UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EMANUELA GRAZIELA DILKIN

FUNÇÃO SENO E MÚSICA:
UM ESTUDO VIA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

CHAPECÓ
2023

EMANUELA GRAZIELA DILKIN

FUNÇÃO SENO E MÚSICA:
UM ESTUDO VIA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lúcia Menoncini

CHAPECÓ

2023

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Dilkin, Emanuela Graziela
FUNÇÃO SENO E MÚSICA: UM ESTUDO VIA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL / Emanuela Graziela Dilkin. -- 2023.
64 f.:il.

Orientadora: Doutora Lúcia Menoncini

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó,SC, 2023.

1. Funções trigonométricas. 2. Música. 3. Registros de Representação Semiótica. 4. Interpretação Global Figural. I. Menoncini, Lúcia, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

EMANUELA GRAZIELA DILKIN

FUNÇÃO SENO E MÚSICA:
UM ESTUDO VIA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 02/03/2023.

BANCA EXAMINADORA

Lucia Menoncini
Prof.ª Dr.ª Lúcia Menoncini – UFFS
Orientadora

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS
Avaliador

Prof.ª Dr.ª Nilce Fátima Scheffer – UFFS
Avaliadora

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram a alcançar meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais José e Angela e minhas irmãs Aline e Jéssica por acompanharem a minha caminhada acadêmica e darem suporte quando necessário.

Aos meus amigos e colegas pelas conversas e curiosidade sobre o meu trabalho.

Ao meu namorado João, pelo carinho e por me motivar a continuar escrevendo.

Agradeço a Deus pela vida e pela oportunidade de fazer o que gosto.

À minha cachorrinha Atena que sempre esteve ao meu lado e me espera chegar em casa após dias de estudo.

Aos meus alunos que demonstraram interesse sobre o tema deste trabalho e me incentivam a continuar na profissão de professora.

Agradeço a minha querida orientadora profa. Dra. Lúcia, pelas ideias, dedicação e ensinamentos.

Aos professores da banca examinadora Dra. Nilce e Dr. Pedro que fizeram excelentes observações e incentivaram ainda mais a aprofundar sobre o tema.

Por fim, a Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), que possibilitou alcançar o meu objetivo de ser professora de matemática.

Matemática e música, os campos de
atividade científica mais nitidamente
contrastados, ainda estão tão relacionados
que revelam a conexão secreta que une
todas as atividades de nossa mente.
(Hermann von Helmholtz).

RESUMO

Na Grécia Antiga, a música e a matemática eram consideradas pilares do conhecimento. Foi no século VI a.C que surgiu o primeiro registro da relação existente entre estes pilares, no chamado *quadrivium*. Com o passar dos tempos, esta relação foi se estreitando, e hoje ela pode ser estabelecida e estudada no âmbito escolar. Conhecer a relação entre música e matemática pode ser um fator positivo para o professor que ensina funções trigonométricas. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver uma investigação qualitativa acerca do esboço de curva da função trigonométrica seno, de modo a estabelecer relações com sons musicais, partindo de um modelo matemático simplificado aplicado através do procedimento de experimentação. Para tal, utiliza-se a Teoria de Interpretação Global Figural, proposta pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Como resultado, é possível reconhecer e compreender a interferência dos parâmetros da função seno na produção do som, assim como o sentido desses parâmetros na onda sonora, em particular no caso das notas musicais LÁ e DÓ. Com este trabalho, vislumbra-se favorecer, de alguma forma, o ensino e a aprendizagem de funções trigonométricas, seja por meio da motivação, pelo gosto à música, pela aplicação prática da teoria, entre outros.

Palavras-Chave: Funções trigonométricas; Música; Registros de Representação Semiótica; Interpretação Global Figural.

ABSTRACT

In Ancient Greece, music and mathematics were considered pillars of knowledge. It was in the 6th century BC that the first record of the relationship between these pillars appeared, in the so-called quadrivium. Over time, this relationship grew closer, and today it can be established and studied in schools. Knowing the relationship between music and mathematics can be a positive factor for the teacher who teaches trigonometric functions. In this sense, the main objective of this work is to develop a qualitative investigation about the outline of the curve of the trigonometric sine function, in order to establish relationships with musical sounds, starting from a simplified mathematical model applied through the experimentation procedure. For this, the Figural Global Interpretation Theory, by Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS) is used. As a result, it is possible to recognize and understand the interference of the parameters of the sine function in the sound production, as well as the direction of these parameters in the sound wave, in particular in the case of the musical notes A and C. With this work, it is envisaged to favor, in some way, the teaching and learning of trigonometric functions, whether through motivation, a taste for music, the practical application of theory, among others.

Keywords: Trigonometric functions; Music; Semiotic Representation Records; Global Figural Interpretation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No século VI a.C, a astronomia, a música, a aritmética e a geometria formavam o *quadrivium*, um conjunto de conhecimentos indispensáveis na formação de um indivíduo (BOYER, 2019). Essas quatro disciplinas eram os pilares do conhecimento e junto com outras três disciplinas do *trivium* (gramática, dialética e retórica) formavam as sete artes liberais (Figura 1). Os antigos e os medievais dedicaram-se ao conhecimento teórico, sendo a música alocada em uma estrutura hierárquica de conhecimento com base na matemática (BROMBERG, 2017).

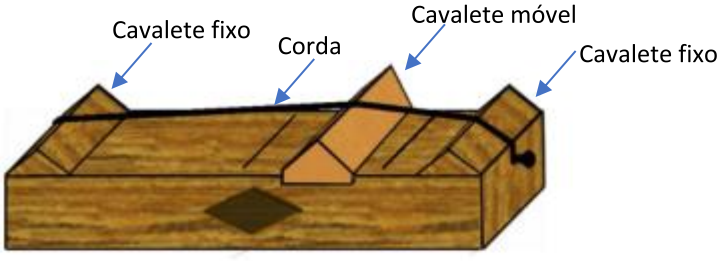
Figura 1 – As sete artes liberais

	Varro (Século I)	Martiano (Século V)	Boécio (Século VI)	Cassiodoro (Século XVI)	Isidoro (Século VII)
TRIVIUM	Gramática	Gramática	*********	Gramática	Gramática
	Dialética	Dialética	*********	Retórica	Retórica
	Retórica	Retórica	*********	Dialética	Dialética
QUADRIVIUM	Geometria	Geometria	Aritmética	Aritmética	Aritmética
	Aritmética	Aritmética	Música	Música	Geometria
	Astrologia	Astronomia	Geometria	Geometria	Música
	Música	Harmonia	Astronomia	Astronomia	Astronomia
	Medicina	*********	*********	*********	Medicina
	Arquitetura	*********	*********	*********	*********

Fonte: Bromberg (2017)

Segundo Boyer (2019), o primeiro registro associando matemática e música ocorreu por volta do século VI a.C. na Grécia Antiga, na Escola Pitagórica. Conforme uma lenda (D'AREZZO, 1996 *apud* PEREIRA 2013.), ao passar por um ferreiro, Pitágoras ouviu o som de martelos que soavam harmonicamente e desarmônicos, e isso despertou o interesse em descobrir o porquê do fenômeno. Ao iniciar os experimentos percebeu que o som produzido tinha relações com a massa e o tamanho dos martelos, mas não satisfeito com o resultado de sua pesquisa, criou um instrumento composto por uma única corda, que ficou conhecido como Monocórdio de Pitágoras (ABDOUNUR, 2002).

Figura 2 - O monocórdio



Fonte: Adaptado de clube da OBMEP (2016).

O monocórdio (Figura 2) era um instrumento composto por uma única corda presa entre dois cavaletes fixos e um móvel, pensados para dividir a corda em duas partes (ABDOUNUR, 2002). Ao deslocar o cavalete móvel ao longo da prancha, a corda assumia diferentes comprimentos, assim os sons produzidos a partir da vibração eram distintos. Com o experimento foi possível identificar que quanto menor o comprimento da corda, mais agudo era o som produzido. Ainda durante o estudo, Pitágoras marcava com pontos os locais onde o som era emitido de maneira mais agradável ou desagradável aos seus ouvidos. Dava-se início a sua própria escala musical, considerada também a primeira escala musical que se tem registro, nomeada como Escala Pitagórica.

O experimento de Pitágoras estabeleceu a primeira relação entre a música e a matemática, ou seja, demonstrou nitidamente que a relação entre o comprimento da corda e o som consonante interligavam a música, às frações da matemática. Para o filósofo a matemática é envolvida com a natureza de forma empírica e os números também estabelecem relações místicas com o mundo. Usando como exemplo, a razão $\frac{a}{b}$, onde *a* e *b* são números inteiros que representam o comprimento da corda do monocórdio e variam de 01 a 04. Sendo que o número 4 relaciona-se com a origem do universo, e torna-se elementar ao considerar o conjunto de quatro sons tocados simultaneamente, denominando como *tetracorde* (ABDNOUNUR, 2002).

Com essa breve explanação sobre uma das importantes pesquisas para o universo da matemática, realizada por Pitágoras, justifico o estudo deste trabalho. Sempre busquei me conectar com o som do violão e do piano, e agora como acadêmica formanda do curso de Licenciatura em Matemática da UFFS, consegui perceber a possibilidade de associar meus interesses, a matemática e a música. No decorrer dos semestres da graduação, diferentes disciplinas que compunham a grade curricular despertaram a minha curiosidade sobre a teoria musical e a trigonometria. E essa curiosidade impulsionou a busca por mais conhecimentos, culminando no desenvolvimento deste trabalho, que relaciona o esboço de curvas de uma função trigonométrica com a música.

Dessa forma, o objetivo do trabalho é apresentar uma investigação qualitativa acerca do esboço de curva da função trigonométrica seno de modo a estabelecer relações com sons musicais, em particular com as notas musicais. A partir dele, almeja-se contribuir para o ensino de funções trigonométricas, seja por meio da motivação ou pelo gosto musical, apresentando uma aplicação prática da teoria. Assim, tem-se a seguinte pergunta norteadora: Como ensinar os sentidos dos símbolos da representação algébrica da função seno através dos significados musicais?

Para responder à pergunta norteadora e alcançar o objetivo proposto, o trabalho estrutura-se em quatro diferentes momentos. No Capítulo 1 há a Introdução. Já no Capítulo 2, chamado Revisão Teórica e Bibliográfica há estudos e teses que possuem o foco de suas pesquisas em resultados de comprovações da influência ou relação da música com a matemática. No Capítulo 3 são retomados conteúdos e estudos sobre: ondas, som, música e a Escala Pitagórica.

O Capítulo 4 é intitulado Referencial Teórico e Metodológico, esse aborda o marco teórico e os procedimentos metodológicos da pesquisa, introduzindo também a perspectiva da Interpretação Global Figural proposta pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Já no Capítulo 5 apresenta-se a metodologia adotada para a pesquisa da proposta deste trabalho.

O Capítulo 6, nomeado Análise e Resultados, é composto pela análise e interpretação dos dados, levando em contraponto as citações e afirmações de alguns autores sobre o assunto, que foram citados nos capítulos anteriores. Esse capítulo tem como objetivo fazer a análise e comparar os dados que foram obtidos durante o desenvolvimento desse estudo, para assim, levar à conclusão da pesquisa e cumprir com o que foi proposto.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Quando pesquisado os termos ''Trigonometria; Música'' no Banco de Teses e Dissertações (BDTD) da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), apareceram 10 trabalhos. Para se aproximar mais do objeto empírico de pesquisa foi especificado os termos ''Duval'' ou ''Semiótica'' unidos com ''Trigonometria; Música'' e não houveram resultados[1]. Assim, foram considerados inicialmente apenas os 10 trabalhos. Ao realizar a leitura dos mesmos, foram descartados dois trabalhos[2], pois não abordavam o estudo relacionado à trigonometria.

O primeiro trabalho, do pesquisador Rodrigues (2017), aborda o estudo das funções trigonométricas e suas relações com a música, tendo como base o estudo de ondas sonoras, escalas musicais e funções trigonométricas. O autor organizou uma proposta pedagógica e aplicou-a por meio de oficinas a alunos do 3º ano do Ensino Médio, com objetivo de averiguar se eles construíam sentido ao estudo. Para isso, usou o programa de computador NGU Octave.

O segundo trabalho, do autor Depizioli (2015), tem como objetivo o desenvolvimento de habilidades nos estudantes na aprendizagem de conteúdos matemáticos como as funções trigonométricas, haja vista, as relações entre música e matemática. Assim, investiga a Série de Fourier para o ensino de trigonometria através de conceitos sobre a acústica.

O estudo de Oliveira (2015), propõe sequências de atividades para professores relacionarem música em suas aulas de matemática, partindo do âmbito histórico musical e matemático e depois dando o enfoque na trigonometria com os principais temas abordados no Ensino Médio. O objetivo é que os professores se apropriem desse conhecimento e busquem alternativas de ensinar já que os autores consideram importante a interdisciplinaridade para a aprendizagem.

---

[1]Apesar de não haver resultados quando especificado o termo trigonometria, existem trabalhos que tratam sobre música e semiótica na perspectiva de Duval, são eles: Música e Matemática: Possibilidades no ensino médio de Lange (2019); Matemática e música: uma reflexão à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Pinto (2019).

[2]Os trabalhos que não abordam o tema desta pesquisa são o de Bortoloti e tal. (2016) intitulado ''Um estudo sobre a matemática para o ensino de proporcionalidade''; a dissertação de Lucchi (1992) intitulada ''Síntese digital de sinais de áudio''.

Almeida (2017) também propõe atividades a serem realizadas no Ensino Médio com enfoque na trigonometria. Usa o software GeoGebra[3] para mostrar aos alunos os gráficos obtidos em fenômenos musicais e o som das notas musicais. A aplicação desses experimentos ocorreu em uma Feira de Matemática que possibilitou a interação dos alunos e o objetivo da compreensão do som como uma onda mecânica.

A investigação de Cabral (2015) relaciona a música para resolver problemas matemáticos a partir de propostas de aprendizagem em diversos conteúdos como Frações, funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas, Progressão Geométrica (P.G.) e Mínimo Múltiplo Comum (m.m.c.). O objetivo sugere uma estratégia de trabalho em sala de aula utilizando a Teoria musical como motivação.

Para entender relações de matemática e música o pesquisador Misura (2016) segue uma perspectiva física nos instrumentos de sopro, percussão e cordas no intuito de explicar o comportamento desses, por modelos matemáticos. É utilizada aritmética modular e equações diferenciais, e ao final sugere uma atividade para agregar na prática escolar básica relacionando música com funções trigonométricas.

O pesquisador Santos (2015) apresenta algumas propostas de atividades a serem realizadas por professores de matemática, sendo norteadas por documentos oficiais como PCN e PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais e Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) e diretrizes curriculares a respeito do estudo da matemática, aliando conteúdo matemático a conceitos musicais para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O Martins (2014) propõe uma análise dos espectros sonoros para o estudo dos gráficos de funções trigonométricas de modo que o professor de matemática tenha suporte para aplicar em sala de aula em variados níveis de ensino. A proposta da atividade é partir de uma gravação sonora realizada com os alunos, gerar o seu gráfico e o explorar com os alunos as suas características como o formato dos espectros e os máximos e mínimos.

Dessa forma, a partir do levantamento bibliográfico pode-se observar que entre os 10 resultados obtidos inicialmente nenhum explora o tema de trigonometria a partir das TRRS de Duval, esses apenas sugerem atividades e propostas de ensino que relacionam música e matemática. Possibilitando o andamento desta pesquisa a fim

[3] O GeoGebra é um *software* gratuito de matemática que engloba áreas de geometria, álgebra, gráficos e planilhas de forma dinâmica. Pode ser acessado de forma *online* e permite compartilhar os recursos produzidos, também é disponível em diversos idiomas.

de explorar o procedimento de Interpretação Global Figural para caracterizar cada parâmetro das funções trigonométricas. Após a comparação dos trabalhos pesquisados evidencia o diferencial da proposta deste, pois busca estabelecer as relações entre o esboço de curva da função seno e música e analisar essas relações à luz da Interpretação Global Figural.

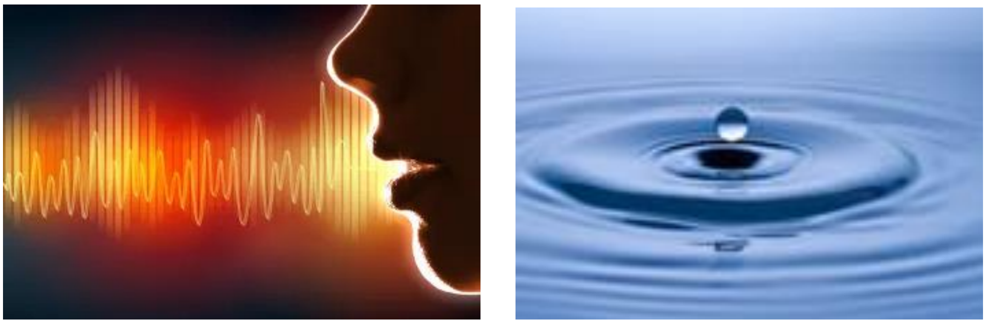
3 REVISÃO DE CONCEITOS

Neste capítulo serão apresentados conceitos de ondas, música e a Escala Pitagórica, visto que tais conceitos auxiliam na compreensão da função seno como uma onda sonora simplificada.

3.1 ONDAS

As ondas são definidas como perturbações ou distúrbios que transportam energia (sem transporte de matéria) e podem se propagar com velocidade constante por meio do vácuo ou de algum meio material (sólido, líquido ou gasoso). As ondas podem ser classificadas de acordo com a sua natureza, ou seja, com a necessidade de um meio de propagação, podendo ser classificadas como mecânica ou eletromagnética. As ondas que necessitam de um meio material para se propagar são denominadas ondas mecânicas (Figura 3).

Figura 3 – Representação de Ondas mecânicas



Fonte: Freepik (2022)[4]

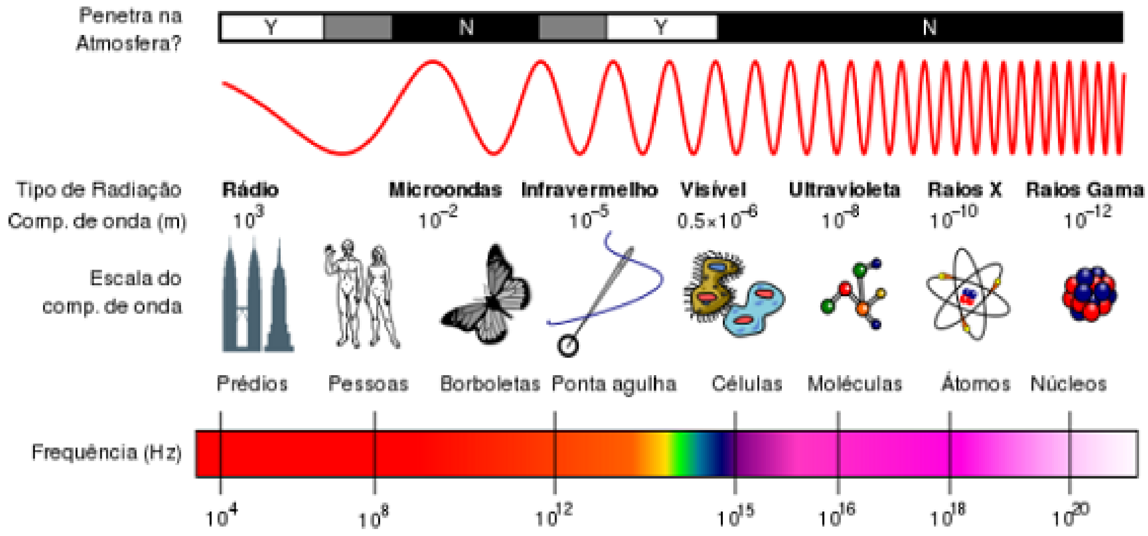
A Figura 3, apresenta dois tipos de ondas mecânicas: As ondas sonoras que se propagam no ar devido a perturbação da pressão atmosférica, conhecidas por serem longitudinais; e as ondas geradas pela perturbação causada pela queda da gota propagam-se na água, são conhecidas como transversais.

As ondas eletromagnéticas, como o nome já sugere, são resultantes da combinação do campo elétrico e magnético. Sua principal característica é sua

[4] Ilustrações retiradas do site freepik, uma plataforma online com banco de imagens gratuitas.

propagação que não requer um meio material. Na sequência observa-se a Figura 4 como exemplo de ondas eletromagnéticas, encontradas nas ondas de rádio, de luz, de raio X e de micro-ondas.

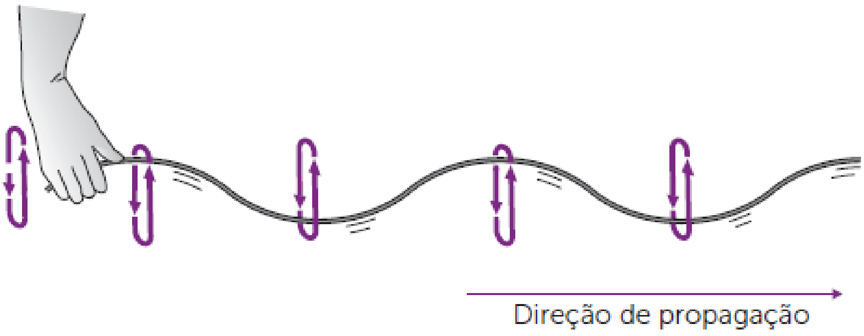
Figura 4- Espectro eletromagnético



Fonte: Villate (2013).

O espectro eletromagnético apresentado anteriormente mostra as frequências, os comprimentos de ondas e a fonte de produção, que são aspectos que diferenciam cada tipo de onda. Sendo visível que a luz elétrica possui uma frequência entre 10^{15} e 10^{14} Hertz, um comprimento de onda na faixa de 10^{-7} e 10^{-6} metro. Nas ondas de luz elétrica, o distúrbio ocorre na eletricidade, enquanto que nas ondas de rádio o distúrbio é magnético. Existe também a possibilidade de classificá-las quanto à direção de sua propagação, confirmando a existência de ondas transversais ou longitudinais. Desta forma, nas ondas transversais, a direção de perturbação é perpendicular à oscilação da onda (Figura 5).

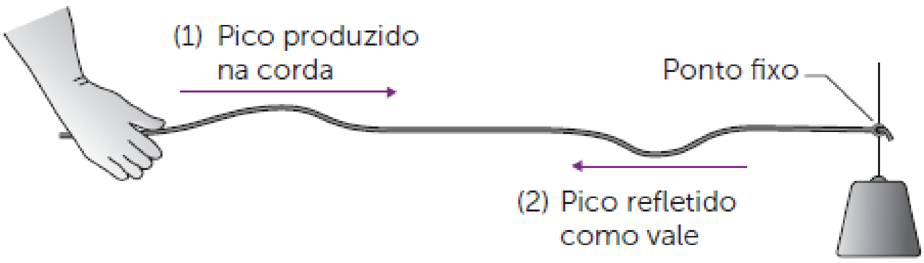
Figura 5 - Ondas transversais em uma corda



Fonte: Breithaupt (2018).

Quando se perturba uma corda com uma de suas extremidades mantida fixa e a outra movimentada, as ondas são refletidas com fases invertidas (Figura 6).

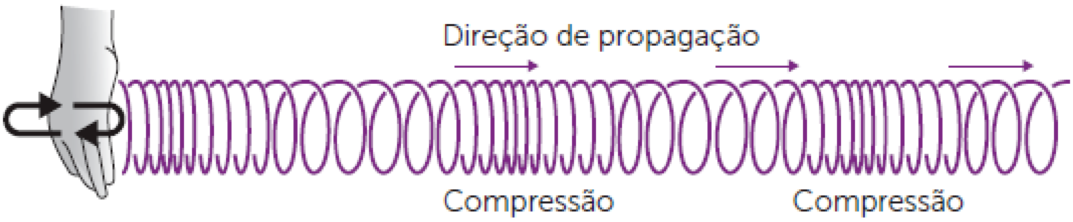
Figura 6 – Uma onda refletida em uma corda



Fonte: Breithaupt (2018).

As ondas longitudinais, demonstram que as partículas vibram na mesma direção em que a onda se propaga. Na Figura 7 é exibido o exemplo de uma mola, que ao ser movimentada gera compressões e alongamentos para frente ou para trás na mesma direção do movimento provocado.

Figura 7 – Ondas longitudinais na mola



Fonte: Breithaupt (2018).

Apesar de existirem diferentes tipos de ondas, todas possuem características comuns como a duração, a amplitude, o comprimento, o período, a frequência e a velocidade (YOUNG & FREEDMAN, 2016). As características das ondas mecânicas podem ser vinculadas à sua natureza e formato, seguindo as seguintes grandezas: Duração, Amplitude e Comprimento:

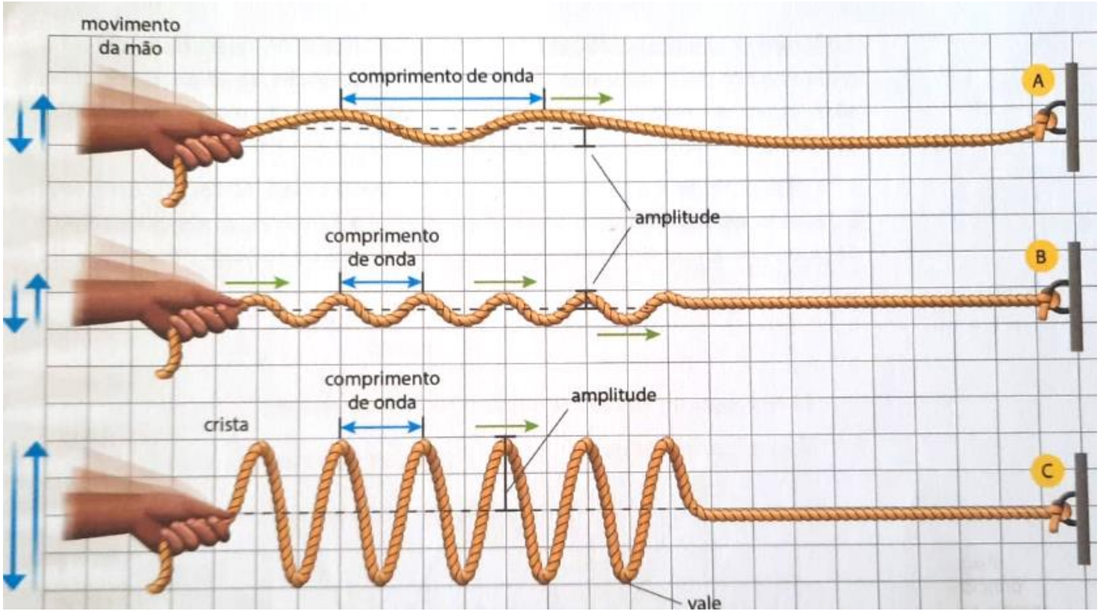
Duração: a duração de uma onda depende do seu tempo de permanência ou do tempo do seu silêncio. Pode ser curta ou de longa duração, a depender da fonte que a emite.

Amplitude: a amplitude (A) de uma onda é a distância que ela atinge verticalmente entre o eixo de propagação da onda e a crista, ou entre o eixo de propagação e o vale.

Comprimento: O Comprimento da onda (λ) é a distância horizontal entre duas cristas ou entre dois vales consecutivos. Desse modo, pode ser entendido como o comprimento que a onda completa após um ciclo. No Sistema Internacional de Medidas (SI), o comprimento de onda é medido em metros (m).

A Figura 8 mostra ondas produzidas a partir da perturbação de uma corda.

Figura 8 – Ondas transversais em uma corda



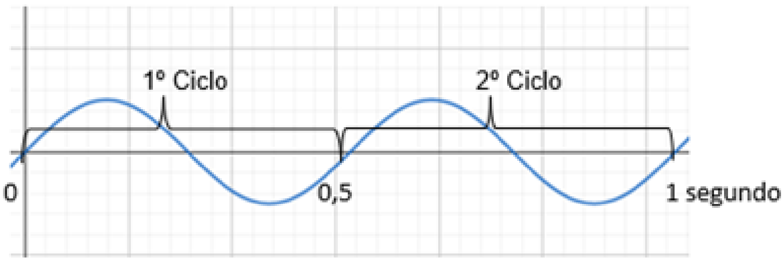
Fonte: Marista (2023).

De acordo com a Figura 8, a intensidade (fraca ou forte), relativa à energia do movimento da mão, e a frequência (número de repetições) do movimento da mão faz vibrar a corda que gera ondas com diferentes comprimentos e amplitudes. A onda que aparece na imagem (A) é resultante da baixa intensidade e da baixa frequência do movimento da mão, em comparação com a imagem (C). Na imagem (B), a frequência é maior que em (A), porém a intensidade parece se manter. A onda da imagem (C) resulta de maior intensidade e frequência do movimento da mão. Assim, quanto maior a energia e a frequência com que o movimento da mão é executado, maior a amplitude da onda. A amplitude da onda está relacionada com o ponto mais alto e o ponto mais baixo, chamados respectivamente de crista e de vale.

Frequência e período: Em um fenômeno em que a onda produzida é periódica, ou seja, que se repete em intervalos determinados, a frequência f é definida como o número de oscilações completas da onda (ou número de ciclos completos da onda) que ocorre em uma unidade de tempo. Sua unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades (SI) é chamada Hertz (Hz), que significa ciclos por segundo.

O Período T de uma onda é o tempo que leva para executar uma oscilação completa e sua unidade de medida no SI é o segundo. Em uma onda periódica, a frequência pode ser identificada, graficamente, como o movimento completo que a onda dá em torno de seu eixo horizontal (Figura 9).

Figura 9 – Ciclo de uma onda periódica com 2 Hz

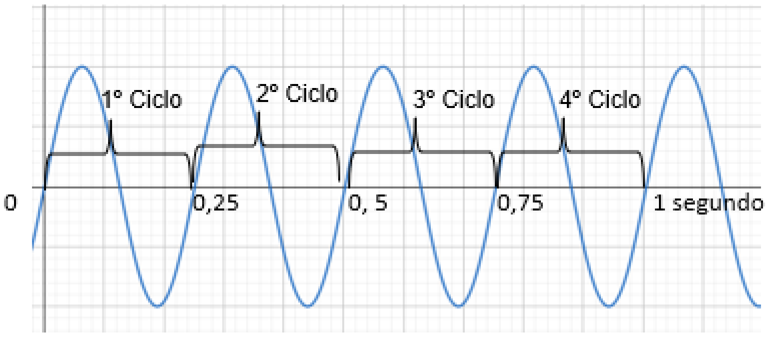


Fonte: Autora.

Ao observar a Figura 9, o momento que a onda começa a se repetir é quando começa o 2º ciclo. A onda possui duas oscilações completas em 1 segundo o que determina que sua frequência é $f = 2\ Hz$. Também, o tempo que a onda demora para percorrer um ciclo completo é de $0{,}5$ segundo, ou seja, o período é $T = \frac{1}{2} = 0{,}5$ segundo. Observe que a frequência λ e o período T estão relacionados entre si da forma $T = \frac{1}{f}$.

Na Figura 10 é apresentada uma onda periódica com 4 ciclos completos em 1 segundo.

Figura 10 – Ciclo de uma onda periódica de 4 Hz



Fonte: Autora.

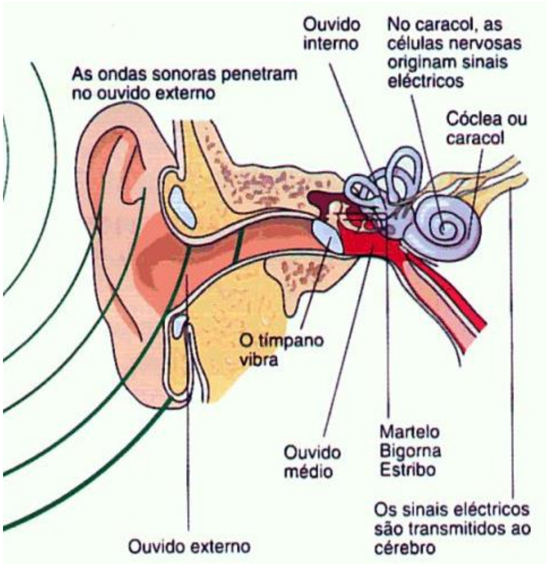
Na onda da Figura 10, a frequência é de 4 Hz, e cada ciclo tem duração de 0,25 segundos. Em comparação com a Figura 9, ela possui mais oscilações por segundo.

Velocidade: a velocidade v de propagação de uma onda é a velocidade de propagação de seus pulsos (perturbações que se propagam). Quando a onda é periódica, em que o movimento se repete em tempos iguais, o deslocamento se refere ao comprimento λ da onda, enquanto que o intervalo de tempo se refere ao período T da onda. A velocidade é uma relação entre o comprimento e o período da onda, ou seja, $v = \frac{\lambda}{T}$. Considerando que o período T se relaciona com a frequência f, então a velocidade pode ser reescrita como $v = \lambda . f$. As ondas se propagam com velocidades distintas, pois a velocidade depende do meio. O som se propaga melhor em meios sólidos em comparação com o líquido e o gasoso, devido a composição dos materiais.

3.2 O SOM

O som é uma sensação auditiva resultante da percepção de distúrbios das moléculas de um meio, num certo tempo. Considerando o ar como meio de propagação do som, as ondas sonoras são a variação da pressão atmosférica, as quais chegam ao ouvido e são decodificadas em impulsos nervosos (WHEELER, 2014). A Figura 11 ilustra como o ouvido humano percebe o som

Figura 11– Ouvido humano e a percepção de ondas sonoras



Fonte: Anacleto ([2015]).

O ouvido é o órgão responsável por captar as ondas sonoras e transformá-las em impulsos nervosos que viajam até o cérebro para serem interpretados (GUNTHER, 2012). As ondas sonoras podem ser exploradas pela variação de pressão em pontos, pois o ouvido humano capta essas variações e decodifica no cérebro. Ao entrar a onda sonora no canal auditivo, há uma pressão em um lado do tímpano, sendo que no ambiente externo há a pressão atmosférica. Essa diferença de pressão faz com que o ar esteja em movimento e as ondas sonoras sejam percebidas. A complexidade das ondas sonoras é justificada pela sua composição de frequências que se superpõem e se interferem:

> Essa complexidade é antes de mais nada a do som concreto, o som real, que é sempre, em alguma medida, impuro. São os feixes de onda mais densos ou mais esgarçados, mais concentrados no grave ou no agudo, são em suma os componentes da sua complexidade (produzida pelo objeto que o gerou) que dão ao som aquela singularidade colorística que chamamos *timbre**. Uma mesma nota (ou seja, uma mesma altura) produzida por uma viola, um clarinete ou um xilofone soa completamente diferente, graças à combinação de comprimentos de ondas que são ressoadas pelo corpo de cada instrumento. Essa ressonância está ligada a uma propriedade do som, que é de vibrar dentro de si, além da frequência fundamental que percebemos como altura (a frequência mais lenta é grave), um feixe de frequências mais rápidas e agudas, que não ouvimos como altura isolada, mas como um corpo timbrístico, muitas vezes caracterizado como a cor do som. Esse feixe de frequências embutido no som, esse espectro de ondas que o compõe, pode ser, como através de um prisma, subdividido nos sons da chamada *série harmônica**. A série harmônica é a única "escala" natural, inerente à própria ordem do fenômeno acústico (WISNICK, 2006, p. 24).

De acordo com o autor, o som é complexo porque é composto por outros sons que vibram juntos, os quais são chamados harmônicos. Juntos, eles formam a série harmônica, que é a combinação do som principal (nota fundamental) e dos seus sons harmônicos.

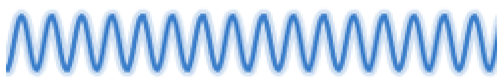
Um som pode ser produzido a partir de vibrações regulares ou irregulares da pressão atmosférica. Quando as vibrações são regulares, a onda produzida é periódica e gera um som agradável e harmonioso. Quando são irregulares, a sensação auditiva é chamada de ruído (MED, 1996). As vibrações regulares estão associadas a três principais características que distinguem um som: a altura, a intensidade e o timbre.

Altura: as vibrações produzidas pelas ondas sonoras possuem determinada altura que é o termo musical utilizado para definir se um som é agudo (alta frequência) ou grave (baixa frequência). Assim, a altura está relacionada com a frequência da onda. Quando alguém se refere à altura de um som, musicalmente, não se está falando de volume (alto ou baixo) no sentido usual. Por exemplo, uma pessoa que aumenta o som do rádio está aumentando o seu volume e não aumentando a frequência da onda musical.

Figura 12– Diferentes alturas nas ondas sonoras

12.1 – Onda de baixa frequência

12.2 - Onda de alta frequência



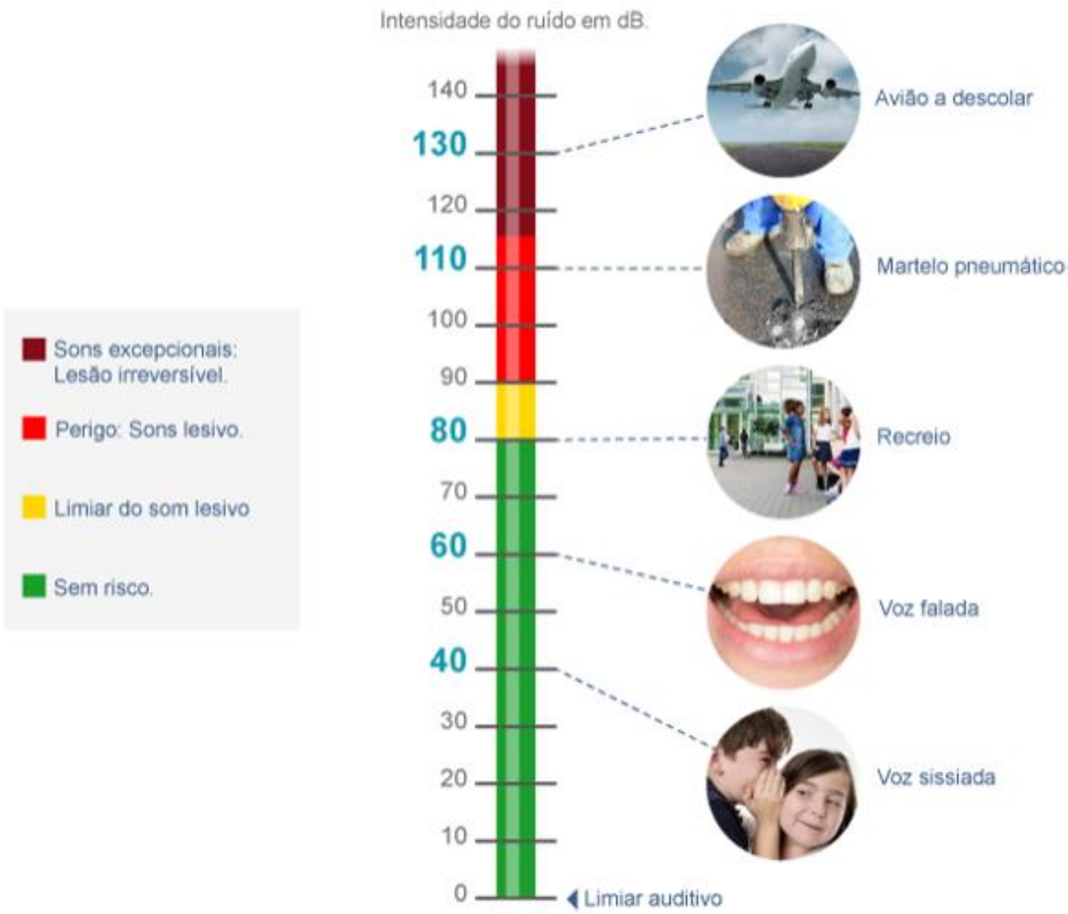
Fonte: Autora.

Na Figura 12, a onda sonora à esquerda (Subfigura 12.1) define um som mais grave do que o som relativo à onda da direita (Subfigura 12.2), pois nela se observa um menor número de oscilações completas, sendo assim um som de baixa frequência.

Intensidade: é a característica que permite distinguir sons fortes (mais intensos) e sons fracos (menos intensos), está relacionada com a energia e a amplitude da onda. O som forte e o som baixo seriam representados, respectivamente, por ondas sonoras com grandes amplitudes e que carregam mais energia, e por ondas com menores amplitudes e menos energia.

A intensidade é medida em Decibel (dB) e existe uma escala decibel em que o menor som que se pode ouvir pelo ser humano, chamado limiar auditivo, corresponde a 0 dB, como mostra a Figura 13.

Figura 13 - Limites de intensidade do som no ouvido humano



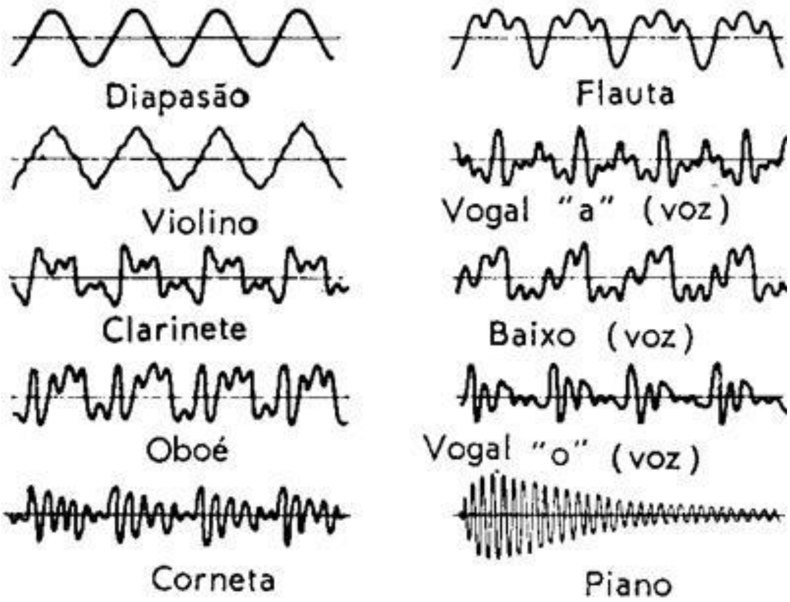
Fonte: Camilleri, Ducourneau e Pujol (2017).

De acordo com a figura acima, um som com intensidade entre 20 e 40 dB corresponde a um sussurro, a voz falada apresenta uma intensidade média de 60 dB, enquanto que um avião decolando produz um som com intensidade de aproximadamente 110 dB. Até 80 dB, o som é dito saudável e não acarreta risco para o ouvido. Entre 80 e 90 dB está a faixa de risco lesivo, e acima desta faixa existe risco ao ouvido humano, podendo causar sérias lesões à audição.

Enquanto a escala Decibel (dB) mede a intensidade do som, o Hertz (Hz) mede a frequência do som a qual determina se o som é grave (baixa frequência) ou agudo (alta frequência). Assim, as frequências sonoras perceptíveis pelo ser humano variam de 20 Hz a 20000 Hz. Esse intervalo é denominado intervalo audível. Acima e abaixo deste intervalo, as frequências são chamadas ultrassom e infrassom, respectivamente.

Timbre: o timbre é a característica que permite diferenciar sons que possuem a mesma frequência e amplitude. Na Figura 14, as ondas sonoras produzidas por diferentes instrumentos musicais possuem mesma frequência, mesma amplitude, porém com timbres diferentes.

Figura 14 – Diferentes formas de onda



Fonte: FONÉTICA acústica: o som (2021).

Dependendo da fonte sonora, são produzidas ondas com formatos diferenciados que permitem reconhecer diferentes timbres. Como por exemplo, a nota LÁ tocada pelo instrumento musical violino, quando comparada ao som no piano, apesar de ser a mesma nota musical, sua sonoridade é diferente, isso ocorre por conta do timbre único que cada instrumento ou tom de voz possui.

3.3 MÚSICA

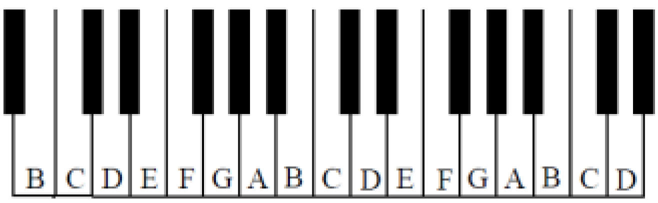
Segundo o Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE) “a música (do grego *μουσική τέχνη - musiké téchne*, a arte das musas) é uma forma de arte que se constitui basicamente em combinar sons e silêncio seguindo uma pré-organização ao longo do tempo”. Ela também pode ser entendida como “uma linguagem universal, mas com muitos dialetos, que variam de cultura para cultura, envolvendo a maneira de tocar, de cantar, de organizar os sons e de definir as notas básicas e seus intervalos” (JEANDOT, 1997, p.12).

Conforme Gardner (1994), a música pode ser entendida como uma capacidade cognitiva que estabelece relações com outras habilidades e dessa forma, forma-se o espectro de inteligência que é contemplado por:

- lógico-matemática: a capacidade de deduzir informações;
- musical: o indivíduo lida com os sons;
- linguística: comunicar-se através de palavras e diferentes línguas;
- intrapessoal: refere-se ao autoconhecimento de um indivíduo;
- interpessoal: a capacidade de um indivíduo criar vínculos e relacionar-se com outros;
- espacial: noção de espaço e de orientar-se;

As notas são os menores elementos do som. Elas são ordenadas e formam uma escala musical. A escala diatônica contém sete notas: DÓ - RÉ - MI - FÁ - SOL - LÁ – SI, em que a primeira nota é repetida na oitava, dando início a uma nova escala. Elas podem ser representadas por letras do nosso alfabeto: C – D – E – F – G – A – B; respectivamente, como na Figura 15, em que é apresentado o teclado de um piano e suas notas musicais.

Figura 15 – Teclado musical



Fonte: Wright (2009).

O teclado, assim como outros instrumentos musicais, permite a repetição de notas musicais. Essa repetição, por sua vez, faz com que algumas notas soem mais agudas e outras mais graves. Se comparar duas notas musicais quaisquer do piano, a nota que estiver à esquerda é mais grave que a nota à direita. Essa diferença entre os sons musicais é resultado da altura das ondas que está relacionada à frequência das vibrações, ou seja, com a sua velocidade. Quanto maior for a velocidade da vibração, mais agudo será o som e consequentemente mais à direita estará a nota musical. Assim, dizer que uma nota está uma *oitava* acima indica que é a mesma nota, porém ela está posicionada mais à direita no teclado. A Quadro 1 mostra a frequência de acordo com cada nota musical em uma mesma oitava.

Quadro 1 – Frequência das notas musicais

Notas	**Frequências**
DÓ	261,63 Hz
RÉ	293,66 Hz
MI	329,63 Hz
FÁ	349,23 Hz
SOL	391,99 Hz
LÁ	440,00 Hz
SI	493,88 Hz

Fonte: Prescinato (2011).

Quanto mais rápidas são as vibrações, mais agudo é o som, e vice-versa. São estas vibrações que geram as sete notas musicais conhecidas como DÓ - RÉ - MI - FÁ - SOL - LÁ – SI, sendo que cada nota possui uma frequência própria.

3.4 A ESCALA PITAGÓRICA

Aqui é apresentado um pouco sobre a história de Pitágoras, por entender que ele foi um grande precursor das escalas musicais, estabelecendo a primeira relação entre a música e a matemática.

Pitágoras de Samos (580-500 a.C) era um professor e místico nascido em Samos, uma ilha do Dodecaneso. Em suas viagens para o Egito e Babilônia absorvia informações que foram fundamentais no desenvolvimento da ciência e quando retornou para a Grécia, fundou a Escola Pitagórica (BOYER, 2019).

A escola Pitagórica surgiu por volta do século VI a.C na Grécia Antiga, e para seus seguidores, os assuntos fundamentais eram a geometria, a aritmética, a música e a geometria. Assim, os números eram elementos fundamentais para a construção do saber, assim como a música, pois o céu era como uma escala musical (SOUSA et al., 2019).

Apesar das descobertas de Pitágoras, não há comprovação de que alguma obra existente seja realmente de sua autoria. (BOYER, 2019). Muito se atribui à Escola Pitagórica, pois o conhecimento era comum, porém secreto. Muitas destas obras, foram e ainda são essenciais para o desenvolvimento da ciência, principalmente na construção de escalas musicais, através da relação do som com o comprimento da corda.

A construção da Escala Pitagórica, assim conhecida por ser atribuída a Pitágoras, usa como instrumento o monocórdio e tem como base o comprimento da sua corda. A escala possui intervalos de quintas e de quartas, que são as distâncias de uma nota fixa a outra nota. Por exemplo, fixada a nota DÓ na escala diatônica, a quarta nota será FÁ e a quinta SOL, esses três sons quando tocados em qualquer ordem produzem sons harmônicos. No Quadro 2, há a relação do comprimento da corda solta (X) com um meio da corda (ou uma oitava acima da corda solta). Esses dois intervalos são consonantes, o que provoca a harmonia quando tocados juntos, apresentando uma classe de equivalência.

Quadro 2 - Relação de ½ do comprimento de uma corda e sua frequência

Comprimento da corda (x)	Frequência (f)
X	f
$X/2$	$2f$

Fonte: Autora.

Continuando a investigação com o monocórdio, ao posicionar o cavalete a 1/3 do final da corda e tocar 2/3 do restante, ainda há a consonância entre os sons. Essa harmonia pode ser representada com o Quadro 3 que também relaciona o comprimento da corda com a frequência em relação à original (oitava).

Quadro 3 - Relação de 2/3 do comprimento de uma corda e sua frequência

Comprimento da corda (*x*)	Frequência (f)
X	f
$2X/3$	$3f/2$

Fonte: Autora.

Com relação à frequência de $2X/3$ do comprimento da corda, também se estabelece a relação mostrada no Quadro 4.

Quadro 4 - Relação de 3/4 do comprimento de uma corda e sua frequência.

Comprimento da corda (*x*)	Frequência (f3)
$2X/3$	f_3
$3X/4$	$4f_3/3$

Fonte: Autora.

A partir dessas três tabelas, é possível observar que o som produzido pela corda solta e depois com as outras proporções é a referência para determinar intervalos harmônicos, conforme o comprimento da corda como a oitava de razão 1:2, a quinta de razão 2:3 e a quarta de razão 3:4, com diferentes comprimentos. E também, com relação a frequências que são diferentes nestes intervalos pode-se definir outras notas musicais harmônicas.

Definindo a nota DÓ com a razão 1 para tônica[5] e multiplicando pela razão das frequências se obtém a Escala Pitagórica composta por apenas intervalos de quartas e quintas, definidor a partir de uma nota. Como exemplo, fixada a nota RÉ, a quarta nota musical será SOL, pois é a quarta nota tocada:

- Quinta acima de DÓ é um SOL: $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
- Subindo uma quarta a partir de DÓ temos um FÁ: $1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
- Descendo uma quarta a partir de SOL temos a nota RÉ: $\frac{3}{2} \div \frac{4}{2} = \frac{9}{8}$
- Quinta acima de RÉ é LÁ: $\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$
- Quarta abaixo de LÁ é MI: $\frac{27}{16} \div \frac{4}{3} = \frac{81}{64}$
- Quinta acima de MI é SI: $\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$

[5] A nota musical chamada de tônica é a primeira nota de uma escala musical, com referência a nota DÓ para a escala diatônica.

Dessa forma, a Figura 16 apresenta a Escala Pitagórica para uma escala maior[6].

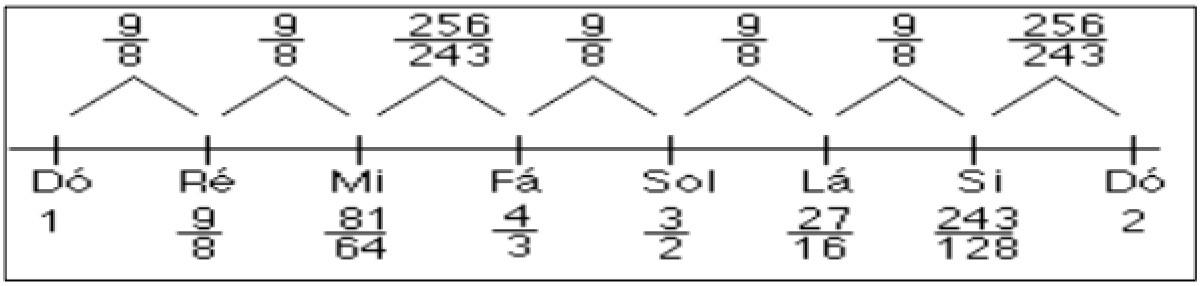
Figura 16 – A Escala Pitagórica

nota	*dó*	*ré*	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*	*dó*
razão	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Fonte: Benson (2006)

Já a Figura 17 mostra a diferença na razão dos intervalos entre duas notas musicais quaisquer.

Figura 17 – Razões entre as notas musicais na Escala Pitagórica



Fonte: Silva (2013).

Observa-se na figura acima que as razões entre as notas musicais podem ser iguais ou diferentes. Por exemplo, a razão entre DÓ e RÉ é igual à razão entre SOL e LÁ, e que estas se diferem da razão entre MI e FÁ.

Essa diferença de alguns intervalos originou a Escala Temperada, com a inserção de mais 5 notas musicais, consistindo em 12 notas: DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FÁ, FÁ#, SOL, SOL#, LÁ, LÁ# e SI, em que o símbolo ‘’#’’ representa o sustenido. Nessa escala, chamada de escala temperada, o intervalo entre DÓ e DÓ# é o mesmo entre DÓ# e RÉ. As notas harmônicas passam a ter a mesma frequência, o que não acontece na Escala Pitagórica (IAZZETTA, 2000).

[6] A escala maior é uma sequência de oito notas musicais sucessivas e ordenadas que possui cinco intervalos de tons e dois intervalos de semitons entre as notas. A escala diatônica também é considerada uma escala maior.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA - (TRRS)

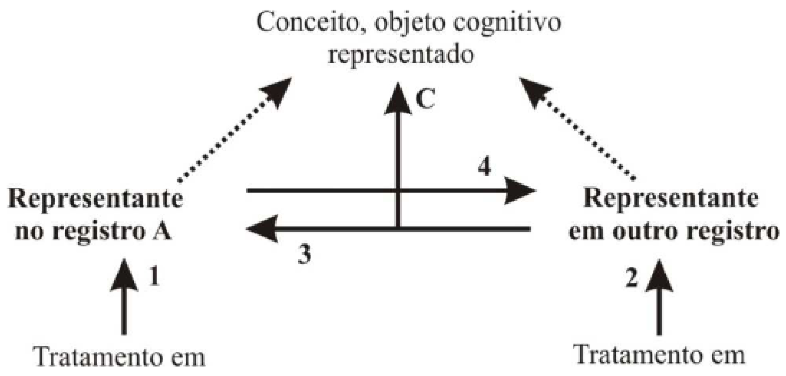
A Teoria Dos Registros De Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida na década de 80 pelo psicólogo e filósofo francês Raymond Duval. Para Duval, os objetos matemáticos não são reais e só é possível acessá-los por meio de representações semióticas.

Um sistema semiótico é um conjunto de signos, os quais são organizados e possuem regras e relações que possibilitam identificar o objeto representado. Dessa forma, o sistema semiótico desempenha a função de comunicar informações sobre determinado signo. No entanto, para um sistema semiótico ser um registro de representação semiótica é preciso que haja três operações cognitivas: a formação de uma representação semiótica identificável, o tratamento e a conversão.

- A formação de uma representação semiótica identificável refere-se ao conjunto de elementos, regras, princípios e unidades que identificam um objeto.
- O tratamento consiste em alterar o conteúdo da representação, no entanto, ainda no mesmo registro semiótico. Duval (2003, p. 16) traz como exemplos de tratamento "[...] efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de sistema".
- A conversão é quando há mudança de registro, conservando os mesmos objetos denotados. Um exemplo seria representar o número 2^3 que está no registro algébrico para o registro da língua natural, por meio da escrita "dois elevado ao cubo".

A operação de conversão é a principal operação cognitiva ligada à aprendizagem matemática, porque está ligada à coordenação dos registros, como se observa na hipótese fundamental enunciada por Duval (2012, p. 282): *"a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a* *espontaneidade da atividade cognitiva de conversão".* Um esquema da hipótese fundamental é apresentado na Figura 18.

Figura 18 **-** Hipótese fundamental



Fonte: Duval (2012).

Pela hipótese fundamental, é preciso fazer tratamentos em cada registro (setas 1 e 2) e posteriormente realizar conversões em duplo sentido (setas 3 e 4) entre o representante no registro A e o representante no outro registro para se chegar à aprendizagem conceitual do objeto matemático.

Conforme Duval (2004), quanto mais representações de um mesmo objeto matemático, maior é a contribuição para a aprendizagem desse objeto. Isso ocorre porque cada representação do objeto é diferente, comunicando uma propriedade ou um novo conceito, os quais vão se complementando. Assim, a diversidade de sistemas semióticos associada às operações cognitivas, especialmente a conversão, contribui para a aprendizagem matemática.

Quanto à relação entre matemática e música, Carbajal-Vaca (2014) afirma que é possível relacionar a TRRS à musica, pois os objetos matemáticos e os objetos musicais são semelhantes, já que não podem ser acessados diretamente, precisando-se assim das representações semióticas. Assim, *"[...] os fenômenos acústicos em geral são perceptíveis, quando os classificamos como ''musicais'',* imediatamente aparecerão como elementos que serão entendidos apenas em relação a algum sistema semiótico da música em particular (CARBAJAL-VACA, 2014, p.215, tradução nossa).

Os objetos musicais quando analisados separadamente não possuem significados, apenas classificação nominal. No entanto, quando associados ao sistema semiótico acústico é possível acessá-los por meio da partitura. Neste sentido, a partitura ou outra forma de escrita como a tablatura não equivalem diretamente ao som. Ou seja, há uma diferença entre o que está representado pela escrita (partitura/tablatura) e sua realização final (sonora/acústica) (BROMBERG, SAITO, 2017, p.139).

Como na TRRS os objetos matemáticos também não podem ser confundidos com suas representações, Bromberg e Saito (2017) ressaltam que esta distinção também deve ser válida para os objetos musicais, uma vez que a partitura é a forma da escrita musical que pode ser interpretada e executada posteriormente, porém não é a própria música.

A TRRS é uma teoria densa e abrangente. Um ramo desta abrangência é o esboço de curvas de funções, que é explorado a partir da abordagem de Interpretação Global Figural. Na Educação Básica, e também em outros níveis de ensino, é comum esboçar curvas de funções usando a abordagem conhecida como Ponto a Ponto. Mais especificamente, no estudo de funções, apresenta-se inicialmente a lei de formação, ou seja, a representação da função no registro algébrico, para posteriormente construir o gráfico a partir da abordagem Ponto a Ponto.

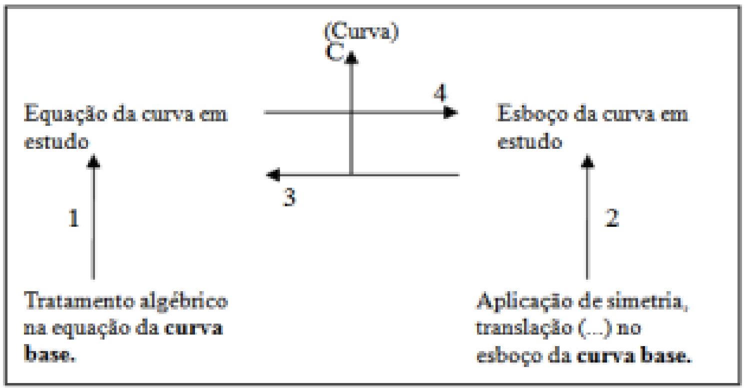
Na abordagem Ponto a Ponto são atribuídos valores para a variável independente, conforme lei de formação, e por meio de cálculos são encontrados os valores para a variável dependente. Essa abordagem pode gerar a perda de informações, isto é, o aluno pode não conseguir estabelecer relações entre as representações da função nos registros algébrico e gráfico, pois há apenas uma correspondência local entre o par ordenado e o ponto no gráfico, como se fosse uma regra de codificação. Sobre isso:

> A regra de codificação só permite, portanto, duas coisas: ou a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto a partir de uma dupla de números. A repetição destas duas operações elementares não é suficiente para a conversão de representações entre os dois registros. (DUVAL, 1993, p. 45).

Segundo Duval (2012), para que haja aprendizagem conceitual de funções é necessário que o esboço de curvas não considere apenas esta correspondência entre pares ordenados. É preciso levar em consideração as unidades significativas da lei de formação, ou seja, os parâmetros (coeficientes) presentes na representação algébrica e relacionar elas com as unidades significativas visuais próprias da representação gráfica (inclinação, concavidade, intersecção com os eixos).

Assim, na teoria de Duval, o esboço de curvas de funções ganha atenção especial e a abordagem defendida é a Interpretação Global Figural. Nela, uma curva é construída a partir da análise das qualidades da função e durante esta construção são desenvolvidas atividades cognitivas. A Figura 19 mostra um esquema, semelhante ao esquema da hipótese fundamental de aprendizagem de Duval (Figura 16), porém voltado ao esboço de curvas.

Figura 19 – Esquema de atividades cognitivas no esboço de curvas



Fonte: Silva (2008, p.85)

De acordo com o esquema acima, a abordagem de Interpretação Global Figural trata de estudar qualitativamente a expressão ou lei de formação de uma função na denominada equação de curva base, para assim fazer modificações algébricas (tratamentos) e analisar graficamente o que implicam essas modificações (conversão) articulando as operações entre os dois registros. Portanto, as representações de uma função nos registros gráfico e algébrico são operadas de modo que as modificações produzidas na representação de função de um dos registros semióticos tenham suas modificações correspondentes nas representações do outro registro, de forma articuladas.

5 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste é de uma pesquisa qualitativa, pois busca explicar um fenômeno musical associando a parâmetros matemáticos que implicam no esboço da curva e na produção da onda sonora, associando aos seus respectivos significados. Conforme Minayo (2014) ‘’*A pesquisa qualitativa se preocupa com o nível de realidade que não pode ser quantificado, ou seja, ela trabalha com o universo de significados, de motivações, aspirações, crenças, valores e atitudes*’’, dessa forma busca descrever o comportamento de uma onda sonora na aplicação de um modelo matemático simplificado.

Na primeira etapa, busca-se construir um modelo matemático simplificado que permita reproduzir sons musicais a partir do uso dos softwares GeoGebra e Audacity. Considerando que um fenômeno sonoro real envolve diversas variáveis, como a velocidade da onda, o meio de propagação, o tipo de instrumento, a pressão atmosférica normal, a capacidade auditiva de cada pessoa (variável subjetiva), considera-se como base para o modelo matemático a senoide[7], que pode ser o tipo mais elementar de representação de uma onda sonora.

Dentre as diversas formas da função trigonométrica $y(x) = sen\ (K(x))$, em que $K(x)$ é um polinômio qualquer, neste trabalho assume-se $K(x)$ como um polinômio de primeiro grau. Assim, a busca pelo modelo matemático simplificado parte da seguinte representação da função seno no registro algébrico:

$$y(x) = A.sen(Bx + C) + A_0$$

sendo os parâmetros A, B, C e A_0, números reais. Usando a abordagem de Interpretação Global Figural, são analisadas como as unidades significativas (os parâmetros) desta representação algébrica estão relacionados com as unidades visuais gráficas. Em seguida são realizados novos estudos e ajustes à representação algébrica, pois a função seno precisa ser uma função cuja variável seja o tempo. Novamente a abordagem de Interpretação Global Figural é aplicada para estabelecer

[7] No próximo capítulo é justificado o porquê da escolha da senoide e não da cossenoide.

as relações entre os parâmetros e as unidades visuais da curva senoide, porém agora, no contexto da música, chegando ao modelo matemático procurado.

A segunda etapa da metodologia tem como foco a experimentação, ou seja, a intenção é vivenciar o fenômeno sonoro, reproduzindo e ouvindo os sons musicais, percebendo de que forma cada som se relaciona com os parâmetros. Para exemplificar o experimento, apenas as notas musicais LÁ e DÓ são exploradas, mas nada impede o uso de outras notas musicais.

A escolha pelo software GeoGebra se justifica por ser gratuito, por permitir o esboço de curvas de modo prático e também por possibilitar ouvir o som das notas musicais a partir do comando *TocarSom*. Já o Audacity é um editor de áudio, também gratuito, que possibilita visualizar as faixas de áudio e as reproduzir. Embora não seja um aplicativo voltado para o âmbito matemático, permite importar e exportar diferentes arquivos de áudio e ainda alterar os sons com cortes, efeitos, programar tons, mixagem e mudar a velocidade das faixas de áudio. Os dois principais comandos utilizados é o *Efeitos* para perceber e ouvir o *delay*[8] e o *Tom programável* para ouvir e visualizar a função seno nas notas musicais.

[8] *delay* é o nome dado para o atraso de áudio que ocorre em virtude do processamento do som. Um músico ao gravar uma faixa de áudio pode escutar a música reproduzida em um fone de ouvido em uma velocidade atrasada com a que está tocando, isso é uma falha comum que acontece nos computadores devido a latência (tempo do processamento da informação pelo computador).

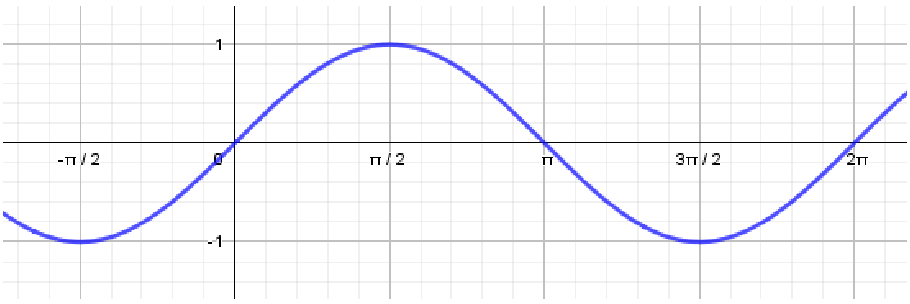
6 ANÁLISE E RESULTADOS

Neste capítulo é abordada a definição da função seno e realizada a análise do esboço de curva desta função via abordagem de interpretação global figural. Após, ocorre a aplicação de um modelo matemático para a função seno contemplando o âmbito musical e a sua experimentação de forma gráfica e sonora.

6.1 A FUNÇÃO SENO VIA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

A função seno pode ser definida como a função f de R em R que a cada x faz corresponder o número $y = sen\, x$, ou seja, $f: R \rightarrow R$, $x \rightarrow y = sen(x)$. O gráfico da função Seno é chamado senoide:

Figura 20 – Curva senoide



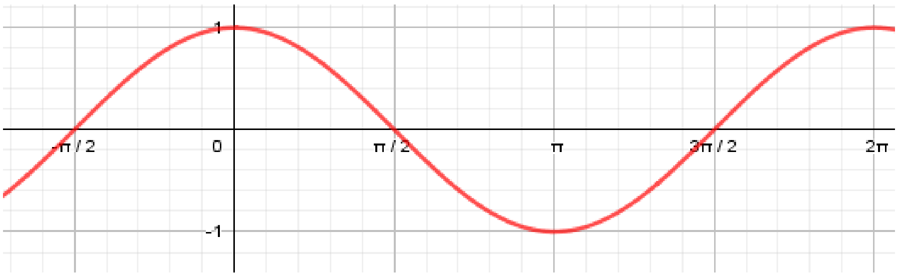
Fonte: Autora.

O Domínio da função seno é o conjunto dos números reais e a Imagem o intervalo real $[-1,1]$. Essa é uma função periódica, uma vez que $sen(x) = sen\,(x + 2\pi)$ e seu período é 2π.

Já a função cosseno, que como o próprio nome já sugere, surgiu da necessidade de determinar o seno do complemento de um ângulo.

Definição: a função cosseno pode ser definida como a função f de R em R que a cada x faz corresponder o número $y = cos\, x$, isto é, $f: R \rightarrow R$, $x \rightarrow y = cos(x)$. O Domínio da função cosseno é $D(f) = R$ e a Imagem é $[-1,1]$. Da mesma forma que a função seno é uma periódica, uma vez que $cos(x) = cos\,(x + 2\pi)$ e seu período é 2π. O gráfico da função seno é chamado cossenoide e pode ser visto na Figura 21.

Figura 21 – Curva cossenoide

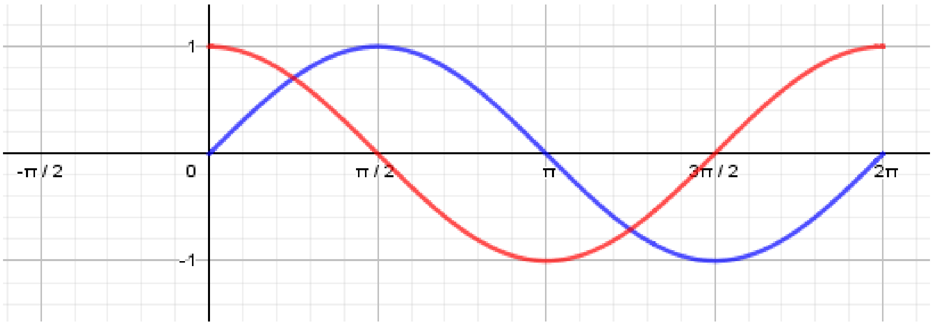


Fonte: Autora.

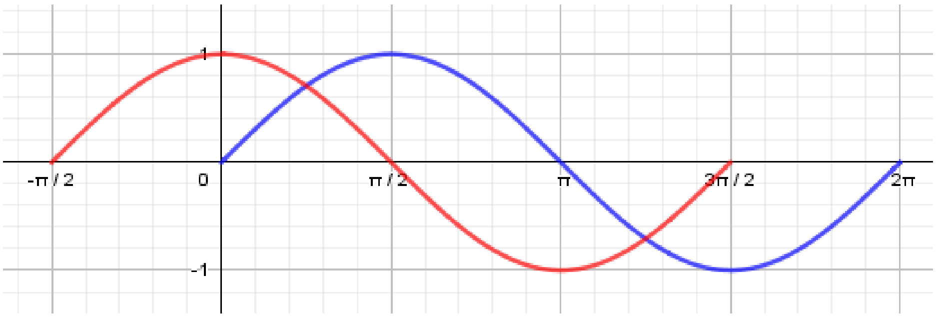
Observando as Figuras 20 e 21, a cossenoide é a própria senoide, porém deslocada. Juntando estas duas curvas é possível perceber o deslocamento e comprovar esta afirmação, conforme Figura 22:

Figura 22 – Curva cossenoide

Subfigura 22.1



Subfigura 22.2



Fonte: Autora.

Na subfigura 22.1 encontram-se a senoide (curva de cor azul) e a cossenoide (curva vermelha). Na subfigura 22.2, a cossenoide sofreu um deslocamento horizontal de $\frac{\pi}{2}$ unidades à esquerda, no eixo horizontal e seu gráfico é semelhante ao gráfico da função seno, a menos deste deslocamento. Logo, vale a igualdade $sen(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Assim, uma onda cossenoide é considerada também senoide, pois possui o mesmo formato, porém transladada no eixo horizontal com relação à onda seno. Portanto, optando pela função seno e dentre as suas diversas formas, é considerada a seguinte representação no registro algébrico, como ponto de partida para a construção do modelo matemático simplificado:

$$y(x) = A.sen(Bx + C) + A_0,$$

sendo os parâmetros A, B, C e A_0 números reais.

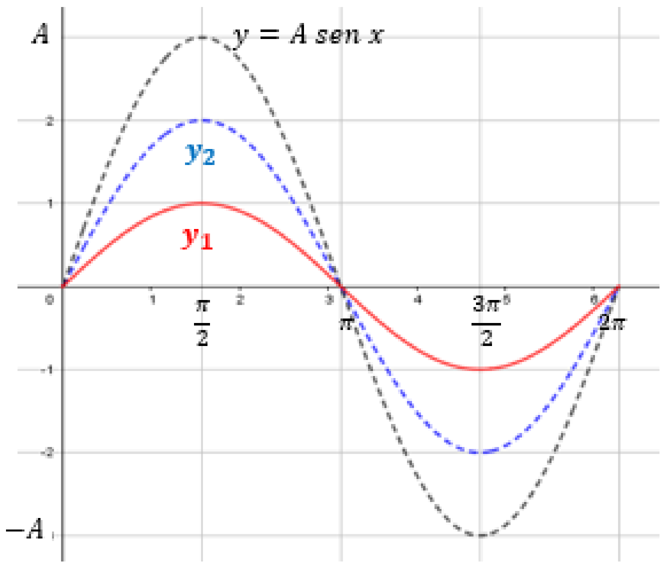
Partindo desta representação algébrica, para o esboço da senoide são modificados os valores dos parâmetros A, B, C e A_0 para observar as modificações da curva no registro gráfico, conforme abordagem de Interpretação Global Figural.

Para iniciar o esboço da curva, considere a função base $y = Asen\,x$, em que $B = 1$, $C = A_0 = 0$, e o valor do parâmetro A é variável.

a) Para $A = 1 \Longrightarrow y_1 = sen\,x$.

b) Para $A = 2 \Longrightarrow y_2 = 2sen\,x$.

Figura 23 – Curva $y = Asen\,x$



Fonte: Autora.

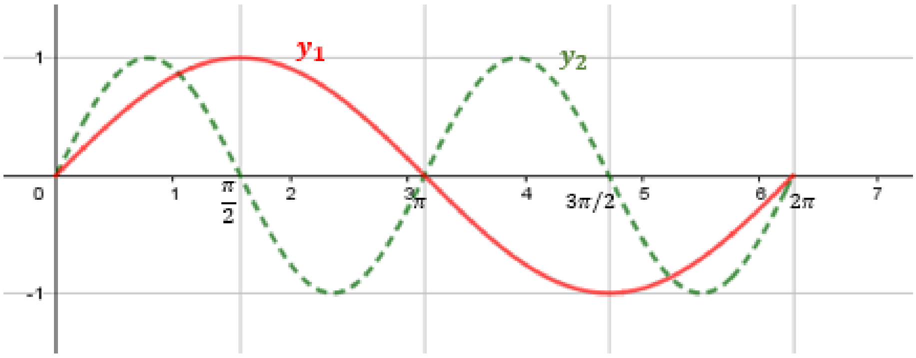
A Figura 23 mostra que o parâmetro A está relacionado com o ponto mais alto (crista) ou o ponto mais baixo (vale) da curva. Assim, o parâmetro A é a amplitude da onda. Quanto maior o valor de A, maior é a distância entre o eixo x e a crista, ou entre o eixo x e o vale.

Agora, considerando a função $y = sen\,(Bx)$, em que $A = 1,\ C = D = 0$ e o valor de B é variável:

a) Para $B = 1 \Longrightarrow y_1 = sen\,x$.

b) Para $B = 2 \Longrightarrow y_2 = sen2x$.

Figura 24 – Curva $f(x) = sen\,(Bx)$



Fonte: Autora.

A variação do valor de B na expressão algébrica produz ondas senoidais com diferentes comprimentos de onda λ e frequências f . Enquanto y_1 tem comprimento $\lambda_1 = 2\pi$, a curva y_2 tem comprimento $\lambda = \pi$.Também, a curva y_1 tem frequência $f_1 = 1\,Hz$, enquanto que y_2 tem frequência $f_2 = 2\,Hz$, já que a senóide completa duas oscilações no intervalo de $[0, 2\pi]$. Assim, o coeficiente B está relacionado com o comprimento e com a frequência da onda.

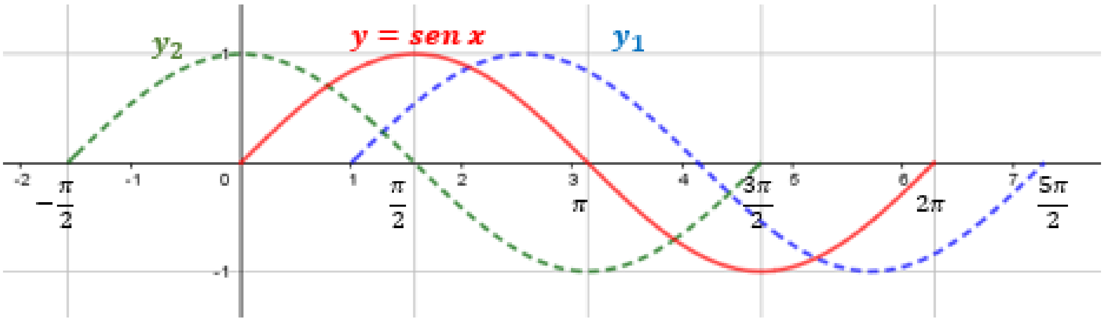
Mantendo os parâmetros $A = 1, B = 1, D = 0$ e variando o parâmetro C, resulta na função $y = sen\,(x + C)$:

a) Para $C = 0 \Longrightarrow y = sen\,x$

b) Para $C = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y_1 = sen(x + \frac{\pi}{2})$.

c) Para $C = -1 \Longrightarrow y_2 = sen\,(x - 1)$.

Figura 25 – Curva $f(x) = sen\ (x + C)$



Fonte: Autora.

Ao modificar o parâmetro C na expressão algébrica, as curvas sofrem um deslocamento sobre o eixo x, em comparação com a curva $y = sen\ x$. Assim, se $C > 0$, então a senóide se desloca C unidades para a esquerda e se $C < 0$ o deslocamento ocorre para a direita.

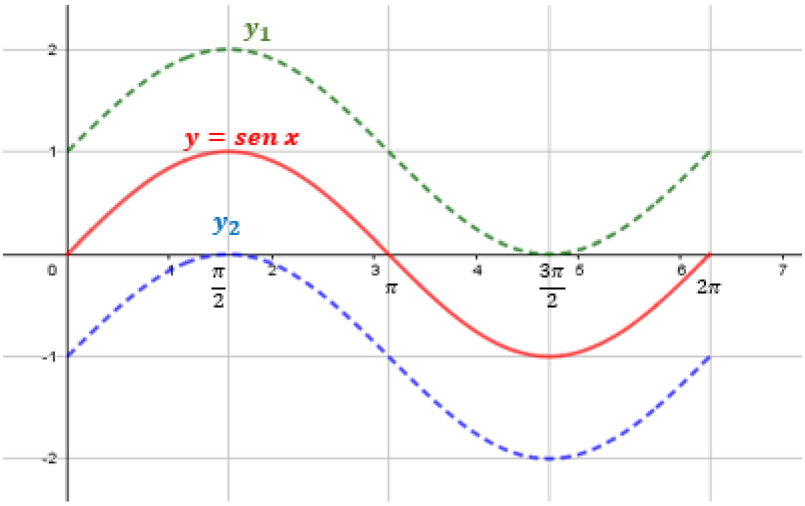
O último parâmetro a ser analisado é o A_0. Mantendo constantes $A = 1, B = 1, C = 0$ e variando o valor de A_0 na função $y = sen\ (x) + A_0$:

a) Para $A_0 = 0 \Longrightarrow y = sen\ x$

b) Para $A_0 = 1 \Longrightarrow y_1 = sen(x) + 1.$

c) Para $A_0 = -1 \Longrightarrow y_2 = sen\ (x) - 1.$

Figura 26 – Curva $f(x) = sen\ (x) + A_0$



Fonte: Autora.

Observando as curvas, o parâmetro A_0 está relacionado com o deslocamento vertical da senóide em relação à curva $y = sen\ x$. Se $A_0 > 0$, então a senóide se desloca D unidades para cima, em relação ao eixo y, e se $A_0 < 0$ a curva sofre um deslocamento para baixo.

Ao modificar os parâmetros na expressão algébrica, a onda produzida se modifica e entender como essas modificações se relacionam é o objetivo da abordagem de Interpretação Global Figural.

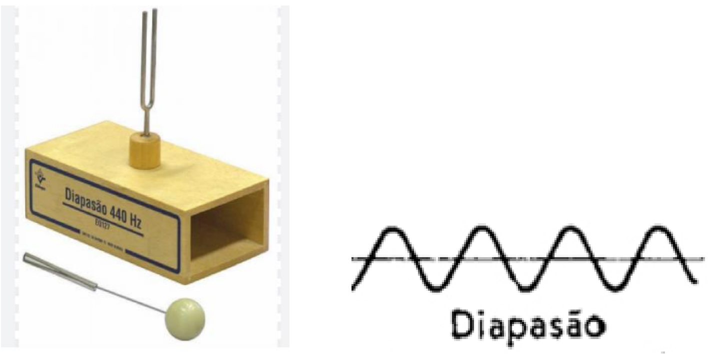
6.2 O MODELO MATEMÁTICO

A música é composta por ondas sonoras que assumem formas diferenciadas, conforme o timbre musical. Uma destas formas pode ser do tipo senoide, encontrada na natureza, no som ou até mesmo na luz.

As ondas sonoras são modificadas no processo denominado modulação, em que alterações na amplitude, frequência e comprimento de onda geram sons diferentes. A modulação está presente na música em todos os estilos musicais. A variação desses elementos deforma as características do sinal portador e varia proporcionalmente ao sinal modulador, em outras palavras, modifica a tonalidade durante o decorrer de uma música.

As ondas sonoras do tipo senoide podem ser identificadas no ouvido humano pelo instrumento denominado diapasão, útil para afinar vozes e outros instrumentos por meio de sua vibração. Sendo identificada pela caixa de ressonância do ouvido humano, mas a vibração também pode ser percebida por uma caixa de ressonância com uma parte aberta e outra fechada, que suporta e amplifica o som do instrumento conforme a Figura 27.

Figura 27 – Diapasão



Fonte: Adaptado de Freepik (2022).

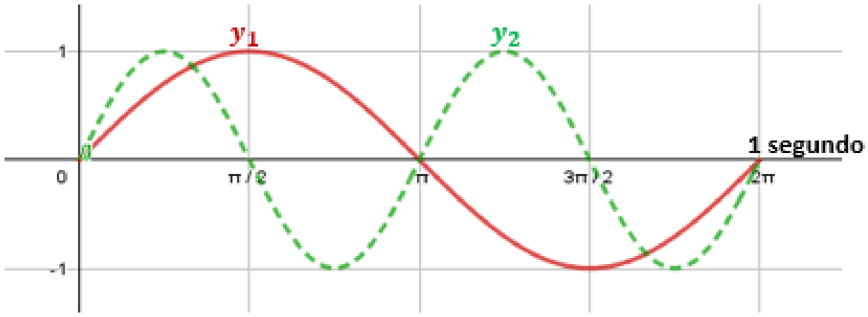
O diapasão produz ondas sonoras periódicas do tipo senoides. Do ponto de vista físico, as ondas sonoras podem ser representadas por sinais senoidais, ou seja, por oscilações harmônicas caracterizadas por movimentos que seguem um padrão e se repetem em intervalos regulares de tempo. Escrever a variação da pressão do ar por meio de uma única senoide (isolada com auxílio de algum sintetizador eletrônico, por exemplo) representa uma simplificação do fenômeno sonoro real.

Considerando que a análise do esboço de curvas da função $y = A.sen(Bx + C) + A_0$, já foi realizada via abordagem de Interpretação Global Figural, é preciso realizar alguns ajustes nesta representação algébrica para se chegar a um modelo matemático simplificado e geral para as ondas musicais senoidais, pois deve-se ter uma função cuja variável é o tempo t. Seguem tais ajustes:

- O parâmetro A indica a Amplitude da onda sonora. Como o som percebido pelo ouvido humano resulta da variação da pressão atmosférica, então essa variação está relacionada com a amplitude, e está relacionada com a intensidade do som, permitindo a distinção entre os sons fortes (mais intensos) e sons fracos (menos intensos). A amplitude tem relação direta com a intensidade, ou seja, quanto maior a amplitude mais forte é o som, ou ainda, maior o volume do som. Um exemplo pode ser uma pessoa que grita e depois sussurra, ambos na mesma frequência, mas no primeiro caso o som apresenta maior amplitude do que no segundo caso.

- O parâmetro B se relaciona com a frequência f, com o comprimento e com o período T, ou seja, com o tempo que a onda demora para realizar uma oscilação completa. De fato, para mostrar esta última relação, fixe o tempo em 1 segundo e considere as funções $y_1 = sen\ x$ e $y_2 = sen\ 2x$, sendo os parâmetros $A = 1$ e B iguais a $B = 1$ e $B = 2$, respectivamente, conforme Figura 28.

Figura 28 – Curvas $y_1 = sen\ x$ e $y_2 = sen\ 2x$



Fonte: Autora.

Uma oscilação completa da senoide $y_1 = sen\,x$ ocorre em 2π radianos e ela demora um segundo para essa oscilação, então sua frequência é

$$f = \frac{1\,oscilação}{1\,segundo} = 1\,Hz$$

e escreve-se:

$$1\,s \underline{\hspace{2cm}} 2\pi\,rad$$

$$t\,s \underline{\hspace{2cm}} x\ \ rad$$

$$x = x(t) = 1.2\pi t$$

Como o tempo para completar uma oscilação completa de y_1 é de 1 segundo, então o período é $T = 1s$.

Já a curva $y_2 = sen\,2x$ completa duas oscilações em um segundo, então sua frequência será

$$f = \frac{2\,oscilação}{1\,segundo} = 2\,Hz$$

da mesma forma,

$$1\,s \underline{\hspace{2cm}} 2.\,2\pi\,rad$$

$$t\,s \underline{\hspace{2cm}} x\ \ rad$$

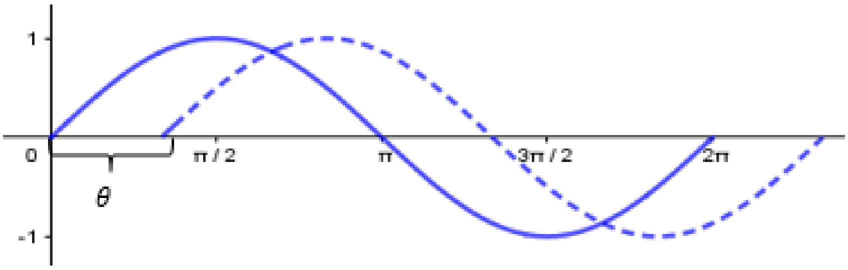
$$x = x(t) = 2.2\pi t$$

O tempo para completar duas oscilações é de 1 segundo e portanto, o período é $T = \frac{1}{2}s$.

Seguindo o raciocínio, chega-se à função $x(t) = f.\,2\pi t$ e portanto, o parâmetro B se relaciona com a frequência f da senóide.

● O parâmetro C está relacionado com o deslocamento horizontal da curva. Assim, se esta onda se propagar para a direita, após um determinado tempo t, terá percorrido uma distância θ (em radianos por segundo, pois o argumento da função está em radianos) conforme Figura 29.

Figura 29 - Propagação da curva $y = sen(x - \theta)$

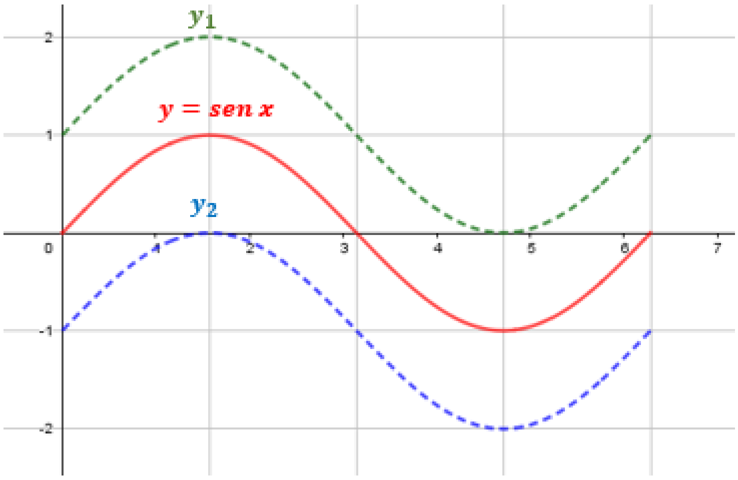


Fonte: Autora.

O deslocamento da senoide para a direita ($\theta > 0$) indica que o som sofreu um atraso no tempo, ou seja, houve um *delay.* Já o deslocamento para esquerda ($\theta < 0$) significa um avanço do som no tempo.

- O parâmetro A_0 indica o deslocamento vertical da onda (Figura 30).

Figura 30 – Curva $y = sen\ (x) + A_0$



Fonte: Autora.

O deslocamento vertical está relacionado com a pressão atmosférica normal[9]. Quando $A_0 = 0$, a pressão do ar é considerada normal, mas quando $A_0 > 0$ ou $A_0 < 0$, a pressão é maior ou menor que a pressão normal, respectivamente.

Diante da análise qualitativa dos parâmetros A, B, C, A_0, chega-se ao modelo matemático simplificado:

$$y(t) = Asen(2\pi ft - \theta) + A_0$$

[9]De acordo com Filho (2022).

em que $y(t)$ descreve a variação da pressão atmosférica, A é a Amplitude e mede variação máxima da pressão atmosférica, f é a frequência da onda, θ é o ângulo da fase e indica o avanço ou atraso do início do som, e A_0 é a pressão atmosférica normal.

Assim, a análise qualitativa dos parâmetros físicos A, B, C e A_0 da função $y(t)$ deve possibilitar a identificação dos sons harmônicos necessários para cada composição musical e modificar as ondas sonoras quando necessário

Essas oscilações harmônicas possuem parâmetros independentes, mas que podem se relacionar, chamados amplitude (A), frequência (f) e ângulo da fase (θ). No próximo capítulo são analisados estes parâmetros e suas relações com notas musicais.

6.3 A EXPERIMENTAÇÃO

O fenômeno musical pode ser sentido por meio da audição. Aqui, os sons de algumas notas musicais são percebidos e correlacionados com os parâmetros (coeficientes) do modelo matemático:

$$y(t) = Asen(2\pi ft - \theta) + A_0$$

Considerando fixo o valor da pressão atmosférica normal $A_0 = 0$, são realizados experimentos para verificar como a variação da amplitude (A), da frequência (f) e do ângulo da fase (θ) influenciam na produção e percepção do som.

Para isso, são usadas as frequências de notas musicais (Quadro 01 da página 26) e o uso de aplicativos como o GeoGebra e Audacity.

Como a maioria dos experimentos são realizados pelo GeoGebra e para evitar repetições deste termo, quando não mencionado, subentende-se o uso deste aplicativo. Opta-se por usar as notas musicais LÁ e DÓ nos experimentos para exemplificar a produção e percepção de seus sons. No entanto, podem ser utilizadas outras notas musicais e os comparativos podem ser realizados com mais de duas notas. Os experimentos estão divididos em momentos para facilitar a compreensão e distinção de cada atividade.

MOMENTO 1: Para iniciar a experimentação e realizar um comparativo mais assertivo, utiliza-se nesta análise a nota musical LÁ, variando a sua frequência.

Experimento 1 (LÁ com frequência $f = 440\ Hz$): Considere a função $y(t) = Asen(2\pi ft - \theta) + A_0$ sendo, $A = 1$, $A_0 = 0$, $\theta = 0$ e $f = 400$, ou seja, a nota musical LÁ está com sua frequência normal, que é de 440 Hz.

Para reproduzir a sua sonoridade no GeoGebra, basta seguir os passos:

● Na Janela de Entrada, digite TocarSom e escolha a opção *TocarSom(<Função>, <Valor Mínimo>, <Valor Máximo>)*

● Em seguida, entre com os dados da função seno e com os valores mínimo e máximo que se referem à duração de tempo do som:

Função: $y = sen(2 * 440 * \pi * x)$

Valor Mínimo 0, Valor Máximo 1.

● Logo, o comando final é *TocarSom(sin(2*440*pi*x),0,1*).

Para esboçar a curva da função $y = sen(2 * 440 * \pi * x)$:

● Na Janela de Entrada, escolha o comando Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)

● Em seguida, entre com os dados da função seno, do Valor de x Inicial e do Valor de x Final:

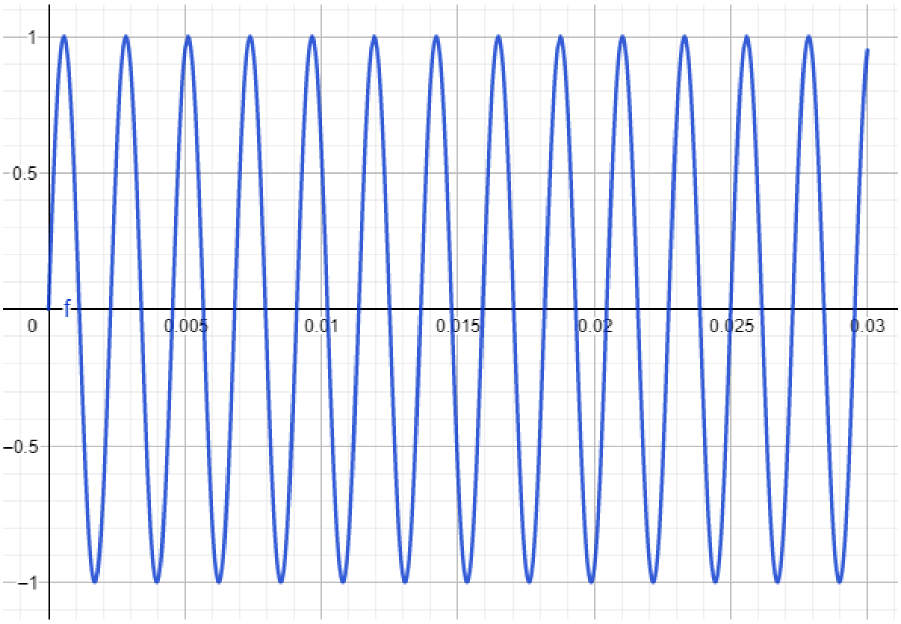
Função: $y = sen(2 * 440 * \pi * x)$

Valor de x Inicial: 0, Valor de x Final: 0.03

Para visualizar a curva, clique com o botão direito do mouse e escolha a opção *EixoX: Eixo Y: 1:100*.

● Logo, o comando final é *Função(sin(2*440*pi*x), 0, 0.03)* e o gráfico é mostrado na Figura 31.

Figura 31 – Curva da nota LÁ de 440 Hz



Fonte: Autora.

Como a nota LÁ possui 440 oscilações em 1 segundo o intervalo escolhido é entre 0 e 0,03. A malha do eixo x foi determinada para 1 e a do eixo y para 100. Essas configurações permitiram observar melhor a função seno, contudo, outras configurações poderiam ser realizadas.

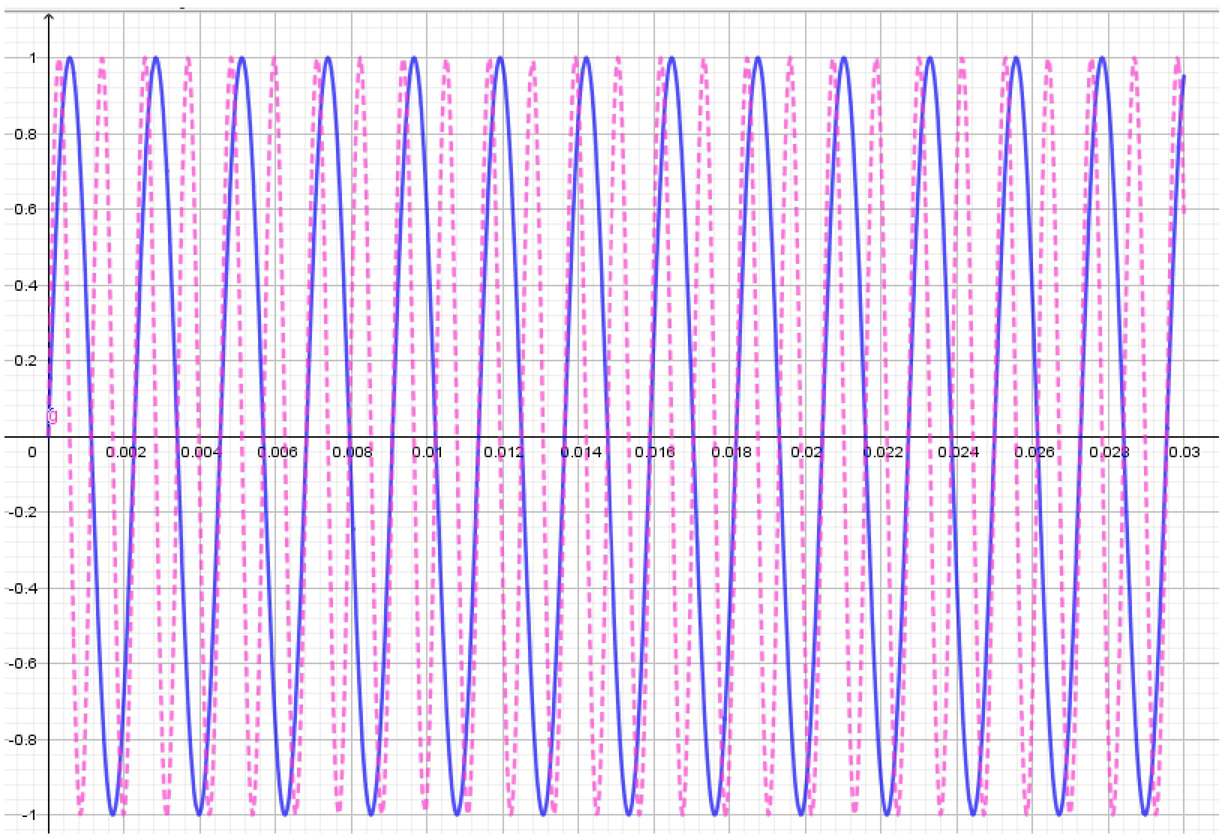
Experimento 2 (LÁ com frequência $f = 880\ Hz$): Considere a nota musical LÁ com frequência de 880 Hz. Seguindo os mesmos comandos usados para a reprodução do som e da curva da nota LÁ com frequência 440 Hz, a única alteração será o valor da frequência que passa a ser $f = 880\ Hz$. Logo:

- Para tocar o som, insira o comando *TocarSom(sin(2*880*pi*x),0,1*).

Quando a frequência da nota LÁ é modificada para 880 Hz, o som produzido é mais agudo comparado com som produzido da nota LÁ, $f = 440\ Hz$.

- Para esboçar a curva (Figura 32), insira o comando *Função(sin(2*880*pi*x), 0, 0.03).*

Figura 32 – Nota LÁ com frequências diferentes



Fonte: Autora.

Na Figura 32, ao comparar a curva da nota LÁ, cuja frequência era $f = 440\ Hz$ (traço azul contínuo) com a curva da nota LÁ, $f = 880\ Hz$ (traço rosa pontilhado) é possível notar a modificação na quantidade de oscilações, sendo que a nota LÁ com maior frequência possui mais ciclos no intervalo [0, 0,03] segundos.

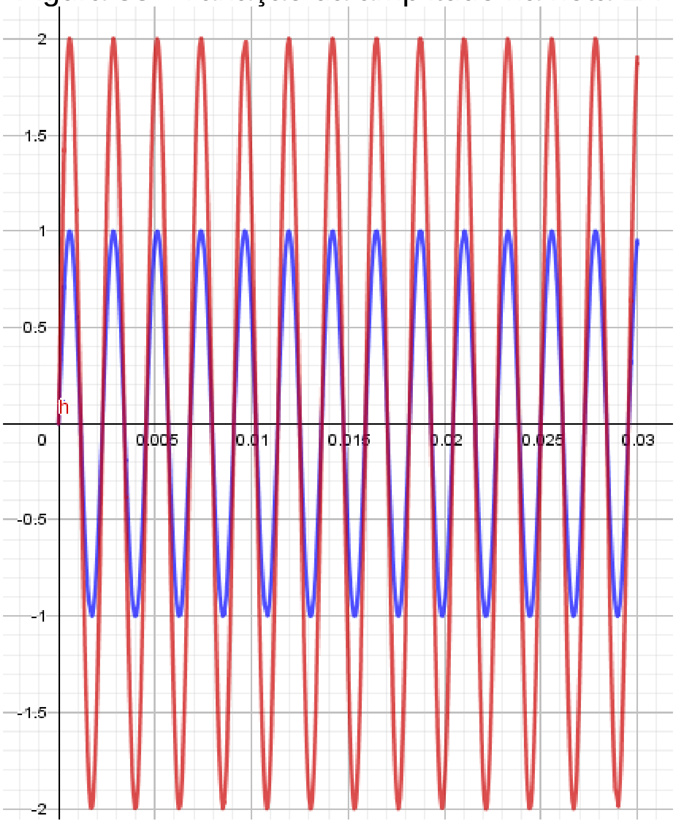
MOMENTO 2: utiliza-se a nota musical LÁ com frequência normal $440\ Hz$, porém variando a sua amplitude.

Experimento 3 (LÁ com amplitude $A = 2$): Considere a nota LÁ com frequência $440\ Hz$, $A_0 = 0$, $\theta = 0$ e $A = 2$. Seu som é produzido via comando *TocarSom(2sin(2*440*pi*x),0,1)*.

Quando a amplitude é $A = 2$, é possível ouvir no GeoGebra o som da nota LÁ com uma intensidade maior em comparação com o som produzido no **Experimento 1,** quando $A = 1$. Então, o som emitido é a nota LÁ com a amplitude duas vezes maior que a primeira, sendo a mesma frequência, porém com uma intensidade maior.

O gráfico dessa nota com alteração na amplitude pode ser esboçado a partir do comando *Função(2*sin(2*440*pi*x), 0, 0.03),* como mostra a Figura 33.

Figura 33– Variação da amplitude na nota LÁ



Fonte: Autora.

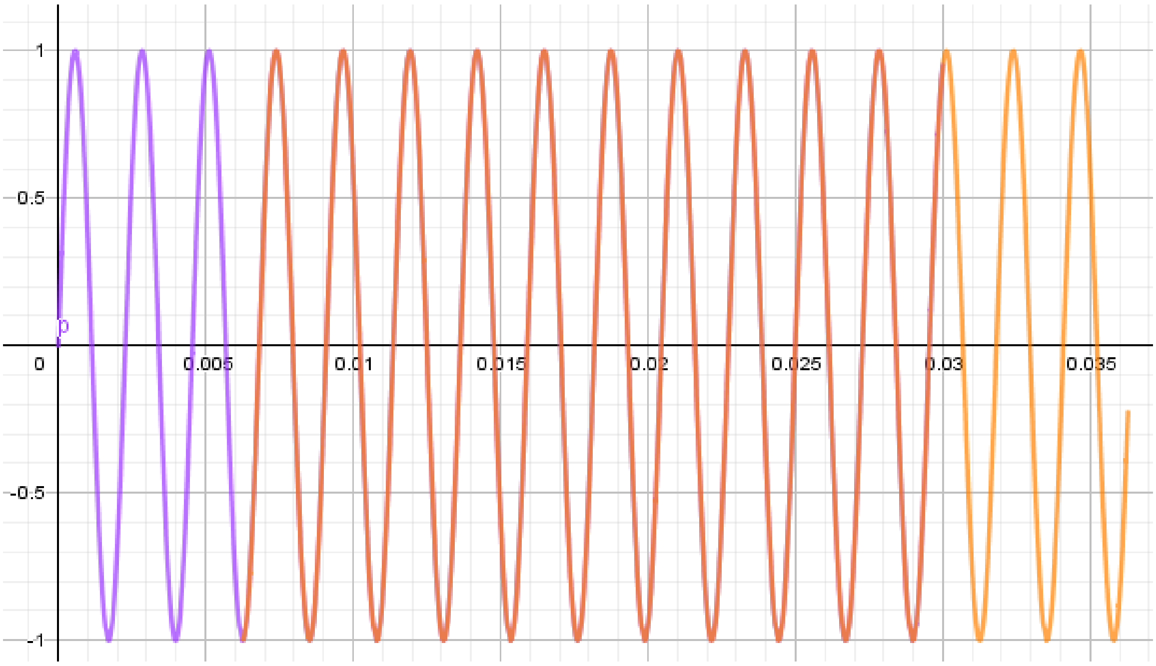
Pela Figura 33, as frequências continuam as mesmas da nota LÁ, o único parâmetro que muda é a amplitude. Ainda ressaltando que o intervalo escolhido foi entre 0 e 0,03 para melhor visualização das curvas e com a ampliação do software GeoGebra*.*

MOMENTO 3: ainda usando a nota musical LÁ com frequência normal $440\ Hz$, vai-se alterar o valor do ângulo da fase θ, isto é, considera-se a função $y(t) = Asen(2\pi f t - \theta) + A_0$ sendo, $A = 1$, $A_0 = 0$, $\theta = 2$ e $f = 400$.

Experimento 4 (LÁ com ângulo de fase $\theta = 2$): Na alteração do parâmetro θ, o esperado é que ocorra o fenômeno *delay,* que é um atraso do som. No entanto, ao utilizar o comando *TocarSom* com qualquer frequência de nota musical LÁ o som não é reproduzido com atrasos. Portanto, não é possível ouvir o efeito causado pela variação deste parâmetro.

Sendo assim, somente é possível visualizar o gráfico da onda sonora deslocada. Para exemplifica, para um deslocamento de $\theta = \frac{\pi}{500}$, a curva é gerada via comando *Função(sin(2*440*pi*x-pi/500), pi/500, 0.03+pi/500)*, conforme Figura 34.

Figura 34– O parâmetro θ



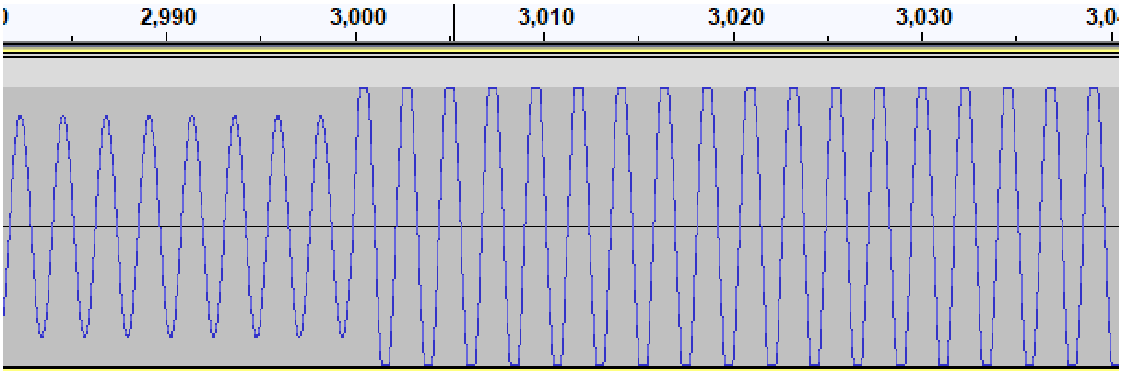
Fonte: Autora.

Observando a Figura 34, há um atraso ou deslocamento à direita da curva da função $y = sen(2 * 440 * x - \frac{\pi}{500})$ (cor laranja), em relação à curva $y = sen(2 * 440 * x)$ (cor azul) em que $\theta = 0$, sendo que a interseção das curvas aparece com uma cor resultante da sobreposição do azul com o laranja. O deslocamento à direita corresponde exatamente ao valor do parâmetro θ escolhido.

O *delay*, fenômeno gerado no som por meio do parâmetro $\theta > 0$ também pode ser observado com auxílio do software Audacity, conforme experimento a seguir.

Experimento 5 (LÁ com ângulo de fase $\theta = 3$): Para um deslocamento de $\theta = 3$, a curva é gerada via comando gerar *Tom programável* e na forma de onda a opção seno com frequência de 440 Hz. Após selecionar a faixa de áudio e aplicar o *delay* em *Efeitos*, selecionando *Atraso e Reverberação* com duração de 3 segundos (Figura 35).

Figura 35 – O efeito delay no Audacity

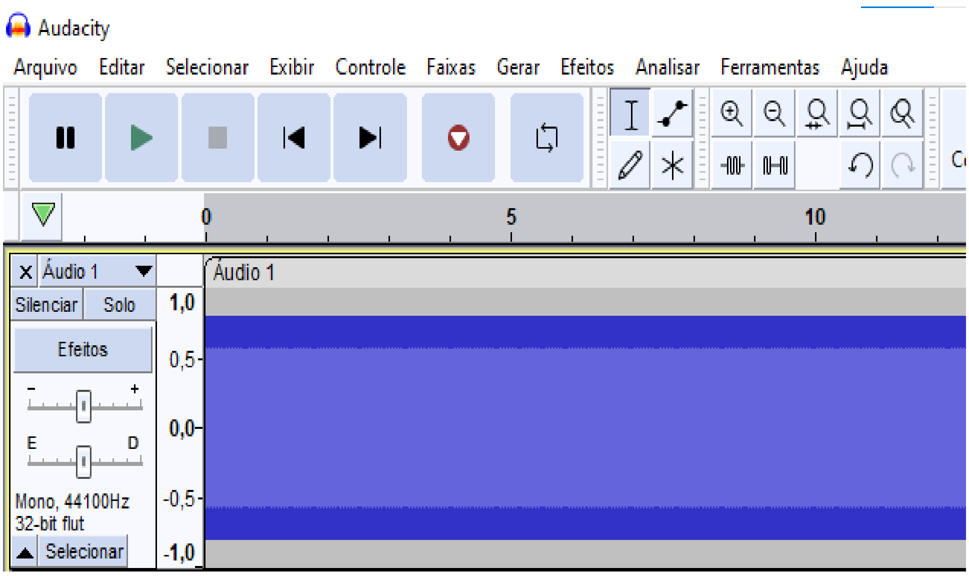


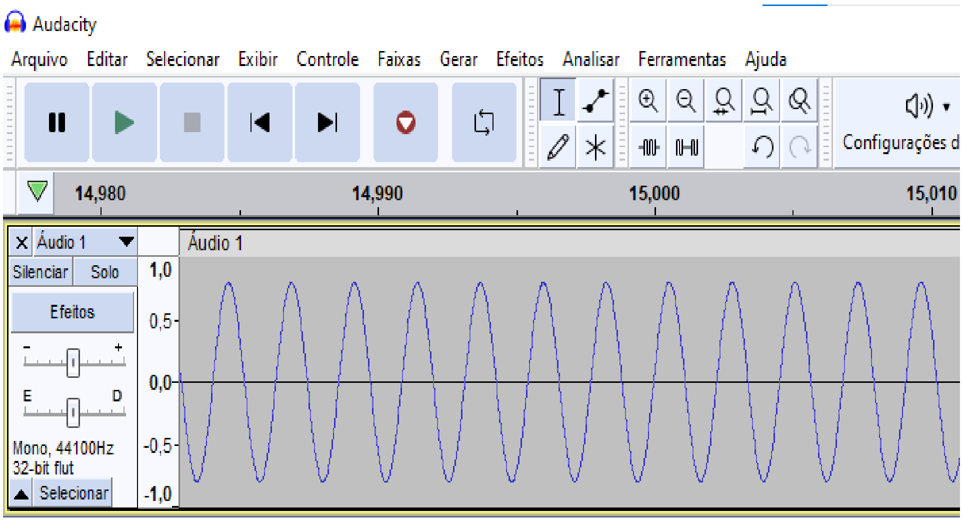
Fonte: Autora.

O *delay é* percebido através do atraso da onda sonora (Figura 35) em que a nota LÁ gerada, de duração de 1 minuto, sofre um atraso de 3 segundos, o que ocasiona o fenômeno, e por consequência, um eco no som.

Na opção de *Tom programável* ao inserir a frequência da nota LÁ o programa reproduz a respectiva faixa de áudio com o espectro de frequências, apenas sendo perceptível ao utilizar a ferramenta *zoom* para ampliar e visualizar a onda senoidal como na Figura 36.

Figura 36– Nota LÁ no software Audacity

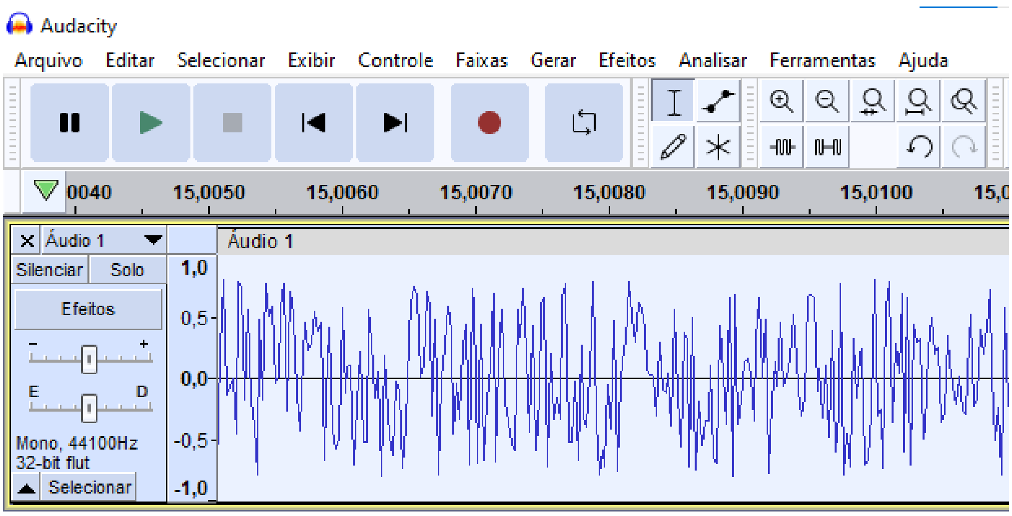




Fonte: Autora.

Ainda é possível visualizar e gerar faixas de áudio de outros instrumentos, inclusive de ruídos. Porém, o ruído não possui a onda senoidal na sua forma simplificada, mas sim em sua forma complexa (Figura 37).

Figura 37 – O ruído no Audacity



Fonte: Autora.

A Figura 37 mostra um exemplo de onda que representa um ruído, ou seja, uma onda que se forma a partir de vibrações de ondas irregulares.

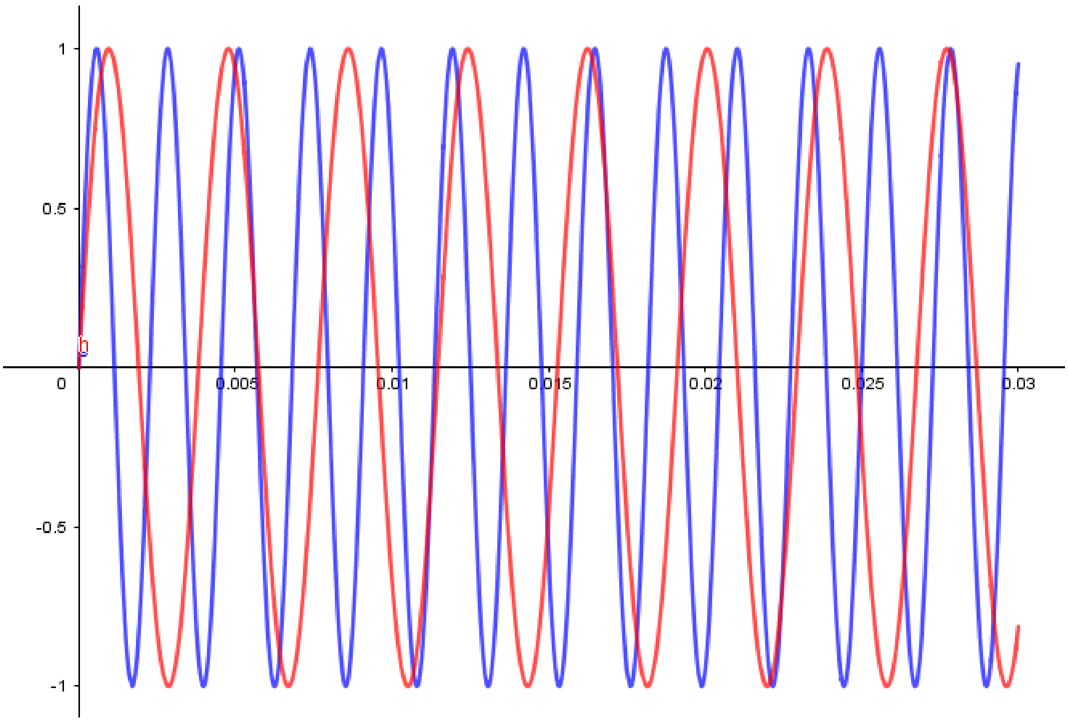
MOMENTO 4: notas LÁ com frequência $440\ Hz$ e DÓ com frequência $261{,}63\ Hz$.

Experimento 6 (LÁ com frequência $f = 440\ Hz$ **e DÓ com frequência** $f = 261{,}63\ Hz$**):** No **Experimento 1,** usando o comando *TocarSom(sin(2*440*pi*x),0,1*) pode-se ouvir o som da nota LÁ. Agora, para ouvir a sonoridade da nota DÓ, basta usar a frequência de 261,63 Hz, ou seja, usar o comando *TocarSom(sin(2*261.63*pi*x),0,1*).

Ao executar estes comandos se percebe que o som da nota musical DÓ é mais grave e o som da nota LÁ é mais agudo. Em outras palavras, a nota DÓ emite um som de baixa frequência e a nota LÁ, alta frequência.

Quanto ao esboço das curvas, usando o comando *Função(sin(2*440*pi*x), 0, 0.03)* se constrói sua senoide que representa a nota LÁ e usando o comando *Função(sin(2*261.63*pi*x), 0, 0.03)* se constrói a senoite relativa à nota DÓ, conforme figura a seguir.

Figura 38 – Notas LÁ e DÓ



Fonte: Autora.

Observando a Figura 38, as duas notas musicais possuem a mesma amplitude, mas as ondas sonoras que representam a nota LÁ (em cor azul) oscilam mais vezes do que a nota DÓ (em vermelho). Isso porque a nota LÁ possui frequência de 440 oscilações em 1 segundo enquanto que a nota DÓ, 261,63 oscilações por segundo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Escala Pitagórica, uma das primeiras escalas musicais que surgiram, mostra que desde a antiguidade a música e matemática estavam articuladas entre si. Foi a partir de experimentos realizados com o monocórdio que pôde-se perceber os diferentes sons produzidos quando se alteravam os comprimentos da corda deste instrumento.

Conforme trabalhos mencionados na revisão bibliográfica, a música pode ser uma alternativa para o ensino de diferentes conteúdos matemáticos como Série de Fourier, frações e funções trigonométricas. Neste trabalho, voltou-se para o ensino de funções trigonométricas, com objetivo de dar significado aos parâmetros da representação algébrica da função seno, no âmbito musical. Assim, observou-se o esboço de curvas dessa função, identificando-o como uma onda sonora simplificada, de modo a explicitar a articulação entre matemática e música.

Essa articulação entre matemática e música transcorreu ao longo dos tempos e hoje, pode ser observada também com o auxílio de funções trigonométricas, e em particular, a partir do esboço de suas curvas. O esboço de curvas das funções trigonométricas, geralmente é feito usando a abordagem Ponto a Ponto, que tende para um enfoque mais pontual e local, e que por vezes não favorece para um olhar mais amplo da curva. Essa prática pode tornar o ensino mecanizado que corrobora para que os alunos não estabeleçam relações com o conteúdo estudado e o cotidiano, não entendendo que a matemática está presente no dia a dia e que pode manifestar-se em diversas áreas.

Para um olhar mais amplo e qualitativo das curvas, uma opção é a abordagem de Interpretação Global Figural. Aplicada neste trabalho, essa abordagem permitiu investigar as qualidades de cada parâmetro da função seno (coeficientes, constante e ângulo da fase) e esses implicaram na alteração visual do gráfico da função e também musical no sentido de amplitude, intensidade, frequência e período da onda. Assim, foi possível, com auxílio do GeoGebra e do Audacity, observar visualmente a alteração da senoide e também ouvir os diferentes sons das notas musicais quando os parâmetros do modelo matemático simplificado sofriam variações.

Quanto aos parâmetros, a variação da amplitude e da frequência foram bem significativas e possibilitou observar, ouvir e distinguir as sonoridades correspondentes a cada uma delas, no GeoGebra. Porém, quanto ao ângulo de fase, o GeoGebra não foi capaz produzir o *delay* que é o atraso do som, sendo que somente com o Audacity ele foi percebido. Outra questão um pouco obscura refere-se ao parâmetro A_0. Não foram encontrados em livros didáticos estudos que o relacionavam com a pressão atmosférica, sendo encontrado apenas no trabalho de Filho (2022) e com base nele, assumiu-se que $A_0 = 0$ correspondia à pressão atmosférica normal. Assumido a pressão atmosférica normal, esse parâmetro não foi explorado.

Conforme Duval (2004), a aprendizagem ocorre quando são desenvolvidas as operações cognitivas que possibilitam estabelecer relações entre as representações da função seno em pelo menos dois registros e de forma rápida, que nesse caso, deu-se entre o registro gráfico e o registro algébrico. Nesse sentido, a abordagem Interpretação Global Figural para o esboço de curvas representa um grande potencial para o ensino e a música pode ser uma possibilidade para o ensino e a aprendizagem da função seno, contribuindo para as aulas do professor, principalmente se o mesmo souber tocar algum instrumento.

Diante do exposto, foi possível responder a pergunta norteadora: " Como ensinar os sentidos dos símbolos da representação algébrica da função seno através dos significados musicais?". Portanto, pode-se considerar que o objetivo do trabalho foi alcançado, pois conseguiu-se realizar experimentos visuais e sonoros sobre a função seno, a partir da variação dos parâmetros das representações simbólicas, e com auxílio do GeoGebra e do Audacity. Almeja-se que essa pesquisa, que possui como aportes compreender as teorias de ondas e som, possa contribuir com a matemática, especialmente para ensino da trigonometria.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J**. Matemática e música, pensamento analógico na construção de significados.** São Paulo: Escrituras Editora, 2002.

ALMEIDA, M. S. M. de. **A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros.** 2017.

ANACLETO, R. Anatomia do canal auditivo. [2015]. Disponível em: http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/15347/material/Aula%201%20Anatomia%20e%20fisiologia%20ouvido.pdf. Acesso em: 8 fev. 2023.

APLICANDO A MATEMÁTICA BÁSICA - Construção de um monocórdio. **CLUBES DE MATEMÁTICA OBMEP**, [S. l.], 2016. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/. Acesso em: 17 ago. 2022.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática: teoria e prática.** São Paulo: Contexto, 2015.

BENSON, D. **Music: A Mathematical Offering**. Cambridge University, 2006.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo Blucher 2019. Recurso online ISBN 9788521216117

BRASIL. FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. **Música**. 2017. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/index.php/acessibilidade/item/4098-m%C3%BAsica. Acesso em: 14 ago. 2022.

BREITHAUPT, J. **Física**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2018. 441 p. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521635109/epubcfi/6/44[%3Bvnd.vst.idref%3Dchapter09]!/4/80/4/6/2/2/2. Acesso em: 17 jan. 2013.

BROMBERG, C.; SAITO, F. **As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. v. 1.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem.** Campinas, SP: 1992. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

CABRAL, R. B. et al. **Matemática e música: uma proposta de aprendizagem.** 2015.

CAMILLERI; DUCOURNEAU; PUJOL, **Journey into the World of Hearing: Sound Exposure and Danger for the Ear!**, 2017. Disponível em: http://www.cochlea.org/en/noise. Acesso em: 21 Jan. 2023.

CARBAJAL-VACA, I. S. **Acercamiento Semiótico y Epistemológico al Aprendizaje de la Música. Colección Graduados.** Serie Sociales y Humanidades; 6. Guadalajara, Jalisco: Universidad de Guadalajara. Centro Universitario de Ciencias Sociales y Humanidades.2014. Editorial CUCSH-UDG. ISBN: Obra completa ISBN 978-607-742-034-7 Vol. 6. ISBN E-book 978-607-742-042-2. Disponível em: http://www.publicaciones.cucsh.udg.mx/pperiod/cgraduados/pdf/2012/acercamiento2012.pdf. Acesso em: 16 fev. 2023.

DEPIZOLI, C. A. **Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas**. 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano - Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Tradução: Myrian Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

FILHO, F. F. **Síntese de som:** uma proposta de ensino para funções periódicas. 2022. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, SP.

FONÉTICA acústica: o som. c2021. Disponível em: https://fonologia.org/fonetica-acustica-o-som/. Acesso em: 8 fev. 2023.

FREEPIK. 2022. Disponível em: https://freepik.com. Acesso em: 8 fev. 2023.

GARDNER, H. **Estrutura da mente: a teoria das inteligências múltiplas.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.

GUNTHER, L. **The physics in Music and Color**. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012.

IAZZETTA, F. **Tutoriais de áudio e acústica.** Universidade de São Paulo 2000. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/escalas/temperada.html. Acesso em: 17 Jan. 2023.

JEANDOT, N**. Explorando o Universo da Música**. São Paulo: Scipione, 3º ed, 1997

MARISTA, sistema de educação. **9º ano CIÊNCIAS**. Módulo 1. Apostila de Ensino Fundamental: Anos Finais. (2023).

MARTINS, M. A. **O gráfico dos sons. 2014**. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Matemática) –Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UERJ_f97a8b1c7ccde0d49714be7d0b0e4b0b. Acesso em: 16 fev. 2023.

MED, B. **Teoria da música**. Brasília, DF: MUSIMED, 1996.

MINAYO, M. C. de S. (Org.). O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde. 14ª ed. Rio de Janeiro: Hucitec, 2014. 408 p.

MISURA, C. **Um olhar sobre os modelos matemáticos da música**. 2016.

NEVES, R. B. **Uma introdução ao estudo das Funções Trigonométricas com recursos artísticos e seminários sobre a História da Matemática no 2º ano do Ensino Médio.** 2019.

O ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO. KHAN ACADEMY. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/science/9-ano/materia-e-energia-as-ondas/ondas-eletromagneticas/a/o-espectro-eletromagnetico. Acesso em: 17 jan. 2021.

OLIVEIRA, W. de. **Matemática e música: interdisciplinaridade no ensino da trigonometria e uma proposta de atividades para sala de aula. 2015**. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Matemática) -Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2015. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000203442. Acesso em: 16 fev. 2023.

PEREIRA, M. C. **Matemática e música: de Pitágoras aos dias de hoje.** 2013. 91 p. Dissertação em Matemática (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

PRESCINATO, R. **O violonista.** 2011. Disponível em: http://o-violonista.blogspot.com/2011/10/notas-musicais-escala-cromatica.html. Acesso em: 8 fev. 2023.

RODRIGUES, M. dos. S. **Relacionando as funções trigonométricas com música.** 2017. 90 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

SANTOS, R. F.dos. et al. **MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA EXPLORAR CONCEITOS MUSICAIS PARA ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL**. 2015.

SILVA, A. **A matemática nas Escalas Musicais**. 2013. Disponível em: https://www.matematicaviva.pt/2013/11/a-matematica-nas-escalas-musicais.html?m=0. Acesso em: 8 fev. 2023.

Silva, M. O. (2008). **Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica.** [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/92026. Acesso em: 8 fev. 2023.

SOUSA, A. R. dos. S. et al. **História da Matemática**. Porto Alegre: Sagah, 2021. 213 p.

VILLATE, J. E. **Física 2 - Eletricidade e Magnetismo**. 2013. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Espectro_Eletromagn%C3%A9tico.png. Acesso em: 16 fev. 2023.

WHEELER, R. M., **The Science of Sound**. Pearson New International Edition. Third edition, 2014.

WISNICK, J. M. **O som e o sentido: uma outra história das músicas.** Companhia das Letras, 2006.

WRIGHT, D. **Mathematics and Music.** American Mathematical Society, 2009.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FÍSICA, I. I. **Termodinâmica e ondas**. São Paulo, v. 10, 2016.