UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

MÔNICA MARINA SORDI

VALIDAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º DO ENSINO FUNDAMENTAL

CHAPECÓ
2022

MÔNICA MARINA SORDI

VALIDAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Lúcia Menoncini

CHAPECÓ

2022

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Sordi, Mônica Marina
Validações do Teorema de Pitágoras em livros didáticos do 9° do Ensino Fundamental / Mônica Marina Sordi. -- 2022.
89 f.:il.

Orientadora: Dra. Lúcia Menoncini

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó,SC, 2022.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Validação. 3. Prova. 4. Demonstração. 5. Registro de representação. I. Menoncini, Lúcia, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MÔNICA MARINA SORDI

VALIDAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 02/09/2022.

BANCA EXAMINADORA

Lucia Menoncini

Prof.ª Dra. Lúcia Menoncini – UFFS

Orientadora

Janice T. Reichert

Prof.ª Dra Janice Teresinha Reichert – UFFS

Avaliadora

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS

Avaliador

Dedico este trabalho às pessoas que apoiaram minha escolha e acreditaram no meu sonho!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a cada uma das pessoas que perpassaram pela minha existência e me fizeram querer ser professora. Agradeço a minha orientadora, profa. Dra. Lúcia, uma mulher que admiro e me inspiro, que sempre demonstrou paciência e zelo comigo, que teve que ler trabalhos de difícil compreensão para me auxiliar. Muito obrigada por ter aceito o desafio de me orientar e por acreditar que eu seria capaz. Agradeço aos membros da banca, que me deram muitas sugestões no projeto e que permitiram enriquecer meu trabalho com seus pareceres, com sua leitura cuidadosa e com seus conhecimentos plurais. Agradeço também a cada um dos professores que tive durante a Educação Básica e Ensino Superior, eu carrego um pouco de cada um de vocês em mim, em especial, quando adentro uma sala de aula! Carrego os aprendizados, as lições de vida, os conselhos, carrego não apenas conhecimento científico, carrego humanidade!

À nona Zelinda, aquela que revisava os cálculos matemáticos com operações aritméticas simples, que eu e minha irmã Débora realizávamos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foi ela que me ensinou contas com reserva quando eu estudava na 3ª série do Ensino Fundamental e cheguei em casa da escola com uma prova de Matemática com nota baixa. Ela que me ajudou a estudar para a recuperação desta prova, em que fui bem. Ela sempre lembrava disso quando falava de mim para as pessoas que a visitavam. Ela, a mesma mulher que não pôde estudar muito, mas o que sabia, fazia questão de compartilhar. Ela que se orgulhava em dizer que eu passei na federal. Nona, desde maio não tenho você fisicamente presente, mas pessoas como você são imortais. Eu sempre vou lembrar do quanto acreditou em mim!

À minha irmã, Débora, a minha primeira aluna. Aquela que sempre estudou uma série a menos, aquela para a qual eu ensinava o que eu aprendia por causa da sua aguçada curiosidade. Aquela com a qual aprendi o real significado de dividir. Aquela para a qual fui professora particular em muitos momentos, em especial no cursinho pré-vestibular. Aquela que mesmo que esteja seguido um caminho bem diferente cientificamente, sempre apoiou a minha escolha e me incentivou. A mesma que hoje me ensina conteúdos de medicina para aprender melhor e para estudar para avaliações, aquela que ajudou nas tarefas quando precisei me dedicar à escrita do TCC.

Aos meus pais, Claudete e Gilmar, que não pouparam esforços para que eu pudesse me dedicar integralmente à graduação. Que me deram acesso a oportunidades únicas devido a isso, como participação em projetos e espaços de representação estudantil. Eles que me incentivam cotidianamente a ser tão trabalhadora e humilde quanto eles. Agradeço a cada um dos meus familiares que me auxiliaram e acreditaram em mim!

Aos meus amigos, que são também minha família. A família que escolhi ter. Eu amo cada um de vocês. Eu agradeço em especial a cada amizade que fiz na UFFS, que é um espaço plural e repleto de diversidades. Cada uma destas diferentes amizades que fiz na instituição me formaram e transformaram em uma pessoa com visão de mundo mais crítica da que eu teria se não tivesse saído do interior de Seara-SC, minha terra natal. Cada um dos meus amigos é especial à sua maneira e contribuiu para que eu seguisse meus sonhos e acreditasse em mim.

Agradeço à Apollo. Intelectual, pedagogo, generoso, compreensivo e sensível às conjunturas políticas, sociais e culturais. Agradeço pela oportunidade de confabular contigo. Agradeço pelas leituras em conjunto e pela troca de conhecimentos, pela mútua admiração e cumplicidade. Você foi um grande incentivador da presente pesquisa, além de ter sido uma pessoa que me possibilitou profundo amadurecimento emocional. Amo você com intensidade.

Agradeço em geral ao Curso de Matemática, por todo acolhimento, respeito, pela formação humanitária e crítica concedida aos seus estudantes. Agradeço a todos os professores e colegas, dos quais lembro com muito carinho. Agradeço à secretaria do curso e a cada um dos servidores e técnicos da UFFS, por possibilitarem que sonhos como o meu se concretizem. Agradeço a UFFS como um todo! Eu sentirei saudades, mas quem sabe algum dia eu retorne a esse espaço que me acolheu tão bem desde 2018. Obrigada, de coração!

Olhem de novo para o ponto. É ali. É a nossa casa. Somos nós. Nesse ponto, todos aqueles que amamos, que conhecemos, de quem já ouvimos falar, todos os seres humanos que já existiram, vivem ou viveram as suas vidas. Toda a nossa mistura de alegria e sofrimento, todas as inúmeras religiões, ideologias e doutrinas econômicas, todos os caçadores e saqueadores, heróis e covardes, criadores e destruidores de civilizações, reis e camponeses, jovens casais apaixonados, pais e mães, todas as crianças, todos os inventores e exploradores, professores de moral, políticos corruptos, “superastros”, “lideres supremos”, todos os santos e pecadores da história da nossa espécie, ali – num grão de poeira suspenso num raio de sol (SAGAN, 1994, não paginado).

RESUMO

O presente trabalho consiste em uma pesquisa de abordagem qualitativa e bibliográfica cujo objetivo é analisar as validações do Teorema de Pitágoras em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, articulando os tipos de raciocínio matemático segundo Balacheff e as representações semióticas de Duval. Para isso, utiliza-se como técnica de análise de dados a Análise de Conteúdo de Bardin. Selecionam-se três coleções de livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, na versão do professor, distribuídas no último Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), ocorrido em 2020. A condição para a escolha das coleções é que elas contenham ao menos alguma validação do Teorema de Pitágoras. Seleciona-se, então, as seguintes coleções: Matemática Essencial, Teláris Matemática e Trilhas de Matemática. As validações do teorema são estudadas com base em duas grandes categorias de análise, os tipos de raciocínio matemático descritos por Balacheff e os diferentes registros e operações semióticas descritas por Duval. São estabelecidas também subcategorias para a análise, visando possibilitar a articulação entre os dois autores. Como resultados da pesquisa, verifica-se que os livros didáticos das três coleções apresentam diferentes maneiras de validar o teorema de Pitágoras, sendo as provas intelectuais do tipo demonstração, que mobilizam simultaneamente o registro figural e o registro geométrico, as mais utilizadas, seguidas pelas provas pragmáticas que recorrem somente às figuras ou a ação sobre elas.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Validação; Prova; Demonstração; Registro de representação.

ABSTRACT

The present work consists of a qualitative and bibliographic research whose objective is to analyze the validations of the Pythagorean Theorem in textbooks for the 9th grade of middle school, articulating the types of mathematical reasoning according to Balacheff and the semiotic representations of Duval. For this, Bardin's Content Analysis is used as a technique of data analysis. Three collections of Mathematics textbooks for the 9th grade of Elementary School are selected, in the teacher's version, distributed in the last National Program of the Textbook, which occurred in 2020. The condition for choosing the collections is that they contain at least some validations of the Pythagorean Theorem. The following collections were selected: Essential Mathematics, Teláris Mathematics and Mathematics Trails. The validations of the theorem are studied based on two major categories of analysis, the types of mathematical reasoning described by Balacheff and the different registers and semiotic operations described by Duval. Subcategories are also established for the analysis, aiming to enable the articulation between the two authors. The results of the research show that the textbooks of the three collections present different ways to validate the Pythagorean theorem, being the intellectual proofs of the demonstration type, which mobilize simultaneously the figurative register and the geometric register, the most used, followed by the pragmatic proofs that resort only to the figures or the action on them.

Keywords: Pythagorean Theorem; Validation; Proof; Demonstration; Representative record.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Dissertações e Teses
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCRs	Componentes Curriculares
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PUC	Pontifícia Universidade Católica
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho parte de uma motivação pessoal. A escolha pela temática justifica-se devido ao fato de que, como acadêmica do curso de Matemática na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS, me envolvo em diversos projetos e programas voltados ao público universitário. Participo, desde 2019, da Monitoria de Fundamentos de Matemática e Geometria, projeto em que auxilio colegas do curso que buscam sanar dúvidas ou aprofundar conhecimentos relativos aos conteúdos que são objetos da Monitoria. Como o nome da Monitoria já sinaliza, dentre os componentes curriculares regulares (CCRs) contemplados está Geometria Plana, na qual os licenciandos são apresentados aos cinco axiomas de Euclides e à ideia de demonstração de teoremas segundo axiomas e outros teoremas previamente provados. Na qualidade de monitora, percebo demasiada antipatia dos colegas de curso no que se refere às demonstrações em Geometria. Entretanto, nutro profunda afeição à Geometria Euclidiana e ao raciocínio dedutivo geométrico, pois os vislumbro sendo exercitados cotidianamente ao auxiliar os colegas na Monitoria.

Ademais, minha participação no PIBID, entre 2018 e 2019, me permite refletir a respeito desta temática na Educação Básica. Neste projeto, em companhia de uma colega e com a colaboração do coordenador do projeto, apliquei uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras e Triângulos Retângulos em uma escola pública de Chapecó. No final desta sequência, a partir de uma aula expositiva dialogada, explorei uma prova do teorema supracitado com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Esta foi uma das mais significativas experiências em sala de aula que tive a oportunidade de vivenciar. De fato, a experiência permitiu refletir a respeito da construção de conceitos associados ao teorema por parte dos estudantes, conforme descrito em Borges *et al* (2020), trabalho do qual sou coautora. A experiência de introduzir provas matemáticas na Educação Básica foi tão instigante, que neste Trabalho de Conclusão de Curso resolvo também discorrer a respeito de provas em Geometria, particularmente acerca das provas do Teorema de Pitágoras.

Além disso, outro motivo para pesquisar provas desse teorema é que o Teorema de Pitágoras é o mais conhecido e provado da história (GARBI, 2010), com trezentas e setenta provas conhecidas e catalogadas na obra de Loomis (1940) intitulada “A Proposição de Pitágoras” (*The Pythagorean Proposition*). Além disso, ele é aplicável em diversos contextos e em variadas áreas da Matemática, como na Geometria Euclidiana Plana, na Geometria Euclidiana Espacial, na Geometria Analítica, na Trigonometria ou na Álgebra Linear, sendo também citado quando fala-se de perpendicularismo, projeção ortogonal ou triângulos retângulos. Conforme pontua Garbi (2010, p. 27):

> Existem muitos e belíssimos teoremas na Matemática mas a aura de surpresa, originalidade, estética e importância que cerca o Teorema de Pitágoras faz dele algo realmente incomparável em relação aos demais: todos os caminhos da Rainha das Ciências conduzem a ele.

Mesmo com a fama que o teorema recebe, na Educação Básica, o Teorema de Pitágoras não costuma ser provado em sala de aula. O raciocínio dedutivo é parte integrante da aprendizagem de Matemática, contudo, neste nível escolar é praticamente inexplorado. Entretanto, se os estudantes fossem instigados a realizar provas de proposições matemáticas, eles poderiam passar a raciocinar a respeito da validade de teoremas matemáticos em vez de simplesmente decorar fórmulas, regras e enunciados.

Desta forma, o presente trabalho é uma pesquisa que averigua como as validações do Teorema de Pitágoras são levadas à sala de aula, tendo em vista os livros didáticos. Esse estudo tem abordagem bibliográfica com análise de dados qualitativa através da Análise de Conteúdo. O problema de pesquisa é: *Como são as validações do Teorema de Pitágoras em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir da articulação dos tipos de raciocínio matemático de Balacheff e das representações semióticas de Duval?*

Na primeira seção deste trabalho encontra-se a introdução. Na segunda seção deste trabalho, encontra-se uma breve revisão de literatura. Na terceira seção, encontra-se o referencial teórico, englobando diferentes abordagens e classificações acerca dos diferentes entendimentos para os conceitos de explicação, argumentação, prova e demonstração. Esta seção também apresenta a história do Teorema de Pitágoras e uma introdução à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Na quarta seção, encontra-se a descrição dos procedimentos metodológicos. Em seguida, há a quinta seção com a análise dos livros didáticos e, por fim, a sexta seção com as considerações finais.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Com a finalidade de verificar a existência de estudos que tangenciam o tema do presente trabalho, fez-se necessário pesquisar palavras-chave ligadas à temática no Portal de Periódicos da CAPES[1] e na BDTD[2]. Ao buscar apenas “Teorema de Pitágoras” são encontrados 66 resultados no Portal da CAPES e 97 resultados na BDTD. Após esta primeira pesquisa, busca-se pelos termos “Teorema de Pitágoras” e “livro didático” concomitantemente em qualquer parte do texto, nos dois dispositivos de busca. Há a opção pelo termo “livro didático”, uma vez que ele é objeto de análise deste trabalho de pesquisa. Encontra-se, então, oito resultados na BDTD e quatro trabalhos no portal da CAPES. Realiza-se a leitura dos resumos dos trabalhos encontrados e seleciona-se aqueles que citam ao menos alguma vez no resumo as teorias de Duval ou de Balacheff. Desta forma, são selecionadas quatro dissertações na BDTD e um artigo no portal da CAPES. Em nenhuma das etapas da busca, restringe-se algum período de busca, mas são selecionados apenas trabalhos escritos em português.

O primeiro trabalho encontrado é um artigo a respeito das concepções de professores portugueses do 7º ao 9º ano do Ensino Básico sobre as demonstrações matemáticas. Para a coleta de dados, os autores realizam questionários e entrevistas, assim, percebem que os professores com menos experiência em sala de aula são os que mais concordam com a presença da prova neste nível escolar, embora apenas em alguns conteúdos programáticos (VISEU *et al*, 2017). Um conteúdo que se insere nesse contexto é o Teorema de Pitágoras. Além disso, os autores verificam que, o que é aceito como prova de teoremas para o Ensino Básico, insere-se mais no contexto de argumentação do que de demonstração propriamente dita, até mesmo em livros didáticos portugueses. Eles afirmam que, à medida que os alunos progridem na aprendizagem matemática, desenvolvem com maior facilidade o raciocínio dedutivo e conseguem realizar demonstrações de teoremas com mais formalidades. Nesse sentido, os autores citam Duval para dissertarem a respeito das diferenças entre argumentação e prova. Segundo Duval, o raciocínio argumentativo e o dedutivo são intrinsecamente distintos, pois mobilizam atividades cognitivas diferentes.

O segundo trabalho encontrado é a dissertação de Cabral (2017). Neste trabalho, a autora aplica atividades experimentais visando mobilizar construções argumentativas em uma turma de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio e em

---

[1] Disponível em: https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php?
[2] Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/

um grupo de discentes do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG). A atividade sobre as relações métricas e, em especial o Teorema de Pitágoras, ocorre com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, sendo que com os demais alunos, as atividades argumentativas envolvem outros conteúdos matemáticos. Como principal teórico utilizado para a análise da prática transcorrida, a autora cita Balacheff. Na sequência didática elaborada e aplicada pela autora aos alunos do 9º ano, ela busca desafiá-los a escrever o porquê o Teorema de Pitágoras é válido. A maioria dos alunos justifica a validade do teorema tendo por base alguns casos particulares, o que para Balacheff não se configura como demonstração, mas como uma prova pragmática. As outras experiências relatadas no trabalho também permitem com que a autora conclua que em todas as turmas pesquisadas, os alunos recorrem, em sua maioria, às provas pragmáticas para justificar afirmações matemáticas.

Outra dissertação encontrada é a de Cruz (2008) em que o autor utiliza-se da teoria de Balacheff a respeito dos tipos de raciocínio de validação em Matemática para analisar uma coleção de livros didáticos de Matemática, a coleção “Matemática e realidade”. Nesta coleção, o autor investiga em específico as validações para o Teorema Fundamental da Aritmética e para o Teorema de Pitágoras. Ele conclui que as atividades presentes neste livro didático não favorecem o exercício de produção de provas para os teoremas estudados. Isso porque a prova ou demonstração destes teoremas aparecem na coleção analisada somente após a noção intuitiva, ou seja, após a verificação de sua validade apenas em alguns casos e “antes de exercícios de fixação, cabendo ao aluno apenas aplicar o teorema ou a propriedade. [...] portanto, levar o aluno a argumentar e provar não faz parte dos objetivos básicos da coleção” (CRUZ, 2008, p. 92).

Mesmo utilizando Balacheff como referencial teórico, tanto Cruz (2008) quanto Cabral (2017) não chegam a citar Duval em nenhuma parte dos seus trabalhos.

A próxima dissertação encontrada é um trabalho aplicado com uma turma do 1º ano do Ensino Médio para verificar quais as dificuldades dos alunos em argumentar ou provar o Teorema de Pitágoras (FERREIRA FILHO, 2007). Para isso, o autor elabora uma sequência didática e analisa as produções dos alunos a partir dos tipos de raciocínio matemático descritos por Duval, Balacheff e outros teóricos citados pelo autor, como Aline Robert. Duval é citado no trabalho porque defende que a prova de um teorema possui passos e que cada passo possui uma premissa que é provada e utilizada no próximo passo da prova, até chegar-se na conclusão procurada. Ferreira Filho (2007) elabora uma sequência didática com quatro atividades matemáticas que estimulam produções argumentativas dos estudantes, seguindo esta concepção de Duval. Os registros semióticos não são citados nesta dissertação e apenas a concepção de prova estipulada por Duval é citada no trabalho, verifica-se, desta forma, que o presente trabalho possui uma abordagem distinta da utilizada por Ferreira Filho (2007). No presente trabalho, investiga-se como provas do Teorema de Pitágoras são levadas à sala de aula, tendo em vista os livros didáticos. Por sua vez, os livros didáticos são mencionados no trabalho porque Ferreira Filho (2007) os utiliza para a elaboração das sequências didáticas posteriormente aplicadas à turma do 1º ano do Ensino Médio. Balacheff é utilizado na análise das produções argumentativas desses alunos, quando é possível identificar os tipos de prova que eles desenvolvem nas quatro atividades aplicadas por Ferreira Filho (2007). A conclusão da dissertação é que os estudantes aceitam as provas pragmáticas como suficientes para validar o Teorema de Pitágoras, mas a sequência de atividades permite que os estudantes identifiquem a necessidade de provas intelectuais para a formalização do conhecimento matemático.

O último trabalho encontrado é a dissertação de Pasini (2007), que analisa as demonstrações de teoremas da Geometria em uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental segundo os tipos de prova propostos por Balacheff e as funções do ato de provar teoremas matemáticos identificadas por De Villiers. Entre as demonstrações analisadas a partir desse referencial estão a demonstração do Teorema de Pitágoras e demonstrações referentes à retas paralelas e às propriedades dos triângulos. Nesta dissertação, a Teoria de Duval é pouco utilizada, basicamente se resume a indicar a mudança de registros de representação semiótica em uma atividade referente a ângulos suplementares, presente em um dos livros didáticos analisados. Passa-se da língua natural do enunciado para o registro figural da representação dos ângulos em desenho e, também utiliza-se o registro algébrico para montagem de um sistema linear, visando encontrar a medida do ângulo suplementar a um ângulo que o excede em 10º.

Algo interessante a respeito desse levantamento descrito nos parágrafos precedentes é que três das quatro dissertações encontradas na BDTD partem do mesmo programa de Pós-Graduação, o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC de São Paulo (SP). São elas as dissertações de Cruz (2008), Ferreira Filho (2007) e Pasini (2007). A única dissertação que não parte deste programa de pós-graduação é a de Cabral (2017), advinda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC de Minas Gerais. Além disso, visualiza-se que as dissertações advindas da PUC-SP são todas resultado de um projeto ocorrido nesta instituição de ensino, o AProvaME, Argumentação e Prova na Matemática Escolar. Segundo Cruz (2008, p. 14), este projeto é desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) da PUC-SP e tem como objetivo “analisar a situação da argumentação e prova no ensino de Matemática no Brasil, e também elaborar situações de aprendizagem a serem desenvolvidas em sala de aula”. Não são encontradas informações atuais acerca do projeto, por isso não se sabe se ele ainda está em vigor. Entretanto, a busca na BDTD mostra que esta temática concentra-se em pesquisas da PUC-SP ocorridas no final dos anos 2000.

Com base no levantamento realizado no Portal da CAPES e na BDTD, é possível identificar que nenhuma pesquisa analisa provas do Teorema de Pitágoras em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, simultaneamente olhando para os tipos de raciocínio de validação em Matemática estipulados por Balacheff. Isso possibilita destacar a originalidade do trabalho aqui apresentado.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 TIPOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Segundo Boavida (2005) as demonstrações em Matemática surgem com a lógica formal, na Grécia Antiga. Aristóteles[3] é o primeiro autor a sistematizar noções referentes à argumentação e ao raciocínio dedutivo, sendo considerado o precursor da lógica formal. Sobre a lógica formal, Perelman (1992) afirma que ela é utilizada nas demonstrações, enquanto que a lógica informal é empregada nas argumentações, para justificar ações, resolver conflitos ou tomar decisões.

Aristóteles divide o raciocínio em dois: dialético e analítico. Boavida (2005) e Perelman (1992) traduzem o raciocínio dialético aristotélico como um raciocínio cujas premissas iniciais são constituídas por opiniões verossímeis. Esse raciocínio é pessoal e utiliza-se amplamente da língua natural como forma de expressar os pensamentos. Por sua vez, o raciocínio analítico permite inferir, a partir de determinadas premissas, uma conclusão (SILVA, 2007). Desta forma, segundo Boavida (2005), os raciocínios dialéticos são argumentativos enquanto os raciocínios analíticos são demonstrativos, impessoais e podem mobilizar diferentes linguagens, em especial, a língua formal e a língua natural.

Aristóteles, o pai da lógica formal, é o primeiro filósofo a redigir trabalhos a respeito do raciocínio analítico, de caráter dedutivo, e cunhar o termo inferência (BOAVIDA, 2005). Em relação às inferências, Silva (2007, p. 49) afirma que:

> Inferência é um modo de se obter conclusões a partir de premissas. Ela é válida se a veracidade das conclusões depender apenas da veracidade dos pressupostos. Ela é formal se independer do conteúdo (do que é dito) mas apenas da forma lógica das asserções (de como é dito).

Um tipo especial de inferência é o silogismo. O silogismo é constituído por três termos que compõem três proposições distintas: uma premissa maior, uma menor e uma conclusão. Por exemplo, sejam as premissas “Todo homem é mortal”, “Sócrates é homem”, conclui-se em seguida que “Sócrates é mortal”. Esse é um exemplo clássico de inferência e pode ser

[3] Aristóteles (384 - 322 a.C.), discípulo de Platão (427 - 348 a.C.), é conhecido por ter concepções distintas das do seu mestre. Platão defende a ideia que os objetos matemáticos só existem no mundo das Ideias. Para Aristóteles, os objetos matemáticos existem no mundo sensível, mas nada mais são do que abstrações de objetos reais. Aristóteles também é o sistematizador pioneiro da lógica formal e responsável por trabalhos referentes às inferências e pelo surgimento de estudos sobre argumentação (SILVA, 2007).

generalizado como: “se todo A é um B e se o x é um A, então x é um B”, sendo A, B e x, as premissas (SILVA, 2007).

Segundo Hanna (1990), os gregos são os precursores do formalismo, em especial na Filosofia e na Matemática. Eles são conhecidos como os principais responsáveis por tornar a Matemática uma ciência dedutiva.

A formalização do conhecimento matemático tem intensa colaboração do matemático alemão Frege[4], que concebe uma linguagem conceitual formal[5] para demonstrar que todas as noções aritméticas podem ser reduzidas a conceitos puramente lógicos (HANNA, 1990). O trabalho de Frege é aprimorado ao longo dos tempos, por diversos matemáticos, lógicos e estudiosos da temática no geral. Assim, são apresentados a seguir, alguns autores que discutem sobre o raciocínio requerido nas justificações de premissas matemáticas e cujos trabalhos são publicados a partir dos anos de 1990. O primeiro deles é Raymond Duval (2004, p. 218) que divide o raciocínio matemático em três tipos:

1) Silogismo aristotélico ou silogismo clássico;
2) Raciocínio dedutivo e o raciocínio por absurdo;
3) Argumentação.

Sobre o **silogismo aristotélico**, também conhecido como silogismo clássico, Duval (2004, p. 219) discorre que esse “foi o primeiro modelo de raciocínio válido elaborado com o propósito de demonstração”, sendo amplamente utilizado nas relações de inclusão, interseção ou exclusão entre conjuntos. Silva (2007) complementa reafirmando que esta forma de raciocínio desenvolvida por Aristóteles, nada mais é do que um tipo de inferência, que depende de afirmações iniciais (premissas) e leva a uma conclusão.

Duval (2004) apresenta alguns tipos de silogismo aristotélico, em especial o silogismo dado pelas premissas “todos A são B”, “nenhum C é B” e pela conclusão “nenhum A é C”. Portanto, nesse caso, conclui-se que “se todos A são B e nenhum C é B, então nenhum A é C”.

Porém, não é só Aristóteles que discute a importância de justificar asserções. Enquanto ele desenvolve a lógica formal com intuitos filosóficos, os matemáticos gregos são conhecidos

[4] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) é um matemático, lógico e filósofo alemão, conhecido por tentar reduzir a aritmética às regras da lógica, mas não conseguir. Isso porque ele é confrontado por Bertrand Russell (1872-1970), que o questiona se o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, pertence a si próprio, gerando o Paradoxo de Russell (SILVA, 2007).

[5] A linguagem conceitual formal concebida por Frege é a que atualmente denomina-se Lógica de Segunda Ordem. “Enquanto em Lógica de Primeira Ordem a quantificação está restrita a variáveis que denotam objetos, em Lógica de Segunda Ordem admitem-se variáveis – e quantificação sobre variáveis - que denotam propriedades de objetos, relações ou funções entre objetos ou conjunto de objetos” (SILVA, 2007, p. 128).

como os responsáveis pela introdução do raciocínio dedutivo na Matemática. Nesse sentido, Vega e Alejandri (2011, p. 511) reiteram que

> [...] para os gregos a ideia primária subjacente à demonstração é *convencer em meio ao debate*, enquanto para Newton em seu tempo, buscava-se demonstrações *mais esclarecidas do que convencidas*, e foi somente no século XIX que demonstrar é *estritamente* necessário em Matemática, pois isso nos permitiu enfrentar novas concepções de objetos matemáticos.

Desta forma, os gregos entendem que a demonstração de um resultado matemático associa-se ao convencimento, através do debate de ideias, diferentemente do entendimento de Newton[6], que aponta as demonstrações matemáticas como meios de esclarecimento.

Euclides[7] é conhecido por ser um dos primeiros matemáticos a utilizar a Matemática de forma dedutiva, pois realiza provas de teoremas matemáticos segundo axiomas (verdades incontestáveis) em sua obra "Os Elementos". Esta obra possui como objetivo reunir toda a Matemática conhecida pela civilização até aquele momento, de forma dedutiva (ROQUE, 2012).

O modelo empregado por Euclides em sua obra utiliza-se do **raciocínio dedutivo ou por absurdo**, que é a segunda forma de raciocínio descrita por Duval (2004). Segundo Duval, estas formas de raciocínio são amplamente utilizadas em demonstrações matemáticas. O raciocínio dedutivo é aquele que consiste na operação de extração de uma proposição (hipótese) e sua reutilização em forma de premissa para outro passo da demonstração, até que se chegue no que pretende-se mostrar (tese). Por sua vez, o raciocínio por absurdo parte de um enunciado que é negado, e, se esta negação conduz a uma contradição, então o enunciado inicial é verdadeiro. Assim, esse raciocínio possui dois passos: o inicial e o final. No passo inicial ocorre a negação do enunciado. No passo final, a negação é rejeitada, pois leva a um absurdo. Entre esses dois passos, existe um raciocínio intermediário que pode ser argumentativo ou dedutivo e se desenrola até chegar na conclusão que contradiz alguma informação anteriormente utilizada na demonstração (DUVAL, 2004). Aristóteles, por exemplo, critica as demonstrações por absurdo porque as considera não causais, ou seja, não explicativas (SILVA, 2007). Aristóteles entende que as demonstrações diretas são superiores porque seguem um caminho direto, de

---

[6] Isaac Newton (1643-1727) é um físico, astrônomo e matemático inglês, responsável pelo estudo das três leis do movimento e pelo desenvolvimento do cálculo diferencial e integral (ROQUE, 2012).

[7] Euclides de Alexandria (323-283 a.C) é um matemático grego nascido em Alexandria. Ele torna-se conhecido como pai da Geometria devido a sua obra "Os Elementos" que é um conjunto de treze livros publicados por volta do ano 300 a.C., em que Euclides utiliza-se do método axiomático-dedutivo para demonstrar vários teoremas de Geometria e Aritmética, além de realizar construções geométricas somente com compasso e régua não graduada (ROQUE, 2012).

dedução em dedução, das verdades conhecidas para as desconhecidas, enquanto a demonstração indireta ou por redução ao absurdo não segue os mesmos passos (BARBOSA, GALVÃO, SANTOS, 2016).

Por fim, a última forma de raciocínio, segundo Duval (2004), é a **argumentação**, a forma mais familiar e natural de raciocinar. De acordo com Duval (1992), há dois tipos de argumento, o retórico e o heurístico. O primeito serve para um locutor convencer um interlocutor ou para o próprio locutor convencer a si mesmo, enquanto o segundo é utilizado na Matemática para conduzir a solução de problemas.

Nesta perspectiva, o primeiro tipo de argumento é pessoal e é o único tipo de raciocínio que pode suscitar a oposição de pontos de vista, por causa dos valores epistêmicos incompatíveis ou distantes que podem ocorrer quando diferentes pessoas argumentam sobre uma mesma proposição (DUVAL, 2004). Por valor epistêmico pode-se entender "o grau de certeza ou convicção associado a uma proposição", conforme pontua Duval (1991, p. 254 *apud* BALACHEFF, 2022, p. 826). Duval (1992) também aponta que os valores epistêmicos são aqueles requeridos nos argumentos do tipo retórico.

Além disso, Duval (1992) afirma que um argumento é aceito ou rejeitado de acordo com dois critérios, sua relevância e sua força:

> O exame da relevância de um argumento é feito em relação ao conteúdo da afirmação e do argumento que a justifica: seus conteúdos semânticos respectivos devem sobrepor-se, pelo menos em grande parte. Caso contrário, "estamos falando de outros coisa", "mudamos de assunto".... A força de um argumento, ao contrário, depende de dois fatores. Por um lado, do fato de que nenhum outro argumento pode se opor a ela, que ela resiste a um contra-argumento ou que é "irrespondível". Por outro lado, pelo valor epistêmico que tem em relação à aquele a quem se dirige: deve ter um valor epistêmico positivo (óbvio, necessário, autêntico,...) e não negativo ou neutro (absurdo, possível, plausível...). Um argumento que resiste a objeções e tem valor epistêmico positivo é um argumento forte. (DUVAL, 1992, p. 39, tradução nossa).

Desta forma, no âmbito da Matemática, a argumentação com base em argumentos fortes pode ser entendida como o início do processo de justificação e validação de hipóteses ou conjecturas, que generalizam propriedades Matemáticas, dado o seu valor epistêmico forte. Desta maneira, segundo Duval (2004), é na argumentação que ocorre a formulação de hipóteses ou conjecturas, e para Vega e Alejandri (2011, p. 511) esse "é o objetivo da argumentação pré-formal, e início do processo demonstrativo, é portanto o ponto de inflexão que explica a unidade cognitiva *Argumentar–Conjecturar–Provar*". Duval (1992) também enfatiza que a argumentação é o raciocínio que não obedece restrições de validade, ela acata essencialmente restrições de relevância. Segundo o autor, isso se justifica porque a argumentação está mais próxima de discursos espontâneos: ela segue a lógica das leis de coerência da linguagem natural, não as leis lógicas da língua formal. Assim, um raciocínio torna-se uma demonstração quando ele é validado e por sua vez, as demonstrações são produtos do raciocínio dedutivo ou raciocínio por absurdo, já que mobilizam essencialmente a língua formal.

Ainda no âmbito da classificação dos tipos de raciocínio matemático, o filósofo polonês Chaïm-Perelman (1992) os classifica em:

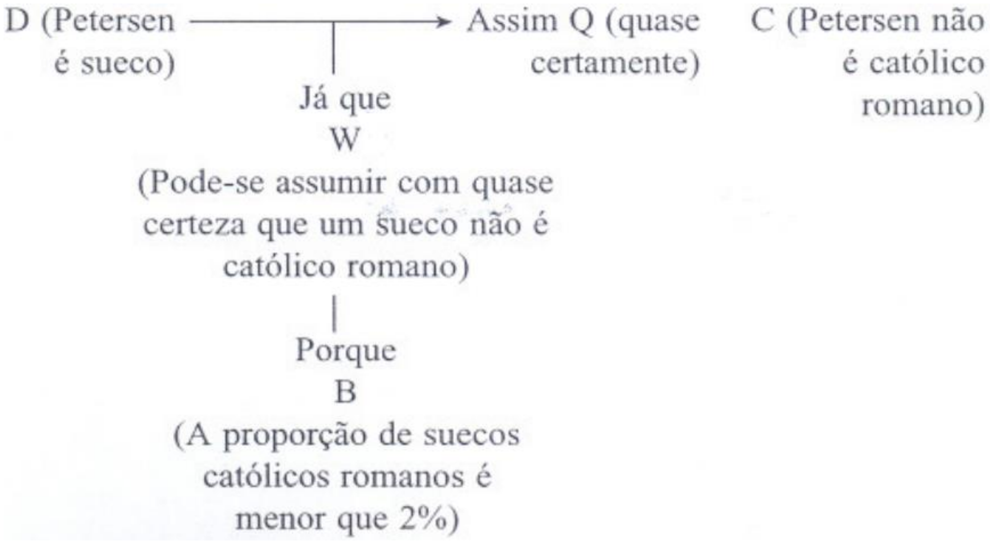
1) Argumentação;
2) Demonstração.

A **argumentação** depende do público para ser aceita e do poder de convencimento do interlocutor, enquanto que a **demonstração** independe do público, uma vez que admite apenas dois valores lógicos: está correta ou está incorreta (PERELMAN, 1990). Na demonstração, a ordem das afirmações não é relevante, desde que sejam válidas, já na argumentação a ordem de exposição dos argumentos pode alterar as condições da sua aceitação. Boavida (2005), que em sua tese de doutorado, baseia-se em Perelman, pontua que a finalidade da demonstração é provar a verdade de uma conclusão a partir das verdades de premissas já conhecidas. Para a autora, a argumentação "não visa a imposição de uma certeza indubitável, mas a sua adesão" (BOAVIDA, 2005, p. 36).

Uma referência internacional no que se refere ao estudo da argumentação é o filósofo britânico Stephen Toulmin. Para ele, um argumento possui uma parte anatômica e uma parte fisiológica, e as principais fases de um argumento são a afirmação inicial de um problema e a apresentação final de uma conclusão. Estas fases são como órgãos vitais dos argumentos (TOULMIN, 2001).

Os elementos fundamentais de um argumento, segundo Toulmin (2001) são os dados (D), a conclusão (C) e a justificativa (J). Podem ser acrescentados ao argumento especificações das condições para que uma determinada justificativa seja válida, como qualificadores modais (Q). Também é possível apresentar uma refutação (R) da justificativa, quando ela é inválida ou insuficiente para apoiar a conclusão. Garantias (W) também podem ser utilizadas para auxiliar a validar o argumento. O apoio (B) de uma alegação pode dar suporte à justificativa, e trata-se de um conhecimento básico. A Figura 1 mostra um exemplo de um argumento segundo o autor.

Figura 1 – Esquema de argumentação de Toulmin



Fonte: Toulmin (2001, p. 159)

No exemplo acima, a justificativa (J) é formada pela garantia (W) e pelo apoio (B), que permitem inferir com base no dado (D) de que Peterson é sueco, que ele não é católico romano. O esquema de Toulmin é bastante abrangente e não se direciona em específico à Matemática. Mesmo assim, é um esquema didático e que permite ao educador matemático e ao estudante pensar em possibilidades de argumentar matematicamente. Na Matemática, também utiliza-se de dados (D) fornecidos por algum enunciado para que seja possível proceder na resolução de algum problema ou na justificação (J) de alguma hipótese. Necessita-se de garantias (W) ou de conhecimentos básicos (B), assim como, pode ser útil o uso de qualificadores modais (Q) para auxiliar a escrita ou oralidade de algum raciocínio que converge a uma conclusão ou tese (C).

Outro autor que traz contribuições significativas para esse estudo é o matemático francês Nicolas Balacheff. Ele afirma que os verbos explicar, provar e demonstrar são tratados erroneamente como sinônimos no ensino de Matemática e isso contribui para o surgimento de obstáculos de aprendizagem (BALACHEFF, 2000; 2022). Segundo o autor, cada um desses verbos conduz a diferentes níveis de atividades cognitivas nos alunos, por isso, são distintos. O autor propõe a seguinte classificação para os tipos de raciocínio em Matemática:

1) Explicação
2) Argumentação
3) Prova

   3.1) Pragmática

   - Ostensão
   - Empirismo Ingênuo

- Experiência crucial
- Exemplo genérico

3.2) Intelectual

- Exemplo genérico
- Experiência mental
- Demonstração

Para Balacheff (2000), uma explicação é expressa em discursos em língua natural e visa tornar inteligível aos interlocutores alguma afirmação produzida pelo locutor. Para esse autor, explicar é despejar as razões para responder a pergunta “por quê?”. Uma explicação é um discurso que tem como objetivo obter o consentimento do interlocutor sobre uma afirmação, e os argumentos utilizados pelo locutor podem discutir, refutar e aceitar premissas enunciadas por outrem ou por si mesmo. Quando um locutor tem como objetivo convencer um interlocutor sobre a veracidade de uma afirmação que ele faz, ele recorre à argumentação.

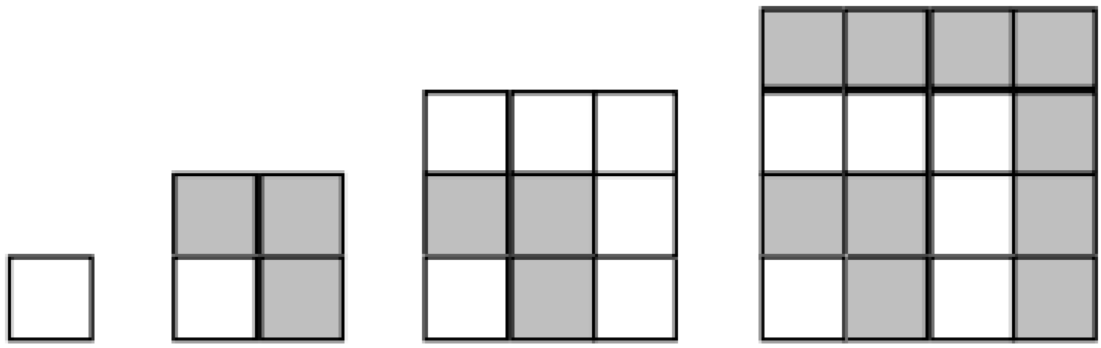
Balacheff (2022) entende a argumentação de forma muito semelhante com Duval (2004). Entretanto, ele volta aos termos argumentação retórica e heurística para apontar autores que preenchem lacunas deixadas por Duval na caracterização desses dois tipos de argumento. Segundo Balacheff (2022), Duval utiliza o termo “valor epistêmico” como forma de divulgar o grau de certeza, ou seja, a força da crença na validade de um argumento retórico. Duval não propõe um termo particular para o grau de certeza de um argumento heurístico. Nesse sentido, Balacheff (2022) aponta que Gila Hanna propõe o termo “valor ôntico” para as argumentações heurísticas, mobilizadas nas resoluções de problemas matemáticos. Ao contrário do valor epistêmico, o valor ôntico é independentemente de qualquer agente participante do processo argumentativo. Para Balacheff (2022, p. 830), “uma argumentação será admissível no sentido da Matemática se o valor epistêmico de seus enunciados for condicionado por seu valor ôntico; este critério permitirá que ela seja reconhecida como uma prova em Matemática”. Desta forma, as provas são casos especiais de argumentação, segundo Balacheff. Para passar da explicação à argumentação em direção à prova, ainda dialogando com Duval, Balacheff (2022, p. 831) afirma que:

> [...] a passagem da explicação à argumentação é aquela imposta pela necessidade de formular as razões e a sua organização, seja para si ou para outrem. Fazer com que outros aceitem que uma argumentação estabelece a validade de uma solução muda seu status e valor pelo caráter público que adquire. Ela ganha o status de prova.

Infere-se que para Balacheff (2000; 2022), quando uma argumentação é reconhecida e aceita por uma comunidade, ela adquire o status de uma prova. Para o autor, há dois tipos de prova, a pragmática e a intelectual. A prova pragmática utiliza-se da linguagem cotidiana. Esse tipo de prova recorre à ações ou à ostensão, ou seja, a exibições reais e práticas, como a manipulação de materiais, construções, ilustrações, desenhos e observação de figuras para validar uma hipótese (BALACHEFF, 1988).

As provas pragmáticas por ostensão recorrem essencialmente às figuras para validar um resultado matemático. No entanto, o recurso à ostensão está presente nos diferentes tipos de provas, como será visto posteriormente. Quando uma pessoa não consegue explicar uma dada afirmação matemática de outra forma senão apenas com o uso de figuras, ela recorre a esse tipo de prova pragmática, que pouco se utiliza de registros de representações linguísticos (BALACHEFF, 2000). Esta é a forma mais elementar de expressão de uma prova. Um exemplo clássico de uma prova pragmática por ostensão é o resultado de que a soma dos *n* primeiros números ímpares é n^2, conforme Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de prova pragmática por ostensão



Fonte: Balacheff (2000, p. 21)

A Figura 2 mostra uma prova por ostensão, pois recorre essencialmente à figura para validar um resultado matemático a respeito da soma dos *n* primeiros números ímpares. O primeiro número ímpar é o número 1, aqui representado pelo quadrado de lado 1 e que tem uma unidade de área. A soma do número 1 com o segundo ímpar, que é o número 3, resulta em 4, ou seja, em 4 quadrados de lado 1. E assim sucessivamente. A imagem acima, por si só, já prova esta propriedade, de acordo com Balacheff (2000).

Aprofundando os conceitos, Balacheff (1998; 2000; 2022) afirma que também são provas pragmáticas as provas por empirismo ingênuo, experiência crucial, e o exemplo genérico. De modo geral, as provas pragmáticas se baseiam na ostensão, ou seja, a figura é um suporte para provar os resultados matemáticos.

As provas por **empirismo ingênuo** ocorrem quando os alunos formulam uma conjectura ao verificarem que ela é verdadeira para alguns poucos casos. Porém, a validade dela não é assegurada para todos os casos (BALACHEFF, 2000). Este meio de prova é insuficiente, mas é uma das primeiras formas de raciocínio que conduzem ao processo de generalização (BALACHEFF, 1988).

Como exemplo dos tipos de prova Balacheff (1988; 2000) relata uma experiência ocorrida com 28 adolescentes entre 13 e 14 anos. Na sua pesquisa, esses estudantes são reunidos em duplas, para eles apresenta-se um desafio matemático e disponibiliza-se apenas uma caneta, para que discutam em conjunto e anotem os raciocínios de cada um dos membros da dupla. A ideia é que os estudantes entrem em acordo e descrevam sua resolução para o desafio. O desafio que lhes é apresentado consiste em descobrir e justificar uma fórmula que resolva o problema de segue, apresentado em Balacheff (1988, p. 220, tradução nossa).

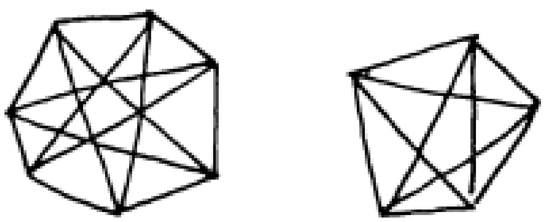
Problema

"Forneça um meio de calcular o número de diagonais de um polígono quando é conhecido o número de vértices dele."

O problema é dado aos alunos sem lhes fornecer as definições de polígono e diagonal. O observador que acompanha a experiência não pode interferir na experiência, a não ser fornecendo contraexemplos aos estudantes, para que eles repensem seus raciocínios.

Uma dupla pesquisada conjectura que o número de diagonais de um polígono é o mesmo número que o de vértices, pois verifica isso particularmente para o polígono de 7 e de 5 vértices (Figura 3).

Figura 3 – Exemplo de prova pragmática por empirismo ingênuo



Fonte: Balacheff (1988, p. 223)

Entretanto, o exemplo acima confirma que não estava bem clara a definição de diagonal para esses alunos, já que o polígono de 7 vértices possui, na verdade, 14 diagonais. Também percebe-se o recurso à ostensão na figura acima, visto que a figura apoia o raciocínio dos estudantes. O observador, nesse estágio, ainda não intervém na definição de diagonal de polígono. Além disso, a grande maioria dos demais alunos participantes da pesquisa afirma que o número de diagonais de um polígono é a metade do número de lados, baseados nos polígonos convexos de 4 vértices, como o quadrado. O observador apresenta contraexemplos para estas duplas, mas mesmo assim, várias duplas de alunos não alcançam níveis mais elevados de prova do que o empirismo ingênuo (BALACHEFF, 1998).

Balacheff também apresenta em suas obras outro tipo de prova pragmática, a **experiência crucial**. Ela diz respeito a uma experimentação cujo resultado permite escolher entre duas hipóteses, sendo apenas uma delas verdadeira. A experiência crucial permite rejeitar uma hipótese, mas não é suficiente para afirmar que a outra é verdadeira (BALACHEFF, 2000). Como exemplo desse tipo de prova, Balacheff (1988, p. 224) traz a resolução proposta por uma dupla de estudantes para o problema do número de diagonais de um polígono quando o número de vértices deste polígono é conhecido:

Resolução com experiência crucial:

Considera-se $f(n+1) = f(n) + a(n+1) = f(n) + a(n) + 1$, sendo n o número de vértices, $f(n)$ o número de diagonais e $a(n+1) = a(n) + 1$ com $a(n)$ o número de diagonais que são somadas para passar de P_n(polígono de n vértices) para P_{n+1} (polígono de $n+1$ vértices).

Buscando resolver o problema, esta dupla de alunos considera que $f(4) = 2$ e que $a(4) = 2$ e conclui que $f(n+1) = f(n) + a(n+1) = f(n) + a(n) + 1$ é uma fórmula válida para todo n, se vale para um polígono grande, que nesse caso propõem que seja o polígono de 15 lados. Assim, a dupla de alunos utiliza-se da experiência crucial, pois após verificar a fórmula para alguns casos, ou seja, depois de utilizar-se do empirismo ingênuo, a dupla levanta duas hipóteses:

- se a fórmula vale para um polígono de 15 vértices, ela vale para todos polígonos;
- se a fórmula não vale para um polígono de 15 vértices, então não vale para todos polígonos.

Entretanto, os alunos da dupla citada julgam trabalhoso verificar o caso para polígonos de 15 vértices, então recorrem a polígonos de 10 vértices e confirmam que sua fórmula vale para esses polígonos, em seguida concluem que ela funciona para todos os polígonos. Em outras palavras, os alunos desta dupla rejeitam a segunda hipótese e concluem que a primeira deve ser verdadeira. Entretanto, a experiência crucial permite apenas rejeitar a segunda hipótese, não é o suficiente para confirmar a primeira.

Observando o que a dupla fez, infere-se que eles tenham realizado os seguintes cálculos:

$f(5) = f(4) + a(2) + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$

$f(6) = f(5) + a(5) + 1 = 5 + 3 + 1 = 9$, sendo $a(5) = f(5) - f(4) = 5 - 2 = 3$

$f(7) = f(6) + a(6) + 1 = 9 + 4 + 1 = 14,$ sendo $a(6) = f(6) - f(5) = 9 - 5 = 4$

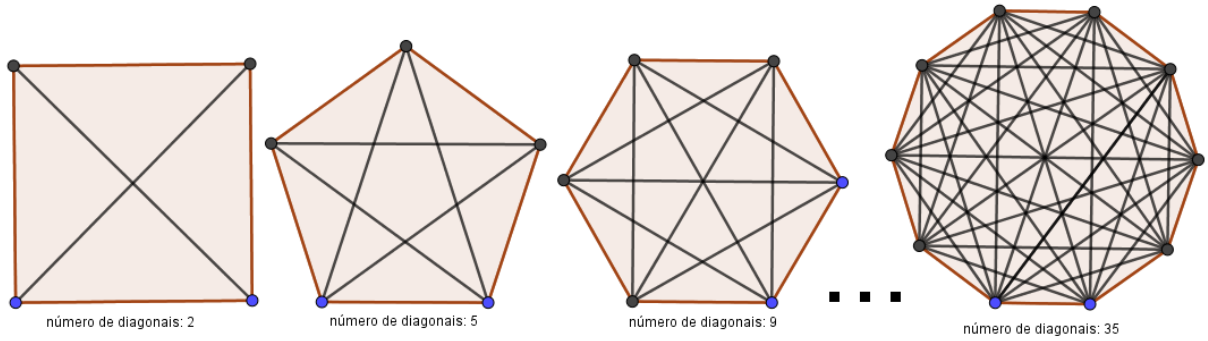
$f(8) = f(7) + a(7) + 1 = 14 + 5 + 1 = 20,$ sendo $a(7) = f(7) - f(6) = 14 - 9 = 5$

$f(9) = f(8) + a(8) + 1 = 20 + 6 + 1 = 27,$ sendo $a(8) = f(8) - f(7) = 20 - 14 = 6$

$f(10) = f(9) + a(9) + 1 = 27 + 7 + 1 = 35,$ sendo $a(9) = f(9) - f(8) = 27 - 20 = 7$

Infere-se também que a dupla conclui que a fórmula encontrada é válida, baseando-se na verificação com ilustrações, como pode-se observar na Figura que segue:

Figura 4 – Exemplo de prova pragmática por experiência crucial



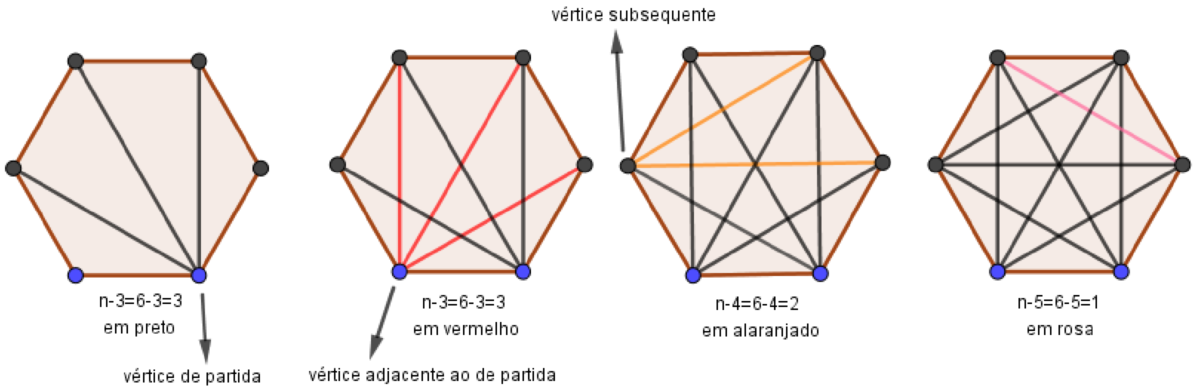
Fonte: Autora

Outro tipo de prova descrita por Balacheff (2000) é o **exemplo genérico**, que consiste na explicação das razões para a validade de uma asserção relacionada a um objeto, tido como um representante característico de uma determinada classe (BALACHEFF, 2000). Como exemplo de prova por exemplo genérico, Balacheff (1988) usa o mesmo **Problema** citado anteriormente e mostra o que uma outra dupla de alunos conclui a partir do apoio genérico do polígono de 6 vértices. Esses alunos estabelecem a seguinte sequência de diagonais partindo de um vértice, sendo n o número de vértices do polígono considerado:

$$(n - 3), (n - 3), (n - 4), \ldots, 2, 1$$

Esse padrão pode ser verificado a partir do exemplo do polígono de 6 vértices, como a própria dupla fez:

Figura 5 – Exemplo de prova pragmática por exemplo genérico, caso do polígono de 6 vértices



Fonte: Autora

Infere-se que a dupla baseia-se essencialmente em uma figura como a Figura 5, para chegar na sequência citada. Os alunos concluem o seguinte: partindo de um vértice qualquer (neste caso o vértice de partida está explícito no polígono à esquerda), há $n-3$ diagonais saindo deste vértice. Contando a partir do vértice adjacente ao de partida, também há $n-3$ diagonais partindo dele. Mas para o vértice subsequente, uma das diagonais já é contada no primeiro vértice considerado, logo, dele partem $n-4$ diagonais. E assim o raciocínio prossegue para os outros vértices do polígono, até partir apenas uma diagonal do último vértice considerado. Percebe-se que a ostensão é utilizada como apoio nesta validação. Segundo esta dupla de alunos, a sequência formulada "é verdadeira, porque ver a figura os permite assegurar que é assim" (BALACHEFF, 2000, p. 71, tradução nossa).

Evidentemente, isso não é o suficiente para justificar a validade da sequência $\{(n - 3), (n - 3), (n - 4), \ldots, 2, 1\}$ para qualquer polígono de n vértices, embora, em um estágio primitivo, a sequência é uma resposta à exigência de não contar cada diagonal mais de uma vez. A transição de um termo da sequência para outro pode ser explicitada apenas na ação, por ostensão, recorrendo a uma figura, como a Figura 5, que apresenta o caso do exemplo genérico para o polígono de 6 vértices. Os alunos concluem que a sequência vale para outros polígonos porque vale para um representante particular e genérico da classe de polígonos: o polígono de 6 vértices. O número total de diagonais de um polígono, segunda a dupla, é o somatório dos termos desta sequência.

Os exemplos de provas pragmáticas supracitados baseiam-se em ações sobre objetos ou figuras, ou seja, ancoradas no recurso à ostensão. Por sua vez, para Balacheff (2000) as provas intelectuais[8] são baseadas na natureza genérica e geral das afirmações matemáticas consideradas.

A passagem das provas pragmáticas para as provas intelectuais ocorre quando o locutor toma distância da sua ação ao solucionar problemas (os alunos quando questionados do porquê de alguma afirmação que fazem, geralmente respondem explicando as operações utilizadas para resolver o problema). Mas é necessário mais do que isso para produzir provas formais. A linguagem necessita se tornar uma ferramenta para deduções lógicas e não apenas um meio de comunicação (BALACHEFF, 1988). Desta forma, as provas intelectuais são aquelas que se utilizam da linguagem matemática formal (BALACHEF, 2000). São provas intelectuais as provas por exemplo genérico, experiência mental e as demonstrações.

O exemplo genérico é um tipo de prova intelectual, quando apoia-se essencialmente na linguagem formal e permite ao locutor que ele expresse sua prova por outro meio além da figura exclusivamente. Ao mesmo tempo, é um tipo de prova pragmática quando apoia-se essencialmente em figuras e ações sobre objetos reais (BALACHEFF, 2022).

A **experiência mental** para Balacheff (2000) é uma prova intelectual que concentra-se na ação, internalizando-a e separando-a de uma representação particular. Como exemplo de tal processo, retoma-se as discussões da dupla de alunos Olivier e Stéphane, participantes do trabalho desenvolvido por Balacheff (1988; 2000). Esta dupla busca as razões para as quais o número de diagonais (s) partindo de um vértice de um polígono em função do número de vértices (n) é sempre $s(n) = n - 3$. Esses alunos também partem do exemplo genérico do polígono de 6 vértices, entretanto, um dos integrantes da dupla logo reconhece "aqui se faz um exemplo, não se deve fazer exemplos, deve ser para o geral" (BALACHEFF, 2000, p. 75, tradução nossa).

[8] Em Balacheff (2000; 2022) utiliza-se o termo "provas intelectuais", ao passo que em Balacheff (1988) utiliza-se o termo "provas conceituais". Acredita-se que isso seja consequência das traduções de obras do autor para as diferentes línguas: espanhol, português e inglês contidas nesses três trabalhos. No presente trabalho, opta-se pela terminologia "provas intelectuais", visto que é a forma normalmente mais encontrada em citações de trabalhos do autor.

Segundo esta dupla, a relação $s(n) = n - 3$ é válida para quaisquer polígonos convexos porque dois segmentos que estão próximos ao ponto de qual partem as diagonais não são contados como diagonais. Ou seja, em qualquer polígono, a partir de cada vértice que forem traçadas as diagonais, há dois vértices ao lado dele que são descartados na contagem.

> Tal explicação baseia-se no conhecimento prático dos objetos que estão em jogo no problema e, por isso, evoca uma experiência mental, com eventual suporte de exemplos genéricos. Para alcançar um nível mais alto de validação, seria necessário que Olivier e Stéphane se apoiassem nas definições de polígono e diagonal, que nem sequer são percebidas. (BALACHEFF, 2000, p. 75, tradução nossa).

Assim, Olivier e Stéphane não apenas afirmam o porquê de subtrair 3 de n para a contagem das diagonais partindo de cada um dos n vértices de um polígono, mas realizam uma experiência mental ao generalizar seu raciocínio para quaisquer polígonos. A dupla está a caminho de encontrar uma fórmula relacionando o número total de diagonais de um polígono ao número de vértices dele. Basta multiplicarem $n - 3$ por n, já que de cada um dos n vértices de um polígono, partem $n - 3$ diagonais. Em seguida, basta dividir o produto encontrado por 2, visto que cada diagonal é contada duas vezes quando pensa-se na contagem vértice por vértice. Entretanto, esses alunos, segundo Balacheff (2000) apenas podem alcançar um nível mais elevado de validação, ou seja, podem realizar uma demonstração, caso se apoiem nas definições de polígono e diagonal. A principal diferença entre experimento mental e demonstração, segundo Balacheff (1988) é que o experimento mental ocorre na linguagem do cotidiano enquanto a demonstração segue a língua formal e o rigor matemático.

Ademais, Balacheff (2000) também reconhece que existem semelhanças entre o empirismo ingênuo e o experimento crucial, por um lado, e o exemplo genérico da prova intelectual e a experiência mental, por outro. Segundo o autor, o empirismo ingênuo e o exemplo genérico se caracterizam por conterem apenas a afirmação sem muitas justificações, enquanto o experimento crucial e a experiência mental são ancoradas por afirmações baseadas em razões.

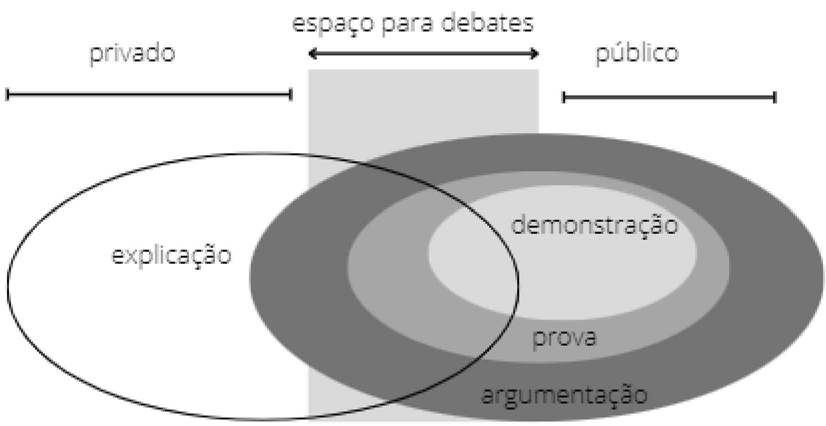
O nível mais elevado de prova, para Balacheff (2000), é a **demonstração**. As demonstrações em Matemática são baseadas em conhecimentos institucionalizados e formalizados, sobre um conjunto de definições, teoremas e regras de dedução, cuja validade é aceita socialmente pela comunidade matemática. Este princípio é um dos fundamentos do rigor matemático. Diferentemente do que fazem outros autores, Balacheff não coloca as demonstrações em uma categoria à parte. Para ele as demonstrações são exemplos de provas intelectuais. Mas, para que alguém aprenda a demonstrar, geralmente este alguém inicia o processo provando um dado teorema matemático apenas para alguns casos, ou seja, realizando o empirismo ingênuo, conforme pontua:

> A passagem do empirismo ingênuo para a prova (intelectual) pode, em uma fórmula rápida, descrever o movimento do aprendizado da prova em Matemática. Esta passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais necessárias para ir em direção à demonstração é também a de uma problemática pragmática a uma problemática teórica. (BALACHEFF, 2022, p. 840)

De forma geral, para Balacheff (2000), a explicação é um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor, o qual pode ser discutido, recusado ou aceito por interlocutores. Assim sendo, a explicação é uma forma de raciocínio particular para cada locutor. A explicação pode ser equivocada, comprovada ou aprimorada até se tornar um argumento. Um argumento caracteriza-se por um raciocínio em que o locutor explica uma afirmação seja para si ou para outrem. Por sua vez, uma prova é uma argumentação aceita por uma dada comunidade num dado momento e uma demonstração é uma prova aceita pela comunidade matemática. A demonstração fundamenta-se em explicações apresentadas numa sequência de enunciados. Um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido a partir daqueles que o precedem, conforme regras de dedução. Assim, a demonstração é um resultado de processo particular de prova que vem validar uma afirmação (BALACHEFF, 2000).

Para Balacheff (2022), explicação, argumentação, prova e demonstração se cruzam a medida que partem da esfera privada para a pública, e entre estas formas de raciocínio existe um espaço para o debate, conforme esquematizado na próxima figura.

Figura 6 – Relação entre explicação, argumentação, prova e demonstração



Fonte: Adaptado de Balacheff (2022, p. 832)

Conforme a figura acima, Balacheff (2022) coloca a demonstração como um tipo de prova, diferentemente de outros autores já citados, que a colocam em uma categoria à parte. A demonstração, para Balacheff (2022), é uma prova intelectual com caráter público, porque já possui aceitação pela comunidade matemática, mesmo assim, encontra-se em espaço de debate, pois pode ser aprimorada.

Outra autora que também não coloca a demonstração como um raciocínio matemático à parte, mas como um tipo de prova, é a matemática canadense Gila Hanna. Ela distingue dois tipos principais de prova:

1) Prova que prova;
2) Prova que explica.

Ambos os tipos de prova atendem aos requisitos para uma prova matemática e, portanto, “servem em igual medida para estabelecer a validade de uma afirmação matemática” (HANNA, 1990, p. 9, tradução nossa). Ademais, os dois tipos de prova consistem no ordenamento de declarações que são axiomas ou seguem de declarações anteriores, e são resultado da aplicação correta de regras de inferência. Entretanto, a **prova que prova** mostra que um teorema é verdadeiro se preocupando apenas com sua validação, não com o entendimento do que cada passo da prova enuncia. Esse é o tipo de prova utilizado e aceito como o meio ideal de validação de proposições pelos matemáticos e lógicos. Assim, a demonstração é uma prova que prova.

Uma **prova que explica**, por outro lado, além de mostrar porque um teorema é verdadeiro, fornece um raciocínio baseado em ideias matemáticas envolvidas e em propriedades que fazem com que o teorema afirmado seja verdadeiro. Uma prova explicativa faz referência a uma propriedade caracterizante de uma entidade ou estrutura mencionada no teorema, tal que, na prova fica evidente que os resultados dependem desta mesma propriedade (HANNA, 1990). Segundo a autora, a prova que explica é ideal para fins escolares.

Como exemplo de prova que prova, Hanna (1990) traz a demonstração por indução de que a soma dos n primeiros números inteiros é $n \cdot (n+1)/2$, conforme figura que segue.

Figura 7 – Exemplo de prova que prova

Para n=1, o teorema é verdadeiro.
Assuma que ele é verdadeiro para um k arbitrário.
Então, considere:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para k+l se for verdadeira para k.
Pelo teorema de indução, a afirmação é verdadeira para todo n.

Fonte: Adaptado de Hanna (1990, p. 10, tradução nossa)

Para esse mesmo problema, Hanna (1990) apresenta um exemplo de uma prova que explica, a prova de Gauss[9].

Figura 8 – Exemplo de prova que explica

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 \qquad + \ldots + n \\ S &= n + (n-1) \qquad + \ldots + 1 \\ \hline 2S &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n\,(n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Fonte: Hanna (1990, p. 10)

A prova acima, segundo a autora, é explicativa porque utiliza-se da propriedade de simetria da soma do primeiro termo da sequência com o último, do segundo com o penúltimo e assim por diante, para mostrar porque a afirmação é verdadeira. Esta propriedade de simetria é intuitiva e facilmente verificável, por isso, consegue trazer o caráter explicativo para a prova.

Hanna (1990) enfatiza que é possível adotar uma abordagem explicativa para a prova em sala de aula sem abandonar os critérios de legitimação. Segundo ela, o que realmente importa é a mensagem por trás da prova, não sua sintaxe. Por isso, ela afirma que o excesso de formalidade pode "obscurecer em vez de esclarecer" (HANNA, 1990, p. 12, tradução nossa). Nesse sentido, cabe pontuar que ao longo da história da Educação Matemática surgem movimentos de busca pelo formalismo no currículo da Matemática, exemplo disso é o Movimento da Matemática Moderna, que fracassa pouco tempo depois de sua implantação, na

[9] Johann Carl Friedrich Gauss (1777, 1885) é um matemático, astrônomo e físico alemão. Conta a lenda que Gauss, quando criança, fica de castigo na aula e seu professor solicita que ele some todos os números naturais de 1 a 100. Gauss inicia somando 1 com 100, 2 com 99, 3 com 98 e assim por diante, obtendo sempre 101. Ele observa que na soma de 1 até 100 obtem-se 50 vezes o número 101. Então para efetuar 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100, basta fazer 50 x 101 que resulta em 5.050. Esta técnica é conhecida como soma de Gauss. (RIBEIRO, s.d.)

década de 70, e um dos motivos do fracasso do movimento é justamente o excesso de formalismos matemáticos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012).

Neste estudo, o último autor apresentado que discute a respeito das provas em Matemática é De Villiers (2001). Para ele, a prova matemática serve para verificação de afirmações matemáticas, bem como possui as seguintes funções: explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual. A função de explicação se deve porque a prova é útil para explicar exemplos obtidos através de verificações empíricas. Com a explicação, atinge-se confiança na validade de uma hipótese, e, quanto mais exemplos forem testados, mais esta confiança aumenta. A prova como processo de descoberta suscita o encontro de novos resultados.

Como um processo de sistematização, o autor entende que a prova possibilita transformar um conjunto de resultados conhecidos em uma definição ou teorema, pois sistematiza afirmações isoladas e as organiza de forma coerente e unificada. A prova como meio de comunicação divulga o conhecimento matemático para a sociedade, permitindo o seu refinamento, a identificação de erros e a descoberta de contraexemplos. A prova como desafio intelectual cumpre a função gratificante de realização própria e satisfação pessoal quando consegue-se chegar a uma dedução para uma dada asserção matemática. Assim, a prova não serve apenas como um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas permite explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.

Como visto nesta seção, há diferentes tipos de raciocínio matemático, sendo que cada autor apresentado traz o seu entendimento e sua classificação.

3.2 O TEOREMA DE PITÁGORAS AO LONGO DA HISTÓRIA

A Matemática pitagórica, desenvolvida na primeira metade do século V a.C., faz a transição entre a Matemática de Tales e Euclides. Também influenciado pela Matemática egípcia, Pitágoras introduz um tipo de Matemática abstrata na Grécia

De acordo com Garbi (2010), conjectura-se que Pitágoras (586 a. C. a 500 a. C.) é natural na ilha grega de Samos. Segundo o autor, Tales, pai da Matemática dedutiva, torna-se influente e seus escritos chegam até Pitágoras, mesmo que Pitágoras tenha nascido duas décadas depois da morte de Tales e que ambos não tenham se conhecido. Eves (2004) diz que Pitágoras reside por algum tempo no Egito e pode mesmo ter-se aventurado em viagens mais extensas.

Ao retomar para Samos, encontra o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa, então decide migrar para Crotona, onde funda a escola pitagórica, por volta de 540 a.C. Nesta irmandade, ele e seus pupilos pitagóricos estudam Filosofia, Ciências Naturais, Matemática e realizam rituais místicos e religiosos (GARBI, 2010).

A irmandade torna-se influente em Crotona até que a população revolta-se contra ela e a destrói porque não entende o que a seita pitagórica faz por lá, desta forma, a consideram uma ameaça religiosa e política. Pitágoras foge para a cidade grega de Metaponto, onde morre, provavelmente assassinado durante uma revolução popular. Por sua vez, a escola pitagórica se reestabelece depois de um tempo, se expande para outras cidades e continua a existir por pelo menos dois séculos (EVES, 2004; GARBI, 2010). De acordo com Boyer (2012), a escola pitagórica torna-se tão influente, que acredita-se que Pitágoras tenha concebido as palavras Matemática (que significa “o que é aprendido”) e Filosofia (que significa “amor à sabedoria”).

Apesar destas suposições a respeito de Pitágoras, de acordo com Pereira (2002) e Eves (2004), é praticamente impossível descrever a vida e os pensamentos de Pitágoras, pois as obras que versam sobre ele são de no mínimo duas décadas após a sua provável existência. Roque (2012, p.78) afirma que “a escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, permitem duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras”. De qualquer forma, mesmo sem nenhuma constatação concreta da existência de Pitágoras, sabe-se que ele empresta seu nome ao teorema mais conhecido da história, o Teorema de Pitágoras (GARBI, 2010).

O enunciado do Teorema de Pitágoras é difundido internacionalmente e afirma que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo. Segundo Garbi (2010), a palavra “cateto” tem origem grega e significa “vertical ou perpendicular”, enquanto a palavra grega “hipotenusa” significa “estender-se sob”. Ou seja, a hipotenusa é o lado que se estende sob o ângulo reto.

Segundo Miorim (1998), é de conhecimento dos babilônios a relação enunciada pelo Teorema de Pitágoras, mais de um milênio antes de Pitágoras. De acordo com a autora, mesmo que existam suposições de que egípcios, hindus e chineses também conheçam o teorema antes desta data, não há evidências da veracidade desse fato. Boyer (2012) destaca que a tábua Plimpton 322, datada do período babilônico antigo (entre 1900 a 1600 a.C.), apresenta uma série de ternas pitagóricas, ou seja, de medidas cujos quadrados das duas menores somadas resultam no quadrado da maior. Por sua vez, diferente dos babilônios, os egípcios preocupam-se essencialmente com a aplicação de conhecimentos matemáticos em problemas de sua realidade, como a fabricação de cerveja ou a divisão de terras. A discussão filosófica da

Matemática inicia-se na escola pitagórica. De acordo com Boyer (2012, p. 56) para os pitagóricos “a Matemática se relaciona mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática”.

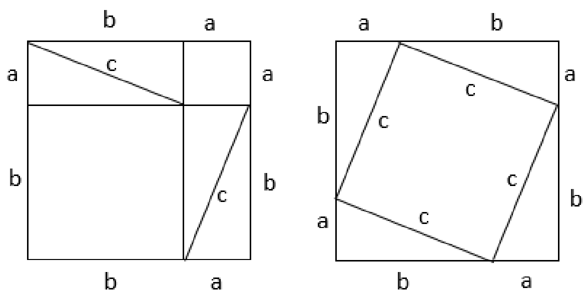
Por essas razões, Boyer (2012) afirma que o Teorema de Pitágoras teria possivelmente sido demonstrado pela primeira vez pelos pitagóricos ou por Pitágoras, e, consequentemente, recebe esse nome. Nesta perspectiva, para Eves (2004, p. 101):

> Como os ensinamentos da escola (pitagórica) eram inteiramente orais e como era costume da irmandade atribuir todas as descobertas ao referenciado fundador, é difícil agora saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria.

Quanto às diversas demonstrações que esse teorema recebe ao longo da história, na segunda edição da obra de Loomis (1940), intitulada “A Proposição de Pitágoras” (*The Pythagorean Proposition*), são agrupadas trezentas e setenta diferentes demonstrações. De acordo com Miorim (1998, p. 6) “Paulus Gerdes, em seus estudos sobre os ornamentos e artefatos africanos, encontra muitas outras possibilidades de demonstração”.

Eves (2004) afirma que, possivelmente, a primeira prova do teorema, dada por Pitágoras ou por algum pitagórico, é uma prova por decomposição de figuras geométricas, no caso quatro triângulos retângulos de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*, os quadrados cujos lados medem *a*, *b* e *c* unidades de comprimento. Esta prova teria sido como a que segue.

Figura 9 – Provável primeira prova do Teorema de Pitágoras.

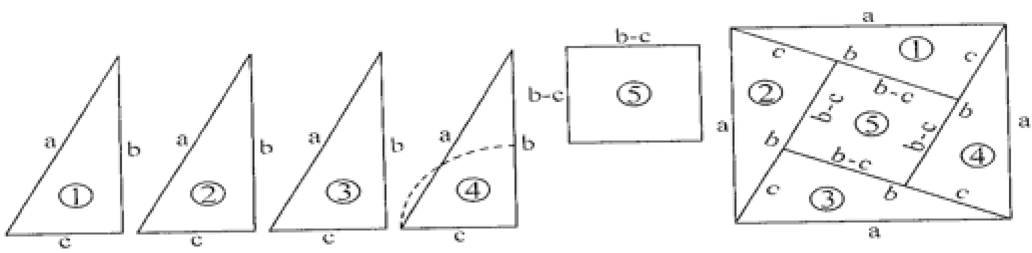


Fonte: Adaptado de Eves (2004, p. 103)

Na Figura 9 é possível identificar, inicialmente, à esquerda, um quadrado de lado $a+b$, formado por um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e quatro triângulos retângulos de hipotenusa c e catetos a e b. No quadrado de lado $a+b$, à direita, também identificam-se quatro triângulos retângulos de hipotenusa c e catetos a e b, além de um quadrado de lado c. Como os quadrados de lado $a+b$, à direita e à esquerda são congruentes, bem como os quatro triângulos retângulos contidos em cada um desses, conclui-se que a área de um quadrado de lado a somada à área de um quadrado de lado *b* resulta na área um quadrado de lado *c*. Segundo Garbi (2010), esta mesma demonstração pode ter sido realizada independentemente por Pitágoras e estudiosos chineses, sendo que recebe o nome de "diagrama chinês".

Entretanto, conforme Garbi (2010), Pitágoras pode ter provado o teorema que recebe seu nome de outra forma. Seja um triângulo retângulo de catetos *b* e *c* distintos e hipotenusa *a*, constrói-se quatro triângulos iguais a ele e um quadrado de lado *b-c*. As figuras podem ser dispostas como a ilustração abaixo.

Figura 10 – Outra provável primeira prova do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Garbi (2010, p. 28).

Na figura acima, o quadrado de lado *a* possui área equivalente à área de quatro triângulos retângulos de hipotenusa *a* e catetos *b* e *c* somados à área de um quadrado de lado *b-c*. Quando efetua-se esta soma e iguala-se à área do quadrado de lado *a*, chega-se ao enunciado do Teorema de Pitágoras. Estas demonstrações puramente figurais, descritas nas figuras acima, são chamadas de "demonstrações sem palavras" por Garbi (2010).

Enquanto Eves (2004) e Garbi (2010) discutem as possíveis provas para o teorema realizadas pelos pitagóricos, Roque (2012, p. 86) contesta que "não se conhece nenhuma prova do teorema geométrico que tenha sido fornecida por um pitagórico e parece pouco provável que ela exista". Para Roque (2012, p. 86), o teorema é um resultado aritmético, não geométrico:

> Não deve ter havido um teorema geométrico sobre o triângulo retângulo demonstrado pelos pitagóricos, e sim um estudo das chamadas triplas pitagóricas. O problema das triplas pitagóricas é fornecer triplas constando de dois números quadrados e um terceiro número quadrado que seja a soma dos dois primeiros.

A autora argumenta que se Pitágoras realmente existiu, ele e sua escola teriam feito estudos mais voltados à Matemática concreta e estabelecido relações referentes à padrões numéricos, relacionando as ternas pitagóricas com os números figurados (mais especificamente, com os números quadrados, que são números com raiz quadrada exata).

3.3 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A filosofia da ciência explica que a Matemática é uma ciência *a priori*, diferente de qualquer outra ciência, dado que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata” (DUVAL, 2012b, p. 268). Isso significa que os seres humanos apenas possuem acesso aos objetos matemáticos a partir das suas diferentes e diversas representações: escrita, símbolos, números, desenhos, gráficos, etc.

Como os objetos matemáticos não são reais, eles existem na mente humana como representações mentais. Para serem exteriorizados no mundo real, precisam ser representados por meio de algum sistema semiótico. De acordo com o psicólogo e filósofo francês Duval (2004; 2012b), as representações mentais dizem respeito às conceituações concebidas por alguém acerca de um objeto em sua mente, enquanto as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações. O psicólogo e filósofo é enfático ao argumentar que as representações semióticas não são apenas a exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, elas são essenciais à atividade cognitiva do pensamento.

Segundo Duval (2012b, p. 270), “se é chamada “semiose” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e “noesis” a apreensão conceitual de um objeto, a noesis é inseparável da semiose”. Não há compreensão conceitual sem o uso de representações, ou seja, “não há noesis sem semiose” (DUVAL, 2004, p. 14).

Mesmo que as representações sejam imprescindíveis para a aprendizagem dos objetos matemáticos, é preciso ter cuidado para não confundir o objeto matemático e suas representações, porque um mesmo objeto matemático pode ser representado de diversas formas. Os números, por exemplo, são objetos matemáticos, enquanto as escrituras decimais ou fracionárias são representações desses. Para Duval (2004, p. 14), “toda confusão entre objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão”.

Segundo Duval (2012b), um sistema semiótico é considerado um registro de representação semiótica quando permite o exercício das três atividades cognitivas semióticas: a formação, o tratamento e a conversão.

A primeira atividade semiótica é a formação de uma representação identificável, ou seja, a formação de uma representação de algum objeto matemático em um dado registro semiótico. A formação implica na seleção de informações referentes ao conteúdo a representar. Para Duval (2012b, p. 271), “esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto". Por exemplo, ao representar um triângulo no registro figural, pode-se desenhar três segmentos que se encontram em seus extremos. As pessoas que visualizam esta figura identificam que se trata de uma representação do objeto triângulo.

Por sua vez, o "tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada" (DUVAL, 2012b, p. 272). Desta forma, o tratamento é uma forma de reescrever uma mesma informação, mantendo-se a referência ao objeto e permanecendo no mesmo registro de representação semiótica. Sendo assim, cada registro possui regras próprias de tratamento. Por exemplo, há um tratamento no registro algébrico quando resolve-se uma equação (a equação $x - 1 = 5$ pode ser reescrita como $x = 5 + 1$).

Por fim, a conversão ocorre entre registros distintos. É a transformação de uma representação em uma outra representação, "conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial" (DUVAL, 2012b, p. 272). Esta atividade semiótica não possui regras próprias e por esta causa, costuma ser mais difícil cognitivamente para os estudantes. Um exemplo de conversão é quando passa-se da lei de formação de uma função, em registro algébrico, para sua representação gráfica no plano cartesiano.

Das três atividades semióticas, a conversão assume um importante papel para a aprendizagem matemática, pois para ser realizada, requer conhecimentos dos diferentes registros de representação envolvidos. Por isso, Duval (2012b, p. 282) enuncia sua hipótese de aprendizagem levando em consideração a operação semiótica de conversão: "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão". Ou seja, a aprendizagem ocorre quando um indivíduo representa um objeto matemático em ao menos dois registros e consegue converter esse objeto de um registro a outro espontaneamente.

Para Duval (2004), há quatro grandes categorias de registros: o geométrico ou figural, o algébrico ou da língua formal, o gráfico e o registro da língua natural. O registro em língua natural é o mais apropriado para cumprir a função de comunicação, entretanto, outros sistemas semióticos também podem realizar esta função. O discurso em língua natural ou formal não só comunica informações, mas também permite tratamentos sobre estas informações.

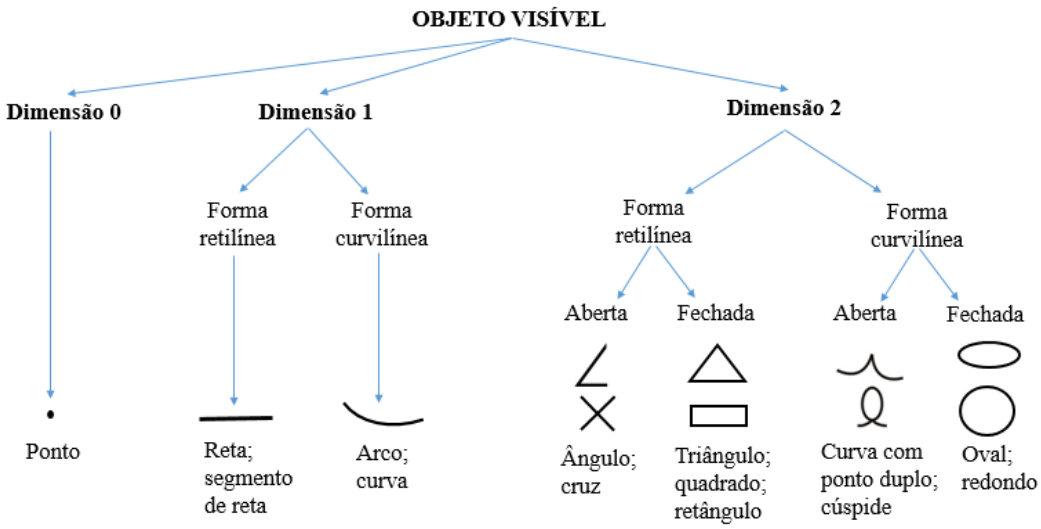
Nesse sentido, o autor destaca que a língua formal da Matemática baseia-se na lógica de Frege e utiliza-se de quatro unidades elementares: as letras com função proposicional; os símbolos com funções de quantificadores; as letras com função de variáveis e os símbolos com função de operadores e conectivos lógicos. Por sua vez, o registro figural é puramente visual e não discursivo. Esse registro é englobado pelas figuras geométricas. Outro registro visual é o gráfico, em que informações são organizadas de forma gráfica, por exemplo em um plano cartesiano ou gráfico de setores. Nesse registro, a escala, a cor, a orientação e o tamanho são variáveis muito importantes, pois “essas variáveis podem representar relações de ordem, de proporcionalidade e de semelhança” (DUVAL, 2004, p. 158).

Em atividades matemáticas, estes diferentes registros não aparecem isoladamente, e por esta razão Duval (2011, p. 99) afirma que “pensar em Matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros”. Há uma complementaridade entre os registros para que possa ser possível o pensamento e a comunicação de raciocínios matemáticos (DUVAL, 2004). No caso da Geometria, a mobilização da língua natural e do registro figural para a desconstrução das formas e de um terceiro registro, o algébrico, para calcular as relações numéricas estabelecidas pela figura acompanhada da escrita.

O registro figural ampara a designação das figuras e de suas propriedades, enquanto o registro em língua natural enuncia definições, teoremas e hipóteses da Geometria. Para esse autor, as figuras geométricas possuem um importante papel heurístico. Nesta mesma perspectiva, Menoncini (2018, p. 27) defende que as figuras geométricas “exercem um papel fundamental na construção de conhecimentos matemáticos: recorre-se a elas para compreender um conceito, para reconhecer ou aplicar uma propriedade, para demonstrar um teorema, para resolver um problema, etc”. Nesse sentido, a articulação do registro geométrico com outros registros é fundamental para as atividades matemáticas.

Para Duval (2004, p. 159), “uma figura geométrica é a configuração de ao menos duas unidades figurais elementares”, sendo indissociável de suas unidades figurais (adimensional é o ponto; unidimensional é a reta ou curva; bidimensional é um polígono; tridimensional é um poliedro e assim por diante), conforme mostra a figura a seguir.

Figura 11 – Unidades figurais



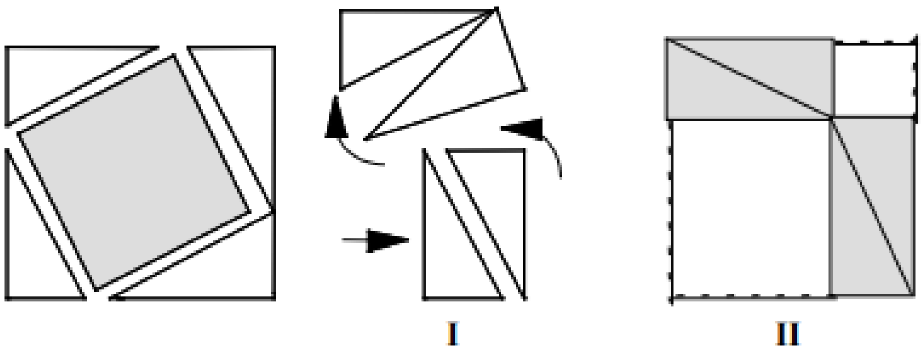
Fonte: Menoncini (2018, p. 28) e Duval (2004, p. 159)

Como se observa na Figura 11, as unidades figurais compõem toda e qualquer figura geométrica. Elas podem pertencer ou não à mesma dimensão da figura. Por exemplo, polígonos são formas retilíneas fechadas, de dimensão 2, mas são formadas por formas retilíneas de dimensão 1 e dos pontos de dimensão 0.

A respeito dos tratamentos figurais, baseada em Duval, Rempel (2021, p. 17) discorre que "os tratamentos figurais, são operações realizadas sobre as unidades figurais de uma figura geométrica com objetivo de transformá-la em outra figura". Duval (2004) defende que as operações mereológicas de reconfiguração e de desconstrução dimensional são os principais tratamentos que podem ser realizados sobre a figura. Sobre isso, ele afirma que "as operações mereológicas de reconfiguração se apoiam sobre a percepção. O simples reconhecimento perceptivo das figuras pode ser uma ajuda ou, ao contrário, um obstáculo para resolver um problema" (DUVAL, 2011, p. 92).

Assim, a reconfiguração baseia-se na transformação de unidades figurais em outras figuras de mesma dimensão cujo formato final pode ou não ser igual à figura inicial. Um exemplo de reconfiguração é apresentado na figura a seguir, sobre uma demonstração do Teorema de Pitágoras no registro das figuras.

Figura 12 – Reconfiguração de uma figura geométrica em unidades de mesma dimensão

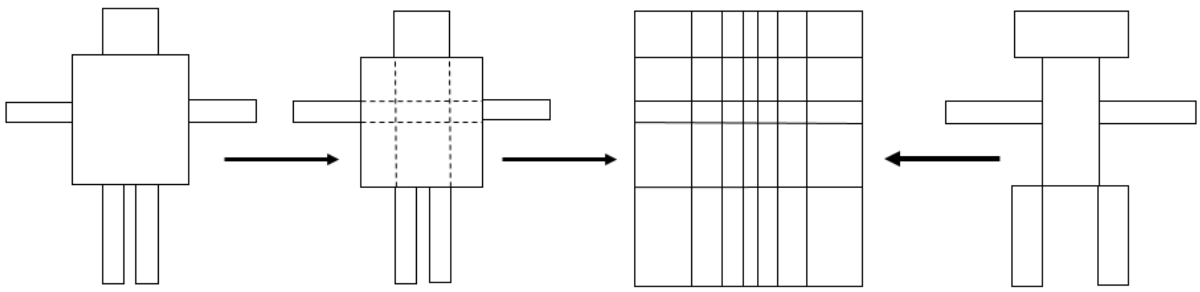


Fonte: Duval (2005, p.40)

Na Figura 12, Duval (2005) decompõe a representação inicial do quadrado em quatro triângulos retângulos e um quadrado menor. Estas subfiguras são todas bidimensionais. A figura final, formada por estas peças reconfiguradas, tem a mesma dimensão da figura original.

O segundo tratamento figural descrito por Duval é a desconstrução dimensional, que "se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades 2D/2D[10] ou 3D/2D que se impõe à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais" (DUVAL, 2011, p. 93). A desconstrução dimensional implica em visualizar uma figura e identificar as unidades figurais presentes nela que estão em dimensões inferiores. Por exemplo, em uma figura bidimensional, as unidades inferiores são as retas e os pontos. A Figura 13 mostra uma desconstrução dimensional.

Figura 13 – Exemplo de desconstrução dimensional



Fonte: Adaptado de Duval (2011, p.89)

Na Figura 13, a figura original é transformada em outra figura bidimensional, a partir do traçado dos segmentos de retas e pontos que são unidades figurais 1D e 0D, indo ao encontro da afirmação de que a desconstrução dimensional "permite analisar a transformação de uma

[10] 0D, 1D, 2D e 3D indicam dimensões 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

forma dada em outra de mesma dimensão mesmo que ela pareça completamente diferente" (DUVAL, 2011, p. 89).

Não apenas os tratamentos figurais são exercitados em Geometria, mas também as diferentes conversões:

> A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística. (DUVAL, 2012b, p. 272).

Desta forma, a ilustração, a descrição e a tradução são exemplos de conversões que envolvem os registros da língua natural e das figuras.

No que se refere às conversões, Duval (2012b, p. 276) enfatiza que "a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em Matemática". Por esta razão, Duval afirma que "das três atividades cognitivas ligadas à semiose, somente as duas primeiras - a formação e o tratamento são levados em conta no ensino" (DUVAL, 2012b, p. 277). A conversão é mais complexa e se relaciona com a necessidade de coordenação de dois registros de representação distintos para um mesmo objeto matemático. Se não ocorre a conversão de um desses dois registros para o outro, e vice-versa, não ocorre a coordenação e, consequentemente, não ocorre a aprendizagem do objeto matemático representado, segundo Duval (2004).

De acordo com Duval (2012b), os insucessos na conversão de registros sugerem noesis, mas não semiose. Insucessos na conversão são muito comuns em Geometria, por exemplo quando o estudante lê um problema com enunciado em língua natural e necessita convertê-lo em uma figura para resolver esse problema, porém, mostra dificuldade em interpretar o que lê em língua natural e consequentemente, não consegue realizar a conversão de ilustração.

Portanto, os tratamentos figurais e as conversões são extremamente importantes na aprendizagem de Geometria. Aprender a ver as figuras, sob o olhar geométrico, implica em operar sobre ela de modo que a nova figura traga algum ganho de conhecimento em relação à anterior. Assim, Duval (2004) traz à tona as apreensões geométricas, que são interpretações que emergem quando se está diante de uma figura geométrica.

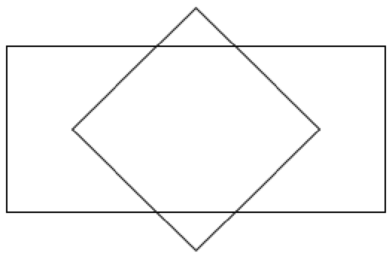
3.4 APREENSÕES GEOMÉTRICAS

Duval (2005, 2012a) utiliza a denominação “apreensões geométricas” para analisar as interpretações que afloram quando o indivíduo interage com figuras. Em sua obra, ele apresenta quatro tipos de apreensões geométricas:

1. **A apreensão perceptiva ou gestáltica:** diz respeito ao reconhecimento visual de formas, de maneira imediata e automática. Ela permite identificar rapidamente uma forma sem exigir conhecimentos matemáticos. Cada pessoa pode exprimir uma apreensão perceptiva distinta.

Por exemplo, na Figura 14 podem prevalecer as leis da Gestalt quando a pessoa reconhece primeiramente o retângulo e o quadrado sobreposto a ele. Somente com um olhar mais cuidadoso, percebe um hexágono, dois triângulos e dois pentágonos não convexos. As leis da Gestalt implicam no reconhecimento imediato da forma global de uma figura, mas dificultam que unidades figurais de dimensões inferiores sejam identificados nela (MENONCINI, 2018).

Figura 14 – Exemplo de apreensão perceptiva

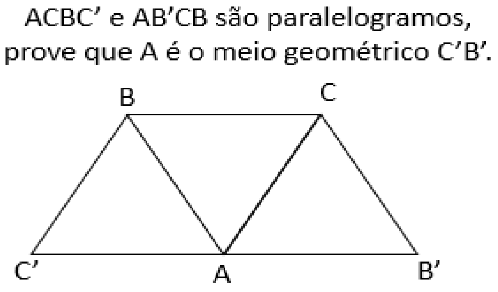


Fonte: Adaptado de Duval (2011, p. 87)

2. **A apreensão discursiva:** manifesta-se quando um enunciado de um problema geométrico é acompanhado por um desenho ou uma figura. O registro discursivo se liga ao figural e colabora com sua interpretação.

Esta apreensão é perceptível na maioria dos exercícios de Geometria trabalhados na escola. Ela mobiliza principalmente a atividade cognitiva de conversão, pois revela-se quando trabalha-se concomitantemente com o registro discursivo (língua natural ou formal) e registro figural. Nesse sentido, a ilustração e a descrição são exemplos de conversões que mobilizam a apreensão discursiva, pois relacionam o enunciado em língua natural (ou formal) com alguma figura. É possível identificar esta característica na figura que segue.

Figura 15 – Exemplo de apreensão discursiva



Fonte: Duval (2012a, p. 122)

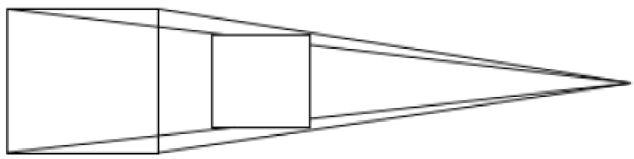
Na Figura 15 é possível identificar um trapézio com um triângulo inscrito ou também, três triângulos justapostos, que não correspondem às figuras descritas no enunciado. A identificação dos paralelogramos contida no enunciado não é tão imediata quanto à identificação do trapézio ou dos triângulos. Entretanto, o enunciado facilita a visualização deles.

3. **A apreensão sequencial:** é a apreensão requerida em construções geométricas, em que existe uma sequência de passos a ser observada e seguida para a construção de um desenho geométrico.

4**. A apreensão operatória:** refere-se às modificações que podem ser realizadas com uma figura inicial graficamente ou mentalmente, podendo ser do tipo:

a) Óticas: são observadas ao deformar, ampliar ou reduzir figuras iniciais e transformá-las em outras, que são as suas imagens. Exemplo: homotetia.

Figura 16 – Exemplo de apreensão operatória óptica, a homotetia

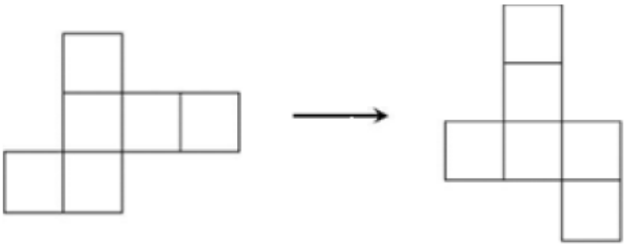


Fonte: Duval (2004, p. 167)

Os quadrados da Figura 16 são semelhantes. O primeiro é transformado no segundo a partir da homotetia, que preserva a forma e orientação da figura original, mas modifica seu tamanho.

b) Posicionais: relacionam-se com a mudança de posição, geralmente em relação uma reta, um eixo ou plano. Exemplos: rotação e translação.

Figura 17 – Exemplo de apreensão operatória posicional, a rotação



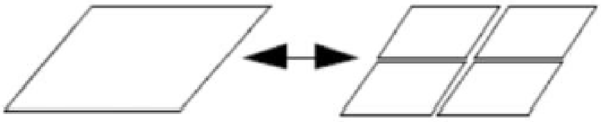
Fonte: Duval (2004, p. 173)

A Figura 17 apresenta um desenho que é rotacionado em 90º no sentido anti-horário, produzindo uma nova figura.

c) Mereológicas: dizem respeito à divisões de uma figura em subfiguras, ou acréscimo de outras figuras. São comumente utilizadas em questões de Geometria e existem três modos de efetuar a decomposição figural:

Decomposição estritamente homogênea: a figura final mantém a forma da figura inicial, pode-se observar isso no exemplo abaixo:

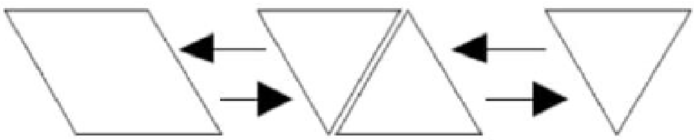
Figura 18 – Exemplo de decomposição estritamente homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21).

Decomposição homogênea: a figura final possui partes idênticas da figura inicial, conforme a seguinte ilustração:

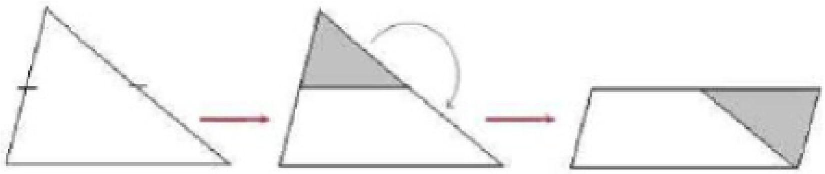
Figura 19 – Exemplo de decomposição homogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21)

Decomposição heterogênea: a forma da figura final é totalmente diferente da forma da figura inicial.

Figura 20 – Exemplo de decomposição heterogênea



Fonte: Duval (2005, p. 21)

É possível identificar que as decomposições transformam uma figura inicial em outra figura através de cortes e reconfigurações. Esta nova figura formada sempre traz alguma contribuição em relação à figura anterior, conforme pontua Duval (2011).

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho configura-se como uma pesquisa bibliográfica, com análise de dados qualitativa. A pesquisa qualitativa não fundamenta-se em dados quantitativos e, segundo Creswell (2010, p. 184) "os procedimentos qualitativos se baseiam em dados de texto e imagem, têm passos únicos na análise de dados e usam estratégias diversas de investigação". Além disso, o caráter bibliográfico da pesquisa se deve às fontes analisadas para a concretização do trabalho, que são inteiramente bibliográficas. Segundo Gil (2002, p. 44) "a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos".

Sendo uma pesquisa bibliográfica, para organizar e interpretar os dados coletados recorre-se à análise de conteúdo de Bardin (2016), por meio da realização de três fases: a pré-análise, que corresponde à formação do *corpus* de documentos; a exploração do material e tratamento dos resultados; e a inferência e interpretação.

A pré-análise corresponde à formação do *corpus* de documentos. Neste trabalho, o *corpus* é uma amostra de três coleções de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, distribuídas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2020. Inicialmente observam-se todos os volumes das três coleções e identificado que em todos eles, somente os volumes do 9º ano do Ensino Fundamental apresentam o Teorema de Pitágoras. Assim, a amostra é composta apenas pelos livros didáticos do 9º ano que seguem:

1. PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 9º ano:** Ensino Fundamental, anos finais.1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.
2. DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 9º ano:** Ensino Fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.
3. SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da Matemática, 9º ano:** Ensino Fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

Como critério para a escolha destas coleções é considerado o último PNLD, de 2020, a versão do professor e o acesso digital aos materiais. De fato, as coleções estão disponíveis na versão de professor através de uma plataforma de acesso a livros didáticos digitais, chamada e-docente[11], das Editoras Ática, Saraiva e Scipione. A escolha da versão do professor justifica-se

[11] Disponível em: https://www.edocente.com.br/. Acesso em 15 jul. 2022.

pelo fato de que é uma versão que contém orientações aos professores e conta com comentários de como as validações do teorema podem ser exploradas em sala de aula, com sugestões adicionais e com mais detalhes do que a versão do aluno, não disponível no site.

Na segunda fase, a análise propriamente dita, é explorado o material selecionado na fase anterior, ou seja, o olhar volta-se para o Teorema de Pitágoras. Por último, na terceira fase da análise do conteúdo, os resultados da avaliação dos materiais selecionados fornecem informações que permitem “adiantar interpretações a propósito dos objetivos descritos na pesquisa” (BARDIN, 2016, 131). Nesta fase, são utilizadas três categorias para analisar as validações do Teorema de Pitágoras em livros didáticos. Estas categorias ficam definidas *a priori*, com base em Balacheff e Duval. No que tange à Balacheff, são identificados os tipos de raciocínio matemáticos presentes nas validações do Teorema de Pitágoras, e quanto a Duval, os registros e operações semióticas explorados. Assim, as categorias ficam definidas a *priori* da seguinte maneira:

Categoria I - Tipos de Raciocínio matemático:

I.1 Explicação

I.2 Argumentação

I.3 Prova:

- Pragmática: Ostensão; Exemplo genérico; Empirismo ingênuo
- Intelectual: Demonstração

Categoria II - Registros e operações semióticas:

II.1 Registros: Língua natural, registro algébrico (língua formal), registro geométrico (registro figural).

II.2 Operações: Tratamentos e conversões.

Para este trabalho, buscando articular os tipos de raciocínio matemático propostos por Balacheff com os registros semióticos de Duval, fez-se necessário redefinir a nomenclatura da prova pragmática por ostensão e da prova intelectual do tipo demonstração, segundo os registros de representação semióticos predominantes nas validações do Teorema de Pitágoras. Como o recurso à ostensão recorre à análise das figuras e pode servir de suporte para diversos tipos de raciocínios matemáticos, a prova pragmática por ostensão passa a ser denominada **prova pragmática por ostensão figural** sempre que explorado essencialmente o registro das figuras e seus tratamentos. Já a prova intelectual do tipo demonstração, que envolve essencialmente os registros geométrico e algébrico, passa a ser denominada **demonstração geométrica-**

algébrica, enquanto que uma prova intelectual que envolve essencialmente o registro algébrico, denomina-se **demonstração algébrica**.

A prova pragmática por empirismo ingênuo se diferencia da pragmática por exemplo genérico, pois neste primeiro tipo de prova são utilizados valores numéricos para validar o Teorema de Pitágoras, enquanto que no segundo, valores genéricos.

5. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção são apresentadas as análises dos três livros didáticos selecionados, conforme os objetivos da pesquisa e as categorias de análise definidas na seção anterior. Desta forma, objetiva-se encontrar nos três livros didáticos de coleções distintas, todos do 9º ano do Ensino Fundamental, quais tipos de raciocínios de validação são utilizados para o Teorema de Pitágoras (explicação, argumentação, prova ou demonstrações). Em seguida, busca-se identificar quais registros semióticos e operações semióticas são mobilizados nestas validações do teorema.

Desta forma, esta seção divide-se em três partes, uma subseção para cada livro didático analisado.

5.1 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DA COLEÇÃO MATEMÁTICA ESSENCIAL

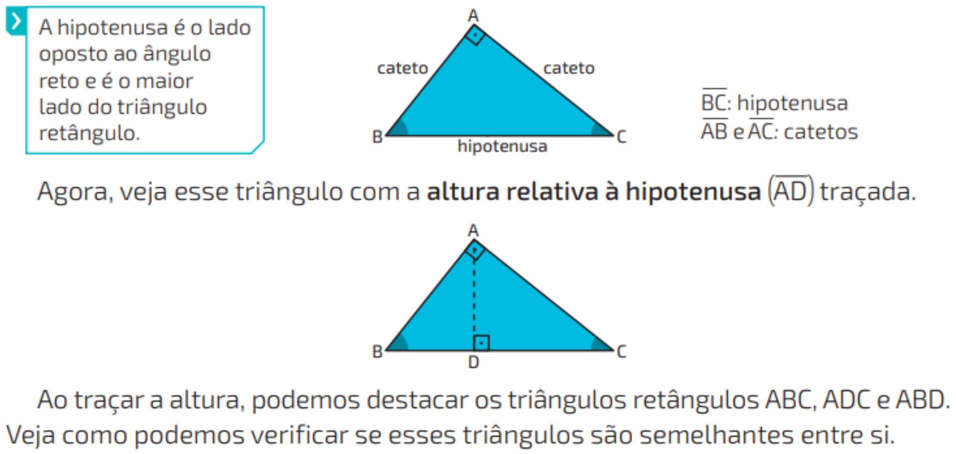
No livro da versão do professor da coleção “Matemática Essencial”, de Pataro e Balestri (2018), o Teorema de Pitágoras é explorado no Capítulo 9 denominado “Relações no triângulo retângulo”. Anteriormente a esse capítulo, os autores apresentam o “Capítulo 8 – Semelhança”, no qual, entre outras coisas, exploram a semelhança de triângulos, conteúdo necessário para o próximo capítulo, em particular para validar o Teorema de Pitágoras para quaisquer triângulos retângulos. Neste livro, há comentários destinados aos professores nas margens esquerda e direita de cada página do livro didático.

Os autores iniciam o Capítulo 9 – Relações no triângulo retângulo – com informações sobre a topografia, ciência das medições, e do uso do teodolito. Segundo Pataro e Balestri (2018, p. 188), o teodolito é um instrumento que “determina com precisão a medida dos ângulos de inclinação ou desvio, tanto na horizontal quanto na vertical”. O livro didático busca primeiramente discutir brevemente situações práticas em que pode ser útil o conhecimento sobre relações métricas e trigonometria no triângulo retângulo, como medir a altura de uma montanha ou o comprimento de uma ponte sobre um cânion.

Só depois de introduzir esta noção prática acerca dos triângulos retângulos, os autores propõem o estudo das relações métricas no triângulo retângulo e com base nestas relações, apresentam posteriormente o Teorema de Pitágoras. Pataro e Balestri (2018, p. 190) iniciam o estudo das relações métricas no triângulo retângulo nomeando os elementos do triângulo retângulo: “a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e é o maior lado do triângulo retângulo” e os catetos são os menores lados do triângulo retângulo. Depois, eles exploram as relações métricas no triângulo retângulo, conforme visualiza-se nas Figuras 21, 22 e 23.

Figura 21 – Introdução às relações métricas: semelhança de triângulos

Subfigura 21.1 -

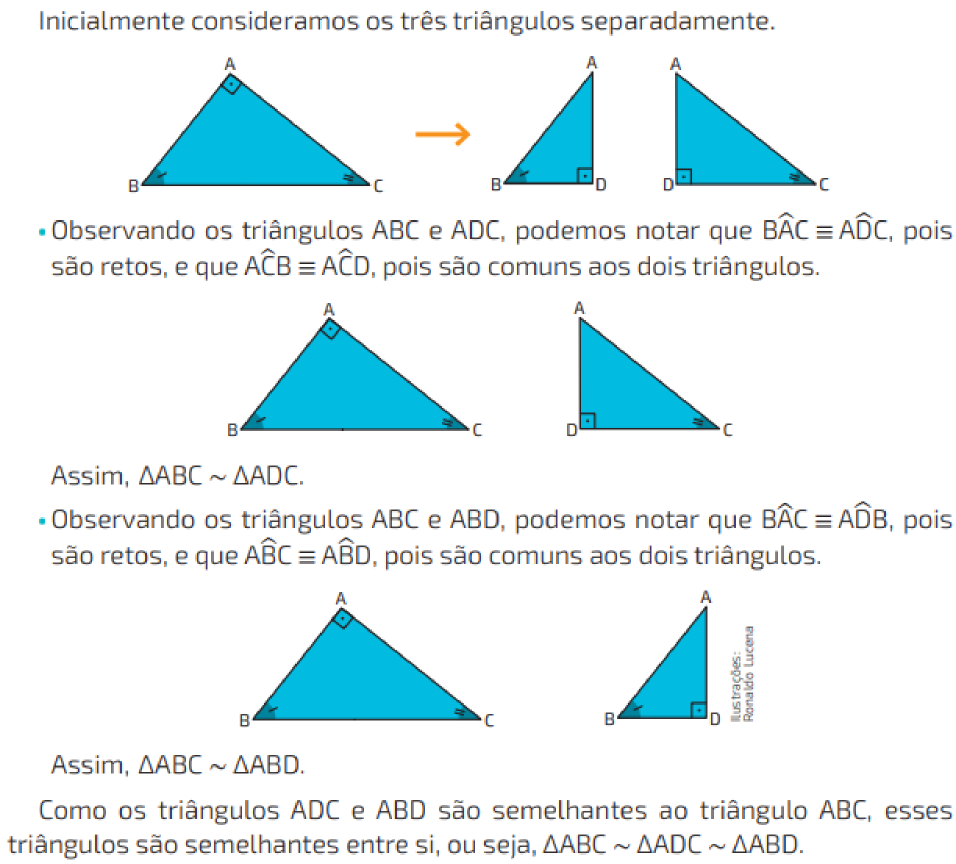

A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e é o maior lado do triângulo retângulo.

$\overline{BC}$: hipotenusa
$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$: catetos

Agora, veja esse triângulo com a **altura relativa à hipotenusa** $(\overline{AD})$ traçada.

Ao traçar a altura, podemos destacar os triângulos retângulos ABC, ADC e ABD. Veja como podemos verificar se esses triângulos são semelhantes entre si.

Subfigura 21.2 -


Inicialmente consideramos os três triângulos separadamente.

- Observando os triângulos ABC e ADC, podemos notar que $B\hat{A}C \equiv A\hat{D}C$, pois são retos, e que $A\hat{C}B \equiv A\hat{C}D$, pois são comuns aos dois triângulos.

Assim, $\Delta ABC \sim \Delta ADC$.

- Observando os triângulos ABC e ABD, podemos notar que $B\hat{A}C \equiv A\hat{D}B$, pois são retos, e que $A\hat{B}C \equiv A\hat{B}D$, pois são comuns aos dois triângulos.

Assim, $\Delta ABC \sim \Delta ABD$.

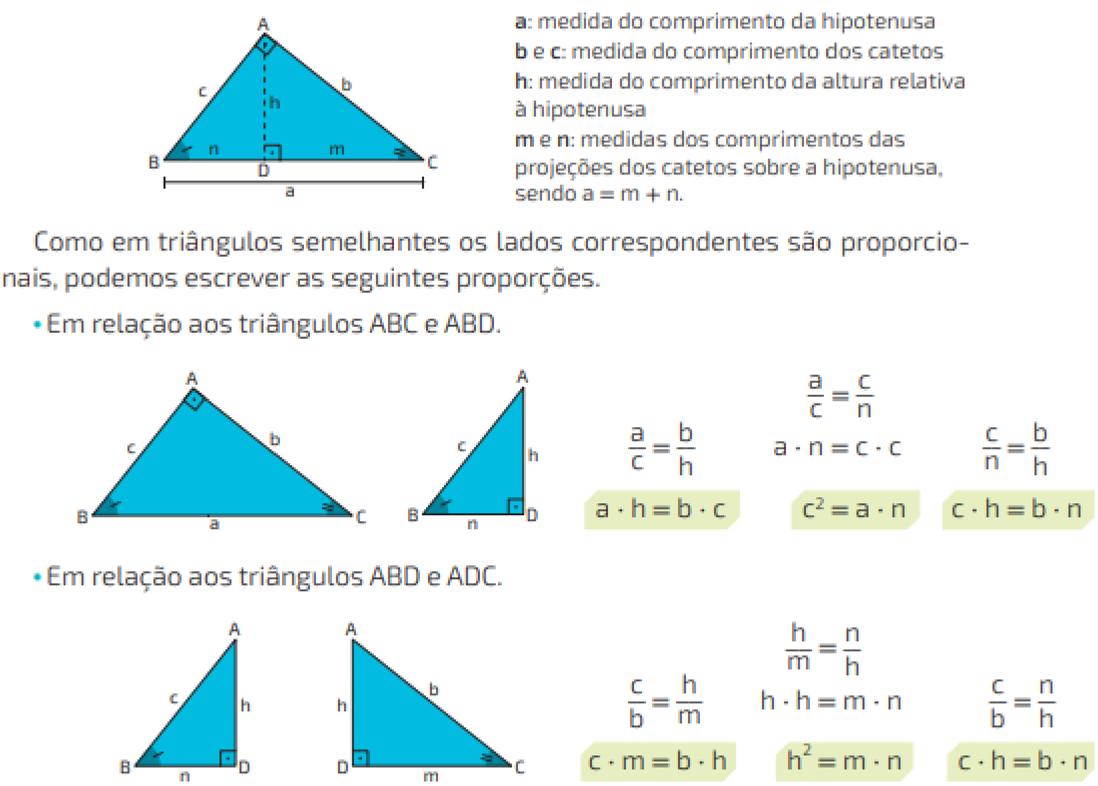
Como os triângulos ADC e ABD são semelhantes ao triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes entre si, ou seja, $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta ABD$.

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 190)

Na Figura 21, o registro geométrico auxilia na visualização da propriedade de semelhança dos triângulos. Para o estudo desta propriedade, observa-se tratamentos figurais ao ser traçada a altura relativa à hipotenusa (Subfigura 21.1) e ao separar o triângulo original ABC nos triângulos ADC e ABD (Subfigura 21.2). Estes tratamentos figurais permitem realizar a operação semiótica de decomposição homogênea, porque mesmo com a decomposição, ao ser traçada a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, a figura formada permanece com o formato inicial. Por fim, os autores retomam o conteúdo discutido no capítulo anterior do livro: a semelhança de triângulos. Eles afirmam que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADC, obtido pelo tratamento figural de decomposição. Analogamente, afirmam que o triângulo ABC e o triângulo ABD são congruentes e concluem que os três triângulos ABC, ADC e ABC são semelhantes.

Para prosseguir o estudo das relações métricas no triângulo retângulo, Pataro e Balestri (2018, p. 191) verificam que "em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois outros triângulos retângulos, que são semelhantes ao maior e, consequentemente, semelhantes entre si. Para descobrir as medidas dos lados e da altura dos triângulos formados a partir do tratamento figural representado pela inserção do traço da altura do triângulo retângulo, os autores utilizam as letras minúsculas *a, b, c, m, n* e *h*:

Figura 22 – Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 191)

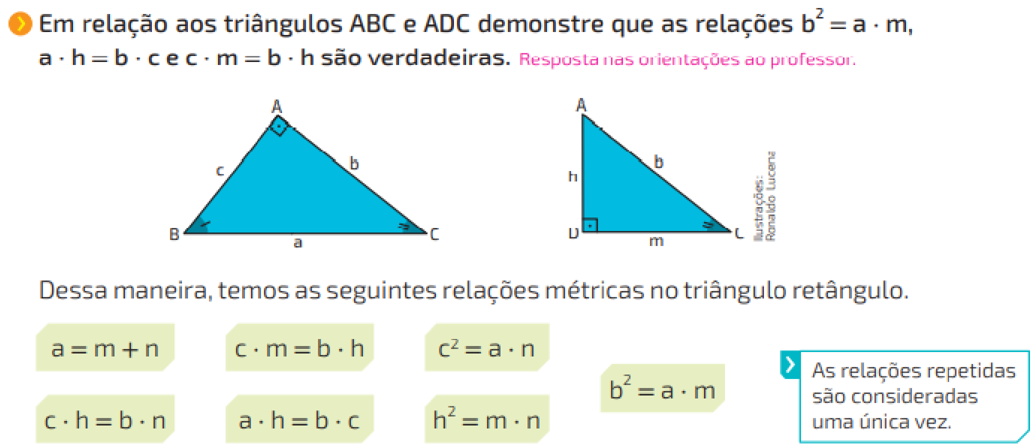
Visualiza-se na Figura 22 a exploração de operações semióticas de conversão entre os registros geométrico e algébrico. Os autores encontram, através da mobilização destes registros, as relações entre as medidas dos lados dos triângulos ABC, ABD e ACD. Para isso, utilizam-se da semelhança de triângulos verificada anteriormente. A semelhança de triângulos implica que a razão entre lados correspondentes de triângulos semelhantes é a mesma. Com isso, os autores realizam tratamentos algébricos para chegar às relações enunciadas, por exemplo:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow \ a \cdot n = c \cdot c \ \rightarrow \ a \cdot n = c^2$$

Em seguida, eles chegam às relações métricas para os triângulos ABC e ABD, e para os triângulos ABD e ADC.

Considerando as relações métricas já realizadas, a atividade posterior propõe aos alunos o desenvolvimento de outras relações métricas, como se observa na Figura 23:

Figura 23 – Exercício sobre relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 191)

Na lateral desta atividade, ainda na página 191, Pataro e Balestri (2018, p. 191) colocam como orientação ao professor: “estimule os alunos a verbalizarem e a escreverem com palavras estas expressões durante as discussões desenvolvidas no estudo da página”. O intuito desta orientação é fazer com que os alunos respondam o porquê de cada relação encontrada, com suas próprias palavras. Com base em Balacheff (2000), esta orientação pode ser entendida como um estímulo aos alunos para a promoção do raciocínio do tipo explicação. Caso a explicação do aluno se ancore em argumentos fortes, ela se torna uma argumentação e caso obtenha apoio de uma comunidade, este simples exercício pode culminar em uma prova (BALACHEFF, 2022).

Com base em Duval (2005), Pataro e Balestri (2018), ao incentivar que os alunos verbalizem e escrevam com suas palavras seu raciocínios, estão explorando o registro da língua natural e os tratamentos possíveis neste registro.

Voltando às Figuras 21, 22 e 23 e considerando as categorias de análise relativas ao tipo de raciocínio matemático utilizado, as relações métricas no triângulo retângulo provadas por Pataro e Balestri (2018) são demonstrações, visto que Pataro e Balestri (2018) retomam definições e propriedades matemáticas, como a definição de hipotenusa. São demonstrações geométricas-algébricas, pois mobilizam o registro figural e o registro algébrico simultaneamente.

Os autores não apresentam a prova do Teorema de Pitágoras logo após o estudo das relações métricas. Primeiro demonstram as relações métricas no triângulo retângulo e em seguida propõem que os alunos utilizem-nas para a resolução de exercícios. Em sequência, Pataro e Balestri (2018) apresentam um breve texto histórico sobre Pitágoras, enunciam o teorema da seguinte forma “em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa” (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 194). Após isso, citam um exemplo de triângulo retângulo para o qual vale a propriedade, o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Por último, mostram “recortes de textos antigos com demonstrações do Teorema de Pitágoras”, conforme Figura 24.

Figura 24 – Recortes de textos antigos com demonstrações do Teorema de Pitágoras

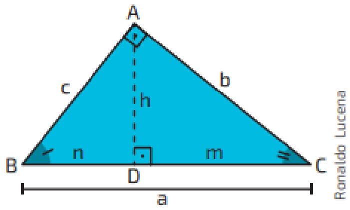
Grega, por volta do ano 800. Arábica, por volta do ano 1250. Francesa, do ano 1564. Chinesa, do ano 1607.

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 194)

De acordo com a Figura 24, Pataro e Balestri (2018) utilizam a expressão “demonstrações do Teorema de Pitágoras” para mostrar as diferentes provas para o referido teorema, produzidas por civilizações antigas. Pela classificação de Balacheff, elas são provas pragmáticas por ostensão, devido ao fato de mobilizarem apenas a ação sobre figuras. No entanto, conforme as categorias de análise definidas, são provas pragmáticas por ostensão figural. Após esta exposição histórica no livro didático, uma validação do Teorema de Pitágoras é apresentada, conforme a Figura 25.

Figura 25 – Prova do Teorema de Pitágoras em Pataro e Balestri (2018)

Observe uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando algumas das relações métricas estudadas anteriormente.



Nesse triângulo, temos que $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$. Adicionando essas relações membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$ ⟵ fatoramos am + an colocando **a** em evidência

$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$ ⟵ como m + n = a, substituimos m + n por **a**

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 195)

Na apresentação do Teorema de Pitágoras acima, observa-se uma prova intelectual, classificada como uma demonstração, pois ela se utiliza da língua formal para expressar o raciocínio matemático. Esta prova utiliza relações métricas no triângulo retângulo, obtidas anteriormente a partir de conversões entre os registros geométrico e algébrico, além de explorar tratamentos algébricos. Por ser uma demonstração que envolve essencialmente os registros geométrico e algébrico, é uma demonstração geométrica-algébrica.

Seguindo a análise do livro didático, os autores apresentam outra forma de provar o Teorema de Pitágoras com as relações métricas no triângulo retângulo ABC. Esta é deixada como exercício aos alunos e é apresentada com o seguinte enunciado: “a partir do triângulo ABC e utilizando as relações (métricas) $\mathrm{b}^2 = \mathrm{a} \cdot \mathrm{m}$, $c \cdot h = b \cdot n$, $a \cdot h = b \cdot c$ e $a = m + n$, demonstre o Teorema de Pitágoras” (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 195). Mas na margem inferior do livro, encontrada somente na versão do professor, é disponibilizada a prova desse enunciado (Figura 26):

Figura 26 – Outra prova do Teorema de Pitágoras em Pataro e Balestri (2018)

- $c \cdot h = b \cdot n$

  $h = \frac{b \cdot n}{c}$

- $a \cdot h = b \cdot c$

  $h = \frac{b \cdot c}{a}$

- $\frac{b \cdot n}{c} = \frac{b \cdot c}{a}$

  $c^2 \cdot b = a(b \cdot n)$

  $c^2 = a \cdot n$

Adicionando essas relações membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$ ← fatoramos $a \cdot m + a \cdot n$ colocando **a** em evidência

$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$ ← temos $m + n = a$

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 195)

A prova apresentada na Figura 26 é uma prova intelectual do tipo demonstração. Por ser essencialmente algébrica, é classificada como demonstração algébrica. Além disso, mais à direita nela há pequenas incursões em língua natural como forma de clarificar os tratamentos algébricos realizados na prova. Estas incursões são sinalizadas por flechas azuis, no lado direito das equações.

Logo depois da apresentação do teorema e sua prova, os autores ainda afirmam que é verdadeira a recíproca do Teorema de Pitágoras: “se em um triângulo o quadrado da medida do comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas do comprimento dos outros dois lados, então esse triângulo é retângulo” (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 195). Entretanto, não apresentam uma prova para isso.

5.2 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DA COLEÇÃO TELÁRIS MATEMÁTICA

No livro didático da coleção “Teláris Matemática”, do autor Dante (2018), o Teorema de Pitágoras é explorado no Capítulo 6, denominado “Relações métricas nos triângulos retângulos”. Anteriormente a esse capítulo, há o Capítulo 5 “Geometria: semelhança, vistas ortogonais e perspectiva”, em que as noções de perpendicularismo, projeção ortogonal e semelhança de triângulos são trabalhadas. Assim como Parato (2018), Dante (2018) também inicia o Capítulo 6, no qual explora o Teorema de Pitágoras, com uma problematização em que instiga os leitores a descobrirem o tamanho de um fio que é esticado do topo do prédio até o ponto mais alto de uma árvore.

O autor explora primeiramente verificações empíricas do Teorema de Pitágoras. Uma sugestão dada aos professores na margem lateral do início do Capítulo 6 diz:

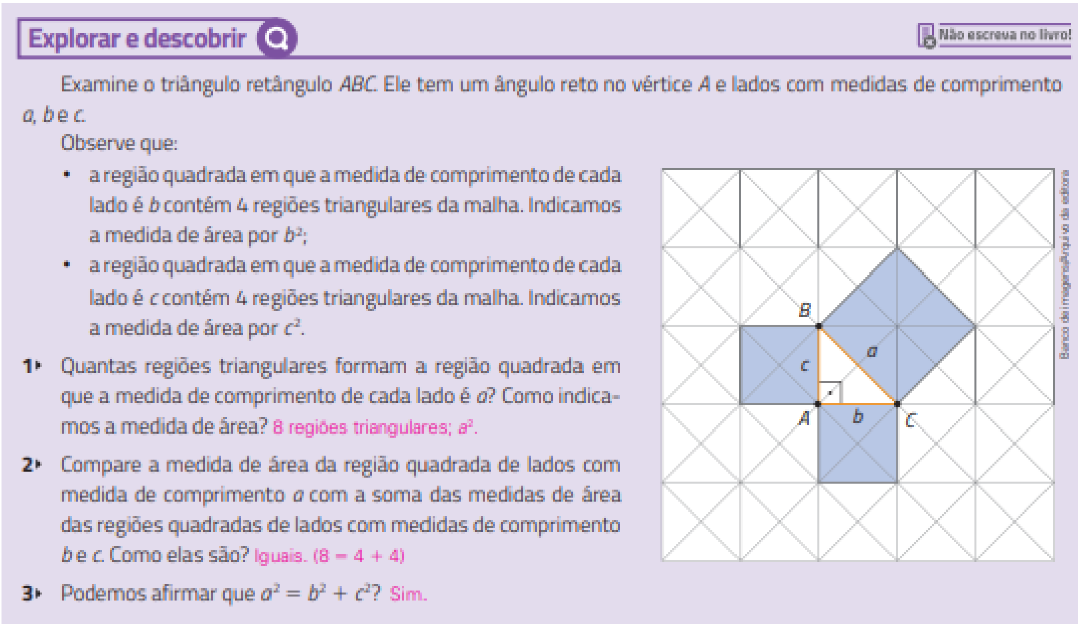
> Para esta aula, prepare com antecedência conjuntos de palitos contendo 8 unidades em cada um deles. [...] Identifique em cada palito as medidas de comprimento, em centímetros, que devem ser de 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm, 12 cm e 13 cm. Pergunte aos alunos se, usando 3 palitos desses quaisquer, eles conseguem construir

> um triângulo retângulo. [...] Espera-se que tenham sido encontradas apenas 2 respostas: 3 cm, 4 cm e 5 cm; 5 cm, 12 cm e 13 cm. [...] Verifique se algum aluno conseguiu encontrar uma relação entre essas medidas. Nesse momento, apresente a eles o teorema de Pitágoras. (DANTE, 2018, p. 184).

Neste trecho percebe-se o caráter empírico e prático empregado pelo autor para a verificação do Teorema de Pitágoras. Esta forma de verificação é descrita por Balacheff (2000) como uma prova pragmática do tipo empirismo ingênuo, visto que espera-se que a partir de dois exemplos de triângulos retângulos (o triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm; e o triângulo de lados 5 cm, 12 cm e 13 cm) os alunos concluam que o quadrado do maior lado deles possui área igual aos quadrados dos seus lados menores, para qualquer triângulo retângulo.

No corpo das páginas do livro didático, Dante também propõe tarefas que envolvem o recurso à ostensão e que levam a conjecturar que o quadrado da hipotenusa em um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos. Percebe-se isso na imagem que segue:

Figura 27 – Conjectura do Teorema de Pitágoras


Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Examine o triângulo retângulo *ABC*. Ele tem um ângulo reto no vértice *A* e lados com medidas de comprimento *a*, *b* e *c*.

Observe que:

- a região quadrada em que a medida de comprimento de cada lado é *b* contém 4 regiões triangulares da malha. Indicamos a medida de área por b^2;
- a região quadrada em que a medida de comprimento de cada lado é *c* contém 4 regiões triangulares da malha. Indicamos a medida de área por c^2.

1 Quantas regiões triangulares formam a região quadrada em que a medida de comprimento de cada lado é *a*? Como indicamos a medida de área? 8 regiões triangulares; a^2.

2 Compare a medida de área da região quadrada de lados com medida de comprimento *a* com a soma das medidas de área das regiões quadradas de lados com medidas de comprimento *b* e *c*. Como elas são? Iguais. (8 = 4 + 4)

3 Podemos afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$? Sim.

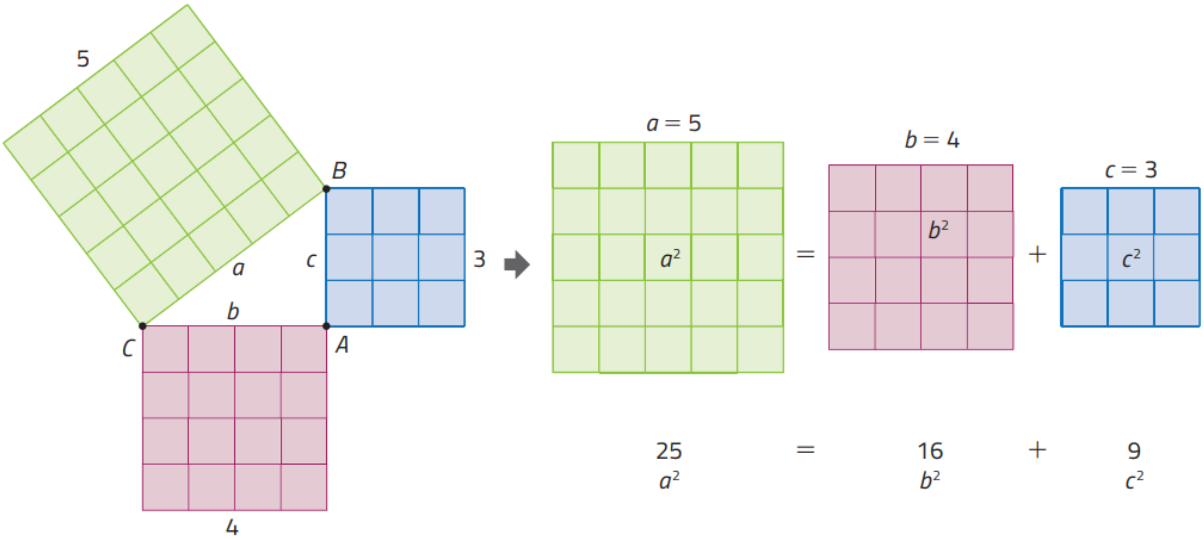
Fonte: Dante (2018, p. 185)

O autor consegue através da atividade descrita na Figura 27 explorar uma prova pragmática por empirismo ingênuo, que mobiliza os registros em língua natural e figural, predominantemente. Esta atividade pressupõe o olhar dos alunos para a ilustração à direita, composta por um triângulo retângulo isósceles, de modo que a partir deste triângulo seja possível conjecturar o Teorema de Pitágoras. Desta forma, a ilustração pode levar à falsa conclusão de que, o que é conjecturado só vale para esse tipo de triângulo retângulo.

Só depois da atividade apresentada na Figura 27, Dante (2018, p. 184) enuncia o Teorema de Pitágoras: “em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros 2 lados. Esta relação é chamada de Teorema de Pitágoras”. Ou seja, primeiramente o autor verifica a validade do Teorema para um caso particular e em sequência o enuncia.

Após enunciar o Teorema de Pitágoras, Dante (2018) verifica a validade dele para um caso particular de triângulo retângulo, conforme Figura 28.

Figura 28 – Constatação do Teorema de Pitágoras

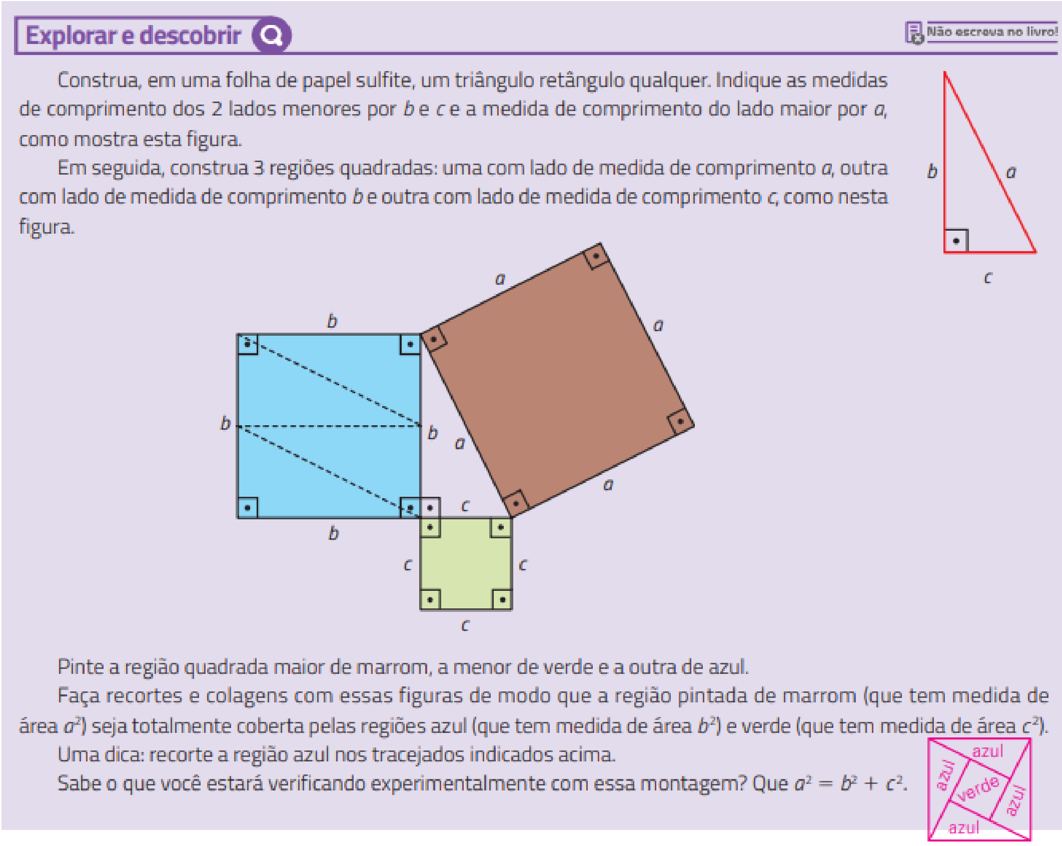


Fonte: Dante (2018, p. 185)

Na Figura 28, Dante (2018) realiza a operação de tratamento figural por meio da decomposição da figura inicial em três novas figuras, que são três quadrados de lados 5, 4 e 3 unidades de comprimento. Esta decomposição permite identificar que a área do quadrado de lado 5 equivale à soma das áreas dos quadrados de lados 3 e 4. Ou seja, a verificação acima poderia ser descrita como uma prova pragmática por empirismo ingênuo, visto que o autor pretende concluir que a relação $a^2 = b^2 + c^2$ vale para valores particulares $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ e, portanto, deve valer para quaisquer triângulos retângulos de medidas a, b e c.

Para novamente possibilitar que os estudantes concluam que a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é válida para qualquer triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, Dante (2018) recorre a uma prova pragmática, desta vez, uma prova que envolve o manuseio de material concreto, através de construção de desenhos, recortes, sobreposições e colagens, conforme Figura 29.

Figura 29 – Prova do Teorema de Pitágoras com recortes e colagens



Explorar e descobrir Não escreva no livro!

Construa, em uma folha de papel sulfite, um triângulo retângulo qualquer. Indique as medidas de comprimento dos 2 lados menores por *b* e *c* e a medida de comprimento do lado maior por *a*, como mostra esta figura.

Em seguida, construa 3 regiões quadradas: uma com lado de medida de comprimento *a*, outra com lado de medida de comprimento *b* e outra com lado de medida de comprimento *c*, como nesta figura.

Pinte a região quadrada maior de marrom, a menor de verde e a outra de azul.

Faça recortes e colagens com essas figuras de modo que a região pintada de marrom (que tem medida de área a^2) seja totalmente coberta pelas regiões azul (que tem medida de área b^2) e verde (que tem medida de área c^2).

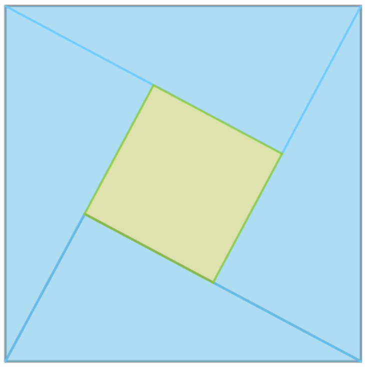
Uma dica: recorte a região azul nos tracejados indicados acima.

Sabe o que você estará verificando experimentalmente com essa montagem? Que $a^2 = b^2 + c^2$.

Fonte: Dante (2018, p. 186)

A prova do Teorema de Pitágoras apresentada anteriormente é do tipo pragmática, visto que incentiva os estudantes a utilizarem recursos práticos como recortes e colagens de figuras. Ela não propõe o uso de medidas de comprimento dado que o autor solicita primeiramente a construção de um triângulo retângulo qualquer, genérico. Assim, devido ao caráter genérico desta prova e ao recurso à ostensão que ela impõe, é possível caracterizá-la como uma prova pragmática do tipo exemplo genérico. Dante (2018) chama esta prova de verificação experimental, não chegando a citá-la como uma demonstração. Entretanto, esta prova também pode ser classificada como uma prova pragmática por ostensão figural, já que a verificação do Teorema pode ocorrer essencialmente com base na figura, isto é, por meio da operação semiótica de reconfiguração, como observa-se no quadrado que aparece na resolução e que é reapresentado na figura a seguir.

Figura 30 – Reconfiguração na prova do Teorema de Pitágoras com recortes e colagens



Fonte: Adaptado de Dante (2018, p. 186)

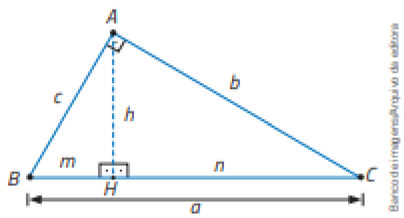
Esta representação do quadrado é obtida a partir da justaposição dos quatro triângulos retângulos em azul e do quadrado em verde, os quais aparecem na resolução da atividade mostrada na Figura 29. Para esta justaposição, realiza-se o tratamento figural de reconfiguração através do manuseio do material concreto, ou seja, por meio do recorte e da reorganização do quadrado e dos triângulos.

Dante (2018), após a prova pragmática da Figura 29 traz algumas atividades para a verificação se a soma dos quadrados dos dois menores lados de triângulos acutângulos (com todos ângulos menores do que o ângulo reto) e de obtusângulos (com um ângulo maior do que o ângulo reto) resultam no quadrado do lado maior. Só depois o autor apresenta quatro diferentes provas teóricas do Teorema de Pitágoras. A primeira, também utiliza as relações métricas que o autor trabalha de forma muito parecida com Pataro e Balestri (2018), conforme a próxima figura.

Figura 31 – Prova do Teorema de Pitágoras com relações métricas

Subfigura 31. 1 –

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A, com a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa.

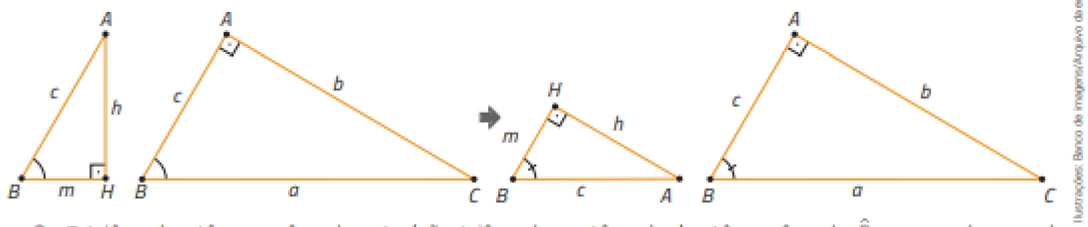


Temos que: $\boxed{a = m + n}$ (I)

Subfigura 31.2 –

Vamos considerar os triângulos retângulos *HBA* e *ABC*.

Colocando os 2 triângulos na mesma posição, podemos perceber melhor os ângulos e os lados correspondentes (homólogos).



Os 2 triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\hat{B}$ comum; logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Se os triângulos são semelhantes, então os lados homólogos têm medidas de comprimento proporcionais, o que nos permite escrever:

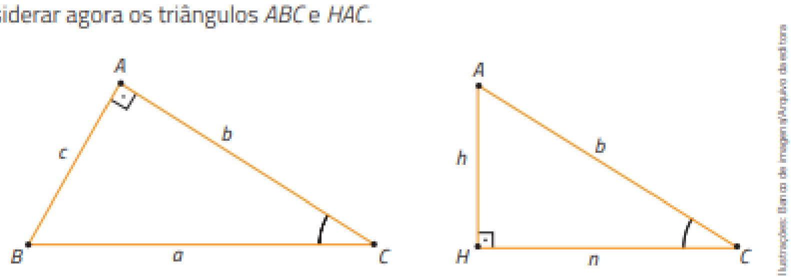
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

Dessas proporções, chegamos a estas relações.

$\boxed{c^2 = am}$ **(II)** $\boxed{ah = bc}$ **(III)** $\boxed{ch = bm}$ **(IV)**

Subfigura 31.3 –

Vamos considerar agora os triângulos *ABC* e *HAC*.



Esses 2 triângulos têm um ângulo reto e o ângulo $\hat{C}$ é comum; portanto, são semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle HAC$.

Como os lados homólogos têm medidas de comprimento proporcionais, escrevemos as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

Delas, obtemos estas relações.

$\boxed{b^2 = an}$ **(V)** $\boxed{bh = nc}$ **(VI)** $\boxed{ah = bc}$ **(VII)**

Adicionando os 2 membros das igualdades **II** e **V**, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = an \\ c^2 = am \end{array}\right\} b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n+m)$$

Como $a = m + n$, da relação **I**, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Fonte: Dante (2018, p. 189)

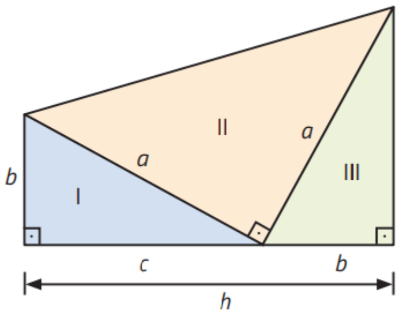
A prova apresentada na Figura 31 difere das provas trazidas por Pataro e Balestri (2018) em alguns poucos detalhes, mas Dante realiza apenas um tipo de prova com as relações métricas, não duas, como Pataro e Balestri (2018) sugerem. Mesmo assim, a prova do Teorema de Pitágoras utilizando relações métricas em Dante (2018), é, assim como a prova de Pataro e Balestri (2018), uma demonstração geométrica-algébrica.

Logo em seguida, Dante (2018, p. 190) traz o título "Outras demonstrações para o Teorema de Pitágoras", em que apresenta as outras três provas para o referido teorema, todas de caráter teórico, não experimental, como as trazidas antes da prova com relações métricas. Visualizam-se estas provas na Figura 32, Figura 33 e Figura 34.

Figura 32 – Primeira prova teórica do Teorema de Pitágoras em Dante (2018)

- Vamos determinar a medida de área da região limitada por este trapézio de 2 maneiras: pela fórmula $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ e pelo cálculo das medidas de área das 3 regiões triangulares.

Esta demonstração é atribuída a James Garfield (1831-1881), na época, congressista norte-americano e, mais tarde, 20º presidente dos Estados Unidos.



$$A_{\text{região trapezoidal}} = \frac{(b+c)\cdot(b+c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \quad \textbf{(I)}$$

$$A_{\text{região trapezoidal}} = A_{\text{região triangular I}} + A_{\text{região triangular II}} + A_{\text{região triangular III}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{região trapezoidal}} = \frac{cb}{2} + \frac{aa}{2} + \frac{cb}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \quad \textbf{(II)}$$

Igualando os resultados de **I** e **II**, obtemos:

$$\frac{2bc + a^2}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Dante (2018, p. 190)

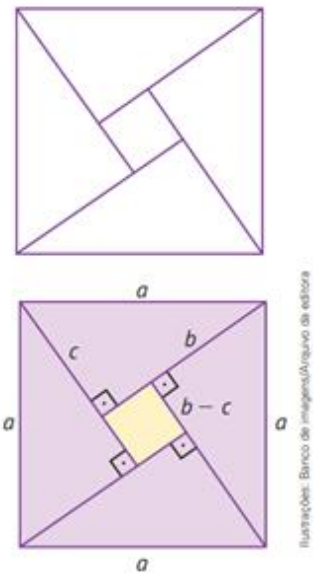
Dante (2018) realiza a prova acima utilizando-se da fórmula da área de um trapézio e da fórmula da área de triângulo, visto que a figura apresentada é um trapézio constituído por 3 triângulos. Para melhor observar as bases b e c do trapézio e também sua altura $h = b + c$, pode-se recorrer à apreensão operatória posicional para rotacionar a figura 90^o em sentido horário. Como a área do trapézio é igual a soma das áreas dos triângulos, o autor iguala o resultado encontrado e chega à prova do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos de catetos b e c e hipotenusa a, conforme os triângulos azul e verde presentes no trapézio. Esta prova mobiliza essencialmente os registros figural e algébrico, por isso pode ser caracterizada como demonstração geométrica-algébrica.

A segunda prova de caráter teórico para o Teorema de Pitágoras trazida por Dante (2018) é apresentada na Figura 33.

Figura 33 – Segunda prova teórica do Teorema de Pitágoras em Dante (2018)

Uma demonstração bastante curiosa do teorema de Pitágoras foi apresentada pelo matemático hindu Bháskara (1114-1185), que elaborou esta figura e escreveu embaixo "Aqui está.". Um verdadeiro enigma que a Álgebra nos ajuda a solucionar.
Traçamos 4 triângulos retângulos com hipotenusa de medida de comprimento a e catetos de medidas de comprimento b e c. A medida de área da região quadrada maior (a^2) é igual à soma das medidas de área das 4 regiões triangulares $\left(4 \cdot \frac{bc}{2}\right)$ e da medida de área da região quadrada menor $(b-c)^2$.
Assim:

$$a^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + (b-c)^2 \Rightarrow a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



Fonte: Dante (2018, p. 190)

Aqui, Dante (2018) traz a verificação teórica da prova pragmática com recortes e dobraduras explorada na Figura 29. Como o autor afirma, a autoria desta prova seria de Bháskara[12] e esse matemático teria provado o Teorema de Pitágoras a partir das ilustrações acima e teria dito "aqui está". Ou seja, para o próprio Bháskara a figura por si só já era o suficiente para provar que o Teorema de Pitágoras era válido para qualquer triângulo retângulo. Tendo isso em vista, se a prova dada acima fosse constituída apenas pela figura da direita, ela poderia ser classificada como pragmática por ostensão figural, visto que seria baseada essencialmente na visualização da figura.

Entretanto, da forma que Dante apresenta a Figura 33, para que a prova se concretize, além do registro figural também se utiliza o registro algébrico para generalizar o que é visualizado na figura. Assim, tal validação classifica-se como uma prova intelectual do tipo demonstração geométrica-algébrica.

A terceira prova teórica trazida por Dante (2018) é uma prova descrita como clássica por possivelmente ter sido a prova dada por Pitágoras, de acordo com Eves (2004). Esta prova já é apresentada na Figura 9 do presente trabalho, explorada na seção de Referencial Teórico,

---

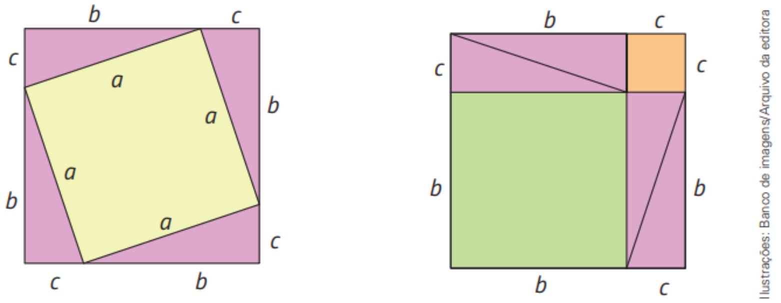
[12] Bháskara Akaria (1114-1185) é um matemático, astrônomo e astrólogo indiano. Ele é conhecido no Brasil por causa do nome concedido à fórmula resolutiva da equação de segundo grau, porém, em outros países esta fórmula não é chamada de "fórmula de Bháskara", ela é denominada "fórmula resolutiva da equação de segundo grau", e acredita-se que nem tenha sido Bháskara a primeira pessoa a chegar nela (ROQUE, 2012).

subseção “Provas do Teorema de Pitágoras ao longo da história”. Ela pode ser caracterizada como uma prova pragmática por exemplo genérico:

Figura 34 – Terceira prova teórica do Teorema de Pitágoras

Uma terceira demonstração é obtida comparando medidas de área (de acordo com historiadores, a demonstração de Pitágoras deve ter sido uma demonstração geométrica semelhante à que segue).
As 2 regiões quadradas têm lados de medida de comprimento $b + c$.
Logo, elas têm a mesma medida de área.
Retirando das 2 regiões quadradas 4 regiões triangulares congruentes, o que sobra na primeira (a^2) é igual ao que sobra na segunda ($b^2 + c^2$). Então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Fonte: Dante (2018, p. 191)

Trata-se da provável primeira prova para o Teorema de Pitágoras, a mesma trazida na Figura 9. Observando a Figura 34, para que a figura inicial, à esquerda, transforme-se em uma nova figura de mesma área (à direita), é necessário realizar a operação semiótica de reconfiguração, decompondo a figura em subfiguras de mesma dimensão. Por isso, tal validação trata-se de uma prova pragmática. A figura por si só prova o teorema, não sendo necessário maior suporte algébrico além das letras simbolizando a medida dos lados das figuras geométricas envolvidas. Logo, ela pode ser considerada um exemplo de prova pragmática por ostensão figural.

Dante (2018) traz variadas formas de provar o Teorema de Pitágoras, e nas margens laterais do livro, destinadas a orientações dos professores, ele argumenta sua escolha por exibir diversas provas para um mesmo teorema e justifica ser de suma importância apresentar provas dos teoremas aos estudantes ou estimulá-los a chegar nelas em vez de apenas apresentar-lhes fórmulas prontas.

> Os alunos, frequentemente, preocupam-se com a memorização das fórmulas e a aplicação delas nas resoluções das atividades, sem que haja um processo reflexivo. É importante, sempre que possível, criar situações e contextos que deem sentido aos assuntos e fórmulas apresentados, seja fazendo demonstrações, seja chegando a elas intuitivamente. É interessante que o aluno perceba que há um raciocínio e uma sequência lógica para chegar a tais resultados. (DANTE, 2018, p. 189).

Segundo Dante (2018) o aluno precisa ser incentivado a buscar as fórmulas intuitivamente, como ele mesmo sugere nas provas pragmáticas e experimentais para o Teorema de Pitágoras (Figura 27, 28 e 29), envolvendo materiais concretos como palitos de churrasco ou recortes e sobreposições em papel. O autor conclui afirmando que é importante estimular o raciocínio dos estudantes e sua reflexão, para que eles saibam porque vale determinada fórmula, mesmo que ao resolver os exercícios, eles apelem à fórmula pronta.

5.3 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DA COLEÇÃO TRILHAS DE MATEMÁTICA

O terceiro e último livro didático analisado é intitulado “Trilhas de Matemática” e é de autoria de Sampaio (2018). Esse livro possui uma organização distinta dos demais. Ele é dividido em unidades e cada unidade conta com capítulos.

O Teorema de Pitágoras é apresentado na Unidade 4, denominada “Triângulo retângulo e circunferência”. Esta unidade é antecedida pela Unidade 3, “Proporcionalidade e semelhança”, na qual explora-se a semelhança de triângulos, além de uma breve parte teórica sobre razão e proporção. A Unidade 4 é dividida em três capítulos, sendo que o Capítulo 10 é intitulado “Relações métricas no triângulo retângulo”, o Capítulo 11 é “Razões trigonométricas no triângulo retângulo” e o Capítulo 12 é “Circunferência, arcos e relações métricas”. O Teorema de Pitágoras é abordado no Capítulo 11 desta unidade.

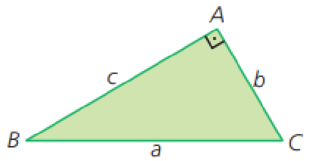
O autor inicia o Capítulo 11 referenciando a existência de triângulos retângulos na arquitetura, em catedrais medievais, telhados de casas e pistas de *skate*. Em seguida, retoma o conceito de ângulo reto, de projeção ortogonal, define catetos e hipotenusa de triângulos retângulos. Na sequência, assim como Dante (2018), Sampaio (2018) investiga um triângulo retângulo em especial, o de lados 3, 4 e 5 e traz o enunciado do Teorema de Pitágoras, sem apresentar sua prova.

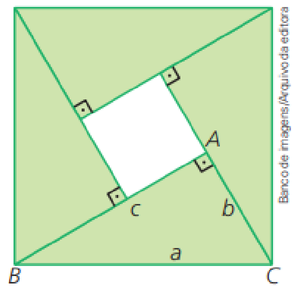
Ao enunciar o teorema apenas com a observação da sua validade a partir do triângulo retângulo de catetos 3, 4 e hipotenusa 5, o autor realiza uma prova que Balacheff (1988; 2000) caracteriza como prova pragmática por empirismo ingênuo, na qual realiza-se conclusões apenas visualizando alguns exemplos particulares. Só depois da verificação para esse caso particular e de enunciar o teorema, o autor prova que a relação observada no exemplo do triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5 sempre é válida, conforme Figura 35.

Figura 35 – Prova do Teorema de Pitágoras

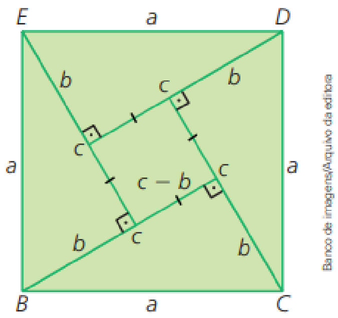
Subfigura 35.1 –

Considere o triângulo *ABC* representado abaixo e a figura obtida pela composição de quatro triângulos congruentes a ele.





Se considerarmos que o quadrilátero menor obtido na composição faz parte da figura, obteremos um quadrado *BCDE* com lado de medida *a*.

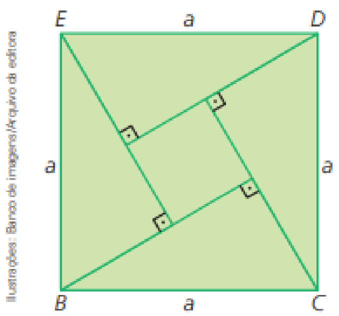


Subfigura 35.2 –

Veja que o quadrilátero menor também é um quadrado e tem lado de medida $c - b$.

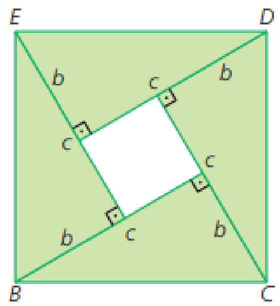
A medida da área do quadrado *BCDE* pode ser calculada de dois modos diferentes:

- Pela multiplicação das medidas de seus lados.



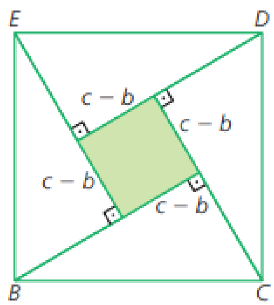
Medida da área total: a^2

- Pela adição das medidas das áreas dos 4 triângulos com a medida da área do quadrado menor. Sendo A_1 a área dos quatro triângulos e A_2 a medida da área do quadrado menor, temos:



$$A_1 = 4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right)$$

$$A_1 = 2bc$$



$$A_2 = (c - b)^2$$

$$A_2 = c^2 - 2bc + b^2$$

Subfigura 35.3 –

A medida da área do quadrado *BCDE* é a soma de A_1 e A_2:

Área total: $A_1 + A_2$

Área total: $2bc + c^2 - 2bc + b^2$

Área total: $b^2 + c^2$

Então, como a medida da área do quadrado *BCDE* pode ser representada por a^2 e por $(b^2 + c^2)$, concluímos que:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

É verdade também que, se em um triângulo cujo comprimento dos lados mede *a*, *b* e *c*, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então ele é um triângulo retângulo com hipotenusa de medida *a*.

Fonte: Sampaio (2018, p. 123-124)

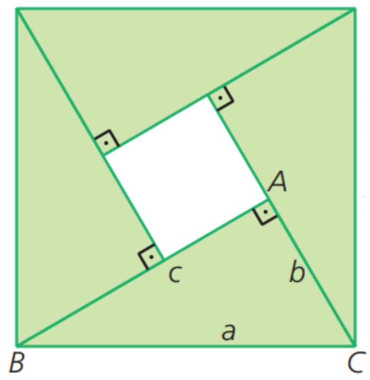
Na subfigura 35.1, Sampaio (2018) inicia a prova usando o registro da língua natural para enunciar o triângulo retângulo ABC com medidas genéricas a, b e c. Em seguida, partindo deste triângulo e realizando tratamentos no registro das figuras, cria um quadrilátero de lado a, formado pela justaposição de quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo inicial. Devido ao fato de que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, o quadrilátero de lado a é na verdade um quadrado. Dentro desse quadrado de lado a, há um quadrado cujos lados medem $c - b$. Também percebe-se, na subfigura 35.1, um tratamento figural ao preencher o quadrado interno de lado $c - b$.

Logo em seguida, na subfigura 35.2, o autor propõe duas formas para calcular a área do quadrado de lado a, ambas usando tratamento algébrico: multiplicando a por a; ou somando a área (A_1) dos quatro triângulos retângulos congruentes de catetos b e c e hipotenusa a, com a área (A_2) do quadrado de lado $c - b$. Para concluir a validação do teorema, na subfigura 35.3 o autor soma as duas áreas A_1 e A_2 para encontrar a área do quadrado BCDE de lado a. Ele também calcula a área desse quadrado pelo produto dos lados, ou seja, multiplicando a por a, obtendo a^2. Desta forma, ao igualar estas duas áreas, chega na relação conhecida como Teorema de Pitágoras. Ao longo desta validação, observa-se que as figuras e a língua formal se apoiam mutuamente, o que leva a classificar esta prova como intelectual do tipo demonstração.

A prova apresentada na Figura 35 é uma demonstração que parte de tratamentos sobre a figura, ou seja, é baseada na ação sobre uma figura, ao mesmo tempo que mobiliza o registro algébrico, com alguns trechos em língua natural. Desta forma, dado seu caráter geral e sua validade, esta prova é definida como uma demonstração que mobiliza os registros figural e algébrico, portanto, trata-se de uma demonstração geométrica-algébrica.

Sampaio (2018) também traz em uma margem lateral do livro, contida apenas no material do professor, uma sugestão para que o professor instigue os alunos a construírem o quadrado BCDE, composto por quatro triângulos retângulos de catetos b e c e hipotenusa a, assim como com o quadrado $c - b$, conforme figura que segue retirada da segunda ilustração, mais à direita, contida na Subfigura 35.1:

Figura 36 – Figura de apoio para a prova do Teorema de Pitágoras em Sampaio (2018)



Fonte: Sampaio (2018, p. 123)

Esta mesma figura constituída de quatro triângulos retângulos de lados a, b e c e do quadrado central de medida $c - b$ pode ter um grande potencial pedagógico e pode servir como recurso para a prova do Teorema de Pitágoras, como aponta Sampaio (2018, p. 123).

> [...] peça aos alunos que reproduzam em uma folha, com régua e lápis, a segunda figura apresentada na página. Depois, peça que recortem os triângulos e o quadrado, de modo que possam manipulá-los ao acompanhar cada passo da demonstração. Explique que, no caso de materiais manipuláveis, as medidas são determinadas (e não são apenas representações) e, por isso, o trabalho não se caracteriza como uma demonstração, mas como um caso particular.

Nesse trecho, o autor sugere, assim como Dante (2018), que o professor estimule os alunos a verificarem experimentalmente a validade do Teorema de Pitágoras através de uma prova pragmática, com utilização de recortes e manipulação de objetos físicos, no caso, os quatro triângulos retângulos e o quadrado em papel.

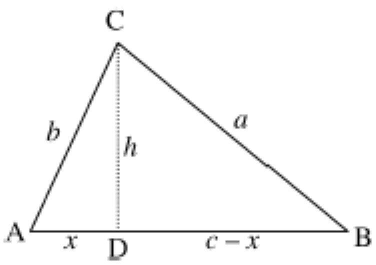
Sampaio (2018) propõe a construção de uma figura qualquer, com medidas genéricas, não com medidas estabelecidas. Além disso, este tipo de prova que recorre à manipulação de objetos é caracterizada como prova pragmática justamente por se apoiar na ação sobre uma figura. Sampaio (2018) nesse quesito, caracteriza esta prova como uma verificação para um caso particular, não como uma demonstração. Desta maneira, a prova pode ser classificada como pragmática por ostensão figural, já que recorre essencialmente à ação sobre uma figura. Tanto Sampaio (2018) quanto Balacheff (1988) concordam que a prova utilizando-se de recortes, justaposições e manipulação de figuras não é uma demonstração, como aponta a frase final da citação anterior de Sampaio (2018).

Assim como Pataro e Balestri (2018), Sampaio (2018) após chegar à relação do Teorema de Pitágoras também afirma que vale a recíproca do teorema, sem demonstrá-la. Na margem lateral do livro, página 124, o autor cita o trabalho de Wagner (2015) que contém uma demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras. Ou seja, Wagner (2015) prova a afirmação de que "se em um triângulo cujo comprimento dos lados medem a, b e c, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então ele é um triângulo retângulo com hipotenusa de medida *a*" (SAMPAIO, 2018, p. 124). Para tal demonstração, Wagner (2015) considera um triângulo qualquer ABC com medidas $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Ele divide esse problema em dois casos: o caso do triângulo acutângulo e o caso do triângulo obtusângulo e através de demonstrações por absurdo, chega à demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras. No primeiro caso, ele supõe que o triângulo ABC é acutângulo (Figura 37).

Figura 37 – Prova da recíproca do Teorema de Pitágoras: 1º caso

1º caso: $A < 90°$

Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.



Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

Fonte: Wagner (2015, p. 9)

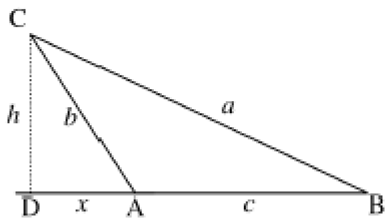
Wagner (2015), ao supor que os ângulos do triângulo ABC são agudos, chega a uma contradição, pois nesse caso não vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Após a conversão entre a representação do triângulo acutângulo no registro das figuras, a representação em língua formal, e tratamentos algébricos, Wagner (2015) prova que em triângulos acutângulos de lados a, b, c cujo maior lado é o lado a, vale a inequação $a^2 < b^2 + c^2$.

Em seguida, o autor parte para o segundo caso: o triângulo obtusângulo, ou seja, o triângulo com um ângulo maior que o ângulo reto (Figura 38).

Figura 38 – Prova da recíproca do Teorema de Pitágoras: 2º caso

2º caso: $A > 90^o$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB.



Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx,$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos então que em um triângulo ABC, de lados a, b e c,

$$A < 90^o \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^o \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $A = 90^o$.

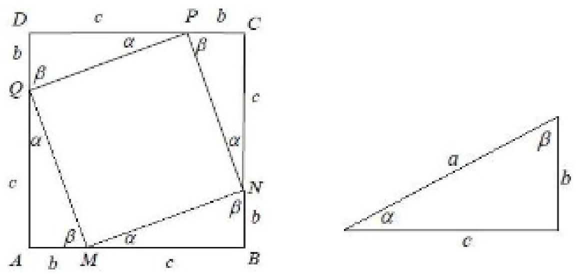
Fonte: Wagner (2015, p. 9-10)

Também explorando a conversão entre os registros da figura e da língua formal, e realizando tratamentos algébricos, Wagner conclui que para triângulos obtusângulos cujos lados medem a, b e c, sendo o maior lado de medida a, vale a inequação $a^2 > b^2 + c^2$. Desta forma, comprova que a relação $a^2 = b^2 + c^2$ ocorre apenas em triângulos retângulos de hipotenusa a e catetos b e c.

A prova da recíproca do Teorema de Pitágoras apresentada em Wagner (2015) é também uma demonstração geométrica-algébrica que conta com conversões entre o registro figural e o algébrico. Além disso, traçar a altura nos triângulos acutângulo (Figura 37) e obtusângulo (Figura 38) a partir da projeção ortogonal do ponto C sobre a reta formada pelos pontos A e B configura um tratamento figural, bem como a manipulação algébrica das equações encontradas explicitam a presença de tratamentos algébricos.

Prosseguindo a análise do livro didático de Sampaio (2018), o autor apresenta na margem inferior da página 122, dois trabalhos que exploram com maior profundidade validações para o Teorema de Pitágoras: um artigo e um vídeo. No artigo de Leal, Nunes, Souza (2016) são apresentadas quatro diferentes provas para o teorema. Uma delas é uma prova muito parecida com a prova que Sampaio (2018) explora em seu livro didático, uma prova envolvendo congruência de triângulos. Parte-se de um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, desenha-se um quadrado ABCD de lados $b + c$. Sobre os lados desse quadrado são marcados os pontos, M, N, P, Q, de modo que: $AM = BN = CP = DQ = b$ e $MB = NC = PD = QA = c$, conforme Figura 39.

Figura 39 – Prova do Teorema de Pitágoras com congruência de triângulos



Fonte: Obra de Eduardo Wagner "Teorema de Pitágoras e Areas"

Pela congruência dos triângulos QAM, MBN, NCP e *PDQ* descritos acima, os ângulos agudos destes triângulos retângulos medem α e β , de acordo com a figura acima.

Como α + β = 90º segue que cada ângulo interno do quadrilátero *MNPQ* deve ser reto. Isso demonstra que *MNPQ* é um quadrado de lado α.

Daí a área do quadrado de lado $b + c$ é igual à soma da área do quadrado de lado α com a área de quatro triângulos retângulos de catetos b e c.

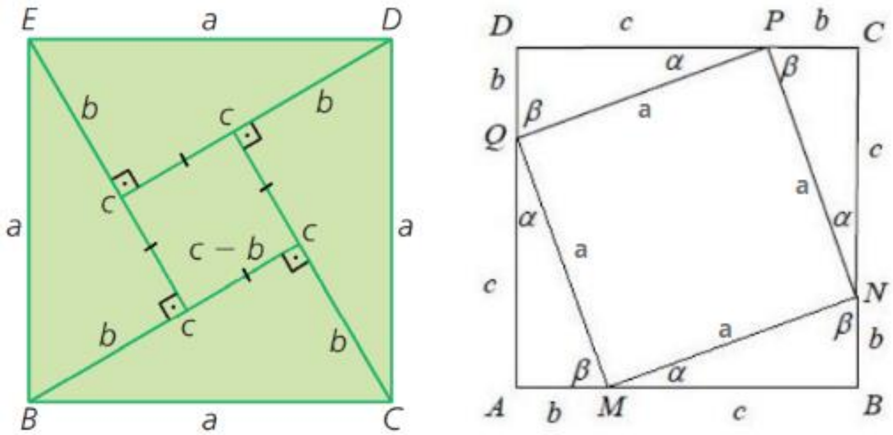
Isto é:

$(b+c)^2 = 4\frac{bc}{2} + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$, como queríamos demonstrar.

Fonte: Leal, Nunes, Souza (2016, p. 27)

A prova (Figura 39) é parecida com a prova em Sampaio (2018). Porém na prova de Leal, Nunes, Souza (2016), o quadrado externo possui lados de medidas $b + c$, enquanto o quadrado interno tem lados de medida a unidades de comprimento. Em Sampaio (2018), o quadrado externo possui lados medindo a e o quadrado interno medindo $c - b$. Assim sendo, a principal diferença entre estas duas provas é a reconfiguração dos triângulos retângulos de catetos b e c e hipotenusa a, contidos nas figuras que ancoram as duas provas, conforme imagem a seguir.

Figura 40 – Comparação entre prova com congruência de triângulos em Sampaio (2018) e Leal, Nunes, Souza (2016)



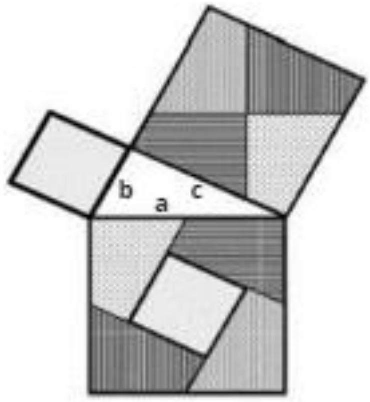
Fonte: Sampaio (2018, p. 123) e Leal, Nunes, Souza (2016, p. 27)

A representação do quadrado à esquerda é usada por Sampaio (2018) enquanto que a representação do quadrado à direita, por Leal, Nunes e Souza (2016). Ambas as provas envolvem o registro figural e o registro algébrico como predominantes, sendo, portanto, demonstrações geométricas-algébricas. Nelas ocorrem conversões entre os registros figural e algébrico, bem como diversos tratamentos algébricos. Existem poucas diferenças entre as duas provas, mas é possível observar que na prova de Leal, Nunes e Souza (2016) a língua natural é mais utilizada do que na prova de Sampaio (2018).

Ainda no artigo de Leal, Nunes e Souza (2016), outras três provas do Teorema de Pitágoras são exploradas, uma delas é a prova clássica, apontada como a possível prova realizada por Pitágoras. Esta também é explorada por Dante (2018) na Figura 34. A segunda prova baseia-se em relações métricas no triângulo retângulo, conforme explora-se em Pataro e Balestri (2018) e Dante (2018).

A última prova é inédita entre os livros didáticos analisados no presente trabalho. Segundo Leal, Nunes e Souza (2016) um livreiro e corretor da bolsa de valores londrino, chamado Henry Perigal formula, em 1873, a seguinte prova para o Teorema de Pitágoras:

Figura 41 – Prova de Henry Perigal para o Teorema de Pitágoras [13]



Fonte: Leal, Nunes, Souza (2016, p. 29)

Trata-se de uma prova essencialmente figural, ou mesmo, uma prova pragmática baseada na ostensão, como Balacheff (2000) a classificaria. Ao reconfigurar os quadriláteros contidos no quadrado sobre o cateto *c* e o quadrado sobre o cateto *b* dentro do quadrado formado sobre a hipotenusa *a*, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa *a* possui a área do quadrado sobre o cateto *b* somada à área do quadrado sobre o cateto *b*. Como já afirmado, o registro semiótico predominante nesta prova é o registro das figuras, sendo os tratamentos figurais as operações semióticas predominantes. Logo, a prova de Perigal pode ser caracterizada, então, como prova pragmática por ostensão figural.

Além disso, em três das quatro demonstrações contidas no artigo de Leal, Nunes e Souza (2016), os autores apontam como referência a obra de Wagner (2015), já citada aqui na prova da recíproca de Pitágoras. Analisando a obra de Wagner (2015), visualiza-se exatamente as mesmas demonstrações para o Teorema de Pitágoras contidas em Leal, Nunes e Souza (2016), escritas somente com algumas modificações de escrita em língua natural. A única prova contida

[13] A prova de Perigal envolve essencialmente a ação sobre uma figura, ou seja, é uma prova pragmática (BALACHEFF, 2000). Uma forma de agir sobre esse tipo de prova é utilizando-se de ambientes de Geometria dinâmica. Nóbriga (2019) propõe a utilização em sala de aula das provas dinâmicas, descritas por ele como “demonstrações dinâmicas” por serem provas realizadas inteiramente em ambientes de Geometria dinâmica como o GeoGebra. Um exemplo de como explorar a prova de Perigal apresentada na Figura 41 é a prova dinâmica realizada por Nóbriga e disponível no link: https://www.geogebra.org/m/WG6VtwBB. Acessado em 30 jul. 2022.

apenas em Leal, Nunes e Souza (2016) e não em Wagner (2015) é a prova utilizando congruência de triângulos, explicitada na Figura 35.

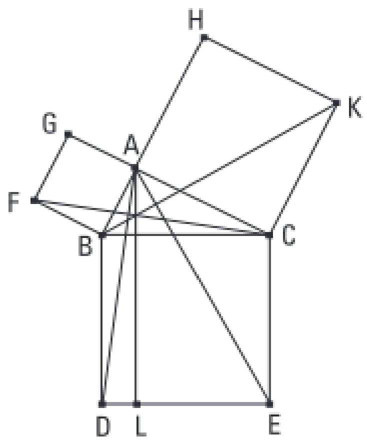
Outra obra citada nas margens do livro didático de Sampaio (2018) é um vídeo denominado “O Legado de Pitágoras”, dividido em três partes. Os vídeos trazem a história de Pitágoras e outros matemáticos e exploram em especial as contribuições da Matemática grega. O segundo vídeo é o que cita provas do Teorema de Pitágoras. Nesse vídeo, afirma-se que a primeira demonstração usando figuras na Geometria de Euclides é a do Teorema de Pitágoras (O LEGADO, 2010). A demonstração dada por Euclides para o Teorema de Pitágoras é citada no vídeo e pode ser encontrada na Proposição 47 do livro 1 da obra Elementos de Euclides.

Figura 42 – Prova de Euclides para o Teorema de Pitágoras

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC.

Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG,



não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.

Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

Fonte: Euclides (2009)

A prova dada por Euclides possui um caráter especial, visto que é antiga e de época anterior ao período de desenvolvimento da álgebra na Europa (ROQUE, 2012). Ela não utiliza-se do registro algébrico, apenas da língua natural. Não são utilizados símbolos para indicar segmentos, triângulos, ou outros objetos matemáticos. Visualiza-se, mesmo assim, um mecanismo que Euclides utiliza possivelmente para reduzir a quantidade de caracteres em sua escrita, em algumas partes do texto ele se refere a um quadrado citando apenas uma de suas diagonais, por exemplo, quando cita o quadrado GB, na verdade, ele está se referindo ao quadrado AGFB. Por ser uma prova essencialmente em língua natural, ela é uma prova bastante extensa. Confirma-se desta forma, o que Duval (2004) afirma em sua teoria, de que a introdução do registro algébrico possibilita uma economia de escrita, se comparado ao uso da língua natural. Além disso, os registros utilizados nesta prova são os registros em língua natural e o figural, ocorrem essencialmente tratamentos em cada um desses registros e, conversões de um registro a outro e vice-versa. Estas conversões são chamadas de ilustrações quando partem da língua natural para o registro figural, como ocorre no início da prova. Ou são denominadas traduções quando ocorre o contrário, ou seja, quando elas partem do registro figural para o em língua natural. Traduções estão presentes até o final da prova. Assim, mesmo que predominantemente envolva o registro em língua natural, dado seu caráter figural, é possível afirmar que a prova dada por Euclides é uma prova pragmática por exemplo genérico.

No vídeo afirma-se ainda que nos últimos dois milênios o Teorema de Pitágoras é provado de mais de trezentas formas distintas e nem todas são provas dadas apenas por matemáticos. O vídeo expõe a demonstração apresentada pelo livreiro e corretor da bolsa de valores Henry Perigal (Figura 41) e a prova dada pelo 20º presidente estadunidense James Garfield (Figura 32) presente no livro didático de Dante (2018).

Ainda nas margens do seu livro didático, Sampaio (2018) sugere aos professores reflexões a respeito do ensino de "demonstrações":

> Verifique se os alunos entendem o propósito de uma demonstração. Como eles estão desenvolvendo gradativamente o pensamento abstrato, pode ser que demorem para entender a utilidade de uma demonstração: atestar a veracidade de um resultado (tese) a partir de premissas que são consideradas verdadeiras (hipótese). Para que os alunos entendam a ideia do teorema, peça que relacionem o quadrado da medida do comprimento de cada lado do triângulo retângulo à medida da área do quadrado cujo lado tem a mesma medida de comprimento. (SAMPAIO, 2018, p. 122).

Nesta orientação aos professores, Sampaio (2018) realiza uma sugestão para que os alunos entendam a ideia por trás do Teorema de Pitágoras, que é relacionar os quadrados sobre cada um dos lados de um triângulo retângulo com as respectivas áreas desses quadrados.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de três livros didáticos do 9º do Ensino Fundamental permite estabelecer algumas conclusões a respeito de como o Teorema de Pitágoras é validado nesses materiais, quais os raciocínios matemáticos explorados e quais os registros e operações semióticas predominantes nas provas encontradas.

Verifica-se que todos os três livros didáticos, das coleções Matemática Essencial, Teláris e Trilhas de Matemática, apresentam mais de uma forma de validar o Teorema de Pitágoras. Dentre os raciocínios matemáticos requeridos nas validações, as provas intelectuais são as mais recorrentes e quase todas as provas encontradas recorrem ao registro algébrico em algum momento. Acredita-se que isso ocorre devido ao fato de que os livros didáticos analisados são do último ano do Ensino Fundamental, logo, os alunos já possuem contato com a linguagem algébrica em sua escolaridade. Assim, provas contendo esse registro semiótico são recorrentes no material analisado.

Entretanto, apenas uma prova encontrada nos livros didáticos é essencialmente algébrica. Ou seja, nos livros analisados há apenas uma demonstração algébrica, a prova dada como exercício aos alunos por Pataro e Balestri (2018) envolvendo relações métricas no triângulo retângulo (Figura 26) e explanada por eles no material aos professores. A grande maioria das provas encontradas na pesquisa utilizam-se do registro figural como registro de apoio, mas a validação matemática da prova é ancorada no caráter genérico concedido com a utilização do registro algébrico, indo ao encontro ao que afirma Menoncini (2018), que as figuras podem contribuir para provar teoremas e possuem um papel fundamental na construção de conhecimentos matemáticos. Isso também vai em direção à teoria de Duval, que afirma que a complementaridade da utilização de registros de representação favorece o entendimento da mensagem matemática transmitida (DUVAL, 2004). De fato, as figuras estão mais próximas da concretude da realidade do estudante e isso pode justificar a preferência didática da utilização destas em provas matemáticas. A conversão da representação figural para a linguagem algébrica é simbólica, porém, é mais prática e rápida e traz o caráter generalizador que a figura por si só não alcança.

Assim, verifica-se que de fato, em provas matemáticas, os registros semióticos se complementam entre si, especialmente os registros algébrico e geométrico. O uso simultâneo dos dois registros semióticos implica na realização de conversões nas provas apresentadas nos livros didáticos. Portanto, se o aluno entende a passagem de um registro à outro na prova, a premissa de Duval sobre a compreensão se confirma. Desta forma, mesmo que as conversões entre o registro figural e o algébrico sejam identificadas nos livros didáticos, isto não significa, necessariamente, que o aluno consiga aprender. A aprendizagem ocorre caso o aluno faça, de fato, a conversão. Cabe pontuar também que, os matemáticos superestimam demonstrações puramente algébricas, por sua elegância. Para Duval, estas provas implicam essencialmente em operações de tratamento, enquanto as provas dos livros didáticos analisadas em sua maioria utilizam-se concomitantemente do registro algébrico e geométrico, ou seja, para Duval, estas últimas possuem maior potencial para despertar a aprendizagem dos estudantes, mesmo que as outras sejam matematicamente mais elegantes.

Quanto aos livros didáticos analisados, observa-se que todos eles iniciam a apresentação do Teorema de Pitágoras com um triângulo retângulo especial, o triângulo retângulo de lados medindo 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Verifica-se que o quadrado do maior lado (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos menores lados (catetos) para esse triângulo retângulo em especial, e, utilizando-se de um raciocínio que Balacheff (1988) chama de empirismo ingênuo, os autores afirmam que o teorema vale para quaisquer triângulos retângulos. Ou seja, neste momento os três livros didáticos introduzem o Teorema de Pitágoras por meio da relação $a^2 = b^2 + c^2$, e só depois disso, o provam.

As provas trazidas pelos autores dos três livros didáticos para o Teorema de Pitágoras são variadas. Por exemplo, Dante (2018) sugere primeiramente verificações experimentais, que utilizam-se de recortes de figuras em papel ou palitos e a ação sobre esse material. Ou seja, Dante (2018) recorre primeiramente a provas pragmáticas. Só depois traz provas intelectuais, que se utilizam da língua formal e possuem caráter generalista. Sampaio (2018) também traz em margens laterais da sua obra a sugestão de que os alunos acompanhem a prova que ele propõe para o Teorema de Pitágoras (Figura 36) utilizando-se de desenhos, recortes e sobreposições. Ou seja, ambos os autores sugerem provas pragmáticas para iniciar o processo de validação do referido teorema. A única coleção que não sugere verificações experimentais, envolvendo manipulação de material concreto para iniciar o processo de validação do Teorema de Pitágoras é a Coleção Matemática Essencial, de Pataro e Balestri (2018).

Além disso, a análise dos livros didáticos permite visualizar outro detalhe em comum em todas coleções de livros didáticos analisadas: as sugestões fornecidas aos professores, nas margens das páginas dos livros. O livro didático de Pataro e Balestri (2018) por exemplo, traz a sugestão que os alunos exponham em sua linguagem cotidiana o que é enunciado no Teorema de Pitágoras, ou seja, que sejam exercitados os raciocínios de explicação e argumentação nos estudantes. O livro de Dante (2018) apresenta mais provas para o Teorema de Pitágoras do que os demais e destina suas margens laterais para discorrer a respeito da importância das provas em Matemática, para que os alunos se conscientizem que as fórmulas não são prontas, elas são advindas do raciocínio matemático e são validadas através de provas e demonstrações. O livro de Sampaio (2018) traz em suas margens laterais referências e links que direcionam a variados trabalhos que apresentam diferentes provas para o Teorema de Pitágoras. Entretanto, nas três coleções, as margens laterais com informações e sugestões de ensino são exclusivas para os livros didáticos da versão do professor, fica a cargo dos docentes colocá-las em prática na sala de aula.

Outra consideração advinda da análise dos livros didáticos é que os autores chamam de demonstração até mesmo algumas provas que recorrem apenas a figuras ou à ação sobre elas. Segundo Balacheff (1988) as provas desse tipo não são demonstrações, são apenas provas pragmáticas. Tanto provas pragmáticas como provas intelectuais aparecem em livros didáticos. Em alguns momentos a explicação e a argumentação também são contempladas, por meio de sugestões aos professores ou exercícios aos estudantes. Todos os raciocínios de validação possuem a mesma finalidade: verificar e validar uma afirmação matemática. Seguindo esse mesmo viés, Balacheff (2022, p. 831) afirma que "a demonstração deve ocupar seu devido lugar na atividade matemática e, ao mesmo tempo, coexistir com outras formas de validação necessariamente decorrentes da argumentação ou mesmo da persuasão". Verifica-se que a demonstração coexiste com outras formas de validação nos livros didáticos analisados.

O presente trabalho atinge seu objetivo, pois articula as teorias de Balacheff e Duval através das validações do Teorema de Pitágoras encontradas nos livros didáticos analisados. É possível com a análise dos três livros didáticos conectar os registros de representação semióticos com as formas de raciocínio de validação. Esta articulação entre as duas teorias é apresentada no quadro a seguir:

Quadro 1 – Articulação entre as teorias de Duval e Balacheff

Tipo de raciocínio			**Registro semiótico predominante**	**Operações semióticas predominantes**
Explicação e Argumentação			Língua Natural	Tratamento em Língua Natural
Prova	Pragmática	Por ostensão figural	Figuras	Tratamento figural
		Empirismo ingênuo	Figuras e língua natural	Conversão e tratamento
		Exemplo genérico	Figuras e língua natural	Conversão e tratamento
	Intelectual	Demonstração geométrica-algébrica	Figuras e algébrico	Conversão e tratamento
		Demonstração algébrica	Algébrico	Tratamento algébrico

Fonte: Autora

Este quadro permite concluir que cada forma de raciocínio de validação em Matemática pressupõe pelo menos um registro semiótico predominante, conforme é possível observar nos livros didáticos analisados. A respeito disso Sampaio (2018), em uma margem lateral do seu livro didático, afirma que “as diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras permitem ao aluno transitar entre diferentes representações de um mesmo objeto de conhecimento, além de favorecer a perspectiva histórica da produção do conhecimento” (SAMPAIO, 2018, p. 122). De fato, o presente trabalho encontra validações diversas para o Teorema de Pitágoras, envolvendo diferentes registros semióticos, sendo que todas elas são formas válidas de raciocínio.

As dificuldades encontradas nesse trabalho são essencialmente voltadas ao entendimento dos referenciais teóricos adotados. Balacheff, por exemplo, possui uma escrita densa e complexa. Realizar traduções de sua obra e entendê-las não é uma tarefa simples. Entretanto, mesmo com as dificuldades, o presente trabalho consegue cumprir seu objetivo.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, Nicolas. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *In*: PIMM, David (org). **Mathematics, Teachers and Children**. 1. ed. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, Nicolas. **Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas**. Tradução: Pedro Gómez e Angela Pinilla. 1. ed. Bogotá: Una empressa docente. Universidad de los Andes, 2000.

BALACHEFF, Nicolas. Controle, prova e demonstração: três regimes de validação. Tradução: Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 816-871, 2022. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p816-871. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57668. Acesso em 23 jun. 2022.

BARBOSA, João Paulo Carneiro; GALVÃO, Mateus de Souza; SANTOS, Leilane Araujo dos. Método de redução ao absurdo no livro I do Elementos de Euclides. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 3, n. 7, p. 31 – 40, 2016. DOI: 10.30938/bocehm.v3i7.61. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/61. Acesso em: 5 set. 2022.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. **A argumentação em Matemática:** Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 2005. Tese (Doutorado em Educação) – Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2005.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; *et al*. A formação dos invariantes do campo conceitual do Teorema de Pitágoras em uma experiência de ensino na escola básica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 2, p. 220-251, 2020. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p220-251. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/47063. Acesso em 05 set 2022.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CABRAL, Sabrina Alves Boldrini. **Desenvolvendo o pensamento argumentivo geométrico**: construindo práticas Investigativas. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed Bookman, 2010.

CRUZ, Flávio Pereira da. **Argumentação e prova no ensino fundamental:** análise de uma coleção didática de matemática. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de

Matemática), Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 9º ano**: Ensino Fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DE VILLIERS, Michael. **The role and function of proof in mathematics**. *In*: National Subject Didatics Symposium, 24., 1990, Stellenbosch. Anais [...]. Stellenbosch: University of Stellenbosch, 1990, p. 17-24.

DUVAL, Raymond. **Argumenter, prouver, expliquer:** Continuité ou rupture cognitive? Petit x, França, n. 31, p. 37-61, 1992. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/31x5_1570192011747-pdf. Acesso em: 12. jul. 2022.

DUVAL, Raymond; EGRET, Marie-Agnès. **Introduction a la demonstration et apprentissage du raisonnement deductif**. REPERES-IREM, França, n. 12, p. 114-140, 1993. Disponível em: https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWR97081.htm. Acesso em: 23. jan. 2022.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano:** Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: Myrian Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. 2 ed. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

DUVAL, Raymond. **Les conditions conitives de l‟apprentissage de la geometrie:** développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 10, p. 5-53, 2005. Disponível em: https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST05010.htm. Acesso em: 24. jan. 2022.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução: Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT:** Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a. DOI: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382. Acesso em: 12 mar. 2022.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT:** Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012b. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 28 dez. 2021.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA FILHO, José Leôncio. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

HANNA, Gila**.** Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, Spring, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990. Doi: https://doi.org/10.1007/BF01809605. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01809605. Acesso em 13. jul. 2022.

LEAL, Rodrigo Amaral; NUNES, Rondineli dos Anjos; SOUSA, Wildson Pombo. **O Teorema de Pitágoras e suas demonstrações em sala de aula.** Universidade Federal do Amapá (UNIFAP). 2016. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/Rodinelli-artigo-final.pdf. Acesso em: 31 jul. 2022.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. Washington: Classics in Mathematics Education Series, 1940.

MENONCINI, Lucia. **O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área.** 2018. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Curso de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2018. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/bitstream/prefix/3033/1/MENONCINI.pdf. Acesso em: 24 fev. 2022.

MIORIM, Maria Ângela. O Teorema de Pitágoras em livros didáticos. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 4, p. 5-14, 1998. Disponível em: http://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/127. Acesso em: 05. fev. 2022.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. **REVEMAT** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 14, n. 1, p. 1–21, 2019. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e61725. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/2872. Acesso em 14 jul. 2022.

O LEGADO de Pitágoras – 02 – Pitágoras e Outros. [S. l.: s. n.], 2010. 1 vídeo (40 min). Publicado pelo canal somatematicaa. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=dmorYuxbJHE. Acesso em 31 jul. 2022.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, Maria A. Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez Editora, 2012. p. 213-231.

PASINI, Mirtes Fátima. **Argumentação e prova:** explorações a partir da análise de uma coleção didática. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São

Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: http://livros01.livrosgratis.com.br/cp040388.pdf. Acesso em 08 mar. 2022.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 9º ano:** Ensino Fundamental, anos finais.1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PERELMAN, Chaïm. **Lógica formal e lógica informal**. Tradução: Rui Grácio. Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades. Portugal: 1992.

PEREIRA, Luiz Heinrique Ferraz. **Teorema de Pitágoras:** lembranças e desencontros na Matemática. Passo Fundo: UPF, 2002.

REMPEL, Graciele. **Tangram nos livros didáticos de Matemática**: um estudo à luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2021. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/4687. Acesso em: 17 jan. 2022.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **Soma de Gauss**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/soma-gauss.htm. Acesso em: 14. jul. 2022.

ROQUE, Tatiane. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAGAN, Carl. **Pálido ponto azul:** uma visão do futuro da humanidade no espaço. São Paulo: Companhia das letras, 1996.

SAMPAIO, Fausto Arnaud**. Trilhas da Matemática, 9º ano**: Ensino Fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

TOULMIN, Stephen E. **Os usos do argumento**. Tradução: Reinaldo Guarany. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VEGA, Efrén Marmolejo; ALEJANDRI, Gema Rubí Moreno. Argumentar-conjeturar: introducción a la Demostración. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, v. 24, p. 509 - 516, 2011. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/4844/. Acesso em: 04. fev. 2022.

VISEU, Floriano; *et al*. Conceções de professores do ensino básico sobre a prova Matemática: Influência da experiência profissional. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 430 - 453, 2017. DOI: 10.1590/1980-4415v31n57a21. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/Lt5RWkkqYd6SC8J6JzqtgBF/?lang=pt. Acesso em 08 mar. 2022.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf. Acesso em 31 jul. 2022.