

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUAL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

MATEUS HENRIQUE ZEISER

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO COM APLICAÇÕES

CHAPECÓ
2023

MATEUS HENRIQUE ZEISER

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO COM APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing

CHAPECÓ

2023

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Zeiser, Mateus Henrique
INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO COM APLICAÇÕES /
Mateus Henrique Zeiser. -- 2023.
71 f.:il.

Orientador: Doutor em matemática aplicada Paulo
Rafael Bösing

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2023.

1. Cálculo Fracionário. 2. Integral de
Riemann-Liouville. 3. Derivada de Caputo. 4. Aplicações.
I. Bösing, Paulo Rafael, orient. II. Universidade
Federal da Fronteira Sul. III. Título.

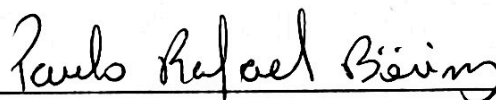
MATEUS HENRIQUE ZEISER

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO COM APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 11/07/2023.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing – UFFS
Orientador



Prof.^a. Dr.^a. Janice Teresinha Reichert – UFFS
Avaliadora



Prof. Dr. Milton Kist – UFFS
Avaliador

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo incentivo aos estudos e ao apoio durante esses anos de graduação, ao meu irmão que sempre me apoiou e foi o meu maior exemplo durante os anos em que estive na graduação.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo pelo incentivo, pelas orientações e pela sugestão do tema desse trabalho que me encantou e abriu várias portas para a continuação da minha carreira acadêmica.

Agradeço a todos os professores que nesses nove semestres da minha graduação de alguma forma me motivaram ou que acreditaram nos meus sonhos como matemático.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma revisão histórica do cálculo fracionário, descrevendo as principais definições e aplicações do tema desde seu início em 1695 até os dias atuais, comentando brevemente as publicações do tema no Brasil. São apresentados os pré-requisitos do cálculo fracionário, como a função gama, a função beta e a função de Mittag-Leffler. São definidas a integral fracionária de Riemann-Liouville e as derivadas fracionárias de Caputo e de Riemann-Liouville, as quais são exploradas com exemplos, que são comparados ao cálculo clássico. Diversas aplicações do cálculo fracionário são abordadas. Como: (i) a generalização fracionária das equações do decaimento radioativo e do crescimento populacional, que são aplicadas ao decaimento radioativo do césio-137 e do crescimento populacional do Brasil; (ii) a generalização da segunda lei de Newton para uma equação diferencial fracionária e resolvida para algumas ordens fracionárias; (iii) a generalização da equação logística para uma ordem arbitrária. Com a solução fracionária da equação logística é realizado um ajuste de curva envolvendo os infectados pela Covid-19 na cidade de Chapecó-SC.

Palavras-chave: Cálculo fracionário. Integral de Riemann-Liouville. Derivada de Caputo. Aplicações.

ABSTRACT

This paper presents a historical review of fractional calculus, describing the main definitions and applications of the theme since its inception in 1695 to the present day, briefly commenting on publications on the subject in Brazil. Prerequisites for fractional calculus are presented, such as the gamma function, the beta function, and the Mittag-Leffler function. The Riemann-Liouville fractional integral and the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives are defined and explored with examples compared to classical calculus. Several applications of fractional calculus are covered as: (i) the fractional generalization of the radioactive decay and population growth equations, which are applied to the radioactive decay of cesium-137 and population growth in Brazil; (ii) the generalization of Newton's second law to a fractional differential equation and solved for some fractional orders; (iii) the generalization of the logistic equation to an arbitrary order. With the fractional solution of the logistic equation, a curve fitting is performed involving those infected by Covid-19 in Chapecó-SC.

Keywords: Fractional calculus. Riemann-Liouville integral. Derivative of Caputo. Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O desenvolvimento do Cálculo Fracionário apresentado em uma linha de tempo	10
Figura 2 – As funções de Mittag-Leffler com os parâmetros $\alpha \in \{0.8, 1, 1.5, 2, 3\}$	27
Figura 3 – As integrais de ordem $1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{6}; \frac{5}{2}$ de x^3	32
Figura 4 – As derivadas de ordem $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$ de x^3	44
Figura 5 – Generalização da segunda lei de Newton	52
Figura 6 – Decaimento radioativo com os parâmetros $\alpha \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$	56
Figura 7 – Crescimento populacional do Brasil com $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$	58
Figura 8 – Crescimento populacional de uma população com 2000 indivíduos com $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$	60
Figura 9 – Ajuste de curvas dos infectados por covid-19 em Chapecó-SC	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CÁLCULO FRACIONÁRIO .	10
2.1	O CÁLCULO FRACIONÁRIO NO MUNDO	10
2.2	O CÁLCULO FRACIONÁRIO NO BRASIL	16
3	AS FUNÇÕES GAMA, BETA E DE MITTAG-LEFFLER . .	19
3.1	FUNÇÃO GAMA	19
3.2	FUNÇÃO BETA	23
3.3	FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER	26
4	INTEGRAL FRACIONÁRIA	28
4.1	INTEGRAL DE RIEMANN-LIOUVILLE	28
5	DERIVADAS FRACIONÁRIAS DE RIEMANN-LIOUVILLE E CAPUTO	36
5.1	DERIVADA FRACIONÁRIA DE RIEMANN-LIOUVILLE	36
5.2	DERIVADA FRACIONÁRIA DE CAPUTO	39
6	APLICAÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO	47
6.1	GENERALIZAÇÃO DA SEGUNDA LEI DE NEWTON	47
6.2	GENERALIZAÇÃO FRACIONÁRIA DO DECAIMENTO RADIOA- TIVO	53
6.2.1	Decaimento radioativo do Césio-137	54
6.3	CRESCIMENTO POPULACIONAL	57
6.3.1	Crescimento populacional do Brasil	57
6.3.2	Crescimento populacional de uma população arbitrária	58
6.4	EQUAÇÃO LOGÍSTICA	60
6.4.1	Generalização Fracionária	62
6.4.2	Ajuste de curva com a solução fracionária da equação logística	63
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo de Ordem Arbitrária é conhecido atualmente como Cálculo Fracionário-CF, pois em sua fase inicial, a primeira menção a uma derivada de ordem não inteira foi feita com uma derivada de meia ordem. Posteriormente se desenvolveu a possibilidade de estender as derivadas para qualquer ordem, ou seja, inteira, fracionária, e até mesmo complexa.

A motivação pela escolha do CF como tema deste trabalho de conclusão de curso se deu pela inquietação gerada com o cálculo tradicional, que possibilita apenas integrações e derivações de ordem inteira. Também, pelo impopularidade das derivadas e integrais de ordem arbitrária. A escolha pelo Cálculo de ordem arbitrária também passa pelo interesse do orientando na aplicação da matemática, mais precisamente com os conceitos do cálculo diferencial e integral.

Com este trabalho pretende-se explicar como os estudos em cálculo de ordem não inteira evoluíram desde Leibniz e L'Hôpital até a atualidade no que tange seu desenvolvimento matemático.

No Capítulo 2 é realizada uma revisão histórica do CF, desde seus primórdios até os dias atuais, considerando as definições e formulações mais importantes produzidas. Essa seção inicial é uma introdução ao tema, de modo que o leitor perceba a importância desse assunto que é visto como o cálculo da modernidade. O conceito do CF, pode ser comparado a mudança necessária na antiguidade, com o surgimento dos números racionais para suprir as lacunas deixadas com os números inteiros (CARVALHO; OTTONI, 2018).

No Capítulo 3 são apresentadas algumas funções que são vistas como pré-requisitos para o CF, como a função gama que é conhecida como fatorial generalizada, a função beta que também é chamada de integral de Euler de primeiro tipo, e a função de Mittag-Leffler que é conhecida como a generalização da exponencial.

No Capítulo 4 é apresentada a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville, e em um capítulo subsequente as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Michele Caputo. A última é uma das definições mais utilizadas e aplicáveis das derivadas fracionárias (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) por esse motivo ela será a definição adotada nesse trabalho.

No Capítulo 5 é feita uma comparação entre a derivada fracionária de Caputo e a derivada fracionária de Riemann-Liouville, mostrando que a derivada de uma constante é igual a zero com a formulação de Caputo, o que não acontece com a de Riemann-Liouville.

A partir das definições de integral e derivada fracionária serão resolvidas algumas integrais fracionárias, como da funções seno, cosseno, exponencial, polinômiais e algumas derivadas fracionárias como das funções seno, cosseno, exponencial, de polinômios e da função constante. Na resolução dessas derivadas e integrais fracionárias é realizada uma

comparação com o cálculo clássico e é evidenciado que a derivada e integral fracionária de primeira ordem coincide com a resolução do cálculo clássico.

As primeiras aplicações do CF são datadas do início do século XX, com o passar do tempo a utilização do cálculo de ordem arbitrária ganhou mais força, principalmente com o avanço dos meios de comunicações. Atualmente, o CF é utilizado por exemplo em problemas matemáticos envolvendo equações diferenciais fracionárias, que buscam otimizar resultados encontrados com equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 6 são apresentadas algumas aplicações do CF, como a generalização da segunda lei de Newton, do decaimento radioativo, do crescimento populacional e da equação logística. Nessas aplicações são comparadas as soluções inteiras das equações diferenciais com as suas soluções fracionárias, ou de modo equivalente, comparando os resultados obtidos com o cálculo fracionário com os resultados do cálculo clássico.

A primeira aplicação do CF é a generalização da segunda lei de Newton, obtendo soluções para equações fracionárias intermediárias a solução clássica de primeira ordem (velocidade), a solução de segunda ordem (aceleração) e a solução de terceira ordem (conhecida como jerk). A segunda aplicação é uma simulação envolvendo o Césio-137 e seu decaimento radioativo, envolvendo a solução clássica e também algumas soluções fracionárias.

A terceira aplicação é a generalização do crescimento populacional, que é aplicado ao crescimento da população brasileira. A última aplicação é a generalização da equação logística e consiste em um ajuste de curva envolvendo a sua solução fracionária, aplicada ao número de infectados pela Covid-19 no início do pandemia no ano de 2020, em Chapecó-SC.

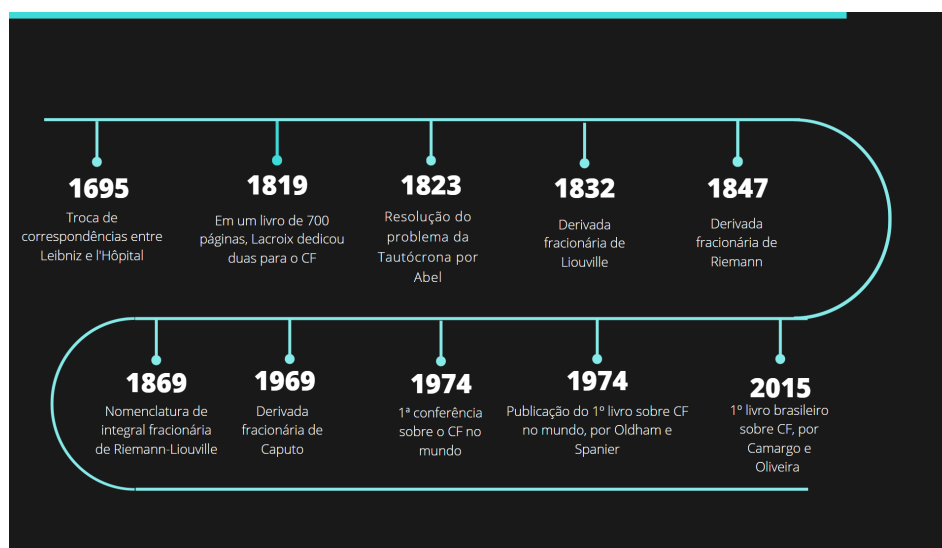
2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo será apresentada uma revisão histórica do CF, se dividindo em duas seções. A primeira é relacionada ao desenvolvimento do Cálculo fracionário no mundo, e a segunda a sua evolução no Brasil.

2.1 O CÁLCULO FRACIONÁRIO NO MUNDO

Nessa seção serão apresentadas as contribuições mais relevantes para o desenvolvimento do cálculo fracionário, as mais importantes podem ser conferidas na Figura 1 que busca sintetizá-las.

Figura 1 – O desenvolvimento do Cálculo Fracionário apresentado em uma linha de tempo



Fonte: Os autores, 2023.

A ideia por trás do CF se originou durante o desenvolvimento simbólico do cálculo tradicional com Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643- 1727).

O primeiro registro é de 1695 em uma troca de correspondências entre Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital (1661-1704), e Leibniz (OLDHAM; SPANIER, 1974) que é explicado por Camargo e Oliveira (2015, p.5).

Leibniz formulou uma questão envolvendo uma possível generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem em princípio, arbitrária. L'Hôpital devolveu a pergunta para Leibniz. Questionando-o no caso particular em que a ordem da derivada fosse meio. Em uma audaciosa e profética resposta, Leibniz apresenta o resultado e afirma: isto é, aparentemente, um paradoxo que um dia vai gerar várias consequências importantes. Assim tem início o Cálculo Fracionário.

A formulação proposta por Leibniz consiste na substituição da ordem de derivação inteira positiva n , por q , que pode assumir valores reais ou complexos. A generalização proposta por Leibniz é descrita da seguinte forma:

$$D_x^q[y(x)] = y^q(x) = \frac{d^q}{dx^q}y(x).$$

A nomenclatura do Cálculo de ordem não inteira como Cálculo Fracionário pode ser justificada pela pergunta feita por L'Hôpital a Leibniz, que foi apresentada anteriormente. Essa pergunta envolvia uma derivada de meia ordem, não considerando outras possibilidades, como números complexos ou irracionais (OLIVEIRA, 2018).

Outra ocorrência do uso do CF aconteceu em uma correspondência trocada em 1697 entre Leibniz e John Wallis (1616- 1703). O apontamento feito por Leibniz foi que o produto infinito de Wallis¹ para o número π poderia ter sido resolvido através de uma derivada de meia ordem (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Em 1730 Leonhard Euler (1707-1783) incomodado com a ideia de generalizar a hipótese da ordem da derivada, escreveu em uma dissertação que o entendimento poderia ser melhor explicado com o auxílio de interpolações na derivada (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Muito tempo depois, em 1772 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) contribuiu de forma indireta com o CF, quando desenvolveu a lei dos expoentes, apresentada a seguir. (CAMARGO, 2009).

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{(m+n)}y}{dx^{(m+n)}}.$$

No momento em que essa formulação foi desenvolvida ainda não estava demonstrado que m e n podem assumir valores arbitrários, em uma função $y(x)$, ou seja, o uso da lei não é correto do ponto de vista matemático. Posteriormente foi demonstrado que essa lei não é válida em algumas situações, e mesmo assim contribuiu diretamente para o desenvolvimento do CF (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

No século XVIII, em 1812, Pierre Simon Laplace (1749-1827) definiu a derivada fracionária como uma integral (TORRELLI, 2021). Silvestre François Lacroix (1765-1843), em 1819, foi o primeiro matemático a citar as derivadas de ordem arbitrária em um livro. Das 700 páginas do livro, a derivada de ordem fracionária esteve presente em duas páginas. A definição feita por Lacroix consiste em obter a n -ésima derivada para um monômio $y(x) = x^m$ com $m \in \mathbb{Z}$, com $m \leq 0$ e $n \leq m$ como (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Substituindo o fatorial pela função Gama, n por α e m por β , com α e β fracionários, obtém-se a derivada fracionária para monômios, proposta por Lacroix (CAMARGO; OLI-

¹ O produto infinito de wallis para π é dado por: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 43 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots = \frac{\pi}{2}$

VEIRA, 2015).

$$\frac{d^n \cdot x^m}{dx^n} = D^\alpha[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{(\beta - \alpha)}.$$

Jean Baptista Joseph Fourier (1768-1830) em 1822 também contribuiu com o desenvolvimento do cálculo fracionário e deu um significado para derivadas de ordem $n = 1, 2, 3, \dots$ de uma função real f . A derivada de ordem n arbitrária foi definida por Fourier através de uma integral da seguinte forma (TORRELLI, 2021).

$$D^n[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos(x) \left[t(x - \xi) + \frac{n\pi}{2} \right] dt,$$

Após longos anos de estudos e desenvolvimento do CF, Niels Henrik Abel (1802 – 1829) em 1823 o aplicou para resolver o problema da Tautócrona. Que consiste em determinar a forma de uma curva lisa C^2 , dada pelo gráfico da função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $a < 0 < b$ e $f(0) = 0$. Tal que, uma partícula qualquer que caia sobre a curva C e esteja sujeita a ação da gravidade, não importando qual o ponto inicial de contato com a curva, leva o mesmo tempo para atingir o ponto $(b, f(b))$ (OLDHAM; SPANIER, 1974).

A solução do problema consiste em considerar que a derivada de uma função constante não é sempre nula no CF, fato que depende da formulação utilizada para resolver o problema (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Um exemplo pode ser visto a seguir, onde uma função constante é aplicada na formulação de Lacroix e não resulta em zero (OLDHAM; SPANIER, 1974).

$$\frac{d^{(\frac{1}{2})}}{dt^{(\frac{1}{2})}}(1) = (\pi t)^{(-\frac{1}{2})}.$$

Após a aplicação de Abel o CF não foi desenvolvido por quase uma década, somente com Joseph Liouville (1809-1882) em 1832 novos resultados foram publicados. Acredita-se que Liouville tenha se inspirado na aplicação de Abel e na integral de Fourier. Liouville teria formulado duas definições para a derivada fracionária, a primeira com bastante restrições somente podendo ser utilizado em determinada classe de funções (MILLER; ROSS, 1993).

Para tentar amenizar as restrições, Liouville definiu uma segunda formulação baseada na integral da função gama, que é apresentada a seguir, com $z = a + bi$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

A partir da função gama Liouville formulou a definição de derivada fracionária, como:

$$D^\alpha[x^{-a}] = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha + a)}{\Gamma(a)} \right) \cdot x^{(-\alpha - a)},$$

em que, α é fracionário e $a > 0$ (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

² Uma curva C é lisa quando a derivada da parametrização da curva C é contínua e diferente de zero.

Com essa formulação Liouville apresentou uma definição útil para funções complexas com a parte real maior que zero. Liouville também foi o primeiro a tentar resolver equações diferenciais com operadores fracionários. A solução feita por Liouville em uma de suas anotações consistia em encontrar uma função complementar (MILLER; ROSS, 1993).

Em 1847, Georg Friedrich Bernard Riemann, (1826-1866) em um artigo que escreveu durante a sua graduação definiu a derivada fracionária. Após sua morte um trabalho seu foi publicado, em que apresentava a definição de integral fracionária a partir de uma generalização da série de Brook Taylor (1685-1731). A integral definida por Riemann é conhecida atualmente como integral fracionária de Riemann-Liouville e será apresentada a seguir. O motivo desse nome conjunto é a semelhança entre as definições que Riemann e Liouville publicaram e também a unificação das definições, que foi feita posteriormente (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

$$\frac{d^{-y}}{dx^{-y}}[u(x)] = \frac{1}{\Gamma(y)} \int_c^x (x-k)^{y-1} u(k) dk + \Psi(x),$$

sendo $u(x)$ uma função qualquer.

Com $\Psi(x)$ sendo uma função complementar, que busca resolver a ambiguidade que a derivada de Liouville apresentava no limite inferior c da integração. Posteriormente essa definição foi ajustada e melhorada, de modo que se tornasse mais acessível, pois a função complementar dificultava o uso da integral (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Em 1880 Arthur Cayley (1821- 1895) buscou rescrever a integral fracionária de Riemann-Liouville, removendo a função complementar $\Psi(x)$. O resultado obtido pode ser conferido a seguir, com $\Re(\alpha) > 0$ (OLIVEIRA, 2018).

$${}_c I_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (y-x)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

Sendo I^α um operador integral de ordem $\alpha \in \mathbb{R}_+$, e $f(x)$ uma função. Uma observação importante é que quando $c = 0$ tem-se a definição de Riemann para integral fracionária e quando $c = -\infty$ tem-se a definição de Liouville para a derivada fracionária (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Anton Karl Grunwald (1838-1920) em 1867 unificou os resultados de Riemann e Liouville e a partir das limitações dessas definições definiu uma derivada fracionária. Que após algumas contribuições de Aleksey Vasilievich Letnikov (1837-1888) passou a ser chamada de derivada fracionária de Grunwald-Letnikov (OLIVEIRA, 2018). Grunwald definiu a derivada se baseando em um limite de um quociente de diferenças, e Letnikov contribuiu para o melhoramento da definição. “A importância da derivada de Grunwald-Letnikov, entre outras razões reside no fato de ter ampla aplicabilidade em problemas numéricos” (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p.68).

A nomenclatura de integral fracionária de Riemann-Liouville foi influenciada por um trabalho feito por Nicolay Yakovlevich Sonin (1849-1915) que em 1869 utilizou uma função

integral de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) para formular a derivada de ordem n de uma função analítica (OLIVEIRA, 2010).

Uma grande mudança na aplicabilidade do CF aconteceu com Oliver Heaviside (1850-1925), que durante as últimas décadas do século XIX publicou vários artigos aplicando o CF em equações diferenciais lineares através do uso de operadores generalizados (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Esses métodos foram utilizados por Heaviside para resolver problemas na físico-matemática, como o de transmissão de correntes elétricas em cabos e alguns problemas da teoria do eletromagnetismo (OLIVEIRA, 2018).

No século XX, no período de 1900 a 1970 há pouco desenvolvimento do CF, se comparado ao período posterior a década de 70 (MILLER; ROSS, 1993). Nesse período houve grande contribuição da derivada fracionária de Hermann Krauss Hugo Weyl (1885-1955) que é definida por (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), como:

$$D[w^\alpha f(t)] = w^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x+t) dx.$$

Em 1919 Thomas John Ianson Bromwich (1875-1929) demonstrou que os resultados de Heiviside estavam corretos, o que não havia sido feito por ele. Acredita-se que Heaviside não os tenha demonstrado pela sua inexperiência como cientista (OLIVEIRA, 2018). Em 1936, Harold Thayer Davis (1892-1974) descreveu a teoria dos operadores lineares com o CF e suas aplicações no livro "The Theory of Linear Operators" (DAVIS, 1936).

Até 1970 algumas outras contribuições se destacaram, mas não foram tão relevantes como as que vieram a ser desenvolvidas a partir da década de 70. Camargo e Oliveira (2015, p. 21) destacam que “foram muitos os pesquisadores que contribuíram para o tema, porém, a maioria dos cientistas, em particular os engenheiros, não levaram a sério o CF”.

A partir de 1970 o uso do CF começou a mudar, devido a grande variedade de definições para derivadas e integrais fracionárias o seu uso era restrito e visto como um campo da matemática pura, e muito abstrato. Na década de 70 várias aplicações começaram a surgir transformando o CF em uma área muito utilizada e discutida.

Em 1969 Caputo propôs uma nova derivada de ordem arbitrária, conhecida hoje como derivada de Caputo. A definição de Caputo consiste em efetuar uma derivada de ordem inteira e posteriormente uma integral de ordem arbitrária, justamente o inverso da formulação de Riemann-Liouville (CARVALHO; OTTONI, 2018). A definição dada por Caputo pode ser conferida a seguir:

$${}^C D_x^\beta [f(x)] = {}_c I_x^v D^n [f(x)],$$

em $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(\beta) > 0$, n o menor inteiro maior que $\Re(\beta)$ e $v = n - \beta$, o que implica que $0 < \Re(v) \leq 1$. Também é necessário que $x > 0$, onde ${}_c I_x^v$ é a integral de Riemann-Liouville de ordem v avaliada em $f(x)$ e c é uma constante.

A formulação de Caputo é parecida com a conhecida definição de Riemann-Liouville. Um dos pontos positivos da derivada fracionária de Caputo é a derivada de qualquer função

constante ser nula, o que não acontece na derivada de Riemann-Liouville. O fato de não se ter sempre uma derivação nula ao derivar uma função constante causa alguns problemas quando se busca interpretar a derivada como uma taxa de variação, ou seja, a formulação de Riemann-Liouville não pode ser representada fisicamente de forma imediata, diferente da definição de Caputo que pode ser representada de maneira imediata quando aplicada a transformadas integrais. Nessa definição também não se faz necessário o uso de uma função complementar (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015)

Em 1971, Caputo e Mainardi aplicaram a definição da derivada fracionária de Caputo em um trabalho, em que estudam a dissipação em sólidos, que pode ocorrer de duas formas. A primeira conhecida como: histerese estática, que é caracterizada pela independência entre a perda de energia por ciclos de materiais e a frequência deles. Acredita-se que a perda tenha alguma associação, com a tensão e a deformação não linear do material que gera a perda de energia. A segunda conhecida como: viscosidade, é caracterizada pela perda de energia associada aos gradientes de velocidade, que são estabelecidos pela vibração (CAPUTO; MAINARDI, 1971).

Após a definição de Caputo o CF passou a se desenvolver a passos largos, as inovações tecnológicas e de comunicação também contribuíram para isso. Em 1974 aconteceu a primeira conferência internacional dedicada ao CF, organizada por Bertram Ross (1917-1993) em New Haven, nos Estados Unidos, que foi patrocinada pela Fundação Nacional de Ciência (MILLER; ROSS, 1993). Esta conferência é apontada por Camargo e Oliveira (2015) como a grande contribuição ao CF no século XX, pois a partir dela o tema se difundiu e o número de pesquisadores dedicados ao tema cresceu significativamente, estimulando uma grande quantidade de publicações.

Atualmente a definição de Caputo é muito utilizada em várias áreas do conhecimento, principalmente no estudo de equações diferenciais de ordens arbitrárias, que possuem dependência temporal. Muitas vezes as equações diferenciais fracionárias são utilizadas para refinar o resultado de algumas aplicações, como pode ser feito com o decaimento radiativo e com a equação logística (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Nesse mesmo ano foi publicado o primeiro livro dedicado exclusivamente ao CF, elaborado por Oldham e Spanier (1974). O livro tem uma seção que apresenta uma revisão histórica, que foi feita por Ross e com aplicações do cálculo de ordem arbitrária, na Química e Física. Na revisão histórica feita por Ross, são expostos os números de artigos publicados entre 1695 e 1974, sendo mais de 150.

A segunda conferência internacional sobre o CF aconteceu em 1984, na University of Strathclyde, em Glasgow na Escócia, que também foi organizada por Ross, a seu andamento foi semelhante ao da primeira edição. O que a diferencia da primeira é a pergunta que ficou após conferência, que se baseia na possibilidade de achar uma interpretação geométrica para a derivada fracionária, pergunta que motivou vários novos pesquisadores a se dedicarem ao assunto, conseqüentemente aumentando a quantidade de trabalhos

(CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

A terceira conferência internacional sobre o CF foi realizada em 1989, na Universidade de Nihon, Tokyo, Japão. O motivo dela ter sido realizada nesse local era o centésimo aniversário da Universidade. Ao fim da conferência um problema foi proposto aos participantes, que pedia qual a dimensão fracionária do metrô de Tokyo (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Em 1993 Miller e Ross publicam um livro dedicado as equações diferenciais fracionárias, nele foi feito um levantamento que afirma que entre 1974 e 1993 foram publicados mais de 400 artigos sobre o CF (MILLER; ROSS, 1993). Totalizando mais de 550 artigos entre 1695 e 1993.

Em 1998 Carl Lorenzo e Tom Hartley propuseram uma interpretação geométrica para a derivada fracionária de Grunwald-Letnikov, através da análise numérica. Nesse mesmo ano Virginia Kiryakova cria a revista FCAA- Fractional Calculus and Applied Analysis, que é exclusiva para publicações sobre o CF (OLIVEIRA, 2018).

Em 1999 Igor Podlubny publica o livro Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Que pode ser visto como uma introdução ao CF (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

No ano de 2006 Anatoly Alexandrovich Kilbas, Hari Mohan Srivastava e Juan José Trujillo publicam um livro onde várias aplicações do CF podem ser encontradas em relação a teoria do cálculo integral e diferencial (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

Após esse ano vários outros livros e artigos são publicados no mundo, que podem ser conferidos na revisão histórica feita por Camargo e Oliveira (2015) em seu livro Cálculo Fracionário e na dissertação de Oliveira (2018): Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas.

Atualmente existem revistas e sites que se dedicam exclusivamente ao Cálculo Fracionário, em consulta feita na internet, buscando por sites, revistas ou jornais sobre o CF, foram encontradas: A revista Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA)³ com início em 1998, do Instituto de Matemática e Informática da Academia de Ciências da Bulgária. O site Fractional Calculus Modelling (FRACALMO)⁴ com início em 2010 e a revista Fractional Differential Calculus (FDC)⁵, com início em 2011.

2.2 O CÁLCULO FRACIONÁRIO NO BRASIL

O primeiro autor a mencionar o CF no Brasil, foi Aguinaldo Prandini Ricieri em 1992, publicou um livro com o título: *Derivada Fracionária, Transformada de Laplace e Outros Bichos* (RICIERI, 1993).

³ Disponível em: <http://www.math.bas.bg/~fcaa/>

⁴ Disponível em: <http://www.fracalmo.org/>

⁵ Disponível em: <http://fdc.ele-math.com/>

No final do século XX também foram realizados estudos sobre o CF em um grupo de físicos, liderado pelo professor Ervin Kaminski Lenzi, os trabalhos desse grupo se retem aos seguintes temas: Aspectos das equações de difusão e difusão anômala (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Em 2009 Rubens Figueiredo Camargo apresenta sua tese de doutorado orientada por Edmundo Capelas de Oliveira com o título *Cálculo Fracionário e Aplicações* que faz um estudo completo sobre a derivada e integral fracionária (CAMARGO, 2009).

Heron Silva Oliveira em 2010 apresenta sua dissertação de mestrado com o título *Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária* onde é feita uma revisão histórica bem detalhada e pode ser visto como um bom material para iniciar os estudos no CF (OLIVEIRA, 2010). Ainda em 2010 Francesco Mainardi, uma das grandes referências mundiais do CF, visitou a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) para ministrar um minicurso e estabeleceu uma colaboração com a Universidade para estudar a completa monotonicidade de uma função e problemas de viscoelasticidade (OLIVEIRA, 2018).

Em 2011, Felix Silva Costa defendeu sua tese orientada por Edmundo Capelas de Oliveira, que relacionava a função H de Fox com aplicações no Cálculo Fracionário (COSTA, 2011).

Em 2015, Rubens Figueiredo Camargo e Edmundo Capelas de Oliveira publicaram o primeiro livro dedicado exclusivamente ao Cálculo Fracionário no Brasil. O livro apresenta uma revisão histórica, o desenvolvimento de formulações como a de Caputo, Riemann-Liouville, de Weyl e de Grunwald-Letnikov, entre outras. Também conta com exemplos de aplicações e exercícios sobre o assunto (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

A partir do lançamento desse livro, outras dissertações e teses foram apresentadas, praticamente em sua maioria sendo orientadas por Edmundo Capelas de Oliveira, ou um de seus orientandos, Rubens Figueiredo e Felix Silva Costa. Diante disso, pode se dizer que Oliveira é um dos grandes responsáveis pela difusão do CF no Brasil.

Em consulta a Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações feita no início de março de 2023 foram encontradas 51 teses ou dissertações, utilizando um filtro que restringia os trabalhos a apresentarem o termo Cálculo Fracionário em seu título, no resumo ou nas palavras-chave. Buscando encontrar a evolução em pesquisas após o livro de Camargo e Oliveira (2015) foi utilizado o seguinte filtro, teses e dissertações posteriores a 2015 e foram encontrados 34 trabalhos, o que mostra novamente a importância do livro publicado. Como exemplo se tem a dissertação de (OLIVEIRA, 2018) e de (TORRELLI, 2021). Em comparação com outros países, ainda há muito a progredir, visto que atualmente há poucos grandes centros de pesquisa no assunto. Como referência tem-se a da Unicamp, liderado por Edmundo Capelas de Oliveira.

A produção de artigos sobre o Cálculo Fracionário é bem restrita, em consulta ao portal de periódicos da Capes e buscando pelo termo “Cálculo Fracionário” são encontrados 12 artigos, entre os quais somente cinco apresentam o termo em seu título. Sendo os

seguintes artigos: - Uma introdução ao cálculo fracionário e suas aplicações em circuitos elétricos, que explica como o CF pode ser aplicado em circuitos elétricos (ANDRADE; LIMA; DARTORA, 2018). - Método de diferenças finitas não local aplicado ao cálculo fracionário. Que consiste em apresentar um método numérico para aproximar soluções de equações diferenciais fracionárias (CARDOSO; SANTOS; CAMARGO, 2016).

- Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona que busca discutir e resolver o problema da tautócrona, assim como fez Abel (RAMOS; CAMARGO, 2012).

- Solução da equação de Bessel via cálculo fracionário. Nesse trabalho é estudado um caso particular de equação hipergeométrica confluyente, a equação de Bessel, com ordem p , onde se utiliza o cálculo de ordem não inteira para resolver o problema (RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015a).

- Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática, que busca introduzir formas de utilizar o cálculo de ordem não inteira em problemas físico-matemáticos (RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015b).

Em consequência dos poucos resultados obtidos no portal de periódicos da Capes, uma busca foi realizada no Google Acadêmico utilizando o mesmo filtro, o termo “Cálculo Fracionário” no título. Como resultado foram encontrados 64 trabalhos, sendo 24 artigos ou trabalhos submetidos a eventos, os outros 40 trabalhos são teses, dissertações, monografias ou resumos. Os artigos em sua maioria buscam explicar algumas características do CF e também suas aplicações.

- O artigo “Introdução ao Cálculo Fracionário com aplicações” explica algumas definições e mostra algumas aplicações do CF (CARVALHO; OTTONI, 2018). No artigo “Elementos do Cálculo Fracionário” são apontados os pré requisitos do CF, como a função gamma e também como resolver equações diferenciais fracionárias (TIEPPO; GUZZO, 2018).

- Um trabalho apresentado no XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – SBMAC, com o título “Sobre o efeito de memória no cálculo fracionário”, destaca o fenômeno do efeito da memória do CF, explicando como a derivada fracionária depende de seu passado (LOPES et al., 1997).

Diante desse crescimento nas publicações sobre o cálculo de ordem não inteira, pode se dizer que nos últimos anos a popularidade do CF vem aumentando, destacando a sua importância para a Matemática e as outras ciências.

3 AS FUNÇÕES GAMA, BETA E DE MITTAG-LEFFLER

Os principais pré-requisitos do CF são as funções gama, beta e Mittag-Leffler, também é necessário ter um bom domínio do cálculo tradicional, em particular da derivada, integral, e da noção de limite. A função gama é fundamental na definição da integral e derivada fracionária, já a função beta é importante para várias demonstrações e cálculos de integrais e derivadas fracionárias. A função de Mittag-Leffler é essencial nas resoluções de equações diferenciais fracionárias.

3.1 FUNÇÃO GAMA

A função gama foi definida de várias formas ao longo da história, três merecem destaque: a definição de Euler, a de Gauss, e a de Weierstrass. Pela praticidade da definição, em forma de integral, é utilizada a definição de Euler nesse trabalho. E também por ela estar vinculada as definições de integral e derivadas fracionárias utilizadas nesse trabalho. Gauss define a função gama como um processo de limite e Weierstrass a define como um produto infinito (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

A função gama também é chamada de fatorial generalizado, esse termo se justifica pela função generalizar o fatorial para qualquer valor real diferente dos inteiros negativos. Como a função gama tem uma relação com o fatorial se faz necessário definir o fatorial de n .

Definição 1 *Fatorial de n .*

Seja $n \in \mathbb{N}$, o fatorial de n denotado por $n!$ é definido da seguinte forma:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\dots(2)(1).$$

A Definição 1 pode ser reescrita em função de uma integral imprópria, conforme a definição a seguir:

Definição 2 *Fatorial de Euler.*

Seja $n \in \mathbb{N}$, o fatorial de Euler é definido como:

$$n! = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx. \quad (3.1)$$

A integral de (3.1) pode ser simplificada utilizando a seguinte substituição: $t = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, o que implica que $t = -\ln(x)$, assim, $-t = \ln(x)$. Aplicando a função exponencial tem-se que: $e^{-t} = e^{\ln(x)}$. Dessa forma quando $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0$. Simplificando, como $x = e^{-t}$, então $dx = -e^{-t}dt$. Substituindo em 3.1, obtém-se: $n! = -\int_{\infty}^0 t^n e^{-t}dt$, invertendo os limites da integração, tem se a definição a seguir:

Definição 3 *Fatorial de Euler como uma integral imprópria.*

Seja $n \in \mathbb{N}$, o fatorial de Euler como uma integral imprópria é definida como:

$$n! = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^n e^{-t} dt. \quad (3.2)$$

A função gama pode ser definida a partir da relação $\Gamma(n+1) = n!$ e de (3.2), onde n é substituído por um número complexo da forma $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Assim a função Gama pode ser escrita como:

Definição 4 *Função Gama com expoente complexo.*

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(z) > 0$, define-se a função gama de z , denotada por $\Gamma(z)$, como:

$$\Gamma(z) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Para os propósitos do cálculo fracionário é sempre sugerido que se adote um número $p \in \mathbb{R}$, com $p > 0$, na Definição 4. Assim a função gama pode ser reescrita como:

Definição 5 *A representação da Função Gama com expoente real.*

Seja $p \in \mathbb{R}$ com $p > 0$, define-se a função gama com expoente real como:

$$\Gamma(p) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^{p-1} e^{-t} dt.$$

A função gama também pode ser reescrita de algumas outras formas, a primeira pode ser encontrada substituindo $t = u^2$ na Definição 4, assim $dt = 2udu$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w u^{2z-2} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w u^{2z} u^{-2} e^{-u^2} u^1 du \\ &= 2 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w u^{2z-1} e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A segunda forma pode ser encontrada substituindo e^{-t} por u em (4), então $-e^{-t} dt = du$, o que implica que, $dt = \frac{du}{-e^{-t}}$, como $e^{-t} = u$ aplicando a função logarítmica segue que, $\ln(e^{-t}) = \ln(u)$, implicando em $t = \ln\left(\frac{1}{u}\right)$. Observe que quando $t \rightarrow 0$ tem-se que $u \rightarrow 1$, e quando $t \rightarrow \infty$ tem-se que $u \rightarrow 0^+$. Aplicando essas substituições é obtida a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_1^0 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{z-1} \frac{u}{-u} du = \\ &= - \int_1^0 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{z-1} du. \end{aligned}$$

Invertendo os limites de integração se obtém:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{z-1} du.$$

A função gama tem a seguinte propriedade, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, com a qual é possível usar um resultado conhecido de um número para encontrar o seguinte, que será demonstrado a seguir:

Teorema 1 *Seja $z \in \mathbb{C}$ então $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$*

Demonstração:

Pela Definição 4,

$$\Gamma(z+1) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^{(z-1+1)} e^{-t} dt = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^z e^{-t} dt.$$

Aplicando integração por partes, com $u = t^z$, $dv = e^{-t} dt$. Assim, $du = zt^{z-1} dt$ e $v = -e^{-t}$, obtém-se que:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{w \rightarrow \infty} \left[-t^z e^{-t} \Big|_0^w - \int_0^w -e^{-t} zt^{z-1} dt \right],$$

como $t^z e^{-t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $-t^z = 0$ quando $t = 0$ tem se:

$$\Gamma(z+1) = 0 + z \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Portanto,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

□

Exemplos da função Gama:

Exemplo 1 *Calcule $\Gamma(1)$ pela definição.*

Resolução:

$$\Gamma(1) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^{1-1} e^{-t} dt.$$

Como é uma integral imprópria:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w t^0 e^{-t} dt = \lim_{w \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^w = \lim_{w \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{e^w} + 1 \right) = \\ &= 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Como citado anteriormente, o Teorema 1 pode ser utilizado para encontrar outros valores para a função gama, a partir de $\Gamma(1)$.

Exemplo 2 *Determine os valores de $\Gamma(2), \Gamma(3), \dots, \Gamma(n+1)$, utilizando Teorema 1 e o Exemplo 1.*

Resolução:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1! \\
 \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2! \\
 \Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \\
 \Gamma(5) &= \Gamma(4+1) = 4\Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! \\
 &\vdots \\
 \Gamma(n-1) &= \Gamma((n-1)-1+1) = (n-2)\Gamma(n-2) = (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-2)! \\
 \Gamma(n) &= \Gamma(n-1+1) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)! \\
 \Gamma(n+1) &= \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

□

Observação Assim, foi demonstrada a propriedade $n! = \Gamma(n+1)$, citada no início dessa seção.

Exemplo 3 *Determine $\Gamma(\frac{1}{2})$ pela definição.*

Resolução:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

Substituindo $t = u^2$, tem-se que $dt = 2udu$. Se $t = 0$, então $u = 0$, e se $t = w$ então $u = \sqrt{w}$ assim:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{w}} 2e^{-u^2} u^{-1} u^1 du = 2 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{w}} e^{-u^2} du$$

. Integral que pode ser reescrita elevando ambos os lados ao quadrado,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w e^{-u^2} du \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-v^2} dv.$$

Assim:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \lim_{w \rightarrow \infty} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^w \int_0^s e^{-(u^2+v^2)} dudv.$$

Fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas polares, com $u = r\cos(\theta)$ e $v = r\sin(\theta)$. Tem-se que $0 < r < \infty$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Aplicando essas substituições é obtida a seguinte integral:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 4 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w \int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2} d\theta dr = \\ &= 4 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w \theta r e^{-r^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = 2 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w r e^{-r^2} dr = \\ &= 2\pi \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{(-1)}{2} (e^{-r^2}) \Big|_0^w = 2\pi \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{-1}{2} (e^{-w} - e^0),\end{aligned}$$

como $e^{-w} \rightarrow 0$ quando $w \rightarrow \infty$ e $e^0 = 1$, obtém-se:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Assim, tirando a raiz de ambos os lados

$$\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\pi}.$$

Logo, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

□

Exemplo 4 Determine os valores de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)$ a partir do Exemplo 3 e do Teorema 1.

Resolução:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{7}{2} + 1\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{15}{8}\sqrt{\pi} = \frac{105}{16}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{9}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{105}{16}\sqrt{\pi} = \frac{945}{32}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{11}{2} + 1\right) = \frac{11}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{945}{32}\sqrt{\pi} = \frac{10395}{64}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

□

3.2 FUNÇÃO BETA

A função beta assim como a função gama, é necessária para resolver alguns problemas do cálculo fracionário, por exemplo, na resolução de integrais de polinômios. Diante

disso, será apresentada a sua definição e na sequência algumas propriedades básicas dessa função.

Definição 6 *Função beta.*

Seja $z, \xi \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\operatorname{Re}(\xi) > 0$. A função beta de z e ξ , denotada por $B(z, \xi)$, é definida como:

$$B(z, \xi) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1} dt.$$

Segue da definição a simetria da função beta, apresentada no teorema a seguir:

Teorema 2 *Simetria na função beta.*

Seja $z, \xi \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\operatorname{Re}(\xi) > 0$, então.

$$B(z, \xi) = B(\xi, z).$$

Demonstração:

O Teorema será demonstrado com a substituição $x = 1 - t$, logo $t = 1 - x$ e $dt = -dx$. Se $t = 0 \Rightarrow x = 1$ e se $t = 1 \Rightarrow x = 0$, assim:

$$\begin{aligned} B(z, \xi) &= \int_1^0 (1-x)^{z-1}(x)^{\xi-1} (-dx) = - \int_1^0 (1-x)^{z-1}(x)^{\xi-1} dx = \\ &= \int_0^1 (1-x)^{z-1}(x)^{\xi-1} dx = \int_0^1 t^{\xi-1}(1-t)^{z-1} dt = B(\xi, z) \end{aligned}$$

O que demonstra a simetria da função beta.

□

A função Beta também pode ser reescrita como uma integral trigonométrica, da seguinte forma:

Teorema 3 *A função Beta como Integral trigonométrica.*

Seja $z, \xi \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\operatorname{Re}(\xi) > 0$, então

$$B(z, \xi) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(\theta))^{2z-1} (\operatorname{cos}(\theta))^{2\xi-1} d\theta.$$

Demonstração:

Introduzindo a mudança de variável $t = \operatorname{sen}^2(\theta)$ tem-se que $dt = 2\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{cos}(\theta)d\theta$. Se

$t = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e se $t = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Substituindo na Definição 6,

$$\begin{aligned}
B(z, \xi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}^2(\theta))^{z-1} (1 - \text{sen}^2(\theta))^{\xi-1} 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta) d\theta = \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}(\theta))^{2z-2} (\cos(\theta))^{2\xi-2} \text{sen}(\theta)\cos(\theta) d\theta = \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}(\theta))^{2z-2+1} (\cos(\theta))^{2\xi-2+1} d\theta = \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}(\theta))^{2z-1} (\cos(\theta))^{2\xi-1} d\theta.
\end{aligned}$$

□

As funções gama e beta, possuem uma relação entre si que é mostrada no teorema a seguir.

Teorema 4 *Relação entre as funções beta e gama.*

Sejam $z, \xi \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(z) > 0$ e $\text{Re}(\xi) > 0$ então:

$$B(z, \xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi + z)}.$$

Demonstração:

Partindo de $\Gamma(z)\Gamma(\xi)$ e utilizando a Definição 4 e o resultado obtido em (3.3), tem-se

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(\xi) &= 2 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w e^{-t^2} t^{2\xi-1} dt \cdot 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-s^2} s^{2z-1} ds \\
&= 4 \lim_{w \rightarrow \infty} \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^w \int_0^p e^{-t^2} t^{2\xi-1} e^{-s^2} s^{2z-1} ds dt = \\
&= 4 \lim_{w \rightarrow \infty} \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^w \int_0^p e^{-(t^2+s^2)} t^{2\xi-1} s^{2z-1} ds dt
\end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares, com $t = r\cos\theta, s = r\text{sen}\theta$, segue que $0 < r < \infty$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, e

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(\xi) = 4 \cdot \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^q e^{-r^2} (r\cos(\theta))^{2\xi-1} (r\text{sen}(\theta))^{2z-1} r dr d\theta.$$

Colocando r em evidência:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(\xi) &= 4 \cdot \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^q e^{-r^2} r^{(1+2\xi-1+2z-1)} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\text{sen}(\theta))^{2z-1} dr d\theta = \\
&= 4 \cdot \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^q e^{(-r^2)} r^{2(\xi+z)-1} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\text{sen}(\theta))^{2z-1} dr d\theta.
\end{aligned}$$

Separando as integrais, pelas dependências de r e θ :

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = 4 \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q e^{-r^2} r^{2(\xi+z)-1} dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\text{sen}(\theta))^{2z-1} d\theta.$$

Assim, como:

$$\begin{aligned}\Gamma(\xi + z) &= 2 \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w e^{-r^2} r^{2(\xi+z)-1} dr \\ B(z, \xi) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\sin(\theta))^{2z-1} d\theta.\end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(\xi) = \Gamma(\xi + z) \cdot B(z, \xi)$$

Logo segue que:

$$B(z, \xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi + z)}.$$

□

3.3 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER

A função de Mittag-Leffler compõem muitas soluções de equações diferenciais fracionárias, de forma similar a como a função exponencial compõe as soluções de equações diferenciais ordinárias. Diante disso, a função de Mittag-Leffler é conhecida como a generalização fracionária da exponencial.

A função de Mittag-Leffler pode ser encontrada envolvendo vários parâmetros, mas para os propósitos desse trabalho essa função será definida somente com um e dois parâmetros, da seguinte forma:

Definição 7 *Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros*

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, com $Re(\beta) > 0$, a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha, \beta}(z)$, é definida da seguinte forma:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro pode ser obtida diretamente da Definição 7, considerando $\beta = 1$, assim.

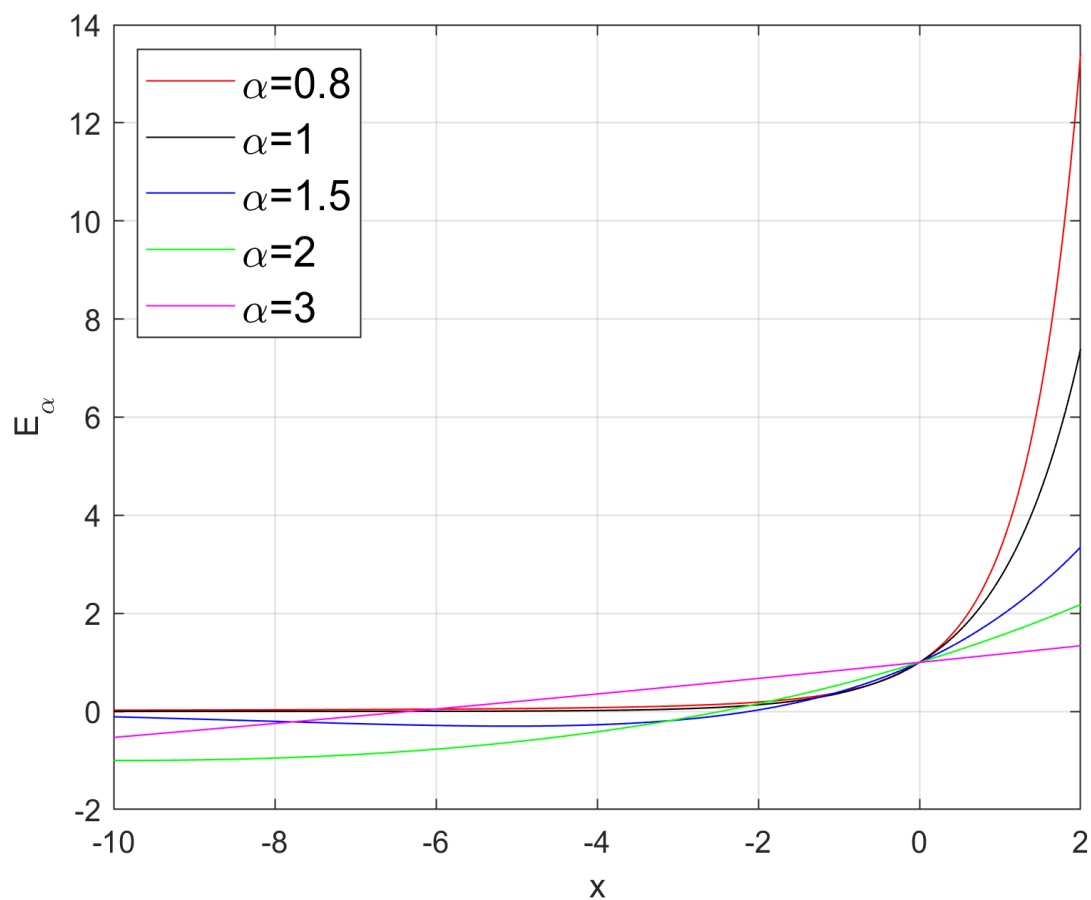
Definição 8 *A função de Mittag-Leffler de um parâmetro*

Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha) > 0$, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, denotada por $E_{\alpha}(z)$, é definida da seguinte forma:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Essas funções serão importantes para resolver equações diferenciais fracionárias no Capítulo 6. Na figura a seguir serão apresentados os gráficos da função de Mittag-Leffler com alguns valores de α , incluindo $\alpha = 1$ que coincide com a função exponencial. Observe na Figura 2 o comportamento dessa função especial que é encontrada em várias soluções de equações diferenciais fracionárias.

Figura 2 – As funções de Mittag-Leffler com os parâmetros $\alpha \in \{0.8, 1, 1.5, 2, 3\}$



Fonte: Os autores, 2023.

Na Figura 2 é possível ver que as funções de Mittag-Leffler com $\alpha \neq 1$ possuem valores menores que zero, o que não acontece com a exponencial. E para os números positivos as funções com $\alpha > 1$ possuem valores menores que a exponencial para um mesmo valor do domínio, e a função com $\alpha < 1$ apresenta valor maior que a exponencial para o mesmo valor do domínio.

4 INTEGRAL FRACIONÁRIA

No cálculo fracionário, há uma inversão na ordem de estudo em relação ao cálculo tradicional, primeiramente é estudada a integração e posteriormente a derivação. Também é utilizado o conceito de integral de ordem superior, ou seja, de ordem n , fato que é conhecido para a derivada de ordem n por exemplo (TIEPPO; GUZZO, 2018).

4.1 INTEGRAL DE RIEMANN-LIOUVILLE

A integral fracionária que será apresentada nesse trabalho é a de Riemann-Liouville, que depende diretamente da notação de integral de ordem n , que pode ser escrita da seguinte forma:

$${}_0I_x^n[f(x)] = \int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \int_0^{x_{n-2}} \dots \int_0^{x_1} f(x_0) dx_0 dx_1 \dots dx_{n-2} dx_{n-1}.$$

A integral de ordem n também pode ser representada pela fórmula para integrais repetidas de Cauchy, conforme apresentado no próximo teorema.

Teorema 5 *Integração sucessiva de Cauchy*

Seja $f(x)$ uma função contínua e $n \in \mathbb{N}$, a integral sucessiva de $f(x)$ é dada por:

$${}_0I_x^n[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy$$

A demonstração do Teorema 5 pode ser conferida no livro de Das (2020). A seguir será definida a convolução, que é necessária para a definição da integral fracionária.

Definição 9 *Convolução*

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, respectivamente, no intervalo $[0, \infty]$. A convolução de $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $(f * g)(x)$, é definida como:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy$$

Observe que a integral de ordem n pode ser escrita como a convolução de $f(x)$ com $g(x) = x^{n-1}$.

É possível generalizar o resultado do Teorema 5, utilizando a Definição 9, para uma integral de ordem real, ou seja a integral com ordem arbitrária, que é o objetivo dessa seção. A generalização é obtida a partir da relação $\Gamma(n+1) = n!$. Desse modo se define a generalização da integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ para a ordem $v \in \mathbb{R}$.

Outra diferença para o cálculo tradicional é a existência de duas definições para a integral, uma chamada de integral a direita e outra de integral a esquerda, que serão definidas a seguir.

Definição 10 *Integral de Riemann-Liouville a direita*

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, e $v \in \mathbb{R}_+$. A integral a direita de Riemann-Liouville de ordem v , no intervalo $[a, b]$, com $-\infty < a < b < \infty$, denotada por ${}_x I_b^v[f(x)]$, é definida como:

$${}_x I_b^v[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_x^b f(y)(y-x)^{v-1} dy.$$

A integral a direita pode ser entendida como a integral que considera todos os pontos futuros de x até b , que são os pontos que estão sendo integrados. Dessa forma não há uma interpretação física para a integral a direita, uma vez que não se conhece os pontos futuros a x . A integral a esquerda atua de forma diferente da integral a direita, e apresenta uma interpretação física, como pode ser visto a seguir.

Definição 11 *Integral de Riemann-Liouville a esquerda*

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, e $v \in \mathbb{R}_+$. A integral a esquerda de Riemann-Liouville de ordem v , no intervalo $[a, b]$, com $-\infty < a < b < \infty$, denotada por ${}_a I_x^v[f(x)]$, é definida como:

$${}_a I_x^v[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^x f(y)(x-y)^{v-1} dy.$$

Na integral a esquerda de x , são levados em consideração todos os pontos anteriores a x , ou seja, o passado de a até x é utilizado na integração, o que garante uma interpretação física da integração.

Nota: Em virtude da falta de uma interpretação física para a integral a direita, esse trabalho se aterá ao desenvolvimento da integral a esquerda, com o parâmetro $a = 0$. Vale destacar que para os propósitos do cálculo fracionário a integral a direita é igualmente importante, principalmente na obtenção de soluções para equações diferenciais fracionárias.

A seguir serão apresentados alguns exemplos envolvendo a integração fracionária de Riemann-Liouville

Exemplo 5 *Determine a integral de ordem v de $f(x) = x^u$, com $u, v \in \mathbb{R}$, $u > 0$ e $v > 0$:*

Resolução:

Da Definição 11 com $a = 0$ e $f(x) = x^u$, tem-se que:

$${}_0 I_x^v[x^u] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} y^u dy,$$

colocando x em evidência:

$$\begin{aligned} {}_0I_x^v[x^u] &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{v-1} x^{v-1} y^u dy \\ &= \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} \int_0^x \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{v-1} y^u dy. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $s = \frac{y}{x}$, tem-se que $ds = \frac{dy}{x}$. Se $y = 0 \Rightarrow s = 0$, e se $y = x \Rightarrow s = 1$. Então,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^v[x^u] &= \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} \int_0^1 x^u s^u (1-s)^{v-1} x ds \\ &= \frac{x^{v+u}}{\Gamma(v)} \int_0^1 s^u (1-s)^{v-1} ds \\ &= \frac{x^{v+u}}{\Gamma(v)} \int_0^1 s^{u+1-1} (1-s)^{v-1} ds. \end{aligned}$$

Pela Definição 6.

$$\int_0^1 s^{u+1-1} (1-s)^{v-1} ds = B(u+1, v),$$

e pelo Teorema 4 segue que,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^v[x^u] &= \frac{x^{v+u}}{\Gamma(v)} \cdot \frac{\Gamma(v)\Gamma(u+1)}{\Gamma(v+u+1)}, \\ &= x^{v+u} \cdot \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(v+u+1)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

□

Logo qualquer função do tipo x^u poderá ser integrada com ordem $v \in \mathbb{R}$ utilizando (4.1).

Exemplo 6 *Determine a integral de:*

- a) *Primeira ordem de x^3 ;*
- b) *Meia ordem de x^3 ;*
- c) *Ordem $\frac{1}{6}$ de x^3 ;*
- d) *Ordem $\frac{3}{2}$ de x^3 ;*
- e) *Ordem $\frac{5}{2}$ de x^3 .*

Resolução:

a):

Utilizando (4.1) tem-se:

$${}_0I_x^1[x^3] = x^{1+3} \cdot \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(1+3+1)} = x^4 \cdot \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5)}.$$

Por (3.4) tem-se que $\Gamma(n) = (n-1)!$, assim:

$${}_0I_x^1[x^3] = x^4 \cdot \frac{3!}{4!} = x^4 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = x^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{x^4}{4}.$$

Observe que utilizando o cálculo tradicional o mesmo resultado é obtido:

$$\int_0^x t^4 dt = \frac{x^4}{4}.$$

b):

De (4.1) com $v = \frac{1}{2}$ e $u = 3$, tem-se,

$${}_0I_x^{\frac{1}{2}}[x^3] = x^{\frac{1}{2}+3} \cdot \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+3+1)} = x^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{9}{2})} = x^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{3!}{\Gamma(\frac{9}{2})}.$$

Pelo Exemplo 4 segue que,

$${}_0I_x^{\frac{1}{2}}[x^3] = x^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{6}{\frac{105\sqrt{\pi}}{16}} = x^{\frac{7}{2}} \frac{32\sqrt{\pi}}{35\pi}.$$

c)

Por (4.1) com $v = \frac{1}{6}$ e $u = 3$, segue que,

$${}_0I_x^{\frac{1}{6}}[x^3] = x^{\frac{1}{6}+3} \cdot \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(\frac{1}{6}+3+1)} = x^{\frac{19}{6}} \cdot \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{25}{6})} = x^{\frac{19}{6}} \cdot \frac{3!}{\Gamma(\frac{25}{6})}.$$

Calculando $\Gamma(\frac{25}{6})$ no GeoGebra, obtém-se,

$${}_0I_x^{\frac{1}{6}}(x^3) = \frac{6 \cdot x^{\frac{19}{6}}}{7,425405} = 0,808037 \cdot x^{\frac{19}{6}}.$$

d)

De (4.1) com $v = \frac{3}{2}$ e $u = 3$,

$${}_0I_x^{\frac{3}{2}}[x^3] = x^{\frac{3}{2}+3} \cdot \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+3+1)} = x^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{2})}.$$

Pelo Exemplo 4 segue que,

$${}_0I_x^{\frac{3}{2}}[x^3] = \frac{6x^{\frac{9}{2}}}{\frac{945\sqrt{\pi}}{32}} = x^{\frac{9}{2}} \frac{192\sqrt{\pi}}{945\pi}.$$

e):

De (4.1) $v = \frac{5}{2}$ e $u = 3$, segue que,

$${}_0I_x^{\frac{5}{2}}[x^3] = x^{\frac{5}{2}+3} \cdot \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(\frac{5}{2}+3+1)} = x^{\frac{11}{2}} \cdot \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{13}{2})}.$$

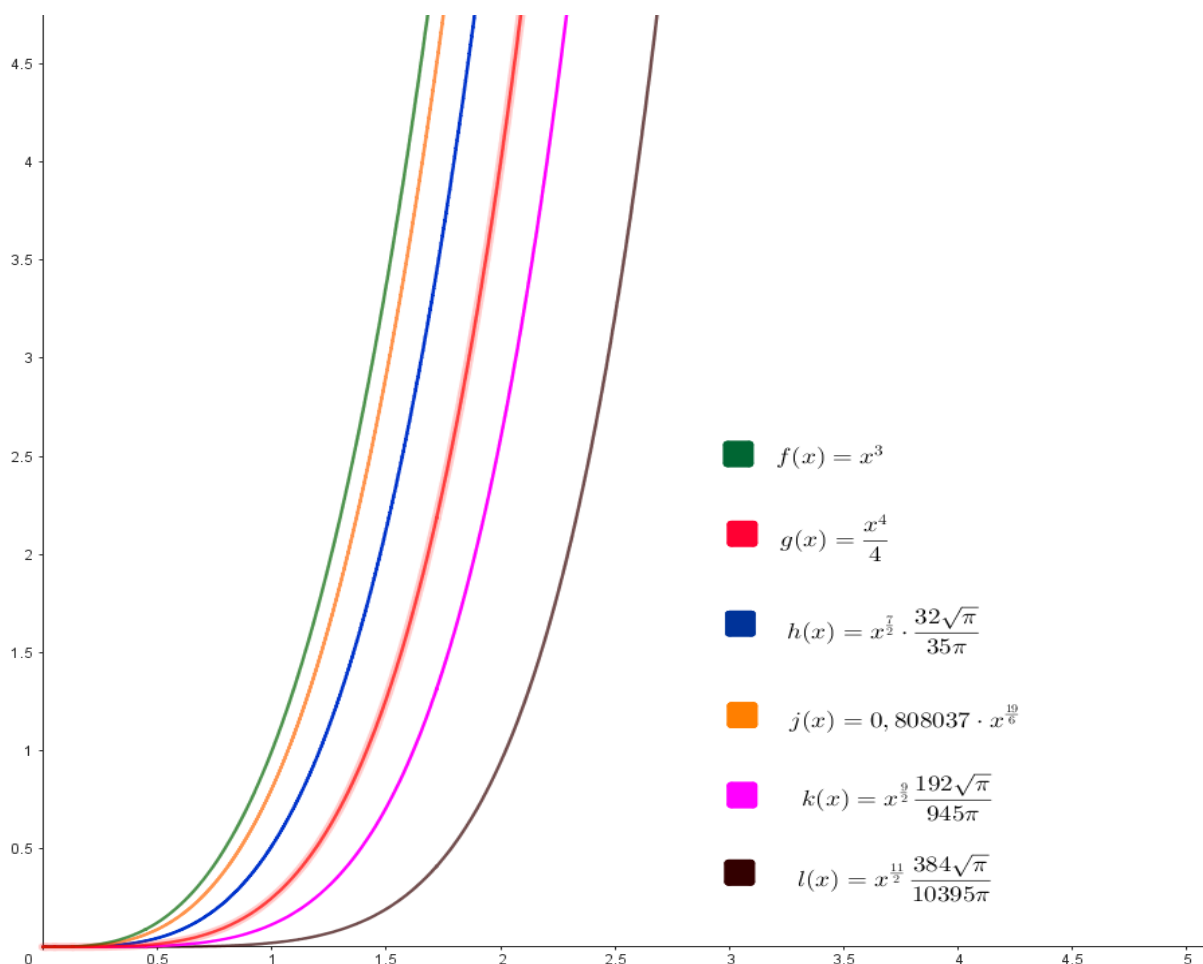
Pelo Exemplo 4 obtém-se,

$${}_0I_x^{\frac{5}{2}}[x^3] = \frac{6x^{\frac{11}{2}}}{\frac{10395\sqrt{\pi}}{64}} = x^{\frac{11}{2}} \frac{384\sqrt{\pi}}{10395\pi}.$$

□

Na Figura 3 são plotados os gráficos de x^3 , da integral de primeira ordem de x^3 , e das integrais fracionárias de x^3 , obtidas no Exemplo 6. Pode se ver que as integrais fracionárias de ordem entre zero e um ficam entre a função e sua integral clássica e as de ordem maior que um ficam a direita da integral de primeira ordem.

Figura 3 – As integrais de ordem $1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{6}; \frac{5}{2}$ de x^3



Fonte: Os autores, 2023.

Na Figura 3, onde $g(x)$ é a integral de primeira ordem de $f(x)$, $h(x)$ de meia ordem, $j(x)$ é a integral de ordem $\frac{1}{6}$, $k(x)$ é a integral de ordem $\frac{3}{2}$ e $l(x)$ é a integral de ordem $\frac{5}{2}$.

Exemplo 7 Determine a integral de ordem v de e^{kx} , com $v, k \in \mathbb{R}$, $v > 0$.

Resolução:

Tem-se pela Definição 11 que,

$${}_0I_x^v[e^{kx}] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} e^{ky} dy$$

Como a série de Taylor de e^{kx} é,

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^v[e^{kx}] &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ky)^n}{n!} dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\Gamma(v) \cdot n!} \cdot \int_0^x (x-y)^{v-1} y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \cdot {}_0I_x^v(x^n). \end{aligned}$$

Usando o resultado encontrado para a integral do polinômio dado pelo Exemplo 5.

$${}_0I_x^v[e^{kx}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)x^{v+n}}{\Gamma(n+v+1)}.$$

Fazendo as simplificações obtém-se que:

$${}_0I_x^v[e^{kx}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^{n+v}}{\Gamma(n+v+1)}.$$

Para o caso em que $v = 1$ obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^{n+1}}{(n+1)!} = \left(x + \frac{kx^2}{2!} + \frac{k^2 x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^n x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right).$$

Multiplicando o lado direito por $\frac{k}{k}$:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \frac{k^n x^{n+1}}{(n+1)!} &= \left(x + \frac{kx^2}{2!} + \frac{k^2 x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^n x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right) \cdot \frac{k}{k} \\ &= \left(xk + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right) \cdot \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Adicionando $+\frac{1}{k} - \frac{1}{k}$ no lado direito,

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \frac{k^n x^{n+1}}{(n+1)!} &= \left(xk + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right) \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \\ &= \left(1 + xk + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right) \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \\ &= -\frac{1}{k} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = -\frac{1}{k} + \frac{e^{kx}}{k}. \end{aligned}$$

Aqui $-\frac{1}{k}$ representa a constante de integração da integral indefinida.

□

Exemplo 8 Determine a integral de ordem v de $\sin(x)$, com $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$.

Resolução:

$${}_0I_x^v[sen(x)] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} sen(y) dy.$$

Usando a série de Taylor de $sen(x)$, dada por

$$sen(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obtém-se que,

$$\begin{aligned} {}_0I_x^v[sen(x)] &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} y^{2k+1} dy. \end{aligned}$$

Note que a integral

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} y^{2k+1} = {}_0I_x^v(x^{2k+1}).$$

Assim, ${}_0I_x^v[sen(x)]$ fica

$${}_0I_x^v[sen(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot ({}_0I_x^v(x^{2k+1})).$$

Pelo Exemplo 5 tem-se que

$${}_0I_x^v[sen(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \left(\frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+1+v+1)} \right) \cdot x^{2k+1+v}.$$

Como $(2k+1)! = \Gamma(2k+2)$, segue que

$${}_0I_x^v[sen(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1+v}}{\Gamma(2k+1+v+1)}.$$

Para o caso em que $v = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} {}_0I_x^1[sen(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1+1}}{\Gamma(2k+1+1+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Somando $+1 - 1$ no lado direito obtém-se,

$${}_0I_x^1[sen(x)] = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right),$$

em que $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)$ é a série de Taylor do $\cos(x)$, assim,

$${}_0I_x^1[sen(x)] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \cos(x).$$

Nesse caso 1 representa a constante da integração indefinida.

□

Exemplo 9 Determine a integral de ordem v de $\cos(x)$, com $v \in \mathbb{R}$ e $v > 0$.

Resolução:

$${}_0I_x^v[\cos(x)] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} \cos(y) dy.$$

Usando a série de Taylor do $\cos(x)$ dada por,

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obtém-se que

$$\begin{aligned} {}_0I_x^v[\cos(x)] &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} y^{2k} dy. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} y^{2k} dy = {}_0I_x^v(x^{2k}),$$

segue que

$${}_0I_x^v[\cos(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot ({}_0I_x^v(x^{2k})).$$

Pelo Exemplo 5

$${}_0I_x^v[\cos(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \left(\frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(2k+v+1)} \right) \cdot x^{2k+v}.$$

Como $(2k)! = \Gamma(2k+1)$, obtém-se

$${}_0I_x^v[\cos(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+v}}{\Gamma(2k+v+1)}.$$

Para o caso em que $v = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} {}_0I_x^1[\cos(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{\Gamma(2k+1+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \text{sen}(x). \end{aligned}$$

□

5 DERIVADAS FRACIONÁRIAS DE RIEMANN-LIOUVILLE E CAPUTO

Diferente do que acontece no cálculo tradicional, no cálculo fracionário é possível encontrar várias definições de derivadas. Uma justificativa para isso pode ser a carência de representações geométricas da derivada de ordem arbitrária, o que não acontece com a derivada inteira, que pode ser representada como a inclinação da reta tangente a curva, ou como algum fenômeno físico, por exemplo, a velocidade (derivada da função deslocamento) (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Neste trabalho serão apresentadas e exemplificadas as definições para a derivada fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo, ambas dependem da integral fracionária. A definição de Riemann-Liouville pode ser obtida utilizando a ideia de que a integração é uma operação inversa a derivação, ou seja, $I^\alpha D^\alpha[f(x)] = f(x)$ em que D^α denota a derivada de ordem α , e da definição da soma e subtração de índices, que será definida a seguir.

5.1 DERIVADA FRACIONÁRIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

A derivada de Riemann-Liouville será definida a partir das definições a seguir.

Definição 12 *Soma e subtração de índices*

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$, a soma e subtração de índices é dada por:

$$I^\alpha \cdot I^\beta[f(x)] = I^{\alpha+\beta}[f(x)]$$

$$D^\alpha \cdot I^\beta[f(x)] = D^{\alpha-\beta}[f(x)].$$

A partir da Definição 12 e considerando $I^w[f(x)] = D^{-w}[f(x)]$, é possível definir a derivada fracionária Riemann-Liouville. "Em palavras, a derivada de ordem arbitrária, segundo Riemann-Liouville, equivale à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária" (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p.55).

Definição 13 *Função teto*

A função teto, denotada por $[\cdot]$, e definida como $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o menor inteiro maior ou igual a x .

Dessa forma, a partir da Definição 13 se pode definir a derivada fracionária de Riemann-Liouville, que será dividida em duas definições, uma para a derivada a direita e outra para a derivada a esquerda.

Definição 14 *Derivada de Riemann-Liouville a direita*

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A derivada a direita de Riemann-Liouville de ordem m de $f(x)$, com $m \in \mathbb{R}_+$ e $-\infty < a < b < \infty$, que é denotada por ${}_x D_b^m[f(x)]$, é definida da seguinte forma:

$${}_x D_b^m[f(x)] = D^k \cdot [{}_x I_b^l[f(x)]] = D^k \cdot [{}_x D_b^{-l}[f(x)]].$$

Em que $k = [m]$, $l = k - m$, e $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ denota a derivada de ordem natural k . Assim

$${}_x D_b^m[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \int_x^b f(y) \cdot (y - x)^{l-1} dy.$$

A derivada a direita apresentada na Definição 14 pode ser interpretada de forma similar a integral, ela considera todos os pontos futuros de x até b , o que não a torna interpretável fisicamente, ou seja, na derivação o futuro é levado em consideração. Diferente do que acontece com a derivada a esquerda que será apresentada a seguir.

Definição 15 *Derivada de Riemann-Liouville a esquerda*

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A derivada a esquerda de Riemann-Liouville de ordem m de $f(x)$, com $m \in \mathbb{R}_+$ e $-\infty < a < b < \infty$, que é denotada por ${}_a D_x^m[f(x)]$, é definida da seguinte forma:

$${}_a D_x^m[f(x)] = D^k \cdot [{}_a I_x^l[f(x)]] = D^k \cdot [{}_a D_x^{-l}[f(x)]].$$

Em que $k = [m]$, $l = k - m$, e $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ denota a derivada de ordem natural k . Assim

$${}_a D_x^m[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x f(y) \cdot (x - y)^{l-1} dy.$$

A derivada a esquerda pode ser interpretada como a derivada de a até x , em que os pontos entre a e x são considerados. Nesse caso tem-se que o passado é levado em consideração. Esse efeito é chamado de histerese, que considera a memória de uma função quando ela é derivada (MAYERGOYZ, 2003).

NOTA: De forma análoga a integral aqui também será adotada a definição de derivada a esquerda com $a = 0$, uma vez que a derivada fracionária depende da integral fracionária.

A derivada fracionária de polinômios também pode ser generalizada de forma semelhante a integral de polinômios, o que será feito no exemplo a seguir.

Exemplo 10 *Determine a derivada de ordem m de $f(x) = x^u$, com $m, u \in \mathbb{R}_+$.*

Resolução:

Seja $k = [m]$ e $l = k - m$, da Definição 15 segue que

$${}_0 D_x^m[x^u] = \frac{1}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \int_0^x y^u \cdot (x - y)^{l-1} dy.$$

Essa derivada pode ser escrita como:

$${}_0D_x^m[x^u] = \frac{d^k}{dx^k} \cdot [{}_0I_x^l[x^u]].$$

Pelo Exemplo 5, ${}_0I_x^l[x^u]$ é dada por

$${}_0I_x^l[x^u] = x^{l+u} \cdot \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(l+u+1)}.$$

Desse modo ${}_0D_x^m[x^u]$ fica,

$${}_0D_x^m[x^u] = \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{l+u} \cdot \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(l+u+1)} \right).$$

Como $l = k - m$, tem-se que:

$${}_0D_x^m[x^u] = \frac{d^k}{dx^k} \cdot \left(x^{k-m+u} \cdot \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(k-m+u+1)} \right).$$

Calculando a derivada de ordem inteira k ,

$$\begin{aligned} {}_0D_x^m[x^u] &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(k-m+u+1)} \cdot \left(x^{k-m+u-k} \cdot \frac{\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(k-m+1-k)} \right) \\ &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(k-m+u+1)} \cdot \left(x^{-m+u} \cdot \frac{\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(-m+1)} \right) \\ &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(k-2m+u+2)} \cdot (x^{-m+u} \cdot \Gamma(k-m+1)). \end{aligned}$$

Simplificando as funções gama, segue que,

$${}_0D_x^m[x^u] = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-m+1)} \cdot x^{u-m}.$$

□

Uma dificuldade encontrada na derivada fracionária de Riemann-Liouville é o fato de a derivada de uma função constante não ser zero. Isso contraria o cálculo tradicional, onde a derivada de uma função constante é sempre zero. No exemplo a seguir essa propriedade será apresentada.

Exemplo 11 *Determine a derivada de Riemann-Liouville de ordem m de $f(x) = c$ em que $m \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}$.*

Resolução:

Seja $k = [m]$ e $l = k - m$, da Definição 15 segue que

$$\begin{aligned} {}_0D_x^m[c] &= \frac{1}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \int_0^x (c) \cdot (x-y)^{l-1} dy \\ &= \frac{c}{\Gamma(l)} \left(\frac{d^k}{dx^k} \right) \int_0^x (x-y)^{l-1} dy \end{aligned}$$

Substituindo $u = x - y$ tem-se $du = -dy$. Se $y = 0 \Rightarrow u = x$ e se $y = x \Rightarrow u = 0$, assim

$$\begin{aligned} {}_0D_x^m[c] &= -\frac{c}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \int_x^0 (u)^{l-1} du = -\frac{c}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{u^l}{l} \Big|_x^0 \right) = \\ &= -\frac{c}{\Gamma(l)} \frac{d^k}{dx^k} \left(0 - \frac{x^l}{l} \right) = \frac{c}{\Gamma(l)} \cdot \frac{1}{l} \frac{d^k}{dx^k} (x^l), \end{aligned}$$

Como $l = k - m$

$${}_0D_x^m[c] = -\frac{c}{\Gamma(k-m)} \cdot \frac{1}{k-m} \frac{d^k}{dx^k} (x^{k-m})$$

Calculando a derivada de ordem k ,

$$\begin{aligned} {}_0D_x^m[c] &= -\frac{c}{\Gamma(k-m)} \cdot \frac{1}{(k-m)} \cdot \left(\frac{\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(k-m-k+1)} x^{k-m-k} \right) \\ &= \frac{cx^{-m}}{\Gamma(k-m+1)} \cdot \frac{\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(1-m)} \\ &= \frac{cx^{-m}}{\Gamma(1-m)}. \end{aligned}$$

□

Desse modo, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função constante não é igual a zero. O que não acontece com a derivada fracionária de Caputo, que será apresentada na seção a seguir.

5.2 DERIVADA FRACIONÁRIA DE CAPUTO

A derivada de fracionária de Caputo também depende da integral fracionária de Riemann-Liouville, porém há uma alteração na ordem de integração e derivação em relação a derivada fracionária de Riemann-Liouville. A derivada de Caputo de ordem arbitrária, é uma integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Neste trabalho será adotada a derivada de Caputo por se obter zero como resultado para a derivada de uma função constante. O fato da derivada de uma função constante com a definição de Riemann-Liouville não ser zero acaba se tornando um inconveniente para alguns matemáticos, pois essa definição não pode ser interpretada como uma taxa de variação (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). A seguir serão apresentadas as definições de derivadas de Caputo.

Definição 16 *Derivada de Caputo a direita*

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A derivada a direita de Caputo de ordem q de $f(x)$, com $q \in \mathbb{R}_+$ e com $-\infty < a < b < \infty$, é denotada por ${}_x^C D_b^q[f(x)]$, é definida como

$${}_x^C D_b^q[f(x)] = {}_x I_b^p \left[\frac{d^n}{dy^n} [f(x)] \right].$$

Em que $n = [q]$ e $\frac{d^n}{dy^n} = D^n$ denota a derivada de ordem natural n . Assim,

$${}_x^C D_b^q[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^b (y-x)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n} f(y) \right] dy.$$

A derivada a direita de Caputo da mesma forma que a derivada a direita de Riemann-Liouville considera os pontos futuros de x em sua definição, como consequência, ela carece de uma interpretação física. Já para a derivada a esquerda que será definida a seguir tem uma interpretação física.

Definição 17 *Derivada de Caputo a esquerda*

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A integral a esquerda de Caputo de ordem q de $f(x)$, com $q \in \mathbb{R}_+$ e $-\infty < a < b < \infty$, denotada por ${}_a^C D_x^q[f(x)]$, é definida como

$${}_a^C D_x^q[f(x)] = {}_a I_x^p \left[\frac{d^n}{dy^n} [f(x)] \right].$$

Em que $n = [q]$ e $D^n = \frac{d^n}{dy^n}$ denota a derivada de ordem natural n . Assim,

$${}_a^C D_x^q[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n} f(y) \right] dy.$$

A derivada de Caputo a esquerda, da mesma forma que a derivada a esquerda de Riemann-Liouville, pode ser interpretada como a derivada de a até x , em que os pontos entre a e x são considerados, esse fenômeno conhecido como a histerese. Da mesma forma como na integral fracionária a direita de Riemann-Liouville, a derivada a direita também é importante para a resolução de equações diferenciais fracionárias.

NOTA: Nos exemplos da derivada de Caputo também será adotado $a = 0$, uma vez que sua definição depende da integral fracionária. A seguir serão resolvidos alguns exemplos para contextualizar a definição de derivada fracionária de Caputo, iniciando pela derivada fracionária de uma função constante.

Exemplo 12 *Determine a derivada de Caputo de ordem q de $f(x) = c$, com $q \in \mathbb{R}_+$ e $c \in \mathbb{R}$.*

Resolução:

Seja $n = [q]$ e $p = n - q$, da Definição 17 segue que

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^q[c] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n} (c) \right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} 0 dy. \end{aligned}$$

Logo,

$${}_0^C D_x^q[c] = 0.$$

□

Exemplo 13 Determine a derivada de ordem q de $f(x) = x^u$, com $q \in \mathbb{R}_+$ e $u \in \mathbb{R}_+$.

Resolução:

Seja $n = [q]$ e $p = n - q$, da Definição 17, segue que,

$${}_0^C D_x^q [x^u] = {}_0^C I_x^p \left[\frac{d^n}{dx^n} [x^u] \right].$$

Assim,

$${}_0^C D_x^q [x^u] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n} (y^u) \right] dy.$$

A derivada de ordem n de y^u é dada por

$$\frac{d^n}{dy^n} (y^u) = \frac{u!}{(u-n)!} y^{u-n}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^q [x^u] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{u!}{(u-n)!} y^{u-n} \right] dy \\ &= \frac{\Gamma(1+u)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1+u-n)} \int_0^x (x-y)^{p-1} y^{u-n} dy \\ &= \frac{\Gamma(1+u)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1+u-n)} \int_0^x x^{p-1} \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{p-1} y^{u-n} dy. \end{aligned}$$

Substituindo $\frac{y}{x} = t$, tem-se que $y = xt$ e $dy = xdt$. E se $y = 0 \Rightarrow t = 0$ e se $y = x \Rightarrow t = 1$.

$${}_0^C D_x^q [x^u] = \frac{\Gamma(1+u)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1+u-n)} \int_0^1 x^{p-1} (1-t)^{p-1} (xt)^{u-n} x dt$$

Como $p = n - q$

$${}_0^C D_x^q [x^u] = \frac{\Gamma(1+u) x^{n-q-1+u-n+1}}{\Gamma(n-q) \cdot \Gamma(1+u-n)} \int_0^1 (1-t)^{n-q-1} t^{u-n} dt.$$

Como $\int_0^1 (1-t)^{n-q-1} t^{u-n} dt = B(n-q, u-n+1)$ e pela Teorema 4 segue que,

$$B(n-q, u-n+1) = \frac{\Gamma(n-q)\Gamma(u-n+1)}{\Gamma(n-q+u-n+1)} = \frac{\Gamma(n-q)\Gamma(u-n+1)}{\Gamma(-q+u+1)}.$$

Logo,

$${}_0^C D_x^q [x^u] = \frac{\Gamma(1+u) \cdot x^{u-q}}{\Gamma(n-q) \cdot \Gamma(1+u-n)} \cdot \frac{\Gamma(n-q)\Gamma(u-n+1)}{\Gamma(-q+u+1)}.$$

Portanto,

$${}_0^C D_x^q [x^u] = \frac{\Gamma(1+u)}{\Gamma(1+u-q)} x^{u-q}.$$

□

Observe do Exemplo 10 e Exemplo 13 que as derivadas do polinômio x^u obtidas com a definição de Riemann-Liouville e de Caputo são idênticas. Na sequência será feito um exemplo numérico de derivada de polinômio usando a definição de derivada de Caputo, caso fosse feito com a derivada de Riemann-Liouville, os resultados seriam idênticos.

Exemplo 14 *Determine a derivada de Caputo de $f(x) = x^3$:*

a) *Primeira ordem;*

b) *De meia ordem;*

c) *De ordem $\frac{1}{6}$;*

d) *De ordem $\frac{3}{2}$;*

e) *De ordem $\frac{5}{2}$.*

Resolução:

a): Do Exemplo 13 com $u = 3$ e $q = 1$, segue que

$${}_0^C D_x^1 [x^3] = \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-1)} x^{3-1} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3)} x^2.$$

Pelo Exemplo 3, $\Gamma(n) = (n-1)!$, assim:

$${}_0^C D_x^1 [x^3] = \frac{3!}{2!} x^2 = 3x^2.$$

Perceba que utilizando o cálculo tradicional o mesmo resultado é obtido.

b):

Do Exemplo 13 com $u = 3$ e $q = \frac{1}{2}$, segue que.

$${}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} [x^3] = \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-\frac{1}{2})} x^{3-\frac{1}{2}} = \frac{3!}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}}.$$

Assim, usando o resultado do Exemplo 4, tem-se:

$${}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} [x^3] = \frac{6}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} x^{\frac{5}{2}} = \frac{48\sqrt{\pi}}{15\pi} x^{\frac{5}{2}}.$$

c):

Do Exemplo 13 com $u = 3$ e $q = \frac{1}{6}$, segue que

$${}_0^C D_x^{\frac{1}{6}} [x^3] = \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-\frac{1}{6})} x^{3-\frac{1}{6}} = \frac{3!}{\Gamma(\frac{23}{6})} x^{\frac{17}{6}}.$$

Calculando $\Gamma(\frac{23}{6})$ no GeoGebra, segue que

$${}_0^C D_x^{\frac{1}{6}} [x^3] = \frac{6}{4,886185} x^{\frac{17}{6}} = 1,227952 x^{\frac{17}{6}}.$$

d):

Do Exemplo 13 com $u = 3$ e $q = \frac{3}{2}$, segue que:

$${}_0^C D_x^{\frac{3}{2}}[x^3] = \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-\frac{3}{2})} x^{3-\frac{3}{2}} = \frac{3!}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}.$$

Segue do Exemplo 4

$${}_0^C D_x^{\frac{3}{2}}[x^3] = \frac{6}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{24\sqrt{\pi}}{3\pi} x^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{\pi}}{\pi} x^{\frac{3}{2}}.$$

e):

Do Exemplo 13 com $u = 3$ e $q = \frac{5}{2}$, segue que

$${}_0^C D_x^{\frac{5}{2}}[x^3] = \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-\frac{5}{2})} x^{3-\frac{5}{2}} = \frac{3!}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}.$$

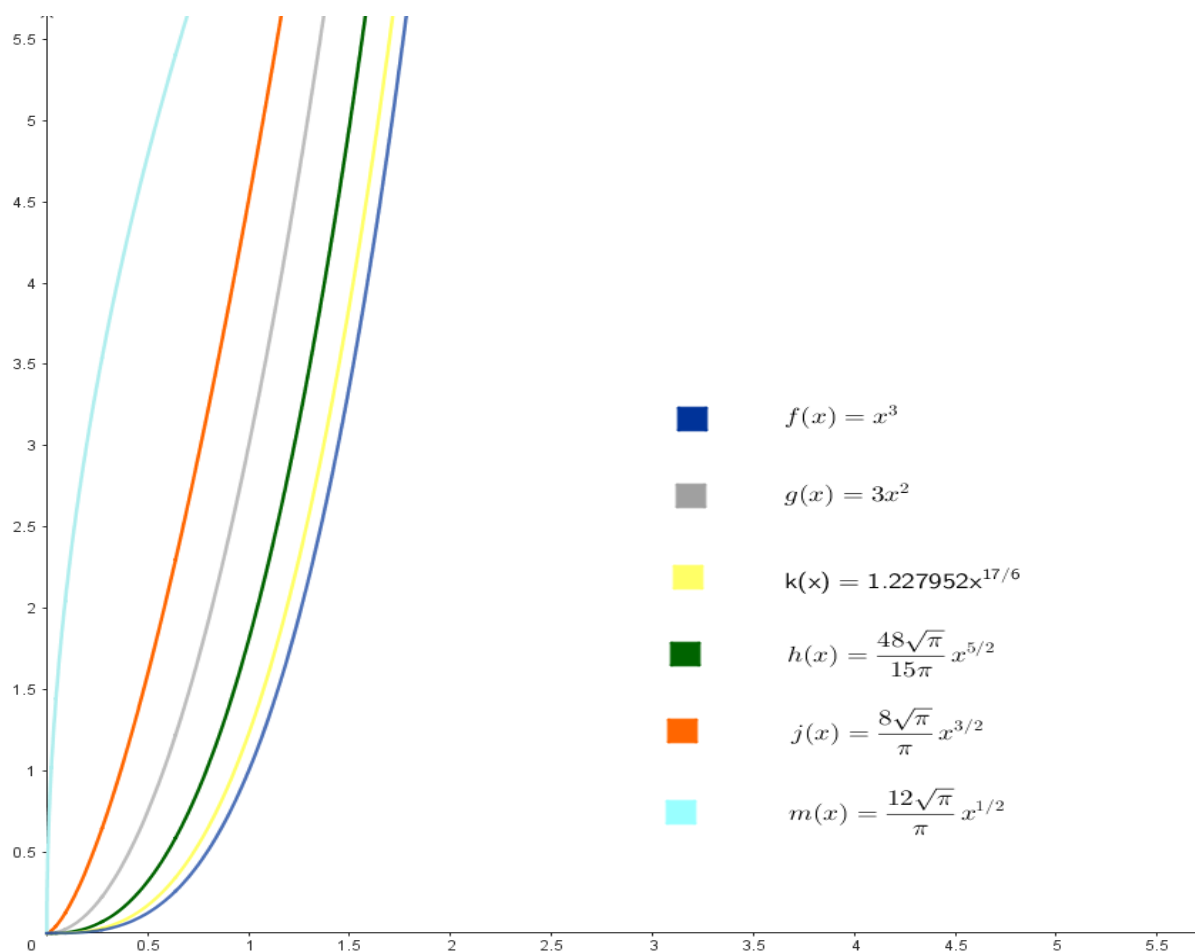
Do Exemplo 4 obtém-se

$${}_0^C D_x^{\frac{5}{2}}[x^3] = \frac{6}{\frac{1\sqrt{\pi}}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{12\sqrt{\pi}}{\pi} x^{\frac{1}{2}}.$$

□

De modo similar ao que aconteceu com as integrais de x^3 , apresentadas no Exemplo 6, o gráfico das derivadas de ordem menores que um ficam entre o gráfico da função x^3 e o gráfico da derivada de primeira ordem, conforme a Figura 4.

Figura 4 – As derivadas de ordem $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$ de x^3



Fonte: Os autores, 2023.

Na Figura 4, são apresentados os gráficos de $f(x) = x^3$, sua derivada de primeira ordem $g(x)$, sua derivada de meia ordem $h(x)$, sua derivada de ordem $\frac{1}{6}$, $k(x)$, a derivada de ordem $\frac{3}{2}$, $j(x)$, e a derivada de ordem $\frac{5}{2}$, $m(x)$. No gráfico $h(x)$ e $k(x)$ estão entre a $f(x)$ e $g(x)$, o que é esperado, pois $h(x)$ e $k(x)$ são derivadas de menor ordem em relação a $g(x)$. Já $j(x)$ e $m(x)$ estão à esquerda de $g(x)$, pois possuem ordem maior que um, ou seja, as derivadas de ordens maiores estão à esquerda das derivadas de ordens menores.

Exemplo 15 Determine a derivada de Caputo de ordem q de $f(x) = \text{sen}(x)$ em que $q \in \mathbb{R}_+$.

Resolução:

Seja $n = [q]$ e $p = n - q$, da Definição 17 segue que

$${}_0^C D_x^q [\text{sen}(x)] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n} (\text{sen}(y)) \right] dy.$$

Como,

$$\frac{d^n}{dx^n} (\text{sen}(x)) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

Segue que

$${}_0^C D_x^q[\text{sen}(x)] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + x \right) \right] dy.$$

Pelo Exemplo 8 e como $p = n - q$, tem-se que,

$${}_0^C D_x^q[\text{sen}(x)] = {}_0 I_x^p \left[\text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + x \right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{n\pi}{2} + x \right)^{2k+1+n-q}}{\Gamma(2k+2+n-q)}.$$

Quando $q = 1$, tem-se que $n = 1$ e $p = 0$ assim,

$${}_0^C D_x^1[\text{sen}(x)] = {}_0 I_x^0 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right].$$

Como a integral de ordem 0 é a própria função, tem-se:

$${}_0^C D_x^1[\text{sen}(x)] = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos(x).$$

□

Assim a derivada de Caputo de primeira ordem do $\text{sen}(x)$ tem o mesmo resultado da derivada clássica.

Exemplo 16 Determine a derivada de Caputo de ordem q de $f(x) = \cos(x)$ em que $q \in \mathbb{R}_+$.

Resolução: Seja $n = \lceil q \rceil$ e $p = n - q$, da Definição 17 segue que,

$${}_0^C D_x^q[\cos(x)] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n}(\cos(y)) \right] dy.$$

Como,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos(x)) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} + x \right),$$

Tem-se que,

$${}_0^C D_x^q(\cos(x)) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{2} + y \right) \right] dy.$$

Note que, pelo Exemplo 9 e usando que $p = n - q$, obtém-se:

$${}_0^C D_x^q[\cos(x)] = {}_0 I_x^p \left[\cos \left(\frac{n\pi}{2} + x \right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{n\pi}{2} + x \right)^{2k+n-q}}{\Gamma(2k+n-q+1)}.$$

Se $q = 1$, tem-se que $n = 1$ e $p = 0$, assim,

$${}_0^C D_x^1[\cos(x)] = {}_0 I_x^0 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right]$$

Como a integral de ordem 0 é a própria função, tem-se:

$${}_0^C D_x^1[\cos(x)] = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\text{sen}(x)$$

□

Note que a derivada de primeira ordem de Caputo do $\cos(x)$ tem o mesmo resultado da derivada clássica.

Exemplo 17 *Determine a derivada de Caputo de ordem q de $f(x) = e^{kx}$, com $q \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{R}$.*

Resolução: Seja $n = \lceil q \rceil$ e $p = n - q$, da Definição 17 segue que,

$${}_0^C D_x^q [e^{kx}] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} \left[\frac{d^n}{dy^n} (e^{ky}) \right] dy.$$

Como,

$$\frac{d^n}{dy^n} [e^{ky}] = k^n e^{ky},$$

segue que,

$${}_0^C D_x^q [e^{kx}] = \frac{k^n}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-y)^{p-1} e^{ky} dy = k^n \cdot {}_0 I_x^p [e^{kx}].$$

Pelo Exemplo 7 a derivada de ordem q de e^{kx} é:

$${}_0^C D_x^q [e^{kx}] = k^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i x^{i+q}}{\Gamma(i+q+1)}.$$

Para o caso em que $q = 1$ tem-se que $n = 1$ e $p = 0$, assim:

$${}_0^C D_x^q [e^{kx}] = k^1 \cdot {}_0 I_x^0 [e^{kx}].$$

Como a integral de ordem 0 é a própria função, tem-se:

$${}_0^C D_x^q (e^{kx}) = k e^{kx}.$$

□

Novamente note que a derivada de Caputo de primeira ordem de e^{kx} coincide com a derivada clássica.

6 APLICAÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo serão feitas algumas aplicações que envolvem o cálculo fracionário, a primeira delas é relacionada a segunda lei de Newton. Na sequência serão apresentadas aplicações envolvendo o decaimento radioativo, o crescimento populacional e um ajuste de curva com a solução da equação logística.

6.1 GENERALIZAÇÃO DA SEGUNDA LEI DE NEWTON

A segunda lei de Newton, também conhecida como o princípio fundamental da dinâmica, afirma que a força resultante F que atua sobre um corpo é igual ao produto da aceleração a pela massa m , isto é,

$$F = a.m.$$

Na mecânica clássica a aceleração pode ser obtida através da segunda derivada da função posição em relação ao tempo, assim, se $x(t)$ descreve a posição no instante t , temos que,

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Dessa forma, a segunda lei de Newton pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}. \quad (6.1)$$

A primeira aplicação do CF que será feita neste trabalho consiste em generalizar (6.1) para uma derivada de ordem q , considerando a força resultante $f = \frac{F}{m}$ constante, com $q \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{d^q x(t)}{dt^q} = f \quad (6.2)$$

A solução geral dessa equação diferencial é dada por (OLDHAM; SPANIER, 1974),

$$x(t) = \frac{d^{-q} f}{dt^{-q}} + c_1 t^{q-1} + c_2 t^{q-2} + \dots + c_k t^{q-k}.$$

Usando o Exemplo 5 com $g(t) = f$ podemos reescrever $x(t)$ como,

$$x(t) = \frac{ft^q}{\Gamma(1+q)} + c_1 t^{q-1} + c_2 t^{q-2} + \dots + c_k t^{q-k} \quad (6.3)$$

em que, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, são as constantes a determinar e $k \in \mathbb{N}$ é tal que,

$$\begin{cases} 0 < q \leq k < q + 1, & \text{se } q > 0 \\ k = 0, & \text{se } q \leq 0. \end{cases}$$

Dessa forma uma solução particular da equação diferencial de (6.2) pode ser encontrada tomando k condições iniciais, que nesse caso serão consideradas contendo derivadas de ordem inteira. Mais especificamente serão consideradas as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1 \\ x''(1) = 1 \\ \vdots \\ \frac{d^{k-1}x(1)}{dt^{k-1}} = 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Como exemplos, (6.2) será solucionada considerando $q \in \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}$. Assim, serão consideradas no máximo três condições iniciais, $x(1) = x'(1) = x''(1) = 1$, de (6.2) com $f = 1$.

Para $q = 1$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral

$$x(t) = \frac{t}{\Gamma(2)} + c_1$$

e a condição inicial

$$x(t) = 1.$$

Assim,

$$x(1) = \frac{1}{\Gamma(2)} + c_1 = 1,$$

de onde segue que,

$$c_1 = \frac{\Gamma(2) - 1}{\Gamma(2)} = 0.$$

Com isso, obtém-se a solução particular para a velocidade constante:

$$x(t) = \frac{t}{\Gamma(2)}.$$

Para $q = 1.25$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral

$$x(t) = \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\Gamma(\frac{5}{4} + 1)} + c_1 t^{\frac{1}{4}} + c_2 t^{\frac{-3}{4}}.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(\frac{9}{4}) = 1,1330$ obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1,1330} + c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{5}{4,532} + \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se, $c_1 = -0.0015$ e $c_2 = 0.1326$. Logo a solução particular para a velocidade próxima de constante é

$$x(t) = 0,0883t^{\frac{5}{4}} - 0.0152t^{\frac{1}{4}} + 0.1326t^{\frac{-3}{4}}$$

Para $q = 1.5$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} + c_1 t^{\frac{1}{2}} + c_2 t^{-\frac{1}{2}},$$

e as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 1.13294$ obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} + c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se, $c_1 = -0.0045$ e $c_2 = 0.2523$. Logo, a solução particular para a equação com um meio termo entre a velocidade e aceleração constantes é

$$x(t) = 0.7523t^{\frac{3}{2}} - 0.0045t^{\frac{1}{2}} + 0.2523t^{-\frac{1}{2}}.$$

Para $q = 1.75$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^{\frac{7}{4}}}{\Gamma(\frac{7}{4} + 1)} + c_1 t^{\frac{3}{4}} + c_2 t^{-\frac{1}{4}}.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com $\Gamma(\frac{11}{4}) = 1.6084$ obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{1.6084} + c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{7}{7.4336} + \frac{3}{4}c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se $c_1 = -0.0065$ e $c_2 = 0.3717$. Logo, a solução particular para a aceleração próxima a constante é

$$x(t) = 0.6217t^{\frac{7}{4}} + 0.0065t^{\frac{3}{4}} + 0.3717t^{-\frac{1}{4}}$$

Para $q = 2$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^2}{\Gamma(2 + 1)} + c_1 t^1 + c_2 t^0.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(3) = 2$ obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 1 \\ 1 + c_1 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se $c_1 = 0$ e $c_2 = 0.5$. Logo, a solução particular para a aceleração constante é

$$x(t) = 0.5t^2 + 0.5$$

Para $q = 2.25$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^{\frac{9}{4}}}{\Gamma(\frac{11}{4} + 1)} + c_1 t^{\frac{5}{4}} + c_2 t^{\frac{1}{4}} + c_3 t^{-\frac{3}{4}}.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1 \\ x''(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(\frac{13}{4}) = 2,5493$ tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0,3923 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 0,8826 + \frac{5}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{3}{4}c_3 = 1 \\ 1,1032 + \frac{5}{16}c_1 - \frac{3}{16}c_2 + \frac{21}{16}c_3 = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é $c_1 = -0.0204$, $c_2 = 0.6143$ e $c_3 = 0.014$. Com isso a solução particular com aceleração próxima de constante é

$$x(t) = 0.3923t^{\frac{9}{4}} - 0.0204t^{\frac{5}{4}} + 0.6143t^{\frac{1}{4}} + 0.014t^{-\frac{3}{4}}.$$

Para $q = 2.5$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2} + 1)} + c_1 t^{\frac{3}{2}} + c_2 t^{\frac{1}{2}} + c_3 t^{-\frac{1}{2}}.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1 \\ x''(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} = 3.32335$ obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3 = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{14}c_1 - \frac{1}{4}c_2 + \frac{3}{4}c_3 = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é $c_1 = -0.0277$, $c_2 = 0.6527$ e $c_3 = 0.0741$. Com isso a solução particular para um meio termo entre a aceleração constante e o jerk constante é

$$x(t) = 0.3009t^{\frac{5}{2}} - 0.0277t^{\frac{3}{2}} + 0.6527t^{\frac{1}{2}} + 0.0741t^{-\frac{1}{2}}$$

Para $q = 2.75$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^{\frac{11}{4}}}{\Gamma(\frac{11}{4} + 1)} + c_1 t^{\frac{7}{4}} + c_2 t^{\frac{3}{4}} + c_3 t^{-\frac{1}{4}}.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1 \\ x''(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(\frac{15}{4}) = 4.4230$ obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0.2261 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 0.6497 + \frac{7}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3 = 1 \\ 1.1364 + \frac{21}{16}c_1 - \frac{3}{16}c_2 + \frac{5}{16}c_3 = 1 \end{cases}$$

Assim a solução é dada por $c_1 = -0.0532$, $c_2 = 0.6502$ e $c_3 = 0.1769$. Logo, a solução particular para o jerk próximo de constante é,

$$x(t) = 0.2261t^{\frac{11}{4}} - 0.0532t^{\frac{7}{4}} + 0.6502t^{\frac{3}{4}} + 0.1669t^{-\frac{1}{4}}$$

Para $q = 3$ usando (6.3) e (6.4) tem-se a solução geral,

$$x(t) = \frac{t^3}{\Gamma(3 + 1)} + c_1 t^2 + c_2 t^1 + c_3 t^0.$$

E as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x'(1) = 1 \\ x''(1) = 1. \end{cases}$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral e com o $\Gamma(4) = 6$ obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{3}{6} + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ \frac{3}{6} + 2c_1 + c_2 = 1 \\ 1 + 2c_1 = 1. \end{cases}$$

Cuja solução é $c_1 = 0$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 0.3333$. Portanto, a solução particular para o jerk constante é

$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}.$$

O Jerk, que quando traduzido ao português é conhecido como solavanco, é definido por (SCHOT, 1978) como a variação da aceleração, ou seja, a taxa com que a aceleração de um objeto muda em relação ao tempo. Quando o Jerk é positivo há uma aceleração, durante a arrancada de um veículo há um jerk positivo, quando é negativo há uma desaceleração,

por exemplo, em uma freada o jerk é negativo. Com isso o jerk é a terceira derivada da função posição,

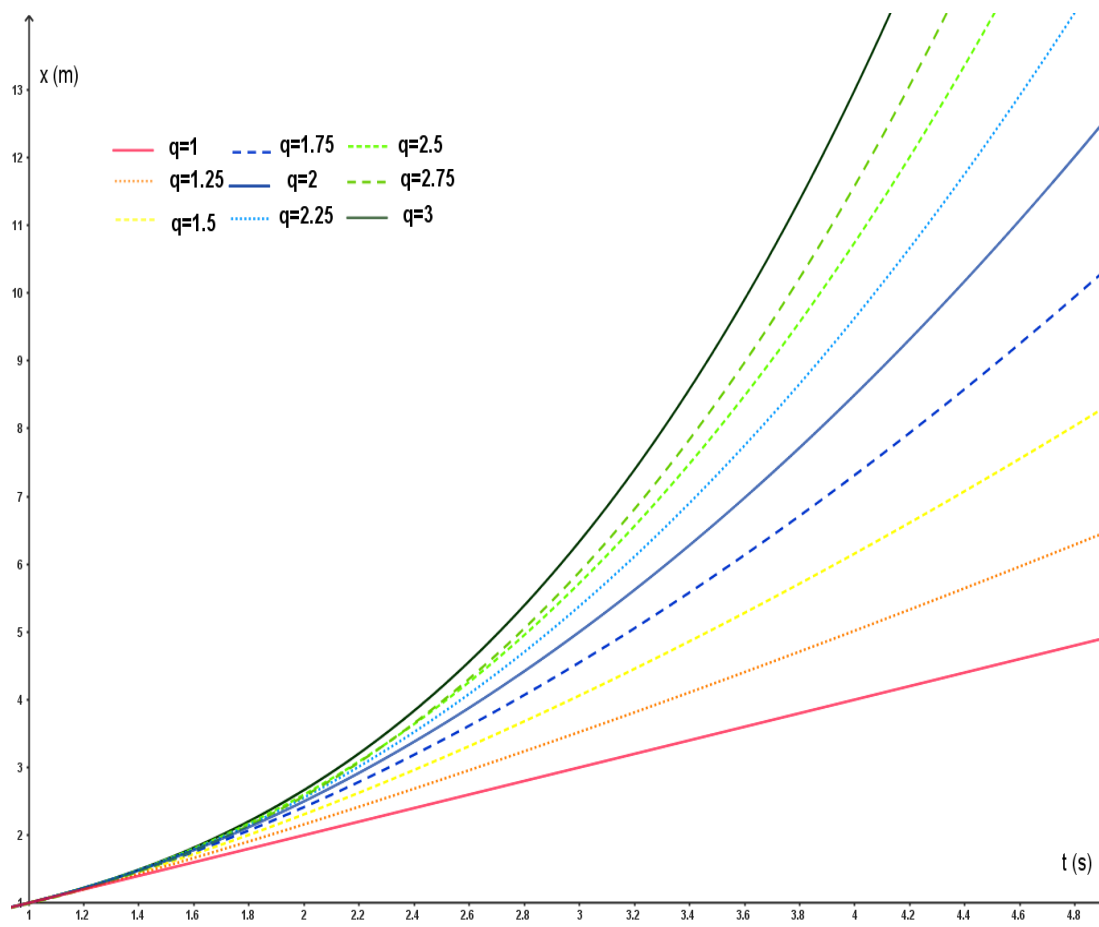
$$jerk(x) = \frac{d^3x(t)}{dt^3},$$

em que $x(t)$ representa a posição do objeto no instante t .

O desconhecimento do jerk é esclarecido por ele não entrar na formulação de conceitos dinâmicos como força, momento ou energia (SCHOT, 1978). Uma das aplicações do jerk pode ser encontrado na tese de (TORQUATO, 2019) que faz um estudo de como o jerk pode indicar a consistência geométrica de rodovias, analisando trechos em que saídas de pistas podem ser mais comuns, por falta de consistência geométrica entre as tangentes de aproximação e as curvas. Ou seja, a curva ter uma inclinação contrária ao sentido da curva ou ser uma curva muito fechada, nesse caso o jerk lateral, a variação da aceleração lateral do veículo durante a curva é muito alta, o que pode provocar acidentes em velocidades altas.

Na figura a seguir são apresentadas as soluções particulares obtidas anteriormente.

Figura 5 – Generalização da segunda lei de Newton



Fonte: Os autores, 2023.

Na Figura 5 são apresentadas as soluções de (6.2) para os valores de q calculados anteriormente e pode ser visto que as soluções fracionárias estão entre as soluções inteiras, as soluções para $q \in \{1.25, 1.5, 1.75\}$ estão entre a solução para $q = 1$ e $q = 2$, ou seja, as soluções podem ser vistas com acelerações próximas de constantes e velocidades próximas de constantes. Já as soluções para $q \in \{2.25, 2.5, 2.75\}$ estão entre $q = 2$ e $q = 3$, assim possuem aceleração e jerk próximo do constante.

6.2 GENERALIZAÇÃO FRACIONÁRIA DO DECAIMENTO RADIOATIVO

A lei do decaimento radioativo se baseia no fato de que certos materiais radioativos se desintegram de forma proporcional a quantidade de material presente, ou seja, a quantidade de massa do material que vai se desintegrar em um determinado período de tempo depende da massa do material existente (ALVES, 2014). Essa situação pode ser descrita pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t), \quad (6.5)$$

em que $m(t)$ é a massa remanescente e $k \in \mathbb{R}$ é a constante de decaimento, que depende do material considerado. Como (6.5) é uma equação separável, ela pode ser resolvida usando integração

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

Integrando em ambos os lados obtém-se:

$$\int \frac{dm}{m} = \int -kdt.$$

De onde segue que,

$$\ln |m| = -kt + c.$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados

$$|m| = ce^{-kt}.$$

Sendo c uma constante arbitrária positiva, segue que,

$$m(t) = ce^{-kt},$$

Utilizando uma condição inicial $m(0) = m_0$ que representa a massa conhecida no instante $t = 0$, tem-se,

$$m(t) = m_0e^{-kt}.$$

Equação Fracionária

Para obter a equação fracionária se substitui a ordem um da derivada em (6.5) por uma ordem α , com $0 < \alpha \leq 1$.

$$\frac{d^\alpha m(t)}{dt^\alpha} = -km(t).$$

Usando a transformada de Laplace, veja (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), tem-se:

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}m(0) = -kF(s),$$

dessa forma,

$$F(s) = m_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}.$$

Para voltar a variável original aplica-se a transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm k} \right] = E_\alpha(\pm kt^\alpha).$$

Na equação do decaimento é considerada a solução negativa, assim:

$$m(t) = m_0 E_\alpha(-kt^\alpha). \quad (6.6)$$

Note que E_α é a função de Mittag-Leffler e para $\alpha = 1$ se recupera a solução para a equação de ordem inteira.

6.2.1 Decaimento radioativo do Césio-137

O Césio-137 é um elemento químico radiativo que tem um tempo de meia vida de 30,17 anos (COLLINS; JARDIM; COLLINS, 1988). Como o tempo de meia vida é inversamente proporcional a constante k do decaimento radioativo, tem-se que a constante k pode ser calculada a partir de:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Em que $t_{\frac{1}{2}}$ é o tempo de meia vida e k é a constante de decaimento radioativo. Dessa forma, para o Césio-137 tem-se,

$$k = \frac{\ln 2}{30.17} = 0.0229747.$$

Com o resultado será calculado o decaimento radioativo desse elemento utilizando (6.6), considerando uma massa inicial de Césio-137 de $10kg$ e com $\alpha \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$. Para $\alpha = 1.5$, tem-se que

$$m(t) = 10 \cdot E_{1.5}(-0.0229747t^{1.5}) = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0.0229747t)^n}{\Gamma(1.5n + 1)}$$

é a solução de (6.6) para $\alpha = 1.5$.

Para $\alpha = 1.25$, tem-se que

$$m(t) = 10 \cdot E_{1.25}(-0.0229747t^{1.25}) = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0.0229747t)^n}{\Gamma(1.25n + 1)}$$

é a solução de (6.6) para $\alpha = 1.25$.

Para $\alpha = 1$, tem-se que

$$m(t) = 10 \cdot E_1(-0.0229747t) = 10 \cdot e^{-0.0229747t}$$

é solução de (6.6). Note que nesse caso a solução obtida coincide com a solução usual.

Para $\alpha = 0.75$, tem-se que:

$$m(t) = 10 \cdot E_{0.75}(-0.0229747t^{0.75}) = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0.0229747t)^n}{\Gamma(0.75n + 1)}$$

é a solução de (6.6) para $\alpha = 0.75$.

Para $\alpha = 0.5$, tem-se que

$$m(t) = 10 \cdot E_{0.5}(-0.0229747t^{0.5}) = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0.0229747t)^n}{\Gamma(0.5n + 1)}$$

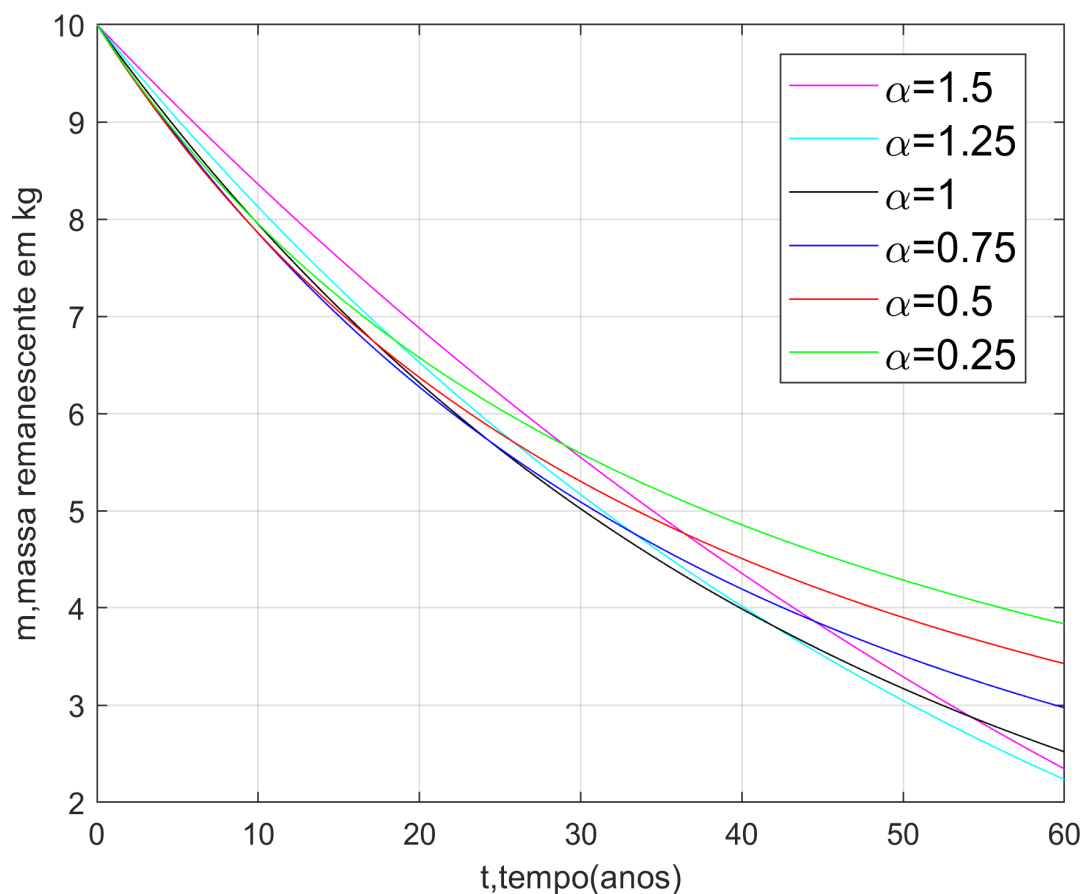
é a solução de (6.6) para $\alpha = 0.5$.

Para $\alpha = 0.25$ tem-se que

$$m(t) = 10 \cdot E_{0.25}(-0.0229747t^{0.25}) = 10 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0.0229747t)^n}{\Gamma(0.25n + 1)}$$

é a solução de (6.6) para $\alpha = 0.25$.

Figura 6 – Decaimento radioativo com os parâmetros $\alpha \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$



Fonte: Os autores, 2023.

A Figura 6 apresenta os gráficos das soluções do decaimento radioativo do Césio-137 para os seis valores de α considerados anteriormente. Note que para valores de $\alpha < 1$ o decaimento é mais lento se comparado ao tradicional ($\alpha = 1$). Para valores de $\alpha > 1$, na parte final do ciclo de decaimento, o processo é mais rápido, e na parte inicial do ciclo os decaimentos são mais lentos, inclusive quando comparados aos valores de $\alpha < 1$.

Essa aplicação do cálculo fracionário pode ajudar a compreender o decaimento radioativo do Césio-137, prevendo em quantos anos uma certa quantidade desse elemento se desintegra em sua totalidade no meio ambiente. O CF pode ser utilizado para prever o decaimento radioativo em situações diferentes das tradicionais, envolvendo alguma resistência ou condições adversas as usuais.

O desastre em Goiânia em 1987 é um exemplo de contaminação por esse elemento químico, que voltou os olhares do mundo para o Brasil (VIEIRA, 2013). Esse fato justifica o emprego do CF nessas situações, se tornando mais uma alternativa para o estudo do decaimento radioativo em casos de contaminações.

6.3 CRESCIMENTO POPULACIONAL

A equação do crescimento populacional é similar a equação do decaimento radiativo.

$$\frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha} = kP(t). \quad (6.7)$$

Se diferenciando apenas por ter a constante k positiva em situações de crescimento. Aqui $P(t)$ representa a população no instante t , com $P(0) = P_0$, a população inicial. As soluções inteiras e fracionárias são dadas por,

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

e

$$P(t) = P_0 E_\alpha(kt^\alpha). \quad (6.8)$$

respectivamente. Observe que se $\alpha = 1$, como $E_1(kt) = e^{kt}$, recupera-se a solução inteira.

6.3.1 Crescimento populacional do Brasil

O crescimento populacional do Brasil pode ser aproximado utilizando a solução fracionária da equação do crescimento populacional, dada em (6.8). A população inicial é dada por $P_0 = 214.326.223$ pessoas e uma taxa de crescimento $k = 0.005$, que corresponde ao ano de 2021, ano em que foram lançados os últimos dados oficiais da população brasileira (The World Bank, 2023).

Utilizando (6.8) e $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$ se obtém as seguintes soluções particulares: Para $\alpha = 1.4$, tem-se que

$$P(t) = 214.326.223 \cdot E_{1.4}(0.005t^{1.4}) = 214326223 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.005t)^n}{\Gamma(1.4n + 1)},$$

que é a solução particular de (6.8) para $\alpha = 1.4$.

Para $\alpha = 1.2$, segue que

$$P(t) = 214.326.223 \cdot E_{1.2}(0.005t^{1.2}) = 214.326.223 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.005t)^n}{\Gamma(1.2n + 1)},$$

que é a solução particular de (6.8) para $\alpha = 1.2$.

Para $\alpha = 1$ se obtém a solução tradicional com a função exponencial,

$$P(t) = 214.326.223 \cdot E_1(0.005t^1) = 214.326.223 \cdot e^{0.005t}.$$

Para $\alpha = 0.8$, tem-se que

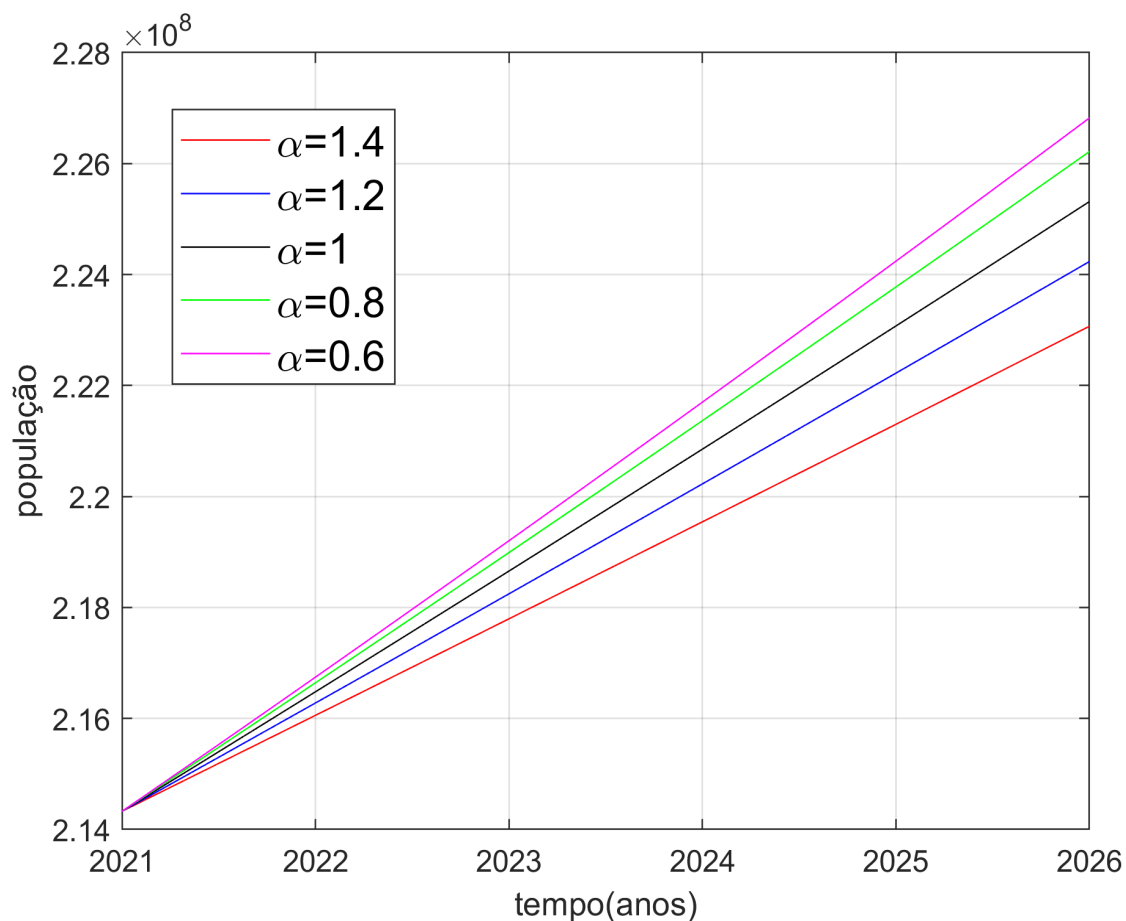
$$P(t) = 214.326.223 \cdot E_{0.8}(0.005t^{0.8}) = 214.326.223 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.005t)^n}{\Gamma(0.8n + 1)}.$$

Para $\alpha = 0,6$, segue que

$$P(t) = 214326223 \cdot E_{0,6}(0.005t^{0.6}) = 214.326.223 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.005t)^n}{\Gamma(0.6n + 1)}.$$

As soluções para o crescimento populacional do Brasil para $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$ serão plotadas na Figura 7.

Figura 7 – Crescimento populacional do Brasil com $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$



Fonte: Os autores, 2023.

A Figura 7 apresenta o crescimento populacional do Brasil para cinco valores de α , observando o gráfico é possível ver que o crescimento da população brasileira para valores de $\alpha < 1$ é maior que a solução para $\alpha = 1$, que é a solução tradicional, o que significa um crescimento maior ano após ano. Já para valores de $\alpha > 1$ o crescimento populacional do Brasil é menor que para $\alpha = 1$.

6.3.2 Crescimento populacional de uma população arbitrária

Considerando uma população de 2000 indivíduos e uma taxa de crescimento de 5% obtém-se as seguintes soluções particulares de (6.8) para $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$:

Para $\alpha = 1.4$, tem-se que

$$P(t) = 2000 \cdot E_{1.4}(0.05t^{1.4}) = 214326223 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.05t)^n}{\Gamma(1.4n + 1)},$$

que é a solução particular de (6.8) para $\alpha = 1.4$

Para $\alpha = 1.2$, segue que

$$P(t) = 2000 \cdot E_{1.2}(0.05t^{1.2}) = 2000 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.05t)^n}{\Gamma(1.2n + 1)},$$

que é a solução particular de (6.8) para $\alpha = 1.2$

Para $\alpha = 1$ se obtém a solução tradicional com a função exponencial,

$$P(t) = 2000 \cdot E_1(0.05t^1) = 2000 \cdot e^{0.05t},$$

que é a solução particular de (6.8) para $\alpha = 1$

Para $\alpha = 0.8$, tem-se que

$$P(t) = 2000 \cdot E_{0.8}(0.05t^{0.8}) = 2000 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.05t)^n}{\Gamma(0.8n + 1)},$$

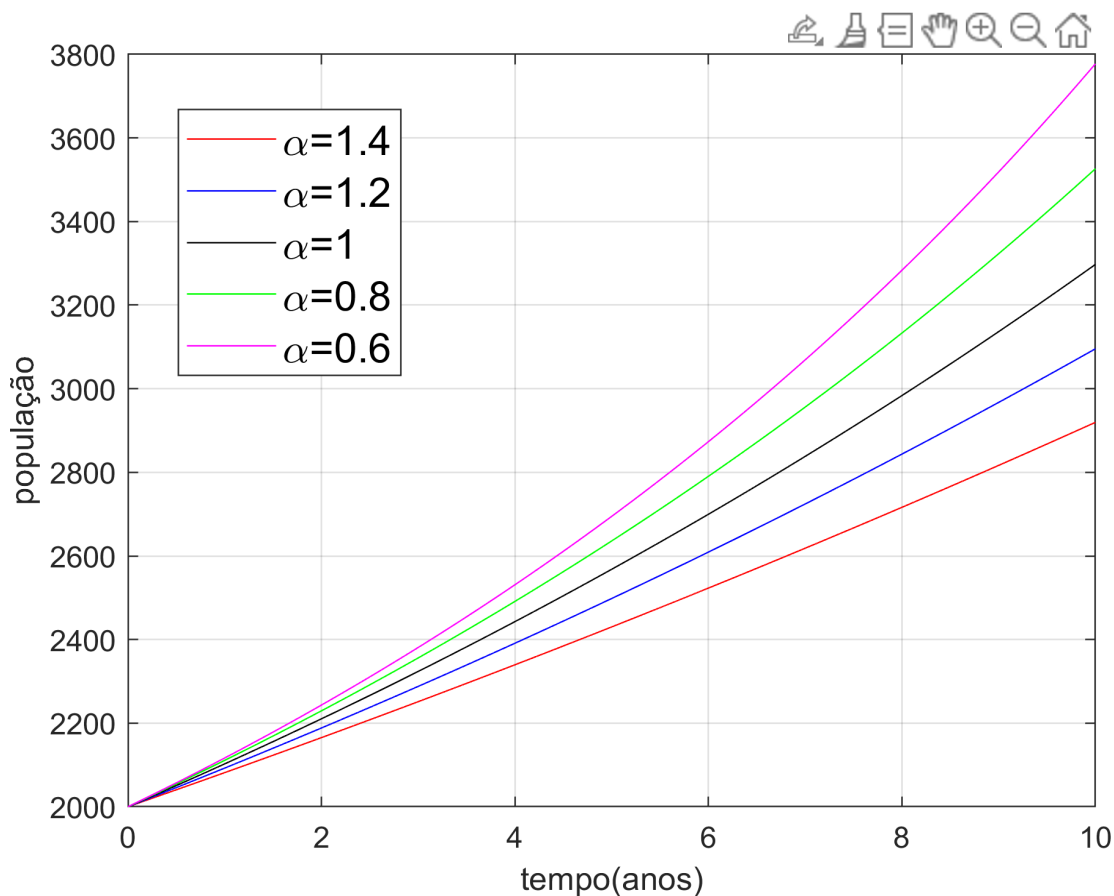
que é a solução particular de (6.8) para $\alpha = 0.8$

Para $\alpha = 0.6$, segue que

$$P(t) = 2000 \cdot E_{0.6}(0.05t^{0.6}) = 2000 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.05t)^n}{\Gamma(0.6n + 1)}.$$

Assim as soluções para o crescimento populacional dessa população, para $\alpha = \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$ serão plotadas na Figura 8.

Figura 8 – Crescimento populacional de uma população com 2000 indivíduos com $\alpha \in \{1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6\}$



Fonte: Os autores, 2023.

A Figura 8 apresenta cinco soluções para o crescimento de uma população com 2000 indivíduos, percebe-se que nesse gráfico as soluções para $\alpha < 1$ apresentam crescimentos maiores que a solução usual, com $\alpha = 1$. As soluções com $\alpha > 1$ possuem crescimentos menores que a solução usual.

Comparando a Figura 7 com a Figura 8 é perceptível que as curvas de crescimento da população arbitrária se distanciam mais da forma de uma reta que as curvas do crescimento da população brasileira. Isso acontece pela baixa taxa de crescimento da população brasileira, de 0.5% em comparação a taxa da população arbitrária, de 5%.

6.4 EQUAÇÃO LOGÍSTICA

A equação logística é dada por:

$$\frac{d}{dt}y(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_{\text{máx}}} \right), \quad (6.9)$$

em que $y(t)$ é a população no instante t , r é a taxa de crescimento e $Y_{\text{máx}}$ é o valor máximo da população. Introduzindo a mudança de variável $u(t) = \frac{y(t)}{y_{\text{máx}}}$, tem-se $\frac{du}{dt} = \frac{1}{y_{\text{máx}}} \frac{dy}{dt}$, então a equação fica:

$$y_{\text{máx}} \frac{du}{dt} = y_{\text{máx}} r u(t)(1 - u(t)),$$

ou, simplesmente

$$\frac{du}{dt} = r u(t)(1 - u(t)). \quad (6.10)$$

Note que essa equação é diferenciável e separável e não linear. Introduzindo a mudança $z(t) = \frac{1}{u(t)}$, tem-se

$$u(t) = z(t)^{-1}. \quad (6.11)$$

Derivando, segue que

$$\frac{du(t)}{dt} = -z(t)^2 \frac{dz(t)}{dt}. \quad (6.12)$$

Substituindo (6.11) e (6.12) em (6.10) tem-se

$$\begin{aligned} -z^2 \frac{dz}{dt} &= r z^{-1}(1 - z^{-1}) \\ &= r z^{-1} - r z^{-2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Multiplicando (6.13) por $z(t)^2$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{-dz(t)}{dt} &= r(-1 + z) \\ &= r(z - 1). \end{aligned}$$

Multiplicando por (-1) , segue que

$$\frac{dz}{dt} = r(1 - z). \quad (6.14)$$

Que é uma equação diferencial linear e separável, assim separando as variáveis em (6.14)

$$\frac{dz}{1 - z} = r dt.$$

Integrando,

$$-\ln|1 - z| = rt + c.$$

Multiplicando a equação por (-1) , segue que

$$\ln|1 - z| = -rt + c.$$

Aplicando a função exponencial,

$$|1 - z| = ce^{-rt}.$$

Então,

$$-z = ce^{-rt} - 1,$$

multiplicando a equação por (-1) , segue que

$$z = 1 - ce^{-rt},$$

voltando a variável $u(t)$,

$$\frac{1}{u} = -ce^{-rt} + 1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{-ce^{-rt} + 1}.$$

Voltando a variável $y(t)$,

$$y(t) = y_{\text{máx}} \frac{1}{-ce^{-rt} + 1}.$$

Que é a solução geral de (6.9). Considerando a condição inicial $y_0 = y(0)$, tem-se que

$$y_0 = y(0) = y_{\text{máx}} \frac{1}{-c + 1}.$$

Então,

$$-y_0 \cdot c + y_0 = y_{\text{máx}},$$

assim,

$$c = \frac{y_{\text{máx}} - y_0}{-y_0} = \frac{y_0 - y_{\text{máx}}}{y_0}.$$

Com isso a solução particular é:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{y_{\text{máx}}}{- \left(\frac{-y_{\text{máx}} + y_0}{y_0} \right) e^{-rt} + 1} \\ &= \frac{y_{\text{máx}} y_0}{\left(\frac{y_{\text{máx}} y_0 - y_0}{e^{rt}} \right) + y_0} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Note que, $y(0) = y_0$ e que se $t \rightarrow \infty$ então $y(t) \rightarrow y_{\text{máx}}$.

6.4.1 Generalização Fracionária

A generalização fracionária pode ser obtida substituindo a ordem da derivada em (6.14) por α , assim,

$$\frac{d^\alpha z(t)}{dt^\alpha} = r(1 - z). \quad (6.16)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (6.16) se obtém:

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} z(0) = r \left[\frac{1}{s} - F(s) \right].$$

Logo,

$$F(s) = s(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r} + r \frac{s^{-1}}{s^\alpha + r}. \quad (6.17)$$

Para recuperar a equação em t , se aplica a transformada inversa em (6.17), o que implica em,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \pm r} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm kt^{\alpha}).$$

Onde $E_{\alpha,\beta}$ é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros mostrada na Definição 7. Desse modo, com algumas manipulações envolvendo a transformada de Laplace, que podem ser conferidas no livro do Camargo e Oliveira (2015) se encontra que:

$$y(t) = \frac{y_{\text{máx}} y_0}{\left(\frac{y_{\text{máx}} - y_0}{E_{\alpha}(rt)} \right) + y_0} \quad (6.18)$$

Note que se $\alpha = 1$ tem-se a solução dada em (6.4).

6.4.2 Ajuste de curva com a solução fracionária da equação logística

A partir da solução fracionária da equação logística dada em (6.18) será feito um ajuste de curva, considerando a pandemia do covid-19 na cidade de Chapecó. O ajuste será feito com dados referentes aos infectados acumulados dessa cidade, serão considerados 42 dias, iniciando com o dia 18 de março de 2020 (Prefeitura Municipal de Chapecó, 2023).

Nesse ajuste será considerado que os infectados acumulados em função do tempo, podem ser descritos pela curva logística, hipótese similar a do trabalho de Zeiser, Gaio e Borges (2021). O ajuste de curvas que será feito nesta aplicação também é similar ao trabalho citado, se diferenciando exclusivamente no uso fracionário da solução da equação logística.

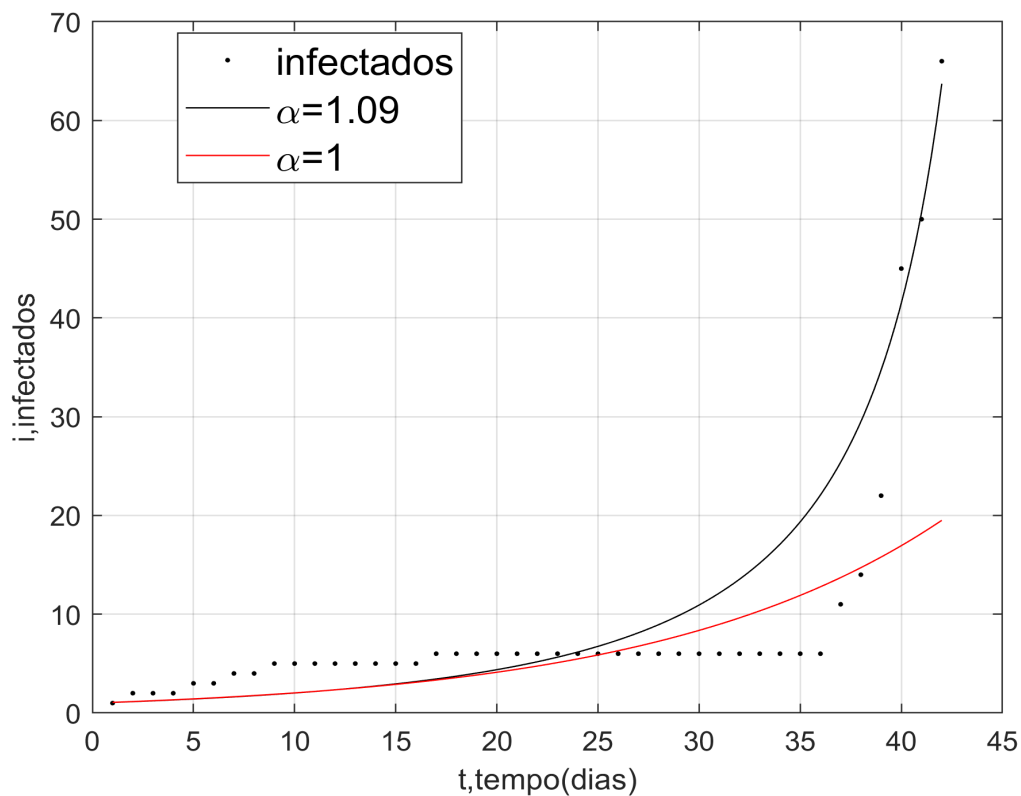
O ajuste proposto nesse resultado pretende mostrar que para determinados casos a curva fracionária apresenta um melhor coeficiente de correlação. O coeficiente de correlação é comumente utilizado para medir a qualidade de um ajuste de curvas, um bom ajuste é descrito por um coeficiente de correlação próximo de um e é dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i'')^2}{\sum_{i=1}^n (x' - x_i'')^2},$$

em que R^2 é o coeficiente de correlação, x_i é o valor ajustado da variável, x_i'' é o dado coletado da variável, x' é a média dos dados coletados e n é o número de dados coletados.

Com isso será apresentada a Figura 9, que mostra o ajuste feito com os dados descritos anteriormente e (6.18) com $\alpha = 1$ e $\alpha = 1.09$.

Figura 9 – Ajuste de curvas dos infectados por covid-19 em Chapecó-SC



Fonte: Os autores, 2023.

Com o ajuste da Figura 9 é possível ver que para algumas situações a curva fracionária apresenta um resultado mais aprimorado, o que também é garantido pelo coeficiente de correlação. Para a solução com $\alpha = 1$, que coincide com a solução tradicional da equação logística, foi obtido um coeficiente de correlação de 0.3964, o que descreve um ajuste ruim, já para $\alpha = 1.09$ foi obtido um coeficiente de correlação de 0.8169, o que descreve um bom ajuste de curva.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cálculo fracionário que teve sua origem em 1695 com Leibniz e l'Hôpital que em uma carta mencionaram a derivada de meia ordem, se desenvolveu e hoje é visto como o cálculo da modernidade. E promete aprimorar os resultados de várias aplicações, e também resolver problemas que não são resolvidos com o cálculo clássico. Como fez Heaviside no final do século XIX, que resolveu problemas na físico-matemática.

Também há grande destaque para as evoluções das integrais e derivadas fracionárias, foram muitas definições ao longo dos anos até chegar as definições mais utilizadas, que são a integral fracionária de Riemann-Liouville e derivada fracionária de Caputo. Ambas as definições foram bem exploradas com exemplos envolvendo a função polinomial, o seno, cosseno e a exponencial.

No Brasil houve um aumento considerável nas publicações e aplicações do cálculo fracionário a partir da publicação do livro de Camargo e Oliveira em 2015. A partir desse ano várias teses e dissertações envolvendo o CF foram desenvolvidas no Brasil, algumas delas são apresentadas brevemente no final do segundo capítulo desse trabalho.

No terceiro capítulo foram apresentadas e exploradas as funções gama, beta e de Mittag-Leffler. Também foram demonstrados alguns teoremas importantes para a continuidade do trabalho, como a relação entre a função beta e a função gama. A função de Mittag-Leffler foi definida e explorada através de um gráfico com alguns valores de α .

Em seguida a integral fracionária de Riemann-Liouville foi definida a partir da integral iterada de Cauchy e foram resolvidas as integrais das funções polinomiais, seno, cosseno e exponencial. Ao longo desses exemplos os resultados foram comparados a integral clássica de primeira ordem. Em todo esse trabalho foi utilizada a definição de integral fracionária a esquerda, por ela ser interpretável fisicamente.

As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville também são definidas, ambas dependem da definição de integral fracionária de Riemann-Liouville. A derivada de Caputo é a mais explorada, por ter a derivada da função constante igual a zero. Além da derivada da função constante, as funções polinomiais, seno, cosseno e exponencial são derivadas com a definição de Caputo, os resultados são comparados ao cálculo tradicional.

No penúltimo capítulo foram feitas as aplicações do cálculo fracionário que envolveram a generalização da segunda lei de Newton. Que possibilita aproximações para situações em que a aceleração, a velocidade e o jerk não são constantes. Também é calculado o decaimento radioativo do Césio-137 com ordens fracionárias maiores e menores que um. O que pode ser utilizado em condições adversas as usuais.

Quanto ao crescimento populacional, foram feitas duas simulações, uma arbitrária envolvendo uma pequena população e outra com a população brasileira. Essas duas simulações são exemplos de aplicações do CF, em um determinado período de tempo

certa população pode estar crescendo conforme uma das soluções fracionárias, e dessa forma a versão fracionária pode descrever o crescimento de uma forma mais precisa que a solução clássica.

A última aplicação que foi feita com a equação logística descreve o que as outras aplicações feitas no trabalho poderiam representar em uma modelagem. A solução fracionária permite um ajuste de curva mais eficiente que a solução clássica. Com essas aplicações conclui-se que o cálculo de ordem arbitrária promete modelar alguns fenômenos com mais precisão que o cálculo clássico, sendo uma alternativa para o desenvolvimento matemático de várias áreas.

A evolução do CF se torna importante para a matemática, mostrando que o cálculo clássico não está completo. Que ele não é sempre a melhor alternativa de modo similar ao que aconteceu com a mecânica clássica, que se mostrou incompleta com o surgimento das teorias de Einstein sobre a mecânica quântica (CAMARGO, 2009).

Dessa forma o objetivo principal desse trabalho, o de produzir um material introdutório ao cálculo fracionário foi atingido. Além de mostrar algumas aplicações, assim como compara-lo com o cálculo clássico.

Uma continuação natural desse trabalho seria a exploração de outras definições de derivadas e integrais, que foram mencionadas na revisão histórica. Na construção dos conceitos necessários para o cálculo fracionário de várias variáveis e na aplicação do CF a problemas que são descritos por equações diferenciais parciais.

REFERÊNCIAS

- ALVES, W. B. Sobre a datação por decaimento radioativo. **CONNECTION LINE-REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG**, n. 5, 2014. Disponível em: <https://scholar.archive.org/work/y3x3pjktbcnlohtldejvmvsd4/access/wayback/http://www.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/download/122/373>.
- ANDRADE, A. M. F. d.; LIMA, E. G. D.; DARTORA, C. A. Uma introdução ao cálculo fracionário e suas aplicações em circuitos elétricos. **Revista Brasileira De Ensino De Física**, São Paulo, v. 40, n. 3, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/i/2018.v40n3/>. Acesso em: 25 mar. 2023.
- CAMARGO, R. d. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese (Doutorado em Matemática) — (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNICAMP-30_2a21d7a1c5f14c01911639f56e9a7865. Acesso em: 25 mar. 2023.
- CAMARGO, R. d. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- CAPUTO, M.; MAINARDI, F. A new dissipation model based on memory mechanism. **Pure and Applied Geophysics**, Basileia, v. 91, n. 1, p. 134–147, 1971. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00879562>. Acesso em: 25 mar. 2023.
- CARDOSO, L. C.; SANTOS, F. L. P. d.; CAMARGO, R. D. F. Método de diferenças finitas não local aplicado ao cálculo fracionário. **C. Q. D. -Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 7, p. 44–54, dez. 2016. Disponível em: <https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br/index.php/buscar-primario.html>. Acesso em: 25 mar. 2023.
- CARVALHO, M. D. d.; OTTONI, J. E. Introdução ao cálculo fracionário com aplicações. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 5, n. 1, p. 50–77, maio 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/issue/view/87>. Acesso em: 25 mar. 2023.
- COLLINS, K. E.; JARDIM, I.; COLLINS, C. O que é cézio-137. **Química nova**, v. 11, 1988. Disponível em: http://static.sites.sbq.org.br/quimicanova.sbq.org.br/pdf/Vol11No2_169_v11_n2_%281%29.pdf.
- COSTA, F. S. **Função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário**. Tese (Doutorado em Matemática) — (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNICAMP-30_fa1bdd8496de5eaf0cfbc8ebed2b3941. Acesso em: 25 mar. 2023.
- DAS, S. **Kindergarden of Fractional Calculus**. 1. ed. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2020.
- DAVIS, T. H. **The Theory of Linear Operators**. 1. ed. Bloomington: The Principia Press, 1936.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. 1. ed. Amsterdam: Elsevier, 2006.

LOPES, M. M. et al. Sobre o efeito de memória no cálculo fracionário. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL, XL., 2021, Evento Virtual. **Anais[...]**. evento virtual: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1997. p. 443. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3625>. Acesso em: 25 mar. 2023.

MAYERGOYZ, I. **MATHEMATICAL MODELS OF HYSTERESIS AND THEIR APPLICATIONS**. 2. ed. New York: Elsevier, 2003.

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. 1. ed. New York: John Wiley Sons, 1993.

OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. **The Fractional Calculus. Mathematics in Science and Engineering I Calculus and Fractional Differential Equations**. 1. ed. New York: Academic Press, 1974.

OLIVEIRA, A. d. S. C. Mestrado em Matemática, **Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas**. Campinas: [s.n.], 2018. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/pos-graduacao/calculo-fracionario-contribuicoes-historicas-aplicacoes-fisicas>. Acesso em: 25 mar. 2023.

OLIVEIRA, H. S. Mestrado em Matemática, **Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária**. Campinas: [s.n.], 2010. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNICAMP-30_d7891be9326168f32c74645be02d8397. Acesso em: 25 mar. 2023.

Prefeitura Municipal de Chapecó. **Covid-19**. 2023. Disponível em: <https://www.chapeco.sc.gov.br/>.

RAMOS, P. F. P.; CAMARGO, R. d. F. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. **C. Q. D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, n. 2, p. 53–66, 2012. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v01a03-calculo-fracionario-aplicado.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2023.

RICIERI, A. **Derivada Fracionária, Transformada de Laplace e Outros Bichos**. São Paulo: Prandiano, 1993.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. d. Solução da equação de Bessel via cálculo fracionário. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 37, n. 3, 2015a. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/3pKVn38WjH5QR3SmgmqG3Bz/?lang=pt>. Acesso em: 25 mar. 2023.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. d. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 37, n. 3, 2015b. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/b4xMfpYPLGwrd8RBXWZrbqK/?lang=pt>. Acesso em: 25 mar. 2023.

SCHOT, S. H. Jerk: the time rate of change of acceleration. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 46, n. 11, p. 1090–1094, 1978. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/46/11/1090/1043438/Jerk-The-time-rate-of-change-of-acceleration>. Acesso em: 25 abr. 2023.

The World Bank. **População total do Brasil**. 2023. Disponível em: <https://data.worldbank.org/indicador/SP.POP.TOTL>.

TIEPPO, S. M.; GUZZO, S. M. Elementos do cálculo fracionário. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática- JEEPEMA**, Maringá, v. 2, n. 1, p. 45–79, 2018. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/jeepema>. Acesso em: 25 mar. 2023.

TORQUATO, T. L. L. **Jerk como um indicador de consistência geométrica para rodovias**. Tese (Doutorado em ciências e engenharia dos transportes) — (Escola de Engenharia) – Universidade Estadual de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18143/tde-17022020-194737/pt-br.php>. Acesso em: 26 abr. 2023.

TORRELLI, P. G. P. Mestrado em Matemática, **Uma Introdução ao Cálculo Fracionário e sua Aplicação ao Problema das Equações de Onda-Difusão Tempo-Fracionárias**. Maringá: [s.n.], 2021. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEM-10_fba9557eaa86761551df83072aec8ef7. Acesso em: 25 mar. 2023.

VIEIRA, S. A. Césio-137, um drama recontado. **Estudos avançados**, SciELO Brasil, v. 27, p. 217–236, 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ea/a/pWxC3bW79km3cRFB83DXX3B/abstract/?lang=pt>.

ZEISER, M. H.; GAIO, S. M.; BORGES, P. A. P. Ovid 19: Modelo matemático de apoio decisão sobre medidas de restrição do contato social. In: SBEM-SC, VIII., 2021, Evento Virtual. **Anais[...]**. evento virtual: Encontro catarinense de educação matemática, 2021. Disponível em: <http://eventos.sbem.com.br/index.php/SC/ECM/schedConf/presentations>. Acesso em: 25 jun. 2023.