



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

DAIANE TAPPARELLO

**APRENDIZAGENS SOBRE FRAÇÕES A PARTIR DA ABORDAGEM
EXPLORATÓRIA EM UM ESTUDO DE AULA**

**CHAPECÓ
2021**

DAIANE TAPPARELLO

**APRENDIZAGENS SOBRE FRAÇÕES A PARTIR DA ABORDAGEM
EXPLORATÓRIA EM UM ESTUDO DE AULA**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Adriana Richit.

CHAPECÓ

2021

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Tapparello, Daiane

Aprendizagens sobre frações a partir da abordagem
exploratória em um estudo de aula / Daiane Tapparello.
-- 2021.

111 f.:il.

Orientadora: Doutora Adriana Richit

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da
Fronteira Sul, N, N, 2021.

1. Abordagem exploratória. 2. Estudos de aula. 3.
Frações. 4. Aprendizagem matemática. 5. Educação
matemática. I. Richit, Adriana, orient. II. Universidade
Federal da Fronteira Sul. III. Título.

DAIANE TAPPARELLO

**APRENDIZAGENS SOBRE FRAÇÕES A PARTIR DA ABORDAGEM
EXPLORATÓRIA EM UM ESTUDO DE AULA**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação da
Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do
título de Mestre em Educação, apresentado em banca examinadora em 17/12/2021.

Aprovado em: 17/12/2021

BANCA EXAMINADORA



Prof.^a Dr.^a Adriana Richit – UFFS
Presidente da banca/orientadora



Prof.^a Dr.^a Eliane Arantes – UTFPR
Membro titular externo



Prof. Dr. Ilton Benoni da Silva – UFFS
Membro titular interno



Prof.^a Dr.^a Andriceli Richit – IFC
Membro suplente

Chapecó/SC, 17 de dezembro de 2021.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter tornado tudo isso possível e me dar forças e determinação para superar todas as dificuldades. E por ter colocado pessoas maravilhosas em minha vida.

A minha família e meu namorado, pela compreensão, e por toda a ajuda e incentivo durante esta etapa. Vocês são meu porto seguro!

A minha orientadora, Adriana Richit, pela paciência, incentivo e dedicação. Sem você este sonho não teria se tornando real. Agradeço pela oportunidade em aprender com você, que Deus nos abençoe com uma parceria duradoura com ótimos resultados.

A banca examinadora, Eliane Araman, Ilton Benoni da Silva e Andriceli Richit, pela disponibilidade e valiosas contribuições ao trabalho.

A todos os professores do programa de pós-graduação em Educação - UFFS, que foram muito importantes nesta jornada acadêmica.

As professoras Jacqueline Dal Bosco Cadori, Luzzieli Franceschi, Giovana Damaceno, Patricia Tomasi, Jesica Spricigo, Lidiane Baggio e Daiana Marques, por terem contribuído neste processo.

As amigas Ana Paula Tomasi e a Indiana Picolo Vial, pela partilha e troca de experiências.

Aos pais e alunos da turma do 7º ano da Escola Municipal Santa Terezinha – Faxinal dos Guedes - SC, pela confiança e por toda dedicação e interesse na realização das atividades propostas.

Agradeço também a Secretaria Municipal de Educação de Faxinal dos Guedes e a Escola Municipal Santa Terezinha e todos que a integram, por terem feito com que esta pesquisa pudesse ser concretizada.

As minhas amigas, da faculdade para vida, Aline, Katia, Darlusa e Leila, pelo incentivo e motivação nos momentos mais difíceis.

Aos amigos que o mestrado me apresentou, Alan, Daiane, Estevan e Romana, gratidão a vocês por toda partilha de conhecimento, estímulo e encorajamento. Vocês tornaram este percurso mais leve e divertido.

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível.

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.”

Paulo Freire

RESUMO

A aprendizagem sobre frações, especialmente no ensino fundamental, caracteriza uma importante dimensão da aprendizagem matemática, de modo que seu ensino pressupõe contextos e atividades diferenciadas com potencial para explicitar os modos de pensar dos alunos. A abordagem exploratória da matemática possibilita explicitar o pensamento e as estratégias dos alunos para expressar suas compreensões sobre tópicos curriculares. A pesquisa, de natureza qualitativa e interpretativa, buscou evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas de alunos do 7º ano sobre o tópico frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. A investigação, baseada nos pressupostos teóricos do estudo de aula e da abordagem exploratória, foi realizada no contexto da aula de investigação, 3.ª etapa do estudo de aula, desenvolvida em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Santa Terezinha, de Faxinal dos Guedes, SC. O estudo de aula, organizado em 12 encontros de 2 horas cada, foi realizado com quatro professoras de Matemática da rede municipal, as quais engajaram-se no planejamento da aula de investigação, que abordou o tópico frações. O material empírico do estudo foi constituído mediante a aplicação de questionário aos alunos previamente a aula de investigação, elaboração de notas de campo, das observações realizadas pelos professores e a realização de entrevistas com os alunos ao final do estudo de aula. Os dados foram analisados pela perspectiva do paradigma indiciário, priorizando-se examinar as estratégias de resolução, as representações matemáticas mobilizadas, os processos de raciocínio e as generalizações elaboradas pelos alunos no desenvolvimento da tarefa proposta para a aula de investigação. A análise do material empírico evidenciou três categorias: (i) significados de fração, (ii) representações de fração e (iii) justificações e conclusões dos alunos sobre frações, possibilitando evidenciar aprendizagens importantes. A aprendizagem dos alunos sobre frações caracterizou-se mediante as distintas compreensões dos significados de fração explorados a partir da tarefa proposta, da mobilização de representações distintas para resolvê-la, bem como pela argumentação e as justificações formuladas para os resultados encontrados. Esse aspecto foi potencializado na discussão coletiva, mediante a partilha das representações, interpretações e generalizações e a identificação de erros, incertezas ou irresoluções, que ao fim possibilitou a sistematização de conclusões e dos resultados obtidos, da mesma forma que o desenvolvimento de capacidade de raciocínio e a comunicação matemática. Assim, a abordagem exploratória favoreceu a aprendizagem matemática dos alunos na medida em que oportuniza o desenvolvimento de capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, fazendo emergir ideias matemáticas, que são sistematizadas em discussão coletiva.

Palavras-chave: Abordagem Exploratória. Estudos de aula. Lesson study. Frações. Aprendizagem matemática. Educação Matemática.

ABSTRACT

Learning about fractions, especially in elementary school, characterizes an important dimension of mathematical learning, so that its teaching presupposes different contexts and activities with the potential to explain students' ways of thinking. The exploratory approach to mathematics makes it possible to explain students' thinking and strategies to express their understanding of curricular topics. The research, of a qualitative and interpretative nature, sought to highlight and discuss the mathematical learning of 7th grade students on the topic of fractions from an exploratory approach in a class study. The investigation, based on the theoretical assumptions of the class study and the exploratory approach, was carried out in the context of the investigation class, 3rd stage of the class study, developed in a class of the 7th grade of Elementary School at Escola Municipal Santa Terezinha, from Faxinal dos Guedes, SC. The class study, organized in 12 meetings of 2 hours each, was carried out with four Mathematics teachers from the municipal network, who were engaged in the planning of the investigation class, which addressed the topic fractions. The empirical material of the study was constituted through the application of a questionnaire to the students before the investigation class, elaboration of field notes, the observations made by the teachers and the accomplishment of interviews with the students at the end of the class study. The data were analyzed from the perspective of the evidentiary paradigm, prioritizing the examination of resolution strategies, the mathematical representations mobilized, the reasoning processes and the generalizations made by the students in the development of the proposed task for the investigation class. The analysis of the empirical material evidenced three categories: (i) fraction meanings, (ii) fraction representations and (iii) students' justifications and conclusions about fractions, making it possible to highlight important learnings. Students' learning about fractions was characterized by the different understandings of the meanings of fraction explored from the proposed task, the mobilization of different representations to solve it, as well as the arguments and justifications formulated for the results found. This aspect was enhanced in the collective discussion, through the sharing of representations, interpretations and generalizations and the identification of errors, uncertainties or irresolutions, which in the end made it possible to systematize conclusions and the results obtained, in the same way as the development of reasoning ability and mathematical communication. Thus, the exploratory approach favored students' mathematical learning insofar as it allows the development of mathematical skills such as problem solving, mathematical reasoning and mathematical communication, giving rise to mathematical ideas, which are systematized in collective discussion.

Keywords: Exploratory Approach. Lesson study. Lesson study. Fractions. Math learning. Mathematics Education.

LISTA DE QUADROS

| | |
|--|----|
| Quadro 1 - Trabalhos identificados na BDTD a partir dos descritores “estudos de aula” e “lesson study” | 26 |
| Quadro 2 - Trabalhos identificados na BDTD a partir dos descritores “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática” | 28 |
| Quadro 3 - Busca no portal de periódicos da Scielo utilizando os descritores “estudos de aula” e “lesson study” | 28 |
| Quadro 4 - Busca no portal de periódicos da Scielo utilizando os descritores “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática” | 30 |
| Quadro 5 – Duplas para realização da tarefa na aula de investigação com o respectivamente observador. | 64 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1. Ciclo dos estudos de aula. | 40 |
| Figura 2. Subconceitos de frações. | 46 |
| Figura 3. Diagrama da análise dos dados. | 61 |
| Figura 4. Atividade 1 – Questões 4 e 5..... | 66 |
| Figura 5. Resposta questão 4 e 5, atividade 1, aula de investigação..... | 67 |
| Figura 6. Atividade 1 – Questão 14 | 67 |
| Figura 7. Resposta questão 14, atividade 1, aula de investigação..... | 68 |
| Figura 8. Atividade 1 – Questão 7 | 69 |
| Figura 9. Atividade 1 – Questão 12 | 70 |
| Figura 10. Resposta questão 12, atividade 1, aula de investigação..... | 71 |
| Figura 11. Resposta questão 14, atividade 1, aula de investigação..... | 71 |
| Figura 12. Resposta questão 4, letra b, atividade 2, aula de investigação..... | 72 |
| Figura 13. Atividade 1 – Questão 6 | 74 |
| Figura 14. Resposta questão 6, atividade 1, aula de investigação..... | 75 |
| Figura 15. Resposta letra d questão 3, atividade 2, aula de investigação..... | 75 |
| Figura 16. Resposta letra f questão 3, atividade 2, aula de investigação..... | 75 |
| Figura 17. Atividade 2 – Questão 1 | 77 |
| Figura 18. Resposta questão 1, atividade 2, aula de investigação..... | 78 |
| Figura 19. Resposta questão 1, atividade 2, aula de investigação..... | 78 |
| Figura 20. Resposta questão 2 e 4, atividade 1, aula de investigação..... | 79 |
| Figura 21. Atividade 1 – Questão 1 | 80 |

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio

IFC – Instituto Federal Catarinense

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

Prouni – Programa Universidade para Todos

SC – Santa Catarina

SciELO – Scientific Electronic Library Online

SISU – Sistema de Seleção Unificada

UFFS – Universidade Federal da Fronteira Sul

UNIASSELVI – Centro Universitário Leonardo da Vinci

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| INTRODUÇÃO | 15 |
| 1 ORIGENS E CONTEXTUALIZAÇÃO | 19 |
| 1.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA DA PESQUISADORA E O PROBLEMA DE PESQUISA..... | 19 |
| 1.2 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA SOCIAL | 24 |
| 2. ESTUDOS DE AULA (LESSON STUDY) | 32 |
| 2.2 ESTRUTURA E DINÂMICA DO ESTUDO DE AULA..... | 37 |
| 2.3 A AULA DE INVESTIGAÇÃO E A ABORDAGEM EXPLORATÓRIA..... | 41 |
| 2.3.1 Tarefas..... | 44 |
| 2.4 FRAÇÕES | 46 |
| 3 METODOLOGIA..... | 50 |
| 3.1 ABORDAGEM DA PESQUISA | 50 |
| 3.2 CONTEXTO DA PESQUISA | 51 |
| 3.2.1 Contexto da recolha de dados..... | 51 |
| 3.2.2 Escola..... | 52 |
| 3.2.3 Participantes..... | 52 |
| 3.2.4 Dinâmica da atividade | 54 |
| 3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO | 55 |
| 3.3.1 Constituição de Dados | 55 |
| 3.3.2 Questionários | 56 |
| 3.3.3 Entrevistas..... | 57 |
| 3.3.4 Notas de Campo..... | 58 |
| 3.4 PROCEDIMENTOS DA ANÁLISE DE DADOS | 59 |
| 4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS..... | 61 |

| | |
|---|-----|
| 4.1 DESCRIÇÃO DO ESTUDO DE AULA REALIZADO..... | 62 |
| 4.2 APRENDIZAGENS DOS ALUNOS SOBRE FRAÇÕES | 65 |
| 4.2.1. Significados de Fração | 66 |
| 4.2.2. Representações de Fração | 76 |
| 4.2.3. Justificações e conclusões | 81 |
| 4.3 CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DOS ALUNOS.... | 84 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS | 87 |
| REFERÊNCIAS..... | 90 |
| APÊNDICES..... | 99 |
| APÊNDICE 01 | 99 |
| APÊNDICE 02 | 108 |
| APÊNDICE 03..... | 109 |
| APÊNDICE 04 | 112 |

INTRODUÇÃO

A Matemática desenvolveu-se ao longo dos anos como uma estratégia “[...] para explicar, para entender, para manejar, para conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural”, e a educação como uma “[...] estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo [...]”, de modo que ambas, a Matemática e a Educação, constituem-se em “[...] estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes” (D’AMBROSIO, 2008, p. 7-8).

Sendo assim, outra perspectiva deve ser considerada, a Educação Matemática, que traz, “[...] de modo estrutural, em seu núcleo constitutivo, a Matemática e a Educação com suas especificidades. Essas especificidades se revelam nas atividades práticas pautadas nessas ciências, como aquelas de ensino ou de aplicação do conhecimento, bem como naquilo que concerne ao próprio processo de produção de conhecimento” (BICUDO, 2013).

No âmbito da Educação Matemática, assim como nas demais áreas da educação, se faz necessário que o professor tenha ciência do que está fazendo e reflita sobre suas ações, sendo esta reflexão também uma responsabilidade profissional. De acordo com Richit (2005), a concretização de mudanças em educação, ou mesmo o desenvolvimento de abordagens de sala de aula na perspectiva da educação matemática, não acontecem naturalmente e sem envolvimento do professor. Mudanças no ensino pressupõem a ação consciente e qualificada do professor (RICHIT, 2005), aspecto esse que requer ações de formação e desenvolvimento profissional, tais como os estudos de aula (em inglês *lesson study*), com potencial de promover mudanças no ensino e favorecer a aprendizagem dos alunos.

Ponte *et al.* (2014) ressalta que as oportunidades formativas promovidas pelos estudos de aula propiciam ao professor, além de refletir sobre sua prática em sala de aula, o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos acerca de conceitos diversos e do lugar destes no currículo. Neste sentido, o estudo de aula “[...] constitui-se numa possibilidade concreta de promover mudanças educacionais em distintos níveis de ensino, pois consiste em uma abordagem que prioriza a

aprendizagem dos alunos por meio do desenvolvimento dos professores” (RICHIT; PONTE; TOMKELSKI, 2021, p.21).

Os estudos de aula têm assumido relevância na educação matemática, mobilizando pesquisadores, sendo objeto de diversos trabalhos e ações de formação docente em diversos contextos educacionais (RICHIT; PONTE; TOMKELSKI, 2019). Os estudos de aula são originários do Japão, no início do século 20, popularizaram-se nos Estados Unidos a partir dos anos 1990 e se disseminaram por vários países. Constituem uma abordagem de desenvolvimento profissional de professores com foco na prática de sala de aula, de natureza colaborativa e reflexiva (LEWIS, 2002; PONTE et al., 2016; STIGLER e HIEBERT, 2016; RICHIT, 2020).

Os estudos de aula vêm possibilitando resultados relevantes na educação, visto que os professores se concentram nos conhecimentos e capacidades essenciais para melhorar o desempenho nas atividades de sala de aula, com isso desenvolvem o seu conhecimento acerca de determinado conteúdo, culminando na maneira como ensiná-lo, na busca do entendimento sobre os processos de pensamento dos alunos (SIBBALD, 2009). Além disso, por meio desse processo formativo os professores podem analisar os diferentes tipos de tarefa para as aulas e as consequências que essas tarefas podem ter para a aprendizagem (PONTE, *et al.*, 2016; RICHIT, PONTE, TOMKELSKI, 2019; RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021).

A abordagem exploratória de tópicos da matemática, a qual embasa a aula de investigação dos estudos de aula (RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021), propicia ao professor identificar diferentes modos de pensar dos alunos, além de promover a participação ativa dos mesmos no processo de ensino, ou seja, oportuniza os alunos expressar e discutir suas estratégias e modos de pensar, seja individualmente ou de forma coletiva, favorecendo os processos de raciocínio, comunicação, justificação, representações e generalizações matemáticas (RICHIT, PONTE, 2020; RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021).

De acordo com Ponte (2005), Ponte e Quaresma (2011), Richit (2020) e Richit (2021), em um estudo de aula os professores podem refletir sobre as possibilidades de favorecer a aprendizagem matemática dos alunos a partir da uma abordagem exploratória (*inquiry-based approach*). Essa abordagem permite que os alunos construam ou aprofundem a sua compreensão de conceitos, representações,

procedimentos e ideias matemáticas, conforme apontado por Richit, Tomkelski e Richit (2021).

A abordagem exploratória oportuniza aos alunos assumir papel ativo na resolução de tarefas matemáticas, quando o ensino da Matemática prioriza esse papel, o conceito de tarefa se torna essencial, sendo reconhecidas como “[...] elemento organizador da atividade dos alunos” (PONTE, *et al.* 2016). Com isso, o aluno é convidado a interpretar as questões que lhe são propostas, representar informações, formular generalizações e elaborar conjecturas para as resoluções de determinada tarefa, comunicando-as e justificando-as (PONTE, *et al.* 2014; RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021).

Neste sentido, a partir do entendimento que existe uma problemática enraizada nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, a pesquisadora, no decorrer da formação acadêmica e na experiência profissional, passou a interrogar-se sobre as dificuldades dos alunos em sala de aula e sobre formas de tratar estas dificuldades. A trajetória acadêmica possibilitou-lhe compreender que cada aluno tem sua especificidade, marcada por maneiras e tempos distintos de aprender. E a experiência profissional permitiu-lhe constatar que algumas das dificuldades de aprendizagem dos alunos em tópicos específicos da Matemática, bem como os erros na resolução de determinadas atividades e na execução de operações matemáticas são recorrentes ano após ano.

Para a área de Matemática, a Base Nacional Comum Curricular, aponta competências específicas que precisam ser desenvolvidas pelos alunos e evidencia a importância em relacionar o ensino da Matemática ao cotidiano, a fim de lhes possibilitar a compreensão dos conceitos matemáticos de forma contextualizada. Por meio de interpretação, questionamento, investigações e resoluções de problemas, estímulo ao pensamento matemático para resolver as questões propostas, com o intuito de favorecer a aprendizagem dos alunos.

Mediante estas vivências emergiram indagações que culminaram no problema da pesquisa, que está assim apresentado: *Quais são as aprendizagens de alunos do 7º ano sobre o tópico matemático frações promovidas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula?*

Diante do exposto, a pesquisa realizada buscou ‘evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas de alunos do 7º ano sobre frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula’. A análise incidiu sobre a aula de

investigação, 3.^a etapa do estudo de aula, que foi realizada em uma turma de 7^o ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Santa Terezinha, localizada no município de Faxinal dos Guedes, em Santa Catarina.

Escolhemos esta escola como local para o desenvolvimento da aula de investigação, por ser localizada na cidade em que a pesquisadora atuava profissionalmente e, também, por estar na região da abrangência da Universidade Federal da Fronteira Sul, cuja missão precípua é promover o desenvolvimento social e educacional da região.

A dissertação está organizada em quatro capítulos, introdução e considerações finais. A introdução apresenta o problema da investigação, o objetivo geral e as escolhas teóricas e metodológicas. O primeiro capítulo expõe a trajetória pessoal e acadêmica da pesquisadora, apresenta a pesquisa, a problemática e objetivos, bem como a justificativa e a relevância desta pesquisa. O segundo capítulo apresenta a base teórica da investigação, em que são abordados a história, fundamentos e principais autores que se dedicam aos estudos de aula e, especialmente, a abordagem exploratória, assim como uma discussão sobre frações. O terceiro capítulo explicita a abordagem da pesquisa, os procedimentos metodológicos e a constituição de dados. Ainda no capítulo 3 apresentamos o contexto da pesquisa, evidenciando o perfil dos participantes, a dinâmica da intervenção com os alunos e atividades desenvolvidas. O quarto capítulo trata da análise dos dados, no qual descrevemos o processo de constituição das categorias analíticas, explicitamos as categorias e, com base no material empírico, as interpretamos e as discutimos. E por fim, apresentamos as considerações finais, na qual sistematizamos os principais achados da pesquisa.

CAPÍTULO 1

1 ORIGENS E CONTEXTUALIZAÇÃO

Para justificar a importância e relevância de uma pesquisa, antes de bons argumentos e embasamento científico, se faz necessário explicitar o processo de constituição do problema da pesquisa, quais foram as motivações e indagações vivenciadas pela pesquisadora que a levaram para esse tema. Neste sentido, a trajetória pessoal, acadêmica e profissional do pesquisador, contribuem fundamentalmente na constituição do problema de pesquisa.

Visto isso, neste capítulo trago¹ alguns relatos de minha vida, que contribuíram para o surgimento de inúmeras indagações e para hoje, estar em busca de respostas. Apresento também a pesquisa, bem como o problema e objetivos que nortearam a mesma. Em seguida, a justificativa e relevância social e acadêmica desta pesquisa, visando esclarecer a pertinência e importância da mesma.

1.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA DA PESQUISADORA E O PROBLEMA DE PESQUISA

Meus pais, devido à necessidade de ajudar aos pais deles (meus avós) a trabalhar na agricultura, não puderam continuar os estudos, tendo abandonado a escola com pouca idade. Minha mãe adorava estudar, como foi privada disso, sempre incentivou a mim e minhas irmãs a estudarmos. Essa motivação contribuiu para que durante a trajetória escolar eu tivesse bom desempenho escolar. E assim, minha mãe enchia-se de orgulho a cada nota dez que eu tirava na escola.

No decorrer dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, quando os adultos faziam-me a clássica pergunta “O que você quer ser quando crescer?”, eu não hesitava em responder –“Professora!”. Sempre senti grande admiração pelos meus professores. Eu sempre tinha a impressão de que eles faziam mágica, ensinando a ler, escrever, as operações fundamentais de Matemática. As aprendizagens e as

¹ Nesta subseção do trabalho o texto é redigido na primeira pessoa do singular por tratar da trajetória pessoal e acadêmica da pesquisadora.

novas descobertas experimentadas na escola eram fascinantes para mim. E isto me instigava a querer propiciar essas vivências aos outros.

Ao longo da trajetória escolar eu sempre auxiliava os colegas que tinham dificuldades em entender algum conteúdo, explicando e ajudando-os com os exercícios, especialmente em Matemática, que era considerada por meus colegas a disciplina mais difícil, pois tinham dificuldade, não conseguiam interpretar, nem mesmo desenvolver cálculos com as operações fundamentais.

Essas vivências na escola provocavam-me muitas inquietações, angústias e questões. Eu não compreendia os motivos que os levavam a ter tantas dificuldades e, por conseguinte, a ver a Matemática como um obstáculo (ainda estou à procura de respostas). Além disso, sentia-me muito bem por ajudá-los e enchia-me de satisfação ao constatar que minha ajuda contribuía significativamente para o entendimento deles. Com o passar dos anos o desejo de ensinar aumentava, até que um dia entendi que nem todos veem essa profissão com os olhos que eu a via. Muitos julgam como uma profissão não vantajosa financeiramente, entre outros pré-conceitos. Com isso, confesso que até repensei se de fato era isso que eu gostaria de fazer em um futuro que não estava tão distante.

Venho de uma família humilde, em que não haveria condições de custear as mensalidades de uma graduação. Minha irmã mais velha, hoje bacharel em Administração, obteve bolsa integral pelo Programa Universidade para Todos (Prouni) e, para mim, ela sempre foi um grande exemplo de persistência e determinação. Queria seguir o exemplo dela. Almejava cursar uma graduação e poder auxiliar outras pessoas. Então fiz o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), me inscrevi no SISU (Sistema de Seleção Unificada) para cursar licenciatura em Matemática no Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia, em que fui contemplada com bolsa integral. Mas, antes deste resultado ser divulgado, fiz o vestibular nesta mesma instituição e para o mesmo curso, tendo sido aprovada em segundo lugar, conquista essa que trouxe muito orgulho para meus pais, ao mesmo tempo em que representou a primeira etapa para a concretização de meu sonho de me tornar professora.

Sobre o ingresso no IFC destaco que a oportunidade de cursar a graduação em uma instituição pública, gratuita e de qualidade, me possibilitou refletir sobre a importância da formação de professores e da Educação Básica no Brasil. Durante a graduação, foram muitas disciplinas que contribuíram para meu crescimento. As

exatas, que são adoradas por quem escolhe este curso, e também as pedagógicas, que propiciaram discussões, debates e reflexões acerca do ensino e da aprendizagem de Matemática.

Ao término da graduação cursei uma especialização em Metodologia do Ensino de Matemática no Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSELVI). Neste período, comecei também a ministrar aulas. Embora eu esteja há pouco tempo na docência, pude perceber que é essencial que o professor se preocupe de fato com a aprendizagem dos alunos. Esta breve experiência me possibilitou uma melhor compreensão de que cada aluno tem sua especificidade, que cada aluno carrega uma “bagagem”, que é um ser único e tem um diferente modo e tempo para compreender determinado conteúdo. Nem todos têm a mesma facilidade, nem todos gostam de Matemática, ou de estudar, porém algumas dificuldades em relação a tópicos curriculares e erros na resolução de determinados cálculos são vistas com frequência. Após perceber isso, algumas indagações surgiram: Por que há semelhanças em relação aos erros cometidos durante a resolução de exercícios? Quais são os motivos para que as percepções e dificuldades de determinado conteúdo sejam similares? Como ocorre a aprendizagem de Matemática?

Durante a graduação, os professores sempre nos incentivaram a prosseguir a trajetória acadêmica, o que me levou a elaborar um projeto de pesquisa para a linha de Conhecimento e Desenvolvimento nos Processos Pedagógicos do Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS). Ao fim das etapas da seleção para o mestrado fui aprovada em primeiro lugar. A surpresa foi grande e a alegria imensurável. Estava eu novamente tendo a oportunidade de estudar em uma instituição pública, gratuita e de qualidade. Contudo, além de uma oportunidade é um desafio, para continuar aprendendo e buscando meios de retribuir isso a sociedade.

Vale ressaltar que dentre as diversas disciplinas que cursei durante a graduação, pude conhecer algumas metodologias e/ou tendências, e durante o estágio, utilizei com uma ênfase maior a investigação matemática, pois por meio das leituras pude compreender que esta perspectiva contribui para a aprendizagem da Matemática dos alunos.

De acordo com Ponte (2009), a investigação matemática tende a ser muito proveitosa tanto para o aluno quanto para o professor. A investigação realizada pelo aluno pode contribuir de modo significativo para a aprendizagem da Matemática e

para desenvolver o gosto pela disciplina, pois ele passa a compreender o porquê de determinado cálculo, ou ainda porque aquele cálculo precisa ser desenvolvido de tal maneira. E ao professor, a cada nova descoberta de possíveis soluções ampliam-se os caminhos para desenvolver ideias para propor aos alunos, além de a cada nova descoberta melhorar a garantia de que será capaz de dar sequência a uma situação inesperada que possa vir a encontrar no decorrer das aulas, uma vez que a realização de uma aula por meio da investigação matemática possibilita ao professor encontrar situações não vistas anteriormente.

Por meio das leituras sobre investigação matemática, especialmente dos trabalhos de João Pedro da Ponte, tive contato com os estudos de aula (lesson study). E a partir das leituras sobre os estudos de aula, me interessei por esta abordagem, a qual pode contribuir para o desenvolvimento dos professores e para a aprendizagem dos alunos (PONTE, et al., 2014; RICHIT e PONTE; 2017; RICHIT, 2020; RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021). Além disso, as discussões com minha orientadora levaram-me a compreender que os estudos de aula apresentam uma característica intrínseca à aula de investigação, que é a abordagem exploratória.

A abordagem exploratória caracteriza uma das principais particularidades dos estudos de aula, visto que “[...] embasa o planejamento da aula de investigação, a natureza das tarefas propostas para essa aula e, especialmente, a intervenção do professor que leciona a aula e promove a discussão coletiva em sala de aula” (RICHIT, 2020, p. 13).

Além disso, na abordagem exploratória, as investigações realizadas, as conjecturas formuladas e testadas, assim como as justificações e generalizações apresentadas pelos alunos contribuem para a aprendizagem de Matemática. Para que a abordagem exploratória da Matemática cumpra seu objetivo, se faz necessário que o professor saiba selecionar conteúdos e tarefas² que desenvolvam o possível potencial dos alunos, não somente reproduzir procedimentos. A abordagem exploratória favorece a aprendizagem da Matemática na medida em que propicia um ambiente estimulante em sala de aula em um contexto de exploração matemática,

² Tarefas constituem categorias didáticas básicas. Sendo que uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas. “As tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior” (PONTE, 2014, p. 16).

que instiga e desafia os alunos. Este ambiente possibilita ao aluno ver surgir com significado conhecimentos e procedimentos matemáticos e, simultaneamente, desenvolvam capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, fazendo emergir ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva (CANAVARRO, 2011; PONTE, 2014).

Portanto, o problema de pesquisa originou-se no contexto das experiências vivenciadas na graduação, observações e discussões realizadas nas disciplinas e no decorrer dos estágios supervisionados, juntamente com a realização de leituras e a prática docente, bem como pela inquietação em querer promover a aprendizagem da Matemática em que os alunos desenvolvam interesse e espírito investigativo. Da mesma forma, as vivências na pós-graduação, especialmente as reuniões de orientação, contribuíram para o refinamento do problema de pesquisa, que está assim delineado: *Quais são as aprendizagens de alunos do 7º ano sobre o tópico frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula?*

Mediante essa questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo geral: evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas dos alunos do 7º ano a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. Esse objetivo desdobrou-se nos seguintes objetivos específicos: oportunizar aos alunos mobilizar diferentes estratégias nas tarefas; explorar as compreensões dos alunos a partir da comunicação das suas ideias matemáticas; analisar as estratégias das resoluções e representações matemáticas, processos de raciocínio e generalizações elaboradas pelos alunos; discutir os aspectos que evidenciam as aprendizagens matemáticas dos alunos a partir da tarefa exploratória desenvolvida na aula de investigação.

Para isso, desenvolvemos um estudo de aula com quatro professoras de Matemática da rede municipal de educação de Faxinal dos Guedes – SC, as quais dedicaram-se ao planejamento da aula de investigação, tendo como foco o tópico curricular frações, o qual foi definido pelas professoras participantes. A aula de investigação foi organizada em duas partes, sendo que na primeira exploramos a representação de frações e na segunda exploramos distintas representações no contexto de um problema envolvendo colmeias de abelhas europeias. A investigação centrou-se nas interações dos alunos na realização da tarefa sobre as colmeias, as quais foram observadas pela equipe, registradas em notas de campo e audiogravadas. A análise, realizada pelas lentes teóricas da abordagem exploratória,

consistiu em examinar as estratégias das resoluções e representações matemáticas, processos de raciocínio e generalizações elaboradas pelos alunos. Por fim, tecemos algumas reflexões acerca das possibilidades da abordagem exploratória, subjacente ao estudo de aula, para a aprendizagem matemática dos alunos.

1.2 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA SOCIAL

O Ensino Fundamental é composto por 9 anos de estudo, divididos em Anos Iniciais e Anos Finais. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, aprovada em 2017, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, ocorre a ressignificação de aprendizagens vistas anteriormente, como também a valorização da autonomia do aluno na realização das atividades.

De acordo com a BNCC, a Matemática vai além de cálculos abstratos, possibilita ao aluno interpretar, elaborar e resolver problemas:

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BNCC, 2018).

Para a área de Matemática, a Base Nacional Comum Curricular destaca a importância em interpretar, questionar, investigar e solucionar problemas, porém, não de forma mecânica, mas que seja promovida a compreensão dos conteúdos e que se utilize do pensamento matemático para resolver tarefas, com o intuito de que a aprendizagem seja significativa (BRASIL, 2017).

Neste sentido, ao analisarmos as competências específicas para o Ensino Fundamental, estabelecidas pelas BNCC, verificamos que a competência oito evidencia esse aspecto ao propor que o ensino da Matemática precisa oportunizar ao aluno:

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisa para responder e questionar e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar

aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2017, p. 267).

A BNCC corrobora com as possibilidades da abordagem exploratória para o ensino da Matemática, já que a aprendizagem dos alunos decorre da possibilidade de aulas com tarefas matemáticas produtivas e da partilha de ideias com os colegas e o professor. A aprendizagem é concebida como um processo individual ao mesmo tempo em que coletivo, resultado da interação dos alunos com o conhecimento matemático e, também, da interação com os colegas e professor, mediante processos de negociação de significados (BISHOP, GOFFREE, 1986; CANAVARRO, 2011; PONTE, 2005).

Na abordagem exploratória, os alunos desempenham papel ativo na interpretação das atividades que lhe são propostas, sendo que precisam elaborar e construir maneiras para resolução das questões, utilizando seu conhecimento prévio, elaborando estratégias, criando e aprofundando a compreensão de representações, procedimentos, ideias e conceitos matemáticos. Além disso, são estimulados a apresentar e justificar, aos colegas e ao professor, as compreensões e estratégias de resolução (PONTE, *et al.* 2017).

Ponte, Mata-Pereira, Quaresma e Velez (2017) afirmam que o quadro das orientações curriculares internacionais para o ensino da Matemática vem ressaltando a importância da abordagem exploratória no ensino da Matemática devido ao fato de que o aluno assume papel ativo na construção do conhecimento matemático. Em um estudo sobre as compreensões de área e perímetro, mobilizadas por alunos do ensino fundamental II a partir da abordagem exploratória, Richit, Tomkelski e Richit (2021, p.30-31) destacam que

A abordagem exploratória privilegiou o trabalho autônomo dos alunos em torno de uma tarefa especificamente elaborada para aprofundar as compreensões sobre estes conceitos, bem como a discussão coletiva das estratégias, resoluções e pontos de vista dos alunos, contribuindo para ampliar/aprofundar as compreensões sobre estes tópicos e para a superação de algumas dificuldades relacionadas à distinção entre eles e ao seu uso em situações problema.

Em relação às contribuições dos estudos de aula para a aprendizagem dos alunos, Canavarro (2011), Ponte et al. (2015), Richit (2020) e Richit, Tomkelski e Richit (2021) evidenciam que a abordagem exploratória, implícita na aula de

investigação, proporciona aos alunos o desenvolvimento de raciocínio matemático quando instigados a investigar diferentes representações, justificando e generalizando os tópicos curriculares abordados. Esses aspectos são enfatizados no estudo de Richit, Tomkelski e Richit (2021) ao destacar que a abordagem exploratória do tópico ‘área e perímetro’ oportunizou aos alunos explorar e explicitar, mediante procedimentos distintos, a quantidade de material necessária para cobrir o contorno e a superfície de uma arte criada com peças tangram.

A partir destas perspectivas, realizamos buscas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no portal de periódicos da Scielo a fim de mapear as pesquisas produzidas sobre a temática dos estudos de aula e a abordagem exploratória da matemática, corroborando assim a relevância e pertinência em realizar nossa pesquisa. Ressaltamos que nossa busca não estabeleceu nenhum recorte temporal ou geográfico, ou seja, foram consideradas todas as produções encontradas a partir dos descritores usados no processo de busca.

Na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), utilizando os descritores “estudos de aula” e “*lesson study*”, foram encontrados dez trabalhos (Quadro 01) sobre o tema, sendo dois desses com o enfoque no desenvolvimento profissional dos professores de língua estrangeira – inglês. Um trabalho com foco no desenvolvimento profissional na formação inicial e para professores atuantes no ensino de Física. Os demais trabalhos são voltados para a formação de professores e a prática docente reflexiva de professores de matemática.

Quadro 1 - Trabalhos identificados na BDTD a partir dos descritores “estudos de aula” e “*lesson study*”.

| Ano | Tipo de produção | Instituição | Título | Autor(a) |
|------|------------------|-------------|---|----------------------------|
| 2010 | Dissertação | UFSCAR | Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do estado de São Paulo, com a metodologia da pesquisa de aulas (<i>Lesson Study</i>) | Thiago Francisco Felix |
| 2013 | Dissertação | UFSCAR | A pesquisa de aula (<i>lesson study</i>) no aperfeiçoamento da aprendizagem em matemática no 6º ano segundo o currículo do estado de São Paulo | Luciano Alves Carrijo Neto |
| 2017 | Tese | UNESP | Aprendizagens e desenvolvimento profissional de | Renata Camacho |

| | | | | |
|------|-------------|---------|--|--------------------------------------|
| | | | professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study | Bezerra |
| 2017 | Dissertação | UNESP | O estudo de aula na formação de professores de matemática para ensinar com tecnologia: a percepção dos professores sobre a produção de conhecimento dos alunos | Carolina Cordeiro Batista |
| 2018 | Dissertação | UNICAMP | Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de lesson study | Wellington Rabello de Araujo |
| 2018 | Dissertação | UFOPA | Lesson Study: uma experiência com três professores de Inglês da rede pública estadual em Santarém-PA | Herlison Nunes de Oliveira |
| 2018 | Dissertação | UFOPA | Lesson Study na Formação Inicial de Professores: uma experiência com licenciandos de letras-inglês da Universidade Federal do Oeste do Pará | Kátia Lais Schwade de Jesus Oliveira |
| 2019 | Tese | USP | Estudo de aula em comunidades de prática para o ensino de Física: um estudo de caso em Teresina – PI | Micaías Andrade Rodrigues |
| 2020 | Dissertação | UFFS | Aspectos da Colaboração Profissional Docente Mobilizados em um Estudo de Aula (Lesson Study) no Contexto Brasileiro | Ana Paula Tomasi |
| 2021 | Dissertação | UFRGS | Tomada de Consciência e a Aprendizagem Docente: Análises da Reflexão no Contexto da Abordagem de Desenvolvimento Profissional dos Estudos de Aula de Matemática. | Ianne Ely Godoy |

Fonte: Elaborado pela autora a partir da busca realizada (2021)

Ao utilizar os descritores “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática” a busca resultou em três trabalhos (Quadro 02), dos quais dedicam-se a aprendizagem e conhecimentos profissionais de professores de matemática.

Quadro 2 - Trabalhos identificados na BDTD a partir dos descritores “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática”.

| Ano | Tipo de produção | Instituição | Título | Autor |
|------|------------------|-------------|--|---------------------------|
| 2016 | Dissertação | UEL | Desenvolvimento profissional de futuros professores de matemática na exploração de um caso multimídia na perspectiva do ensino exploratório. | Helen Dabiani Frioli Mota |
| 2017 | Tese | UEL | Perspectiva do ensino exploratório: promovendo aprendizagens de professores de matemática em um contexto de comunidade de prática. | Cristina Cirino de Jesus |
| 2019 | Tese | UEL | Conhecimentos profissionais mobilizados/desenvolvidos por participantes do PIBID em práticas de ensino exploratório de matemática. | Alessandra Senes Marins |

Fonte: Elaborado pela autora a partir da busca realizada (2021)

Utilizando os descritores “estudos de aula” e “*lesson study*” ao realizar buscas no portal de periódicos da Scielo, esta pesquisa resultou quinze trabalhos (Quadro 03), sendo que estes têm foco na formação docente, no desenvolvimento profissional dos professores e na reflexão e desenvolvimento da colaboração entre professores de matemática.

Quadro 3 - Busca no portal de periódicos da *Scielo* utilizando os descritores “estudos de aula” e “*lesson study*”.

| Ano | Periódico | Título | Autor(es) |
|------|-----------------------------|---|--|
| 2015 | Revista Electrónica Educare | Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. | Raimundo Olfos, Sergio Morales e Soledad Estrella |
| 2016 | Bolema | O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática | João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Joana Mata-Pereira e Mónica Baptista |
| | Estudios Pedagógicos | Reflexiones de profesores en un escenario de Estudio de Clases para | Maria Soledad Montoya |

| | | | |
|------|---|--|--|
| 2016 | | el desarrollo profesional | González |
| 2017 | Acta Scientiae | Teachers' Perspectives about Lesson Study | Adriana Richit e João Pedro da Ponte |
| 2019 | Bolema | Dinâmicas de Reflexão e Colaboração entre Professores do 1.º Ciclo num Estudo de Aula em Matemática | Marisa Quaresma e João Pedro da Ponte |
| 2019 | Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos | Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio | Adriana Richit, João Pedro da Ponte e Mauri Luís Tomkelski |
| 2019 | Bolema | A Colaboração Profissional em Estudos de Aula na Perspectiva de Professores Participantes | Adriana Richit e João Pedro da Ponte |
| 2020 | Educar em Revista | Conhecimentos profissionais evidenciados em estudos de aula na perspectiva de professores participantes | Adriana Richit e João Pedro da Ponte |
| 2020 | Acta Scientiae | Aprendizagens Profissionais de Professores de Matemática do Ensino Médio no Contexto dos Estudos de Aula | Adriana Richit e Mauri Luís Tomkelski |
| 2020 | Revista Brasileira de Educação | Estudos de aula na perspectiva de professores formadores | Adriana Richit |
| 2020 | Educar em Revista | Desenvolvimento da prática colaborativa com professoras dos anos iniciais em um estudo de aula | Adriana Richit, João Pedro da Ponte, Mauri Luís Tomkelski |
| 2021 | Bolema | El Papel de la Fase de Observación de la Implementación en la Metodología Estudio De Clases | Adriana Breda, Viviane Hummes, Rodrigo Sychocki da Silva, Alicia Sánchez |
| 2021 | Acta Scientiae | Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula | Adriana Richit, Mauri Luís Tomkelski e Andriceli Richit |
| 2021 | Bolema | Aprendizagens Profissionais de Professores Evidenciadas em Pesquisas sobre Estudos de Aula | Adriana Richit, João Pedro da Ponte, Marisa |

| | | | |
|------|---|---|---|
| | | | Quaresma |
| 2021 | Revista Brasileira de Educação Especial | Indicadores Preliminares do Uso da Lesson Study Como Prática de Ensino Capaz de Viabilizar uma Perspectiva Inclusiva na Educação Superior | Jáima Pinheiro de Oliveira, Seán Brackenn, Natália Nakano |

Fonte: Elaborado pela autora a partir da busca realizada (2021)

Ao utilizar o descritor “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática”, foram encontrados cinco trabalhos, sendo três voltados para formação inicial de professores, e um com foco nas representações e processo de raciocínio sobre determinado conteúdo com uma turma de alunos. Com os descritores “estudos de aula e abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório de matemática e *lesson study*” recuperamos um trabalho, publicado em data posterior ao início deste trabalho, ressaltando a escassez de trabalhos sobre o tema.

Quadro 4 - Busca no portal de periódicos da *Scielo* utilizando os descritores “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática”.

| Ano | Periódico | Título | Autor(es) |
|------|----------------|---|--|
| 2014 | Bolema | Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória | João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma |
| 2018 | Bolema | Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de futuros professores de Matemática | Renata V. R. Rodrigues, Márcia C. C. T. Cyrino e Hélia M. Oliveira |
| 2021 | Acta Scientiae | Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula | Adriana Richit, Mauri Luís Tomkelski e Andriceli Richit |
| 2021 | Bolema | Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula | Micaela Martins, Joana Mata-Pereira, João Pedro da Ponte |
| 2021 | Bolema | Práticas de Ensino Exploratório de Matemática e a Mobilização/Desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino por Participantes do PIBID | Alessandra Senes Marins, Bruno Rodrigo Teixeira, Angela Marta P. das Dores Savioli |

Fonte: Elaborado pela autora a partir da busca realizada (2021)

Em nível mundial há um movimento forte de pesquisas que se dedicam a verificar as contribuições dos estudos de aula, no âmbito do qual predominam trabalhos com foco na formação de professores e desenvolvimento profissional docente. No Brasil, conforme sugerem os resultados das buscas realizadas na BDTD e Scielo, também predominam trabalhos com foco no desenvolvimento profissional de professores. No que diz respeito à abordagem exploratória da Matemática, destacamos os trabalhos do grupo³ de pesquisadores de Portugal sobre o tema, já no Brasil as publicações ainda são escassas.

No que se refere aos estudos de aula e a abordagem exploratória da Matemática, as buscas evidenciam a pertinência de estudos sobre as contribuições que estas teorias aliadas podem proporcionar para a aprendizagem dos alunos, bem como estudos que examinam a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, nosso estudo pode contribuir para compreensão dos processos pedagógicos, como também para o melhor entendimento dos saberes e os fazeres presentes nestes processos, com foco na Educação Básica (UFFS, 2019).

³ Grupo coordenado pelo professor João Pedro da Ponte.

CAPÍTULO 2

2. ESTUDOS DE AULA (LESSON STUDY)

O estudo de aula oportuniza aos professores refletirem sobre os processos de raciocínio e as dificuldades apresentadas pelos alunos, a dinâmica da sala de aula e sobre modos de promover a discussão entre os alunos (RICHIT; PONTE, 2019). Neste capítulo apresentamos a origem dos estudos de aula (*lesson study*), bem como a dinâmica de desenvolvimento e suas etapas. A abordagem exploratória da Matemática é uma característica intrínseca a aula de investigação (terceira etapa do estudo de aula). Neste sentido, em seguida, abordamos a aula de investigação e as tarefas na perspectiva da abordagem exploratória; e a fração e seus subconceitos.

2.1 ORIGEM DOS ESTUDOS DE AULA

Os estudos de aula, originários do Japão (em *romanji*⁴, *kyungyo kenkyu*), caracterizam uma abordagem de desenvolvimento profissional com ênfase na prática letiva, sendo esta de natureza colaborativa e reflexiva (LEWIS, 2002; MURATA, 2011; PONTE *et al.*, 2014; RICHIT e PONTE; 2017).

Esta abordagem difundiu-se nos Estados Unidos (STIGLER; HIEBERT, 1999), sendo traduzida como *lesson study*. Após popularizar-se nos EUA, os estudos de aula se disseminaram para outros países do ocidente (YOSHIDA, 1999). Em países de língua espanhola, a denominação mais comum é *estudio de las clases* (MENA-LORCA, 2009). Ao ser introduzido em países de língua portuguesa, algumas variações na sua denominação se destacaram, sendo que em Portugal denominam-se estudos de aula (PONTE, 2005; PONTE *et al.*, 2012), embora inicialmente a denominação adotada foi estudo de lição. No Brasil esta abordagem tem sido denominada estudo de aula (CARDOSO, 2006; RICHIT e PONTE, 2017; RICHIT e

⁴ Empregado na transição fonética da língua japonesa para o alfabeto latino ou romano.

TOMKELSKI, 2020), pesquisa de aula (BALDIN, 2009) e metodologia da resolução de problemas (FELIX, 2010; NETO, 2013).

Os estudos de aula tornaram-se conhecidos mundialmente a partir do início do século XXI, de modo que a sua relevância na educação matemática tem se destacado no cenário mundial, despertando o interesse de pesquisadores em vários lugares do mundo, cujos trabalhos têm embasado ações de formação de professores em contextos distintos (RICHIT; PONTE, 2019; RICHIT, 2020).

Os estudos de aula começaram a se desenvolver como prática pedagógica na Era Meiji⁵ do Japão, caracterizando um processo em que os professores desenvolvem e melhoram progressivamente a forma como ensinam, trabalhando em conjunto com outros professores, criticando e refletindo sobre sua prática pedagógica (ISODA; ARCAVI; MENA LORCA, 2007).

A partir da era Meiji, o objetivo era que o ensino deixasse de ser individualizado para se tornar mútuo⁶, visto que neste período houve uma mudança global no ensino escolar. Neste sentido, a “escola normal”, que eram instituições que promoviam a formação de professores no território japonês (e ao redor do mundo também), realizou pela primeira vez, uma experiência do ensino mútuo, objetivando que aulas fossem desenvolvidas de maneira coletiva. Esse modelo foi primeiramente implantado em Tóquio e em seguida outras escolas do país também aderiram a este novo formato. Foram convidados professores estrangeiros para ministrar as aulas, a fim de disseminar a sabedoria ocidental no ensino mútuo. Estes professores introduziram na escola normal o conceito de ensino para toda a classe, o que não era comum até então, visto que os professores e alunos japoneses eram familiarizados com o modelo de ensino individualizado. Com isso, os professores em formação aprenderam novos métodos de ensino. Porém, por volta de 1880, após uma crise financeira, o governo fechou as “escolas normais”, exceto a escola instalada em Tóquio (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007).

Em seguida, alguns dos professores da “escola normal” foram convidados a ministrar aulas em uma escola primária anexa a “escola normal”.

⁵ De forma resumida, a Era Meiji foi responsável pelo o fim do feudalismo japonês, destacando-se pela acelerada modernização do Japão e sendo reconhecida como potência mundial.

⁶ O ensino Mútuo teve origem nas práticas pedagógicas das escolas monásticas na Alta Idade Média e certas escolas de caridade no período anterior a Revolução Francesa.

Complementarmente a preocupação dos japoneses com o desempenho dos alunos em Matemática, os estudos de aula foram instituídos nas escolas. Assim, mediante instruções do Ministério da Educação, os estudos de aula foram implementados em todo o Japão (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007). Foram realizadas aulas abertas como forma de demonstrar a proposta deste novo método de ensino, o que originou o primeiro grupo de estudos de aula iniciados pelo governo japonês (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007).

De acordo com Utimura, Ponte e Curi (2017), o governo japonês organizou a formação dos professores sobre estudos de aula de três formas: i) formação obrigatória para os professores com 10 anos de carreira mediante recebimento de apoio financeiro; ii) qualificação voluntária, sem apoio financeiro, para grupos de professores interessados em melhorar a prática pedagógica, de modo que a formação era promovida por sindicatos de professores e sociedades acadêmicas; iii) formação em nível escolar, de modo que a qualificação era realizada nas escolas, frequentemente vinculada a realidade dos planejamentos pedagógicos anuais. Na qualificação nas escolas, os grupos são divididos por tema e nível escolar, priorizando a realidade de cada escola, a atuação do professor e o trabalho coletivo.

No período da Segunda Guerra Mundial foram criadas associações de professores, as quais criticaram os estudos de aula. No entanto, estes professores foram convidados a assistir aulas e há relatos de 1200 professores assistindo uma aula em um auditório. O método de ensino trazia a resolução de problemas como foco principal e este foi bem visto por todos, pois reconhecia as limitações existentes, proporcionava novo conhecimento e possibilitava os alunos aprenderem por si mesmos (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007).

De acordo com esses autores, para compreender o surgimento, a finalidade, a relevância e a estrutura desta ação, se torna necessário entender primeiramente as particularidades do sistema educacional Japonês. As políticas educacionais japonesas visam desenvolver pessoas capazes de aprender, mas também de tomar decisões, resolver problemas e pensar por si mesmas de forma crítica e reflexiva. Assim, os profissionais envolvidos direta ou indiretamente com a educação se esforçam para alcançar estes objetivos, de modo que os estudos de aula se constituem em contexto para a concretização deste esforço coletivo (MENA-LORCA, 2007).

O sistema educacional japonês contempla três níveis de ensino, porém somente os dois primeiros são obrigatórios. Os professores recebem um guia de orientações de ensino, este define as diretrizes gerais e orienta os objetivos e conteúdos a serem atingidos em cada ano escolar. No entanto, cada escola tem liberdade para desenvolver seu próprio currículo, e neste planeja estudos de aula para o decorrer o ano letivo (MENA-LORCA, 2007).

Nesta direção, um dos primeiros relatos de estudos de aula que se tem conhecimento foi de um estudo comparativo de resolução de problemas entre o Japão e os Estados Unidos realizado por Tatsuro Miwa e Jerry Becker, na década de 80 (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007). No ano de 1999, Makoto Yoshida desenvolveu uma pesquisa de doutorado apresentando o estudo de aula japonês, trabalho considerado um marco para a disseminação desta abordagem em países ocidentais (RICHIT, 2020; RICHIT, PONTE, QUARESMA, 2021). Em seguida, ainda na década de 90, os estudos de aula tornaram-se amplamente conhecidos por meio das investigações realizadas por James Stigler, posteriormente publicadas por Stigler e Hiebert no ano de 1999, no livro “*The Teaching Gap*”, o qual descreve as aulas de matemática do Japão (RICHIT, 2020), que se caracterizavam como solução estruturada de problemas. Esta publicação despertou mundialmente o interesse de pesquisadores (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007).

Em consequência, os estudos de aula se tornaram conhecidos no Ocidente, sendo popularizados nas nações industrializadas, particularmente nos Estados Unidos, conhecido em inglês como *lesson study*. Em 2004, a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico e a Associação Internacional para Avaliação de Desempenho Educacional anunciaram os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), em que os estudantes japoneses apresentavam ótimos resultados. Com isso ocorreu a popularização dos estudos de aula, advinda da tentativa dos norte-americanos melhorarem sua classificação nesta avaliação (ISODA, ARCAVI, MENA-LORCA, 2007; RICHIT, TOMKELSKI, 2020).

No fim do Regime Militar, em 1990, o governo do Chile começou a se preocupar em melhorar a educação do país, destinando vários os investimentos nesta área. No entanto em 2004, percebeu-se que o sistema de formação de professores, a prática docente e as aprendizagens dos alunos careciam de melhorias (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007). Em 2005, Chile e Japão, por meio de seus ministérios de educação, estabeleceram um Programa de Colaboração

“Melhora do ensino de Matemática no Chile, com apoio do Japão”. Essa capacitação ocorreu na Universidade de Tsukuba, no Japão, sob a direção do Professor Dr. Massami Isoda. Neste sentido, pesquisadores de países de língua espanhola despertaram interesse por esse processo formativo, que foi denominado *estudios de clases* (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2007; ESTRELLA; OLFOS, 2015).

Seguidamente, esta abordagem disseminou-se pelos países de língua portuguesa, primeiramente Portugal, onde é denominado estudos de aula e, posteriormente, no Brasil, onde também é denominado desta forma, embora algumas vezes seja chamado por alguns pesquisadores de *estudo de lição ou pesquisa de aula*.

Em relação às pesquisas produzidas em língua portuguesa, um dos primeiros relatos é de Cardoso (2006), destacando os estudos de aula como uma metodologia japonesa inovadora, a qual poderia contribuir com o ensino para as escolas portuguesas. Baladin⁷ (2009), que utiliza ambas as nomenclaturas (pesquisa de aula e estudos de aula), compreende os estudos de aula como uma metodologia japonesa de ensino, destacando a grande projeção mundial, a qual poderia contribuir para melhorar o ensino em escolas brasileiras. Mandarino, Belfort e Oliveira (2009), por sua vez, tratam os estudos de aula como uma perspectiva a qual possibilita refletir sobre a prática em sala de aula. Ponte *et al.* (2012) ao iniciar as investigações sobre esta abordagem a definiu como estudo de lição, mas a seguir adotou a denominação estudos de aula. João Pedro da Ponte, Mónica Baptista, Isabel Velez, Marisa Quaresma, Joana Mata-Pereira, Estela Costa e Margarida Belchior compõem um grupo de pesquisadores de grande projeção em países da América e da Europa ao inaugurar uma série de artigos centrados nos estudos de aula como um processo de desenvolvimento profissional de professores. Nunes, Silvestre e Jacinto (2012), apoiadas em Ponte *et al.* (2012), examinam os estudos de aula destacando sua possibilidade como uma forma de trabalho colaborativo. Utimura e Curi (2014; 2015) abordam os estudos de aula como uma metodologia de formação de professores (MERICHELLI; CURI, 2016). Por seu lado, Richit (2020), ao assumir o estudo de aula como uma abordagem de desenvolvimento profissional de professores de

⁷ Doutora em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, pós-doutorado na área das ciências exatas e da terra na State University of New York e na University of California at Santa Barbara - USA e visitas científicas no Japão. Especialista e uma das pioneiras no Brasil em Metodologia de Lesson Study e de Resolução de Problemas.

natureza colaborativa e reflexiva (LEWIS, 2002; PONTE et al., 2014), evidencia os estudos de aula como uma dinâmica formativa que incorpora marcas culturais próprias em face das especificidades dos contextos em que é desenvolvido.

Nesta perspectiva, Richit (2021) destaca que um dos aspectos que caracteriza os estudos de aula desenvolvidos no Brasil é o fato de assumir uma perspectiva de democratização da aprendizagem da Matemática e da formação de professores. Enquanto em que países como Japão, Inglaterra e Estados Unidos os estudos de aula são desenvolvidos com foco na melhoria da aprendizagem dos alunos, das escolas e dos sistemas de ensino, no Brasil ainda buscamos tornar a Matemática e a sua aprendizagem acessível a alunos de distintas realidades.

2.2 ESTRUTURA E DINÂMICA DO ESTUDO DE AULA

Os estudos de aula possibilitam aos professores o seu desenvolvimento profissional e de suas práticas de sala de aula. Além disso, nos estudos de aula, no caso específico da matemática, a abordagem da aula de investigação é centrada na resolução de problemas, sendo promovidas a interpretação, formulação de conjecturas, discussão e generalizações a fim de possibilitar a aprendizagem matemática. E ambas, as contribuições dos estudos de aula são importantes, não podendo uma ser ofuscada, uma somente é possível na efetividade da outra.

“[...] teaching mathematics through problem solving has been largely overshadowed by interest in incorporating lesson study as a model for professional development. I assert that lesson study and teaching mathematics through problem solving are two wheels of a cart: one cannot succeed without the success of the other” (FUJII, 2018, p. 2).⁸

Isoda, Arcavi e Mena-Lorca (2012) afirmam que os estudos de aula exercem um impacto significativo na qualidade da educação. Acrescentam que quando a qualidade de educação é pensada em uma esfera global, os estudos de aula

⁸ “[...] ensino de matemática por meio da resolução de problemas tem sido amplamente ofuscado pelo interesse em incorporar o estudo de aula como um modelo de desenvolvimento profissional. Afirmo que o estudo de aula e o ensino da matemática por meio da solução de problemas são duas rodas de um carrinho: uma não pode ter sucesso sem o sucesso da outra” (Tradução da autora).

efetivam a relação dialética entre as teorias e práticas adotadas na educação, sendo versátil para ser aplicado além da cultura e contexto japonês.

Esses autores destacam que ao realizar um estudo de aula pode-se utilizar diversas escalas e diferentes formatos. Porém, a modalidade mais comum é a de formação docente realizada nas escolas, em que são formadas equipes de professores e estes são divididos de acordo com o nível escolar das turmas e um tema pedagógico. Este processo de trabalho em conjunto fortalece o bom relacionamento entre os professores (ISODA; ARCAVI; MENALORCA, 2012).

No Japão, no início do ano letivo, cada escola elabora um planejamento anual de ensino, planos de ação, planejamento de qualificação de professores, entre outros planejamentos. Os professores, de acordo com sua especialidade e ano escolar em que lecionam, se reúnem semanalmente para discutir a implementação curricular e revisar o planejamento elaborado no início do processo. Mediante a realização de encontros que assumem a forma de sessões de pesquisa, são realizadas reuniões para melhorar as aulas de acordo com os objetivos que se almeja alcançar, bem como examinar a aprendizagem dos alunos. Por fim, os resultados dos estudos de aula são compartilhados com as demais escolas por meio de revistas para os professores (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012).

De acordo com Isoda, Arcavi e Mena-Lorca (2012), os estudos de aula podem ser divididos em algumas etapas:

- **Identificação do problema:** a primeira etapa se refere à preparação. Neste processo ocorre a identificação do problema e a busca e seleção de materiais relevantes para atingir os objetivos da aula e necessidades efetivas dos alunos;
- **Planejamento da aula:** há o refinamento da preparação e constitui-se um planejamento de aula, sendo todo este processo realizado de forma colaborativa entre os professores;
- **Implementação:** então baseado no planejamento de aula, a aula é ministrada para uma turma, enquanto uma quantidade de professores a observa, sendo que esta quantidade pode ser variável, podem ser incluídos professores universitários e supervisores.

Durante a realização desta aula, primeiramente há a apresentação do problema. No decorrer da resolução de problemas, o professor se move pela sala de

aula observando os alunos desenvolverem as atividades enquanto avalia o progresso de resolução de problemas dos alunos, em alguns casos sugere uma direção para resolução do problema. Além disso, o professor observa os alunos que resolveram o problema de forma inesperada, este momento é importante para posterior discussão generalizada (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012).

Na discussão coletiva, o professor instiga aos alunos que apresentem suas estratégias de resolução de problemas, podem aparecer métodos corretos e incorretos bem como diversas maneiras de resolução. Esta fase se torna importante para alertar os alunos que utilizaram estratégias ingênuas, comparando as ideias de forma oral. Todavia, o papel do professor neste momento é instigar a discussão por parte dos alunos para que obtenham uma ideia em comum. Para finalizar este momento, o professor revisa de forma breve o que foi discutido no decurso da discussão generalizada e enfatiza o conhecimento matemático aprendido durante a aula (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012).

- **Avaliação das aulas e revisão dos resultados:** uma sessão de avaliação e revisão é realizada com os observadores, possibilitando por meio destas discussões o melhoramento das atividades ensinadas bem como da aula ministrada (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012).
- **Reconsideração da aula:** este momento é de suma importância pois possibilita o descobrimento de novos problemas ou temas que não haviam sido considerados inicialmente durante o planejamento da aula (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012).
- **Implementação da aula baseada nas reconsiderações:** a aula é novamente ministrada, porém agora com as adaptações e melhoras sugeridas.
- **Avaliação e revisão:** uma nova avaliação e revisão é realizada em conjunto pelo grupo de professores.
- **Discussão dos resultados:** neste momento a socialização e reflexão sobre ambas as aulas.

Lewis (2002) e Lewis e Hurd (2011) definem as etapas dos estudos de aula como definição de metas; planejamento de aula; aula de pesquisa/investigação; discussão pós-aula e reflexão.

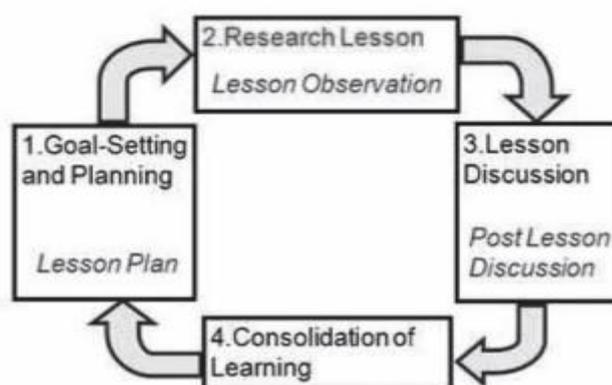


Figura 1. Ciclo dos estudos de aula.
Fonte: Lewis (2002).

Na primeira etapa há a **definição de metas**, os professores consideram metas de longo prazo, identificando possíveis lacunas e decidindo o tema a fim de que ocorra o aprendizado e desenvolvimento do aluno (LEWIS, 2002; LEWIS; HURD, 2011).

No **planejamento de aula**, os professores planejam colaborativamente uma aula a fim de atingir as metas definidas. Há a preparação de uma “proposta de aula”, na qual são especificados detalhadamente o tema de pesquisa, objetivos de conteúdo, relações entre o atual conteúdo e os anteriormente estudados pela turma, bem como os conteúdos que serão desenvolvidos posteriormente. Além disso, elabora-se uma justificativa para a abordagem escolhida, antecipa-se possíveis dúvidas e questionamentos dos alunos, e define-se como será realizada a coleta de dados (LEWIS, 2002; LEWIS; HURD, 2011).

Durante a aula, denominada **aula de pesquisa** ou **de investigação**, um dos professores do grupo ministra essa aula, enquanto os demais participantes da equipe a observam, coletando dados e analisando os pontos a serem discutidos na sessão de reflexão (LEWIS, 2002; LEWIS; HURD, 2011).

Por fim, realiza-se a **discussão pós-aula**, em que os integrantes do grupo, mediante a observação que realizaram, compartilham os registros das ações dos alunos na aula, destacando os pontos em que a aula teve êxito e questões relativas à aprendizagem dos alunos, conteúdo disciplinar, bem como aspectos mais amplos de ensino e aprendizagem (LEWIS, 2002; LEWIS; HURD, 2011).

Neste momento de **reflexão**, todos os participantes do processo consolidam e também documentam os pormenores observados durante o estudo de aula e

possíveis melhoras para as aulas a serem implementadas posteriormente (LEWIS, 2002; LEWIS; HURD, 2011).

No Japão, os estudos de aula são desenvolvidos com uma mesma estrutura, porém é possível observar modificações de acordo com os contextos e objetivos que são apresentados. Três etapas são definidas, sendo elas: o planejamento da aula de investigação, aplicação desta aula de investigação e reflexão sobre a mesma com a utilização das anotações realizadas pelos observadores (LEWIS, 2002).

Porém, segundo Richit (2020, p. 3) “[...] resultados de pesquisas mostram que em diversas experiências esta estrutura é frequentemente iniciada com a definição de objetivos para a aula de investigação considerando-se as dificuldades que os alunos apresentam no tópico curricular a ser abordado”. Desse modo, a literatura sobre estudos de aula evidencia que há abordagens estruturadas em quatro momentos centrais, na medida em que a definição dos objetivos para a aula é assumida como primeira etapa do processo (RICHIT; TOMKESKI, 2020). Além disso, também podem ser encontradas pesquisas com uma quinta etapa, em que após discussão e reflexão dos professores a aula é reformulada e ensinada a outra turma, podendo se repetir por várias vezes (ISODA; ARCAVI; MENA-LORCA, 2012). Essa última etapa tem sido contemplada nos ciclos de estudo de aula dinamizados em Portugal sob a denominação de seguimento (PONTE *et al.*, 2014).

Embora existam variações em relação à estrutura do estudo de aula nas experiências praticadas ao redor do mundo, três aspectos são bem definidos e realizados de maneira colaborativa (PONTE; QUARESMA, 2018; RICHIT, 2020): o primeiro caracteriza a preparação da aula por um grupo de professores; a segunda refere-se a realização da aula de investigação, que é lecionada por um professor enquanto os demais assistem, sendo também possível que professores que não auxiliaram nesta preparação a assistam; no terceiro momento os professores se reúnem para analisarem e refletirem sobre os aspectos que devem ser repensados, a fim de aprimorar esta aula (MENA-LORCA, 2007).

2.3 A AULA DE INVESTIGAÇÃO E A ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

Uma abordagem que está sendo mencionada em relatos sobre estudos de aula é a exploratória, em uma perspectiva próxima ao *structured problem solving*

(RICHIT, 2020). A abordagem exploratória, *inquiry-based approach*, deixa “uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção de conhecimento para os alunos realizarem” (PONTE, 2005, p. 13). Neste sentido, Canavarro (2011, p. 11) afirma que

O ensino exploratório⁹ da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Nessa abordagem, a essência está nas tarefas propostas, na forma como são trabalhadas e na comunicação na sala de aula, porque as atividades realizadas pelos alunos e as reflexões sobre estas atividades resultam no que estes alunos aprendem na aula de Matemática (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986). Sendo assim, se torna fundamental escolher tarefas adequadas a fim de possibilitar aprendizagem matemática.

Ponte (2005) destaca duas dimensões para as tarefas propostas aos alunos, a estrutura da tarefa que pode ser aberta ou fechada, e o grau de desafio que pode ser reduzido ou elevado. Sendo que os exercícios ou problemas de desafio objetivem a consolidação de conhecimentos e/ou a aplicação criativa dos conhecimentos prévios do aluno. Predominando nesta abordagem as tarefas de exploração, que são consideradas abertas e acessíveis, as quais mesmo que o aluno não tenha uma solução imediata consegue resolvê-las a partir de seu conhecimento prévio. Cabe ao professor selecionar as tarefas visando atingir os objetivos definidos para cada aula e adequando a cada turma (PONTE, 2005).

Nesta perspectiva, durante a seleção e planejamento o professor precisa preparar e antecipar os momentos da aula e, com isso, conduzirá de melhor forma o trabalho autônomo dos alunos, bem como a discussão coletiva. A partir das intervenções, o professor busca articular as ideias que surgem na discussão coletiva, promovendo um ambiente de aprendizagem baseado na comunicação de

⁹ Canavarro (2011) adota o termo ensino exploratório porque focaliza nas práticas do professor, aquele que ensina.

ideias. Deste modo, ao planejar uma aula exploratória o professor leva em consideração as possíveis dificuldades dos alunos, com isso sendo antecipado há mais confiança para conduzir as discussões coletivas (CANAVARRO, 2011; PONTE, 2005; PONTE; BRANCO; QUARESMA, 2014).

Além disso, Gomes, Quaresma e Ponte (2021, p. 2) destacam que “[...] antecipar as possíveis estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a selecionar as questões a colocar na tarefa e a pensar na forma de as redigir”. Como também possibilita ao professor “[...] pensar em formas de apoiar os alunos durante a aula, sem diminuir o grau de desafio da tarefa”.

Em uma aula com a utilização da abordagem exploratória há normalmente três fases. No modelo de Stein *et al.* (2008), as três fases são: “lançamento” da tarefa, na qual o professor apresenta a tarefa matemática a turma, sendo geralmente um problema ou uma investigação a ser realizada, evidenciando os objetivos da proposta e desafiando os alunos a realizar a atividade. Na segunda fase, chamada de “exploração” pelos alunos, o professor observa e apoia os alunos que devem realizar a tarefa a partir de um trabalho autônomo. Esta etapa pode ser realizada de forma individual ou em pequenos grupos, sendo que o professor deve estimular que todos desenvolvam papel ativo na realização da tarefa proposta. É essencial que nesta fase não haja uniformidade em relação às estratégias adotadas pelos grupos para a resolução da tarefa, visto que isso inviabilizaria a discussão matemática. A terceira fase, denominada “discussão e sintetização”, exige que o professor organize a discussão coletiva. Ao gerir as interações, o professor visa fomentar explicações e argumentações que permitam que as resoluções apresentadas tenham qualidade matemática, assim como promover a comparação das resoluções apresentadas pelos alunos (OLIVEIRA, MENEZES, CANAVARRO, 2013).

Neste sentido, no ensino a abordagem exploratória que caracteriza o estudo de aula tem como essência a investigação, com o intuito de desenvolver a compreensão dos alunos, os fazendo pensar matematicamente e desenvolver o raciocínio a partir de generalizações e justificações (VALE *et al.*, 2018; RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021).

Nesta direção, Richit, Tomkelski e Richit (2021) destacam que a abordagem exploratória, promovida em estudos de aula, possibilita explicitar o pensamento e as estratégias dos alunos para expressar suas compreensões sobre tópicos

curriculares mediante a resolução de tarefas cuidadosamente elaboradas para alcançar objetivos específicos, levando-se em consideração o contexto e os alunos.

Em síntese, o objetivo central da abordagem exploratória é desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. De acordo com Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), raciocinar consiste em realizar inferências fundamentadas, usando as informações fornecidas nas tarefas para formular novas informações que possam ser aceitas como válida em um dado contexto ou domínio de conhecimento (QUARESMA, PONTE, 2015).

2.3.1 Tarefas

As tarefas por meio de suas características, despertam diferentes oportunidades para a aprendizagem dos alunos (BOSTON; SMITH, 2009). Neste sentido, torna-se fundamental a profissão docente a escolha de tarefas adequadas, de acordo com o contexto da aula, proporcionando aos alunos um estudo ativo e reflexivo com efetiva apropriação de conhecimento (PONTE, 2016; PONTE; QUARESMA, 2014).

Acerca dessas tarefas, Ponte, *et al.* (2015) destacam que existem diferenças entre o ensino de Matemática que objetiva transmissão de conhecimento e o ensino que valoriza o papel do aluno.

Num ensino da Matemática que se baseia principalmente na transmissão de conhecimentos pelo professor, o conceito de tarefa é de pouca utilidade. Pelo contrário, num ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos. (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2015, p. 111).

Neste sentido, as tarefas propostas pelo professor em sala de aula são essenciais em um ensino da matemática que objetiva o aluno com papel ativo. Quaresma e Ponte (2015) ressaltam que a proposição de uma tarefa em que o aluno identifica e aplica um método de solução que já conhece, reduzindo-se a execução de um procedimento, pouco favorece o desenvolvimento do raciocínio. No entanto, uma tarefa que seja desafiadora (Ponte, 2005) pode levar o aluno a formular diversas estratégias que podem ser comparadas e avaliadas, proporcionando importantes discussões matemáticas em sala de aula. Deste modo, possibilita que

os alunos desenvolvam o seu raciocínio e a compreensão da matemática, formulando estratégia para as mais diversas situações.

Na abordagem exploratória são realizadas tarefas de exploração e investigação consideradas de natureza aberta. Essas tarefas passam pelas fases de apresentação e interpretação; desenvolvimento; e discussão coletiva (PONTE, 2005). Sendo diferenciadas pelo grau de desafio que proporcionam, “as explorações visam sobretudo a construção de novos conceitos e as investigações visam tanto o desenvolvimento de novos conceitos como o uso criativo de conceitos já conhecidos” (Ponte, 2016, p. 12). Sumarizando, as tarefas de exploração não exigem um elevado nível cognitivo do aluno, enquanto as tarefas de investigação necessitam um raciocínio mais estruturado.

O raciocínio matemático é um processo que vai além de reproduzir conceitos memorizados e realizar processos cotidianos. Consiste em um processo por meio do qual o aluno, a partir de informações que lhe são disponibilizadas, formula inferências, chegando a novas conclusões. Essa compreensão alinha-se ao objetivo fundamental do ensino de Matemática, que consiste em desenvolver no aluno a capacidade de raciocinar matematicamente (MATA-PEREIRA; PONTE; 2013).

O raciocínio matemático possibilita “[...] que os alunos ultrapassem o uso rotineiro de procedimentos utilizando conceitos, propriedades e procedimentos com compreensão” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 469). Sendo que os sujeitos podem raciocinar com múltiplas representações (COX, 1999). O raciocínio matemático apresenta os processos de conjecturar, generalizar, investigar e avaliar os argumentos (LANNIN, ELLIS, ELLIOT, 2011).

Nesse sentido, ao aprender a se comunicar matematicamente, o raciocínio matemático construído pelo aluno será mais consistente, na medida em que a qualidade da comunicação desenvolvida em sala de aula reflete na qualidade da aprendizagem em Matemática (ALRØ; SKOVSMOSE; 2006).

O raciocínio matemático envolve, em sua essência, fazer generalizações e justificações matemáticas (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT; 2011). Sendo assim, a consistência das justificações e generalizações tem papel central no processo de raciocínio matemático, visto que a justificação um processo essencial para a validação do conhecimento matemático (MATA-PEREIRA, 2018).

Na abordagem exploratória, a partir das tarefas os alunos são levados a construir as suas estratégias de resolução, recorrendo a diversas representações

matemáticas, formulando justificações e por vezes generalizações. Em que o professor propõe aos alunos um trabalho de descoberta, promovendo momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva (RICHIT, 2020).

2.4 FRAÇÕES

Para que ocorra a aprendizagem de frações torna-se necessário que o professor compreenda a complexidade que envolve o tópico curricular e os conceitos que este abrange. O tópico frações pode ser considerado um “megaconceito”, constituído por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito (LOPES, 2008).

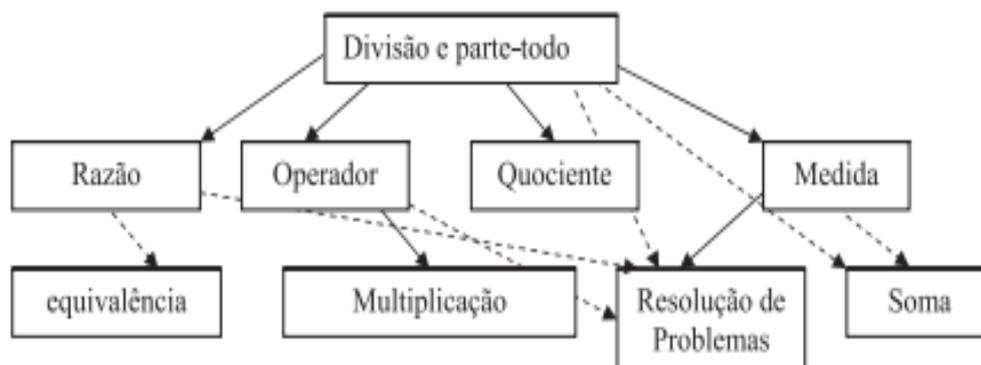


Figura 2. Subconceitos de frações.

Fonte: Behr, *et al.* (1983)

Ponte (2021) afirma que existem dificuldades para a compreensão de frações devido à variedade de conceitos, visto que envolvem os significados: parte-todo, quociente, operador, medida e razão. De acordo com o esquema elaborado por Behr, *et al.* (1983), compreende-se que não é possível desmembrar cada um dos subconceitos de frações porque suas interpretações são complementares e fundamentais na medida em que se correlacionam.

A ideia de relação *parte-todo*, que em sua maioria, é o primeiro significado que é apresentado aos alunos na escola (PAULA, 2013), pode ser visto a partir de um todo dividido em n partes, em que cada parte pode ser representada por $1/n$ (MERLINI, 2005). Para compreender essa relação, o aluno precisa identificar uma unidade (todo), entender que ao fazer divisões em partes existe a conservação do todo (MERLINI, 2005). No entanto, quando o aluno entende a fração como uma

contagem de partes, acaba compreendendo fração como sendo dois números naturais, um em cima do outro, não a entendendo como um número representativo de uma parte não inteira (SILVA, 2005).

O significado de *medida* pode ser evidenciado quando a quantidade é medida pela comparação de duas variáveis, representando as subunidades de uma unidade de medição, de acordo com as quantidades (extensivas ou intensivas) que envolve (MERLINI, 2005; PAULA, 2013). Caracteriza a comparação entre duas grandezas, podendo estas serem intensivas ou extensivas (DRECHMER; ANDRADE, 2011), de modo que determinada parte é tomada como referência para se medir outra (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2008). Assim, uma fração pode ser compreendida como o resultado de se medir alguma coisa, usando como referência uma parte da unidade (LINS; SILVA, 2008).

A fração como *quociente* é evidenciada quando se realiza uma divisão para resolver determinado problema. Sendo que se o numerador for divisível pelo denominador, representa uma quantidade discreta, caso contrário será uma quantidade contínua (MERLINI, 2005). O significado quociente das frações está associado a contextos de partilha equitativa. Neste significado, o numerador (dividendo) se refere ao número de partes iguais que cada participante recebe e que o denominador (divisor) nomeia essas partes (GRAÇA, *et al.* 2021).

Ao transformar uma fração observamos o significado de *operador*, sendo operador multiplicativo em quantidades contínuas e como multiplicador divisor em quantidades discretas (MERLINI, 2005). Caracteriza, ainda, a modificação/transformação, ou seja, como algo que atua sobre uma situação modificando-a, estando associadas às operações de multiplicação e/ou divisão (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997).

Relativamente à ideia de fração como uma *razão* entre grandezas (ou quantidades), o numerador e o denominador não são partes de um inteiro, mas sim números que representam uma operação de divisão ou comparação entre grandezas, de modo que estas grandezas não precisam necessariamente ser da mesma natureza, representando também proporcionalidade e equivalência (PAULA, 2013; SILVA, 2015).

Em relação ao conceito de equivalência, pode ser de quantidades extensivas as quais referem-se a comparação de duas quantidades de mesma natureza (parte-

todo), enquanto as quantidades intensivas referem-se a comparação de quantidades com medidas diferentes, ou seja, duas magnitudes (MERLINI, 2005).

A Base Nacional Comum Curricular (2017) propõe uma progressão em relação aos conhecimentos considerados essenciais, fazendo com que existam conexões nos conteúdos de cada ano, e isto possibilita que os alunos desenvolvam a aprendizagem. A partir do 4º ano do ensino fundamental, as frações começam aparecer no currículo, inicialmente os alunos devem reconhecer frações unitárias, consideradas usuais, identificar e representar frações associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. No 5º ano, a ênfase ocorre na identificação de frações equivalentes, comparação e ordenação números racionais positivos (representações fracionária e decimal), também relacionando-os a pontos na reta numérica. No 6º ano, os conceitos de frações parte-todo, quociente, equivalência, comparação, adição e subtração; devem ser relacionados e aprofundados, bem como reconhecimento que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra. O significado de razão de duas partes de grandezas diferentes e a resolução de problemas deve ser estudada no 7º ano. Nos anos escolares seguintes, o tópico frações é contextualizado com outros conteúdos sem tanta ênfase aos seus significados e operações (BNCC, 2017).

Devido ao enfraquecimento da perspectiva utilitarista das frações, este conceito vem recebendo outros tratamentos na escola, ainda assim, “[...] seu ensino é essencial e inegociável, isto se atribuímos a devida importância a outros aspectos: o cultural, o formativo (de natureza cognitiva) e o matemático” (LOPES, 2008, p. 20). Essas mudanças têm solicitado dos professores repensar as práticas e objetivos dos processos de ensino e aprendizagem deste conceito, pois quando os conceitos de fração não são adequadamente conceituados e compreendidos pelos alunos, se transformam em regras desconexas que dificultam a compreensão do aluno por toda sua trajetória de estudo (MENEZES; MORAES, 2018). As compreensões dos significados da fração, bem como a flexibilidade com as diferentes representações dos números racionais contribuem para a resolução de problemas e para o raciocínio matemático do aluno (POST, *et al.* 1993).

Ponte e Quaresma (2021) afirmam que existem evidências de que os alunos são mais expostos a uma abordagem de frações centrada na relação parte-todo

expressa, majoritariamente, através de frações próprias. A ênfase nesta abordagem acarreta dificuldades na compreensão geral das frações e no uso de frações em contextos diferentes e nos diferentes significados. Em contrapartida, ao desenvolverem a compreensão alargada acerca dos significados de frações, os alunos começam a usá-los de forma flexível recorrendo a representações adequadas e formulando generalizações (PONTE; QUARESMA, 2021).

CAPÍTULO 3

3 METODOLOGIA

No presente capítulo explicitamos os delineamentos metodológicos desta pesquisa, destacando a abordagem, o contexto da pesquisa, os participantes, o processo de constituição dos dados, bem como o procedimento de análise.

3.1 ABORDAGEM DA PESQUISA

A investigação assumiu a perspectiva qualitativa de pesquisa, segundo a concepção de Bogdan e Biklen (1982). Na área de educação, os pesquisadores utilizam frequentemente a pesquisa qualitativa, visto que este método utiliza o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador concebido como o principal instrumento (BOGDAN; BIKLEN, 1982).

Para Bogdan e Biklen (1982), os dados coletados em estudos qualitativos são descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com seu estudo. E este material apresenta de forma detalhada descrições de pessoas, situações, acontecimentos, enriquecendo este tipo de pesquisa. Além disso, podem ser incorporados aos dados as entrevistas, fotografias, etc. O pesquisador se atenta aos pormenores para compreender o problema que estuda. Há ênfase no processo e não particularmente no produto final, sendo que as perspectivas dos participantes são consideradas essenciais na pesquisa qualitativa.

Nossa investigação assumiu natureza empírica na medida em que foi conduzida no contexto de um estudo de aula, cuja aula de investigação foi promovida em uma turma de alunos do 7º ano de uma escola pública da cidade de Faxinal dos Guedes. Em face a esse contexto de ensino da Matemática, nos utilizamos de diversas fontes de dados provenientes das entrevistas, observações, gravações de áudio de todas as etapas, documentos relacionados às resoluções dos alunos, entre outros.

3.2 CONTEXTO DA PESQUISA

3.2.1 Contexto da recolha de dados

A constituição dos dados foi realizada a partir do desenvolvimento de um estudo de aula que envolveu quatro professoras de matemática dos anos finais do ensino fundamental, realizado na Escola Municipal Santa Terezinha, localizada na cidade de Faxinal dos Guedes – SC. Escolhemos a referida escola para realizar a intervenção da pesquisa pelo fato da pesquisadora atuar profissionalmente neste município.

Faxinal dos Guedes está localizada na região oeste de Santa Catarina, seu desbravamento foi feito por gaúchos, com predominância de ítalo-brasileiros. Quando foi considerada 7^o (sétimo) distrito de Chapecó em 1942, surgiu o nome de Faxinal dos Guedes, pela existência da família Guedes Ramos, poderosos proprietários de terras, provindo daí o nome Guedes. Quanto à denominação Faxinal, esta advém das características naturais do município: florestas faxinais, identificadas por pastagens, entremeadas de arvoredos esguios. Neste mesmo ano, foi construída a primeira escola, a qual servia também como Igreja Católica do distrito. Sendo emancipada em 26 de julho de 1958 (FAXINAL DOS GUEDES, 2020).

Este município, com aproximadamente 11 mil habitantes¹⁰, conta com sete escolas, sendo duas estaduais e cinco municipais. As escolas municipais têm boa infraestrutura, todas equipadas com bibliotecas e laboratórios de informática. Além disso, as salas de aula são equipadas com notebook, lousa digital, caixa de som, projetor, ar condicionado e ventilador (PPP-EMST, 2020).

O estudo de aula foi desenvolvido com um grupo de quatro professoras de matemática, da rede municipal do referido município. A aula de investigação, terceira etapa do estudo de aula, foi realizada em uma turma de 7^o ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Santa Terezinha, a qual compõe a rede municipal de educação de Faxinal dos Guedes – SC.

Nos estudos de aula, processo de desenvolvimento profissional centrado na colaboração e na reflexão, a tomada de decisões é feita de maneira colaborativa

¹⁰ De acordo com dados de 2012 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

(RICHIT, 2020). Neste sentido, a turma e tópico matemático foram definidos de forma conjunta entre os envolvidos na pesquisa, logo no início do estudo de aula.

3.2.2 Escola

As escolas da rede municipal de educação de Faxinal dos Guedes - SC recebem alunos da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. A aula de investigação foi realizada em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, a escolha da turma foi realizada de forma conjunta entre o grupo de professores participantes.

A escola escolhida para realizar a pesquisa foi a qual a pesquisadora atuava, sendo a Escola Municipal Santa Terezinha, localizada no centro de Faxinal dos Guedes, sendo a maior escola em relação à estrutura e, conseqüentemente, em maior número de alunos do referido município.

De acordo com o atual Projeto Político Pedagógico da Escola Municipal Santa Terezinha, em vigência desde 2020, a escola tem como pressuposto a abordagem filosófica do materialismo histórico e dialético. Assim, visa a educação integral que contempla o desenvolvimento social, afetivo e cognitivo do indivíduo como cidadão. Destaca a importância da qualificação profissional por parte de todos os funcionários que compõe a escola para excelência do trabalho educativo. Ressalta que o professor deve ter atitude mediadora promovendo ao aluno a construção e reconstrução de conceitos para que ocorra a aprendizagem (PPP-EMST, 2020).

3.2.3 Participantes

As professoras de matemática da rede municipal de Faxinal do Guedes foram convidadas a participar do estudo de aula. Após esclarecermos a dinâmica do estudo de aula e das atividades a serem realizadas, quatro professoras aceitaram participar do processo, sendo todas licenciadas em matemática, com idades entre 30 e 40 anos e com especialização na área. Em relação à experiência profissional, todas atuam há mais de quatro anos na docência nos anos finais do Ensino Fundamental em instituições municipais da região. Este grupo de professoras destaca que não reflete de forma considerável sobre suas práticas pedagógicas e sobre as atividades que propõem aos seus alunos. Além disso, não se sentem totalmente satisfeitas em relação ao aprendizado de seus alunos. Considerando de

antemão que o estudo de aula poderia trazer contribuições a sua prática pedagógica, constituiu-se o grupo que participou de nossa pesquisa.

Inicialmente apresentamos às professoras os estudos de aula e a abordagem exploratória, e esta teve como objetivos específicos: discutir com os professores aspectos teóricos sobre os estudos de aula; promover, analisar e observar aulas utilizando os princípios da abordagem exploratória da matemática em um estudo de aula; analisar as estratégias das resoluções e representações matemáticas, processos de raciocínio e generalizações elaboradas pelos alunos; deflagrar discussões sobre aspectos da prática de sala de aula evidenciados nas diferentes etapas do estudo de aula; refletir e evidenciar acerca das possibilidades que estas teorias proporcionam aos alunos e aos professores. Mediante essas discussões, o grupo definiu o objetivo para a aula de investigação, que consistia em proporcionar aos alunos o desenvolvimento de raciocínio matemático, instigando-os a investigar diferentes representações, justificar e generalizar os tópicos curriculares abordados na aula de investigação.

A aula de investigação do estudo de aula foi realizada em uma turma de 7º ano composta por 20 alunos, com faixa etária média de 12 anos de idade. A turma foi escolhida pelas professoras sob a justificativa de que poderiam abordar o tópico curricular frações, o qual foi escolhido devido as dificuldades observadas pelas professoras no decorrer de suas experiências profissionais. Os alunos participantes da aula de investigação reconhecem a importância de compreender as definições e os exemplos para compreender as atividades e afirmam ter dificuldades para interpretar atividades e problemas em Matemática. Além disso, demonstraram interesse e dedicação em resolver a tarefa proposta, visto que no tópico curricular frações relataram ter algumas dificuldades, principalmente pelo fato de que o 6º ano foi realizado de forma remota em virtude da pandemia de Covid-19.

Em relação às questões éticas do trabalho, destacamos que a investigação foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, conforme processo 45013120.8.0000.5564. Neste sentido, esclarecemos que os excertos (evidências empíricas) apresentados na análise dos dados são identificados por nomes fictícios como forma de preservar a identidade dos participantes. Além disso, foram elaborados termos de consentimentos para a Secretaria Municipal de Educação de Faxinal dos Guedes, bem como para a direção e coordenação da escola e todos os demais envolvidos na pesquisa, professores,

alunos e seus responsáveis, conforme critérios estabelecidos pelo Comitê de Ética em Pesquisa.

3.2.4 Dinâmica da atividade

A investigação envolveu a realização do estudo de aula com as quatro professoras de Matemática da rede municipal de Faxinal dos Guedes. Este grupo de professoras definiu o ano escolar e a turma em que a aula de investigação seria realizada, argumentando o motivo pelo qual determinada decisão foi tomada. A seguir, definiram o tópico a ser abordado na aula de investigação, que foi “frações”, devido às frequentes dificuldades dos alunos sobre esse tema. Após a definição do tópico matemático a ser abordado, as professoras definiram objetivos a serem alcançados a partir da aula de investigação

Posterior a isso, as professoras trabalharam colaborativamente no planejamento da aula de investigação levando em consideração as dificuldades dos alunos nesse tópico e o objetivo estabelecido pelo grupo no início do processo. Todas as decisões tomadas durante o estudo de aula deverão ser realizadas de forma colaborativa, mediante diálogo e argumentação.

A preparação da aula de investigação foi permeada por discussões e reflexões sobre como estas atividades poderiam contribuir para a aprendizagem dos alunos, sobre as principais dificuldades e dúvidas que poderiam surgir sobre o tópico escolhido, bem como sobre as possibilidades de superá-las. Nesse sentido, o planejamento da tarefa para a aula de investigação contemplou situações que favoreceram o papel ativo do aluno. Ou seja, os alunos desempenharam papel fundamental no entendimento e resolução da tarefa.

Além disso, no planejamento definimos a abordagem da aula de investigação, que foi a abordagem exploratória como perspectiva de favorecer a aprendizagem da Matemática pelos alunos, assim como para explicitar suas estratégias, representações, justificativas, conclusões e generalizações relacionadas ao tópico curricular abordado.

Ressaltamos ainda que em todo o processo foram elaborados diários de bordo pelos alunos e pelos professores que observaram as ações dos alunos. Estes

materiais e documentos foram incorporados ao material empírico da investigação, bem como as gravações de áudio realizadas durante a aula de investigação.

A aula de investigação foi ministrada voluntariamente por um dos professores participantes do estudo de aula, o qual apresentou a tarefa aos alunos, de acordo com o planejamento de aula, e no decorrer da aula movimentou-se pela sala de aula, observando o desenvolvimento da tarefa pelos alunos e orientando-os, segundo a perspectiva da abordagem exploratória.

Ao final da aula de investigação o professor realizou a discussão coletiva, instigando os alunos a apresentar os métodos de resolução da tarefa, a partir da qual procurou evidenciar estratégias de resolução distintas. Esta fase se torna importante para alertar os alunos que utilizaram métodos ingênuos, comparando as ideias de forma oral. Assumindo o papel de promovedor da discussão, o professor precisa instigar a comunicação das ideias matemáticas (PONTE, 2005) e confrontar as estratégias de resolução, visando levar a um consenso em relação às conclusões de modo a promover a generalização. Para finalizar, a professora revisou o que foi discutido no decorrer da aula e da discussão coletiva, explicitando o conhecimento aprendido durante a aula. Os demais integrantes do grupo observaram a aula, produzindo registros (notas de campo) detalhados das ações os alunos durante a resolução da tarefa.

Posteriormente, o grupo de professores se reuniu para refletir sobre as ações dos alunos na aula de investigação. Neste momento foram apresentados argumentos sobre os pontos observados por cada integrante, aspectos relacionados à aprendizagem dos alunos, pontos positivos e negativos evidenciados durante o estudo de aula, possíveis críticas e sugestões para favorecer a aprendizagem.

3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

A investigação envolveu diferentes procedimentos e instrumentos de recolha de dados, os quais são detalhados a seguir.

3.3.1 Constituição de Dados

A constituição de dados da investigação, baseada em Lüdke e André (1986), Flick (2009), Bogdan e Biklen (1982) e Gil (1999), foi realizada a partir de algumas técnicas de recolha de dados, nomeadamente, as entrevistas e questionários que

foram aplicados aos alunos, notas de campo e diário de bordo produzidos pelas professoras no decorrer do estudo de aula, especialmente a notas de campo elaboradas durante a aula de investigação, bem como as gravações de áudios realizadas em todas as etapas do estudo de aula e as resoluções da tarefa desenvolvidas pelos alunos.

Estes instrumentos foram elaborados em conformidade com as exigências éticas de pesquisa tendo sido avaliadas pelo Comitê de Ética em Pesquisa.

3.3.2 Questionários

O questionário, de acordo com Gil (1999, p.128), pode ser definido “como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.”.

Nessa perspectiva, o questionário (Apêndice 01) foi enviado de forma online aos alunos antes da aula de investigação, sendo disponibilizado algum tempo para resposta do mesmo. Os 20 alunos da turma responderam o questionário, a fim de realizar uma explanação sobre os possíveis anseios e principais dificuldades no componente curricular de matemática, verificar as considerações e observações dos alunos sobre a sua aprendizagem na matemática e as expectativas para as aulas que irão ser desenvolvidas neste estudo.

Desse modo, o questionário serviu para constituir informações relacionadas ao perfil e aos contextos dos alunos. As perguntas propostas em um questionário, segundo Gil (1999), podem ser relacionadas a fatos, atitudes, comportamentos, sentimentos, padrões de ação, comportamento presente ou passado, entre outros. E ainda, segundo Gil (1999), ao realizar um questionário se “[...] garante o anonimato das respostas; [...] não expõe os pesquisadores à influência das opiniões e do aspecto pessoal do entrevistado” (GIL, 1999, p. 129). Nesse sentido, o questionário, constituído por questões abertas e fechadas, versou sobre as impressões dos alunos acerca das aulas e aprendizagens matemáticas, facilidades e dificuldades apresentadas, instigando o aluno a pensar se realiza estratégias e comunicação na

resolução das tarefas e quais as perspectivas deles para a aula de investigação que seria realizada.

3.3.3 Entrevistas

De acordo com Flick (2009, p. 106-107), a “entrevista é um dos métodos predominantes na pesquisa qualitativa” por apresentar algumas importantes características.

O foco da pesquisa com entrevistas está (em sua maioria) na experiência individual do participante, que é considerada relevante para se entender a experiência das pessoas em uma situação semelhante; [...] Em entrevistas, pode-se abordar perguntas sobre experiências pessoais e produção de sentido com questões pessoais ou mais gerais; [...] Para entrevistas, a amostragem é orientada a encontrar as pessoas certas -as que tornaram a experiência relevante para o estudo, [...] Os entrevistados também devem ser capazes de refletir sobre sua experiência, verbalizar essa reflexão e estar prontos para passar mais tempo sendo entrevistados; [...] A partir das entrevistas, podem-se esperar várias formas de generalização. A primeira é a generalização interna, em que se pode supor, em certa medida, que as declarações feitas na situação da entrevista podem ser generalizadas ao que o entrevistado acha e diz em outras situações. Dependendo do método de amostragem que foi utilizado, também se pode tentar generalizar os resultados a pessoas em situações semelhantes à dos entrevistados; [...] Nesse contexto, o consentimento informado deve ser uma obrigação em todos os estudos, ...Outra questão é a confidencialidade -como o pesquisador cuida para que o anonimato do entrevistado seja mantido ao longo do processo de pesquisa e nas publicações (FLICK, 2009, p. 107-112).

Lüdke e André (1986) destacam que o pesquisador deve ter cautela durante o processo das entrevistas. O pesquisador deve explicar aos entrevistados o objetivo da pesquisa, possibilitar a escolha ou recusa em participar, garantir o sigilo e anonimato e respeitar a individualidade dos entrevistados. Além disso, durante a entrevista, deve se utilizar uma linguagem adequada e promover um ambiente que o entrevistado se sinta confortável, a fim de facilitar o processo de recolha de informações e pontos de vista do participante (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

Neste sentido, de acordo com Lüdke e André (1986), ao optar por realizar entrevista como fonte de coleta de dados, “estamos assumindo uma das técnicas de recolha de dados mais dispendiosas, especialmente pelo tempo e qualificação exigidos do entrevistador”, em razão de que, “quanto mais preparado estiver ele, quanto mais informado sobre o tema em estudo e o tipo de informante que irá

abordar, maior será, certamente, o proveito obtido com a entrevista” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 38).

Para Bogdan e Biklen (1994), o pesquisador de orientação qualitativa pode realizar após cada entrevista, notas de campo para registrar os conteúdos. No entanto, o mais adequado é que as entrevistas sejam gravadas e transcritas, mesmo que não seja na íntegra considerando apenas os pontos de relevância para a pesquisa, sempre preservando a fidelidade do que foi narrado pelos participantes, e de modo que todos os pormenores sejam considerados.

Nesta perspectiva, após promover e observar aula de investigação no estudo de aula, ao término da aula de investigação realizamos uma entrevista (Apêndice 02) com todos alunos participantes. A entrevista, que se constituía de perguntas relacionadas à aula de investigação desenvolvida, visou questionar os alunos sobre as impressões durante a aula, como se deu a realização de estratégias para resolução das tarefas, as discussões e generalizações. Além disso, foram incorporadas à entrevista questões específicas sobre o tópico matemático desenvolvido na aula de investigação, que foi ‘frações’. Por meio da entrevista buscamos explicitar e explicar, com mais detalhamento, alguns aspectos das aprendizagens realizadas pelos alunos no âmbito da abordagem exploratória.

3.3.4 Notas de Campo

Ao finalizar cada uma das sessões do estudo de aula foram realizadas descrições das atividades do encontro, destacando o trabalho desenvolvido pelo grupo de professores, as discussões realizadas, as reflexões promovidas e as impressões relacionadas ao processo formativo. Além disso, durante a aula de investigação, os observadores realizaram anotações sobre o desenvolvimento da aula, as dificuldades e facilidades dos alunos na resolução da tarefa, apontamentos sobre as generalizações e discussões realizadas pelos alunos e tudo que julgarem pertinente para enriquecer o processo de constituição de dados.

Para Ludke e André (1986), a observação constitui um dos principais instrumentos de constituição de dados nas abordagens qualitativas. A observação permite que o observador se aproxime da perspectiva dos sujeitos, possibilitando até mesmo a descoberta de aspectos novos do problema. Primando pela qualidade de

confiabilidade dos dados constituídos por meio da observação, é necessário estabelecer, primeiramente, o grau de participação do pesquisador no trabalho de campo, em seguida, explicar o seu papel e os propósitos do estudo aos participantes.

As observações registradas durante a aula de investigação constituem as notas de campo, as quais, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.150), caracterizam os “relatos escritos daquilo que o investigador vê, ouve, experiência e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”.

A análise desses registros revela os desafios, as adaptações necessárias e as particularidades desse processo formativo, bem como possibilita a compreensão da dinâmica de desenvolvimento dos estudos de aula de acordo com o ponto de vista dos participantes.

3.4 PROCEDIMENTOS DA ANÁLISE DE DADOS

O método indiciário está fundamentado na investigação de “pistas”, “sinais” ou “indícios” reveladores acerca dos fenômenos da realidade. A pesquisa sobre as raízes do Paradigma Indiciário conduziu Ginzburg, historiador italiano, a um precioso insight: se “a realidade é opaca, existem zonas privilegiadas – sinais, indícios – que permitem decifrá-la” (COELHO, 2007, p. 2). Ademais, “o que caracteriza esse saber é a capacidade, a partir de dados aparentemente negligenciáveis, de remontar a realidade complexa não experimentável diretamente” (COELHO, 2007, p. 2).

As ciências indiciárias são consideradas como subjetivas ou conjecturais, por isso se opõem às ciências exatas e experimentais. A ferramenta básica das ciências conjecturais se trata da conjectura associada à intuição, observação de pormenores e subjetividade, por isso buscam uma rigorosidade científica flexível (COELHO, 2007).

Para interpretar a realidade, o pesquisador utiliza procedimentos flexíveis e variados, estabelecendo relações que em muitas vezes não necessariamente ficam documentadas, isto constitui elos em que o pesquisador faz a inferência com outros aspectos do contexto, por isso são associados à habilidade de dedução de causas e efeitos (COELHO, 2007).

A análise do material empírico constitui uma fase presente em “vários estágios da investigação”. Neste sentido, ao analisar os dados em uma pesquisa

qualitativa todo o material coletado durante a investigação deve ser considerado. Para isso, primeiramente se torna necessária a organização deste material, sendo dividido em partes, identificando possíveis tendências e padrões, reavaliando as tendências e padrões e buscando “relações e inferências num nível de abstração mais elevado” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 45).

Com utilização de um diário de bordo/notas de campo, a realização do questionário prévio e entrevista com os alunos, analisamos a perspectiva dos alunos sobre as diversas atividades realizadas, nomeadamente (i) a apresentação e explicação do tópico matemático, (ii) a realização de tarefas matemáticas e descrição das possíveis dificuldades, (iii) a análise do trabalho desenvolvido nas tarefas matemáticas, (iv) a análise e discussão de situações na sala de aula, e (v) a reflexão e partilha de experiências com os colegas, a sua perspectiva sobre a aula, em especial os momentos de discussão coletiva, bem como a correspondência entre o trabalho desenvolvido e as aprendizagens alcançadas.

A constituição das categorias concretizou-se mediante a imersão do pesquisador nos dados e da realização da análise indiciária acerca das aprendizagens sobre frações, oportunizadas a partir da abordagem exploratória. A categorização concretizou-se por meio da classificação dos dados, assim sendo possível dispô-los em conjunto de dados semelhantes por sua essência. Bogdan e Biklen (1994) destacam a importância da formulação de categorias de codificação para organização desse material após a constituição de dados.

O paradigma indiciário trata do individual, considerando características que passam despercebidas se não tiver um olhar atento às peculiaridades, e essas podem oferecer informações valiosas e relevantes. Neste sentido, utilizamos o paradigma indiciário para realizar a análise dos dados, contemplando a observação da aula de investigação, as interações dos alunos durante a realização da tarefa, a maneira como negociavam a resolução da tarefa, as notas de campo produzidas pelos professores participantes, as respostas dos questionários e entrevistas.

CAPÍTULO 4

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo apresenta a análise do material empírico constituído nas sessões do estudo de aula, especialmente na realização da aula de investigação. O diagrama a seguir ilustra as etapas realizadas neste capítulo.



Figura 3. Diagrama da análise dos dados.

Elaborado pela autora (2021)

Primeiramente, apresentamos de forma detalhada as etapas do estudo de aula desenvolvido. Em seguida, com base no paradigma indiciário, a partir da identificação e análise de momentos significativos nas entrevistas e questionário, nos diários de bordo, nas tarefas desenvolvidas pelos alunos, na discussão em pares durante a realização da tarefa e na discussão coletiva promovida ao final da aula de investigação, assim como na reflexão ao final do estudo de aula, emergiram as categorias apresentadas neste capítulo. Sendo assim, na sequência interpretamos e discutimos as categorias de análise: (i) significados de frações (relação parte-todo, medida, operador, quociente e razão), (ii) representações de fração (pictórica e numérica) e (iii) justificações e conclusões dos alunos sobre frações, as quais evidenciam a aprendizagem matemática dos alunos no tópico

frações. Cada uma das categorias ampara-se em evidências empíricas identificadas no material constituído na investigação, a partir dos excertos escolhidos de acordo com o potencial de evidenciar as categorias e aspectos para análise. Estas evidências são interpretadas e discutidas à luz da abordagem exploratória e dos estudos de aula.

4.1 DESCRIÇÃO DO ESTUDO DE AULA REALIZADO

A investigação foi desenvolvida a partir de um estudo de aula realizado no contexto de atuação profissional da pesquisadora, em uma escola da cidade de Faxinal dos Guedes, em Santa Catarina. Após aceite das participantes, definimos que seriam promovidas 12 sessões de duas horas cada, realizadas semanalmente, de forma online, com momentos síncronos e assíncronos. Os três primeiros encontros foram destinados a apresentação, leitura dirigida sobre estudos de aula, abordagem exploratória e a BNCC, discussões e aprofundamento sobre o tema.

Posterior a isso, no quarto encontro, no contexto da escolha do tópico matemático a ser desenvolvido no estudo de aula, as professoras discutiram sobre as dificuldades dos alunos em frações e álgebra, citados como sendo os conteúdos que os estudantes apresentam maiores dificuldade. O grupo definiu então o tópico a frações para ser abordado na aula de investigação. A seguir, definiram o ano escolar 7º ano e a turma vespertino para a aula de investigação ser realizada.

Após definição do tópico matemático e da turma, no quinto encontro as professoras definiram os principais objetivos a serem alcançados a partir da realização da aula de investigação, sendo o principal objetivo proporcionar aos alunos a compreensão dos conceitos de fração equivalente, adição e subtração de frações, promovendo o desenvolvimento de raciocínio matemático, instigando-os a investigar diferentes representações, justificar e generalizar suas conclusões.

A seguir, iniciamos a preparação da tarefa para a aula de investigação com foco no tópico frações. Do sexto ao nono encontro, as professoras trabalharam colaborativamente no planejamento da aula de investigação levando em consideração as dificuldades dos alunos nesse tópico e o objetivo estabelecido pelo grupo no início do processo. Destacamos que todas as decisões tomadas durante o

estudo de aula foram realizadas de forma colaborativa, mediante diálogo e argumentação.

Durante este processo, foram promovidas reflexões sobre o ensino da Matemática, contribuindo para elaboração de um plano de aula com foco na aprendizagem, com atividades voltadas a compreensão do conceito de fração. Assim, a preparação da aula foi permeada por discussões e reflexões sobre como estas atividades poderiam contribuir para a aprendizagem dos alunos, sobre as principais dificuldades e dúvidas que poderiam surgir em torno do tópico escolhido, bem como sobre as possibilidades de superá-las.

Nesse sentido, o planejamento da tarefa a ser realizada pelos alunos na aula de investigação priorizou o papel ativo do aluno. As professoras preocuparam-se em criar um contexto diferenciado para a atividade, a fim de despertar o interesse dos alunos. Considerando que no oeste catarinense há muitos apicultores, o grupo de professoras adotou como contexto para a tarefa os favos de colmeias de abelhas europeias, as quais formam suas colmeias a partir de alvéolos hexagonais. Com esse contexto, elaboraram uma tarefa para abordar frações equivalentes, adição e subtração de frações, tomando por contexto a Apicultura, uma vez que há na região muitos produtores de mel.

O planejamento da aula de investigação foi realizado de forma colaborativa, sempre considerando as possíveis dúvidas e dificuldades que o aluno poderia apresentar, seja na leitura do enunciado da tarefa ou na sua resolução. Deste modo, optou-se por utilizar uma linguagem que possibilitasse a compreensão das tarefas por parte do aluno, organizadas de forma que novos desafios eram gradualmente apresentados aos alunos mediante questões que os instigavam a pensar, explorar, justificar e generalizar suas resoluções.

Cada uma das participantes, a partir das suas experiências profissionais no ensino da Matemática, contribuiu para um planejamento diferenciado da tarefa e da aula de investigação, preocupando-se em cada detalhe do plano de aula. Posterior a isso, o grupo revisou a tarefa e a aula e, assim, finalizaram o planejamento.

Na etapa seguinte realizamos a lecionação da aula de investigação de forma presencial. Como os alunos estavam organizados em dois grupos A e B devido às restrições da pandemia de Covid-19, a aula foi lecionada em dois momentos, com cada um dos grupos separadamente, sendo que cada grupo era composto por dez alunos, e o intervalo de tempo entre a realização da aula de investigação com um

grupo e outro foi de uma semana. Previamente a aula, os alunos foram orientados a realizar uma pesquisa sobre as colmeias de abelhas europeias com vistas a envolvê-los com o tema e motivá-los para a aula. A aula de investigação foi iniciada a partir dos relatos dos resultados da busca realizada, a professora ressaltou algumas características dos favos de mel das abelhas europeias e, em seguida, os alunos foram organizados em cinco duplas, de acordo com o quadro abaixo, para a realização da tarefa, sendo que cada dupla teve acompanhamento de uma professora observadora.

Quadro 5 – Duplas para realização da tarefa na aula de investigação com o respectivamente observador.

| Grupo A | | Grupo B | |
|------------------|------------|------------------|------------|
| Duplas | Observador | Duplas | Observador |
| Luna e Edward | Amália | Jhenny e Willian | Amália |
| Ronald e Neville | Mafalda | Clauki e Emy | Mafalda |
| Bill e Molly | Lily | Jack e Petry | Lily |
| Mila e Stieve | Pietra | Percy e George | Pietra |
| John e Ketty | Angela | Any e Jullie | Angela |

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Após os rituais de início de aula, a professora apresentou a tarefa de acordo com o planejamento de aula. No decorrer da resolução da tarefa a professora circulou pela sala observando o desenvolvimento da tarefa pelo grupo, o progresso dos alunos na resolução, as particularidades na forma de resolução escolhida pelas duplas e, especialmente, buscando identificar resoluções com potencial para boas discussões no momento da discussão coletiva.

Durante os dois momentos da realização da aula de investigação as professoras do grupo assumiram o papel de observar as ações dos alunos e, a partir de um roteiro de observação, previamente elaborado pelo grupo, produziram registros sobre a interpretação feita pelos alunos para a tarefa proposta, das questões/dúvidas levantadas na discussão com o colega, as estratégias de resolução adotadas, os argumentos e contra-argumentos propostos para defender as estratégias apresentadas, as representações matemáticas usadas nas resoluções de cada questão, as operações matemáticas utilizadas, as respostas obtidas e as justificações formuladas nos grupos, as tentativas de propor alguma generalização, as dificuldades apresentadas pelos alunos, os aspectos adotados pelos grupos para

defender as suas resoluções e a generalização/conclusão ao final da discussão coletiva.

Ao final da aula de investigação, que foi organizada em duas aulas de duas horas cada, após os alunos trabalharem na resolução da tarefa, a professora instigou-os a apresentar seus métodos de resolução, promovendo a discussão coletiva, a partir da qual evidenciou estratégias de resolução distintas, confrontando essas estratégias de resolução, visando levar a um consenso em relação às conclusões de modo a promover a generalização. Para finalizar, a professora revisou o que foi discutido na resolução da tarefa e na discussão coletiva, explicitando o conhecimento aprendido a partir dessa aula.

Posteriormente, as professoras reuniram-se para refletir e discutir sobre a aula de investigação. Neste momento, mediante os registros produzidos sobre as ações dos alunos, cada uma das participantes destacou aspectos relacionados às aprendizagens dos alunos, apresentando elementos e argumentos para apoiar suas hipóteses de resolução e seus resultados. Além disso, destacaram pontos positivos e negativos sobre a aula de investigação e sugestões para que o aprimoramento do planejamento desta aula.

Nessa perspectiva, apoiando-nos nas evidências empíricas, nas reflexões e no material empírico constituído em todas as etapas do estudo de aula, verificamos diferentes aspectos relacionados à compreensão do conceito de frações, aspectos esses que culminaram nas categorias de análise de nosso estudo.

4.2 APRENDIZAGENS DOS ALUNOS SOBRE FRAÇÕES

O material empírico constituído por meio das observações e pelas atividades realizadas pelos alunos na aula de investigação, pelas notas de campo e gravações de todas as etapas do estudo de aula, questionário e entrevistas realizadas com os alunos, nos oportunizaram identificar e selecionar evidências empíricas, que mediante análise, constituíram as categorias de análise. Nesta seção apresentamos evidências empíricas associadas às aprendizagens dos alunos a partir da abordagem exploratória no estudo de aula, as quais constituíram três categorias de análise: (i) significados de fração, (ii) representações de fração e (iii) justificações e conclusões dos alunos sobre frações. Cada uma das categorias é analisada

mediante a apresentação de evidências empíricas, as quais são interpretadas de forma a explicitar aquilo que evidenciam e, ao final, os achados relacionados a cada categoria são colocados em diálogo com a base teórica da investigação.

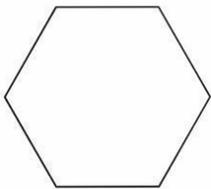
4.2.1. Significados de Fração

Ao analisar as resoluções apresentadas pelos alunos para a tarefa proposta na aula de investigação, cujo contexto envolvia as características dos favos de mel das colmeias de abelhas europeias, foram identificados processos de resolução associados aos diferentes significados de fração – relação parte todo, medida, operador, quociente e razão, embora os significados não são dissociáveis a análise foi realizada em partes, de forma a explicitar aspectos de cada um desses significados e como estes se manifestaram na tarefa –.

Relação parte todo. A relação parte-todo das frações associa-se a ideia de pegar o todo (n) e dividir em partes iguais, onde cada parte representa $1/n$ do todo, implicando em uma relação de dupla contagem em que o denominador representa o total de partes em que o todo foi dividido e o numerador representa quantas partes estão sendo consideradas (DRECHMER; ANDRADE, 2011).

A relação parte-todo foi evidenciada a partir da tarefa em que os alunos precisavam dividir e colorir partes definidas dos hexágonos que constituíam os favos de mel. Nas questões 4 e 5 da tarefa, ao solicitar que o hexágono fosse dividido em seis partes iguais e dessas, fossem coloridas três partes, e em seguida, fosse indicada qual fração do hexágono inteiro correspondia a parte colorida.

4- Divida o hexágono abaixo em seis partes iguais. Pinte três partes.



5- Observe apenas a parte colorida da figura acima. Indique a fração que representa a parte colorida em relação ao hexágono inteiro? Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão.

Figura 4. Atividade 1 – Questões 4 e 5
Elaborado no estudo de aula (2021)

Luna justificou sua resposta desta forma “[...] três sextos, no meu raciocínio eu pensei que o hexágono era uma pizza e nesta pizza três pedaços foram comidos [...]” (Luna, resposta questão 4 e 5, atividade 1, aula de investigação, 2021). Nas demais questões a aluna continuou associando o denominador a pizza inteira e o numerador as partes de pizza que haviam sido consumidas, reforçando a relação parte-todo.

Outros alunos também associaram o denominador ao todo (inteiro) e o numerador as partes “retiradas” (consideradas). No momento de discussão, o aluno Ronald afirmou: “a parte que não foi pintada você tem e a parte que foi pintada você não tem mais” (Ronald, transcrição discussão, aula de investigação, 2021).

O aluno Neville reforça essa ideia, ao justificar sua resposta com uma subtração dos numeradores das frações considerada, para a qual diz que “tinha seis espaços, pinta 3, ou seja $6 - 3 = 3$ ”.

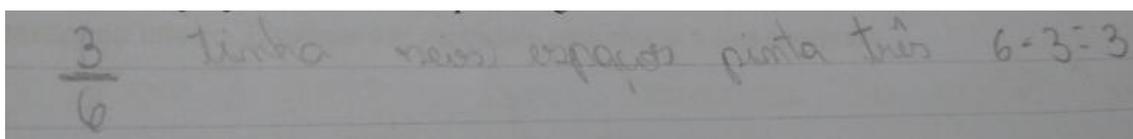


Figura 5. Resposta questão 4 e 5, atividade 1, aula de investigação.
Elaborado por Neville (2021)

Os alunos, a partir da tarefa proposta, foram oportunizados a explorar a relação entre o todo e suas partes e, a partir das discussões na dupla e na discussão coletiva, relacionaram essa perspectiva a outras atividades que já haviam realizado.

Na questão 14 da tarefa, os alunos exploraram aspectos importantes na relação parte-todo ao serem solicitados a colorir a terça parte de cada um dos três hexágonos que estavam divididos respectivamente em 36, 16 e 24 partes iguais.

14- Pinte a terça parte de cada uma das figuras D, G e H, abaixo, indicando a fração que representa cada uma delas. Em seguida compare-as. Você observa alguma relação entre as partes pintadas? Qual? Existe alguma relação entre as frações que representam as partes pintadas?

Figura 6. Atividade 1 – Questão 14
Elaborado no estudo de aula (2021)

Ao analisarmos as resoluções das duplas, observamos que alguns tiveram dificuldades em compreender que as figuras (correspondendo ao inteiro) deveriam ser divididas em três partes iguais e uma dessas partes deveria ser colorida. Em

contrapartida, alguns alunos elaboraram estratégias de resolução, como é o caso do aluno Bill, que justificou sua resposta por meio de uma operação de adição.

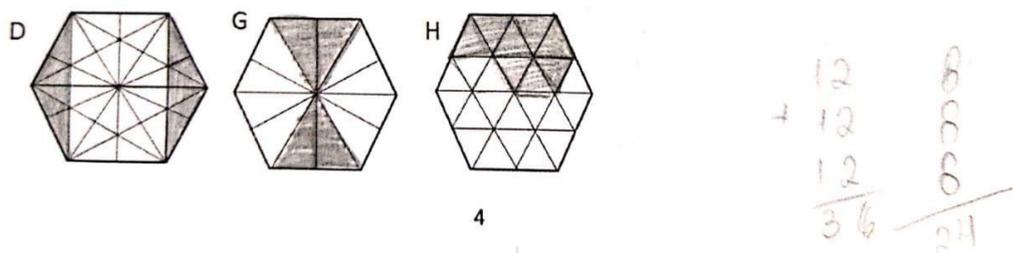


Figura 7. Resposta questão 14, atividade 1, aula de investigação.
Elaborado por Bill (2021)

Porém, mesmo justificando sua resposta com operações matemáticas (adição), Bill não se sentiu confiante de que sua resposta estava correta e pintou os hexágonos com lápis de escrever, para corrigir (alterar) caso fosse necessário. No momento da discussão, o aluno explicou sua estratégia aos colegas de modo que puderam compreender e associar a relação que havia sido construída a partir da (re)divisão destes hexágonos em três partes iguais.

A compreensão de que denominador da fração não indica apenas o número total de partes, mas sim um número de conjuntos pelo qual o todo foi dividido e que o numerador é o conjunto que está sendo considerado, corrobora os resultados de Graça, Ponte e Guerreiro (2021), no qual os alunos evidenciaram este entendimento sobre frações.

Durante a realização das tarefas os alunos discutiram em duplas sobre as estratégias de resolução, bem como possíveis erros nas mesmas. Conforme relatou a observadora Mafalda sobre a resolução da questão 14: “[...] um aluno tinha errado e o colega visualizou e explicou sua versão de como achava que era a resposta; logo ele compreendeu onde havia errado e refez a questão”.

Neste sentido, observamos que os alunos lembraram e aprofundaram o significado da relação parte-todo, ou seja, os alunos mostraram-se capazes de identificar a unidade que representa o todo e, por meio das tarefas propostas, compreenderam como realizar divisões, fracionamentos das quantidades alvéolos dos favos indicados na tarefa.

Assim, os alunos foram oportunizados a mobilizar e explorar conhecimentos e procedimentos relacionados ao tópico ‘frações’, desenvolvendo capacidades

matemáticas, tais como a resolução de tarefas elaboradas para objetivos específicos, o raciocínio e a comunicação de ideias matemáticas (CANAVARRO, 2011) e, portanto, a aprendizagem matemática (RICHIT; TOMKELSKI; RICHIT, 2021).

Medida. Associa-se a ideia de comparação entre duas grandezas, podendo estas ser intensivas ou extensivas (DRECHMER; ANDRADE, 2011). Ou seja, uma determinada parte é tomada como referência para se medir outra (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2008). Acerca do significado de medida, Lins e Silva (2008), explicitam que uma fração pode ser compreendida como o resultado de se medir alguma coisa, usando como referência uma parte da unidade (LINS; SILVA, 2008).

Ao utilizarmos a fração como medida, uma determinada parte é adotada como referência para medir as demais. Isso foi observado na questão número 7 (atividade 1), a qual questionava sobre a quantidade de partes em que estavam divididos cada um dos oito hexágonos.

7- Observe os hexágonos regulares representados abaixo, identificados por letras do alfabeto. Cada hexágono está dividido em partes iguais. Observe e responda:

Figura 2: Hexágonos divididos igualmente

Fonte: Adaptado de [Giménez e Bairral \(2005\)](#)

Figura 8. Atividade 1 – Questão 7
Elaborado no estudo de aula (2021)

O aluno Percy explicou que sua estratégia foi dividir os hexágonos em duas partes, adotando uma destas para realizar a contagem das partes iguais que havia e, em seguida, multiplicar esta quantidade por dois: “eu dividi em duas partes a de cima

e a debaixo, porque são duas partes iguais, depois fiz risquinhos para contar e multipliquei por dois” (Percy, transcrição discussão, aula de investigação, 2021).

Na questão 12 da atividade 1, a qual solicitava que os alunos colorissem a metade do hexágono A e a metade do hexágono B, respectivamente divididos em 6 e 9 partes iguais, verificamos esse aspecto.

12- Pinte a metade do hexágono da figura A. Em seguida, pinte a metade da figura B. Compare as partes pintadas das duas figuras. Elas representam quantidades iguais ou diferentes? Explique.

Figura 9. Atividade 1 – Questão 12
Elaborado no estudo de aula (2021)

Verificamos que os alunos realizaram a contagem do número de partes em que os hexágonos estavam particionados, dividiram esta quantidade em dois e, em seguida, coloriram. No entanto, alguns alunos apresentaram dificuldades, principalmente no hexágono B, visto que este era dividido em 9 partes iguais, e ao tentar dividir as partes por dois não obtiveram um número inteiro, repercutindo na discussão coletiva, conforme diálogo apresentado a seguir:

Jheny: mas o hexágono B está dividido em 9 partes e 9 é um número ímpar, não dá para dividir ao meio.

George: mas qualquer valor pode ser dividido por dois, até esta carteira poderia ser dividida ao meio (risos).

William: a não ser que a gente pinte 4 partes e meia de outra.

Transcrição discussão coletiva, aula de investigação, 2021.

George explicou sua estratégia, que foi considerar o hexágono como uma unidade, um inteiro (mesmo estando subdividido), dividi-lo ao meio com um segmento horizontal e colorir a metade, realizando o que havia sido solicitado na questão. Essa resolução corrobora o conceito de medida ao considerar o todo como referência para medir uma parte. Na mesma questão questionava-se os alunos se existia relação entre as partes pintadas em cada hexágono, bem como entre as frações que as representavam. Ao comparar os dois hexágonos, o aluno George respondeu que ambas as partes pintadas representam a mesma quantidade, mesmo que os hexágonos estavam divididos internamente em sub-regiões com formas geometricamente diferentes. A conclusão de George corrobora o significado de

fração como medida, ao mesmo tempo em que o leva a compreender o conceito de fração equivalente.

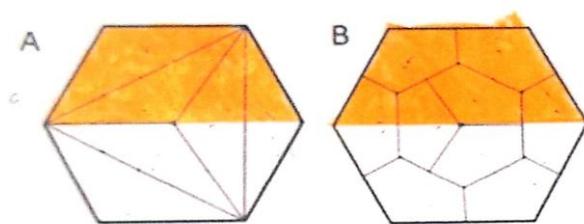


Figura 10. Resposta questão 12, atividade 1, aula de investigação.
Elaborado por George (2021)

Embora a noção de fração como medida foi pouco manifestada nas discussões nos grupos, evidenciamos o entendimento dos alunos de que a divisão dos elementos da fração, ou seja, a divisão entre o numerador e o denominador, origina a parte (quantidade/tamanho) a ser colorida. A compreensão do significado de medida permite aos alunos compreender frações próprias e impróprias, assim como a grandeza de uma fração, sendo uma das compreensões associadas ao sentido de número racional. As tarefas apresentadas, revelaram potencialidades para que os alunos justifiquem as suas conjecturas (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Operador. Este significado pode ser visto como uma modificação/transformação, ou seja, como algo que atua sobre uma situação modificando-a, estando associadas às operações de multiplicação e/ou divisão (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997).

A abordagem exploratória oportunizou aos alunos explorar o significado de fração como operador, a exemplo da questão 14 da atividade 1, que solicitava que fosse colorida a terça parte de cada um dos hexágonos. O aluno Eduard aplicou o operador $1/3$ à quantidade 36, 12 e 24.

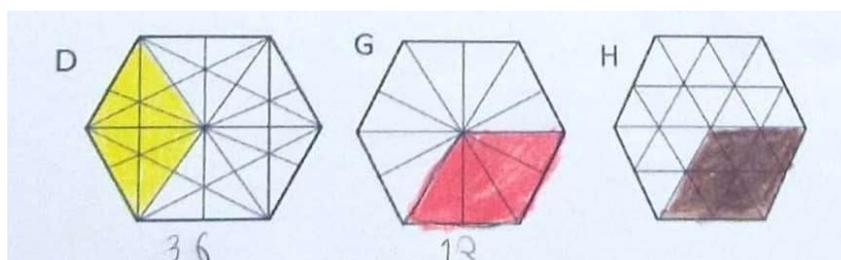


Figura 11. Resposta questão 14, atividade 1, aula de investigação.
Elaborado por Eduard (2021)

O aluno Eduard dividiu as quantidades de subdivisões de cada hexágono (o total de sub-regiões internas de cada hexágono) em três partes iguais, obtendo respectivamente, 12, 4 e 8. Após identificar a quantidade de sub-regiões correspondente a cada uma das três partes, Eduard coloriu-as.

Na letra b da questão 4 (atividade 2), os alunos deveriam adicionar as frações correspondentes as quantidades de alvéolos de cor 1 das figuras 3 e 4.

$$\frac{2}{18} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$$

Figura 12. Resposta questão 4, letra b, atividade 2, aula de investigação.
Elaborado por Molly (2021)

A aluna Molly realiza uma multiplicação por dois com a fração $\frac{2}{18}$, que corresponde aos alvéolos de cor 1 da figura 4, a fim de encontrar uma fração com mesmo denominador que a fração $\frac{3}{36}$, a qual corresponde aos alvéolos de cor 1 da figura 3. Ao realizar a multiplicação a aluna obteve a fração $\frac{4}{36}$, que é uma fração equivalente a $\frac{2}{18}$, processo que lhe permitiu determinar as frações com denominador igual e, assim, realizar a adição das frações $\frac{4}{36}$ e $\frac{3}{36}$ obtendo como resultando $\frac{7}{36}$. Molly explicou a estratégia de encontrar uma fração equivalente da seguinte maneira: “senão não dava para somar porque os denominadores eram diferentes” (Molly, discussão coletiva, aula de investigação, 2021).

O significado de operador nas frações possibilitou principalmente aos alunos a compreensão de equivalência de frações o qual foi fundamental para a realização das adições de frações com denominadores diferentes, possibilitando-lhes realizar as atividades, discutir e generalizar suas estratégias. Sendo esta compreensão essencial para a aprendizagem matemática no que se refere a frações e outros tópicos.

Quociente. O significado de fração como quociente está associado a contextos de partilha equitativa. Neste significado, o numerador (dividendo) se refere ao número de partes iguais que cada participante recebe e que o denominador (divisor) nomeia essas partes (GRAÇA, *et al.* 2021).

Ao analisarmos os processos e resolução para a tarefa foi possível observar diversas vezes os alunos utilizando o significado de quociente ao realizar divisões, bem como ao justificar suas respostas.

O aluno Jack, na questão 13 da atividade 1, ao ser questionado se existe alguma relação entre as frações que representam as partes pintadas dos hexágonos nas questões anteriores afirmou: “todos estão pintados a metade, todas as frações representam divisão”, evidenciando a compreensão do significado de quociente nas frações.

A professora observadora Lily afirmou que “[...] embora todos concordassem que havia sido pintada a metade dos hexágonos, o fato das frações serem escritas com números diferentes confundiu o raciocínio de alguns que somente conseguiram associar no momento da discussão coletiva” (diário de bordo, aula de investigação, 2021).

Referindo-se ao momento da discussão coletiva, quando ao serem questionados a justificar sua resposta os alunos realizaram um importante diálogo:

Molly: nós pintamos a metade, mas que deu resultados diferentes.

Neville: Por que que você acha que não deu mesmo resultado já experimentou fazer a divisão deles para concluir?

Molly: Não

Neville: Então, lembra que o traço também é uma divisão se eu dividir 1 por 2 dá quanto?

Molly: silêncio

Neville: Um real para duas pessoas

Molly: Dá 50 centavos para cada uma

Neville: Então 0,5. E 3 bombons para 6 pessoas quanto cada pessoa vai receber

Molly: Vai receber metade meio

Neville: A metade é 0,5. São todas iguais, mesmo tendo números diferentes, como elas são iguais os resultados são iguais.

Discussão coletiva, aula de investigação, 2021.

Assim como evidenciado no trabalho desenvolvido por Graça, Ponte e Guerreiro (2021), os excertos evidenciam o entendimento do significado quociente, sendo possível perceber a compreensão de que se trata de uma partilha equitativa, que a fração representa um número e não dois números separados, evidenciando a compreensão de número racional e da fração representando uma divisão.

No ensino fundamental, as frações são apresentadas inicialmente como relação parte-todo, representam partes, números menores que a unidade, que foi dividida em partes iguais. No entanto, em seguida, é usualmente confrontada com a

definição de frações impróprias. Para assim explicitar a ideia da fração representando um quociente (divisão) (LOPES, 2008). Porém, ao fazer essa transição de significados de forma precoce, ou seja, sem que o aluno tenha se apropriado do significado parte-todo, por vezes é responsável por uma lacuna na aprendizagem. Evidenciando a importância do ensino transitar pelos diferentes significados de frações de forma consistente.

O processo de significação assume fundamental importância no desenvolvimento do raciocínio matemático, visto que a partir dessa compreensão de significado se torna possível estabelecer as conexões necessárias para formular, testar e justificar conjecturas (MATA-PEREIRA, 2012). No decorrer da aula de investigação, a partir das respostas para as questões e, principalmente, nos momentos de discussão coletiva, observamos que os alunos conseguiram compreender que o numerador se refere ao número de partes iguais que cada participante recebe e que o denominador nomeia essas partes. Compreenderam, ainda, que a partir desses é possível realizar divisões obtendo números inteiros ou decimais, evidenciando a utilização do significado de quociente para a resolução da tarefa. A partir da compreensão deste significado, os alunos ampliaram a compreensão sobre a relação de equivalência entre as frações, visto que durante a discussão coletiva, puderam confrontar as representações e as conclusões.

Razão, associada à relação ou comparação entre duas variáveis que não necessariamente são a parte e o todo de uma unidade (MENEZES, MORAES, 2018), também foi explorada a partir da tarefa. A questão 6 da tarefa proposta favoreceu este aspecto.

| |
|---|
| 6- Compare as frações das questões 3 e 5. O que podemos concluir? Explique. |
| |
| |
| |

Figura 13. Atividade 1 – Questão 6
Elaborado no estudo de aula (2021)

A referida questão solicitava que os alunos comparassem as frações obtidas nas questões anteriores. A aluna Mila respondeu que as duas frações referiam-se as divisões realizadas no hexágono, enquanto o aluno Stieve afirmou que as duas frações representam a mesma quantidade, embora apresentassem numeradores e

denominadores diferentes. De maneira análoga, o aluno Petry justificou que ambas as frações representavam a metade.

6- Compare as frações da questão 3 e da questão 5. O que podemos concluir? Explique.

1, 3. As duas atividades tem a figura dividida de 2 e 6. maneiras diferentes, mas representam a metade.

Figura 14. Resposta questão 6, atividade 1, aula de investigação.
Elaborado por Petry (2021)

Os alunos conseguiram relacionar e comparar as quantidades de partições realizadas sobre o hexágono, conforme destaca Luna.

d) Reescreva aqui as quantidades dos alvéolos das cores 3 e 5. Compare essas quantidades. Qual relação é possível fazer entre elas? Essa relação pode ser vista entre outras das cores de alvéolos? Exemplifique.

Cor 3-6 a relação é que a cor 3 é a metade da
Cor 5-12 cor 5 e a mesma é a divisão da cor 3.

Figura 15. Resposta letra d questão 3, atividade 2, aula de investigação.
Elaborada por Luna (2021)

Neste sentido, o aluno George expressou o significado de razão para associar as quantidades de alvéolos de cada uma das cores solicitadas na questão.

Considerando as frações que representam as quantidades de cores em relação ao favo, indique:

i) a fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 1 e 2 juntas.

Eu juntei as cor 1 e 2 que deu 12

$$\frac{12}{36}$$

ii) a fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 2 e 4 juntas.

Eu juntei as cor 2 e 4 que deu 15

$$\frac{15}{36}$$

iii) a fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 3 e 5 juntas.

Eu juntei as cor 3 e 5 que deu 18

$$\frac{18}{36}$$

iv) Anote suas conclusões e explique a estratégia utilizada.

Eu juntei as cores e depois fiz as frações

Figura 16. Resposta letra f questão 3, atividade 2, aula de investigação.
Elaborada por Luna (2021)

Os alunos utilizaram o significado de razão como forma de relacionar as quantidades, utilizando também o conceito de comparação e proporção. Sendo que a compreensão deste significado de frações permitiu aos alunos criar estratégias das questões da tarefa sobre os favos de mel das abelhas europeias.

A maneira como os alunos expõem suas conclusões e resultados e as estratégias e conceitos matemáticos mobilizados a partir da abordagem exploratória sinaliza o percurso pelos distintos significados de fração. Este aspecto é evidenciado nas falas dos alunos ao explicarem, por exemplo, que três sextos é o mesmo que três dividido por seis, ou que três está para seis assim como nove está para dezoito, ou ainda que a cada seis tenho três, etc. Transitar pelos diferentes significados exige um raciocínio complexo por parte dos alunos, ao realizar este movimento os alunos compreendem distintas formas de operar com um mesmo símbolo matemático, relacionando esses diferentes significados (PAULA, 2013).

Existem diversos obstáculos à aprendizagem de frações, começando pelo conceito de fração ser amplo e complexo. Sendo assim, a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas. O domínio do conceito de fração passa pela articulação de todas as significações, a fim de não restringir o aluno a apenas alguns significados o que dificulta a capacidade de construir um conhecimento amplo, sendo assim, se torna fundamental que os alunos sejam confrontados com todos os significados, para a compreensão destes (GRAÇA; PONTE; GUERREIRO, 2021).

Assim, a abordagem exploratória oportunizou aos alunos debruçar-se sobre uma tarefa instigante, a qual fez emergir ideias matemáticas distintas sobre frações, que foram sistematizadas na discussão coletiva (CANAVARRO, 2011), promovendo a mobilização dos diferentes significados de fração e, assim, favorecendo a aprendizagem matemática dos alunos.

4.2.2. Representações de Fração

Da mesma forma, a análise das resoluções dos alunos revelou que os alunos utilizaram representações pictóricas e numérica de frações, as quais discutimos a seguir.

Pictórica. A representação pictórica se constitui em uma linguagem de comunicação baseada em desenhos e outras formas de representação visual. Relativamente à representação pictórica, verificamos que essa forma de representar foi utilizada de forma majoritária pelos alunos. Os alunos sentem necessidade de se apoiar na representação pictórica, visto que a partir destas conseguem visualizar e solucionar as questões propostas, especialmente no estudo de frações.

As representações pictóricas têm fundamental importância para que os alunos concretizem a relação com a representação numérica. Neste sentido, na questão 1, da atividade 2, os alunos deveriam dividir os hexágonos de acordo com as partes que haviam sido solicitadas no enunciado.

ATIVIDADE 2

1- Divida os hexágonos da figura abaixo da seguinte forma:

- a) O hexágono A em duas partes iguais;
- b) O hexágono B em três partes iguais;
- c) O hexágono C em quatro partes iguais;
- d) O hexágono D em seis partes iguais;

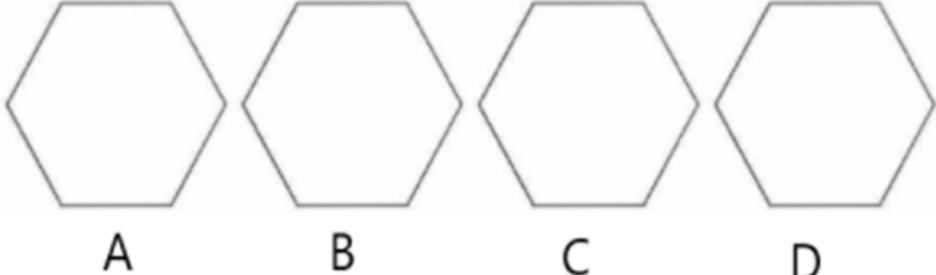


Figura 17. Atividade 2 – Questão 1
Elaborado no estudo de aula (2021)

Esta atividade revelou estratégias interessantes para a resolução da questão proposta. Ao dividir os hexágonos A, C e D, os alunos não demonstraram dificuldades, sendo que as estratégias foram semelhantes. No entanto, ao dividir o hexágono B em três partes iguais os alunos revelam que a questão foi desafiadora, pois precisaram fazer diversas tentativas para chegar a uma resposta. Isso pode ser observado nas rasuras no hexágono, nas justificações da questão e na discussão coletiva.

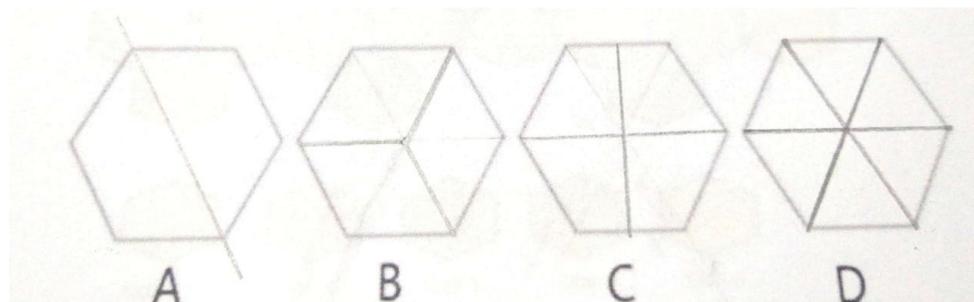


Figura 18. Resposta questão 1, atividade 2, aula de investigação.
Elaborado por Percy (2021)

O aluno Percy afirma que sua maior dificuldade foi ao dividir o hexágono B. Para realizar a divisão solicitada, primeiramente particionou o hexágono em seis partes iguais e, em seguida, apagou três linhas, revelando sua preocupação que as três partes fossem divididas de forma exatamente igual.

A dificuldade foi mais na de porque a resposta não levara em a enunciado não tinha como dividir em três partes mas eu percebi que era apenas dividir em seis partes e apaguei 3 partes em cada um para dar as tres partes exatamente iguais

Figura 19. Resposta questão 1, atividade 2, aula de investigação.
Elaborado por Percy (2021)

A aluna Luna, no entanto, utilizou outra estratégia “[...] achei o meio, coloquei um ponto e fiz as retas dividindo em três partes iguais.” Esta aluna concluiu que “[...] a partir deste exercício aprendemos a dividir um mesmo inteiro em várias partes, de formas diferentes, que isso é possível.” (Transcrição discussão coletiva, aula de investigação, 2021).

As representações pictóricas revelaram a percepção por parte dos alunos do conceito de fração equivalente. Nas questões da atividade 1, ao dividir o hexágono da questão 1 em duas partes iguais e colorir uma das partes, e na questão 4 ao dividir em seis partes iguais e colorir três dessas como pode ser observado na figura abaixo

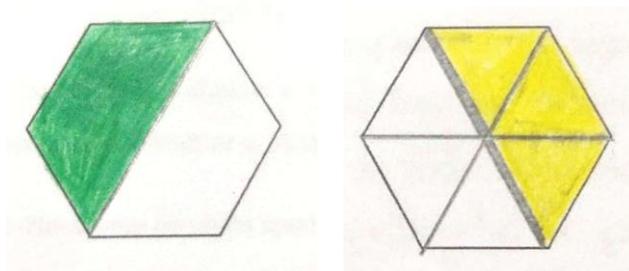


Figura 20. Resposta questão 2 e 4, atividade 1, aula de investigação.
Elaborado por Neville (2021)

A partir da representação pictórica realizada o aluno Neville conclui que “[..] mesmo que os dois hexágonos estão divididos de formas diferentes (mais ou menos partes) os dois representam metade, as duas frações representam a mesma quantidade” (transcrição discussão coletiva, aula de investigação, 2021). Reforçando a compreensão do conceito de fração equivalente a partir das representações pictóricas.

As representações pictóricas auxiliam no raciocínio, visto que facilita a visualização das informações do problema possibilitando a mudança de estratégias de resolução quando necessário. Assim, os alunos precisam ter habilidade para interpretar e formular representações, e desenvolver e comunicar as suas ideias (COX, 1999).

Neste contexto, as representações pictóricas adotadas pelos alunos foram decisivas para alcançar o objetivo proposto nas questões, ou seja, ao ser realizar a representação demonstra-se associação com o raciocínio e desempenha-se um papel fundamental na compreensão dos conceitos, visto que para essa compreensão é necessário fazer inferências fundamentadas usando representações (PONTE; QUARESMA, 2014).

Assim como Graça, Ponte e Guerreiro (2021), observamos que quando a representação pictórica não foi suficiente para a resolução e entendimento da questão, os alunos recorreram a representação numérica, evidenciando suas estratégias de resolução e diferentes abordagens para solucionar os problemas propostos.

Numérica. A representação numérica (escrita na forma a/b) figurou nas estratégias de resolução, especialmente quando os alunos foram solicitados a responder a questão 1 (atividade 1), a qual questionava: a parte colorida representa qual parte do hexágono inteiro?

Atividade 1

Questões

1- As abelhas formam suas colmeias a partir da fabricação de favos. Cada favo é formado pelo ladrilhamento de alvéolos. As abelhas europeias formam os favos a partir do ladrilhamento de alvéolos que possuem o formato de hexágono, como na figura abaixo.

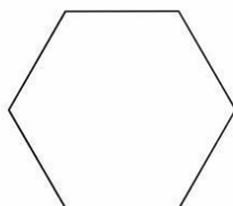


Figura 21. Atividade 1 – Questão 1
Elaborado no estudo de aula (2021)

O aluno Bill fez a representação pictórica, em seguida, respondeu “[...] representa a metade da figura, $\frac{1}{2}$, pois ela foi dividida em dois” (Resposta questão 1, atividade 1, aula de investigação, 2021). É oportuno ressaltar que esta foi a primeira questão proposta, sendo que não havia sido mencionado que se tratava do tópico frações. O aluno utilizou ambas as representações, pictórica e numérica, para responder a questão, o que pode indicar que os alunos sentem que é apropriado usar uma representação formal, a fração, para darem a sua resposta.

As representações numéricas foram utilizadas pelos alunos para melhor compreensão das questões propostas e melhor sistematização das mesmas. Consequente, o raciocínio matemático do aluno é evidenciado por meio das representações, assumindo importante papel na aprendizagem. Assim, conhecer e flexibilizar as diferentes representações pictórica e numérica das frações permite aos alunos melhor compreensão de conceitos e significados na resolução dos problemas, permitindo efetuar conversões para representações mais adequadas para si ou para o seu modo de raciocinar (POST, *et al.*1993).

A partir da tarefa elaborada para a aula de investigação priorizamos a descoberta de estratégias de resolução com a utilização e flexibilização de diversas representações. Assim, a tarefa propiciou aos alunos a desenvolverem o seu raciocínio, um aspeto fundamental do ensino da Matemática (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012; PONTE; QUARESMA, 2014).

Foram promovidos, por meio da abordagem exploratória, a construção de conceitos, o uso de representações, o uso de definições e propriedades dos objetos matemáticos para chegar a conclusões, ou seja, os alunos utilizaram diferentes representações escolhendo e usando uma forma adequada para resolver as questões propostas.

Na abordagem exploratória, os alunos são desafiados com tarefas matemáticas exploratórias, cuja resolução deve partir de estratégias formuladas por eles mesmos, oportunizando-os expressar e discutir suas estratégias e modos de pensar e, também, refletir sobre as ideias e estratégias dos outros (RICHIT; PONTE, 2020).

A realização das tarefas, de cunho exploratório, permite a discussão das diferentes estratégias de resolução e suas representações, bem como a sua adequação em diferentes situações o que possibilita a ampliação do conhecimento das várias formas de resolver os problemas (PONTE; QUARESMA, 2016). Sendo assim, as representações matemáticas, sejam elas pictóricas, numéricas ou verbais se revelam como extremamente positivas no desenvolvimento da compreensão dos significados e das relações entre estes. Dessa forma, as representações revelaram-se fundamentais para a aprendizagem da equivalência de frações, permitindo que os alunos visualizassem e compreendessem este conceito.

4.2.3. Justificações e conclusões

A observação das ações dos alunos durante a realização da tarefa revelou que eles não estavam familiarizados com a elaboração de justificações (ou justificativas) para os resultados encontrados ou a formulação de conclusões e, portanto, esses aspectos trouxeram desafios para os grupos. Esse aspecto também pode ser observado durante as entrevistas realizadas após a aula de investigação.

Ao serem questionados sobre quais aspectos da aula de investigação consideraram diferenciados em relação às aulas que comumente frequentam, os alunos relataram não estarem habituados a explicar e justificar como chegaram na resposta de determinada questão, fazendo com que precisassem raciocinar e formular justificativas, o que para os alunos é algo desafiador.

Esse aspecto evidenciou a importância dos alunos aprenderem a justificar as suas afirmações desde o início da escolaridade, assim à medida que avançam no percurso escolar os alunos dispõem de conhecimentos e ferramentas matemáticas que lhes possibilitem justificarem com embasamento matemático e de forma mais geral (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012).

Justificações. Ao formular e externalizar as suas justificações o aluno expõe seu pensamento descrevendo o seu raciocínio (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE; 2019). Para que as justificações sejam válidas, os alunos devem utilizar (i) conhecimentos anteriores, (ii) propriedades ou conceitos matemáticos, ou (iii) contraexemplos que refutem a afirmação. Não se baseando na autoridade, imposição ou mesmo soluções de outros (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012). Embora a formulação de justificativas para as resoluções foi um desafio para os alunos, essas foram válidas e oportunizaram explorar e compreender o tópico frações.

A partir das atividades que embasaram a abordagem exploratória, as duplas foram convidadas a realizar justificações, as quais revelam o raciocínio que embasou a resolução das questões. Os alunos recorreram a diversas formas válidas de justificar suas estratégias e conclusões, usando exemplos interessantes, a exemplo de quando a aluna Luna justifica sua estratégia de dividir o hexágono em 6 partes e colorir 3 dessas, comparando a ideia de cortar uma pizza em seis pedaços e comer três. No entanto, também utilizam de linguagem matemática formal, quando por exemplo, o aluno Neville justifica “[...] somei as frações, somente o numerador, porque o denominador representa o mesmo inteiro”, se referindo a adição de frações com denominadores iguais abordada na tarefa, ambas as justificativas sinalizam compreensão em relação ao significado da relação parte-todo.

Além disso, os alunos desenvolveram justificações para explicar a não resolução da questão, tal como o aluno Jack: “[...] na letra B não pinte a metade, porque é um número ímpar e não ia fechar a quantidade igual de partes”, ao não conseguir realizar a questão em que deveria colorir metade de um hexágono que estava dividido em nove partes iguais.

Em contrapartida, algumas justificações revelam a ampliação da compreensão para além do que a questão propunha. Isso foi observado na justificativa do aluno Percy, quando afirma: “[...] pinte 4 partes e meia, porque 9 dividido por dois é igual a 4,5, esse é um número decimal, todo número real pode ser dividido por dois”. Esta justificação evidencia a compreensão do significado de

quociente nas frações e aponta para uma possível generalização ao afirmar que todo número pode ser dividido por dois.

A justificção sobre o significado de medida e operador foi assim elaborada por Molly: “[...] para somar as cores 1, 3 e 4 do favo não podíamos contar e colocar em uma fração, porque eles têm tamanho diferentes, então, até os denominadores eram diferentes, por isso multipliquei o favo 3 por dois para ter o mesmo tamanho que o favo 4, depois somei os alvéolos da cor 1 chegando na fração $7/36$ ”.

Ao comparar as quantidades de alvéolos dos favos 3 e 4 e suas respectivas frações, o aluno George justifica sua resposta: “[...] as duas quantidades são pares, uma é o dobro da outra”. Comparando o todo das duas frações e relacionando que são proporcionais. Essa justificativa aponta para a compreensão do significado de fração como razão, essencial para o entendimento de equivalência.

A análise evidenciou, portanto, que a abordagem exploratória oportunizou aos alunos explorar o conceito de frações em seus diferentes significados, a partir do que puderam desenvolver a compreensão mediante o pensar matematicamente e o desenvolvimento do raciocínio a partir de generalizações e justificações (VALE *et al.*, 2018; RICHIT, TOMKELSKI, RICHIT, 2021).

Conclusões. Ao serem convidados a sistematizar as conclusões sobre a resoluções e especialmente sobre o conceito de frações, os alunos por meio de suas respostas e da discussão coletiva demonstraram conclusões que revelam a compreensão dos significados de fração.

O aluno Percy afirma que: “não importa a quantidade de partes que a figura foi dividida, se pintarmos a metade dela, as frações sempre representam o mesmo valor”. Essa conclusão evidencia a compreensão do conceito de equivalência de frações.

Da mesma forma, a aluna Jhenny conclui, na justificativa da sua resposta, que “ $\frac{1}{2}$ é 0,5 e $\frac{3}{6}$ também é 0,5, mesmo que as frações sejam representadas por números diferentes elas podem representar o mesmo valor”. A conclusão da aluna demonstra a compreensão de equivalência, bem como o significado de quociente.

A aluna Molly destaca: “não podemos somar a parte de baixo das frações porque senão passa do valor do todo”. Essa conclusão ressalta o significado de relação parte-todo, compreendendo este conceito a aluna consegue entender o algoritmo para adicionar frações.

Relativamente a aula de investigação realizada, os alunos em sua maioria ressaltaram que nunca haviam tido uma experiência assim, que a tarefa foi desafiadora e cansativa por conter várias questões. Entretanto, destacam que aprenderam na medida em que foram desafiados a justificar suas estratégias. A entrevista de um aluno destaca esse aspecto: “[...] entender como e por que chegou na resposta”, ou seja, raciocinar e formular conjecturas para obter as respostas e a partir disso generalizar o que possibilita o aprendizado concreto.

Nesse sentido, consideramos que a tarefa sobre os favos de mel das abelhas europeias desencadeou um processo dinâmico de conjecturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos, ou seja, generalizações e justificações que para o raciocínio matemático são essenciais (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011).

As justificações e conclusões expostas nesta seção foram retiradas das atividades realizadas e das discussões coletivas, e transcritas no corpo do texto, o foco não é evidenciar qual tarefa proporcionou determinada narrativa, mas sim explicitar como a tarefa exploratória oportunizou aos alunos formularem justificativas, chegarem a conclusões e generalizações, evidenciando a compreensão dos significados de frações e a importância da comunicação matemática para esta compreensão. Assim, consideramos que a abordagem exploratória favoreceu a autonomia dos alunos e oportunizou uma experiência de comunicação de suas ideias matemáticas na discussão coletiva (RICHIT; TOMKELSKI; RICHIT, 2021), assim como na entrevista realizada após a atividade, em face a qual foram solicitados a comentar alguns aspectos das resoluções da tarefa.

4.3 CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DOS ALUNOS

A aula de investigação do estudo de aula, baseado na abordagem exploratória, decorreu em etapas assim definidas: (i) apresentação e interpretação da tarefa, (ii) trabalho autônomo dos alunos em pares, e (iii) discussão coletiva. O tópico matemático escolhido no estudo de aula foi frações, visto que as professoras participantes justificaram que este conteúdo comumente é considerado difícil pelos alunos. Ao longo da trajetória profissional as professoras observaram que os alunos apresentam dificuldades em compreender e representar frações, assim como em resolver operações matemáticas envolvendo esse tópico. Além disso, no

questionário respondido pelos alunos, eles afirmam que sentem dificuldade em resolver problemas que envolvem frações. A dinâmica de interação promovida pela professora que lecionou a aula e investigação objetivou valorizar as contribuições dos alunos, valorizando a argumentação e contra-argumentação apresentada por eles.

Ao realizar a tarefa, na perspectiva da abordagem exploratória, os alunos foram oportunizados a discutir diferentes estratégias de resolução, mobilizar diferentes representações, formular hipóteses e justificar suas conclusões. A análise das estratégias deles, das interações entre eles e das justificativas para os resultados apresentados revela que os alunos tiveram a oportunidade de compreender os diferentes significados das frações e relacionar esses diferentes significados, realizando aprendizagens sobre esses aspectos. Da mesma forma, a tarefa oportunizou aos alunos mobilizar e comparar diferentes formas de representar frações, assim como foram desafiados a justificar suas conclusões e propor, quando possível, alguma generalização.

A tarefa possibilitou aos alunos recordarem a relação parte-todo para relacionar e representar diferentes partes dos hexágonos, permitindo que eles visualizassem um padrão na forma de colorir os hexágonos e consecutivamente concluindo que as frações correspondentes eram equivalentes.

Além disso, os alunos puderam propor e desenvolver estratégias de resolução apoiadas em representações pictóricas e numéricas, além de verbalizarem essas estratégias nos momentos de discussão em pares ou coletivamente, ampliando a capacidade de usar os diversos tipos de representações.

A realização da tarefa oportunizou aos alunos alcançar o objetivo proposto para a aula de investigação que consistia em levá-los a compreender o conceito de fração e os seus significados, assim como realizar operações envolvendo frações. No entanto, na realização da tarefa, os alunos revelam algumas dificuldades significativas. A primeira, em relação à compreensão do enunciado das questões, por conter termos desconhecidos para os alunos. A segunda refere-se à insegurança que algumas duplas revelaram no desenvolvimento das questões. Por fim, o fato de não estarem acostumados a explicar e justificar suas resoluções.

Contudo, a abordagem exploratória oportunizou aos alunos explorar diferentes significados de frações, recorrer a diferentes representações de frações,

assim como levou-os a formular justificações e conclusões sobre suas resoluções e descobertas matemáticas.

No entanto, os aspectos evidenciados não sugerem que a tarefa ou mesmo a abordagem exploratória possam resolver os problemas de aprendizagem sobre frações ou da Matemática, mas possibilitam favorecer alguns aspectos, uma vez que proporciona papel ativo ao aluno, além de promover construção de conhecimento coletivo por meio das discussões e interações; propicia reflexões tanto aos alunos como aos professores, especialmente sobre como desenvolver no aluno a capacidade de formular conjecturas e generalizações. Nessa perspectiva, a abordagem exploratória tem potencial para promover mudanças no ensino da Matemática com vistas a favorecer a aprendizagem dos alunos.

O estudo de aula desenvolvido desvelou algumas possibilidades de favorecer a participação do aluno no processo de abordar conceitos matemáticos, que contribuem para a sua aprendizagem. Além disso, a observação das ações dos alunos durante o trabalho autônomo sobre a tarefa e durante a discussão coletiva permitiu-nos conhecer e compreender melhor sobre a maneira como o aluno pensa quais estratégias, modos de raciocinar e representações mobiliza para resolver problemas de natureza mais aberta, como as tarefas exploratórias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada buscou 'evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas de alunos do 7º ano sobre frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula'. A análise incidiu sobre a aula de investigação, 3.ª etapa de estudo de aula que foi realizada em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Santa Terezinha, localizada no município de Faxinal dos Guedes, em Santa Catarina.

A análise do material empírico do estudo evidenciou três aspectos relacionados à aprendizagem matemática dos alunos sobre fração, os quais constituíram as categorias de análise deste estudo. São elas: (i) significados de fração, (ii) representações de fração e (iii) justificações e conclusões dos alunos sobre frações, possibilitando evidenciar aprendizagens importantes.

Relativamente aos distintos *significados de fração* explorados a partir da tarefa elaborada, a análise apontou que os alunos foram oportunizados a mobilizar e explorar conhecimentos e procedimentos relacionados ao tópico 'frações'. Os alunos relembrou e aprofundaram o significado da relação parte-todo; o significado de medida permitiu aos alunos compreenderem frações próprias e impróprias, assim como a grandeza de uma fração; o significado de operador nas frações possibilitou aos alunos a compreensão de equivalência de frações; a compreensão do significado de quociente possibilitou aos alunos realizar divisões obtendo números inteiros e decimais; o significado de razão foi utilizado para relacionar as quantidades, associando também o conceito de comparação e proporção. Por conseguinte, a compreensão dos significados de frações permitiu aos alunos criarem estratégias para a resolução das questões propostas, desenvolvendo capacidades matemáticas.

A *representação de fração* foi um importante aspecto evidenciado na análise, caracterizando as formas pictórica e numérica de frações. A tarefa, por sua estrutura e objetivo, oportunizou aos alunos mobilizar e relacionar diferentes formas de representar frações mostrando flexibilidade na escolha da representação mais adequada. As representações pictóricas revelaram a percepção por parte dos alunos do conceito de fração equivalente. As representações numéricas foram utilizadas pelos alunos para melhor compreensão das questões propostas e melhor

sistematização das mesmas. Assim, o raciocínio matemático dos alunos foi evidenciado por meio das representações, revelando importantes compreensões.

Além disso, a tarefa propiciou aos alunos discutir soluções e elaborar *justificações e conclusões sobre frações*. A análise apontou que a partir da tarefa exploratória os alunos formularam justificativas, chegaram a conclusões e generalizações, evidenciando a compreensão dos significados de frações e a importância da comunicação matemática para esta compreensão.

Assim, consideramos que o estudo de aula favoreceu a aprendizagem dos alunos sobre o tópico frações, devido, especialmente, a abordagem exploratória que embasou a aula de investigação. A tarefa sobre colmeias de abelhas europeias, cuidadosamente elaborada para explorar diferentes significados e representações de fração, favoreceu a aprendizagem na medida em que as professoras levaram em conta as principais dificuldades dos alunos nesse tópico, assim como buscaram antecipar as possíveis dificuldades para resolvê-la. A tarefa foi organizada de tal forma que priorizou organizar questões em nível crescente de desafio, com enunciados bem elaborados e compreensíveis, a fim de possibilitar a generalização e compreensão de conceitos matemáticos.

Evidenciamos, assim, as contribuições da abordagem exploratória para a construção de conhecimento a partir da sistematização de ideias na medida em que o desenvolvimento das tarefas pressupõe ênfase nas discussões realizadas em pares e coletivamente, possibilitando a compreensão de conceitos, operações e procedimentos matemáticos, assim como a construção de conhecimentos.

A abordagem exploratória apresenta muitos aspectos a serem explorados, possibilitando a concretização dos objetivos propostos nas recomendações curriculares e para além deles. A abordagem exploratória constitui-se em contexto para encorajar os alunos a construir as suas estratégias de resolução, a usar distintas representações, a explicar os seus raciocínios, a argumentar sobre seus posicionamentos, bem como a desenvolver formas de raciocinar como a generalização e a justificação, fundamentais para a compreensão de conceitos em Matemática.

Nesta perspectiva, consideramos que as tarefas exploratórias favoreceram a aprendizagem dos alunos relativamente ao conceito de fração. No entanto, identificamos dificuldades por parte dos alunos no que diz respeito à formalização das justificações e conclusões, sem o devido rigor matemático ou uso inadequado

da linguagem, em particular nos momentos de discussão coletiva e generalização do raciocínio, o que pode ser justificado pelo fato de os alunos não estarem habituados a esta prática. Essa dificuldade também é evidenciada no entendimento e interpretação dos enunciados das tarefas visto que a linguagem matemática utilizada nessas tarefas não é rotineira aos alunos, ainda que no estudo de aula durante a elaboração das tarefas para a aula de investigação houve a preocupação em formular questões com uma linguagem compreensível aos alunos.

Além disso, consideramos que trabalho autônomo do aluno na realização da tarefa e sua postura crítica na discussão coletiva constituem desafios devido à falta de familiaridade. Neste sentido, um segundo estudo de aula nesta mesma turma com um tópico matemático diferente poderia trazer avanços em relação a estes aspectos, em vista que os alunos teriam familiaridade com a abordagem e algumas das dificuldades observadas poderiam ser amenizadas ou não ocorrer.

Por fim, embora os alunos consideram que a aula foi interessante, percebemos que a tarefa estava extensa, pois os alunos mostraram-se cansados ao final de cada atividade que constituía a tarefa. Ainda sobre a formulação da tarefa, percebemos que poderíamos ter explorado melhor as representações, variando-as e relacionando-as ambas na mesma questão. Poderíamos também ter desafiado os alunos a explorarem a relação entre as representações nas justificações e conclusões.

Desse modo, são necessários mais estudos examinando as particularidades de cada etapa dos estudos de aula e da abordagem exploratória. Por exemplo, examinando de que forma e quais aspectos da intervenção do professor ou da própria estrutura da tarefa elaborada no estudo de aula sobre determinado tópico potencializa ou não a discussão entre pares ao realizar o trabalho autônomo, bem como quais modos de promover a discussão coletiva de maneira a encorajar os alunos a externar as suas dúvidas, o seu posicionamento, ou seja, ter papel ativo e assumindo postura crítica.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educ. Matem. Pesq.**: São Paulo, v.21, n.2, pp.466-490, 2019.

ARAUJO, W. R. **Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de lesson study**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas – SP, 2018.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2006.

BALDIN, Y. Y. **O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil**. In: XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão, 2009, São Paulo, SP. Anais do SBPN 09. São Paulo, SP: SBPN, 2009.

BATISTA, C. C. **O estudo de aula na formação de professores de Matemática para ensinar com tecnologia: a percepção dos professores sobre a produção de conhecimento dos alunos**. 2017. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Rio Claro, 2017.

BEHR, M. J. *et al.* **Rational number concepts in acquisition of mathematics concepts and processes**. Lesh, R. e Landau, M. (ed.). New York: Academic Press, 1983.

BEZERRA, R. C. **Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study**. 2017. 210 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2017.

BICUDO, M. A. V. **Educação Matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento**. Campinas: Mercado das Letras, 2013.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 309–365.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Qualitative Research for Education**. Boston: Allyn and Bacon, 1982.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução as teorias e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOSTON, M.; SMITH, M. Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. **Journal for Research in Mathematics Education**, 2009. P. 119-156.

BREDA, A. *et al.* El Papel de la Fase de Observación de la Implementación en la Metodología Estudio De Clases. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**. 2021, v. 35, n. 69, pp. 263-288.

CANAVARRO, A. P. **Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios**. Lisboa: Universidade de Évora, 2011.

CARDOSO, C. **Estudos de aula: Contributo para uma cultura participada de desenvolvimento profissional e da qualidade do ensino e das aprendizagens**. In: A página da educação. n. 161, p. 8. Lisboa, 2006.

CARRIJO NETO, L. A. **A pesquisa de aula (lesson study) no aperfeiçoamento da aprendizagem em matemática no 6º ano segundo o currículo do estado de São Paulo**. 2013. 166 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

CAVALCANTI, E. M. S.; GUIMARÃES, G. L. Os significados de fração em livros didáticos das séries iniciais. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2008, Recife. **Anais...** Pernambuco: UFPE, 2008. p.1-12.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307.

COELHO, C. M. **Raízes do paradigma indiciário**. Ensaio, 2007.

COX, R. Representation construction, externalised cognition and individual differences. **Learning and Instruction**, 1999, v. 9, pp. 343-363.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 16ª ed. Campinas: Papirus, 2008.

DAY, C. **Developing teachers: The challenges of lifelong learning**. London: Falmer, 1999.

DRECHMER, P. A. O.; ANDRADE, S. V. R. **O estudo de frações e seus cinco significados**. 2011. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1959-8.pdf?...> Acesso em: 07 agosto de 2021.

ESTRELLA, S.; LORCA, M. A.; OLFOS, R. **Lesson Study in Chile: a very promising but still uncertain path**. In M. Quesada et al. Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues. Springer. (En revisión), 2017.

FAXINAL DOS GUEDES. **Histórico.** Disponível em: <https://www.faxinal.sc.gov.br/cms/pagina/ver/codMapaltem/29371>. Acesso em: 21 de outubro de 2020.

FAXINAL DOS GUEDES. PPP. **Projeto Político Pedagógico:** Escola Municipal Santa Terezinha. Faxinal dos Guedes: 2020.

FELIX, T. F. **Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do estado de São Paulo, com a metodologia da pesquisa de aulas (Lesson Study).** 2010. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa.** 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FUJII, T. **Lesson Study and Teaching Mathematics Through Problem Solving: The Two Wheels of a Cart.** In: QUARESMA, M.; WINSLOW, C.; CLIVAZ, S.; PONTE, J. P.; SHÚILLEABHÁIN, A. N.; TAKAHASHI, A. *Mathematics Lesson Study Around the World: Theoretical and Methodological Issues*, 2018.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GRAÇA, S. I.; PONTE, J. P.; GUERREIRO, A. Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo...! *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo: PUC/SP, v. 23 n. 1, p. 683-712, 2021.

ISODA, M.; ARCAVI, A.; LORCA, A. M. **El estudio de clases japones em matemáticas:** su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2007.

JESUS, C. C. **Perspectiva do ensino exploratório:** promovendo aprendizagens de professores de matemática em um contexto de comunidade de prática. 2017. 200 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

LEWIS, C. **Lesson study:** A handbook of teacher-led instructional change. Philadelphia, PA, USA: Research for Better Schools Inc, 2002.

LEWIS, C.; HURD, J. **Lesson study step by step:** How teacher learning communities improve instruction. Portsmouth, NH: Heinemann, 2011.

LEWIS, C.; PERRY, R.; HURD, J. **Improving mathematics instruction through lesson study:** A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 12, p. 285-304, 2009.

LINS, R. C.; SILVA, H. Frações. Fascículo 4, In: BRASIL. **Pró-Letramento:** Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do

Ensino Fundamental: matemática. Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. p. 08 – 39.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M. V. **Fracciones**: La relacion parte-todo. Sintesis, 1997.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, vol. 21, n. 31, 2008, pp. 1-22.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MANDARINO, M. *et al.* **Escutando aprendizes**: implicações para a pesquisa em ensino de matemática. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Caderno de Resumos, p. 24, 2009.

MARINS, A. S. **Conhecimentos profissionais mobilizados/desenvolvidos por participantes do PIBID em práticas de ensino exploratório de matemática**. 2019. 225 f. Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR, 2019.

MARINS, A. S.; TEIXEIRA, B. R.; SAVIOLI, A. M. P. Práticas de Ensino Exploratório de Matemática e a Mobilização/Desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino por Participantes do PIBID. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. 2021, v. 35, n. 69, pp. 314-342.

MARTINS, M.; MATA-PEREIRA, J.; PONTE J. P. Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. 2021, v. 35, n. 69, pp. 343-364.

MATA-PEREIRA, J. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**. 2018. 198 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa, Portugal, 2018.

MATA-PEREIRA, J. PONTE, J. P. Raciocínio matemático em conjuntos numéricos. **Quadrante**. 2012, v. 21(2), pp. 81-110.

MENA-LORCA, A. M. **El estudio de clases japonés en perspectiva**. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2007.

MENEZES, F.; MORAES, L. Um estudo de caso sobre o ensino-aprendizagem dos diferentes significados de frações em uma escola de educação básica. **Educação Pública**, Rio de Janeiro, 2018.

MERICHELLI, M. A. J.; CURI, E. Estudos de aula (“lesson study”) como metodologia de Formação de professores. **REnCiMa** - Educação Matemática, v.7 , n.4, p. 15-27, 2016.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental**.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC- SP, 2005.

MONTOYA GONZALEZ, M. S. Reflexiones de profesores en un escenario de Estudio de Clases para el desarrollo profesional. **Estudios pedagógicos**, Valdivia , v. 42, n. 4, p. 127-144, 2016 .

MOTA, H. D. F. **Desenvolvimento profissional de futuros professores de matemática na exploração de um caso multimídia na perspectiva do ensino exploratório**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR, 2016.

MURATA, A. Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart *et al.* (Eds.), **Lesson study research and practice in mathematics education**. New York: Springer, 2011.

NUNES, C. SILVESTRE, A. I. JACINTO, H. **A abordagem lesson study no ensino de equações do 1.º grau: um caso de desenvolvimento profissional**. In: XXIII SIEM. Coimbra, 2012.

OLFOS, R.; MORALES, S.; ESTRELLA, S. Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. **Educare** [online]. 2015, vol.19, n.3, 355.

OLIVEIRA, H. N. **Lesson Study: uma experiência com três professores de inglês da rede pública estadual em Santarém – PA**. 2018. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2018.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Vol. XXII, n. 2, 2013.

OLIVEIRA, J. P.; BRACKEN, S.; NAKANO, N. Indicadores Preliminares do Uso da Lesson Study Como Prática de Ensino Capaz de Viabilizar uma Perspectiva Inclusiva na Educação Superior. **Revista Brasileira de Educação Especial**. 2021, v. 27.

OLIVEIRA, K. L. S. J. **Lesson Study na formação inicial de professores: uma experiência com licenciandos de letras-inglês da Universidade Federal do Oeste do Pará**. 2018. 165 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação), Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/handle/123456789/243>. Acesso em: 13 de nov. 2021.

PAULA, M. R. **Reflexões sobre possíveis significados para frações**. Simpósio Pedagógico e Pesquisas em Educação, 2013.

PONTE, J. P. **O desenvolvimento profissional do professor de matemática**. Revista: Educação e Matemática, 1994.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In:_____. **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. **Estudo de caso em educação matemática**. Lisboa: Bolema, 2006.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; QUARESMA, M. Exploratory activity in the mathematics classroom. In: LI, Y.; SILVER, E. A.; LI, S. (Eds.). **Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices**. Dordrecht: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática – Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. *Et al.* **Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula**. In: Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática, n. 5, p. 7-24, 2012.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Praxis Educativa**. Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul/dez. 2012.

PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**. In: Práticas profissionais de professores de matemática. 2014.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**. 2014, v. 28, n. 50.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 868 - 891, dez. 2016.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, n.30, v.56, p. 868-891, 2016.

PONTE, J.P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M.; VELEZ, I. Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. **Relime**, México, v.20, n.1, 2017.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. **Exercícios, problemas e explorações**: perspectivas de professoras num estudo de aula. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/289659808_Exercicios_problemas_e_exploracoes_Perspetivas_de_professoras_num_estudo_de_aula. Acesso em 31 de outubro de 2020.

POST, T.; CRAMER, K.; BEHR, M.; LESH, T.; HAREL, G. Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), **Rational numbers: An integration of research** (pp. 327-358). Lawrence Erlbaum, 1993.

QUARESMA, M.; PONTE, J. P. Comunicação, tarefas e raciocínio: aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. **Zetetiké**, Campinas, v. 23, n. 2, p. 297-310, jul./dez. 2015.

QUARESMA, M.; PONTE, J. P. Dinâmicas de Reflexão e Colaboração entre Professores do 1.º Ciclo num Estudo de Aula em Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática** [online]. 2019, v. 33, n. 63, pp. 368-388.

RICHIT, A. Desenvolvimento Profissional de Professores Universitários em Lesson Study. In: Proceedings of 9th International Congress of Educational Sciences and Development, 9., **Anais...** 2021.

RICHIT, A. Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v.25, p. 1-24, 2020.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica**: repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

RICHIT, A.; PONTE, J. P. Conhecimentos profissionais evidenciados em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. **Educação em Revista**. Belo Horizonte. 36, 1-29, 2020.

RICHIT, A.; PONTE, J.P. A colaboração profissional em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. **Boletim de Educação Matemática**, v. 33, n. 64, p. 937-962, 2019.

RICHIT, A.; PONTE, J.P. Teachers' Perspectives about Lesson Study. **Acta Scientiae** - Revista de Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, v.19, n.1, p.20-30, 2017.

RICHIT, A.; PONTE, J.P.; QUARESMA, M. Aprendizagens Profissionais de Professores Evidenciadas em Pesquisas sobre Estudos de Aula. **Boletim de Educação Matemática**, v. 35, n. 70, p. 1107-1137, 2021.

RICHIT, A.; PONTE, J. P.; TOMASI, A. P. Aspects of Professional Collaboration in a Lesson Study. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v.16, n.2, 2021. <https://doi.org/10.29333/iejme/10904>

RICHIT, A.; PONTE, J.P.; TOMKELSKI, M.L. Desenvolvimento da prática colaborativa com professores dos anos iniciais em um estudo de aula. **Educar em Revista**, Curitiba, v. 36, p. 1-24, 2020.

RICHIT, A.; PONTE, J.P.; TOMKELSKI, M.L. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 100, n. 1, p. 54-84, 2019.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M.L. Aprendizagens profissionais de professores de matemática do ensino médio no contexto dos estudos de aula. **Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 22, n. 3, p. 2-27, 2020.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M.L.; RICHIT, A. Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. **Revista Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 23, n.5, p.2-27, 2021.

RODRIGUES, M. A. **Estudo de aula em comunidades de prática para o ensino de Física**: um estudo de caso em Teresina – PI. Tese (Doutorado em Educação Científica, Matemática e Tecnológica). Universidade de São Paulo – São Paulo, 2019.

RODRIGUES, R. V. R.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de futuros professores de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. 2018, v. 32, n. 62, pp. 967-989.

SIBBALD, T. **The relationship between lesson study and self-efficacy**. *School Science and Mathematics*, v.8, n.109, , p. 450-460, 2009.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 301 f. Tese de doutorado. PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

SOUZA, M. A.; WROBEL, J. S.; BALDIN, Y. **Lesson Study como meio para a formação inicial e continuada de professores de Matemática**. Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin: 2018. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2018.020>. Acesso em: 12 de julho de 2020.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. **Orchestrating productive mathematical discussions**: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340, 2008.

STIGLER, J.W.; HIEBERT, J. Lesson study, improvement and the importing cultural routines. **ZDM Mathematics Education**, n.48, v.4, p. 581-587, 2016.

TOMASI, A.P. **Aspectos da Colaboração Profissional Docente Mobilizados em um Estudo de Aula (Lesson Study) no Contexto Brasileiro**. 102 f. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2020.

UFFS. **Linhas de Pesquisa – PPGE**. Disponível em: <https://www.uffs.edu.br/campi/chapeco/cursos/mestradoch/mestrado-em-educacao/linhas-de-pesquisa>. Acesso em: 04 de setembro de 2020.

UTIMURA, G.; CURI, E. **Nomeação dos prismas: descobertas e avanços de alunos e professoras dos anos iniciais do ensino fundamental**. In: Encontro de Produção Discente PUCSP/ Cruzeiro do Sul, 2014. Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul, v. 2 , n. 1, p. 134-145. São Paulo, 2014.

UTIMURA, G.; CURI, E. Nomeação dos prismas: descobertas e avanços de alunos e professoras dos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 4, n.1, p. 30-42, 2015.

UTIMURA, G. Z.; PONTE, J. P.; CURI, E. **O aprofundamento do estudo de aula para uma pesquisa de formação continuada de professores**. Campinas: VI SHIAM, 2017.

VIEIRA, I. E. G. **Tomada de Consciência e a Aprendizagem Docente: Análises da Reflexão no Contexto da Abordagem de Desenvolvimento Profissional dos Estudos de Aula de Matemática**. 212 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE 01



Estudo de aula (lesson study) – Matemática 7º ano Ensino Fundamental

Escola Municipal Santa Terezinha – Faxinal dos Guedes/SC
Secretaria Municipal de Educação de Faxinal dos Guedes

Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS – Campus Chapecó
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias - GEPEM@T



AULA DE INVESTIGAÇÃO - LESSON STUDY SC (2021)

ATIVIDADE 1

Introdução

A partir da pesquisa realizada sobre abelhas e colmeias, conte-nos o que você aprendeu sobre as características do favo de mel e dos alvéolos (5 minutos para relatar aos colegas o que aprendeu).

Apresentação da atividade 1

Os favos das abelhas europeias têm células unitárias em forma hexagonal, chamadas de alvéolos. Cada alvéolo do favo se encaixa perfeitamente aos alvéolos adjacentes. Isto é, os alvéolos hexagonais se unem ao longo de filas e filas, que se encaixam perfeitamente numa rede de favos.

Figura 1: Favo das abelhas europeias.



Fonte: Disponível em: <https://www.afe.com.br/artigos/quais-sao-os-principais-inimigos-das-abelhas>.

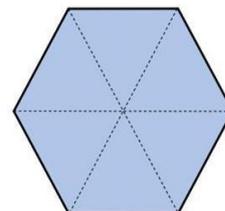
Favo: recipiente de cera, crivado de alvéolos, em que as abelhas depositam o mel.

Colmeia: instalação de abelhas preparada naturalmente por elas, ou artificialmente para criá-las.

Curiosidade: Devido ao formato hexagonal, é possível armazenar maior quantidade de mel em cada alvéolo, usando menor quantidade de cera para construí-lo. Ou seja, o formato hexagonal é vantajoso pelo fato de usar menor quantidade de cera para construí-lo e armazenar mais mel.

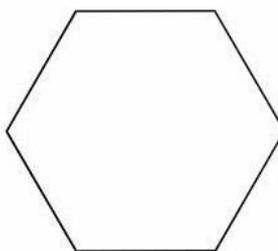
Hexágono

O prefixo grego *hexa* significa seis e o sufixo *gono* indica ângulo. A combinação desses dois prefixos forma a palavra hexágono, que é a denominação do polígono que possui seis lados e seis ângulos internos. Quando o hexágono possui todos os lados iguais e, portanto, todos os ângulos internos iguais, é denominado hexágono regular. Ao traçarmos as diagonais opostas de um hexágono regular, o dividimos em seis triângulos iguais.



Questões

1- As abelhas formam suas colmeias a partir da fabricação de favos. Cada favo é formado pelo ladrilhamento de alvéolos. As abelhas europeias formam os favos a partir do ladrilhamento de alvéolos que possuem o formato de hexágono, como na figura abaixo.

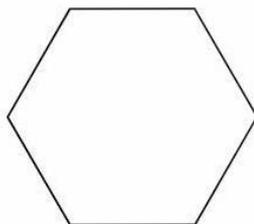


Trace um segmento de reta sobre o hexágono acima, dividindo-o em duas partes iguais. Em seguida, pinte uma das partes.

2- A parte colorida representa qual parte do hexágono inteiro? Explique sua conclusão.

3- Represente numericamente a parte colorida em relação ao hexágono inteiro. Como você chegou a essa conclusão? Explique.

4- Divida o hexágono abaixo em seis partes iguais. Pinte duas partes.

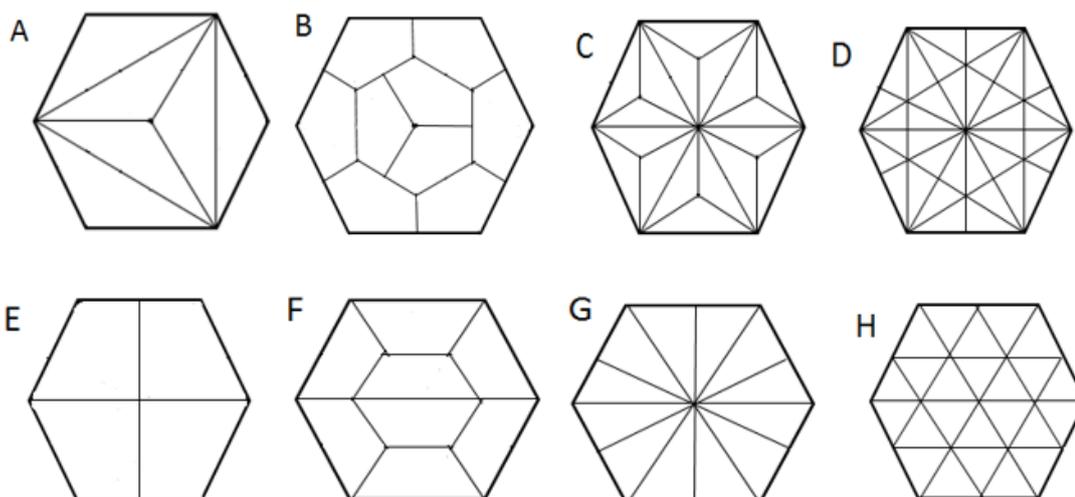


5- Observe apenas a parte colorida. Indique qual fração do hexágono inteiro corresponde à parte colorida? Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão.

6- Compare as frações da questão 3 e da questão 5. O que podemos concluir? Explique.

7- Observe os hexágonos regulares representados abaixo e identificados por letras do alfabeto. Cada hexágono está dividido em partes iguais. Observe e responda:

Figura 2: Hexágonos divididos igualmente



Fonte: Adaptado de Giménez e Bairral (2005)

Em quantas partes está dividido cada um desses hexágonos?

A ___ B ___ C ___ D ___ E ___ F ___ G ___ H ___

8- Pinte duas partes do hexágono E da questão 7. Em seguida, represente numericamente a parte colorida em relação ao hexágono inteiro. Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão.

9- Pinte quatro partes do hexágono F. Represente numericamente a parte colorida em relação ao hexágono inteiro. Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão

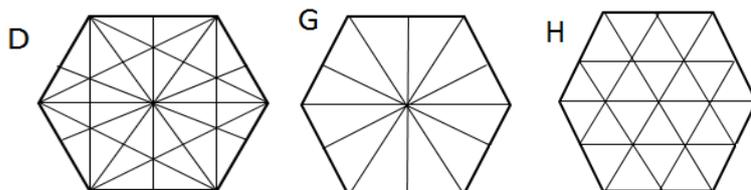
10- Pinte seis partes do hexágono G. Represente numericamente a parte colorida em relação ao hexágono inteiro. Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão.

11- Pinte dezoito partes do hexágono D. Em seguida compare as frações que representam as partes coloridas de cada uma das figuras E, F, G e D. Quais relações entre as frações você identifica? Explique seu raciocínio.

12- Pinte a metade do hexágono da figura A. Em seguida pinte a metade da figura B. Compare as partes pintadas das duas figuras. Elas representam quantidades iguais ou diferentes? Explique.

13- Compare as partes pintadas entre todas as figuras. Existe alguma relação entre as partes pintadas? Existe alguma relação entre as frações que representam as partes pintadas?

14- Pinte a terça parte de cada uma das figuras D, G e H, abaixo, em seguida compare-as. Qual a relação entre as partes pintadas? Existe alguma relação entre as frações que representam as partes pintadas?

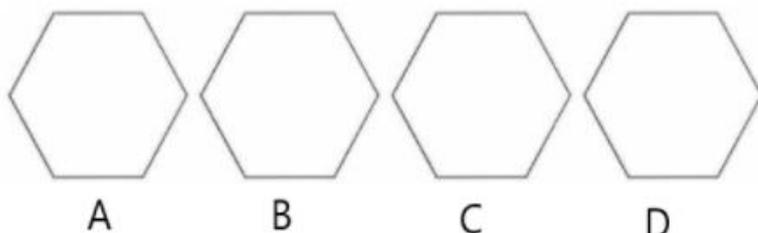


15- O que você aprendeu sobre frações ao comparar as partes pintadas das figuras?

ATIVIDADE 2

1- Divida os hexágonos da figura abaixo da seguinte forma:

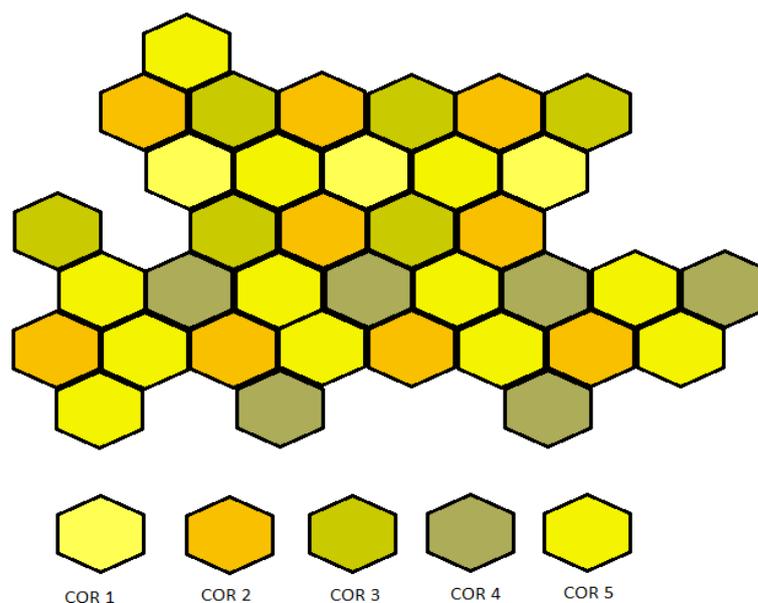
- a) O hexágono A em duas partes iguais;
- b) O hexágono B em três partes iguais;
- c) O hexágono C em quatro partes iguais;
- d) O hexágono D em seis partes iguais;



2- Descreva as estratégias utilizadas para as divisões da questão anterior. Quais foram as dificuldades e o que você aprendeu?

3- Um apicultor, ao fazer a retirada dos favos de uma colmeia de abelhas europeias para realizar a extração do mel, percebeu que os alvéolos dos favos possuíam diferentes tonalidades nas cores do mel, formando um mosaico natural. Observe na figura abaixo:

Figura 3: Favo de mel abelhas europeias 1



Fonte: Elaborado pelas autoras

a) Analisando a imagem do favo da Figura 3, indique a quantidade de alvéolos de cada cor.

COR 1 _____ COR 2 _____ COR 3 _____ COR 4 _____ COR 5 _____

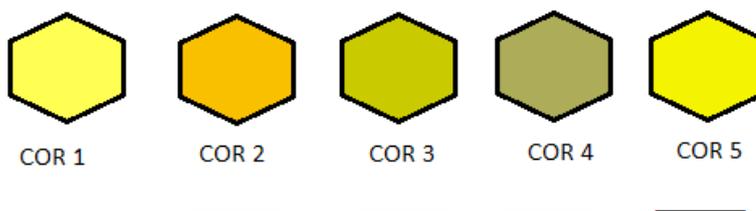
b) Quantos alvéolos, no total, formam o favo de mel?

c) Considerando as diferentes cores de alvéolos do favo representado na figura 3, quais cores de alvéolo, ao serem agrupadas, representam a metade do favo? Especifique as quantidades de cada cor selecionada e explique os critérios utilizados para definir essas cores.

d) Reescreva aqui as quantidades dos alvéolos das cores 3 e 5. Compare essas quantidades. Qual relação é possível fazer entre elas? Essa relação pode ser vista entre outras das cores de alvéolos? Exemplifique.

Reescreva aqui as quantidades dos alvéolos das cores 1 e 2. Compare essas quantidades. Indique qual fração representa a relação entre as quantidades de alvéolos da cor 1 e 2. Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão.

f) Considere a quantidade total de alvéolos do favo. Indique por meio de fração, a quantidade de alvéolos de cada cor conforme especificado abaixo.



Considerando as frações que representam as quantidades de cores em relação ao favo, indique:

i) a fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 1 e 2 juntas.

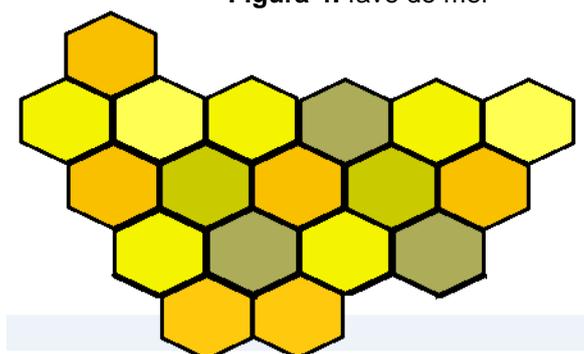
ii) a fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 2 e 4 juntas.

a fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 3 e 5 juntas.

iv) Anote suas conclusões e explique a estratégia utilizada.

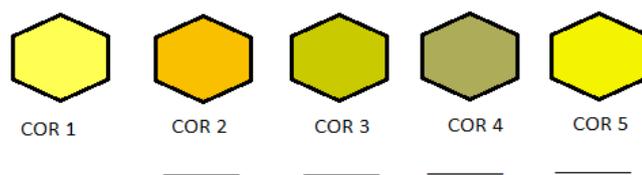
4- Observe a figura 4, mostrada a seguir:

Figura 4: favo de mel



Fonte: Elaborado pela autora

Considere a quantidade total de alvéolos do favo. Indique por meio de fração, a quantidade de alvéolos de cada cor conforme especificado abaixo.



a) Compare as quantidades de alvéolos dos favos das figuras 4 e 3. Existe alguma relação entre essas quantidades? Anote suas conclusões.

Qual fração indica a quantidade de alvéolos da cor 1 ao adicionarmos os favos das figuras 3 e 4? Anote suas conclusões e explique a estratégia utilizada.

Qual fração indica a quantidade de alvéolos da cor 3 ao adicionarmos os favos das figuras 3 e 4? Anote suas conclusões e explique a estratégia utilizada.

APÊNDICE 02

**Estudos de Aula – Matemática – 7º Ano do Ensino Fundamental**

Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS – Campus Chapecó

Escola Municipal Santa Terezinha – Faxinal dos Guedes - SC

ASPECTOS A OBSERVAR NA AULA DE INVESTIGAÇÃO

A interpretação feita pelos alunos para a atividade proposta: compreenderam o que estava sendo solicitado? Precisaram discutir os enunciados? Quais enunciados provocaram mais dúvidas?

Questões/dúvidas levantadas na discussão com o colega ou no trio: Quais dúvidas surgiram na discussão nas duplas/trios? Relacionavam-se mais as atividades ou sobre como deveriam resolver?

Estratégias de solução propostas para cada atividade: utilizaram desenhos? Operações algébricas?

Argumentos propostos para defender as estratégias apresentadas.

Contra-argumentos apresentados pelos colegas do grupo: quais contraposições foram colocadas?

As representações matemáticas usadas nas resoluções de cada questão: quais representações foram apresentadas e como foram construídas?

Operações matemáticas utilizadas: recorreram a equações? Fórmulas conhecidas? Quais? Estes recursos estavam corretos ou equivocados?

As respostas obtidas e as justificações formuladas nos grupos.

As tentativas de propor alguma generalização: o grupo tentou chegar a alguma generalização?

Dificuldades apresentadas pelos alunos

Na etapa da discussão coletiva: os aspectos usados pelos grupos para defender as suas resoluções.

O que foi generalizado/concluído ao final da discussão coletiva?

Observador: _____

APÊNDICE 03

**Estudo de aula (lesson study) – Matemática – 7º ano Ensino Fundamental**

Escola Municipal Santa Terezinha – Faxinal dos Guedes/SC

Secretaria Municipal de Educação de Faxinal dos Guedes

Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS – Campus Chapecó

Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias - GEPEM@T

**Questionário - experiências matemáticas e expectativas relacionadas à aula de investigação**

1- Como você descreve a sua experiência em Matemática ao longo da sua trajetória escolar? Quais atividades e/ou conteúdos você considera que foram mais fáceis de aprender? E os mais difíceis? Explique e exemplifique.

2- Ao resolver atividades ou problemas nas aulas de Matemática, você apresenta alguma dificuldade? Que tipos de dificuldades? Explique e exemplifique.

3- Ao resolver atividades ou problemas nas aulas de matemática, você costuma usar alguma estratégia de resolução (desenhos, operações adicionais, por exemplo)? Exemplifique.

4- Como você faz a testagem destas estratégias? Elas costumam ser adequadas ou precisam ser substituídas/reformuladas? Explique.

5- Sobre a realização de atividades em grupo nas aulas de Matemática: (ver quantas eles podem assinar)

- Contribui para a resolução das atividades propostas em aula;
- As discussões com os colegas nos ajudam a compreender como resolver as atividades;
- O trabalho em grupo é importante para ampliar nossa aprendizagem, pois às vezes os colegas percebem coisas que nós não vimos;
- Gosto de trabalhar em grupo, porque é mais rápido para terminar as atividades;
- Trabalhar em grupo torna a aula mais dinâmica e os alunos participam mais;
- Trabalhar em grupo é importante para os alunos apresentarem os pontos de vista e as dúvidas sem se expor para a turma toda;
- Trabalhar em grupo é importante porque podemos esclarecer as dúvidas menores com os colegas, sem precisar da ajuda do professor;
- No trabalho em grupo podemos fazer novas amizades e conversar com alguns colegas que algumas vezes são mais distantes;
- Para mim não faz diferença trabalhar individual ou coletivamente;
- Consigo resolver de melhor forma as atividades de forma individual;
- Outra opinião: _____

6- Sobre as aulas de Matemática:

- Considero que minha aprendizagem é boa em todas as aulas;
- Acho que é fundamental compreender as definições e os exemplos para resolver as atividades;
- Considero que os exemplos resolvidos são suficientes para conseguirmos resolver as atividades e problemas apresentados nas aulas;
- Em algumas aulas consigo aprender mais do que em outras;
- Tenho dificuldade para compreender os conteúdos, mas consigo resolver as atividades;
- Tenho dificuldades para interpretar as atividades e problemas em Matemática;
- Tenho dificuldade para resolver as atividades e problemas propostos em aula, mas entendo bem os conceitos;
- Outra opinião: _____

7- Para sanar suas dúvidas:

- Quando tenho alguma dúvida, pergunto a um colega mais próximo;

- () Quando tenho dúvidas, procuro exemplos similares no livro didático ou no caderno;
- () Quando tenho dificuldades, aguardo a professora resolver as atividades na lousa (quadro);
- () Não tenho nenhuma dificuldade com a Matemática;
- () Consigo entender o conteúdo na maioria das vezes;
- () Sempre preciso de explicações adicionais;
- () Sempre preciso de auxílio dos colegas ou do professor para resolver as atividades;
- () Outra opinião: _____

8- Como você descreve as suas experiências de aprendizagem sobre frações? Quais são as maiores dificuldades? O que você considera mais fácil de aprender? Dê-nos detalhes.

9- Quais suas expectativas para a aula que vamos desenvolver hoje? Tem receio de algo?

APÊNDICE 04

Roteiro de Entrevista

- 1- Cite características da atividade desenvolvida que você considerou diferente das habituais. Em seguida, explique por que você as considerou diferentes.

A partir da apresentação da tarefa exploratória realizada pela professora, quais dúvidas iniciais e estratégias o grupo adotou como ponto de partida?

- 2- Durante o processo de resolução das tarefas como o grupo conduziu a testagem das estratégias definidas e a verificação das resoluções? Exemplifique.

- 3- Em relação ao momento da discussão coletiva do final da aula, quais foram as contribuições dessa discussão para o seu entendimento sobre o conteúdo abordado? Explique.
