a uma partícula no estado i , já para o caso da flecha saindo do vértice a contribuição é \bar{u}_f (matriz linha) que diz respeito a uma partícula no estado f . Já para o caso de espalhamentos envolvendo partículas de spin 0, a figura (14a) mostra que o vértice do diagrama de Feynman contribui com um termo $ie(P_i + P_f)^\mu$, já as flechas do diagrama não contribuem com nenhum termo.

Para obter-se o termo de ordem dois em e para a amplitude de transição associada a equação de Dirac, lança-se mão dos mesmo passos realizados na subseção (2.6.3). Assim,

²³ Cada linha do diagrama contribui para \mathfrak{M} não com um campo Ψ , mas com um espinor u a partir do qual o campo é escrito.

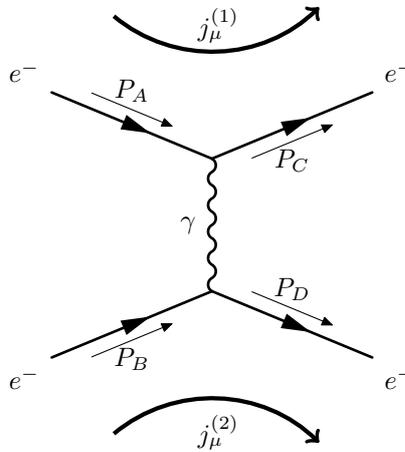
primeiro define-se um espalhamento de interesse a ser estudado e cuja análise e resultados serão generalizados aos outros espalhamentos. Nesse caso o espalhamento Møller será estudado:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- . \quad (2.334)$$

O espalhamento leva esse nome em homenagem ao físico dinamarquês Christian Møller que entre 1930 e 1931 estudou o espalhamento (2.334) à luz da teoria de Dirac e obteve resultados que foram corroborados em 1931 (KRAGH, 1992, p. 312-313 e 315).

O primeiro diagrama do espalhamento Møller é dado pela figura (15).

Figura 15 – Diagrama de Feynman para o espalhamento Møller (2.334).



Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://uzh.cms.wiki) (2021).

A partir do estudo do espalhamento (2.334), à luz da equação de Dirac, obtém-se a mesma expressão que a (2.169).

$$T_{fi} = -i \int_{\mathbf{x}} j_{\mu}^{(1)}(\mathbf{x}) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{\mu}^{(2)}(\mathbf{x}) d^4 \mathbf{x} . \quad (2.335)$$

Com $q = P_A - P_C$. Para se chegar na eq. (2.335), foram seguidos os mesmos passos realizados para se obter a eq.(2.169). Substituindo-se (2.332) em (2.335) e escrevendo a integral das exponenciais por intermédio de (2.176) e (2.177), obtém-se

$$T_{fi} = -i(-e\bar{u}_C\gamma_{\mu}u_A) \left(\frac{-1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_D\gamma^{\mu}u_B)(2\pi)^4\delta^4(P_A + P_B - P_C - P_D) . \quad (2.336)$$

Com auxílio da variável \mathfrak{M} é possível escrever (2.336) como

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4\delta^4(P_A + P_B - P_C - P_D)\mathfrak{M} . \quad (2.337)$$

Com

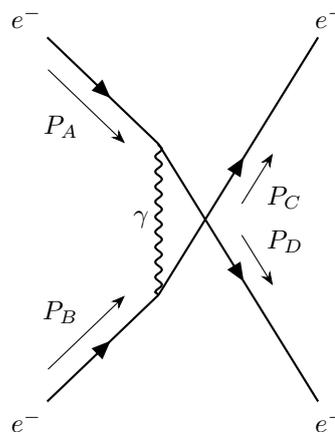
$$-i\mathfrak{M} = (e\bar{u}_C\gamma^{\mu}u_A) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (e\bar{u}_D\gamma^{\nu}u_B) . \quad (2.338)$$

O diagrama que diz respeito ao espalhamento Møller é um diagrama de ordem dois em e e é feito com a junção de dois vértices como o da figura (14b). No diagrama vê-se que o estado inicial é dado por um e^- com quadrimomentum P_A e um e^- com quadrimomentum P_B , e o estado final é dado por um e^- com quadrimomentum P_C e um com quadrimomentum P_D . Cada flecha do diagrama da figura (15) contribui com um espinor, cada vértice contribui com um termo $ie\gamma^\mu$ e a partícula virtual contribui com um termo $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$ chamado de propagador. A partícula virtual representa um estado intermediário, vê-se que nesse caso, assim como no caso do T_{fi} associado a equação de Schrödinger discutido na subseção (2.5.4), a presença de estados intermediários aumenta a ordem do T_{fi} . Juntando todos esses termos vinculados a pedaços do diagrama, em uma determinada ordem, é possível reconstruir o termo \mathfrak{M} de (2.338). A ordem a partir da qual os diagramas devem ser lidos e analisados para obtenção da \mathfrak{M} será explicitada na seção (3.1) do capítulo de Aplicações das teorias.

Conforme mencionado na subseção (2.6.4) os diagramas de Feynman correspondem diretamente ao termo da amplitude invariante \mathfrak{M} em T_{fi} . Desse modo, a partir de agora passar-se-á a vincular os mesmos à amplitude invariante, visto que \mathfrak{M} é a variável necessária para se computar a seção de choque diferencial ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$) e total (σ).

Para a obtenção da amplitude invariante total do processo (2.334) é necessário levar-se em conta todos os diagramas associados ao mesmo. Desse modo a amplitude invariante total associado ao espalhamento Møller será a soma das amplitudes invariantes associadas a cada diagrama. Outro possível diagrama de Feynman para esse espalhamento é dado na figura (16) Para tanto, a partir de uma análise similar àquela feita para o

Figura 16 – Segundo diagrama de Feynman (de primeira ordem) para o espalhamento Møller (2.334).



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

diagrama da figura (15), obtém-se para o diagrama da figura (16)²⁴

$$-i\mathfrak{M} = (ie\bar{u}_D\gamma^\mu u_A) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie\bar{u}_C\gamma^\nu u_B). \quad (2.339)$$

Onde $q = P_A - P_D$. Subtraindo-se (2.338) de (2.339) obtém-se a amplitude invariante total²⁵:

$$\mathfrak{M} = -e^2 \frac{(\bar{u}_C\gamma^\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma_\mu u_B)}{(P_A - P_C)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D\gamma^\mu u_A)(\bar{u}_C\gamma_\mu u_B)}{(P_A - P_D)^2}. \quad (2.340)$$

Tendo obtido a amplitude invariante total associada ao espalhamento Møller, a partir de agora calcular-se-á um observável ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$) a partir da mesma, para fins de demonstração. Mais cálculos assim serão demonstrados no capítulo de Aplicação das teorias.

A partir da amplitude invariante total, pode-se computar o módulo ao quadrado da mesma, fazendo-se $|\mathfrak{M}|^2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{M})^*$, que é uma pdf associada ao espalhamento.

Em experimentos onde não se tem conhecimento sobre o número quântico magnético de spin (m_s) inicial das partículas toma-se a média sobre todas as possíveis orientações de m_s para as partículas iniciais e finais no computo de $|\mathfrak{M}|^2$, isso resulta no módulo ao quadrado da amplitude invariante não polarizada representada por $|\overline{\mathfrak{M}}|^2$. Essa grandeza é dada por

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 \equiv \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{\text{todos os estados de } m_s} |\mathfrak{M}|^2. \quad (2.341)$$

Onde s_A e s_B são os números quânticos de spin s das partículas incidentes. Considerado-se o limite não relativístico para o cômputo da seção de choque não polarizada, tem-se que: $|\vec{p}| \rightarrow 0$, que implica em $N = \sqrt{E + m} = \sqrt{2m}$, visto que $E^2 = m^2$ em (2.117). Tendo em vista tal limite, a (2.297) fica

$$\begin{aligned} e^- \text{ que entra no vértice: } & u^S = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^S \\ 0 \end{pmatrix}, \\ e^- \text{ que sai do vértice: } & \bar{u}^S = \sqrt{2m} (\chi^{S\dagger}, 0). \end{aligned} \quad (2.342)$$

Em (2.342) $S = 1, 2$ representam respectivamente orientação de número quântico magnético de spin para cima ($m_s = +1/2$) e para baixo ($m_s = -1/2$). Na eq. (2.340) há termos do tipo

$$\bar{u}^S \gamma^\mu u^S. \quad (2.343)$$

²⁴ Embora as correntes estejam omitidas nesse diagrama, elas não devem ser negligenciadas e seguem a mesma lógica dos diagramas anteriores: a corrente j_μ^1 conecta os e^- A e D e a corrente j_μ^2 conecta os e^- B e C.

²⁵ A eq. (2.339) é obtida fazendo-se o e^- no estado D ir para o estado C, bem como o e^- no estado C ir para o estado D, na equação (2.338). De acordo com o princípio da exclusão a troca de estado de partículas idênticas em amplitudes (\mathfrak{M} é uma amplitude, como Ψ) deve fazer $\mathfrak{M} \rightarrow -\mathfrak{M}$ (PERKINS, 2000, p. 12), é por esse motivo que realiza-se a subtração entre (2.338) e (2.339) no cômputo de \mathfrak{M} total.

Substituindo-se (2.342) em (2.343) e lançando-se mão de (2.257) e (2.258), tem-se

$$\bar{u}^S \gamma^\mu u^S = \begin{cases} 2m, & \text{se } \mu = 0. \\ 0, & \text{se } \mu \neq 0. \end{cases} \quad (2.344)$$

e

$$\bar{u}^S \gamma^\mu u^{S'} = 0 \quad \text{para todos } \mu, \text{ se } S \neq S'. \quad (2.345)$$

A (2.345) mostra que um elétron no estado i , representado por um espinor $u^{S'}$ com S' representando a orientação de seu m_s , após ser espalhado para um estado f deve ser representado por um espinor adjunto \bar{u}^S , de tal forma que $S = S'$, isto é, o elétron no estado i tem o mesmo m_s que o elétron no estado f .

Isso quer dizer que a direção da projeção do momentum angular de spin na direção z não muda para espalhamentos de e^- não relativísticos.

Para o cômputo da (2.341) é necessário somar-se todos os $|\mathfrak{M}|^2$ possíveis com diferentes configurações de m_s para partícula. Assim, para o caso das partículas iniciais com número quântico magnético de spin para cima (\uparrow) e as partículas finais com número quântico magnético de spin para cima também, tem-se em (2.340)

$$\mathfrak{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow) = -e^2 \frac{(\bar{u}_C^1 \gamma^\mu u_A^1)(\bar{u}_D^1 \gamma_\mu u_B^1)}{(P_A - P_C)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D^1 \gamma^\mu u_A^1)(\bar{u}_C^1 \gamma_\mu u_B^1)}{(P_A - P_D)^2}. \quad (2.346)$$

Inserindo-se (2.344) e (2.345) em (2.346)

$$\mathfrak{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow) = -e^2 \frac{(2m)(2m)}{(P_A - P_C)^2} + e^2 \frac{(2m)(2m)}{(P_A - P_D)^2}. \quad (2.347)$$

Lançando-se mão das variáveis de Maldestan (2.235) e (2.236)

$$\mathfrak{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow) = e^2 4m^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{t} \right). \quad (2.348)$$

Realizando-se passos análogos aos feitos para se chegar em (2.348), para todas as outras possíveis configurações de m_s para as partículas:

$$\mathfrak{M}(\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow) = e^2 4m^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{t} \right), \quad (2.349)$$

$$\mathfrak{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow) = -\frac{e^2 4m^2}{t}, \quad (2.350)$$

$$\mathfrak{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow) = -\frac{e^2 4m^2}{t}, \quad (2.351)$$

$$\mathfrak{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow) = \frac{e^2 4m^2}{u}, \quad (2.352)$$

$$\mathfrak{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \uparrow\downarrow) = \frac{e^2 4m^2}{u}. \quad (2.353)$$

Desenvolvendo-se a soma em (2.341) sobre todos os estados encontrados.

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} (|\mathfrak{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathfrak{M}(\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow)|^2 + |\mathfrak{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow)|^2 + |\mathfrak{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow)|^2 + |\mathfrak{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow)|^2 + |\mathfrak{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \uparrow\downarrow)|^2). \quad (2.354)$$

Fazendo-se cada \mathfrak{M} das eq. (2.348)–(2.353) vezes seu complexo conjugado e substituindo-os em (2.354)

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} (4m^2 e^2)^2 2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right]. \quad (2.355)$$

Como as partículas envolvidas no espalhamento são férmions, i.e. $s_A = s_B = 1/2$, tem-se que

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{4} (4m^2 e^2)^2 2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right]. \quad (2.356)$$

No referencial do CM, tendo em vista um espalhamento de partículas de mesma massa, um ângulo de espalhamento θ e $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = |\vec{p}|$ como sendo os momenta inicial e final das partículas respectivamente, tem-se que as variáveis de Mandelstan são dadas por

$$s = 4(|\vec{p}|^2 + m^2), \quad (2.357)$$

$$t = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos \theta), \quad (2.358)$$

$$u = -2|\vec{p}|^2(1 + \cos \theta). \quad (2.359)$$

Fazendo-se (2.358) e (2.359) em (2.356) obtém-se

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{2} \frac{(4m^2 e^2)^2}{16|\vec{p}|^2} \left[\frac{2}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} + \frac{2}{\cos^4(\frac{\theta}{2})} - \frac{2}{\sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\theta}{2})} \right]. \quad (2.360)$$

Substituído-se (2.360) em (2.206), e lançado-se mão de (2.357) no limite não relativístico, isto é $s \approx 4m^2$, obtém-se a seção de choque diferencial no CM associada ao espalhamento Møller. Pode-se utilizar as expressões para seção de choque diferencial e total obtidas a partir da equação de KG, da subseção (2.6.4), para espalhamentos descritos a partir da equação de Dirac, pois os cálculos que se seguem para a obtenção de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ e σ para a equação de Dirac são os mesmos realizados para obtenção de tais grandezas a partir da equação de KG.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 \alpha^2}{16p^4} \left(\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} + \frac{1}{\cos^4(\frac{\theta}{2})} - \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\theta}{2})} \right). \quad (2.361)$$

Onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. A expressão (2.361) é a seção de choque diferencial não polarizada do espalhamento Møller, no limite não relativístico, no centro de massa.

Esse é um exemplo de cálculo de seção de choque diferencial à luz da QED, para partículas de número quântico de spin $1/2$. Mais resultados como esse, para outros espalhamentos, serão obtidos no capítulo de Aplicação das teorias e discutidos no capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

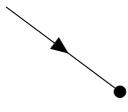
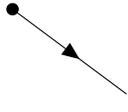
Esses cálculos de obtenção de \mathfrak{M} a partir da amplitude de transição T_{fi} que é oriunda das equações de campos (equação de Dirac ou equação de K.G.) estão subjacentes aos diagramas de Feynman. Observou-se ao longo das subseções (2.6.3) e (2.6.12) desse capítulo que existe uma relação entre os termos de \mathfrak{M} com diagramas de Feynman, de modo que a partir das regras de Feynman é possível expressar \mathfrak{M} diretamente, sem necessidade de cálculos mais complexos como aqueles feitos até aqui.

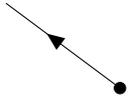
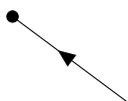
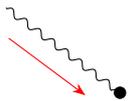
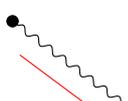
Na próxima seção (2.7) as regras de Feynman para a QED serão apresentadas, e no capítulo de Aplicações das teorias (3) as mesmas serão empregadas.

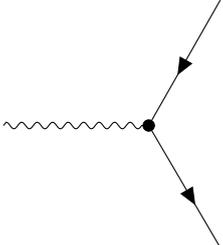
2.7 Regras De Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

Nessa seção serão apresentadas as regras de Feynman para a QED. Essas regras permitem o cálculo rápido de \mathfrak{M} sem necessidade recorrer a cálculos de amplitude de transição a partir de equações de campo. A tabela a seguir (2) apresenta a contribuição de cada objeto dos diagramas de Feynman da QED e é construída seguindo a tabela presente na seção 6.17 do capítulo 6 de [Halzen e Martin \(1984\)](#).

Tabela 2 – Sistematização das regras de Feynman para QED:

Linhas Externas do diagrama	Representação	Contribuição
Férmion entrando (no vértice)		u
Férmion saindo		\bar{u}

Anti férmion entrando		\bar{v}
Anti férmion saindo		v
Fóton entrando		ϵ_μ
Fóton saindo		ϵ_μ^*
Linhas internas do diagrama - Propagadores		
Férmion		$\frac{i(\not{p}+m)}{q^2-m^2}$
Fóton		$\frac{-i(g_{\mu\nu})}{q^2}$
Fatores de Vértices		

Vértice da QED		$ie\gamma^\mu$
----------------	--	----------------

Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

Nessa tabela estão as contribuições de partículas de spin $\frac{1}{2}$ e partículas de spin 1 (fóton), que são importantes para a obtenção de amplitudes invariantes de processos que serão analisados nesse trabalho.

As regras de Feynman são construídas a partir da sistematização das contribuições dos termos referentes a cada partícula do espalhamento. Essas contribuições foram obtidas nas várias subseções da seção (2.6), em especial da subseção (2.6.12).

Na tabela (2) aparecem quadrivetores polarização ϵ_μ para associados a fótons nas linhas externas dos diagramas. O quadrivetor polarização é um objeto do espaço usual, portanto comuta com os espinores e as matrizes gama.

Como os quadrivetores de polarização não foram mencionados previamente, a próxima subseção se dedica a explana-los.

2.7.1 Vetores de Polarização

A temática dos quadrivetores polarização pode ser explorada à luz da seção 6.9 do capítulo 6 de Halzen e Martin (1984).

Tais quadrivetores são usados para descrever fótons que estão nas extremidades dos diagramas, não entre dois vértices como acontece quando estes são partículas mediadoras.

No Eletromagnetismo clássico, um vetor polarização $\vec{\epsilon}$ é usado para descrever-se a polarização de uma onda eletromagnética, e.g. o vetor polarização

$$\vec{\epsilon} = E_0 \hat{x}, \quad (2.362)$$

descreve uma onda eletromagnética com amplitude E_0 que se propaga na direção z, polarizada na direção x (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013, p. 6 e 9).

O quadrivetor polarização aparece na solução da equação

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = 0. \quad (2.363)$$

Onde considera-se que A^μ é um campo que descreve fótons.

A eq. (2.363) é oriunda da eq. (2.147), a qual representa duas equação de Maxwell com o calibre de Lorentz, com $j^\mu = 0$. A partir do fato de que A^μ é um campo que

descreve fótons, pode-se considerar que as equações de Maxwell são equações de campo que descrevem fótons. Assim, tomar-se $j^\mu = 0$ em (2.147) torna tal equação uma equação para um fóton livre e o A^μ que resolve tal equação é um campo que descreve fótons livres.

A solução da eq. (2.363) é dada por

$$A^\mu = \epsilon^\mu(\vec{q})e^{-i(q^\mu x_\mu)}. \quad (2.364)$$

Substituindo-se (2.364) em (2.363) obtém-se

$$q^2 = 0, \quad (2.365)$$

que implica que $m_\gamma = 0$, vide eq. (3.43).

Como A^μ é um campo que descreve fótons, análogo ao campo de Dirac Ψ ou de KG ϕ , o ϵ^μ , a partir do qual A^μ é escrito, têm quatro componentes e é parte da solução que descreve os fótons (análogo aos espinores u).

Substituindo-se a solução (2.363) no calibre de Lorentz (2.149) e usando os operadores diferenciais da MQ para escrever $i\partial_\mu \rightarrow q_\mu$, da mesma forma que foi feito para se obter a equação de Dirac na forma dada por (2.263), obtém-se

$$q_\mu \epsilon^\mu = 0. \quad (2.366)$$

Como A^μ é escrito em termos de ϵ^μ , a transformação de calibre (2.148) vale para o quadrivetor polarização também:

$$\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^{\mu'} = \epsilon^\mu + a q^\mu. \quad (2.367)$$

Com a sendo uma constante. Isto é, dois vetores de polarização diferentes por um múltiplo de q^μ descrevem o mesmo fóton. É o análogo dos campos descritos por A^μ serem invariantes sob a transformação de calibre que leva A^μ para $A^{\mu'}$. A simetria das transformações de calibre pode ser usada para escolher-se $\epsilon^0 \equiv 0$, isso faz com que o calibre de Lorentz para ϵ^μ se reduza para

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{q} = 0. \quad (2.368)$$

Essa escolha é chamada de calibre de Coulomb e faz o calibre de Lorentz (2.366) assumir uma forma não covariante, dada por (2.368).

2.8 Cromodinâmica Quântica

Nessa seção serão apresentados alguns fenômenos relevantes da Cromodinâmica Quântica (QCD). Alguns destes serão tratados com QED, mas contando com elementos da formulação dos quarks e da força forte.

2.8.1 Hadronização

Para elaboração dessa subseção foi seguida a seção 8.1 capítulo 8 de [Griffiths \(2008\)](#).

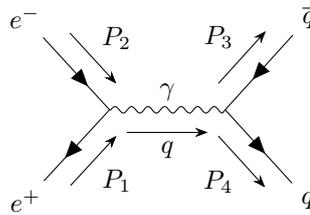
A QCD prevê que os Hádrons são formados por estados ligados de quarks com as propriedades descritas na figura (1). Os quarks são partículas elementares com número quântico de spin $s = 1/2$, então, salvo algumas adaptações, pode-se utilizar os resultados obtidos da equação de Dirac (que é usada para descrever partículas pontuais com $s = 1/2$) para o tratamento dos mesmos.

Além disso, quarks são partículas que podem ocorrer em processos que a princípio seriam do domínio da QED, como por exemplo:

$$e^+e^- \rightarrow q + \bar{q}. \quad (2.369)$$

É muito comum em espalhamentos da QED ocorrerem processos como o (2.369), cujo diagrama é dado pela figura (17)

Figura 17 – Diagrama do espalhamento (2.369).



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de [Ellis \(2017\)](#).

A partir da figura (17) vê-se que tal espalhamento pode ser estudado à luz da teoria da QED, pois o diagrama do mesmo é construído utilizando-se de vértices de tal teoria.

Quando os quarks são gerados no espalhamento (2.369), eles são por um breve instante de tempo partículas livres, até que o distanciamento entre eles fique na casa dos 10^{-15} m, que é a ordem de grandeza do diâmetro de um hádron, e a interação forte entre eles faça com que haja emissão de glúons, por parte dos quarks, que posteriormente geram novos pares quark-antiquark – esse conjunto de glúons e pares quark antiquark é chamado de chuva de pártons²⁶. Eventualmente os elementos do chuva se hadronizam, i.e. se tornam estados ligados, criando hádrons. O espalhamento

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} \rightarrow \text{Hádrons}. \quad (2.370)$$

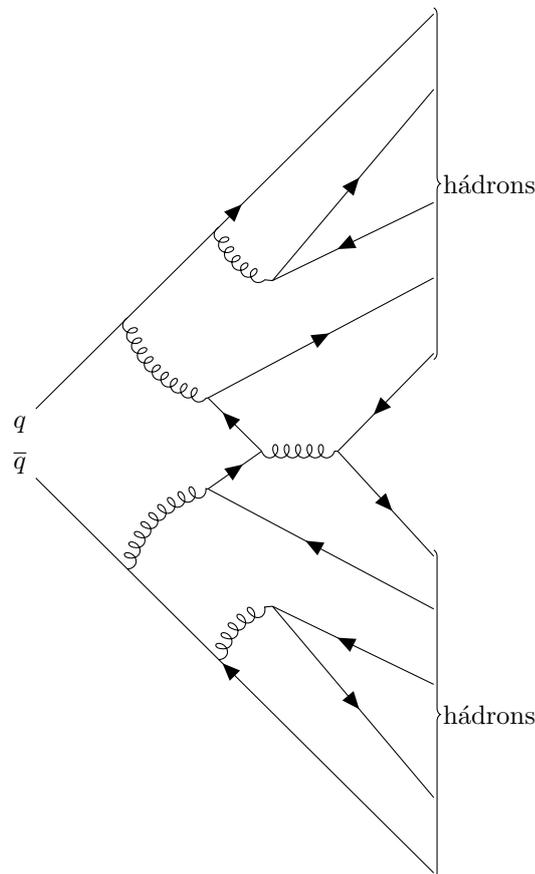
expressa esse processo. Esse fenômeno é chamado de Hadronização.

O par quark-antiquark não é, portanto, o resultado final do espalhamento, mas um resultado intermediário, isso decorre do fato de que não existem quarks livres na natureza.

²⁶ párton é um termo genérico para objetos que compõem hádrons.

O processo de hadronização observado em (2.370) acontece apenas se o par pósitron elétron tiver, no mínimo, energia igual à massa dos hádrons criados. A figura (18) expõe um diagrama de como esse processo ocorre.

Figura 18 – Representação do processo de Hadronização.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

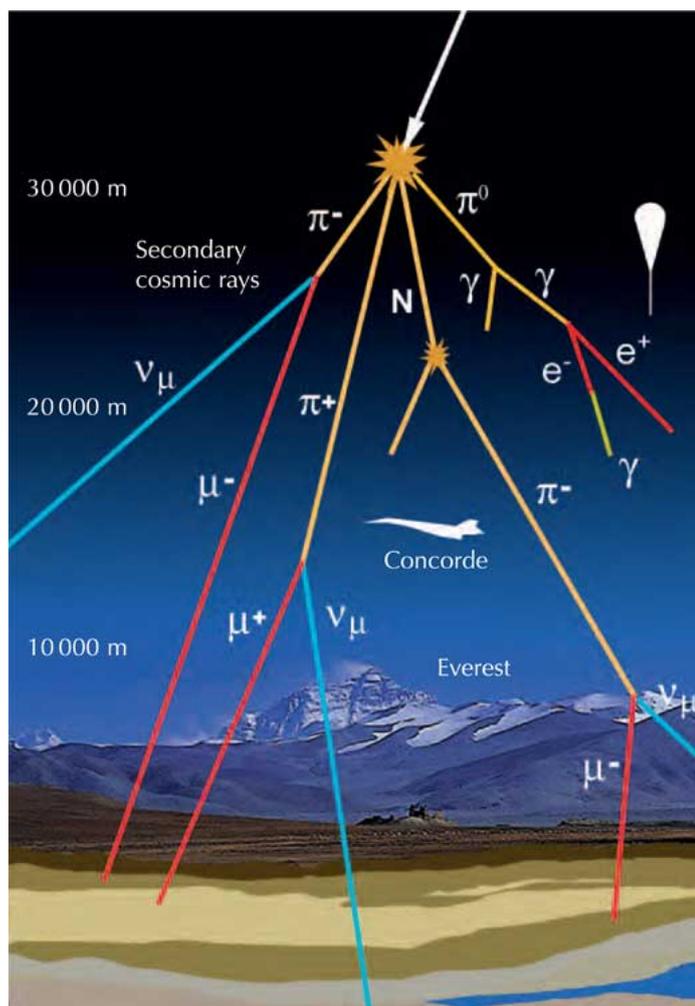
Embora a figura (18) só expresse a criação de dois jatos de hádrons, onde cada jato vai ter muitos hádrons, o processo de hadronização pode criar uma miríade de hádrons a depender da energia do par elétron-pósitron inicial.

O processo de hadronização é observado amplamente em colisões de astro partículas com moléculas da atmosfera terrestres. Nesse caso, prótons ou bárions altamente energéticos, que vem de fora do planeta Terra, após interagirem com moléculas da atmosfera dão origem a quarks, os quais por sua vez dão origem a outros hádrons vide processos análogos ao (2.370). Após um tempo esses hádrons decaem em outras partículas, que por sua vez decaem em outras e assim por diante. Esse processo é chamado de chuva atmosférica e está expresso na figura (19).

Na figura (19) o processo de hadronização ocorre criando mésons π^- , π^+ e π^0 além do bárion N .

O espalhamento (2.369) será estudado com detalhes na seção (3.3) do capítulo de

Figura 19 – Chuveiro atmosférico.



Fonte: [Barradas-Solas e Alameda-Meléndez \(2010\)](#).

Aplicações das teorias e os resultados extraídos do mesmo serão explanados na seção (4.3) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

2.8.2 Espalhamentos elétron-próton.

Para elaboração dessa subseção foram seguidas as seções 8.2 do capítulo 8 de [Griffiths \(2008\)](#) e 8.4 do capítulo 8 de [Griffiths \(1987\)](#).

Espalhamentos cujo alvo estacionário são partículas compostas constituíram grandes avanços para o estudo da estrutura da matéria, visto que as partículas espalhadas pelo alvo portam muitas informações sobre o mesmo. Uma discussão mais aprofundada sobre a importância histórica do estudo desses espalhamentos para a compreensão da estrutura do átomo e dos hádrons é apresentada nas seções (4.2) e (4.5) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

Um espalhamento dessa categoria que constituiu grande avanço para tal compreen-

são foi o espalhamento elétron próton, dado por

$$e^- + p \rightarrow e^- + p, \quad (2.371)$$

visto que espalhamentos de p estacionários por léptons são uma boa forma de se estudar a estrutura do próton, pois léptons são objetos pontuais. O espalhamento (2.371) é chamado de espalhamento elétron próton elástico, e ocorre quando o elétron que incide sobre o próton não tem energia suficientemente grande a ponto de interagir com os quarks dos próton. Isto é, o fóton que o elétron troca com o próton tem um comprimento de onda de ordem de grandeza maior ou igual ao tamanho do mesmo, fazendo-o apenas recuar.

Por outro lado, quando o elétron tem energia suficiente alta, de modo que o fóton que ele troca com o próton tem um comprimento de onda de ordem de grandeza pequena o suficiente de modo que o fóton interage com os constituintes do próton, o espalhamento (2.371) torna-se inelástico, dado por

$$e^- + p \rightarrow e^- + X. \quad (2.372)$$

Onde X representa “qualquer coisa”. Esse tipo de espalhamento é chamado de espalhamento inelástico profundo.

Espalhamentos inelásticos profundos são uma classe de espalhamentos envolvendo hádrons (estacionários ou não), onde novas partículas são produzidas a partir de hadronização devido à alta energia das partículas incidentes que interagem com os quarks dos hádrons. Tal interação com os quarks estimula os mesmos a iniciarem processos de hadronização.

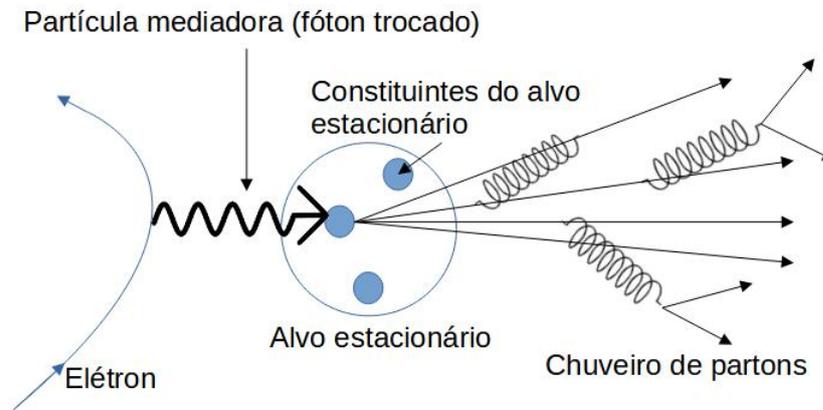
Esses espalhamentos são chamados de inelásticos pelo fato das partículas iniciais não serem as mesmas que a finais, o que implica que parte da energia associada ao movimento das partículas iniciais se transferiu para a criação de novos estados ligados X .

A figura (20) ilustra o espalhamento (2.372), onde um elétron troca um fóton com um bárion estacionário. Como a energia do fóton é alta, seu comprimento de onda é pequeno de modo que este consegue interagir com os constituintes que compõem o alvo estacionário. A interação do fóton com os quarks do bárion desencadeia a criação de um chuveiro de pártons que posteriormente se hadroniza, gerando novos estados ligados que fazem com que os elétrons espalhados saiam com uma energia a diferente de sua energia inicial E e bem menor que E' observada em espalhamento elásticos (BLOOM et al., 1969, p. 932).

Experimentalmente, é possível identificar as hadronizações, pois elas geram picos característicos de estados ligados nos gráficos de seção de choque diferencial por energia ($\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}$) em função energia transferida pelo fóton W , com $W = E - E'$.

Um exemplo de gráfico de seção de choque diferencial por energia, para o espalhamento (2.372), onde hadronizações se evidenciam está disposto na figura (21). Nesta é

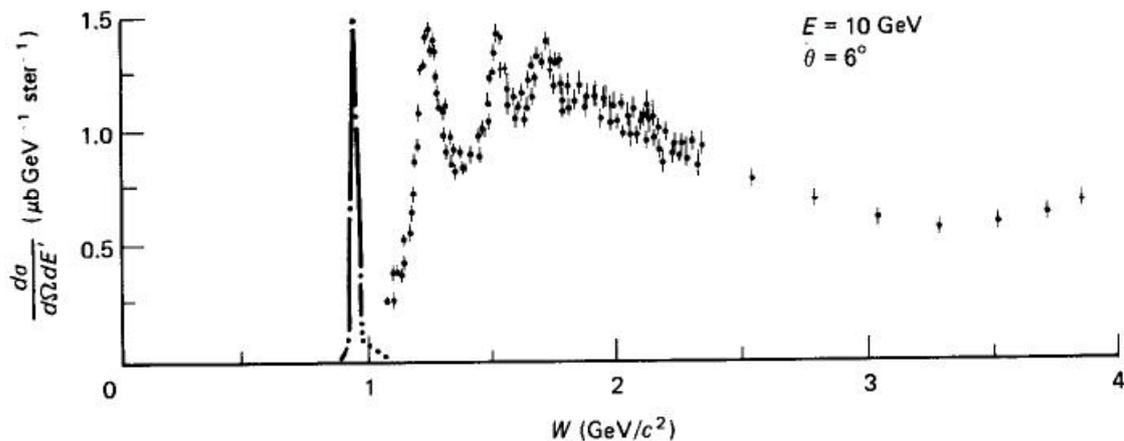
Figura 20 – Esquema que ilustra a interação entre elétron e alvo composto em um espalhamento com alvo estacionário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

possível observar um primeiro pico, qual seria o único no gráfico caso o espalhamento fosse elástico – se o próton se comportasse como uma partícula pontual –, contudo conforme a energia do fóton passa pela energia de repouso de novos estados ligados observa-se novos picos gerados por hadronização. Os hádrons evidenciados na curva da figura (21) correspondem ao X da eq. (2.372).

Figura 21 – Seção de choque diferencial por energia E' em função da energia transferida do fóton para criação de estados ligados.



Fonte: Griffiths (1987, p. 269).

Historicamente, os quarks foram corroborados e aceitos pela comunidade científica posteriormente aos estudos dos espalhamentos de prótons por elétrons e o processo de hadronização, que acontece nos espalhamentos inelásticos, só foi devidamente explicado, via QCD, em um período posterior. Assim, apesar do espalhamento inelástico estar sendo explicado à luz das teorias modernas do MP nesse trabalho (hipótese dos quarks e QCD),

na época em que esses espalhamentos começaram a ser evidenciados não se tinha acesso a essas explicações.

Outro resultado experimental relevante que diz respeito ao espalhamento (2.372) foi o fato de que alguns dos elétrons no espalhamento inelástico profundo eram defletidos por ângulos até trinta vezes maiores do que o esperado. Tal resultado reforçou a hipótese dos prótons, e outros hádrons, serem composto por “caroços” rígidos (PAIS, 1986, p. 573).

Assim, analogamente ao caso do experimento estudado por Rutherford (1911), os experimentos de espalhamento inelástico profundo revelaram a estrutura interna “rígida” dos alvos devido a espalhamentos com ângulos grandes. No caso do espalhamento inelástico, observa-se também uma perda de energia dos objetos espalhados devido ao que se entenderia posteriormente como sendo o processo de hadronização, exposto na figura (20).

Um outro aspecto que pode ser destacado é que o acontecimento de deflexões angulares grandes e hadronização não é algo exclusivo dos espalhamentos inelásticos de elétron em prótons, podendo ocorrer para espalhamentos diferentes do (2.372). Por exemplo, para um caso espalhamento inelástico profundo no ref. do CM, como

$$p + p \rightarrow \pi^0 + X, \quad (2.373)$$

estudado por Büsser et al. (1973), devido à alta energia dos feixes, os prótons se aproximam de modo que os quarks dos mesmos interajam, via troca de glúons, espalhando um dos quarks de um dos p . Este quark posteriormente produz um chuva de pártons que se hadroniza, formando um pión neutro com momentum similar ao do quark inicial e outros hádrons quaisquer, denotados por X . O quark que emitiu o glúon também contribui com X , visto que a partir deste desencadeiam-se também chuvas de pártons. Alguns π^0 criados sofrem deflexões grandes, assim como as deflexões das partículas α observadas por Rutherford, Geiger e Marsden.

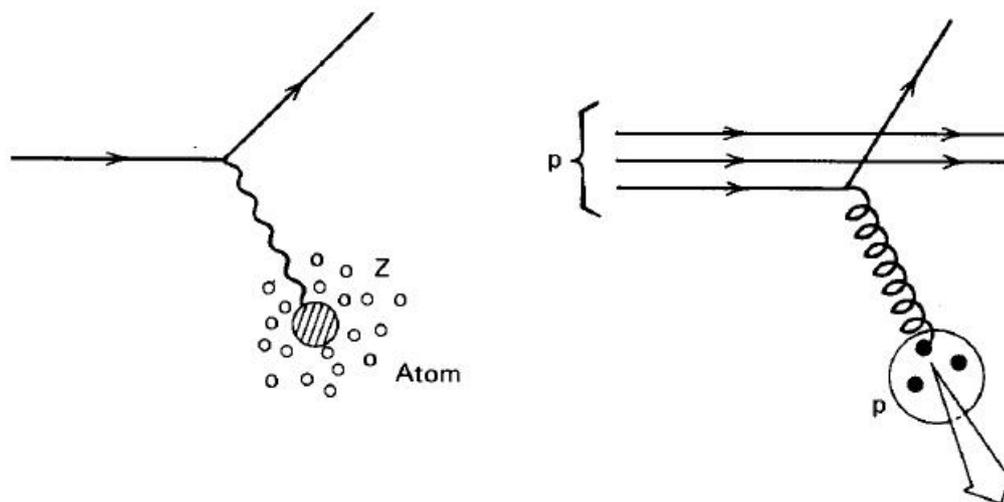
Diagramas que representam o espalhamento (2.373) e o espalhamento estudado por Rutherford são expressos na figura (22).

Na figura (23) estão expostos os resultados experimentais de número de ocorrências do espalhamento por ângulo (ou momentum espacial transversal $|\vec{p}_\perp| = |\vec{p}_f| \sin \theta$, i.e. componente do momentum espacial da partícula espalhada \vec{p}_f perpendicular ao feixe inicial) para o espalhamento estudado por Rutherford e para o espalhamento (2.373) que evidenciam a semelhança entre os espalhamentos. Essa semelhança corrobora com o fato de que objetos pontuais dentro dos hádrons espalham as partículas incidentes.

A figura (23) foi compilada a partir dos trabalhos de Geiger e Marsden (1913) e Büsser et al. (1973) por Halzen e Martin (1984).

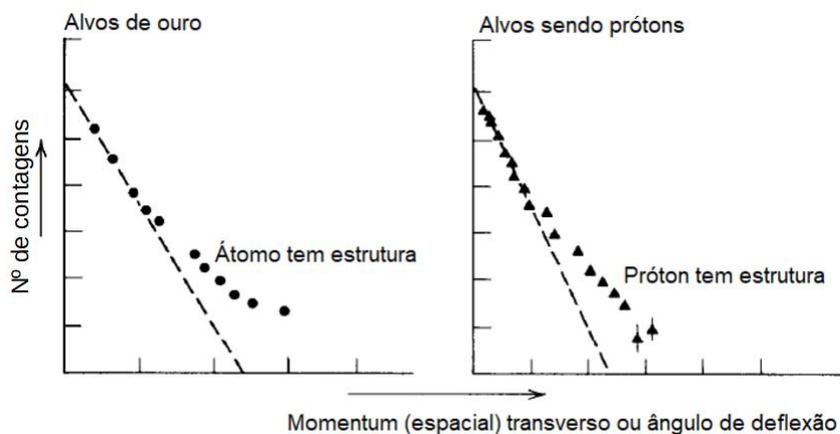
Por fim, os resultados experimentais do espalhamento inelástico (hadronização e deflexões angulares grandes) deram força a hipótese de que os hádrons eram compostos

Figura 22 – Diagramas que representam a interação entre partículas α com o átomo (esquerda) e o espalhamento inelástico profundo (2.373) (direita).



Fonte: Adaptado de Halzen e Martin (1984, p. 17).

Figura 23 – Comparação entre o resultado obtidos no experimento de Geiger, Marsden e Rutherford, para o espalhamento de partículas α sobre folhas de ouro, e o experimento de espalhamento inelástico profundo de elétrons em prótons.



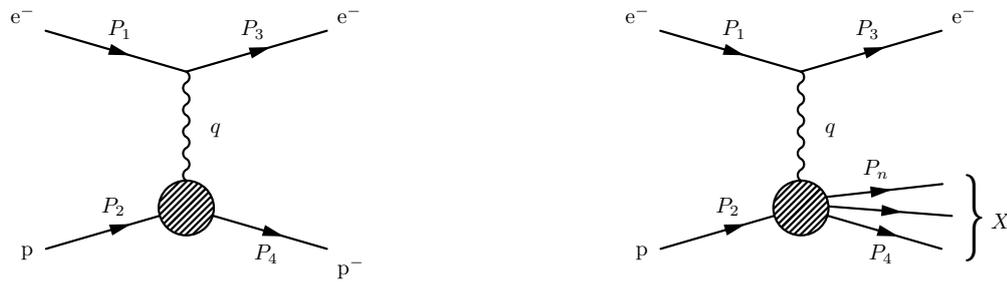
Fonte: Adaptado de Halzen e Martin (1984, p. 17).

e levaram à formulação do modelo dos pártons. Tal modelo, que é discutido na próxima subseção, levou a resultados que contribuíram para a hipótese dos quarks.

Os resultados obtidos a partir da equação de Dirac podem ser usados para se estudar os espalhamentos (2.371) e (2.372). Os diagramas desses espalhamentos são dados pelas figuras (24a) e (24b).

Esses diagramas da figura (24) são diagramas de ordem dois em e da QED. Os círculos nos vértices do próton são usados para indicar que não assume-se que o próton é

Figura 24 – Diagramas de Feynman do espalhamento elétron próton.



(a) Espalhamento elétron próton elástico. Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/CMS/wiki) (2021).
 (b) Espalhamento elétron próton inelástico. Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/CMS/wiki) (2021).

um objeto pontual, trata-se de uma adaptação necessária para se empregar os resultados da QED para o estudo desses espalhamentos.

O estudo detalhado dos espalhamentos (2.371) e (2.372) ocorrerá na seção (3.5) do capítulo de Aplicação das teorias e a discussão desse estudo será exposto na seção (4.5) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

2.8.3 pártons e quarks.

Nessa subseção será apresentada uma breve revisão histórica acerca da origem do modelo dos quarks e dos pártons, a fim de subsidiar uma discussão sobre quarks e pártons que será realizada nas seções (3.6) ,do capítulo de Aplicações das teorias, e seção (4.6), do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

O rápido desenvolvimento de aceleradores de partículas a partir da década de 30 levou ao descobrimento de vários hádrons de modo que no começo de década de 50 o número de hádrons detectados já era muito grande. Eram muitas partículas, uma verdadeira “proliferação” ou “zoológico de partículas”(PEDUZZI, 2010, p. 68). Esse grande número de partículas levou o físico ganhador do nobel de 1955 Willis Lamb a proferir em seu discurso: “Eu ouvi dizer que ‘o descobridor de novas partículas elementares costumava ser recompensado com um Premio Nobel, mas tal descoberta agora deve ser punida com uma multa de R\$10,000’. ” (GRIFFITHS, 2008, p. 33)

Os esforços no sentido de tentar classificar esse grande número de partículas iniciaram-se na metade da década de 50, supondo-se que algumas eram mais elementares que outras. Nesse sentido, destacam-se os esforços de Pais, Gell-Mann, Nishijima, Sakata e outros (BASSALO, 2012, p. 93)

Um desses sistemas de classificação foi introduzido independentemente por Gell-Mann e Ne’eman em 1961, no qual agrupavam-se os hádrons em famílias de acordo com números quânticos associados ao mesmos. As combinações possíveis eram descritos por

teoria de grupos (PEDUZZI, 2010, p. 68). Teoria de grupos é uma formulação matemática que se dedica ao estudo das simetrias (GRIFFITHS, 2008, p. 118), as quais estão relacionadas com leis de conservação na física. O emprego de teoria de grupos para tentar classificar os hádrons vinha sendo empregado por Gell Mann, Pais e Nishijima desde 1954 (BASSALO, 2012, p. 93).

Após desenvolvimentos posteriores da formulação inicial, em 1964 Gell-Mann e Zweig, independentemente, chegam ao modelo dos quarks (que eram chamados de Ases por Zweig) para se explicar os hádrons (BASSALO, 2012, p.98). Os quarks, que inicialmente eram três (u , d e s) mais seus respectivos anti-quarks, eram objetos de número quântico de spin $s = 1/2$, de carga fracionária a partir dos quais os bárions e mésons poderiam ser construídos (GELL-MANN, 1964, p. 214).

É importante deixar claro que as proposições de Gell-Mann eram puramente teóricas. Segundo Shellard (2012, p. 124) “os quarks foram propostos como algoritmos para classificação dos hádrons. Posteriormente descobriu-se que eles tinham existência real”. Assim, a ideia de quarks como partículas elementares formadoras de hádrons era inicialmente oriunda do campo matemático de teoria de grupos.

Mesmo assim, a teoria dos quarks já tinha uma certa credibilidade inicial em 1964, devido ao fato de que um modelo preliminar dos quarks previra, em 1961, a existência de um hádron nunca antes detectado (o Ω^-), qual foi observado em 1964 (GRIFFITHS, 2008, p. 37).

Contudo, mesmo com o sucesso da teoria dos quarks em agrupar e prever um novo hádron, houve muita cautela por parte da comunidade científica e levou-se muito tempo até que se considerasse que os quarks eram os componentes dos hádrons. O principal problema em se corroborar a existência dos quarks é o fato deles não poderem ser observados livres na natureza, logo, não havia e nunca houve até hoje uma evidência direta da existência dos quarks. Essa cautela da comunidade científica aparece até mesmo na obtenção do Nobel por Gell-Mann, segundo Peduzzi (2010, p. 94)

Em 1969 Gell-Mann é laureado com o Prêmio Nobel de Física “por suas contribuições e descobertas relativas a classificação das partículas elementares e suas interações”. Nessa honraria, não há qualquer menção ao quark.

Posteriormente, alguns resultados experimentais passaram a dar indícios de que os quarks poderiam existir de fato.

Os estudos experimentais do espalhamento (2.372) realizados no final da década de 1969 constituíram uma corroboração experimental para a hipótese de que haviam partículas pontuais no interior dos hádrons, principalmente as deflexões sofridas por alguns dos elétrons, que eram até trinta vezes maiores que o previsto (PAIS, 1986, p. 573). Esses resultados motivaram físicos como Feynman (PEDUZZI, 2010, p. 94), e posteriormente Bjorken, Callan e Gross (GRIFFITHS, 1987, p. 269-270) a construir e estudarem um

modelo de hádrons constituídos por partículas pontuais, as quais Feynman chamou de pártons (FEYNMAN, 1988, p. 292).

Assim, os estudos dos pártons representavam a cautela da comunidade científica em não admitir a hipótese dos quarks inicialmente.

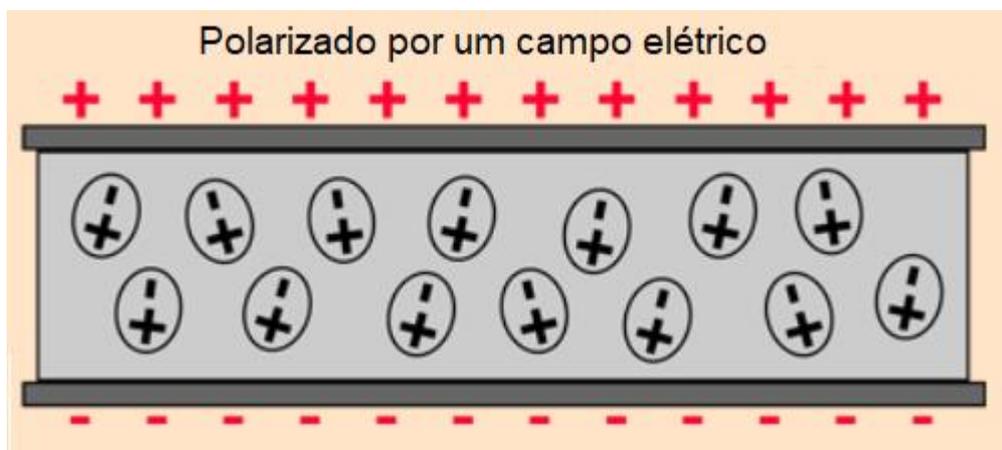
O estudo detalhado do espalhamento (2.372) à luz dos pártons ocorrerá na seção (3.6) do capítulo de Aplicação das teorias e a discussão desse estudo será exposto na seção (4.6) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

2.8.4 Liberdade Assintótica.

Nessa subseção será apresentado de forma conceitual o fenômeno de liberdade assintótica. Para elaboração da mesma orientou-se com base na seção 8.6 do capítulo 8 de Griffiths (2008).

Quando um material não condutor (chamado também de dielétrico) neutro é colocado na presença de um campo elétrico \vec{E}_0 , tal material torna-se polarizado. Isso significa que o campo elétrico \vec{E}_0 , suponha-se que seja um campo gerado por uma carga positiva, faz as cargas positivas de cada átomo do corpo neutro se afastarem do campo e as cargas negativas se aproximarem. Assim, cada átomo do corpo fica polarizado – com as cargas positivas em uma extremidade e as negativas em outra. Esse fenômeno é chamado de polarização de dielétricos (GRIFFITHS, 2011a, p. 113). A figura (25) representa um material dielétrico polarizado. Em tal figura, cada átomo do material é representado por pequenas elipses com + e –, que representam, respectivamente, as cargas positivas e negativas de cada átomo.

Figura 25 – Representação de um material dielétrico polarizado.

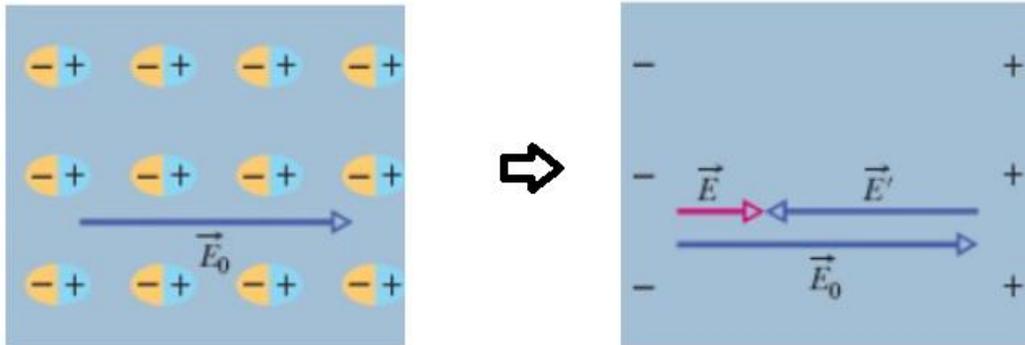


Fonte: Adaptado de (HYPERPHYSICS, 2022).

Mediante a presença do campo externo \vec{E}_0 , a reconfiguração das cargas no dielétrico vai gerar um campo \vec{E}' entre as extremidades do mesmo, conforme mostrado na figura

(26) .

Figura 26 – Organização de cargas no interior de um dielétrico e fenômeno de redução de campo externo no interior do mesmo.



Fonte: Adaptado de [Halliday, Resnick e Walker \(2016, p. 292\)](#).

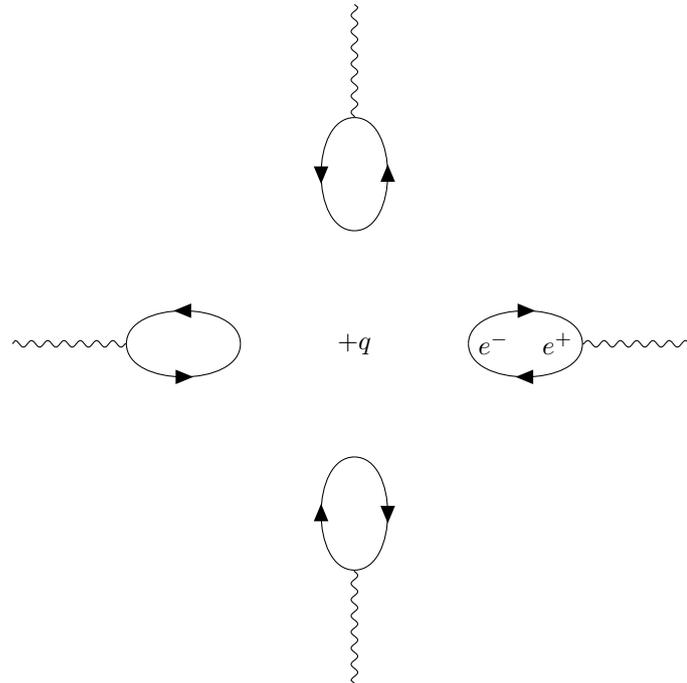
Isso ocorre devido à concentração de cargas nas superfícies do dielétrico, ao passo que em seu interior não há excesso de cargas. A ausência do excesso de cargas no interior do dielétrico decorre do fato de que em qualquer elemento de volume dentro do mesmo a carga resultante é nula, embora os átomos do dielétrico estejam polarizados, eles permanecem inteiramente neutros. Já nas superfícies, o dielétrico fica carregado, pois nestas concentram-se as extremidades polarizadas dos átomos polarizados, conforme mostra a figura (26).

No interior do dielétrico, o campo \vec{E}' se opõe ao campo externo \vec{E}_0 de modo que sua soma seja \vec{E} . Isso mostra que no interior do dielétrico o campo é reduzido devido a sua polarização ([HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016, p. 292](#)).

O vácuo também funciona como um material dielétrico, pois nele há o aparecimento espontâneo de pares elétron-pósitron o quais se aniquilam em fótons posteriormente ([GRIFFITHS, 2008, p. 69](#)). O aparecimento desses pares é uma decorrência do princípio da incerteza energia-tempo que estabelece que em um sistema quântico é possível que por curtos períodos de tempo de transição $i \rightarrow f$ a energia de sistema possa ser altamente incerta, desse modo pode-se ter o surgimento de partículas cuja massa de repouso coincide com a energia incerta do sistema.

Devido ao aparecimento de pares e^-e^+ no vácuo, a presença de uma partícula com carga elétrica tende a polarizar o mesmo. A figura (27) representa esse processo. É importante deixar claro que a figura (27) não é uma diagrama de Feynman, apesar de conter elementos de um diagrama. Trata-se de uma representação meramente ilustrativa.

Em tal figura, a representação de pares é feita através de uma elipse cujo arco superior é uma partícula e com o arco inferior sendo uma antipartícula. Essa representação

Figura 27 – Representação da polarização do vácuo em torno de uma carga $+q$.

Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de [Ellis \(2017\)](#).

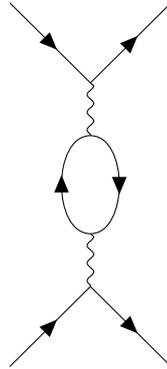
indica que o par surge de um mesmo ponto do espaço e logo depois se aniquila, em um fóton. Na figura (27), no intervalo de tempo entre criação e aniquilação do par, o elétron se aproxima da partícula com carga positiva $+q$ e o pósitron se afasta, da mesma forma como ocorre no interior de dielétricos submetidos a campos elétricos externos.

O aparecimento de pares partícula antipartícula tende a acontecer a todo momento, de modo que qualquer partícula com carga fica sempre cercada por uma “blindagem” polarizada, como a da figura (27), ao longo de toda extensão de seu campo elétrico. Assim todo o vácuo, ao longo do campo elétrico de uma partícula com carga, funciona como um dielétrico polarizado e portanto enfraquece o campo elétrico da partícula. Sem a blindagem da polarização é dito que a partícula é nua.

Como a força eletromagnética que uma dada partícula com carga Q exerce sobre outras depende do campo que ela cria, e o campo que ela cria depende da carga total dela, a presença dos pares e^-e^+ polarizados em torno da partícula com carga Q acaba fazendo com que outras partículas “vejam” uma quantidade de carga menor que a quantidade real de carga Q , devido a blindagem. Desse modo, se uma outra partícula com carga estiver bastante perto e for se aproximando cada vez mais da partícula com carga Q , ela vai sentido um aumento na força entre ela e a outra partícula devido à redução da blindagem.

O diagrama (28) representa a interação entre duas partículas com carga, mediante a presença da blindagem oriunda de um par e^-e^+ . Nos diagramas esses pares são chamados de loops. Existem diagramas que posicionam mais loops, para levar em consideração a

Figura 28 – Diagrama de Feynman para interação de duas partículas sob ação da blindagem do vácuo polarizado.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

blindagem de mais pares.

A blindagem do vácuo impede que se as partículas interajam “nuas” umas com as outras, a não ser que uma penetre suficientemente na blindagem da outra, de modo que uma partícula seja posicionada quase que sobre a outra. Para que as partículas consigam chegar perto uma da outra nesse nível é necessário fornecer uma energia da ordem de 10^{280} MeV para uma das partículas, o que faria a força eletromagnética entre as partículas divergir.

O fato relevante sobre a polarização para a interação eletromagnética é que se as partículas se aproximam suficientemente há um efeito de aumento da força entre as partículas devido a diminuição da blindagem. Já na interação forte, entre quarks, ocorre o contrário, devido ao efeito dos glúons há o que se chama de liberdade assintótica. Tal efeito implica que quando estão mais próximos, os quarks não sentem atração tão forte, mas se tenta-se separá-los a tendência é que a força de atração entre eles aumente significativamente, de modo que seria necessário uma energia infinita para separar quarks de estados ligados (GRIFFITHS, 2008, p. 71).

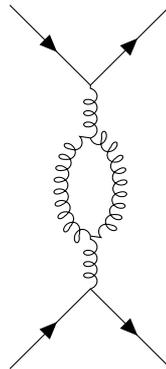
Para ser mais preciso, o efeito dos glúons que causa esse fenômeno é o da formação de bolhas de glúons. Tais bolhas geram efeito de diminuição da força entre quarks conforme eles se aproximam e aumento da mesma conforme ele se afastam. Elas ocorrem devido ao fato dos glúons poderem interagirem entre si, diferente dos fótons.

Na realidade, no interior dos hádrons há o surgimento de pares quark antiquark e isso também gera mesmo o efeito de polarização do vácuo supracitado para o par elétron pósitron, mas ao invés dos pares quark antiquark blindarem a carga elétrica de um quark elas blindam sua carga-cor. Desse modo, seria de se esperar que a medida que outro quark se aproxima suficientemente haveria um efeito de aumento da força de interação de suas cores devido a diminuição da blindagem. No entanto, devido ao efeito das bolhas de glúons, que é mais forte que a interação da carga-cor entre os quarks, há a predominância

da liberdade assintótica, de modo que os quarks podem ficar bastante próximos sem se sentirem atraídos.

O diagrama (29) representa o efeito de uma bolha de glúons na interação entre quarks. Nos diagramas essas bolhas são chamadas de loops de glúons.

Figura 29 – Diagrama de Feynman para interação de dois quarks sob ação de um loop de glúon.

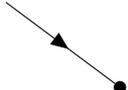


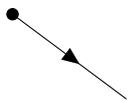
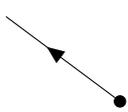
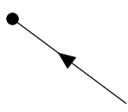
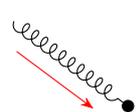
Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

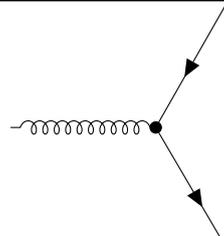
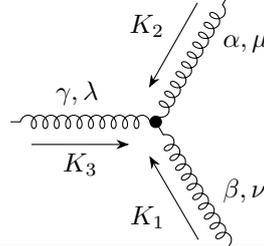
2.9 Regras De Feynman para a Cromodinâmica Quântica

Nessa seção serão apresentadas as regras de Feynman para a QCD. Essas regras permitem o computo rápido de \mathfrak{M} , sem necessidade recorrer a cálculos amplitude de transição a partir de equações de campo. A tabela a seguir (3) apresenta a contribuição de cada objeto dos diagramas de Feynman da QCD e é construída seguindo a tabela presente na seção 8.3 do capítulo 8 de Griffiths (2008).

Tabela 3 – Sistematização das regras de Feynman para QCD:

Linhas Externas do diagrama	Representação	Contribuição
Quark entrando (no vértice)		uc

Quark saindo		$\bar{u}c^\dagger$
antiquark entrando		$\bar{v}c^\dagger$
antiquark saindo		vc
Glúon entrando		$\epsilon_\mu a^\alpha$
Glúon saindo		$\epsilon_\mu^* (a^\alpha)^*$
Linhas internas do diagrama - Propagadores		
Férmion		$\frac{i(\not{P}+m)}{q^2-m^2}$

Glúon		$\frac{-i(g_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta})}{P^2}$
Fatores de Vértices		
Vértice dois quarks e um glúon		$\frac{ig_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu$
Vértice de glúons		\mathfrak{G}

Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

Onde

$$\mathfrak{G} = -g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu} (K_1 - K_2)_\lambda] - g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\nu\lambda} (K_2 - K_3)_\mu] - g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\lambda\mu} (K_3 - K_1)_\nu] . \quad (2.374)$$

Os termos que aparecem na tabela (3) não foram demonstrados formalmente a partir da análise de equações de campo e espalhamentos da força forte, como foi feito para a QED. Desse modo, esse trabalho se propõe apenas a apresentar e explicar os termos das regras de Feynman da QCD.

A forma de se obter os T_{fi} e suas respectivas relações com os diagramas da QCD é através da equação de Dirac com invariância de calibre de $SU(3)$ (grupo de simetria a partir do qual a QCD é construída) (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 317). Por intermédio desses passos obter-se termo V da QCD e bastaria seguir passos análogos aos que foram feitos para a QED.

A Cromodinâmica Quântica foi formulada seguindo-se os moldes da Eletrodinâmica Quântica, logo, com algumas adaptações, pode-se empregar as regras de Feynman de forma análoga. O termo c que acompanha os espinores dos quarks é um tensor que representa a cor de cada quark, podendo ser

$$c = r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.375)$$

Para vermelho .

$$c = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.376)$$

Para azul. E

$$c = g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.377)$$

Para verde.

Quando trata-se de antiquarks, os vetores de anti cor associados aos mesmos $(\bar{r}, \bar{b}$ e $\bar{g})$ são dados pelos vetores de cor (2.375)-(2.377), mas com o conjugado hermitiano. Isso não significa que todo o vetor de cor com \dagger represente um antiquark com anti cor, apenas que (vetor anti cor) = (vetor cor) † .

O termo a^α presente no termo do glúon, representa um dois oito possíveis estados de cor do glúon. O termo g_s representa a constante de acoplamento da força forte, que é uma grandeza que representa a intensidade da força forte sendo proporcional a carga cor dos quarks. O termo λ^α é uma das possíveis 8 matrizes de Gell-Mann, que são matrizes características da QCD que obedecem a relação de comutação.

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = 2f^{\alpha,\beta,\gamma}\lambda^\gamma , \quad (2.378)$$

com uma soma implícita sobre γ de um até oito (não é uma soma de Einstein).

As matrizes de Gell-Mann são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.379)$$

Por fim, o termo $f^{\alpha,\beta,\gamma}$ é um termo oriundo das relações de comutação das matrizes de Gell-Mann chamado de constante de estrutura. Todos esses objetos são objetos do espaço da cor e assim como objetos do espaço do spin eles só comutam entre si por meio de relações específicas, como a (2.378) para o caso das matrizes de Gell-Mann.

3 Aplicações das teorias.

Nesse capítulo serão expostas as aplicações das teorias apresentadas no capítulo da Fundamentação Teórica (QED e QCD). Essas serão aplicadas no estudo e análise de alguns espalhamentos já previamente discutidos no capítulo anterior, a fim de se realizar o computo da seção de choque e outras grandezas relevantes. Para tal foram seguidas as seções 6.3, 6.4, 6.5 e 6.8 do capítulo 6 de [Halzen e Martin \(1984\)](#), para os espalhamentos (3.1) e (2.165), as seções 8.1, 8.2 e 8.4 do capítulo 8 de [Griffiths \(2008\)](#), para os espalhamentos (2.370), (2.371) e (3.80), e a seção 8.4 e 8.5 do capítulo 8 de [Griffiths \(1987\)](#) para o espalhamento (2.372) e o modelo de pártons.

3.1 Aniquilação de par elétron pósitron seguida de criação de par múon-anti múon.

O primeiro espalhamento a ser estudado é a aniquilação do par elétron pósitron seguida de criação de par múon-anti múon. Tal espalhamento é dado por

$$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+, \quad (3.1)$$

e será estudado à luz da teoria da QED. O espalhamento pode ter sua \mathfrak{M} associada obtida a partir do diagrama de Feynman dado pela figura (30).

Para fins de demonstração do uso das regras de Feynman a partir da análise de diagramas, a figura (30) foi elaborada de modo que nela estão dispostas dois arcos que servem para orientar a leitura do diagrama. A partir da leitura obtém-se, por intermédio das regras de Feynman, a amplitude invariante \mathfrak{M} .

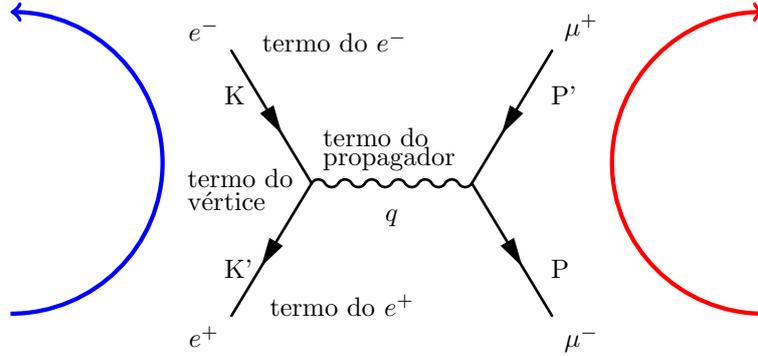
Para ler-se corretamente o diagrama de Feynman deve-se seguir as linhas das partículas acompanhando-se os arcos na figura (30). Seguindo a orientação do arco azul, inicia-se na linha do pósitron que sai do vértice, passando pelo vértice e seguindo até o elétron que entra no vértice. Esses são seguidos pelo propagador, que é seguido dos elementos obtidos seguindo-se a orientação do arco vermelho que parte da linha do múon que sai do vértice, passando pelo vértice e indo até o anti múon que entra no vértice.

Seguindo-se essa ordem de leitura, constrói-se o \mathfrak{M} associando-se um termo para cada objeto do diagrama:

$$\mathfrak{M} = (\text{termo do } e^+ \text{ saindo do vértice})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } e^- \text{ entrando no vértice}) \\ (\text{termo do propagador}) (\text{termo do } \mu^- \text{ saindo do vértice})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } \mu^+ \\ \text{entrando no vértice}).$$

(3.2)

Figura 30 – Diagrama de Feynman do processo (3.1) adaptado para aplicação das regras de Feynman.



Adaptado de : [UZH.CMS.wiki](https://www.uzh.ch/cms/wiki/) (2021).

Essa é a forma de se ler um diagrama para construção de \mathfrak{M} . A ordem dos termos na construção de \mathfrak{M} é relevante, e deve-se sempre ler o diagrama começando pela partícula cuja seta aponta para fora do vértice. Este foi apenas um exemplo sobre como se lê um diagrama para se utilizar as regras de Feynman. Mais três exemplos com diagramas diferentes são apresentados no apêndice (B).

Utilizando-se das regras de Feynman da QED dispostas na (2), pode-se obter a expressão de \mathfrak{M} em termos dos objetos que descrevem as partículas envolvidas no espalhamento:

$$-i\mathfrak{M} = \bar{v}(\vec{k}') (ie\gamma^\mu) u(\vec{k}) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}(\vec{p}') (ie\gamma^\nu) v(\vec{p}) . \quad (3.3)$$

Onde $q = K + K'$. Realizando a contração do tensor métrico e multiplicando os dois lados de (3.3) por i

$$\mathfrak{M} = -e^2 \bar{v}(\vec{k}') (\gamma^\mu) u(\vec{k}) \left(\frac{1}{q^2} \right) \bar{u}(\vec{p}') (\gamma_\mu) v(\vec{p}) . \quad (3.4)$$

Para obter-se a seção de choque não polarizada deve-se tomar o módulo ao quadrado da amplitude invariante e tomar-se a média sobre as configurações de m_s para as partículas. Nesse tipo de espalhamento (em que há dois tipos de partículas envolvidas) é conveniente escrever a (2.341) como o produto interno entre dois tensores de ordem 2

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{e^-}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\mu^-} . \quad (3.5)$$

Na expressão (3.5) a somatória sobre os estados de número quântico magnético de spin m_s está incorporada dentro dos tensores L . Para o termo do elétron e do pósitron

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{m_s \text{ do } e^-} \sum_{m_s \text{ do } e^+} [\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\mu u(\vec{k})][\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\nu u(\vec{k})]^* . \quad (3.6)$$

Como $\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\nu u(\vec{k})$ é um número por ser o produto de um vetor coluna, uma matriz e um vetor linha, a operação do complexo conjugado é a mesma que o conjugado hermitiano, disso segue que

$$[\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\nu u(\vec{k})]^* = [\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\nu u(\vec{k})]^\dagger . \quad (3.7)$$

Escrevendo-se $\bar{v} = v^\dagger\gamma^0$ tem-se que

$$[\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\nu u(\vec{k})]^\dagger = [(v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)\gamma^\nu u(\vec{k})]^\dagger . \quad (3.8)$$

Ação do operador \dagger sobre a expressão (3.8) resulta em

$$[(v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)\gamma^\nu u(\vec{k})]^\dagger = (v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger u^\dagger(\vec{k}) . \quad (3.9)$$

A ação do conjugado hermitiano \dagger sobre o termo $(v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)$ vai fazer v^\dagger ir de um vetor linha para um vetor coluna $(v^\dagger)^\dagger = v$ (lembre-se que \dagger toma a transposta, que é trocar linhas por colunas de uma matriz, mais o conjugado complexo). Para que o produto de v com γ^0 seja possível, deve-se fazer $(v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^\dagger v(\vec{k}')$, lembrando que vetores linha multiplicam matrizes pela esquerda e vetores colunas multiplicam matrizes pela direita. Como o operador \dagger troca as linhas pelas colunas, e toma o complexo conjugado, de uma matriz qualquer, logo o conjugado hermitiano de uma matriz continua sendo uma matriz, além disso, pela eq. (2.264), $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, logo $(v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 v(\vec{k}')$. substituindo-se essa expressão em (3.9) tem-se que

$$(v^\dagger(\vec{k}')\gamma^0)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger u^\dagger(\vec{k}) = (\gamma^0 v(\vec{k}'))(\gamma^\nu)^\dagger u^\dagger(\vec{k}) , \quad (3.10)$$

como agora $\gamma^0 v$ é um vetor coluna, e $u^\dagger(\vec{k})$, que antes era um vetor coluna $u(\vec{k})$, é um vetor linha, tem-se que para que o produto entre os termos da eq. (3.10) seja possível, deve-se escreve-la como

$$(\gamma^0 v(\vec{k}'))(\gamma^\nu)^\dagger u^\dagger(\vec{k}) = u^\dagger(\vec{k})(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^0 v(\vec{k}')) . \quad (3.11)$$

Por intermédio de (2.248) e (2.265) é possível mostrar que

$$(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu . \quad (3.12)$$

Substituindo-se (3.12) em (3.11)

$$u^\dagger(\vec{k})(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^0 v(\vec{k}')) = u^\dagger(\vec{k})\gamma^0\gamma^\nu v(\vec{k}')) . \quad (3.13)$$

Lembrando que $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$, tem-se que

$$u^\dagger(\vec{k})\gamma^0\gamma^\nu v(\vec{k}')) = \bar{u}(\vec{k})\gamma^\nu v(\vec{k}')) . \quad (3.14)$$

Assim, conclui-se que é possível escrever

$$[\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\nu u(\vec{k})]^* = \bar{u}(\vec{k})\gamma^\nu v(\vec{k}') . \quad (3.15)$$

Substituindo-se (3.15) em (3.6)

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{m_s \text{ do } e^-} \sum_{m_s \text{ do } e^+} [\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\mu u(\vec{k})][\bar{u}(\vec{k})\gamma^\nu v(\vec{k}')]. \quad (3.16)$$

Reescrevendo o produto acima com os índices de elementos de matrizes explícitos, e.g. $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$, com α sendo linha e β coluna, pode-se comutar os objetos. Fazendo-se isso e colocando os termos com mesmo quadrimomentum juntos pode-se escrever essa expressão como

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{S'} v_\delta^{(S')}(\vec{k}') \bar{v}_\alpha^{(S')}(\vec{k}') \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sum_S u_\beta^{(S)}(\vec{k}) \bar{u}_\gamma^{(S)}(\vec{k}) \gamma_{\gamma\delta}^\nu . \quad (3.17)$$

Na expressão acima há somas implícitas sobre cada um desses índices de acordo com o número de linhas e colunas de cada matriz. Além disso, utilizou-se do índice S ou S' para referir-se à configurações de m_s do elétron e pósitron. São os índices S dos espinores χ^S , sendo $S = 1$ usado para representar $m_s = 1/2$ e $S = 2$ usado para representar $m_s = -1/2$. Utilizando-se das relações de completeza (2.324) e (2.325).

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\not{K}' - m\mathbb{1})_{\delta\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{K} + m\mathbb{1})_{\beta\gamma} \gamma_{\gamma\delta}^\nu . \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) pode ser escrita como

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{K}' - m)\gamma^\mu (\not{K} + m)\gamma^\nu] . \quad (3.19)$$

Onde Tr é chamado de operador traço. O traço de uma matriz A é uma operação que soma os elementos diagonais da mesma, isto é

$$\text{Tr}[A] = A_{11} + A_{22} + \dots A_{NN} = \sum_{i=1}^N A_{ii} . \quad (3.20)$$

Para o produto entre duas matrizes A e B , tem-se que o traço desse produto é dado por

$$\text{Tr}[AB] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} B_{ji} . \quad (3.21)$$

Para o produto de quatro matrizes $ABCD$ o traço de tal produto é

$$\text{Tr}[ABCD] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N A_{ij} B_{jk} C_{kl} D_{li} . \quad (3.22)$$

Por isso que a expressão (3.18) foi escrita como um traço.

A expressão para o tensor do múon e do anti múon $L_{\mu\nu}^{\mu^-}$ tem um formato idêntico a expressão obtida para o tensor elétron e pósitron (3.19).

A propriedade (3.21) pode ser empregada a fim de se obter um importante resultado. Partindo-se das regras de soma da notação de Einstein, tem-se que

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

a (3.23) decorre do fato de que índices repetidos sempre se somam. Como a (3.23) tem um formato análogo à (3.21), tem-se que

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \text{Tr}[g \cdot g^{-1}]. \quad (3.24)$$

Onde g é a matriz formada pelas componentes de $g_{\mu\nu}$. Na expressão (3.24) foi utilizado o resultado da eq. (2.56), qual expressa o fato de que $g_{\mu\nu}$ é a inversa de $g^{\mu\nu}$. Isso implica que o produto $g \cdot g^{-1}$ resulta na delta de Kronecker que pode ser representada como uma matriz $\mathbb{1}$. Desse modo,

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \text{Tr}[\mathbb{1}]. \quad (3.25)$$

Assim, o traço do produto de duas matrizes se reduz ao traço de uma única matriz. Usando (3.20), pode-se obter o traço da matriz identidade de quatro linhas e quatro colunas da eq. (3.25), que é 4, assim:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4. \quad (3.26)$$

O resultado (3.26) é de grande relevância e será utilizado nos cálculos do presente trabalho.

A possibilidade de escrever

$$\sum_{m_s \text{ do } e^- \text{ e do } e^+} [\bar{v}(\vec{k}')\gamma^\mu u(\vec{k})][\bar{u}(\vec{k})\gamma^\nu v(\vec{k}')] = \text{Tr}[(\not{K}' - m)\gamma^\mu(\not{K} + m)\gamma^\nu], \quad (3.27)$$

é chamado de truque de Casimir, visto que foi este que utilizou-se dessa técnica pela primeira vez em junho de 1933 (PAIS, 1986, p. 375).

O produto na (3.19) pode ser desenvolvido, com $\not{K} = K_\mu\gamma^\mu$ e $\not{K}' = K'_\nu\gamma^\nu$, e por intermédio das seguintes propriedades do traço de matrizes

$$\text{Traço de um número ímpar de matrizes } \gamma \text{ é sempre zero}; \quad (3.28)$$

$$\text{Tr}[A + B + C] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B] + \text{Tr}[C]; \quad (3.29)$$

$$\text{Tr}[kA] = k \text{Tr}[A], \quad \text{com } k \text{ sendo uma constante}; \quad (3.30)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}; \quad (3.31)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \quad (3.32)$$

Tal produto deve ser desenvolvido de modo que não hajam mais traços na expressão e que a mesma esteja escrita apenas em termos dos quadrimomenta K e K' e da massa do elétron, isto é:

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = 2(K'^\mu K^\nu + K'^\nu K^\mu - g^{\mu\nu}(K' \cdot K + m^2)). \quad (3.33)$$

Desenvolvendo-se a expressão do tensor do múon da mesma forma, obtém-se:

$$L_{\mu\nu}^{\mu^-} = 2(P'_\mu P_\nu + P'_\nu P_\mu - g_{\mu\nu}(P' \cdot P + M^2)). \quad (3.34)$$

substituindo-se os tensores (3.33) e (3.34) em (3.5), considerando-se o limite ultrarrelativístico, onde energia e momentum espacial tendem a ficar muito grandes frente às massas do elétron (m) e do múon (M), de modo que os termos que envolvem as mesmas podem ser desprezados, obtêm-se

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2e^4 \frac{(t^2 + u^2)}{s^2}. \quad (3.35)$$

Os cálculos realizados para se chegar em (3.33) e (3.35) estão dispostos no apêndice (C). Cálculos análogos a estes serão amplamente realizados nesse trabalho.

Inserindo o resultado (3.35) na (2.233), e reescrevendo as variáveis de Mandelstan para o ref. do centro de massa vide (2.358) e (2.359)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \right]. \quad (3.36)$$

Utilizando-se da constante α a (3.36) fica

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{\alpha^2}{4s} 2e^4 \left[(1 + \cos^2 \theta) \right]. \quad (3.37)$$

Essa é a expressão para a seção de choque diferencial não polarizada do espalhamento (3.1) no centro de massa. Integrando-se a expressão (3.38) com respeito aos ângulos θ e ϕ , com $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

$$\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (3.38)$$

Eis a seção de choque total do espalhamento (3.1). Esse resultado será discutido na seção (4.1), do capítulo (4).

3.2 Espalhamento elétron múon no referencial do laboratório.

Nesta seção o espalhamento (2.165) será analisado no referencial do laboratório, i.e. quando uma das partículas está em repouso. No caso desse espalhamento escolhe-se o μ^- como estando em repouso enquanto o e^- incide sobre ele. O diagrama de Feynman desse processo é dado pela figura (7), mas agora toma-se $P_A = K$, $P_C = K'$, $P_B = P$ e $P_D = P'$.

Lendo-se o diagrama de Feynman e aplicando as regras de Feynman da QED, por meio de passos análogos aos efetivados para o espalhamento (3.1), obtém-se

$$\mathfrak{M} = -e^2 \bar{u}(\vec{k}') \gamma^\mu u(\vec{k}) \frac{1}{q^2} \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}). \quad (3.39)$$

Onde $q = K - K'$.

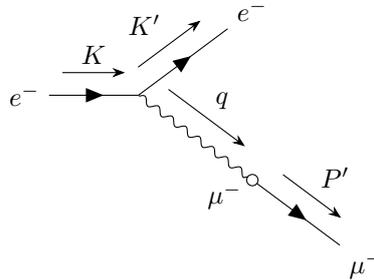
Procedendo-se da mesma forma que foi feito para o espalhamento (3.1), isto é, escrevendo $|\overline{\mathfrak{M}}|^2$ como o produto de dois tensores de ordem dois, usando o truque de Casimir para cada tensor e desenvolvendo os produtos dentro dos traços usando (3.28)-(3.31), obtêm-se o módulo ao quadrado da amplitude invariante polarizada:

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(K' \cdot P')(K \cdot P) + (K' \cdot P)(K \cdot P') - m^2 P' \cdot P - M^2 K' \cdot K + 2m^2 M^2]. \quad (3.40)$$

Onde os produtos entre quadrimomenta (produto interno na notação de Einstein) estão escritos como $P \cdot P$, m é a massa do elétron e M é a massa do múon.

Nesse espalhamento considera-se a massa do elétron, que é aproximadamente 200 vezes menos que a do múon, ou seja, desprezível. Para sua análise lança-se mão da figura (31), onde um elétron com quadrimomentum inicial $K = (E, \vec{k})$ incide sobre um múon em repouso com quadrimomentum $P = (M, \vec{0})$. O elétron troca um fóton com quadrimomentum $q = (\nu, \vec{q})$ com o múon. Após essa troca o elétron é espalhado por um ângulo θ , ficando com quadrimomentum $K' = (E', \vec{k}')$ e o múon adquire um quadrimomentum $P' = (E_\mu, \vec{p}')^1$.

Figura 31 – Figura representando o espalhamento elétron múon no laboratório.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

A figura (31) não é um diagrama de Feynman, é uma representação meramente ilustrativa que tem elementos de um diagrama. Antes de retomar a eq. (3.40), pode-se extrair algumas relações relevantes entre os quadrimomenta desse espalhamento.

Primeiro, usando-se conservação do quadrimomentum é possível escrever

$$P' = K + P - K'. \quad (3.41)$$

Além disso, lançando-se mão do produto quadrivetorial de um quadrimomentum qualquer P por si mesmo

$$(P)^2 = P_\mu P^\mu = P^0 P^0 - \vec{p} \cdot \vec{p} = E^2 - (|\vec{p}|)^2, \quad (3.42)$$

e usando (2.117)

$$(P)^2 = m^2. \quad (3.43)$$

¹ O índice μ em E_μ não é índice de soma de Einstein, é apenas para representar a energia da partícula μ^- .

Isto é, o quadrimomentum de uma partícula elevado ao quadrado sempre é igual ao quadrado da massa da partícula. Esse resultado é de grande relevância e já foi mencionado na subseção (2.3.2) do capítulo de Fundamentação Teórica.

Para o caso dos quadrimomenta do e^-

$$(K)^2 = (K')^2 = m^2 = 0. \quad (3.44)$$

pois, considera-se a massa do elétron desprezível.

Tomando-se o quadrimomentum transferido pelo fóton

$$q = K - K'. \quad (3.45)$$

Elevando-se o mesmo ao quadrado dos dois lados e usando (3.44), obtém-se

$$q^2 = -2K \cdot K'. \quad (3.46)$$

Agora, pode-se retomar a eq. (3.40).

Substituindo-se (3.41) em (3.40), realizando os produtos e utilizando-se de (3.44) e (3.46)²

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[\frac{-q^2}{2}(K \cdot P - K' \cdot P) + 2(K' \cdot P')(K \cdot P) + \frac{M^2 q^2}{2} \right]. \quad (3.47)$$

Como o μ^- está inicialmente em repouso, o termo $2(K' \cdot P')(K \cdot P)$ resultam em

$$2(K' \cdot P')(K \cdot P) = 2EE'M^2, \quad (3.48)$$

e o termo $K \cdot P - K' \cdot P$ resulta em

$$K \cdot P - K' \cdot P = M(E - E'). \quad (3.49)$$

Substituindo-se (3.48) e (3.49) em (3.47)

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} 2M^2 EE' \left[1 - \frac{1}{2M^2} \frac{q^2 M(E - E')}{2EE'} + \frac{q^2}{4EE'} \right]. \quad (3.50)$$

Escrevendo-se q^2 como

$$q^2 = -2(K' \cdot K) = -2(EE' - \vec{k} \cdot \vec{k}') \quad (3.51)$$

Nesse espalhamento, tem-se que $\vec{k} \cdot \vec{k}' = k'k \cos \theta$, visto que \vec{K} faz um ângulo θ com \vec{K}' , pois o e^- é espalhado por um ângulo θ após interagir com o μ^- . Como considera-se a massa do e^- desprezível, pela (2.117) tem-se que

$$E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2 \implies E \sim |\vec{k}|, \quad (3.52)$$

² A eq. (3.46) é usada para reescrever os termos com $K' \cdot K$ na eq. (3.40) em termos de q^2 .

e

$$E' \sim |\vec{k}'|. \quad (3.53)$$

Com essas considerações, a (3.51) fica

$$q^2 = -2EE'(1 - \cos \theta). \quad (3.54)$$

Lançando-se mão da identidade trigonométrica de meio ângulo $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right)$, a (3.54) fica

$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.55)$$

Substituindo-se (3.55) em (3.50)

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4 2M^2 EE'}{q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{M} (E - E') \right]. \quad (3.56)$$

Substituindo-se $q = K - K'$ em (3.41), tem-se

$$P' = q + P. \quad (3.57)$$

Isso implica que o quadrimomentum do fóton contribui para o quadrimomentum do múon. Elevando os dois lados de (3.57) ao quadrado e lembrando-se que $P^2 = P'^2 = M^2$, tem-se que

$$q^2 = -2P \cdot q. \quad (3.58)$$

Como $q = K' - K$, então $q^\mu = (E - E', \vec{K}' - \vec{K})$. Além disso, $P^\mu = (M, \vec{0})$. Deste modo

$$q^2 = -2P^\mu q_\mu = -2M(E - E') \implies E - E' = -\frac{q^2}{2M}. \quad (3.59)$$

Assim, substituindo-se (3.59) em (3.56) tem-se

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4 2M^2 EE'}{q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2M^2} q^2 \right]. \quad (3.60)$$

Um elemento infinitesimal da seção de choque associado a essa amplitude invariante é obtido via (2.206), (2.207) e (2.208), com $P_C = K'$ e $P_D = P'$. Assim

$$d\sigma = \frac{1}{2E2M} \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4\pi^2} \delta^4(K' + P' - K - P) \frac{d^3|\vec{k}'|}{2E'} \frac{d^3|\vec{p}'|}{2E_\mu}. \quad (3.61)$$

Onde v_{e^-} , de (2.208) é 1, dado que $v_{e^-} = \frac{|\vec{p}'|}{E}$ e tendo-se em vista (3.52). Escrevendo o elemento de momentum do elétron $d^3|\vec{k}'|$ em coordenadas esféricas lançando-se mão de uma figura análoga à (10)

$$d^3|\vec{k}'| = E'^2 dE' \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3.62)$$

Na eq. (3.62) utilizou-se do fato de que $|\vec{k}'| \sim E'$. Escrevendo-se $\sin \theta d\theta d\phi = d\Omega$

$$d^3|\vec{k}'| = E'^2 dE' d\Omega. \quad (3.63)$$

Substituindo-se (3.63) em (3.61) e substituindo $q = K - K'$ na delta

$$d\sigma = \frac{1}{4EM} \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4\pi^2} \delta^4(P' - q - P) \frac{E' dE' d\Omega d^3|\vec{p}'|}{2 \cdot 2E_\mu}. \quad (3.64)$$

Substituindo-se (3.60) em (3.64)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 M^2 E'^2}{q^4 2M\pi^2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2M^2} q^2 \right) \frac{d^3|\vec{p}'|}{2E_\mu} \delta^4(P + q - P') dE'. \quad (3.65)$$

Na eq. (3.65) foi invertido o sinal da delta, lembrando-se que isso não altera a mesma (vide eq. (2.175)). Integrando o lado direito da equação com respeito a $|\vec{p}'|$ e usando

$$\int_{|\vec{p}'|} \frac{d^3|\vec{p}'| \delta^4(P + q - P')}{2E_\mu} = \frac{1}{2MA} \delta(E' - \frac{E}{A}), \text{ com } A = 1 + (2E/M) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3.66)$$

tem-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4} M \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2M^2} q^2 \right) \frac{1}{2MA} \delta(E' - \frac{E}{A}) dE'. \quad (3.67)$$

Integrando-se o lado direito da eq. (3.67) com respeito à E' de modo que a delta faça $E' = E/A$ e substituindo-se (3.55) em (3.67) obtém-se

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2M^2} q^2 \right). \quad (3.68)$$

Eis a seção de choque diferencial não polarizada no referencial do laboratório para o espalhamento (2.165). Esse resultado é também chamado de seção de choque diferencial de Mott (GRIFFITHS, 2008, p. 255).

Essa classe de espalhamento (no referencial do laboratório) tem importante significado histórico para o estudo da estrutura da matéria, conforme será discutido na seção (4.2).

3.3 Espalhamento de aniquilação elétron pósitron - quark antiquark e hadronização.

Conforme supracitado, o espalhamento (2.369) pode ser estudado à luz da QED, visto que os quarks são férmions e pontuais, logo podem ser estudados por intermédio da equação de Dirac. Lendo-se o diagrama da figura (17) e aplicando-se as regras de Feynman para a QED ao mesmo, obtém-se

$$\mathfrak{M} = \frac{Qe}{q^2} [\bar{v}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u(\vec{p}_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3) \gamma_\mu v(\vec{p}_4)]. \quad (3.69)$$

com $q = P_1 + P_2$, pois trata-se de um diagrama do canal s.

Escrevendo $|\overline{\mathfrak{M}}|^2$ como o produto de dois tensores de ordem dois (um dos quarks e um do par $e^- e^+$), usando o truque de Casimir para cada tensor e desenvolvendo os

produtos dentro dos traços usando (3.28)-(3.31), obtêm-se o módulo ao quadrado da amplitude invariante polarizada

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 8 \left[\frac{Qe}{q^2} \right]^2 [(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_4) + (P_1 \cdot P_4)(P_2 \cdot P_3) + m^2(P_3 \cdot P_4) + 2m^2M^2], \quad (3.70)$$

com m sendo a massa do pósitron e do elétron e M sendo a massa do quarks. Fazendo-se os cálculos no referencial do CM, tem-se: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ e $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$, $E_1 = E_2$ e $E_3 = E_4$. As energias são iguais, pois elétron e pósitron têm a mesma velocidade no ref. do CM e a mesma massa, bem como o par quark-antiquark.

Tendo em vista a realização do cálculos no ref. do CM, a eq. (3.70) fica

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = Q^2 e^2 \left(1 + \left[\frac{m}{E} \right]^2 + \left[\frac{M}{E} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{m}{E} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{M}{E} \right)^2 \right] \cos^2 \theta \right). \quad (3.71)$$

Onde considerou-se $q^2 = (E_1 + E_2)^2 = 4E_1^2$, no ref. do CM (vide (2.238)), e θ como sendo o ângulo entre o momentum linear do elétron e o momentum linear do quark.

Substituindo-se (3.71) em (2.233) e integrando com respeito a θ e ϕ , cobrindo toda a esfera, e usando-se de (2.117) para escrever $p = E\sqrt{1 - m^2/E^2}$ obtém-se

$$\sigma \Big|_{CM} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{E} \right)^2 \frac{Q^2 \sqrt{1 - M^2/E^2}}{\sqrt{1 - m^2/E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{E} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{E} \right)^2 \right). \quad (3.72)$$

Onde, chamou-se E_1 de E .

Em um regime de energia muito maior que a energia de repouso do elétron, i.e. $E > M \gg m$ a eq. (3.72) simplifica-se para

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow q + \bar{q}) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha Q}{E} \right)^2. \quad (3.73)$$

Usando a variável de Mandelstan s para o caso desse espalhamento, tem-se $s = \frac{E^2}{4}$, assim

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow q + \bar{q}) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha^2 Q^2}{s} \right). \quad (3.74)$$

No espalhamento $e^+e^- \rightarrow q + \bar{q}$, conforme aumenta-se a energia das partículas iniciais, quarks mais pesados vão aparecendo no espalhamento. Para um energia $\sqrt{s} = 1300$ MeV o quark c aparece, o t aparece para $\sqrt{s} = 1777$ e o b para $\sqrt{s} = 4500$. Essas energias correspondem à massa de repouso desses quarks (ver figura (1)).

O aparecimento desses quarks mais pesados leva ao surgimento de novos hádrons, via processo de hadronização. Uma forma de analisar esse fenômeno é analisando-se a seção de choque associada ao espalhamento

$$e^-e^+ \rightarrow \text{Hádrons}. \quad (3.75)$$

A seção de choque associada à (3.75) pode ser obtida a partir da seção de choque do espalhamento (2.369), afinal os quarks gerados nesse espalhamento vão gerar os hádrons.

Para obter a seção de choque para a criação de hádrons deve-se tomar a soma sobre todos os possíveis sabores de quark em (3.74), afinal considera-se a produção de todos os tipos de hádrons a partir da junção de todos os tipos de quark possíveis (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 228). Assim,

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{Hádrons}) = \sum_{\text{sabores}} \sigma(e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}). \quad (3.76)$$

Além disso, a QCD prevê que existem três cores de quark possíveis, sendo que cada cor equivale a um diagrama. Como cada diagrama do processo deve ser somado no computo de \mathfrak{M} , e $\sigma \propto \mathfrak{M}$, tem-se que (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 228)

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{Hádrons}) = 3 \sum_{\text{sabores}} \sigma(e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}). \quad (3.77)$$

Onde o três na eq. (3.77) aparece em decorrência de considerar-se três cores de quarks.

Como $\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)$ é um resultado bastante conhecido e semelhante à seção de choque do espalhamento (2.369), define-se convenientemente a razão R

$$R \equiv \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{Hádrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)}. \quad (3.78)$$

Tal razão é uma contagem do número de quarks, seus sabores, bem como suas cores. Esse fato evidencia-se ao substituir-se (3.78) e (3.38) em (3.78), que resulta em

$$R = 3 \sum_{\text{sabores}} Q_{\text{sabores}}^2 = 3 \sum_i Q_i^2. \quad (3.79)$$

Conforme será discutido no capítulo de Discussão e Análise dos resultados, o resultado (3.79) tem boa corroboração experimental e é um indicio de que os hádrons são formados de quarks que possuem cores.

3.4 Espalhamento quark antiquark

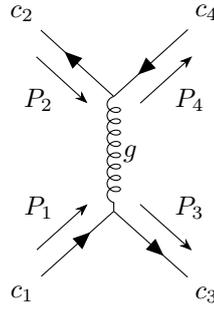
Pode-se estudar uma interação que ocorre apenas entre quarks à luz das regras da QCD apresentadas na seção (2.9). O espalhamento em questão qual será estudado é o espalhamento de quark e antiquark, dado por

$$u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}. \quad (3.80)$$

O diagrama de Feynman do espalhamento (3.80) é dado pela figura (32).

Normalmente, considerar-se-ia dois diagramas para esse espalhamento: o diagrama da figura (32) mais um diagrama no canal s. No entanto, em um limite não relativístico

Figura 32 – Diagrama do espalhamento quark antiquark.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

, que é o limite sob o qual o espalhamento será analisado, pode-se considerar apenas um diagrama no computo de \mathfrak{M} , visto que o segundo não contribuiria em tal computo (GRIFFITHS, 2008, p. 289).

Nessa subsecção ater-se-a apenas ao potencial de interação entre quarks e suas consequências para a formação de estados ligados de dois quarks (mésons).

Tendo isso em vista, parte-se da amplitude invariante obtida via leitura e utilização das regras de Feynman para QCD para o diagrama da figura (32):

$$\mathfrak{M} = i\bar{u}(3)c_3^\dagger \left[-i\frac{g_s\lambda^\alpha}{2}\gamma^\mu \right] u(1)c_1 \left[-i\frac{g_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] \bar{v}(2)c_2^\dagger \left[-i\frac{g_s\lambda^\beta}{2}\gamma^\nu \right] v(4)c_4. \quad (3.81)$$

Na eq. (3.81) há uma soma implícita no índices repetidos α e β , além disso os números dentro dos parenteses dos espinores representam o quark qual o espinor está associado. Deste modo,

$$\mathfrak{M} = -\frac{g_s^2}{4q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)c_1] [\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4). \quad (3.82)$$

Para se obter a eq. (3.82) utilizou-se do fato de que os objetos do espaço da cor e do espaço do spin comutam entre si, já que são objetos de espaços diferentes. Além disso, utilizou-se da propriedade da delta de Kroenecker $\delta^{\alpha\beta}$ de fazer $\beta \rightarrow \alpha$, sob ação e um somatório sobre β , e da propriedade do tensor métrico sobre a matriz γ^ν , para fazer $\gamma^\nu \rightarrow \gamma^\mu$.

Na expressão (3.82) pode-se chamar o termo $\frac{1}{4}(c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4)$ de fator de cor f :

$$f = \frac{1}{4}(c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4). \quad (3.83)$$

Na eq. (3.83) há uma soma implícita em α . Comparando-se a amplitude invariante (3.82) com outras amplitudes invariantes obtidas via QED, como (3.4) e (3.39), vê-se que elas são iguais a menos do fator de cor f .

O fator de cor está relacionado com o potencial de interação dos quarks $V_{q\bar{q}}$, o qual tem a mesma forma que o potencial de Coulomb para duas cargas

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f \frac{\alpha_s}{r}, \quad (3.84)$$

sendo inversamente proporcional a distância e diretamente proporcional a constante de acoplamento da força forte α_s , que é uma medida da intensidade da força forte e é proporcional a carga dos quarks.

O fator de cor depende dos estados de cores dos quarks interagentes e, no caso do espalhamento (3.80), os estados de cor que os quarks podem assumir são dados pelos termos a^α .

Embora tenha sido dito na seção (2.9) que a^α são estados de cor associados aos glúons, estes também se entendem a um sistemas formados por pares quark-antiquark (quais ocorrem no espalhamento espalhamento (3.80)). Assim, um quark sozinho é descrito pelo estado de cor dado pelo vetor de cor r , g ou b , um antiquark é descrito pelo vetor de cor \bar{r} , \bar{g} ou \bar{b} , já um sistema formado por par quark-antiquark pode ser descrito pelos estados de cor a^α , que são combinações de vetores de cor e anti cor. O estado de cor a^1 , por exemplo, dado por

$$a^1 = (r\bar{b} + \bar{b}r)/\sqrt{2}, \quad (3.85)$$

expressa que em um sistema composto por um par quark antiquark, onde o quark porta a cor r e o antiquark porta a cor \bar{b} ou o quark porta a cor b e o antiquark porta a cor \bar{r} . Os produtos entre os vetores de cor na equação (3.85) são produtos tensoriais. Um produto tensorial ou produto de Kronecker, que às vezes é denotado por \otimes , entre dois vetores de cor descreve estados formados pela combinação dos quarks que portam essas cores.

O estado de cor a^1 pertence a um grupo com oito estado de cor chamado de octeto. É possível encontrar um fator de cor da associado a um sistema de quarks no estado de cor a^1 , para tal, basta lançar mão da conservação de cor: supondo-se que o sistema seja formado por um quark porta a cor r e o antiquark porta a cor \bar{b} , tem-se, por conservação de cor, que

$$c_1 = c_3 = r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

e

$$c_2 = c_4 = \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

As expressões (3.86) e (3.87) expressam a simples ideia de que antes e depois do espalhamento tanto o quark, quanto o antiquark, permaneceram com suas cargas de cor inalteradas.

Substituindo-se (3.86) e (3.87) na eq. (3.83), tem-se

$$f = \frac{1}{4} \left((1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left((0, 1, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad (3.88)$$

lembrando que o conjugado transposto, representado pelo operador \dagger , dos vetores de cor c , originalmente representados por vetores coluna, os torna vetores linha. Após realizar-se o produto em (3.88), obtém-se

$$f = \frac{1}{4} \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha, \quad (3.89)$$

onde λ_{ii}^α é o elemento da coluna i e da linha i da lambda-ésima matriz de Gell-Mann. Há uma soma implícita em α na eq. (3.89), fazendo-a de um até oito. Observando-se de (2.379), que as únicas matrizes de Gell-Mann que possuem elementos 1,1 e 2,2 não nulos são λ^3 e λ^8 , tem-se

$$f = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8) = -\frac{1}{6}. \quad (3.90)$$

Substituindo-se (3.90) em (3.84) obtém-se

$$V_{q\bar{q}}(r) = \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r}. \quad (3.91)$$

Eis o potencial associado a um estado de dois quarks com estado de cor descrito por (3.85).

Outro tipo de configuração de cor para pares quark antiquark é a do estado de cor singlete, dado por

$$a^9 = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3}. \quad (3.92)$$

O estado do singlete é um estado de cor cuja cor total é zero. Tal estado, dado pela (3.92), representa um estado no qual o quark poderia ter cor r e o antiquark cor \bar{r} , ou um estado onde o quark teria cor b e o antiquark cor \bar{b} ou um estado onde o quark teria cor g e o antiquark cor \bar{g} .

O fator de cor associado ao estado de cor do singlete (3.92) é mais complicado de ser obtido, de modo que será preciso de um somatório sobre as cores, para se obter todas as combinações possíveis de cor e anti cor e suas contribuições no computo do f .

Como o estado de cor do singlete é dado por $r\bar{r}$ ou $b\bar{b}$ ou $g\bar{g}$ isso significa que tal estado é sempre caracterizado por um quark com cor e um antiquark com anti cor correspondente. Isso vale tanto para o quark e antiquark iniciais, quanto para o quark e o antiquark finais no espalhamento (3.80). Como anti cor e cor são descritas pelos mesmos vetores de cor, com a diferença de que a anti cor é representada por (vetor de cor)^{†3}, tem-se que

$$c_1 = c_2, \quad (3.93)$$

e

$$c_3 = c_4. \quad (3.94)$$

Tendo essas considerações em vista, constrói-se um somatório com índices que correm todas as cores. Os índices estão distribuídos de modo a garantir as igualdades (3.93) e

³ O operador hermitiano sob o vetor de cor apenas torna um vetor de cor coluna igual a um vetor de cor linha.

(3.94) sejam satisfeitas

$$f = \sum_{j=r}^g \sum_{i=r}^g \frac{1}{4} \frac{(c_{3j}^\dagger \lambda^\alpha c_{1i})}{\sqrt{3}} \frac{(c_{2i}^\dagger \lambda^\alpha c_{4j})}{\sqrt{3}}. \quad (3.95)$$

onde $\sqrt{3}$ vem da forma como o estado de cor está escrito. Correndo a soma sobre i e j :

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{12} & [(c_{3r}^\dagger \lambda^\alpha c_{1r})(c_{2r}^\dagger \lambda^\alpha c_{4r}) + (c_{3b}^\dagger \lambda^\alpha c_{1r})(c_{2r}^\dagger \lambda^\alpha c_{4b}) + (c_{3g}^\dagger \lambda^\alpha c_{1r})(c_{2r}^\dagger \lambda^\alpha c_{4g}) + (c_{3r}^\dagger \lambda^\alpha c_{1b})(c_{2b}^\dagger \lambda^\alpha c_{4r}) \\ & + (c_{3b}^\dagger \lambda^\alpha c_{1b})(c_{2b}^\dagger \lambda^\alpha c_{4b}) + (c_{3g}^\dagger \lambda^\alpha c_{1b})(c_{2b}^\dagger \lambda^\alpha c_{4g}) + (c_{3r}^\dagger \lambda^\alpha c_{1g})(c_{2g}^\dagger \lambda^\alpha c_{4r}) + (c_{3b}^\dagger \lambda^\alpha c_{1g})(c_{2g}^\dagger \lambda^\alpha c_{4b}) + \\ & (c_{3g}^\dagger \lambda^\alpha c_{1g})(c_{2g}^\dagger \lambda^\alpha c_{4g})]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Substituindo-se os vetores de cor, dados por (2.375)-(2.377) em (3.96) e realizando-se os produtos matriciais da mesma forma que foi feito para se chegar em (3.89) obtém-se

$$f = \frac{1}{12} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha + \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha + \lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha + \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{22}^\alpha + \lambda_{23}^\alpha \lambda_{23}^\alpha + \lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha + \lambda_{23}^\alpha \lambda_{32}^\alpha + \lambda_{33}^\alpha \lambda_{33}^\alpha). \quad (3.97)$$

Na eq. (3.97) há uma soma implícita em α , além disso tal equação pode ser escrita de forma compacta como

$$f = \frac{1}{12} \lambda_{ji}^\alpha \lambda_{ij}^\alpha, \quad (3.98)$$

com uma soma implícita em j e i . Pode-se escrever (3.98), vide (3.21), como

$$f = \frac{1}{12} \text{Tr}[\lambda^\alpha \lambda^\alpha]. \quad (3.99)$$

Como há uma soma implícita em α

$$f = \frac{1}{12} \text{Tr}[\lambda^\alpha \lambda^\alpha] = \frac{1}{12} \text{Tr} \left[\sum_{\alpha=1}^8 \lambda^\alpha \lambda^\alpha \right] = \frac{1}{12} \text{Tr} [\lambda^1 \lambda^1 + \lambda^2 \lambda^2 + \dots]. \quad (3.100)$$

Utilizando-se da propriedade dos traços dada por (3.29), tem-se que

$$f = \frac{1}{12} \text{Tr} [\lambda^1 \lambda^1 + \lambda^2 \lambda^2 + \dots] = \frac{1}{12} [\text{Tr}[\lambda^1 \lambda^1] + \text{Tr}[\lambda^2 \lambda^2] + \dots]. \quad (3.101)$$

Além disso, para as matrizes de Gell-Mann vale a seguinte relação

$$\text{Tr}[\lambda^\alpha \lambda^\beta] = 2\delta^{\alpha\beta}. \quad (3.102)$$

Assim

$$f = \frac{1}{12} [\text{Tr}[\lambda^1 \lambda^1] + \text{Tr}[\lambda^2 \lambda^2] + \dots] = \frac{1}{12} [2 + 2 + 2\dots], \quad (3.103)$$

$$f = \frac{1}{12} [16] = \frac{4}{3}. \quad (3.104)$$

Substituindo-se (3.104) em (3.84) obtém-se o potencial de interação entre quark e antiquark para um sistema descrito pelo estado de cor do singlete:

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}. \quad (3.105)$$

Os resultados (3.91) e (3.105), bem como suas implicações, serão discutidos na seção (4.4) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

3.5 Espalhamento elétron próton

Para o estudo do espalhamento (2.371) lança-se mão do diagrama dado pela figura (24a). A leitura e análise completa de tal diagrama à luz das regras de Feynman para QED não é possível, visto que não existe termo do vértice para um fóton interagindo com um próton. Assim, pode-se escrever de forma direta o módulo ao quadrado da amplitude invariante não polarizada como

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{e^-}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}^p. \quad (3.106)$$

O tensor $L_{e^-}^{\mu\nu}$ é obtido lançando-se mão dos mesmos passos empregados nas seções anteriores, já o tensor relacionado ao próton é desconhecido. Como o próton tem quadrimomenta P_2 e P_4 e recebe um quadrimomentum q no espalhamento (2.371), pode-se assumir um tensor geral de ordem dois para o próton dado por

$$K^{\mu\nu} = -K_1 g^{\mu\nu} + \frac{K_2}{M^2} P^\mu P^\nu + \frac{K_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{K_5}{M^2} (P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu), \quad (3.107)$$

onde $P_2 \equiv P$. Os termos K_i são tensores de ordem zero desconhecidos que dependem do escalar q^2 – no contexto desse trabalho escalar é uma forma de se referir a objetos invariantes, na seção (2.3.2) foi esclarecido que o produto interno de quadrivetores na notação de Einstein é invariante.

É possível mostrar que $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$ e a partir disso obtém-se

$$K_4 = \frac{M^2}{q^2} K_1 + \frac{1}{4} K_2, \quad (3.108)$$

e

$$K_5 = \frac{1}{2} K_2. \quad (3.109)$$

Desse modo

$$K^{\mu\nu} = K_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{K_2}{M^2} \left(P^\nu + \frac{1}{2} q^\mu \right). \quad (3.110)$$

Isto é, o tensor relacionado ao vértice do próton interagindo com um fóton depende de duas funções K_1 e K_2 , chamadas de fatores de forma, as quais estão relacionadas com a estrutura do próton. Substituindo-se (3.110) em (3.106), calculando-se $L_{e^-}^{\mu\nu}$, da mesma forma que foi feito na seção (3.1), e substituindo-o em (3.106) obtém-se

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{4e^4}{q^4} \left(K_1 [(P_1 \cdot P_3) - 2m^2] + K_2 \left[\frac{(P_1 \cdot P)((P_3 \cdot P))}{M^2} + \frac{q^2}{4} \right] \right). \quad (3.111)$$

Como trata-se de um espalhamento no ref. do laboratório, i.e. com alvo estacionário, então o próton têm $P = (M, \vec{0})$. Considera-se que o elétron tem uma energia inicial E , sendo espalhado por um angulo θ , isto é $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta$, e emerge com uma energia E' . Considera-se também que no regime de energia do elétron incidente, sua energia é muito

superior a energia associada a sua massa de repouso, i.e. $E', E \gg m$, de modo que se possa desprezar m . Como $m \sim 0$, faz-se o mesmo que foi feito em (3.52), i.e. $|\vec{p}| \sim E$.

Levando-se todos esses aspectos em consideração, e empregando-se passos análogos aos seguidos para se obter a expressão (3.56), a expressão (3.111) fica

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{4EE' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(2K_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + K_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.112)$$

No espalhamento (2.371) a energia final E' do elétron é cineticamente definida por θ e E , devendo ser, por conservação de energia

$$E' = \frac{E}{1 + (2E/M) \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.113)$$

Substituindo-se (3.112) em (2.206) e usando-se de (2.207) e (2.208), realizando-se os mesmos passos para se chegar em (3.68) obtém-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4ME \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \frac{E'}{E} \left[2K_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + K_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.114)$$

Essa expressão é conhecida como seção de choque diferencial de Rosenbluth, visto que tal resultado foi obtido, de forma mais geral sem considerar-se m desprezível, em 1950 por Marshall Rosenbluth (ROSENBLUTH, 1950, p. 615-616).

Conforme mencionado na subseção (2.8.2), quando o e^- inicial que incide sobre um p tem energia suficientemente grande, de modo que o comprimento de onda do fóton trocado entre elétron e próton seja de uma ordem de grandeza menor que o diâmetro do próton, há o desencadeamento de um chuveiro de pártons que posteriormente se hadroniza como píons (méson), káon (méson), deltas (bárion), etc. Esse processo, dado pela eq. (2.372), ocorre devido ao fato de que o fóton trocado interage com os quarks que formam o hádron e está exposto na figura (20). O diagrama associado a tal espalhamento está na figura (24b).

Assim como ocorreu para o espalhamento (3.1), não conhece-se o vértice associado à interação fóton-próton, portanto escreve-se o $|\overline{\mathfrak{M}}|^2$ associado ao espalhamento de forma direta, dada por

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} K_{\mu\nu}(X). \quad (3.115)$$

Onde o termo que descreve o próton $K_{\mu\nu}$ depende dos quadrimomenta $P_2 \equiv P, q, P_4, \dots, P_N$.

Para obter-se a seção de choque associada ao espalhamento (2.372) é necessário adaptar-se as eq. (2.206), (2.207) e (2.208) para tal espalhamento, incluindo nessas termos relativos às várias partículas que aparecem no estado final. considerando-se a massa do

e^- desprezível frente a seu momentum espacial, o próton em repouso com $P = (M, \vec{0})$ e unindo as equação adaptadas tem-se

$$d\sigma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4EM} \frac{d^3|\vec{p}_3|}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^4|\vec{p}_4|}{(2\pi)^3 2E_4} \cdots \frac{d^3|\vec{p}_N|}{(2\pi)^3 2E_N} (2\pi)^4 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4 - \dots P_N). \quad (3.116)$$

Substituindo-se (3.115) em (3.116) e incluindo os termos relativos aos momenta $|\vec{p}_4|, \dots, |\vec{p}_N|$ juntamente com o tensor $K_{\mu\nu}$ dentro de outro tensor $W_{\mu\nu}$, tem-se

$$d\sigma = \frac{e^4 L^{\mu\nu}}{4q^4 EM} \frac{d^3|\vec{p}_3|}{(2\pi)^3 2E_3} 4W_{\mu\nu}. \quad (3.117)$$

Considerando-se o e^- como tendo energia inicial E e energia final E' após ser espalhados, e escrevendo-se $d^3|\vec{p}_3|$ como $d^3|\vec{p}_3| = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega = E'^2 dE' d\Omega$, da mesma forma que foi feita em (2.228), obtém-se

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2 E'}{q^4 E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (3.118)$$

Nesse espalhamento a energia do elétron espalhado E' não é mais definida pela energia das partículas iniciais, logo E' não é mais dado por (3.113).

Para espalhamentos desse tipo ($A + B \rightarrow C + D + \dots$) a forma como a energia se distribui entre as partículas resultantes do espalhamento não é fixa, deste modo E' não pode ser determinada por angulo de espalhamento θ e ou energia da partícula incidente E .

Devido a presença do termo dE' no denominador do lado esquerdo da eq. (3.118), diz-se que tal equação expressa a seção de choque diferencial por intervalo de energia. Assim, integrar $\frac{d\sigma}{dE' d\Omega}$ para um intervalo de energia $\Delta E'$ dá a seção de choque diferencial para esse intervalo de energia.

Novamente, pode-se assumir uma forma mais geral para o tensor $W_{\mu\nu}$, dado por

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} P^\mu P^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu). \quad (3.119)$$

Porém, diferente do caso do espalhamento elástico, dessa vez os tensores de ordem zero W_i dependem de dois escalares: q^2 e $q \cdot P$. Novamente, pode-se utilizar a condição

$$q_\mu W^{\mu\nu} = 0. \quad (3.120)$$

Para se determinar duas funções W_i , dadas por

$$W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{q \cdot P}{q^2} \right)^2 W_2, \quad (3.121)$$

e

$$W_5 = -\frac{q \cdot P}{q^2} W_2. \quad (3.122)$$

Substituindo-se (3.121) e (3.122) em (3.119)

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left[P^\mu - \left(\frac{q \cdot P}{q^2} \right) q^\mu \right] \left[P^\nu - \left(\frac{q \cdot P}{q^2} \right) q^\nu \right]. \quad (3.123)$$

Substituindo-se (3.123) em (3.118), calculando-se o tensor $L_e^{\mu\nu}$ da mesma forma que foi feito na seção (3.1), e lançando-se mão dos mesmos passos efetuados para se chegar em (3.68) obtém-se

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^4}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.124)$$

Conforme supracitado, as funções W_i , as quais são chamadas de funções de estrutura, são funções de q^2 e $q \cdot P$, ao passo que os fatores de forma do espalhamento (2.371) dependem apenas de q^2 . Por motivos que ficarão claros na seção (4.5), define-se

$$x \equiv \frac{-q^2}{2q \cdot P}. \quad (3.125)$$

Os resultados obtidos nessa subseção, (3.114) e (3.124), serão discutidos na seção (4.5) do capítulo de Discussão e Análise dos resultados.

3.6 Modelo párton.

Em seu estudo fenomenológico do espalhamento (2.372), à luz do modelo párton, Bjorken (1969, p. 184) obtém um resultado chamado de escalamento de Bjorken, que expõe o fato de que para altas energias a dependência das funções de estrutura presentes em (3.124) com respeito aos escalares q^2 e $q \cdot P$ se reduz à uma dependência apenas da variável x , dada por (3.125). Esse resultado pode ser enunciado como

$$\begin{aligned} \frac{q \cdot P}{M} W_2(q^2, \frac{q \cdot P}{M}) &\rightarrow F_2(x), \\ MW_1(q^2, \frac{q \cdot P}{M}) &\rightarrow F_1(x). \end{aligned} \quad (3.126)$$

O escalamento de Bjorken (3.126), conforme será demonstrado adiante, é uma consequência do fato do próton ser formado por constituintes pontuais. Esse comportamento das funções de estrutura do escalamento de Bjorken foi confirmado na década de 70.

Ainda, em 1969, Callan e Gross sugeriram que as funções de escalamento F_1 e F_2 se relacionam da seguintes forma

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \quad (3.127)$$

Algo que também foi corroborado em experimentos posteriores e reflete o fato dos constituintes do próton carregarem número quântico de spin $s = 1/2$. A comprovação experimental do escalamento de Bjorken (3.126), bem como a relação de Callan-Gross (3.127) constituíram-se em evidências convincentes da existência dos quarks, visto que o modelo de Gell-Mann previa quarks como sendo férmions pontuais.

A fim de se obter os resultados (3.126) e (3.127), assumindo-se o modelo dos pártons, deve-se ter em mente que para altas energias, nas quais o processo (2.372) ocorre, o fóton

emitido pelo elétron interage com um pártion no interior do próton, o qual é assumidamente livre.

Como o espalhamento e^- – pártion ocorre entre partícula pontuais, onde uma delas está parada, pode-se afirmar que tal espalhamento é o análogo de um espalhamento como (2.165) no ref. do laboratório.

Assim, assumindo-se que o elétron interage diretamente com uma partícula pontual, emprega-se a função de estrutura que descreve o próton da interação como uma partícula pontual. A função de estrutura que descreve o próton como uma partícula pontual é dada por (4.11), com os fatores de forma dados por (4.8) (ver discussão dos resultados para o espalhamento elétron próton na seção (4.5)). Assim, as funções de estrutura de um pártion i de carga Q_i e massa m_i é

$$\begin{aligned} W_1^i &= \frac{Q_i^2}{2m_i} \delta(x_i - 1), \\ W_2^i &= -\frac{2m_i}{q^2} Q_i^2 \delta(x_i - 1). \end{aligned} \quad (3.128)$$

com

$$x_i = \frac{-q^2}{2q \cdot P_i}, \quad (3.129)$$

onde P_i é o quadrimomentum do pártion i . Conhecendo-se o quadrimomentum do próton, pode-se supor que o quadrimomentum carregado por um pártion i é dado por

$$P_i = z_i P, \quad (3.130)$$

onde P é o quadrimomentum do próton e z_i é uma fração do quadrimomentum total carregado pelo pártion. A eq. (3.130) assume que cada componente de P_i recebe a mesma fração de P , o que é uma suposição razoável, embora não seja a mais geral.

Substituindo-se (3.130) em (3.129) tem-se que

$$x_i = \frac{x}{z_i}. \quad (3.131)$$

Substituindo-se (3.131) em (3.128) e lembrando-se da propriedade da delta de Dirac (2.175) tem-se

$$\begin{aligned} W_1^i &= \frac{Q_i^2}{2M} \delta(x - z_i), \\ W_2^i &= -2 \left(\frac{x}{x_i} \right)^2 \frac{M}{q^2} Q_i^2 \delta(x - z_i). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Seja $f_i(z_i)$ a função densidade de probabilidade (pdf) associada a probabilidade do pártion i carregar uma fração z_i do quadrimomentum do próton. O valor esperado das funções de estrutura, somando-se sobre todos os pártions do próton, é dado por

$$\langle W_{1,2} \rangle = \sum_i \int_0^1 W_{1,2} f_i(z_i) dz_i. \quad (3.133)$$

A integral em (3.133) vai de zero até um, pois a variável de integração dz_i é a fração do momentum carregado por um párton que vai de zero até um.

Calculando-se os valores esperados de $W_{1,2}$ ao substituir-se (3.132) em (3.133), obtém-se

$$\langle W_1 \rangle = \sum_i \int_0^1 \frac{Q_i^2}{2M} \delta(x - z_i) f_i(z_i) dz_i = \frac{1}{2M} \sum_i Q_i^2 f_i(x), \quad (3.134)$$

e

$$\langle W_2 \rangle = \sum_i \int_0^1 \left(\frac{-2x^2 M}{q^2} \right) Q_i^2 \delta(x - z_i) f_i(z_i) dz_i = -2 \frac{M}{q^2} x^2 \sum_i Q_i^2 f_i(x). \quad (3.135)$$

Para chegar-se nas eq. (3.134) e (3.135) foi utilizada a propriedade de filtragem da delta de Dirac. Assim, chamando-se os valores esperados das funções de estrutura de $W_{1,2}$, tem-se que

$$MW_1 = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 f_i(x) \equiv F_1(x), \quad (3.136)$$

e

$$-\frac{q^2}{-2Mx} W_2 = x \sum_i Q_i^2 f_i(x) \equiv F_2(x), \quad (3.137)$$

que são as expressões do escalamento de Bjorken (3.126). A relação de Callan-Gross (3.127) pode ser obtida ao comparar-se as eq. (3.136) e (3.137).

Tais resultados, obtidos à luz do modelo dos pártons, serão discutidos na seção (4.6).

4 Discussões e Análises dos resultados.

Nesse capítulo serão discutidas as expressões obtidas no capítulo de Aplicação das teorias a respeito de cada espalhamento. As discussões foram feitas à luz das seções 6.5 e 6.8 do capítulo 6 de [Halzen e Martin \(1984\)](#), para os espalhamentos (3.1) e (2.165), das seções 8.1, 8.2 e 8.4 do capítulo 8 de [Griffiths \(2008\)](#) para os espalhamentos (2.370), (2.371) e (3.80), e das seções 8.5 e 8.6 do capítulo 8 da referência [Griffiths \(1987\)](#) para espalhamento (2.372) e o modelo de pártons.

4.1 Aniquilação de par elétron pósitron seguida de criação de par múon-anti múon.

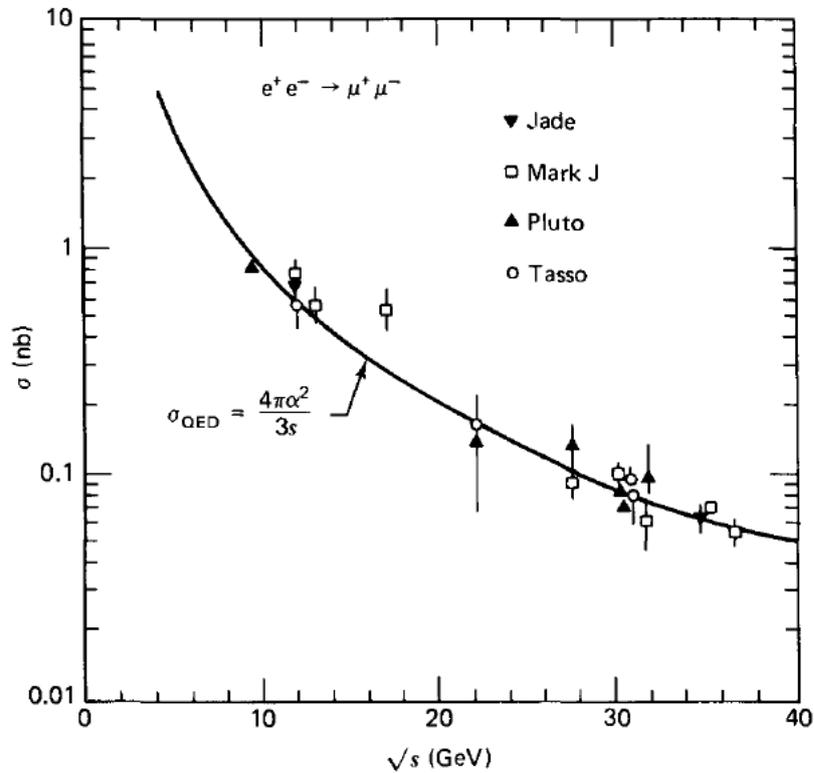
O resultado obtido para a seção de choque do espalhamento (3.1), disposto na equação (3.38) pode ser comparado com dados experimentais coletados do acelerador PETRA (Positron-Electron Tandem Ring Accelerator). A figura (33) apresenta a curva da eq.(3.38) com dados apresentados por várias colaborações científicas. É possível observar que a predição teórica descreve muito bem os dados experimentais.

O parâmetro \sqrt{s} representa a energia total carregada pelo par e^-e^+ que se aniquila no referencial do centro de massa. No ref. do CM as duas partículas se aproximam com momenta espaciais opostos $--$ que é uma condição de colisão própria de aceleradores circulares como o PETRA.

A partir da análise do gráfico da figura (33) é possível perceber que a seção de choque total desse espalhamento acontecer diminui com o aumento da energia inicial do par elétron-pósitron. Isso faz sentido, pois segundo [Griffiths \(2008, p. 261\)](#) quanto mais devagar estiverem o pósitron e o elétron que se aproximam, mais tempo eles ficam um perto do outro, assim eles terão um maior tempo de interação o que aumenta a probabilidade do espalhamento ocorrer.

Outro aspecto importante demonstrado pela comparação do resultado (3.38) com os dados experimentais é que para baixas energias (ordem de magnitude de GeV) a aproximação de ordem dois em e para os diagramas de Feynman gera resultados teóricos bem corroborados experimentalmente. No entanto, caso fossem obtidos dados para energias maiores seria necessário considerar termos de diagramas de ordem maior em e , pois a aproximação de ordem dois seria incompatível com a precisão dos dados experimentais.

Figura 33 – Seção de choque do espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ em função da energia do centro massa \sqrt{s} . A curva é dada pela equação (3.38) e os pontos experimentais foram coletados no acelerador PETRA.



Fonte: Halzen e Martin (1984, p. 125).

4.2 Espalhamento elétron múon no referencial do laboratório.

Conforme exposto na subseção (3.2), espalhamentos como (2.165), com o alvo estacionário, têm um importantíssimo papel no sentido de permitir que se explore a estrutura interna do alvo.

Esse tipo de espalhamento com alvo estacionário foi estudado por Rutherford em suas investigações da estrutura interna do núcleo atômico apresentadas em seu trabalho *The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom* publicado em 1911. Na ocasião, Rutherford estava modelando o espalhamento de partículas α por folhas finas de ouro, observado no experimento conduzido por Geiger e Marsden em 1909 (TAVARES, 2012, p. 6-7). Ao modelar o átomo como uma estrutura “[...]contendo um carga positiva Ne (com N sendo o número de corpúsculos que formam o átomo de carga $+e$) em seu centro, e cercado por uma distribuição elétrica negativa Ne uniformemente distribuída [...]” (RUTHERFORD, 1911, p. 669-679 e 671), Rutherford obteve uma expressão para o número y de partículas α incidindo por unidades de área defletidas por um angulo ϕ proporcional a quarta potência de $\csc \frac{\phi}{2}$ (RUTHERFORD, 1911, p. 674).

Como a função $\csc \frac{\phi}{2}$ é $\frac{1}{\sin \frac{\phi}{2}}$, logo vê-se uma semelhança entre a expressão obtida por

Rutherford e a expressão (3.68) obtida para o espalhamento (2.165) com o alvo estacionário. O seno na quarta potência no denominador é sempre obtido em espalhamentos com alvo estacionário. Embora a expressão de Rutherford tenha sido para o número de partículas espalhadas para o ângulo ϕ , essa quantidade está contida na seção de choque diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Isso porque $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ é a distribuição de seção de choque σ por ângulo no espaço, e a seção de choque é proporcional a probabilidade do espalhamento acontecer, que é proporcional ao número de partículas espalhadas (vide (2.197) e (2.198)). Em forma de equação, esse raciocínio fica:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\sigma \text{ por ângulo}), \quad \text{mas } \sigma \propto \# \text{ partículas espalhadas}, \quad (4.1)$$

$$\implies \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (\# \text{ partículas espalhadas por ângulo}). \quad (4.2)$$

Então, embora Rutherford não tenha escrito uma expressão direta para seção de choque diferencial, é fácil ir da expressão dele para a $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. O resultado de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para o espalhamento estudado por Rutherford é comumente encontrado na literatura (GRIFFITHS, 2008, p. 202) como sendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (4.3)$$

onde q_1 e q_2 são as cargas das partículas envolvidas no espalhamento. A (4.3) é chamada de seção de choque diferencial do espalhamento Rutherford.

Ao tratar do átomo como sendo um objeto composto por um núcleo positivamente carregado Rutherford explicou os espalhamentos observados e teve seu resultado para y corroborado por outros experimentos apresentados no trabalho de GEIGER; MARS DEN em 1913.

Assim, conforme Rutherford mostrou, por intermédio do estudo desse tipo de espalhamento é possível estudar-se a natureza dos alvos.

Como os cálculos que levaram a (3.68) são feitos a partir da equação de Dirac, que é para partículas elementares de $m_s = 1/2$, ou seja, pontuais, logo admite-se a priori a natureza pontual do elétron e do múon. O resultado (3.68) é corroborado experimentalmente, logo evidencia-se a natureza é pontual de ambas as partículas.

Além disso, na expressão (3.68) o termo $\frac{-q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ é oriundo da contribuição do momentum magnético do múon (momentum magnético de uma partícula $\vec{\mu}$ é um vetor que se relaciona ao torque de alinhamento de $\vec{\mu}$ com um \vec{B} externo pela expressão $\tau_{\vec{B}} = \vec{\mu} \times \vec{B}$). Caso $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ fosse computada via equação de KG, i.e. tratando as partículas como tendo spin nulo, o resultado não teria o termo $\frac{-q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ (HALZEN; MARTIN, 1984, p. 132).

Conforme mencionado na subseção (2.8.2), o estudo de espalhamentos dessa natureza (alvo estacionário) técnica foi também empregada para o estudo da estrutura interna dos hádrons.

4.3 Espalhamento de aniquilação elétron pósitron - quark antiquark e hadronização.

Sobre a seção de choque encontrada para o espalhamento (2.369), dada pela eq. (3.72), evidencia-se um limite em $E = M$. Para energias E menores que M , a raiz quadrada $\sqrt{1 - M^2/E^2}$ é imaginária, o que expressa o fato do espalhamento ser cinematicamente proibido se a energia E do elétron, ou pósitron, for menor que a massa de repouso de um quark.

Sobre o resultado de R para o processo de hadronização, descrito pela eq. (3.79), deve-se considerar que em regimes de energia mais altos tem-se acesso a produção de sabores de quarks mais pesados. Assim, conforme aumenta-se a energia deve-se incluir no cômputo de R a contribuição da carga de mais quarks. Por exemplo, quando a energia do elétron passa de 1300 Mev, que é a massa de repouso do quark c , deve-se passar a considerar a contribuição de tal sabor na soma de (3.79). Assim, com base nisso, pode-se montar a tabela (4).

Tabela 4 – Resultados de R com base nos diferentes limites energéticos de produção de quarks:

Limite energético	$R(E)$
Produção dos sabores de quark u, d e s	$3 [(Q_u)^2 + (Q_d)^2 + (Q_s)^2] = 2$
Produção dos sabores de quark c	$3 [(Q_u)^2 + (Q_d)^2 + (Q_s)^2 + (Q_c)^2] = 3.33$
Produção dos sabores de quark b	$3 [(Q_u)^2 + (Q_d)^2 + (Q_s)^2 + (Q_c)^2 + (Q_b)^2] = 3.67$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados da tabela (4) são corroborados experimentalmente, conforme a figura (34) expõe. Nela é possível ver, desconsiderando-se o aparecimento de ressonâncias hadrônicas, que ocorrem quando a energia do experimento passa pela massa do referido hádron (no caso dessa curva há o aparecimento de hádrons como ρ , ω , ϕ , ψ e outros), que há boa corroboração experimental entre teoria e experimento. O aparecimento de ressonâncias hadrônicas em curvas de seção de choque foi mencionado na seção (2.6.4).

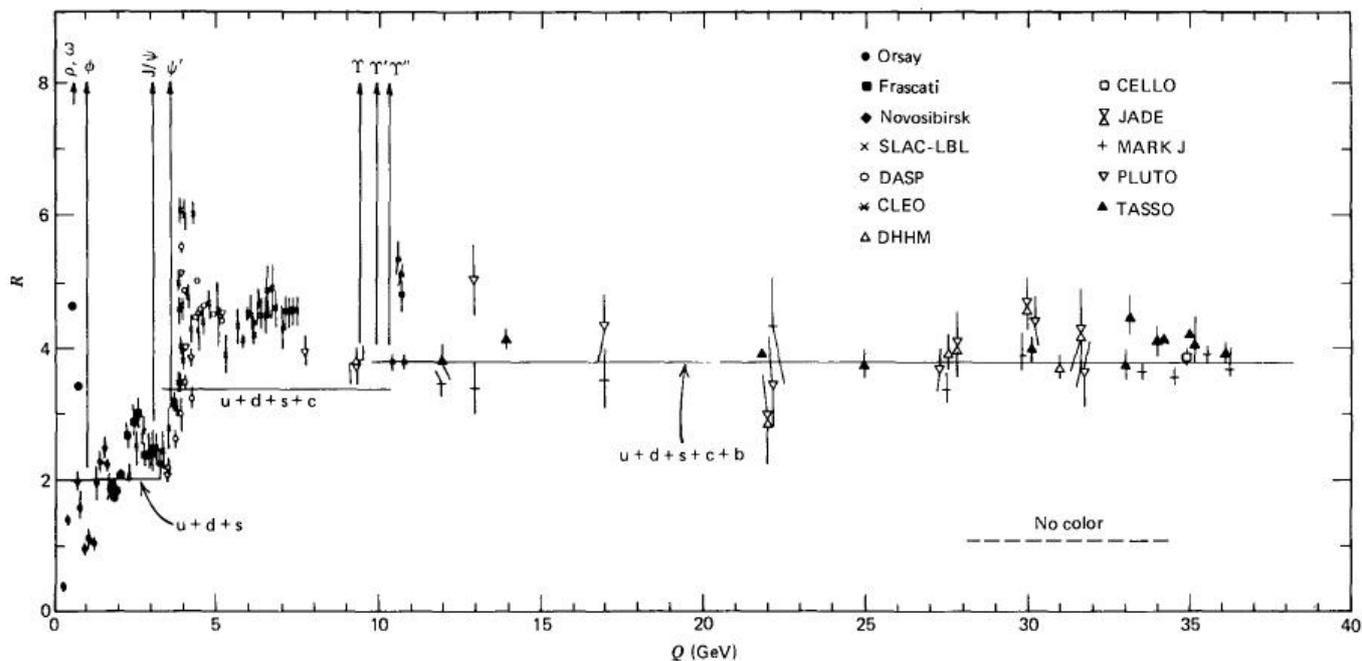
O resultado é bom, mas não é perfeito. Os picos hadrônicos são decorrências do fato de se ter feito uma simplificação ao se tratar os processos $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$ (estudado com QED) e $e^- + e^+ \rightarrow$ Hádrons (estudado com QCD) de forma independente. No processo de hadronização via aniquilação de um par elétron/pósitron, descrito na eq.(2.370), os quarks são partículas intermediárias, e portanto virtuais, não partículas reais/livres que obedecem a equação de Dirac¹. Por esse motivo houve essa discrepância experimental com

¹ Partículas virtuais não obedecem à relação de dispersão usual ($E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$) ou equação livre de Dirac.

a teoria nesse sentido.

À parte disso, pode-se dizer que o resultado é importante no sentido de corroborar a existência das cores e sabores de quarks previstos pelo MP. Sem o acréscimo do fator 3 na eq. (3.79) os resultados teóricos e experimentais possuiriam grandes discrepâncias.

Figura 34 – Gráficos de $R(E)$ em função da energia para o limite de energia dos quarks u, d e s ; u, d, s e c ; u, d, s, c e b



Fonte: Halzen e Martin (1984, p. 229).

4.4 Espalhamento quark antiquark

É possível ver que o potencial obtido para o sistema descrito pelo estado de cor (3.85), dado pela eq. (3.91), sinaliza que há uma força repulsiva entre o par quark e antiquark, haja vista que o potencial associado a esse estado é positivo. Isso decorre do fato de que o estado é composto por quarks de cor e anti cor não correspondentes.

Tal resultado demonstra que estados ligados de quark e antiquark com cor e anti cor não correspondentes não existem, isto é, não existem mésons (estado ligado de par quark e antiquark) com cor e anti cor não correspondente.

A QCD dispõe de uma explicação para isso: tal teoria propõe que hádrons são encontrados na natureza com cor total nula, isto é, a combinação das cores dos quarks em seu interior deve ser tal que as cores se anulem. As combinações de cor que resultam em cor resultante nula são

$$\text{cor} + \text{anti cor correspondente} \tag{4.4}$$

para mésons, e

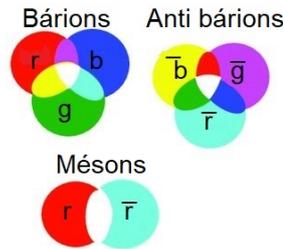
$$r + b + g, \quad (4.5)$$

para bárions. Para bárions feitos com antiquarks a combinação que resulta em cor resultante nula é

$$\bar{r} + \bar{b} + \bar{g}. \quad (4.6)$$

As sistematizações das eq. (4.4), (4.5) e (4.6) estão dispostas na figura (35), onde a cor total nula é representada pela cor branca.

Figura 35 – Combinações de cores que resultam em cor total nula para mésons e bárions.



Fonte: adaptado de Olsen, Skwarnicki e Zieminska (2017).

Por isso que estados ligados de pares quark quark-anti com estado de cor descrito por (3.85) resultam em um potencial de repulsão, pois tal estado implicaria em um méson com cor resultante não nula, o que não é permitido pela QCD.

Já no caso do potencial obtido para o sistema descrito pelo estado de cor do singlete, dado pela eq.(3.105), evidência-se que a interação do par quark e antiquark é atrativa (o potencial é negativo). Isso faz sentido, pois o estado é composto por junções de quark e antiquark com cor e anti cor correspondentes, o que resulta em um méson com cor resultante nula, vide (4.4). São junções desse tipo que formam os mésons.

4.5 Espalhamento elétron próton

O resultado obtido para o espalhamento (2.371), dado pela eq.(3.114), pode ter os fatores de forma K_1 e K_2 determinadas experimentalmente. Para conectar a expressão com o estudo experimental da seção de choque diferencial para esse processo expressa-se os fatores de forma como

$$\begin{aligned} K_1 &= q^2 G_M^2 \\ K_2 &= 2M^2 \frac{G_E^2 - [q^2/(2M)^2] G_M^2}{1 - [q^2/(2M)^2]}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde G_E e G_M são fatores de forma elétrico e magnético, que estão relacionados com a distribuição de carga e momentum magnético no próton e que podem ser medidos mais

diretamente. Isso concede um indício de que o próton não é uma estrutura pontual, pois se fosse tratado como tal, as contantes seriam

$$\begin{aligned} K_1 &= -q^2, \\ K_2 &= 4M^2, \\ \implies G_E &= G_M = 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A título de comparação, assumindo-se os fatores de forma (4.7) e o modelo de próton pontual (4.8), a eq. (3.114) fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4ME \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \frac{E'}{E} \left[4M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2q^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (4.9)$$

Modificando (4.9) para que se pareça com (3.68), que é a seção de choque diferencial para o espalhamento elétron múon no ref. do lab., tem-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha^2}{4E \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (4.10)$$

Assim, quando assume-se o próton pontual, para o espalhamento elástico elétron próton, obtêm-se um resultado, eq. (4.10), idêntico ao da seção de choque diferencial obtido para o espalhamento elétron múon, com múon estacionário, da eq.(3.68). Isso revela que os fatores de forma têm um importante papel no sentido de expor a natureza não pontual do próton.

Outro aspecto que pode se evidenciar, o qual já foi ressaltado na seção (4.2), é a presença do termo $\sin^4 \frac{\theta}{2}$ no denominador de (4.9), característico de espalhamentos de alvos estacionários.

Os estudos experimentais do espalhamento elástico do próton por elétrons foi iniciado em 1953 por físicos experimentais norte americanos como Hofstadter, Fechter e McIntyre (BASSALO, 2012, p. 98).

Os resultados teóricos que assumem o próton como uma partícula pontual em espalhamento elásticos são corroborados até certa escala de energia, porém conforme avança-se na energia, no regime de energia do espalhamento elástico mesmo, começam a aparecer discrepâncias e torna-se necessário considerar-se os fatores de forma dados por (4.7).

O estudo dos espalhamentos inelásticos dados por (2.372) inciou-se em 1967 no acelerador linear de Stanford (SLAC) (PAIS, 1986, p. 573). Tais estudos trouxeram importantes resultados experimentais, responsáveis pelo fortalecimento da hipótese do hádron composto por partículas elementares. Alguns desses resultados estão expostos em Bloom et al. (1969), quais derivam do estudo do espalhamento (2.372) para energias entre 7 e 17 GeV.

Analisando-se o resultado teórico obtido para a seção de seção de choque diferencial por energia E' obtido para o espalhamento (2.372), dado pela eq. (3.124), pode-se afirmar que este tem a forma parecida com a seção de choque diferencial de Rosenbluth (3.114). Também há a presença do termo $\sin^4 \frac{\theta}{2}$ no denominador, característico de espalhamentos de alvos estacionários.

Um outro aspecto que pode se afirmar sobre o espalhamento inelástico, é que por intermédio da variável x , dada por (3.125), verifica-se que este é um caso mais geral do espalhamento elástico.

Usando a variável x , observa-se que para o caso do espalhamento elástico (2.371) tem-se que $x = 1$, visto que nesse caso q^2 e $-2q \cdot P$ são iguais (vide eq. (3.56)) e não variáveis distintas, como no caso do espalhamento inelástico.

Com base nisso, pode-se afirmar que o espalhamento elástico é um caso particular do inelástico, para quando se toma a condição de que o quadrimomentum P_4 obedece $(P_4)^2 = M^2$. Tendo isso e vista, é possível recuperar a seção de choque diferencial de Rosenbluth a partir de (3.124) ao se inserir na mesma

$$W_{1,2} = \frac{-K_{1,2}(q^2)}{2Mq^2} \delta(x - 1), \quad (4.11)$$

e integrar com respeito a energia E' .

Assim como no caso do espalhamento (2.371), por intermédio do estudo experimental e teórico do espalhamento inelástico profundo (2.372) pode-se obter informações sobre as funções W_1 e W_2 do próton, isto é, informações sobre a sua estrutura.

O modelo mais simples que trata o próton como pontual funciona para baixas energias, no entanto falha para altas energias. Estudos que determinaram as constantes de estrutura, para altas energias, com a hipótese dos hádrons serem constituídos por objetos pontuais (chamados de pártons) foram conduzidas pelos trabalho teóricos de Feynman (1988)² e Bjorken (1969). Discussões sobre o modelo párton serão feitos na seção (4.6).

4.6 Modelo párton.

Conforme já discutido, o modelo dos pártons surge em um contexto onde não se tinha confiabilidade grande sobre o modelo dos quarks. No entanto, conforme se evidenciará no texto que segue, o próprio modelo dos pártons acabou dando sustentação ao modelo dos quarks.

Dois resultados importantes, obtidos via modelo de pártons, são o escalamento de Bjorken (3.126) e a relação de Callan-Gross (3.127). Esses resultados foram corroborados

² O trabalho de Feynman foi publicado em 1969, mas a publicação está compilada em um livro publicado em 1988.

em experimentos da década de 70, assim, teve-se uma prova experimental de que o próton é constituído por objetos pontuais, com carga e número quântico de spin $1/2$. É importante destacar que essas são propriedades também propostas para os quarks de Gell Mann.

Assim, a corroboração do modelo dos pártons bem como os resultado de $R(E)$ mostrados na figura (34), constituíram-se em evidências favoráveis à hipótese dos quarks. Porém, o aceite definitivo dessa teoria veio a ocorrer somente a partir de 1974, com a descoberta do méson J/ψ , o qual tinha propriedades que puderam ser plenamente explicadas pelos modelos de quarks, como sendo um estado ligado de um par $c - \bar{c}$ (GRIFFITHS, 2008, p. 44-45; MOREIRA, 2011, p. 70).

O quark c já havia sido previsto, teoricamente, por Bjorken e Glashow em 1964 (GRIFFITHS, 2008, p. 44). Assim, com o advento da detecção do hádron J/ψ o modelo dos quarks teve sei derradeiro aceite (GRIFFITHS, 2008, p. 44).

Agora, retoma-se o tópico das funções W_i , é possível refinar-se o resultado das mesmas utilizando-se do modelo dos pártons. Substituindo-se as expressões de W_i , dispostas nas eq. (3.136) e (3.137), em (3.124) obtém-se

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{F_1(x)}{2M} \left(\frac{\alpha^2}{E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \left[1 + \frac{2EE'}{(E - E')^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (4.12)$$

Desse modo, com o modelo dos pártons, foi-se de uma seção de choque diferencial em função de duas variáveis desconhecidas para uma seção de choque em função de uma única variável desconhecida: $F_1(x)$.

Apesar da seção de choque depender apenas da variável $F_1(x)$, essa depende das pdfs (funções densidade de probabilidade) dos pártons, os quais já podem ser chamados de quarks. Assim, não é possível realizar-se um determinação analítica única de $F_1(x)$, pois as pdfs dos quarks não podem ser definidas analiticamente, sendo necessário métodos computacionais para se resolver integrais envolvendo as mesmas. As pdfs são tabeladas para cada valor de x .

Essa complexidade nas pdfs decorre principalmente do fato de que não é possível utilizar-se de métodos perturbativos para se obter expressões para as mesmas, visto que elas só podem ser determinadas em regimes energéticos em que o parâmetro perturbativo é grande.

Outro fator que adiciona complexidade na determinação das pdfs é o fato de que o quadrimomentum do próton não é totalmente carregado pelos quarks, sendo na realidade carregado em boa quantidade pelos glúons. Apesar de no momento de interação com o fóton emitido pelo elétron os quarks se comportam como partículas livre, em uma escala maior de tempo os quarks interagem com glúons, não sendo livres.

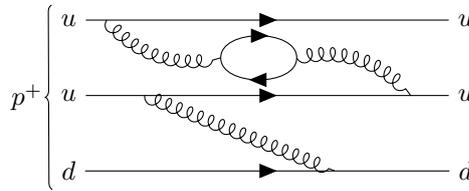
Como os glúons são neutros, eles não interferem no espalhamento elétron-próton, por isso não é preciso considera-los em tal cômputo, no entanto a contribuição do glúons no

quadrivector do próton, e portanto nas pdfs dos quarks, não deve ser negligenciada.

Texto

Outro fator de complexidade na estrutura dos hádrons é o fato de que o conteúdo de um próton é mais complicado que apenas três quarks, pois em um dado momento o próton pode conter um par quark-antiquark qualquer, que não estava ali originalmente. Tais pares são criados a partir de um glúons e se aniquilam transformando-se em glúons posteriormente. Esse processo está exposto na figura (36).

Figura 36 – Representação do fenômeno do aparecimento de pares quark antiquark dentro de hádrons.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

Por intermédio desse processo, uma quantidade de pares quark antiquark pode aparecer dentro de um hádron com o passar do tempo. Esses quarks que aparecem dos glúons são chamados de quarks de “mar” e os quarks originais do hádrons são chamados de quarks de valência.

Por fim, a despeito da impossibilidade de determinação analítica de $F_1(x)$, por meio da análise dos resultados dos espalhamentos $e^- - p$ à luz do modelo de pártons, evidenciou-se que tal modelo mostrou-se efetivo no sentido de possibilitar um melhor entendimento do espalhamento inelástico profundo, refinando sua seção de choque diferencial. Tal modelo também previu relações relevantes (como escalamento de Bjorken e relação Callan-Gross) que ajudaram a melhorar o entendimento da estrutura dos hádrons, e fortaleceram a hipótese dos quarks.

Também oportunizou-se uma breve discussão a respeito da complexidade da obtenção das pdfs associadas a expressão de $F_1(x)$, já à luz do modelo moderno dos quarks.

5 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar e utilizar o ferramental teórico da QED e QCD para cálculos de grandezas associadas a alguns processos envolvendo partículas. Pode-se dizer que o objetivo foi plenamente satisfeito, pois os referidos processos foram apresentados e as ferramentas do MP foram expostas e empregadas.

Por intermédio de tal ferramental fez-se possível calcular grandezas associadas aos processos, as quais subsidiaram análises e discussões sobre os mesmos. Os resultados apresentados mostram que as teorias utilizadas possuem boa corroboração experimental e também mostram como se dá a construção e fundamentação das teorias do MP, como a QCD.

Esse trabalho limitou seu escopo a processos da QED e processo da QCD. Outros processos poderiam ser analisados a luz do MP, como processos de decaimentos que envolvem a força fraca. Tal análise poderia ser realizado em pesquisas futuras, nas quais a teoria da força fraca fosse apresentada.

Referências

- AGUILAR, A. C. Diagramas de feynman: O poder de uma imagem. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 40, 2018. Citado na página 19.
- AHDICITIONARY. **Quark**. 2022. American Heritage Dictionary .HarperCollins Publishers. Disponível em: <<https://www.ahdictionary.com/word/search.html?q=quark>>. Acesso em: 31 jan. 2022. Citado na página 13.
- ANDERSON, C. D. The positive electron. **Physical Review**, APS, v. 43, n. 6, p. 491, 1933. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.43.491>>. Acesso em: 16 jan. 2022. Citado na página 78.
- ANICIN, I. V. The neutrino-its past, present and future. **arXiv preprint physics/0503172**, 2005. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/physics/0503172>>. Acesso em: 19 fev. 2022. Citado na página 16.
- AOYAMA, T. et al. Tenth-order qed contribution to the electron $g-2$ and an improved value of the fine structure constant. **Physical Review Letters**, APS, v. 109, n. 11, p. 111807, 2012. Citado na página 21.
- AVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. Citado na página 56.
- BARRADAS-SOLAS, F.; ALAMEDA-MELÉNDEZ, P. Bringing particle physics to life: build your own cloud chamber. **Science in School**, v. 14, p. 36–40, 2010. Disponível em: <<https://www.scienceinschool.org/article/2010/cloud/>>. Acesso em: 27 jan. 2022. Citado na página 97.
- BASSALO, J. M. F. Partículas elementares: do átomo grego a supercorda. In: CARUSO, F.; SANTORO, A. (Ed.). **Do átomo grego à Física das Interações Fundamentais**. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2012. cap. 5, p. 67–112. Citado 6 vezes nas páginas 15, 77, 78, 102, 103 e 140.
- BENDER, C. M.; ORZAG, S. A. **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I - Asymptotic Methods and Perturbation Theory**. 1. ed. New York: Springer, 1999. Citado na página 31.
- BERNSTEIN, A. et al. Colloquium: Neutrino detectors as tools for nuclear security. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 92, n. 1, p. 011003, 2020. Citado na página 16.
- BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. **Physical Review**, APS, v. 179, n. 5, p. 1547, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 131 e 141.
- BLACKBURN, S. **The Oxford Dictionary of Philosophy**. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado na página 71.
- BLOOM, E. D. et al. High-energy inelastic $e-p$ scattering at 6 and 10. **Physical Review Letters**, APS, v. 23, n. 16, p. 930, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 140.

- BOCCALETTI, D.; PUCACCO, G. **Theory of orbits: Perturbative and geometrical methods**. 1. ed. Springer Science & Business Media, 2002. v. 2. Disponível em: <https://www.google.com.br/books/edition/Theory_of_Orbits/WBvpCAAAQBAJ?hl=pt-BR&gbpv=1&pg=PR1&printsec=frontcover>. Acesso em: 07 jan. 2022. Citado na página 31.
- BOGOLYUBOV, N. N. **Perturbation theory**. 2011. Encyclopedia of Mathematics. Disponível em: <http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Perturbation_theory&oldid=11676>. Acesso em: 30 dez. 2021. Citado na página 32.
- BÜSSER, F. et al. Observation of π^0 mesons with large transverse momentum in high-energy proton-proton collisions. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 471–476, 1973. Citado na página 100.
- CARUSO, F. O milho e a perola: a descoberta do positron e moral da fabula. In: CARUSO, F.; SANTORO, A.; OGURI, V. (Ed.). **Partículas elementares: 100 anos de descobertas**. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2012. cap. 6, p. 111–124. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 78.
- CHARLEY, S. **Six fabulous facts about the Standard Model**. 2021. Symmetry Magazine. Disponível em: <<https://www.symmetrymagazine.org/article/six-fabulous-facts-about-the-standard-model>>. Acesso em: 29 dez. 2021. Citado na página 13.
- COMPTON, A. H. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. **Physical review**, APS, v. 21, n. 5, p. 483, 1923. Citado na página 35.
- COMPTON, A. H. The spectrum of scattered x-rays. **Physical Review**, APS, v. 22, n. 5, p. 409, 1923. Citado na página 35.
- DAVISSON, C.; GERMER, L. H. The scattering of electrons by a single crystal of nickel. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 119, n. 2998, p. 558–560, 1927. Citado na página 34.
- EINSTEIN, A. On a heuristic point of view about the creatidn and conversion of light. In: HAAR, D. T. (Ed.). **The Old Quantum Theory**. Londres: Pergamon Press, 1967. cap. 3, p. 91–107. Citado na página 35.
- EISEBERG, R.; RESNICK, R. **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 46.
- ELLIS, J. P. Tikz-feynman: Feynman diagrams with tikz. **Computer Physics Communications**, v. 210, p. 103–123, 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1601/1601.05437.pdf>>. Acesso em: 29 jan. 2022. Citado 17 vezes nas páginas 20, 22, 69, 87, 93, 95, 96, 106, 107, 108, 110, 118, 124, 143, 155, 156 e 157.
- EPSTEIN, S. Gauge invariance, current conservation, and gíao's. **The Journal of Chemical Physics**, American Institute of Physics, v. 58, n. 4, p. 1592–1595, 1973. Citado na página 49.
- ETYMONLINE. **Hadron**. 2021. Etymonline - Online Etymology Dictionary. Disponível em: <<https://www.etymonline.com/word/hadron>>. Acesso em: 22 out. 2021. Citado na página 14.

ETYMONLINE. **Lepton**. 2021. Etymonline - Online Etymology Dictionary. Disponível em: <<https://www.etymonline.com/search?q=lepton>>. Acesso em: 22 out. 2021. Citado na página 15.

ETYMONLINE. **Meson**. 2021. Etymonline - Online Etymology Dictionary. Disponível em: <https://www.etymonline.com/word/meson#etymonline_v_32046>. Acesso em: 22 out. 2021. Citado na página 14.

ETYMONLINE. **Mnemonic**. 2021. Etymonline - Online Etymology Dictionary. Disponível em: <<https://www.etymonline.com/search?q=mnemonic>>. Acesso em: 22 out. 2021. Citado na página 19.

ETYMONLINE. **Photon**. 2021. Etymonline - Online Etymology Dictionary. Disponível em: <<https://www.etymonline.com/search?q=photon>>. Acesso em: 8 set. 2021. Citado na página 35.

FARRAR, W. Richard laming and the coal-gas industry, with his views on the structure of matter. **Annals of Science**, Taylor & Francis, v. 25, n. 3, p. 243–253, 1969. Citado na página 15.

FEYNMAN, R. P. The behavior of hadron collisions at extreme energies. In: **Special Relativity and Quantum Theory**. [S.l.]: Springer, 1988. p. 289–304. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 141.

FRASER, G. Abraham Pais: 1918-2000. **International Journal of High Energy Physics : CERN Courier**, CERN, v. 40, n. 8, p. 46–46, 2000. Citado na página 15.

GARISTO, D. **A brief etymology of particle physics**. 2017. Disponível em: <<https://www.symmetrymagazine.org/article/a-brief-etymology-of-particle-physics>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

GEIGER, H.; MARSDEN, E. Lxi. the laws of deflexion of a particles through large angles. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 25, n. 148, p. 604–623, 1913. Disponível em: <<https://www.chemteam.info/Chem-History/GeigerMarsden-1913/GeigerMarsden-1913.html>>. Acesso em: 29 jan. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 136.

GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. **Physics Letters**, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 214–215, 1964. Citado na página 103.

GIL, A. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. [S.l.]: Editora Atlas SA, 2008. Citado na página 12.

GLASHOW, S. L. The dawn of physics beyond the standard model. **Reviews of Modern Physics**, v. 52, n. 3, p. 539–543, 1980. Citado na página 13.

GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. 1. ed. Weinheim: John Wiley and Sons, 1987. Citado 5 vezes nas páginas 97, 99, 103, 112 e 134.

GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. 2. ed. Weinheim: John Wiley and Sons, 2008. Citado 24 vezes nas páginas 11, 14, 16, 17, 28, 35, 56, 61, 63, 65, 95, 97, 102, 103, 104, 105, 107, 108, 112, 121, 124, 134, 136 e 142.

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 104.

GRIFFITHS, D. J. **Mecânica quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 35, 40, 71 e 79.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Eletromagnetismo. Vol. 3**. 10. ed. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página 105.

HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quarks and Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics**. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1984. Citado 25 vezes nas páginas 28, 30, 36, 46, 51, 58, 73, 74, 75, 78, 79, 81, 82, 84, 91, 93, 100, 101, 110, 112, 123, 134, 135, 136 e 138.

HANNEKE, D.; FOGWELL, S.; GABRIELSE, G. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. **Physical Review Letters**, APS, v. 100, n. 12, p. 120801, 2008. Citado na página 21.

HUSTON, J.; RABBERTZ, K.; ZANDERIGHI, G. Quantum chromodynamics. In: ZYLA, P. A. et al. (Ed.). **2020 Review of Particle Physics**. [S.l.]: Prog. Theor. Exp. Phys., 2020. cap. 9. Citado na página 11.

HYPERPHYSICS. **Polarization of Dielectric**. 2022. Hyper Physics. Disponível em: <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/dielec.html>>. Acesso em: 03 fev. 2022. Citado na página 104.

JONES, B. W. **The solar system**. 1. ed. Oxford: Pergamon Press, 1984. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=kdv-BAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false>>. Acesso em: 07 jan. 2022. Citado na página 32.

KANE, G. The dawn of physics beyond the standard model. **Scientific American**, v. 288, n. 6, p. 68–75, 2003. Citado na página 13.

KRAGH, H. Equation with the many fathers. the klein–gordon equation in 1926. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 52, n. 11, p. 1024–1033, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 69.

KRAGH, H. Relativistic collisions: The work of christian møller in the early 1930s. **Archive for history of exact sciences**, JSTOR, p. 299–328, 1992. Citado na página 86.

LE MOS, N. A. **Mecânica analítica**. 2. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2013. Citado na página 49.

LEWIS, G. N. The conservation of photons. **Nature**, v. 118, n. 2981, p. 874–875, 1926. Citado na página 35.

MARCHANG, J. **Cosmic-ray particles reveal secret chamber in Egypt’s Great Pyramid**. 2017. Nature. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature.2017.22939>>. Acesso em: 30 dez. 2021. Citado na página 16.

MINKEL, J. Muons for defense. **Scientific American**, v. 292, n. 5, p. 36–36, 2005. Citado na página 16.

- MOREIRA, M. A. **Física de Partículas: Uma abordagem conceitual e Epistemológica**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 142.
- NETO, J. B. **Matemática Para Físicos com Aplicações: Vetores, Tensores e Spinors**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2010. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 22, 39 e 73.
- NETO, O. F. **Explorando a Equação de Dirac: um passeio por Isolantes Topológicos e Férmions de Majorana**. 75 p. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 69, 74, 75 e 78.
- OERTER, R. **The Theory of Almost Everything: The Standard Model, the Unsung Triumph of Modern Physics**. New York, NY, USA: Plume Printing, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 49.
- OKUN, L. The theory of weak interaction. In: PRENTKI, J. (Ed.). **1962 International Conference on High-Energy Physics at CERN**. [S.l.: s.n.], 1962. p. 845–866. Citado na página 14.
- OLSEN, S. L.; SKWARNICKI, T.; ZIEMINSKA, D. Non-standard heavy mesons and baryons, an experimental review. **arXiv preprint arXiv:1708.04012**, 2017. Citado na página 139.
- PAIS, A. On the baryon-meson-photon system. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 10, n. 4, p. 457–469, 1953. Disponível em: <<https://academic.oup.com/ptp/article/10/4/457/1823311?login=true>>. Acesso em: 03 jan. 2022. Citado na página 14.
- PAIS, A. **Inward Bound: On Matter and Forces in the Physical World**. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 100, 103, 116 e 140.
- PEDUZZI, L. O. Q. Do próton de rutherford aos quarks de gell-mann, nambu... **Publicação interna. Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina**, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 45, 69, 71, 102 e 103.
- PERKINS, D. H. **Introduction to high energy physics**. 4rd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 88.
- REIS, A. **Partículas para todos: O mundo microscópico ao alcance da mão**. 1. ed. [s.n.], 2021. Disponível em: <<https://www2.cbpf.br/pt-br/livros/particulas-para-todos>>. Acesso em: 14 jan. 2022. Citado 3 vezes nas páginas 18, 71 e 77.
- ROSENBLUTH, M. High energy elastic scattering of electrons on protons. **Physical Review**, APS, v. 79, n. 4, p. 615, 1950. Citado na página 129.
- RUTHERFORD, E. Lxxix. the scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 21, n. 125, p. 669–688, 1911. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 135.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica quântica moderna**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. Citado na página 93.

SHELLARD, R. A natureza da natureza. In: CARUSO, F.; SANTORO, A. (Ed.). **Do átomo grego à Física das Interações Fundamentais**. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2012. cap. 6, p. 113–134. Citado 3 vezes nas páginas 11, 17 e 103.

STONE, G. J. Lii. on the physical units of nature. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 11, n. 69, p. 381–390, 1881. Citado na página 15.

STONE, G. J. Xlix. of the “electron,” or atom of electricity: To the editors of the philosophical magazine. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 38, n. 233, p. 418–420, 1894. Disponível em: <<https://www.chemteam.info/Chem-History/Stoney-1894.html>>. Acesso em: 14 fev. 2022. Citado na página 15.

TAVARES, O. A. P. **Descobrendo o núcleo atômico**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria de Física and CBPF, 2012. Citado na página 135.

TEX.STACKEXCHANGE. **Draw single-vertex Feynman diagram**. 2013. LaTeX Stack Exchange. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/121693/draw-single-vertex-feynman-diagram>>. Acesso em: 14 jan. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 85.

TEX.STACKEXCHANGE. **Draw in cylindrical and spherical coordinates**. 2014. LaTeX Stack Exchange. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/159445/draw-in-cylindrical-and-spherical-coordinates/159452>>. Acesso em: 14 jan. 2022. Citado na página 66.

TEX.STACKEXCHANGE. **Package for typesetting Feynman diagrams (efficiency of ‘feynmp’ and ‘tikz’)**. 2020. LaTeX Stack Exchange. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/86588/package-for-typesetting-feynman-diagrams-efficiency-of-feynmp-and-tikz>>. Acesso em: 23 fev. 2022. Citado na página 22.

THOMSON, J. J. XI. cathode rays. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 44, n. 269, p. 293–316, 1897. Citado na página 15.

THOMSON, J. J. Lviii. on the masses of the ions in gases at low pressures. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science**, Taylor & Francis, v. 48, n. 295, p. 547–567, 1899. Citado na página 15.

THOMSON, J. J. Xxiv. on the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 7, n. 39, p. 237–265, 1904. Citado na página 15.

UZH.CMS.WIKI. **How to make Feynman diagrams in LaTeX**. 2021. UZH CMS wiki. Disponível em: <<https://wiki.physik.uzh.ch/cms/latex:feynman>>. Acesso em: 14 jan. 2022. Citado 6 vezes nas páginas 54, 57, 68, 86, 102 e 113.

WAYMAN, P. A. Stoney’s electron. **Europhysics news**, Springer, v. 28, n. 5, p. 159–160, 1998. Citado na página 15.

WILSON, F. L. Fermi's theory of beta decay. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 36, n. 12, p. 1150–1160, 1968. Citado na página 16.

ZEE, A. **Quantum field theory in a nutshell**. 2. ed. [S.l.]: Princeton university press, 2010. Citado na página 33.

Apêndices

APÊNDICE A – Prova da invariância da equação de KG sob transformação de calibre.

A equação de KG com a transformação (2.150), que a torna invariante sob transformações de calibre, é dada por

$$((\partial^\mu - ieA^\mu)(\partial_\mu - ieA_\mu) + m^2)\phi = 0 \quad (\text{A.1})$$

Multiplicando a eq. (A.1) pelo campo ϕ

$$(\partial^\mu - ieA^\mu)((\partial_\mu \phi) - ieA_\mu \phi) + m^2 \phi = 0 \quad (\text{A.2})$$

Na eq. (A.2) a derivada covariante está agindo sobre o campo ϕ , por esse motivo colocou-se o termo $\partial_\mu \phi$ entre parenteses. Realizando-se o produto em (A.2):

$$\partial^\mu(\partial_\mu \phi) - ie(\partial^\mu A_\mu)\phi - ieA_\mu(\partial^\mu \phi) - ieA^\mu(\partial_\mu \phi) - e^2 A^\mu A_\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (\text{A.3})$$

Na eq. (A.3) utilizou-se da regra do produto para se derivar o termo $A_\mu \phi$ com a derivada covariante. Isto é $\partial^\mu A_\mu \phi$ é análogo à $\frac{d}{dx} AB = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}$. Isolando o campo na eq. (A.3) tem-se

$$(\partial^\mu \partial_\mu - ie(\partial^\mu A_\mu) - ieA_\mu \partial^\mu - ieA^\mu \partial_\mu - e^2 A^\mu A_\mu) \phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

Agora, realizando a transformação de calibre (2.148) juntamente com a transformação de calibre no campo ϕ

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{ie\lambda} \quad (\text{A.5})$$

com λ sendo uma função qualquer, em (A.1) tem-se

$$((\partial^\mu - ie(A^\mu + \partial^\mu \lambda))(\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \lambda)) + m^2)\phi e^{ie\lambda} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando-se os termos no parenteses por $\phi e^{ie\lambda}$:

$$((\partial^\mu - ie(A^\mu + \partial^\mu \lambda))(\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \lambda))\phi e^{ie\lambda} + m^2 \phi e^{ie\lambda}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Na eq. (A.7) observa-se que o campo transformado $\phi e^{ie\lambda}$ multiplica os termos $(\partial^\mu - ie(A^\mu + \partial^\mu \lambda))(\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \lambda))$. Multiplicando-se os termos do segundo parenteses pelo campo transformado tem-se

$$((\partial^\mu - ie(A^\mu + \partial^\mu \lambda))(\partial_\mu \phi e^{ie\lambda} - ie(A_\mu + \partial_\mu \lambda)\phi e^{ie\lambda}) + m^2 \phi e^{ie\lambda}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Agora, dar-se-á atenção apenas aos termos do segundo parentese

$$\partial_\mu \phi e^{ie\lambda} - ie(A_\mu + \partial_\mu \lambda)\phi e^{ie\lambda} \quad (\text{A.9})$$

Aplicando-se a derivada no campo transformado, lembrando-se da regra do produto, tem-se

$$(\partial_\mu \phi)e^{ie\lambda} + \phi ie(\partial_\mu \lambda)e^{ie\lambda} - ieA_\mu \phi e^{ie\lambda} - ie(\partial_\mu \lambda)\phi e^{ie\lambda} \quad (\text{A.10})$$

Na expressão (A.10) empregou-se a derivada covariante como uma derivada simples sobre o termo exponencial, seguindo-se $\partial_\mu e^{ie\lambda} = \partial_\mu (ie\lambda)e^{ie\lambda}$. Considera-se a função λ como sendo uma função genérica que depende de \vec{r} e t . Simplificando-se (A.10)

$$(\partial_\mu \phi)e^{ie\lambda} - ieA_\mu \phi e^{ie\lambda} \quad (\text{A.11})$$

Assim, tem-se que

$$\partial_\mu \phi e^{ie\lambda} - ie(A_\mu + \partial_\mu \lambda)\phi e^{ie\lambda} = (\partial_\mu \phi)e^{ie\lambda} - ieA_\mu \phi e^{ie\lambda} \quad (\text{A.12})$$

Substituindo-se (A.12) em (A.7), tem-se

$$((\partial^\mu - ie(A^\mu + \partial^\mu \lambda))((\partial_\mu \phi)e^{ie\lambda} - ieA_\mu \phi e^{ie\lambda}) + m^2 \phi e^{ie\lambda}) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando-se os termos do parêntese da esquerda pelo termo obtido na eq. (A.12) em (A.13)

$$\begin{aligned} ie(\partial^\mu \lambda)e^{ie\lambda}(\partial_\mu \phi) + e^{ie\lambda}(\partial^\mu(\partial_\mu \phi) - ie e^{ie\lambda} \phi(\partial^\mu A_\mu) + e^2 A_\mu(\partial^\mu \lambda)e^{ie\lambda} \phi - ieA_\mu e^{ie\lambda}(\partial^\mu \phi) \\ - ieA^\mu e^{ie\lambda}(\partial_\mu \phi) - ie(\partial^\mu \lambda)e^{ie\lambda}(\partial_\mu \phi) - e^2 A^\mu A_\mu e^{ie\lambda} - e^2(\partial^\mu \lambda)A_\mu e^{ie\lambda} \phi + m^2 \phi e^{ie\lambda}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Para se obter a eq. (A.14) foi aplicado a regra do produto na ação da derivada covariante ∂^μ sobre o termo $(\partial_\mu \phi)e^{ie\lambda}$.

Simplificando os termos na eq. (A.14) tem-se

$$e^{ie\lambda}(\partial^\mu(\partial_\mu \phi)) - ie e^{ie\lambda} \phi(\partial^\mu A_\mu) - ieA_\mu e^{ie\lambda}(\partial^\mu \phi) - ieA^\mu e^{ie\lambda}(\partial_\mu \phi) - e^2 A^\mu A_\mu e^{ie\lambda} + m^2 \phi e^{ie\lambda} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Dividindo toda a equação por $e^{ie\lambda}$ e isolando o campo

$$(\partial^\mu \partial_\mu - ie(\partial^\mu A_\mu) - ieA_\mu \partial^\mu - ieA^\mu \partial_\mu - e^2 A^\mu A_\mu + m^2)\phi = 0 \quad (\text{A.16})$$

Eis o resultado que era procurado. Comparando-se a eq. (A.16) com (A.4) observa-se que estes apresentam os mesmos termos, logo a equação de KG com a transformação (2.150) se mostrou invariante sob as transformações de calibre (2.148) e (A.5).

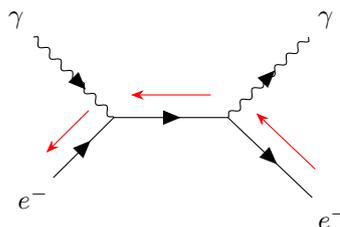
APÊNDICE B – Mais exemplos sobre como ler diagramas para a utilização das regras de Feynman.

Neste apêndice serão apresentados mais três exemplos de como se ler diagramas e utilizar as regras de Feynman sobre os mesmos.

Considerando-se o espalhamento Compton, dado por

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma \quad (\text{B.1})$$

Um possível diagrama para tal espalhamento é dado pela figura (37). No diagrama Figura 37 – Diagrama de Feynman do processo (B.1) adaptado para aplicação das regras de Feynman.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

acima a partícula virtual não é um fóton, é um elétron, e os fótons que aparecem saindo e entrando dos vértices são partículas reais. Para analisar esse diagrama seguem-se as flechas **vermelhas**, começando a leitura do mesmo pela partícula cuja seta aponta para fora do vértice (o e^- saindo do vértice, à direita), seguindo para o vértice e incluindo o γ saindo. Depois, rumo-se para o propagador, seguido pelo vértice da esquerda, o γ entrando e por fim o e^- entrando no vértice. Assim, constrói-se a amplitude invariante:

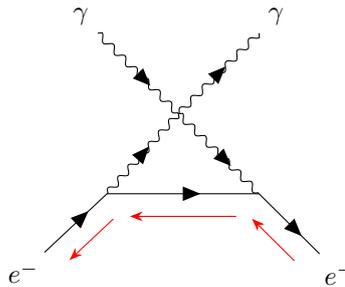
$$\mathfrak{M} = (\text{termo do } e^- \text{ saindo do vértice})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } \gamma \text{ saindo do vértice}) (\text{termo do propagador})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } \gamma \text{ entrando no vértice}) (\text{termo do } e^- \text{ entrando no vértice}) \quad (\text{B.2})$$

A partir da leitura e análise desse diagrama, fica claro que a direção da leitura do diagrama é sempre definida por partículas com $s = 1/2$, isto é, férmions (quarks e léptons). Na análise do diagrama acima não é necessário considerar-se uma ordem para os fótons reais

(entrando e saindo dos vértices). Na realidade, partículas como fótons e glúons, que são descritos por vetores de polarização ϵ^μ (ver tabela (2) e (3)), não tem uma ordem específica a ser seguida na leitura dos diagramas, pois os termos que os descrevem, os vetores de polarização, comutam com os termos das outras partículas dos diagramas. Desse modo, poder-se-ia escrever a eq. (B.2) de modo que o (termo do γ saindo do vértice) estivesse antes do (termo do vértice) ou antes do (termo do e^- saindo do vértice). O mesmo vale para o (termo do γ entrando no vértice), à direita da mesma equação. A única regra de posição que os termos do fóton devem obedecer, a princípio, é a de que o (termo do γ saindo do vértice) deve ficar a esquerda do (termo do propagador) e o (termo do γ entrando no vértice) deve ficar a direita do (termo do propagador),

Outro exemplo de diagrama do espalhamento Compton (B.1) é dada pelo diagrama da figura (38).

Figura 38 – Outro diagrama de Feynman do processo (B.1) adaptado para aplicação das regras de Feynman.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

Novamente, deve-se seguir a ordem de leitura determinada pelas flechas vermelhas, que determinam que a leitura deve-se iniciar pelo e^- que sai do vértice a direita, seguindo para o vértice, incluindo o γ saindo, seguindo-se então para o propagador, o vértice da esquerda, o γ entrando e, por fim, o e^- entrando. Assim como no caso da leitura do diagrama anterior, os termos do fóton não têm um local específico na expressão de \mathfrak{M} qual devem ficar, pois eles comutam com os outros termos da equação.

Através da leitura do diagrama, obtém-se então

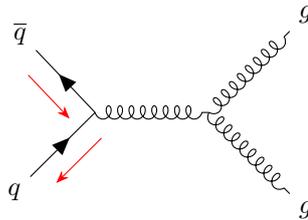
$$\mathfrak{M} = (\text{termo do } e^- \text{ saindo do vértice})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } \gamma \text{ entrando no vértice}) \\ (\text{termo do propagador})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } \gamma \text{ saindo do vértice}) (\text{termo do } e^- \\ \text{entrando no vértice}) \quad (\text{B.3})$$

Por fim, um último espalhamento qual pode ser analisado é

$$q + \bar{q} \rightarrow g + g \quad (\text{B.4})$$

Este espalhamento é exclusivo da QCD e diz respeito a aniquilação de um par quark antiquark para a geração de glúons.

Um dos possíveis diagramas para esse espalhamento é dado pela figura (39). O Figura 39 – Diagrama de Feynman do processo (B.4) adaptado para aplicação das regras de Feynman.



Fonte: Elaborado pelo autor com o pacote de Ellis (2017).

vértice de três glúons acoplados que aparece na figura (39) só existe na teoria da QCD, logo esse diagrama requer uma leitura cuidadosa.

Primeiro aspecto a ser clarificado é de que, os termos dos glúons da direita do diagrama não possuem uma ordem específica a ser seguida, pois os termos dos glúons comutam entre si. A única posição que esses termos devem respeitar, a princípio, é a de que eles fique do lado direito do (termo do propagador). O segundo aspecto a ser considerado é o de que o vértice do glúon da direita, tem uma expressão específica para ele, expressa na tabela de regras de Feynman da QCD (3).

Assim, a leitura do diagrama começa pelos férmions, do lado esquerdo, seguindo-se a ordem das flechas vermelhas: incia-se pelo termo do \bar{q} saindo, segue-se para o vértice da esquerda e depois para o termo do q entrando no vértice. Depois, parte-se para o propagador do glúon, o vértice dos glúons e finaliza-se com os dois glúons, cuja ordem não é relevante. A expressão de \mathfrak{M} é dada por

$$\mathfrak{M} = (\text{termo do } \bar{q} \text{ saindo do vértice})(\text{termo do vértice}) (\text{termo do } q \text{ entrando no vértice}) \\ (\text{termo do propagador})(\text{termo do vértice dos glúons})(\text{ termo de um dos glúons da direita}) \\ (\text{ termo do outro glúon}) \tag{B.5}$$

APÊNDICE C – Cálculos realizados para se chegar nas eq. (3.33) e (3.35).

Nesse apêndice serão mostrados os passos realizados para se obter as equações (3.33) e (3.35). Tratam-se de um cálculos relevantes para esse trabalho, pois os mesmos são amplamente realizados em diversos espalhamentos analisados.

Partindo-se da eq. (3.19), tem-se

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(K' - m)\gamma^\mu(K + m)\gamma^\nu] \quad (\text{C.1})$$

Realizando-se os produtos dentro do traço em (C.1)

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[K'\gamma^\mu K\gamma^\nu + K'\gamma^\mu m\gamma^\nu - m\gamma^\mu K\gamma^\nu - m^2\gamma^\mu\gamma^\nu] \quad (\text{C.2})$$

Usando a propriedade (3.29) para reescrever (C.2)

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\text{Tr}[K'\gamma^\mu K\gamma^\nu] + \text{Tr}[K'\gamma^\mu m\gamma^\nu] - \text{Tr}[m\gamma^\mu K\gamma^\nu] - \text{Tr}[m^2\gamma^\mu\gamma^\nu]] \quad (\text{C.3})$$

Pode-se usar a propriedade (3.30) para tirar as massas de dentro dos traços

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\text{Tr}[K'\gamma^\mu K\gamma^\nu] + m\text{Tr}[K'\gamma^\mu\gamma^\nu] - m\text{Tr}[\gamma^\mu K\gamma^\nu] - m^2\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu]] \quad (\text{C.4})$$

Agora, reescrevendo os quadrimomenta na notação slash de Feynman em sua forma original, lembrando que os quadrimomenta são objetos do espaço usual, enquanto que as matrizes gama são do espaço de spin, tem-se

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\text{Tr}[K'_\alpha K_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] + m\text{Tr}[K'_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu] - m\text{Tr}[K_\beta \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] - m^2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]] \quad (\text{C.5})$$

Como K'_α e K_β são apenas as componentes dos quadrimomenta, pode-se tira-los de dentro do operador Tr , vide (3.30), assim

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [K'_\alpha K_\beta \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] + mK'_\alpha \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu] - mK_\beta \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] - m^2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]] \quad (\text{C.6})$$

Lançando-se mão da propriedade (3.28) pode-se anular os dois traços do meio

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [K'_\alpha K_\beta \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] - m^2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]] \quad (\text{C.7})$$

Escrevendo-se o traço da direita, por intermédio da propriedade (3.31)

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [K'_\alpha K_\beta \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] - m^2(4g^{\mu\nu})] \quad (\text{C.8})$$

Finalmente, pode-se eliminar o último traço da expressão lançando-se mão da propriedade (3.32)

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[K'_\alpha K_\beta [4(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta})] - 4m^2 g^{\mu\nu} \right] \quad (\text{C.9})$$

Realizando-se o produtos dos quadrivetores K'_α e K_β pelos tensores métricos na eq. (C.9), tem-se

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = 2(K'^\mu K^\nu - K'^\beta K_\beta g^{\mu\nu} + K'^\nu K^\mu - m^2 g^{\mu\nu}) \quad (\text{C.10})$$

Para se chegar na eq. (C.10) utilizou-se de (2.29). Lembrando-se da definição do produto interno na notação de Einstein (2.33) e escrevendo-se tal produto usando a notação (2.41)

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = 2(K'^\mu K^\nu + K'^\nu K^\mu - g^{\mu\nu}(K' \cdot K + m^2)) \quad (\text{C.11})$$

Eis a equação (3.33).

Substituindo-se (C.11) e (3.34) em (3.5), tem-se

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} 4(K'^\mu K^\nu + K'^\nu K^\mu - g^{\mu\nu}(K' \cdot K + m^2))(P'_\mu P_\nu + P'_\nu P_\mu - g_{\mu\nu}(P' \cdot P + M^2)) \quad (\text{C.12})$$

Realizando-se os produtos em (C.12) tem-se

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 = & \frac{e^4}{q^4} 4[K'^\mu P'_\mu K^\nu P_\nu + K'^\mu P_\mu K^\nu P'_\nu - K'^\mu K^\nu g_{\mu\nu}(P' \cdot P + M^2) + K'^\nu P_\nu K^\mu P'_\mu + K'^\nu P'_\nu K^\mu P_\mu \\ & - K'^\nu K^\mu g_{\mu\nu}(P \cdot P' + M^2) - g^{\mu\nu}(K' \cdot K + m^2)P'_\mu P_\nu - g^{\mu\nu}(K' \cdot K + m^2)P'_\nu P_\mu \\ & + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}(K' \cdot K + m^2)(P \cdot P' + M^2)] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Escrevendo os produtos internos na notação de Einstein usando a notação (2.41)

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 = & \frac{e^4}{q^4} 4[(K' \cdot P')(K \cdot P) + (K' \cdot P)(K \cdot P') - K' \cdot K(P' \cdot P + M^2) + (K' \cdot P)(K \cdot P') \\ & + (K' \cdot P')(K \cdot P) - K' \cdot K(P \cdot P' + M^2) - P' \cdot P(K' \cdot K + m^2) - P' \cdot P(K' \cdot K + m^2) \\ & + 4(K' \cdot K + m^2)(P' \cdot P + m^2)] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Na expressão (C.14) utilizou-se da propriedade (3.26). Simplificando-se a expressão (C.14)

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} 4[2(K' \cdot P')(K \cdot P) + 2(K' \cdot P)(K \cdot P') - 2K' \cdot K M^2 - 2P' \cdot P m^2 + 4K' \cdot K M^2 + 4P' \cdot P m^2 + 4m^2 M^2] \quad (\text{C.15})$$

Simplificando-se novamente

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} 8[(K' \cdot P')(K \cdot P) + (K' \cdot P)(K \cdot P') + K' \cdot K M^2 + P' \cdot P m^2 + 2m^2 M^2] \quad (\text{C.16})$$

No limite ultrarrelativístico os momenta espaciais e a energia são muito grandes frente a massa do elétron (m) e do múon (M), desse modo pode-se desprezar os termos dessas massas. Desse modo, (C.16) fica

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} 8[(K' \cdot P')(K \cdot P) + (K' \cdot P)(K \cdot P')] \quad (\text{C.17})$$

Para o caso do espalhamento estudado, as variáveis de Mandelstan, definidas em termos de P_A , P_B , P_C e P_D são dadas por

$$s = (K + K')^2 = (P + P')^2 \quad (\text{C.18})$$

$$t = (K - P')^2 = (P - K')^2 \quad (\text{C.19})$$

$$u = (K - P)^2 = (P' - K')^2 \quad (\text{C.20})$$

Visto que, para o espalhamento tratado aqui $P_A = K$, $P_B = K'$, $P_C = P'$ e $P_D = P$. No limite ultrarrelativístico, com massa negligenciada, tem-se que as variáveis de Mandelstan ficam

$$s = (K + K')^2 = K^2 + K'^2 + 2K' \cdot K = M^2 + M^2 + 2K' \cdot K = 2K' \cdot K = 2P' \cdot P \quad (\text{C.21})$$

$$u = (K - P)^2 = K^2 + P^2 - 2K \cdot P = -2K \cdot P = -2K' \cdot P' \quad (\text{C.22})$$

$$t = (K - P')^2 = K^2 + P'^2 - 2K \cdot P' = 2K \cdot P' = -2P \cdot K' \quad (\text{C.23})$$

Nas expressões (C.21)-(C.23) utilizou-se o fato de que o produto de um quadrimomentum por si mesmo resulta na massa associada a partícula qual ele diz respeito, o que no limite ultrarrelativístico é nulo. É relevante destacar que o q para esse espalhamento, que ocorre no canal s , é dado por

$$q = K + K' \quad (\text{C.24})$$

Substituindo-se (C.24), (C.18), (C.22) e (C.23) em (C.17) obtém-se

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2e^4 \frac{(u^2 + t^2)}{s^2} \quad (\text{C.25})$$

Eis o resultado (3.35).