UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE MATEMÁTICA — LICENCIATURA

ANDREIA REGINA DE LIMA DEUNER

PROCESSOS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

CHAPECÓ
2023

ANDREIA REGINA DE LIMA DEUNER

PROCESSOS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

CHAPECÓ

2023

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Deuner, Andreia Regina de Lima
PROCESSOS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM / Andreia Regina de Lima Deuner. -- 2023.
56 f.

Orientador: Doutor Pedro Augusto Pereira Borges

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó,SC, 2023.

1. Modelagem Matemática. 2. Aprendizagem. 3. Conceitos matemáticos. 4. Empreendedorismo. I. Borges, Pedro Augusto Pereira, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ANDREIA REGINA DE LIMA DEUNER

PROCESSOS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

ESTE TRABALHO FOI DEFENDIDO E APROVADO PELA BANCA EM 13/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr.Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS
Orientador

Rosane Rossato Binotto

Prof. Dr. Rosane Rossato Binotto – UFFS
Avaliador

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS
Avaliador

Dedico a minha irmã, que inspirou esse trabalho através da sua força e dedicação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em quem encontrei força e refúgio nos momentos de fraquezas e desânimo. Agradeço à minha família e amigos, por estarem comigo em cada desafio, em cada conquista, vocês estiveram ao meu lado, oferecendo o suporte incondicional que fez toda a diferença. Vocês foram meu porto seguro, a motivação que me impulsionou a continuar seguindo meus sonhos.

Agradeço ao meu estimado orientador, sou grata pela paciência incansável e dedicação em me guiar ao longo desta caminhada acadêmica. Seu conhecimento, orientação e encorajamento foram fundamentais para meu crescimento pessoal e profissional. Cada conselho e correção foram oportunidades para melhorar e amadurecer. Serei sempre grata por ter tido a honra de ser sua orientanda.

“Bons alunos aprendem a matemática numérica, alunos fascinantes vão além, aprendem a matemática da emoção, que não tem conta exata e que rompe a regra da lógica. Nessa matemática você só aprende a multiplicar quando aprende a dividir, só consegue ganhar quando aprende a perder, só consegue receber, quando aprende a se doar.” (CURY, 2006, p. 81)

RESUMO

Este trabalho busca utilizar a Modelagem como estratégia para o ensino de matemática na Educação Básica, e mais especificamente no Ensino Fundamental. Por meio de uma revisão de literatura, foram identificadas publicações que abordam a Modelagem como estratégia de ensino de Matemática, destacando seus pontos fortes e contribuições para a aprendizagem dos alunos. Com base nisso, visando a Educação Básica, é descrita uma atividade de Modelagem sobre produção de trufas. Esta atividade é projetada para fornecer aos alunos experiência prática em Modelagem Matemática. No contexto específico da produção de trufas, a Modelagem Matemática agrega uma perspectiva científica e técnica à atividade. Além de habilidades práticas e conhecimento de empreendedorismo, a Modelagem apresenta conceitos fundamentais de economia, planejamento econômico e análise de mercado. Ao analisar esses eventos, foi possível identificar as etapas da construção de conceitos matemáticos de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e as contribuições da Modelagem nesse processo. A Modelagem Matemática proporciona aos alunos a oportunidade de explorar situações reais, formular hipóteses, examinar e analisar dados, interpretar resultados e fazer conexões entre os conceitos matemáticos e o problema em questão. Por fim, foram classificados os tipos de contribuições da Modelagem na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Os alunos aprendem a considerar fatores como custos de produção, preços de venda, demanda de mercado, etc. Isso enriquece sua compreensão do evento e o prepara para desafios futuros. Por fim, a Modelagem Matemática permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e sua aplicação no mundo real. Desenvolve habilidades fundamentais e facilita o aprendizado contextualizado, tornando o ensino de matemática útil para o cotidiano dos alunos e com mais significado.

Palavras-chaves: Modelagem Matemática; conceitos matemáticos; aprendizagem; empreendedorismo.

ABSTRACT

This work seeks to use Modeling as a strategy for teaching mathematics in Basic Education, and more specifically in Elementary Education. Through a literature review, publications were identified that address Modeling as a Mathematics teaching strategy, highlighting its strengths and contributions to student learning. Based on this, aiming at Basic Education, a Modeling activity on truffle production is described. This activity is designed to provide students with hands-on experience in Mathematical Modeling. In the specific context of truffle production, Mathematical Modeling adds a scientific and technical perspective to the activity. In addition to practical skills and entrepreneurial knowledge, Modeling introduces fundamental concepts of economics, economic planning and market analysis. By analyzing these events, it was possible to identify the steps in the construction of mathematical concepts according to the Theory of Conceptual Fields (TCF) and the contributions of Modeling in this process. Mathematical Modeling provides students with the opportunity to explore real situations, formulate hypotheses, examine and analyze data, interpret results and make connections between mathematical concepts and the problem at hand. Finally, the types of Modeling contributions to the learning of mathematical concepts were classified. Students learn to consider factors such as production costs, selling prices, market demand, etc. This enriches your understanding of the event and prepares you for future challenges. Finally, Mathematical Modeling allows students to develop a deeper understanding of mathematical concepts and their application in the real world. It develops fundamental skills and facilitates contextualized learning, making the teaching of mathematics useful for students' daily lives and with more meaning.

Keywords: Mathematical Modeling; mathematical concepts; learning; entrepreneurship.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEI	Microempreendedor Individual
TCC	Teorias dos Campos Conceituais
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Modelagem, na perspectiva da Educação Matemática[1], tem se constituído como objeto de pesquisa de forma significativa nos últimos quarenta anos no Brasil e no mundo. Em alguns trabalhos, ela é caracterizada como uma metodologia de ensino, apontando as vantagens de sua inserção nos processos de ensino e aprendizagem (BASSANEZI, 2013; ALMEIDA, 2004; ALMEIDA e PALHARINI, 2012; BIEMBENGUT, 2014; BISOGNIN e BISOGNIN, 2021, BRITO e ALMEIDA, 2021). Outras reforçam a propriedade de motivação dos alunos para estudar assuntos próximos a sua realidade, na direção de uma aprendizagem matemática mais significativa (ARAÚJO, 2009; ARAÚJO, 2012; BARBOSA, 2001; COMACHIO e BORGES, 2020;) e, outras, abordam as dificuldades encontradas para aplicar a Modelagem em sala de aula (BIEMBENGUT, 2009; BISOGNIN e BISOGNIN, 2012; ROSA e OREY, 2012; SILVEIRA e CALDEIRA, 2012; MALHEIROS, SOUZA e FORNER, 2021). De fato, a "Modelagem Matemática como instrumento é um procedimento de pesquisa, com coleta e análise de dados, avaliações, cálculos, comparação de resultados, que melhora consideravelmente a qualidade das decisões e das ações do cidadão sobre a realidade." (BORGES e NEHRING, p. 132, 2008).

Com a Modelagem, os alunos têm a oportunidade de explorar situações reais, identificar problemas, formular perguntas e buscar soluções utilizando a matemática como uma ferramenta. De acordo com D'Ambrosio "um referencial matemático é uma importante ferramenta para tratar muitas questões centrais de nossa sociedade" (p.134, 1999 *apud* ARAÚJO, p. 843, 2012).

Esse uso da matemática para analisar, interpretar e resolver problemas reais, promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e de sua aplicação em diferentes contextos, seja por meio de representações verbais, vividas, gráficas ou outras formas de representação.

[1] A Modelagem Matemática, como processo de investigação científica, consiste em escolher recortes de situações reais ou fictícias considerados mais relevantes e representá-los em linguagem matemática. Como tal, tem seu lugar no âmbito da Matemática Aplicada e da Ciência, particularmente (e com êxito reconhecido) na Física e nas Engenharias. Definições e exemplos desse tipo de pesquisa são encontradas e Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia Bassanezi, 2013. A Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, no presente trabalho chamada de Modelagem na Educação Matemática (MEM) ou simplesmente Modelagem, é decorrente da Modelagem científica, na sua essência de representar problemas com linguagem matemática, porém com os objetivos de conhecer setores da realidade, aplicar e ensinar Matemática, no âmbito escolar e universitário.

Essa perspectiva vem ao encontro da Matemática Crítica, ao enfatizar o desenvolvimento de uma postura crítica do aluno em relação à matemática e as situações à sua volta, ao questionar as hipóteses e resultados obtidos no decorrer do processo de aprendizagem, promovendo uma reflexão sobre o papel da matemática na sociedade e suas relações com questões sociais, políticas e emocionais.

Nesse sentido, a Modelagem pode ser útil para a tomada de decisões, de modo que os alunos possam se tornar cidadãos mais ativos no seu ambiente, se apropriando do conhecimento científico, e não apenas do que é o senso comum.

A Modelagem Matemática vai além de apenas mostrar a utilidade da matemática para conhecer o real e motivar os alunos. Ao utilizar a Modelagem, os alunos são desafiados a investigar problemas, formular hipóteses, coletar e analisar dados, e interpretar resultados, desenvolvendo assim habilidades essenciais, como pensamento crítico, resolução de problemas e tomada de decisões.

No caso específico da produção de trufas, a Modelagem acrescenta uma perspectiva científica e técnica à atividade. Além das habilidades práticas, talento empreendedor e percepção de mercado, a Modelagem proporciona uma formação científica, introduzindo conceitos básicos de economia, planejamento econômico e instrumentos técnicos de análise de mercado. Os alunos aprendem a considerar fatores como custos de produção, preço de venda, demanda do mercado e estratégias de marketing. Isso não apenas enriquece sua compreensão da atividade, mas também os prepara para lidar com desafios e tomar decisões informadas em outros contextos da vida.

Portanto, a Modelagem Matemática acrescenta uma dimensão conceitual e científica à atividade, ajudando os alunos a adquirir conhecimentos mais aprofundados e qualificados, ampliando suas habilidades e preparando-os para serem cidadãos mais integrados em seu tempo e lugar.

No capítulo 2, é apresentado o problema de investigação: como ocorre (ou como poderia ocorrer) a aprendizagem de conceitos matemáticos em uma atividade de Modelagem proposta para a Educação Básica[2]. No mesmo capítulo, são descritos os objetivos da pesquisa.

A revisão bibliográfica, apresentada no capítulo 3, mostra as diferentes concepções de Modelagem Matemática praticadas no Brasil, dando enfoque às que se referem à mesma como uma estratégia de ensino e suas contribuições para a aprendizagem.

---

[2] Educação Básica é definida aqui de acordo com Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB - 9.394/96), no qual passou a ser estruturada por etapas e modalidades de ensino, englobando a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

No quarto capítulo, é apresentado um resumo dos princípios básicos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) como referência da concepção de aprendizagem que fundamentará a análise dos processos de conceitualização presentes nas atividades de Modelagem que serão apresentadas ao longo do trabalho. A TCC de Gerard Vergnaud propõe que os conceitos matemáticos são estruturas compostas por três elementos: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, o conjunto de invariantes que permite ao indivíduo identificar, manipular e compreender essas situações, e a representação dos invariantes por meio de linguagem verbal e não verbal. Essa teoria busca compreender como os conceitos são formados, como ocorre a aprendizagem e como os alunos desenvolvem o conhecimento matemático ao longo do tempo.

No quinto capítulo, são descritas as características metodológicas da pesquisa, classificada como qualitativa e analítica. Como se trata de análise de atividades não aplicadas em sala de aula, a proposição de Skovsmose (2015, p. 73), a qual admite investigar situações hipotéticas de aprendizagem, que poderiam ter ocorrido ou podem vir a ocorrer nos espaços escolares, foi tomada como uma premissa metodológica. No mesmo capítulo, são descritos os procedimentos de Análise de Conteúdo, na concepção de Bardin (2012) e o quadro de categorias empregados para análise das atividades de Modelagem.

A Modelagem dos processos de produção e comércio de trufas é descrita no capítulo, no qual são apontadas diversas situações, que se aplicadas em sala de aula, poderiam gerar aprendizagem de conceitos de matemática elementar. Tais apontamentos sobre os tipos de conceitos envolvidos foram orientados por um quadro de categorias de análise.

Por fim, considera-se que através da Modelagem, os alunos podem buscar soluções para problemas específicos, com o auxílio de um mediador, aumentando seus conhecimentos e promovendo uma aprendizagem contextualizada dos conceitos de matemática. No contexto da produção de trufas, a Modelagem analisa aspectos como produção, vendas e lucros, através da criação de simulações que auxiliam na tomada de decisões e no desenvolvimento de uma noção de empreendedorismo. Essa conexão entre a matemática e o mundo real torna o aprendizado mais significativo, evidenciando a utilidade da disciplina no cotidiano dos alunos.

2 PROBLEMA E OBJETIVOS

Partindo-se do pressuposto que a Modelagem pode contribuir no processo de aprendizagem de matemática, este trabalho tem como propósito investigar o seguinte problema: Como ocorrem (ou como poderiam ocorrer) os processos de aprendizagem de conceitos matemáticos em atividades de Modelagem propostas para a Educação Básica?

2.1 OBJETIVO GERAL

Identificar possíveis evidências de construção de conceitos matemáticos (e, portanto, de aprendizagem) em ações de Modelagem, de modo a subsidiar o planejamento, a aplicação de atividades e a pesquisa sobre essa estratégia de ensino.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar publicações que consideram a Modelagem como um método ou estratégia de ensino de matemática.
2. Elaborar uma atividade de Modelagem aplicável na Educação Básica, para o Ensino Fundamental.
3. Organizar um quadro de categorias com base na Teoria dos Campos Conceituais que contemple os elementos essenciais para a construção de conceitos.
4. Analisar os eventos presentes nas atividades, nos quais ocorrem etapas da construção de conceitos matemáticos, segundo a TCC, e identificar as contribuições da Modelagem nesse processo.
5. Classificar os tipos de contribuições da Modelagem na aprendizagem dos conceitos matemáticos.

3 INVESTIGAÇÕES SOBRE APRENDIZAGEM COM MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem voltada para o ensino da Matemática, vem sendo pesquisada no Brasil nos últimos 40 anos, configurando-se assim, diferentes abordagens e concepções, que se diferenciam pela forma como tratam o conhecimento matemático, pela condução didática em sala de aula, pelo modo de abordar a interpretação do real, de envolver os alunos, dentre outras propriedades. Particularmente, alguns pesquisadores enfatizaram as potencialidades da Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, que é o objeto de pesquisa do presente trabalho.

Segundo Bassanezi (2013), a Modelagem no ensino é uma estratégia de aprendizagem, em que o importante não é chegar imediatamente em um modelo, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo vai sendo sistematizado e aplicado. A aprendizagem ocorre ao longo do processo de investigação e matematização. A obra de Bassanezi é rica em modelos sobre os mais diversos temas, nos quais são envolvidos, discutidos e estudados os conceitos e as propriedades matemáticas. Fica pressuposto que, ao acompanhar o processo de modelização, o aluno conheça, compreenda ou invista na aprendizagem de tais conceitos.

Para Almeida e Palharini (2012) a Modelagem é um conjunto de procedimentos no qual um sujeito estabelece meios de agir em relação a um problema. “A Modelagem Matemática diz respeito à análise de uma situação-problema, à construção de representações matemáticas, à obtenção de resultados matemáticos para a situação e à reinterpretação dos resultados em relação à situação.” (ALMEIDA, PALHARINI, 2012, p. 910).

Segundo Araújo (2009), a Modelagem pode ser entendida como uma forma de investigar problemas cotidianos empregando conceitos matemáticos e que a sala de aula passa a ser um espaço de diálogo entre os participantes. Essa concepção é coerente com o que é proposto por Barbosa (2001), ao definir a Modelagem como um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são incentivados a utilizar seus conhecimentos matemáticos para analisar e resolver problemas do mundo real.. Essa abordagem promove o engajamento ativo dos alunos, que se tornam protagonistas do seu próprio aprendizado.

Uma propriedade do processo de investigação com Modelagem para a aprendizagem de matemática, é que ela possibilita a experimentação, a vivência e a associação com contextos variados e próximos do campo conceitual e cultural dos estudantes, de forma a possibilitar a elaboração de significados diversos para os conceitos matemáticos.

Nesse sentido, além do conhecimento escolar, são envolvidos outros conhecimentos, o que vem ao encontro do que é proposto na Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001, p. 135-136), que coloca a Modelagem como um suporte para discutir questões políticas, sociais, econômicas e ambientais. Ao discutir essas questões por meio da Modelagem, os alunos desenvolvem não apenas habilidades matemáticas, mas também habilidades de análise crítica, tomada de decisão e consciência social.

Dessa forma, a Modelagem, dentro da perspectiva da Educação Matemática Crítica, vai além do ensino de conteúdos isolados e se torna uma abordagem que promove uma visão mais ampla da matemática e sua aplicação no contexto social. Ela capacita os alunos a se tornarem cidadãos críticos e participativos, capazes de utilizar o poder da matemática para analisar, compreender e transformar a realidade ao seu redor.

Além disso, a Modelagem também estimula a interdisciplinaridade, permitindo a integração de conhecimentos de diferentes áreas, como ciências, geografia, economia e sociologia. Os alunos têm a oportunidade de explorar conexões entre os conceitos matemáticos e os fenômenos do mundo real, enriquecendo sua compreensão e tornando o aprendizado mais significativo. Almeida e Dias (2004, p. 7) afirmam que, "cabe também à educação escolar preparar sujeitos críticos, conscientes e integrados à sociedade, o ensino deve se dar em ambientes onde a aprendizagem aconteça de forma significativa."

Contudo, o aluno precisa de alguns conhecimentos prévios para desenvolver uma aprendizagem significativa, conforme apontado por Bisognin e Bisognin (2021, p. 6), "o aluno participa da construção dos conceitos e procura respostas às questões e conjecturas por ele levantadas." Logo o professor também precisa conhecer e desenvolver diversas formas de representar algo matematicamente, de modo que os alunos possam compreender melhor os conceitos colocados durante as aulas.

De acordo com o último relatório do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA), relativo ao ano de 2018, aproximadamente 68% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de Matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Além de que "mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras" (Portal MEC, 2019). Talvez o emprego da Modelagem nas aulas de Matemática possa contribuir para melhorar o desempenho dos alunos brasileiros na resolução de problemas.

A partir desses dados e pesquisas, Brito e Almeida (2021) questionam: é possível construir conhecimento matemático através da Modelagem? Partindo dessa indagação, pesquisaram se há indícios de Modelagem na aprendizagem de conceitos de geometria em estudantes do Ensino Fundamental. Os resultados apontam que a Modelagem pode contribuir para o desenvolvimento dessas dimensões da aprendizagem, promovendo uma participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas de forma contextualizada e integrando a geometria a outras áreas do conhecimento.

Vale ressaltar o trabalho de Neide *et al.* (2018), que explora a aplicação da Modelagem como uma estratégia de ensino no contexto do Ensino Médio. O estudo investiga a possibilidade de aprendizagem por meio da Modelagem utilizando contas de água como contexto problematizador. Os autores descrevem o processo de implementação da Modelagem em sala de aula, onde os alunos são desafiados a analisar e compreender as contas de água, investigando os fatores que influenciam o consumo e os custos associados. Através desse contexto, os estudantes são incentivados a formular hipóteses, coletar dados, construir modelos matemáticos e realizar análises. Os resultados do estudo mostraram que a abordagem viabilizou uma aprendizagem de conceitos matemáticos associados a significados, uma vez que os alunos puderam desenvolver habilidades matemáticas, como interpretação de gráficos, compreensão, resolução de problemas e argumentação matemática. Além disso, os estudantes também tiveram uma maior compreensão dos conceitos matemáticos relacionados ao consumo de água e às tarifas de cobrança.

À diversidade de possibilidades existentes demanda uma reflexão necessária. À medida que os fatos se desenrolam, os conceitos e ideias matemáticas são minuciosamente explorados. É importante ressaltar que, embora a Modelagem Matemática tenha um potencial significativo no ensino e aprendizagem de diversos conceitos e suas relações com a realidade, não é a única abordagem para alcançar tais objetivos.

Existem outras estratégias de ensino que também podem ser eficazes na promoção da aprendizagem matemática. Cabe aos educadores considerar as características dos alunos, os objetivos de aprendizagem, o contexto escolar e outros fatores relevantes para selecionar as abordagens mais adequadas.

Dessa forma, a escolha entre diferentes abordagens pedagógicas, incluindo a Modelagem Matemática, deve ser baseada em uma análise de cuidados das necessidades e características dos alunos, bem como dos objetivos educacionais específicos. O importante é buscar uma variedade de estratégias relevantes, inovadoras e envolventes para os alunos, promovendo uma aprendizagem matemática efetiva e abrangente.

No trabalho de Borges e Comachio (2020) são analisadas oportunidades de aprendizagem no estudo e desenvolvimento da confecção de cestos, no qual constata-se que nas atividades de Modelagem descritas, é possível ampliar os conceitos de matemática para além do ambiente escolar, e integrá-los a outros conteúdos e conceitos culturais.

Embora a Modelagem Matemática seja reconhecida como uma estratégia valiosa no ensino de matemática, ainda existem lacunas no entendimento de como exatamente ocorre o processo de construção conceitual nesse contexto.

Investigar mais profundamente essa questão permitiria compreender como os estudantes constroem e internalizam os conceitos matemáticos durante as atividades de Modelagem, quais os fatores que influenciam esse processo e como potencializar essa aprendizagem. Isso inclui explorar as interações entre os conceitos matemáticos e as situações-problema da Modelagem, bem como a influência de fatores como a interação social, a motivação dos alunos e as estratégias de ensino utilizadas.

Portanto, a necessidade de pesquisar mais profundamente e detalhadamente a formação dos conceitos matemáticos em atividades de Modelagem e em outras atividades complementares é crucial para aprimorar as estratégias de ensino e promover uma educação matemática de qualidade. Essa pesquisa pode fornecer *insights* importantes sobre como maximizar o potencial da Modelagem e de outras abordagens no desenvolvimento dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para fundamentar a ideia da construção de conceitos e da aprendizagem matemática neste trabalho, usou-se como referência a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud, pois aborda esses processos de acordo com o pensamento construtivista, ou seja, pensando no conhecimento como uma construção de saberes. Essa teoria se baseia na ideia de que os conceitos são organizados em campos conceituais, que representam conjuntos de conhecimentos relacionados dentro de uma determinada área do conhecimento.

Segundo Vergnaud (1990), a TCC é uma teoria cognitivista que tem o objetivo de fornecer uma estrutura coerente e alguns princípios básicos para estudar o desenvolvimento e a aprendizagem de habilidades complexas. No desenvolvimento de seu trabalho são frequentes termos como: conceitualização, campo conceitual, situação, invariantes, representação simbólica, atividade, mediação e esquemas, portanto que serão definidos no decorrer desse trabalho.

A TCC enfatiza a importância da ação e da manipulação dos objetos na construção dos conceitos matemáticos. Segundo essa teoria, a aprendizagem dos conceitos ocorre por meio de dois processos inter-relacionados: a interiorização e a institucionalização. A interiorização refere-se à construção do conceito pelo indivíduo, à medida que ele interage com os objetos e manipula as propriedades e relações dentro do campo conceitual. A institucionalização ocorre quando o conceito é formalizado e compartilhado socialmente, através de símbolos, linguagem e práticas matemáticas estabelecidas.

O campo conceitual é definido como "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (MOREIRA, 2002, p. 8). Nesse sentido, a construção do conhecimento matemático não acontece de maneira isolada e distante da realidade do indivíduo, apesar de, algumas vezes, surgir a necessidade de abordar alguns conceitos separadamente.

Por fim, segundo a TCC, um conceito é um conjunto de três elementos na seguinte ordem: conjunto de situações que dão *sentido* ao conceito (S), ou seja, uma referência; conjunto de invariantes (I), ideias que permitem o indivíduo identificar, fazer referência, manipular, analisar ou dominar essas situações (*significados)*; o conjunto da representação desses invariantes de formas verbais e não verbais que podem representar simbolicamente os conceitos, suas propriedades, circunstâncias e procedimentos de tratamento (*significantes*).

Dessa forma, a TCC enfatiza a importância da participação ativa das crianças em seu processo de aprendizagem, permitindo que elas façam conexões entre suas ações, experiências e os conceitos matemáticos. A teoria reconhece a importância das situações concretas, dos significados atribuídos aos conceitos e das representações simbólicas na construção do conhecimento matemático pelas crianças.

Essa atividade gera uma certa espontaneidade para descobrir e explorar o ambiente de aprendizagem, mas esta última ocorre quando é esquematizada pelo indivíduo que encontra, "maneiras de organizar a tomada de informação e a ação para agir sobre os objetos, em função de uma certa intenção ou de um objetivo a atingir (PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p.66).

Contudo, cabe aos educadores, mediar essa aprendizagem, criando situações propícias para o conhecimento. Servindo como "um suporte ativo para o desempenho, na situação a tratar, na tarefa a desempenhar, no problema a resolver; dá a sua ajuda na escolha da informação, na evocação dos conhecimentos adequados, no controle." (PLAISANCE e VERGNAUD, 2003).

Os educadores são responsáveis por criar um ambiente de aprendizagem estimulante, desafiador e significativo, onde os alunos possam se engajar ativamente na construção do conhecimento. Eles devem propor atividades e desafios que permitam aos alunos explorar, questionar, experimentar e refletir sobre os conceitos matemáticos. Além disso, os educadores devem estar presentes para fornecer orientação, *feedback* e suporte necessário durante todo o processo de aprendizagem.

Dessa forma, a Modelagem Matemática se constitui como uma abordagem pedagógica que se alinha perfeitamente com a perspectiva da TCC. Por meio da Modelagem Matemática, os alunos são encorajados a explorar situações do mundo real, identificar problemas, formular questões e desenvolver representações matemáticas para compreendê-las.

De acordo com Bisognin e Bisognin (2021), a Modelagem Matemática proporciona aos alunos a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos em contextos reais, tornando a aprendizagem mais significativa e contextualizada. Ao envolver-se em atividades de Modelagem, os estudantes têm a chance de construir conexões entre os conceitos matemáticos e suas aplicações práticas, o que contribui para uma compreensão mais profunda e duradoura.

Ao trabalhar com Modelagem Matemática, os educadores desempenham um papel fundamental como mediadores, fornecendo suporte e orientação aos alunos durante todo o processo. Eles auxiliam na formulação de perguntas, no estabelecimento de hipóteses, na seleção de estratégias e no uso adequado das ferramentas matemáticas.

Além disso, a Modelagem Matemática também promove o desenvolvimento de habilidades essenciais, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a comunicação matemática e o trabalho em equipe. Os alunos são desafiados a pensar criticamente, tomar decisões e justificar suas soluções, desenvolvendo assim competências fundamentais para o século XXI.

Dessa forma a Modelagem pode ser vista como um meio de criar situações, contextualizando-as, uma vez que Modelagem Matemática propõe-se descrever um problema real, modelando este problema por meio de um modelo matemático aproximado, e através deste modelo aproximado encontrar uma solução próxima da real.

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A Modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2013).

Com a Modelagem Matemática, busca-se simplificar a linguagem matemática de forma a torná-la mais acessível e compreensível para os estudantes. Através dessa abordagem, os conceitos matemáticos, como incógnitas, variáveis e equações, deixam de ser abstrações sem significado real e passam a ter relevância e aplicação prática.

A Modelagem Matemática permite que os estudantes estabeleçam uma conexão direta entre os conhecimentos matemáticos adquiridos em sala de aula e a realidade que os cerca. Ao aplicar esses conceitos na resolução de problemas reais, os alunos percebem a utilidade e a importância da matemática em sua vida cotidiana.

Através da Modelagem Matemática, os estudantes são encorajados a observar, analisar e interpretar situações do mundo real, identificando padrões, formulando hipóteses e representando essas situações com o uso de ferramentas matemáticas. Essa abordagem pode proporcionar um ambiente de aprendizagem mais significativo, onde os alunos são desafiados a pensar criticamente, resolver problemas e comunicar suas ideias matemáticas de forma clara e coerente.

Ao conectar os conhecimentos matemáticos com a realidade vivenciada pelos estudantes, a Modelagem Matemática promove uma aprendizagem mais contextualizada e envolvente. Os alunos conseguem compreender como a matemática está presente em seu dia a dia, tornando-a mais relevante e aplicável, pois “o divórcio entre o pensamento e a experiência direta priva o primeiro de qualquer conteúdo real e transforma-o em uma concha vazia de símbolos sem significados.” (BIEMBENGUT e HEIN, 2014, p. 10).

Nesse contexto, a abordagem da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) complementa a aplicação da Modelagem Matemática na aprendizagem dos estudantes. De acordo com a TCC, os conceitos matemáticos não são apenas entidades abstratas, mas sim conjuntos de elementos que incluem as situações que dão sentido aos conceitos (referências), as ideias que permitem compreender e manipular essas situações (significados) e as representações simbólicas dessas ideias (significantes).

Através da Modelagem Matemática, os alunos também são incentivados a representar essas ideias matemáticas de forma simbólica, utilizando linguagem matemática e ferramentas tecnológicas, por exemplo. Essas representações simbólicas permitem uma melhor manipulação e análise dos conceitos matemáticos, facilitando a comunicação e o raciocínio matemático.

Dessa forma, a TCC e a Modelagem Matemática se complementam, proporcionando uma abordagem pedagógica que valoriza a construção ativa do conhecimento pelos estudantes. Através da Modelagem, eles participam ativamente do processo de aprendizagem, explorando, investigando e construindo significados matemáticos a partir das situações reais. A TCC fornece um arcabouço teórico que ajuda a compreender como os conceitos matemáticos são construídos e relacionados entre si, permitindo uma abordagem mais abrangente e significativa.

5 METODOLOGIA

O pressuposto da pesquisa desenvolvida neste trabalho é que seja possível identificar oportunidades de aprendizagem em relatórios de atividades de Modelagem. A pesquisa descritiva de experiências escolares é de grande importância como recurso metodológico para a compreensão do processo real de ensino. Por outro lado, Skovsmose pondera que a descrição de fatos reais aborda apenas uma das tantas possibilidades existentes. Deste modo, sugere pesquisar além das circunstâncias ocorridas, ou seja, admite como objeto de pesquisa da Educação Matemática, "[...] não somente um estudo de "o que é" ou "o que é construído", mas também um estudo de "o que não é" e "o que poderia ser construído" (SKOVSMOSE, 2015, p. 70).

Assim, pretende-se descrever como poderia ocorrer a aprendizagem de conceitos matemáticos presentes em um conjunto de modelos sobre a produção e comercialização de trufas, elaborado pela autora, inicialmente na disciplina de Modelagem na Educação Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da UFFS, Campus de Chapecó, e complementado para esse trabalho. Os modelos não foram aplicados em classes escolares ou experiências pedagógicas reais, mas foram elaborados visando essas possibilidades, na perspectiva de Skovsmose (2015). Assim, a exploração dos temas e problemas de Modelagem foi executada visando o emprego dos conceitos e suas diferentes representações simbólicas, de tal forma que professores e alunos, possíveis leitores do trabalho, pudessem inspirar-se nesse texto, repeti-los em suas experiências pessoais e/ou adaptá-los para a produção de outros produtos.

Como recurso metodológico para analisar as oportunidades de aprendizagens de conceitos matemáticos, foram utilizados os preceitos da Análise de Conteúdo, na concepção de Bardin (2016), resumidamente em três etapas: A Pré-Análise, na qual se faz uma leitura exploratória dos objetos e dados a serem analisados, formula-se de maneira mais precisa o problema de pesquisa, as hipóteses e os objetivos, a fim de interpretar o material disponível; Uma leitura cuidadosa é realizada na fase de Exploração do Material, na qual os dados são organizados por meio de categorias, analisados e elaborada a descrição analítica das possíveis soluções do problema proposto; e a fase de Tratamento dos Resultados em que há inferência, interpretação e diálogo com o posicionamento de trabalhos semelhantes, além da identificação dos elementos do referencial teórico no processo de argumentação e resolução do problema de pesquisa.

Para isso, o quadro de categorias originalmente proposto em Borges e Comachio (2020), elaborado com base na concepção de aprendizagem da TCC- de Gerard Vergnaud, apresentado no Quadro 1, foi tomado como ponto de partida e adaptado ao contexto do problema modelado.

Quadro 1 – Categorias de análise.

A – Conceitos (Invariantes, I)	1 - Matemáticos	a - Expeditos
		b - Estruturados
		c - Formalizados
	2 - Outros conceitos	a - Economia
		b - Empreendedorismo
		c - Formação cidadã
B – Sentido (S)	1 - Concreto	
	2 - Abstrato	
	3 - Matemático	
C – Representações (R)	1 - Natural	
	2 - Pictórica	
	3 - Gráfica	
	4 - Matemática	
	5 - Computacional	

Fonte: Adaptado de Borges e Comachio, 2020.

Os conceitos matemáticos expeditos (**A1a)** são aqueles adquiridos com o objetivo de aplicá-los imediatamente na resolução de problemas específicos. Eles podem ser entendidos como conceitos, habilidades ou algoritmos que permitem ao modelador, trabalhar em um contexto específico da Modelagem, onde as representações e as regras operatórias relacionadas a esses conceitos são conhecidas e dominadas, mesmo que sem uma compreensão profunda de seus significados e propriedades. É uma estratégia de empregar conceitos matemáticos de forma eficiente e direcionada, aproveitando o conhecimento prévio e habilidades já desenvolvidas, ou mesmo, desenvolvendo-os durante o processo de

Modelagem. Trata-se de uma aprendizagem provisória que poderá ser sistematizada posteriormente com atividades didáticas específicas.

Já os conceitos matemáticos estruturados (**A1b**) referem-se a conceitos que possuem uma estrutura bem definida e organizada matematicamente. Esses conceitos têm propriedades e relações específicas que são fundamentais para sua compreensão e uso adequado, mas que não foram demonstrados matematicamente. Isso significa que o modelador tem um entendimento prático e funcional das características e comportamentos desses conceitos, mesmo que não esteja familiarizado com a fundamentação teórica ou os detalhes da demonstração dessas propriedades, diferentemente dos conceitos matemáticos formalizados (**A1c**) nos quais o modelador demonstra formalmente, ou no mínimo, empenha-se em argumentar sobre a verdade das proposições. As categorias **A1a** e **A1b** estão, geralmente, associadas a uma concepção algorítmica e pragmática da Matemática, enquanto que a categoria **A1c**, a uma concepção mais dialética e pura, como se referem Davis e Hersch:

> A *matemática dialética* é uma ciência rigorosamente lógica, onde as afirmativas são falsas ou verdadeiras, onde objetos com certas propriedades específicas existem ou não. A *matemática algorítmica* é uma ferramenta para resolver problemas. (DAVIS E HERSCH, p. 215, 1980)

Para além do campo da Matemática, a Modelagem da produção e comercialização de produtos pode tangenciar, e/ou efetivamente, empregar conceitos de outras áreas. É o caso de conceitos de economia (**A2a**), tais como insumos, produtos, despesa, lucro, custos que uma vez entendidos, auxiliam a organização de dados durante a Modelagem e passam a fazer parte, como conhecimento instrumental técnico, de um campo conceitual maior, que é a administração de empreendimentos (**A2b**). Tais noções não são o foco de ensino das aulas de Matemática, mas podem ser aprendidas como experiências advindas da prática da produção e do comércio de alimentos, uma vez que os alunos venham a participar desse tipo de atividade como atores, ou ao menos, conversar com empreendedores nas famílias ou conhecidos. O resultado dessas vivências pode implicar na formação de concepções e desenvolvimento de habilidades de executar processos de fabricação, comercialização e planejamento de empreendimentos.

Nesse contexto, os alunos poderão iniciar a formação de concepções sobre o funcionamento socioeconômico da sociedade (**A2c**), ao pesquisar a relação que existe entre o pagamento de impostos com a serviços que ele usufrui como a educação, a saúde, a iluminação pública e outros. Em resumo, os itens da categoria **A2** fazem parte de um conjunto de conceitos relacionados entre si, cuja formação e aperfeiçoamento vêm da vivência externa à escola e que podem contribuir para a formação do cidadão contemporâneo, conectado em seu tempo e lugar.

A atribuição de sentido concreto (**B1**) é a associação dos conceitos matemáticos a objetos físicos, a medidas, a quantidades envolvidas em problemas. Essa categoria pode ocorrer tanto de um conceito para o sentido concreto, como o inverso. Números, operações e variáveis podem ser associados a barras de chocolates, custos e lucros, na opção pedagógica de exemplificação. Por outro lado, o custo de produção de uma trufa poderia ser determinado utilizando proporções, ou particularmente, regra de três. Quando uma grandeza definida não é aparente fisicamente, mas mantém relação com o concreto por seus efeitos, tem-se um sentido abstrato (**B2**). É o caso de conceitos tais como velocidade de um carro, taxa de lucros ou de impostos, por exemplo.

O sentido matemático (**B3**) de um conceito é desconectado dos sentidos concretos e do observável fisicamente. Portanto, é restrito à existência apenas no mundo matemático, onde é definido e são elencadas as suas propriedades, as quais são devidamente demonstradas. Dessa forma, o mesmo conceito matemático pode ter vários sentidos concretos, o que dá à Matemática a sua efetiva utilização na resolução de problemas reais, tal como ocorre na Modelagem Matemática.

As representações simbólicas são códigos empregados para expressar ideias e conceitos, de modo geral. Ao modelar, é comum que alunos e professores se expressem e entrem em acordo sobre procedimentos de investigação, antes de investir em qualquer ação. A forma mais rápida na comunicação interpessoal é a linguagem natural, nas suas formas oral ou escrita (**C1**). Os desenhos e croquis são linguagens pictóricas (**C2**) que auxiliam a expressão de ideias associadas a imagens. Os esquemas, diagramas, fluxogramas, tabelas e gráficos são linguagens gráficas (**C3**) que organizam dados e procedimentos. A expressão dos conceitos com símbolos e regras específicas da matemática constitui a linguagem formal (**C4**). A tradução dos conceitos matemáticos para códigos de programas são representações computacionais de algoritmos (**C5**).

Assim, a presente pesquisa define-se como descritiva, analítica e qualitativa, analogamente a Borges e Comachio (2020). O caráter descritivo é porque destaca e descreve possibilidades de enfoques e oportunidades de aprendizagem no contexto de atividades de Modelagem. O caráter analítico está presente na investigação da natureza dos conceitos matemáticos, de acordo com uma teoria de aprendizagem e, é qualitativa, porque o interesse da análise não é o número, mas sim, as características das oportunidades de aprendizagem.

6 PRODUÇÃO DE TRUFAS: RECEITA E CÁLCULO DE CUSTOS

Nesta seção, os materiais e processos de produção de trufas, assim como os respectivos modelos matemáticos serão descritos e ao mesmo tempo analisados, identificando-se as possibilidades de conceitualização em cada situação, através de letras e números entre parêntesis, com ou sem palavras explicativas em itálico, que remetem às categorias e subcategorias apresentadas no Quadro 1.

Alguns ingredientes e insumos são necessários para a produção das trufas. Os ingredientes são a matéria prima que, mesmo processada, permanece no produto, tais como o chocolate, o leite condensado, etc. (**A2a,** *produção de trufas).* Os insumos são materiais e recursos usados no processo de fabricação, que não permanecem no produto final, tais como, colheres, formas, energia elétrica, gás e transporte. O custo total da produção comercialização das trufas é um modelo matemático, **(A2a,** *produção de trufas;* **A2b,** *empreendedorismo)* composto por uma sequência de pequenos modelos, detalhados nessa seção, particularmente, para uma receita com os seguintes dados:

Sabor: Brigadeiro.
Massa: 45g (trufa pequena) (**A1a,** *medida de massa)*
Rendimento da receita:
- Casca: 60 cascas.
- Recheio: 19 recheios.

6.1 INGREDIENTES

As quantidades dos ingredientes das trufas foram discriminadas em ingredientes da casca e do recheio. (**A1a,** *definição de grandezas;* **A2a,** *produção de trufas).*

6.1.1 Ingredientes da Casca

Rendimento: 60 trufas.

1 kg de chocolate meio amargo. (**A1a,** *medida de massa)*

6.1.2 Ingredientes do Recheio de Brigadeiro

Rendimento: 19 trufas. (**A2a**, *produção de trufas*)

1 caixa de leite condensado de 395 g. (**A1a,** *medida de massa)*

1 caixa de creme de leite de 200 g. (**A1a,** *medida de massa)*

20 g de cacau em pó. (**A1a,** *medida de massa)*

6.2 MODO DE PREPARO

6.2.1 Preparo do Recheio

Tempo de preparo: Aproximadamente 15 minutos. (**A1a,** *medida de tempo)*

1. Em uma panela, com fogo desligado, adicione uma caixa de creme de leite e 20g de cacau em pó, mexa até dissolver parte do cacau.
2. Em seguida adicione o conteúdo de uma caixa de leite condensado. Em fogo alto mexa até começar a ferver.
3. Após levantar fervura, coloque em fogo médio e mexa por aproximadamente 10 minutos ou até adquirir a consistência desejada. (**A2a,** *produção de trufas)*

6.2.2 Preparo das Trufas

Tempo de preparo: Aproximadamente 5 minutos. (**A1a,** *medida de tempo)*

1. Derreta o chocolate em banho Maria, ou no microondas em potência média, em intervalos de 30 segundos a 1 minuto. (**A1a,** *medida de tempo)*
2. Usando a forminha BWB[3] (Figura 1a), coloque o chocolate até a linha indicada (Figura 1b) para fazer as casquinhas das trufas (Figura 1c).

---

[3] BWB é a empresa que produz esse tipo de formas de plástico. A sigla BWB "é uma homenagem do proprietário, Sr. Wilson, aos seus filhos: Bianca, William e Bruno, que juntamente com o Sr. Wilson e seu irmão Anderson formam o corpo diretivo da Empresa". Acessado em 03/04/2023: https://www.google.com/search?sxsrf=APwXEdcwdOmNHEPmTcoR4GX5OaYkVoEDLg:1680529771946&q=O+que+significa+BWB%3F&sa=X&ved=2ahUKEwiLl92g7Y3-AhUdA7kGHUW4DCsQzmd6BAhLEAY&biw=1366&bih=617&dpr=1

3. Coloque para resfriar até endurecer o chocolate.

4. Adicione o recheio de brigadeiro com o auxílio de uma manga de confeiteiro.

5. Cubra com chocolate a base da trufa, novamente coloque para esfriar até o chocolate endurecer (Figura 2a).

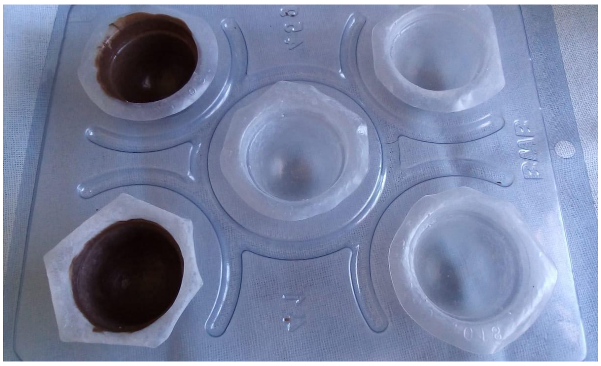
6. Desenforme e retire os excessos de chocolate.

7. Embale (Figura 2b).

Imagem 1 – Formas BWB e casca de chocolate

(a)

(b)



(c)

Fonte: Autora

Imagem 2 – Trufa aberta e trufa embalada

(a)

(b)

Fonte: Autora

6.3 MODELOS MATEMÁTICOS DA PRODUÇÃO DE TRUFAS

O cálculo do custo de cada ingrediente e insumo para trufas sabor brigadeiro foi desenvolvido, no primeiro semestre de 2023, com base nos dados da receita de trufas e preços correntes escrito como modelos matemáticos simples, que empregam conhecimentos do Ensino Fundamental, tais como sistema de medida de massa, proporções, operações com números decimais e regra de três (**A1a**, *definição de grandezas*; **A2a**, *produção de trufas;* **B3,** *operações matemáticas*).

6.3.1 Custo dos Ingredientes

Custo do cacau

O cacau em pó é comercializado em caixas de 100 g a R$ 6,00 e são utilizadas apenas 20g, de acordo com a receita (**A1a,** *medida de massa*). Diferentes alternativas de cálculo do custo das 20g, podem ser implementadas pelos alunos, dependendo da forma como é entendida a ideia de proporcionalidade entre a massa de cacau e o preço: (**A1b,** *razão e proporção*).

Alternativa 1: Regra de três (**A1b,** *razão e proporção*).

Quantidade de cacau (g) Custo (R$)
100 g Cacau ---------------------- R$ 6,00
20 g Cacau ----------------------- x

Aplicando as propriedades da regra de três, obtem-se:

$$100 \cdot x = 20 \cdot 6 \tag{1}$$
$$x = \frac{120}{100}$$
$$x = 1,2 \text{ reais /20g.}$$

(**A1b,** *equações,* **B3***, operações matemáticas*; **C4***, linguagem matemática*).

A regra de três é uma maneira eficiente para calcular grandezas direta ou inversamente proporcionais, (**A1b,** *proporcionalidade)* já que é expressa com notação matemática (símbolos e propriedades) (**B3,** *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)* e pode ser aplicada para qualquer problema de proporções, independentemente se as razões são inteiras ou fracionárias (**A1b,** *conjuntos numéricos).* Além disso, pode ser representada como uma proporção, como na Equação (1), e resolvida usando as propriedades das proporções ou a propriedade fundamental das equações[4]. (**A1b,** *incógnita e equação;* **B1 →B2,** *abstração do concreto para o abstrato;* **B3,** *operações matemáticas).*

$$\frac{100g}{20g} = \frac{R\$\,6{,}00}{R\$\,x} \tag{2}$$

$$\frac{5}{1} = \frac{6}{x}$$

$$5 = \frac{6}{x}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$x = 1{,}2$$

(**A1b,** *equações,* **B3***, operações matemáticas*; **C4***, linguagem matemática*)

Alternativa 2: (redução a um múltiplo de 10) (**A1b,** *múltiplo*)

O seguinte raciocínio, pode ser utilizado para o custo do cacau:

Se 100g custa 6 reais, 10g custa 0,6 reais. Então, 20g (que é o dobro de 10g) custa 1,2 reais (A1a, medida de massa; **B3**, *operações matemáticas*).

Esta alternativa é viável e pode ser executada mentalmente, para casos em que as razões são inteiras. Por isso, é bastante utilizada em práticas de comércio (cálculo do preço de produtos, impostos, ...), agricultura (cálculo de adubo, sementes, ...), saúde (doses de remédios em função do peso do paciente, ...). (**A2a**, *economia*; **A2c**, *formação cidadã*; **B3,** *operações matemáticas)*

Alternativa 3: (mesma razão entre as duas grandezas)

O seguinte raciocínio, também pode ser utilizado para o custo do cacau:

Verificando quantas vezes 20g cabe dentro de 100g, (**A1b,** *múltiplo*) conclui-se que cabe 5 vezes. Da mesma forma, o custo de 20g deve caber 5 vezes em 6 reais. Assim, $6 \div 5 = 1{,}2\ reais.$ (**B3,** *operações matemáticas)*

---

[4] Propriedade fundamental das proporções: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. A propriedade fundamental das equações: Se a mesma operação for efetuada em ambos os membros de uma equação verdadeira, essa assim permanece.

As alternativas 2 e 3, apesar de muito utilizadas em situações práticas, tornam-se mais trabalhosas em casos onde a razão entre as grandezas dadas não é inteira.

$$100 - 20 = 80$$
$$80 - 20 = 60$$
$$60 - 20 = 40$$
$$40 - 20 = 20$$
$$20 - 20 = 0$$
$$100 - 20 - 20 - 20 - 20 - 20 = 0$$

$$6 - x - x - x - x - x = 0 \tag{3}$$

$$6 - 5x = 0$$
$$6 = 5$$
$$1,2 = x$$

(**C4,** *representação matemática*)**.**

Custo do chocolate meio amargo

Considerando os dados da receita (razões não inteiras), (**A1b,** *razão e proporção)* a regra de três é uma alternativa -viável para cálculo do custo do chocolate meio amargo (**A2a,** *cálculo custo).* A receita da casca é para 60 trufas, mas a do recheio é para 19 trufas (**A2b,** *rendimento).* Para calcular a massa de chocolate para uma receita, pode-se utilizar a regra de três, já escrita na forma de proporção, Equação (4). (**A1a,** *medida de massa,* **A1b,** *razão e proporção***, B1 →B2,** *abstração do concreto para o abstrato,* **C1 → C4,** *representação escrita com representação matemática).*

Para isso pode-se fazer:

$$\frac{60\,cascas}{19\,cascas} = \frac{1000\ gramas}{mch} \tag{4}$$

$$x \cdot 60 = 19 \cdot 1000$$
$$x = \frac{19000}{60}$$
$$x = \frac{1900}{6}$$
$$x = \frac{950}{3}$$

Onde *mch* é a massa desse ingrediente para a receita de 19 trufas (g). (**B2 → B3,** *abstração do abstrato para o matemático).* Note que há uma mudança de variável aqui, em que *mch* passa a ser representado por *x*, isso acontece pois o sentido concreto passa a ter um sentido matemático, de forma que deixa de ser representado por uma linguagem comum e passa a ser representado por uma incógnita.

Resolvendo a proporção, tem-se $mch = 316,66\ g$. (**B1,** *sentido concreto)*

Sabendo que 1kg de chocolate custa 24 reais, pode-se calcular o custo do chocolate meio amargo por receita, conforme a Equação (5). (**A2a,** *cálculo custo;* **B1** →**B***2, abstração do concreto para o abstrato,* **C1** → **C4***, representação escrita com representação matemática)*

$$\frac{24\ reais}{cch} = \frac{1000\ \ gramas}{316{,}66\ gramas} \tag{5}$$

Onde *cch* é o custo desse ingrediente para a receita de 19 trufas (g). (**A2a,** *cálculo custo*, **B2 → B3,** *abstração do abstrato para o matemático***)**

Resolvendo a proporção, tem-se $cch = 316,66\ g$. (**B1,** *sentido concreto)*

$$x \cdot 1000 = 316,66 \cdot 24 \tag{6}$$

$$x = \frac{7600}{1000}$$

$$cch = 7,60$$

(**A1b,** *equações,* **B3***, operações matemáticas*; **C4***, linguagem matemática*)

Alternativa 4: (elaboração de uma fórmula geral)

De modo geral, a receita fornece a quantidade do ingrediente (Qr), os dados de quantidade (Qc), o preço (P) que o produto é comercializado, com isso encontramos o custo da receita (Cr). (**A1c***, dedução da equação;* **B1** →**B2,** *abstração do real para a expressão;* e **B3***, operações matemáticas*; **C4***, linguagem matemática*)

Dispondo esses dados em uma regra de três, obtêm-se:

Dados de comercialização: Qc ------- P
Dados da receita: Qr ------- Cr

Escrevendo na forma de uma proporção, tem-se:

$$\frac{Qc}{Qr} = \frac{P}{Cr} \tag{7}$$

(C4, *linguagem matemática*)

Resolvendo a proporção para *Cr*, tem-se a Equação (8):

$$Cr = \frac{Qr \cdot P}{Qc} \tag{8}$$

(C4, *linguagem matemática*)

Assim, com a Equação (8) (ou pelas demais alternativas), pode-se calcular o custo dos ingredientes para produzir a receita de 19 trufas. (**A2a**, *cálculo de custo*) Evidentemente, não há necessidade de aplicar essas alternativas, se o ingrediente é comercializado exatamente com a quantidade prescrita na receita. Nesse caso, o custo *Cr* é o próprio preço *P* (**A2a e A2b,** *diferença entre custo e preço*)**.** É o que ocorre com os ingredientes: Leite Condensado e Creme de Leite. A Tabela 1 apresenta um resumo dos custos dos ingredientes.

Tabela 1 - Custo dos ingredientes para produzir 19 trufas

Qtd.	Un. de Medida	Ingredientes	Preço unitário (R$)	Custo (R$)
1	395 g	Leite condensado	5,99	5,99
1	200 g	Creme de leite	2,00	2,00
1	20 g	Cacau em pó	1,2	1,20
0,316	kg	Chocolate meio amargo	24,00	7,60
Total				16,79

Fonte: o autor

(**B1,** *sentido concreto;* **C4,** *representação através de tabela*)

6.3.2 Custo dos Insumos

Além dos ingredientes, os insumos são custos que devem ser levados em consideração, como gás de cozinha, energia elétrica e materiais para produção das trufas. (**A2a**, *custos de insumos*)

Custo do gás de cozinha

Considerando-se um fogão comum de 4 bocas, o gasto médio por hora em fogo médio, segundo uma empresa fornecedora de gás é de 0,225 kg/h, com as 4 bocas do fogão acionadas simultaneamente (**A1b**, *média*). Utilizando regra de três ou mesmo divisão (**A1b,** *razão e proporção*) pode-se chegar ao consumo de gás de apenas 1 boca do fogão.

0,225 kg/h ________ *4 bocas*

Cg/t ________ *1 boca*

Onde *Cg/t* é o consumo médio de gás no período de tempo t (kg/h). (**B1 → B2,** *transição do sentido concreto para o abstrato,* **C4,** *representação matemática*)

Resolvendo a regra de três, obtém-se, $Cg/t = 0,05625$ kg/h para uma boca do fogão. (**B3,** *sentido matemático*)

O tempo de preparo do recheio da trufa é de 15 min , ou seja, 0,25 h (**A1b,** *medida de tempo*) e a massa padrão de um botijão de gás é de 13 kg (**A1b,** *medida de massa*), vendido por aproximadamente R$ 120,00. Com esses dados pode-se calcular o consumo, Cg, e o preço do gás: (**A2b,** *cálculo custo*)

Cg/t ______ 1 h

Cg ______ 0,24 h

Resolvendo a regra de três para *Cg,* obtém-se *Cg* = 0, 0140625 kg. (**A1b,** *medida de massa,* **B1 → B2,** *transição do sentido concreto para o abstrato*). Como o preço de um botijão de 13kg de gás é R$ 120,00, temos:

R$ 120 _______ 13 kg

VCg ______ 0, 0140625 kg

VCg = 0,12980 reais ou, aproximadamente R$ 0,13.

(**A2a,** *cálculo de custo,* **B2 → B1,** *transição do sentido abstrato para o real*)

Custo de Energia Elétrica

Na próxima parte da receita, derreter o chocolate em banho maria no microondas, precisa-se calcular o gasto causado pela energia elétrica utilizada pelo aparelho.

Nesse caso, o uso de eletricidade é medido em kWh (kilowatt por hora) (**A2a,** *cálculo de consumo de energia*), então, precisa-se primeiro descobrir quantos kw/h um microondas em funcionamento gasta, e depois transformar o tempo de funcionamento em horas. (**A1b,** *medida de tempo,* **B2 → B3,** *abstração do abstrato para o matemático*)

1h _______ 60 min

t ______ 3 min

$60\,x = 3$

$t = 3/60$

$$t = 0{,}05 \text{ h} \tag{9}$$

(**B3 → B1,** *transição do sentido matemático para o real*)

Seja 1,380 - Consumo de eletricidade por tempo (kWh), precisa-se descobrir quantos kw são gastos no período x, que são 0,05. hora (**A1b,** *medida de energia,* **A2a,** *cálculo de consumo de energia;* **B2 → B3,** *abstração do abstrato para o matemático*; ***C4,*** *linguagem matemática*)

Usando regra de três:

1,380 _______ 1 hora

x _______ 0,05 hora

$$1x = 1{,}380 \cdot 0{,}05$$

$$x = 0{,}069 \text{ kWh} \tag{10}$$

(**B3 → B1,** *transição do sentido matemático para o real*)

Então o consumo do microondas é de 0,069 kWh nesse período. Segundo o site da Celesc o custo dado por kWh é de R$ 0,57302 (**B2 → B3,** *abstração do abstrato para o matemático*; ***C4,*** *linguagem matemática*).

Usando regra de três, obtém-se:

0,57302 reais_______ 1 kWh

x _______ 0,069 kWh

$$1\,x = 0{,}57302 \cdot 0{,}069$$

$$x = 0{,}03953 \text{ reais} \tag{11}$$

(**B3 → B1,** *transição do sentido matemático para o real*)

Custo de Transporte

Depois de prontas as trufas, será considerada a situação de venda e trufas, existindo a necessidade de se deslocar para diferentes locais com clientes. Considerando um deslocamento total de 20 km para cada, (**A1b,** *medida de comprimento),* um trajeto completo da saída de casa até o retorno, pode-se calcular os custos totais. (**A2a,** *cálculo de custo*)

Como os custos de gasolina são calculados por litro, precisa-se calcular quantos litros de gasolina serão utilizados para fazer esse percurso, para isso, temos que considerar a quilometragem média que um carro faz com um litro de gasolina.

A quilometragem média de um carro popular dirigindo no centro da cidade é 10 km/L (**A1b,** *razão e proporção;* ***B3****, operações matemáticas;****C4****, linguagem matemática*)

10 km _______ 1 L

20km ______ x L

$$10x = 20$$

$$x = \frac{20}{10}$$

$$x = 2 \tag{12}$$

(**B3 → B1,** *transição do sentido matemático para o real*)

Considerando o valor atual da gasolina R$ 4,98 o valor gasto com transporte será de R$ 9,96, para a entrega de 250 trufas. (**A2a,** *cálculo de custo*, **B1,** *sentido concreto*, **B3,** *sentido matemático*)

Gasto de gasolina para entregar uma trufa $\frac{9{,}96}{250} = 0{,}0398$ reais (**B3** *operações matemáticas).*

Custos para iniciar a produção

Existem certos insumos que são necessários para iniciar a produção de trufas, e que não são descartáveis ou de uso único, esses custos que são pagos uma vez no início da produção, e não variam dependendo do número de trufas produzidas, são os chamados de custos fixos. E os mesmos são calculados considerando o que é preciso, e em seguida, somando o custo total. (**A2a,** *cálculo de custo*)

(i) 1 Espátula - custo de compra R$ 15,00 (**A2a,** *cálculo de custo*).

(ii) 5 formas, mesmo sendo possível fazer a receita somente com uma. Levando-se em conta o tempo para o chocolate endurecer, ao fazer as receitas com menos formas, tem-se uma grande diminuição na produtividade, de forma que a produção de trufas/hora fique muito abaixo do esperado, e consequentemente, que não seja uma atividade rentável.

Custo de compra 8,90 · 5 = 44,50 (**A2a,** *cálculo de custo,* **A2b,** *desempenho de produção*)

(iii) Panela

(iv) Toucas para o cabelo, vendidas em embalagens de 100 unidades no preço de 7,90, a embalagem mas somente se utiliza uma por dia de trabalho, assim faz-se um custo base por dia de venda (**A2a,** *cálculo de custo,* **A2b,** *qualidade de produção e higiene*).

(v) Manga de confeitar - custo de compra R$ 10,00 (**A2a,** *cálculo de custo,* **A2b,** *desempenho de produção*)

Insumos finais

Além disso, também precisa-se de embalagens para as trufas, uma para cada trufa produzida.. Essas embalagens são compradas em pacotes de 100 unidades, por 8,90, assim, podemos fazer a conta: (**A2a,** *cálculo de custo*, **B1,** *sentido concreto*, **B3,** *sentido matemático*)

100 ____ 8,90

1 _____ x

$$\begin{aligned} 100\,x &= 8,90 \\ x &= 0,089 \\ x &= 0,09 \end{aligned} \tag{13}$$

(**B3 → B1,** *transição do sentido matemático para o real,* **C4,** *linguagem matemática*)

Como é necessário uma embalagem por trufa, tem-se um custo variável na conta, de 0,09 por trufa produzida. (**A2a,** *cálculo de custo,* **A2b,** *qualidade de produção*)

Tabela 2 - Custo dos insumos para 1 trufa

Insumos	Un. de medida	Quantidade	Preço unitário (R$)	Custo (R$)
Gás de Cozinha	kg	0, 014	120,00	0,13
Energia Elétrica	kWh	0,069	0,57	0,04
Transporte	km	0,080	4,98	0,04
Formas para	un.	5	8,90	44,50

Trufas				
Espátula	un.	1	15,00	15,00
Panela	un	1	90,00	90,00
Touca descartável	un.	1 pacote com 100 un.	7,90	0,08
Manga de confeitar	un.	1	10,00	10,00
Embalagens	un.	1 pacote com 100 un.	8,90	0,09

Fonte: o autor

Assim, pode-se separar os custos de insumos em variáveis e fixos. Os variáveis dependem do número de trufas, e os fixos não. (**A2a,** *cálculo de custo*)

Assim, considerando todos esses valores, pode-se dizer que:

Custos variáveis para 1 trufa = 0,13 + 0,0395 + 0,04 + 0,09 = 0,2995 reais (***B3**, operações matemáticas*).

Custos fixos de produção = 44,50 + 15,00 + 90,00 + 0,08 + 10,00 = 159,58 reais (***B3**, operações matemáticas*).

Custo unitário das trufas

Qual é o custo unitário das trufas com recheio de brigadeiro?

Para calcular o custo unitário das trufas (C), precisa-se somar, o custo de 1 trufa na receita, os CV (custos variáveis) e CF (custos fixos). Então, tem-se: (**A2a,** *cálculo de custo*; **C4,** *linguagem matemática)*

$$C = \frac{1}{19} \cdot 16,90 + 1 \cdot CV + CF \quad (14)$$

(***B1→B2**, transição do sentido concreto para o abstrato;* **C4,** *linguagem matemática)*

$C = 0,89 + 0,2995 + 159,58 = 160,77$ (***B3**, operações matemáticas)*

Parte-se do princípio de que o preço de mercado da trufa na região é de R$ 3,50. (**A2b,** *preço de mercado*)

Temos 2 custos variáveis na fórmula, o custo da receita e o custo dos insumos variáveis, então, no caso de produzir x trufas, a fórmula ficaria assim:

$$\frac{x}{19} \cdot 16,90 \; + x \cdot 0,2995 \; + \; 159,58$$

$$x \cdot 0,89 \; + x \cdot 0,2995 \; + \; 159,58 \qquad (15)$$

(**B2→B3**, *transição do sentido abstrato para o matemático;* **C4,** *linguagem matemática)*

Pela propriedade associativa:

$$x \cdot (\, 0,89 \; + \; 0,2995) \; + \; 159,58$$

$$x \cdot (\, 1,1895) \; + \; 159,58 \qquad (16)$$

(B2→B3, *transição do sentido abstrato para o matemático;* **C4,** *linguagem matemática)*

Tendo em vista essa fórmula e o valor de venda 3,50 é possível calcular o número mínimo de trufas necessário para se ter lucro com as vendas?

Para descobrir o ponto onde não há prejuízo, precisa-se igualar os custos de produção de um certo número de trufas, com a receita gerada pela venda dessas mesmas, assim criando a equação:

$$x \cdot (\, 1,1895) \; + \; 159,58 \; = \; x \cdot 3,50 \qquad (17)$$

$$159,58 \; = \; x \cdot 3,50 \; - \; x \cdot 1,1895$$

$$159,58 \; = \; x \cdot (2,3105)$$

$$\frac{159{,}58}{2{,}3105} \; = \; x$$

$$69,06 \; = \; x$$

(B3, *operações matemáticas;* **B1,** *sentido concreto;* **C4,** *linguagem matemática)*

Ou seja, a partir de 70 trufas, se tem lucro, como na prova real:

$$70 \cdot (\, 1,1895) \; + \; 159,58 \; < \; 70 \cdot 3,50 \qquad (18)$$

$$83,265 \; + \; 159,58 \; < \; 245$$

$$242,845 \; < \; 245$$

(B3, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Assim, pode-se dizer que a fórmula do lucro é:

$$Lucro \; = \; x \cdot Valor\ de\ venda \; - \; \{x \cdot (\, Custo\ variável) \; + \; Custo\ fixo\} \qquad (19)$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B2→B3**, *transição do sentido abstrato para o matemático)*

$$Lucro \; = \; x \cdot 3,50 \; - \; \{x \cdot (\, 1,1895) \; + \; 159,58\}$$

$$Lucro = x \cdot (3,50 - 1,1895) - 159,58$$

$$Lucro = x \cdot 2,3105 - 159,58 \quad (20)$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Ao considerar vendas feitas via aplicativos de entrega de comida (**A2b,** *empreendedorismo)*, é necessário pagar as taxas do aplicativo, para utilizar da plataforma para efetuar vendas. Essas taxas (**A2c,** *formação cidadã)* variam, sendo de 20% no pagamento à vista, e 23% no pagamento no crédito, ou seja, é necessário modificar a fórmula do lucro nessa situação. (**A2a,** *conceitos de economia)*

Considerando a taxa de 20% do valor de venda, o valor recebido por cada trufa é de 3,50 - 20%, ou seja, 2,80, ao colocar esse valor na nossa fórmula de lucro obtém-se: (**A2a,** *conceitos de economia)*

$$Lucro = x \cdot 2,80 - \{x \cdot (1,1895) + 159,58\}$$

$$Lucro = x \cdot (2,80 - 1,1895) - 159,58$$

$$Lucro = x \cdot 1,6105 - 159,58 \quad (21)$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B2→B3**, *transição do sentido abstrato para o matemático;* **C4,** *linguagem matemática)*

Para descobrir o ponto de corte do prejuízo, é necessário igualar o lucro a 0, assim pode-se determinar o número mínimo de trufas necessário para pagar as despesas. (**A2a,** *conceitos de economia;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

$$0 = x \cdot 1,6105 - 159,58 \quad (22)$$

$$159,58 = x \cdot 1,6105$$

$$\frac{159,58}{1,6105} = x$$

$$99,08 = x$$

(**B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Então, passa-se a ter lucro ao vender 100 trufas, conforme a prova real:

$$Lucro = 100 \cdot 1,6105 - 159,58 \quad (23)$$

$$Lucro = 161,05 - 159,58$$

$$Lucro = 1,47$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B1,** *sentido concreto)*

Alternativas de vendas

Com os modelos criados até o momento, pode-se agora formular uma simulação:

Para trabalhar vendendo trufas, uma pessoa pode abrir uma empresa, como Microempreendedor individual (MEI) pagando impostos mensalmente e declarando seus ganhos para o governo. Esse valor em impostos é de 62,00 reais por mês, além de um valor de 55,00 reais por mês para a previdência social, para garantir a aposentadoria futura. (**A2c,** *formação cidadã*).

Lembrando a fórmula original do lucro, e suas variações para venda por aplicativos, tem-se::

Lucro de venda direta:

$$Lucro = x \cdot 2,3105 - 159,58 \tag{24}$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Lucro de venda via aplicativo a vista:

$$Lucro = x \cdot 1,6105 - 159,58 \tag{25}$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Lucro de venda via aplicativo no crédito:

$$Lucro = x \cdot 1,5055 - 159,58 \tag{26}$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Pode-se vender com esses três métodos, no mesmo mês, assim constrói-se uma nova fórmula, considerando variáveis diferentes para cada método de venda, e somando as partes variáveis. Toma-se a parte fixa uma vez só, pois serão utilizados os mesmos insumos para todas as trufas.

Seja:

x = número de trufas vendidas diretamente;

y = número de trufas vendidas via aplicativo a vista;

z = número de trufas vendidas via aplicativo no crédito.

A versão atualizada da fórmula fica:

$$Lucro = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 159,58 \tag{26}$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B2→B3**, *transição do sentido abstrato para o matemático;* **C4,** *linguagem matemática)*

Incluindo os pagamentos da previdência social e do imposto de empresa, tem-se:

$$Lucro = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 159,58 - 55,00 - 62,00$$

$$Lucro = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 276,58 \tag{27}$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B2→B3**, *transição do sentido abstrato para o matemático;* **C4,** *linguagem matemática)*

Esta fórmula considera um grande bloco de vendas, mas na realidade, ao realizar a contabilidade de uma empresa, geralmente se divide os valores de entradas e saídas mês a mês. Ao tentar montar uma tabela mensal de vendas, é necessário separar alguns valores.

O valor de custos fixos de insumo seria pago somente no primeiro mês, e os valores de impostos e previdência se repetem todos os meses, dessa forma, no primeiro mês utiliza-se a equação já montada:

$$Lucro_1 = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 276,58$$

Nos meses seguintes, elimina-se os custos fixos iniciais, então é obtido:

$$Lucro_2 = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 117,00$$

$$Lucro_3 = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 117,00$$

$$Lucro_N = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 117,00 \qquad (28)$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B2→B3**, *transição do sentido abstrato para o matemático;* **C4,** *linguagem matemática)*

Pode-se calcular o lucro por N meses pela fórmula:

$$\text{Lucro} = \text{Lucro}_1 + \text{Lucro}_2 + \text{Lucro}_3 \ldots + \text{Lucro}_N.$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B2,** *sentido abstrato;* **C1,** *linguagem natural;* **C4,** *linguagem matemática)*

Dessa forma, quantas trufas a pessoa precisaria vender para ter um lucro de um salário mínimo no primeiro mês, e nos meses seguintes, caso:

a) Vende-se somente via venda direta?

Com a fórmula do primeiro mês:

$$1302 = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 276,58 \qquad (29)$$

(**A2a,** *conceitos de economia;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Como a venda de trufas de foi de forma direta, não foram consideradas trufas vendidas via aplicativo, nem a vista nem no crédito, assim y= z=0 - e a equação é dada por:

$$1302 = x \cdot 2,3105 + 0 \cdot 1,6105 + 0 \cdot 1,5055 - 276,58 \qquad (30)$$

$$1302 = x \cdot 2,3105 - 276,58$$

$$1302 + 276,58 = x \cdot 2,3105$$

$$\frac{1578,58}{2,3105} = x$$

$$683,22 = x$$

(**B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Considerando 20 dias úteis no mês, seriam $\frac{683,22}{20} = 34,16$ trufas por dia no primeiro mês. Como não pode usar números decimais para representar trufas, arredonda-se para o próximo número inteiro, ou seja, seriam vendidas 35 trufas por dia durante o primeiro mês. (**A1b,** *conjuntos numéricos;* **B1,** *sentido concreto*)

Já nos meses seguintes:

$$1302,00 = x \cdot 2,3105 - 117,00 \qquad (31)$$

$$1419,00 = x \cdot 2,3105$$

$$\frac{1419,00}{2,3105} = x$$

$$614,15 = x$$

Considerando 20 dias úteis no mês, isso seriam $\frac{614,15}{20} = 30,71$ trufas por dia nos meses seguintes. Novamente, arredonda-se a quantidade de trufas, ou seja, seriam vendidas 31 trufas por dia. (**A1b,** *conjuntos numéricos;* **B1,** *sentido concreto*)

b) Vende-se somente via aplicativo à vista?

Com a fórmula do primeiro mês:

$$1302 = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 276,58 \qquad (32)$$

Como a venda de trufas ocorreu no aplicativo, com pagamento à vista, não foram consideradas trufas vendidas de forma direta, nem no crédito, assim obtêm-se x=z=0. E mais,

$$1302 = y \cdot 1,6105 + \; - 276,58$$

$$1302 = y \cdot 1,6105 - 276,58$$

$$1302 + 276,58 = y \cdot 1,6105$$

$$\frac{1578,58}{1,6105} = y$$

$$980,18 = y$$

(**A2b,** *operações algébricas;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Ao considerar 20 dias úteis no mês, isso seriam $\frac{980,18}{20} = 49,00$ trufas por dia no primeiro mês. (**A1b,** *conjuntos numéricos;* **B1,** *sentido concreto*)

Já nos meses seguintes:

$$1302,00 = y \cdot 1,6105 - 117,00 \qquad (33)$$

$$1419,00 = y \cdot 1,6105$$

$$\frac{1419,00}{1,6105} = y$$

$$881,09 = y$$

(**A2b,** *operações algébricas;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Ao considerar 20 dias úteis no mês, isso seriam $\frac{881,09}{20} = 44,05$ trufas por dia nos meses seguintes, ou seja, 45 trufas por dia. (**A1b,** *conjuntos numéricos;* **B1,** *sentido concreto*)

c) Vende-se o mesmo número de trufas via venda direta, por aplicativo à vista e por aplicativo no crédito?

Com a fórmula do primeiro mês:

$$1302 = x \cdot 2,3105 + y \cdot 1,6105 + z \cdot 1,5055 - 276,58 \quad (34)$$

Como o número de trufas vendidas nos 3 métodos é o mesmo, pode-se dizer que x = y = z, então substituir na operação:

$$1302 = x \cdot 2,3105 + x \cdot 1,6105 + x \cdot 1,5055 - 276,58 \quad (35)$$

$$1302 = x \cdot (2,3105 + 1,6105 + 1,5055) - 276,58$$

$$1302 + 276,58 = x \cdot (5.4265)$$

$$\frac{1578,58}{5,4265} = x$$

$$290,90 = x$$

(**A2b,** *operações algébricas;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Então, no primeiro mês, a pessoa precisa vender 290,90 trufas como venda direta, 290,90 trufas no aplicativo à vista e 290,90 trufas no aplicativo no crédito, totalizando 872,70 trufas por mês, $\frac{872,70}{20} = 43,63$ trufas por dia, ou seja, 44 trufas por dia. (**A1b,** *conjuntos numéricos;* **B1,** *sentido concreto*)

Nos meses seguintes:

$$1302 = x \cdot 2,3105 + x \cdot 1,6105 + x \cdot 1,5055 - 117,00 \quad (36)$$

$$1302 = x \cdot (2,3105 + 1,6105 + 1,5055) - 117,00$$

$$1302 + 117,00 = x \cdot (5.4265)$$

$$\frac{1419,00}{5,4265} = x$$

$$261,49 = x$$

(**A2b,** *operações algébricas;* **B1,** *sentido concreto;* **B3**, *operações matemáticas;* **C4,** *linguagem matemática)*

Então, no primeiro mês, a pessoa precisa vender 261,49 trufas como venda direta, 261,49 trufas no aplicativo à vista e 261,49 trufas no aplicativo no crédito, totalizando 784,47 trufas por mês, $\frac{784{,}47}{20} = 39{,}22$ trufas por dia, ou seja, 33 trufas por dia. (**A1b,** *conjuntos numéricos;* **B1,** *sentido concreto*)

Dessa forma, vendendo apenas 33 trufas por dia, seria possível obter a quantia de um salário mínimo. Garantindo seus direitos como MEI e contribuindo com a previdência social para garantir uma futura aposentadoria.

7 ANÁLISE

Com essa análise, foram averiguadas como ocorrem os processos de aprendizagem de conceitos matemáticos na atividade de Modelagem sobre a produção de trufas descrita no capítulo anterior, e de que forma ela pode contribuir para que a aprendizagem tenha significado para o aluno, agregando formação de cidadãos críticos e conscientes do seu papel na sociedade. Realizou-se cálculos de custo do cacau em pó e do chocolate meio amargo utilizado nas trufas, de modo a refletir como pode ocorrer a aprendizagem em cálculos de custo, e suas diferentes abordagens. Além de fazer comparações através da álgebra, levando-se em consideração impostos e taxa, e como isso pode influenciar na tomada de decisão de um cidadão empreendedor.

Nessa atividade de Modelagem o desafio foi encontrar o custo total de uma trufa. A princípio utilizando o preço e quantidade dos ingredientes, calculando os custos através de regra de três e operações matemáticas (**A1a, A1b, A2a**). Para chegar a uma conclusão mais específica fez-se necessário ir atrás de conceitos de economia (**A2a**) para determinar o valor dos insumos utilizados (energia elétrica, consumo de gás, utensílios, etc).

Nessa atividade considerou-se a fabricação de trufas para venda e não para consumo próprio. Logo, há fatores que influenciam as vendas, bem como, uma legislação a ser cumprida (**A2b, A2c**). Durante o processo de Modelagem surgiram outros objetos de conhecimento, como fatores que influenciam as vendas e também a legislação que rege a venda de produtos para consumo humano, as regras da vigilância sanitária e os impostos cobrados sobre as vendas, pois contribuem para economia do país. Praticar atividades lucrativas, sem o pagamento de impostos, é considerado crime pela legislação brasileira.

Ao trabalhar com a produção de trufas, os alunos são expostos a diversos aspectos do empreendedorismo, como planejamento, tomada de decisões, análise de mercado, gerenciamento de recursos e avaliação de viabilidade econômica. (**A2b)** Ao sugerir a venda comercial, os estudantes precisam conhecer as leis que regem essas atividades e com isso entender porque existem e são cobrados impostos. Talvez, em uma primeira experiência de Modelagem, sejam desenvolvidos significados simplórios da função das leis, das finalidades dos impostos, da fiscalização e até dos conceitos de economia. Porém, essas noções podem começar a formação de campos conceituais sobre economia e sociedade, na medida que os alunos passam a reconhecer na sua vivência diária, a existência da prefeitura, da figura do prefeito, da polícia, das obras públicas (pavimentação de ruas, iluminação e saneamento públicos, …) e perguntar-se quem e como são pagos todos esses serviços e bens. (**A2c**)

Através da Modelagem Matemática, os alunos são desafiados a identificar e quantificar os recursos necessários para a produção de trufas, como ingredientes, equipamentos e tempo. Eles precisam realizar cálculos relacionados aos custos de produção, estimar a demanda e determinar preços competitivos. Essas atividades permitem que os alunos entendam conceitos teóricos fundamentais, como lucro, ponto de equilíbrio e retorno sobre o investimento.

O primeiro ingrediente em que foi realizado o cálculo do custo foi o cacau (p. 27), com três alternativas diferentes para obter o resultado. A primeira foi através da regra de três, a segunda foi reduzindo os valores à múltiplos de dez, em caso de razões inteiras e por fim, a ideia de divisão: “quantas vezes cabe”. Todas as alternativas possuem aspectos da matemática, no entanto, a primeira alternativa, contempla mais aspectos da TCC de Gerard Vergnaud, na qual o estudante pode fazer relações entre o objeto concreto (**B1**), ou seja, o cacau e o sentido abstrato (**B2**) o custo do cacau, relacionando-o com a matemática, encontrando a incógnita *x* (**B3**) que possui um sentido matemático.

Outro exemplo é o cálculo do custo do chocolate (p. 28) o estudante tem um objeto concreto (**B1**), e precisa descobrir o custo deste. Indiretamente trabalha-se o conceito de massa (**A1a**), não será utilizada a palavra peso empregada no ensino de forças em física. Para o cálculo do custo, leva-se em consideração o rendimento do chocolate e o rendimento do recheio, ou seja, quantas trufas é possível produzir com a quantidade de chocolate disponível e quantas trufas é possível produzir com a quantidade de recheio disponível (**A1a, A1b, B1**). Usando o conhecimento de razões/frações e de proporcionalidade, é escrito um esquema de regra de três usando linguagem natural (**C1 →C4**), mesclando a escrita natural com a matemática, construindo um conhecimento novo a algo que já é conhecido.

Nesse esquema a massa do chocolate passa a ser representada por *mch* (**B1→B2**), a qual ocorre a transição daquilo que é concreto para algo abstrato. E resolvendo o esquema , chega-se a uma equação, na qual a *mch* passa a ser tratada como uma incógnita *x*, (**B2→B3**) momento em que ocorre a o sentido abstrato passa a ter um sentido matemático. Resolvendo a Equação 4, voltamos a tratar a incógnita *x* como *mch*, porém dessa vez dando significado ao que ela representa a massa em gramas do chocolate retornando ao sentido concreto (**B1**) do objeto de estudo.

Este exemplo volta a se repetir nos cálculos de custos, associando a massa ao rendimento, e/ou associando a massa ao valor pago pelo produto, sendo assim, é possível construir um algoritmo para chegar a uma generalização do cálculo do custo de qualquer ingrediente usado na receita, dessa forma é criada uma fórmula (Equação 8).

Além disso, a Modelagem Matemática da produção de trufas também incentiva os alunos a desenvolver habilidades empreendedoras, como criatividade, inovação e resolução de problemas. Eles são desafiados a encontrar soluções eficientes e otimizadas para maximizar a produção e minimizar os custos. Os alunos são incentivados a planejar e gerenciar recursos, a calcular custos e lucros, a analisar demandas e tomar decisões estratégicas (**A2c**). Como por exemplo, se a região em que eles moram tem muitos habitantes, existem muitos potenciais clientes, no entanto o estilo de vida e a renda da população influencia no seu consumo (**A2b, A2c**).

Através do processo de Modelagem, os alunos aprendem a adaptar-se a diferentes cenários, fazer ajustes e tomar decisões com base em dados e informações relevantes. Pode-se notar isso na proposta encontrada na página 37, após encontrar o custo unitário da trufa. Para trabalhar vendendo trufas é necessário que haja uma regulamentação, abrindo uma microempresa e se submetendo a legislação do lugar em que vive, pagando devidamente os impostos, existe um custo para que isso aconteça que deve ser levado em consideração ao optar por trabalhar nesse modelo. Caso o cidadão não queira regulamentar a situação estará infligindo as leis e expondo seus consumidores a riscos à saúde, bem como a si mesmo, pois a contribuição do imposto MEI serve justamente para que em casos de impossibilidade de trabalhar por motivos de saúde, o governo auxilie esse microempreendedor até que se restabeleça e volte a trabalhar.

No entanto, é necessário pensar ainda mais além, pois no futuro isso não garante sua aposentadoria. Por isso é importante que o pequeno empreendedor também pense na previdência social como forma de garantir qualidade de vida a longo prazo.

Considerando tais situações, além de taxas cobradas pelas facilidades atuais, como uso de cartão de crédito e vendas por aplicativos que se mantém justamente pelas tarifas cobradas de seus usuários são realizadas três comparações de vendas: via venda direta, ou seja, vendendo diretamente ao consumidor, via aplicativo com pagamento no crédito, ou via aplicativo com pagamento à vista.

São obtidas as quantidades de trufas diárias que precisam ser vendidas, para obter o valor de um salário mínimo de lucro, de acordo com cada tipo de venda. Após algumas operações algébricas, é possível ter uma média geral da quantia de trufas unindo todos os tipos de vendas. É fundamental ter em mente que, na realidade, as vendas não seguem um padrão linear, pois podem variar de um dia para outro. Em alguns dias, pode haver mais vendas, enquanto em outros, menos vendas.

Dessa forma é necessário ampliar os horizontes e a identificar oportunidades para que a venda de trufas seja realmente uma alternativa rentável, seja para alcançar um objetivo ou até mesmo melhoria da qualidade de vida (**A2c**).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Há várias afirmativas de que a Modelagem contribui para uma aprendizagem com significado (BISOGNIN e BISOGNIN, 2021), no qual o estudante é protagonista da própria aprendizagem além de se tornarem cidadãos críticos, que refletem os problemas do mundo real utilizando os conceitos de matemática. Logo, é necessário verificar se realmente há aprendizagem de conceitos matemáticos e formação de um cidadão ativo.

Através da observação das diferentes concepções de Modelagem Matemática pode-se chegar a um consenso de que a mesma tem um objetivo investigativo que leva os alunos a buscarem formas de resolver determinado problema, com o auxílio de um mediador conduzindo-os a aumentar seus conhecimentos, contribuindo com o processo de aprendizagem de matemática. Isso ocorre através da contextualização promovida pela Modelagem que traz sentido ao que está sendo ensinado.

A Modelagem envolve a representação e o estudo de fenômenos reais por meio de conceitos e estruturas matemáticas. No caso específico da produção de trufas, a Modelagem permite analisar e compreender aspectos como a produção, as vendas e os lucros.

Através da Modelagem, é possível criar equações que relacionam variáveis como a quantidade de trufas produzidas, o preço de venda, os custos de produção e o lucro obtido. Essas equações podem ser utilizadas para prever a quantidade de trufas a serem produzidas, estimar os ganhos financeiros e tomar decisões estratégicas para maximizar os lucros.

Além disso, a Modelagem também permite simular diferentes cenários, testando diferentes estratégias de produção e venda. Isso auxilia os empreendedores a tomar decisões informadas e a identificar oportunidades de crescimento no negócio. Assim, a Modelagem Matemática na produção de trufas contribui para o desenvolvimento de uma noção de empreendedorismo, ao promover o pensamento analítico, a tomada de decisões baseada em dados e a busca por melhores resultados econômicos.

Essa conexão entre a matemática e o mundo real ajuda os alunos a perceberem a utilidade e a relevância da disciplina em suas vidas, tornando o aprendizado mais significativo. Eles percebem que a matemática não é apenas um conjunto de regras abstratas, mas sim uma ferramenta poderosa para compreender e solucionar problemas do cotidiano.

No caso da modelagem de produção de trufas, os estudantes são desafiados a aplicar os conceitos matemáticos, como proporções, equações, taxas e impostos, em situações reais de produção, vendas e lucros das trufas. Através dessa contextualização, os alunos podem atribuir sentido concreto aos conceitos matemáticos, identificando sua utilidade e encorajamento no contexto da produção de trufas.

Além disso, a TCC destaca a importância do papel do professor como mediador nesse processo de aprendizagem, auxiliando os alunos a entender nos conceitos matemáticos por meio das situações modeladas e promovendo o desenvolvimento de uma noção de empreendedorismo ao tomarem decisões tomadas em dados e análises matemáticas. Essa abordagem de ensino permite que os alunos se tornem protagonistas de sua própria aprendizagem e desenvolvam habilidades críticas ao resolver problemas reais usando a matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Jussara Loiola. Uma abordagem sócio-crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.55-68, jul. 2009.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Ser crítico em projetos de Modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v. 26, p. 839-859, 2012.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema-Boletim de Educação Matemática,** v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; PALHARINI, Bárbara Nivalda. Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema, Rio Claro (SP),** v. 26, n. 43, p. 907-934, ago. 2012.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **In: 24ª RA da ANPED**, Caxambu, 2001.

BARDIN, L. Análise de conteúdo. 3.reimp. da 1.ed. **Edição revista e ampliada. São Paulo: Edições 70, 2016.**

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia. 3. ed. 4a reimpressão. São Paulo: **Editora Contexto**, 2013.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia,** v. 2, n. 2, p. 07-32, 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem Matemática no Ensino. 5. ed. 4a reimpressão. **São Paulo: Editora Contexto**, 2014.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Percepções de professores sobre o uso da Modelagem Matemática em sala de aula. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 1049-1079, 2012.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Modelagem Matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa),** São Paulo, v. 12, p. 1-19, 2021.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Base.** Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 20 de Dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm > . Acesso em: 12 jun. 2023

BRITO, Dirceu dos Santos. e ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de.. Práticas de Modelagem Matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, v.21, n.1, p 1-29, 2021.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; NEHRING, Cátia Maria. Modelagem Matemática e Sequências Didáticas: uma relação de complementaridade. **Bolema (Rio Claro),** v. 30, p. 131-147, 2008.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; COMACHIO, Elisiane. OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS COM A MODELAGEM DE CONFECÇÃO DE CESTOS. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática,** v. 2, n. 2, p. 134-159, 2020.

BURAK. Dionísio. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem.** Tese de Doutorado. Campinas, Unicamp 1992.

DAVIS, Philip J; HERSH, Reuben. **A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA**. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa Franco. **Análise de conteúdo.** Brasília: Liber Livro, 2012.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; SOUZA, Ana Paula dos Santos; FORNER, Régis. Olhares de docentes sobre as possibilidades da Modelagem nas aulas de Matemática**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** [S. l.], v. 12, n. 2, p. 1–22, 2021.Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2925 >. Acesso em: 8 jun. 2023.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências.** V7(1), p. 7-29, 2002.

NEIDE, Italo Gabriel *et al.* PROBLEMATIZANDO EXPERIÊNCIAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS NO ENSINO MÉDIO. **Revista Dynamis,** [S.l.], v. 24, n. 1, p. 77-93, jul. 2018. ISSN 1982-4866. Disponível em: <https://proxy.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/6585>. Acesso em:24 abr. 2023.

PLAISANCE, Éric; VERGNAUD, Gérard. **As ciências da educação**. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. A Modelagem como um Ambiente de Aprendizagem para a Conversão do Conhecimento. **Bolema, Rio Claro (SP),** v. 26, n. 42A, p. 261-290, 2012.

SILVEIRA, Everaldo; CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 1021-1047, 2012.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. Papirus editora, 2001.

SKOVSMOSE, Ole. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D’AMBRÓSIO, Beatriz Silva.; LOPES, Celi Espasandin. (Org). Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. **Campinas/SP: Mercado de Letras,** 2015. p. 63–90.

VERGNAUD, Gérard; MOREIRA, Marco Antônio; GROSSI, Ester Pilar. **O que é aprender? O Iceberg da conceitualização.** Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, Gérard. La Teoría de Los Campos Conceptuales . **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, 1990. Dísponivel em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/122730/mod_resource/content/1/art_vergnaud_espanhol.pdf> Acesso em: 04 de abril de 2021.

Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil. **Portal MEC.** Dezembro 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil> . Acesso em: 22 mar. 2023