

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ – UFFS
METRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

JANAINA ESTELA PINHEIRO

**ENSINO DE TRIGONOMETRIA A PARTIR DE OBJETOS VIRTUAIS DE
APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE POSSIBILIDADES**

CHAPECÓ – SC

2023

JANAINA ESTELA PINHEIRO

**ENSINO DE TRIGONOMETRIA A PARTIR DE OBJETOS VIRTUAIS DE
APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE POSSIBILIDADES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

Coorientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

CHAPECÓ – SC

2023

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Pinheiro, Janaina Estela
ENSINO DE TRIGONOMETRIA A PARTIR DE OBJETOS VIRTUAIS
DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE POSSIBILIDADES / Janaina
Estela Pinheiro. -- 2023.
90 f.:il.

Orientador: Doutor Vitor José Petry
Co-orientadora: Rosane Rossato Binotto
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da
Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional
em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2023.

1. GeoGebra. 2. Imaginação Pedagógica. 3. Tecnologias
Digitais. 4. Educação Básica. I. Petry, Vitor José,
orient. II. Binotto, Rosane Rossato, co-orient. III.
Universidade Federal da Fronteira Sul. IV. Título.

JANAINA ESTELA PINHEIRO

**ENSINO DE TRIGONOMETRIA A PARTIR DE OBJETOS VIRTUAIS DE
APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE POSSIBILIDADES**

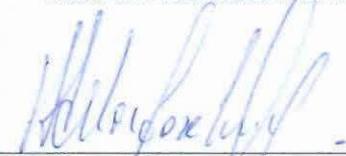
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

Coorientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto

Aprovado(a) em: 27/11/2023.

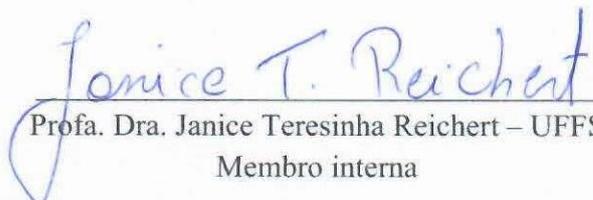
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS
Orientador



Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto – UFFS
Coorientadora



Profa. Dra. Janice Teresinha Reichert – UFFS
Membro interna



Profa. Dra. Olga Harumi Saito – UTFPR
Membro externa

Chapecó – SC, novembro de 2023

Dedico a minha mãe, Estela, *in memoriam*,
minha maior inspiração.

Ao meu companheiro de vida, Rodrigo, meu
porto seguro.

Ao meu sobrinho e afilhado, Davi Lucas, um
anjo em minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus por oportunizar a experiência de realizar este trabalho.

Ao meu marido, Rodrigo Santin, pelo companheirismo e incentivo diário. Seu apoio foi fundamental durante todo o curso.

À minha família e amigos, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis.

Aos professores do curso, pelos ensinamentos e incentivo. Em especial, ao meu orientador professor, Dr. Vitor José Petry, pela motivação e dedicação durante todo o processo de construção deste trabalho, e minha coorientadora, professora Dra. Rosane Rossato Binotto, pela dedicação e contribuições com este trabalho.

Ao Fundo Estadual de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior de Santa Catarina (FUMDES), pelo incentivo financeiro.

RESUMO

Considerando a relevância que o uso de tecnologias digitais (TD) tem como ferramenta de ensino e aprendizagem, em especial na Matemática, buscou-se evidenciar possibilidades e potencialidades do uso de objetos virtuais de aprendizagem (OVA), construídos no *software* GeoGebra, para o ensino e aprendizagem de Trigonometria e funções trigonométricas no Ensino Médio. O material foi organizado no formato de livro no GeoGebra on-line, em uma sequência didática, que apresenta os objetos de conhecimento de forma a contemplar conceitos, construções e questões a serem respondidas pelos estudantes que venham a manipular os OVA. Este trabalho caracterizou-se como uma pesquisa de natureza qualitativa propositiva, baseada em um exercício de imaginação pedagógica (IP) na perspectiva proposta por Skovsmose (2015), desenvolvida pela autora e sete professores de Matemática da Educação Básica. A partir da análise evidenciaram-se algumas possibilidades e potencialidades de uso do material para o ensino e aprendizagem dos objetos de conhecimento abordados, em especial por proporcionar ao professor maior dinamicidade para trabalhar os conceitos explorados e ao estudante a possibilidade de interagir com o material de estudo.

Palavras-chave: GeoGebra; Imagem pedagógica; Tecnologias Digitais. Educação Básica.

ABSTRACT

Considering the relevance that the digital technologies (DT) use has as a teaching and learning tool, especially in Mathematics, we sought to highlight possibilities and potentialities of using virtual learning objects (OVA), built in the GeoGebra software, for the teaching and learning trigonometry and trigonometric functions in high school. The material was organized as a didactic sequence in book format in online GeoGebra, which presents the objects of knowledge in a way that includes concepts, constructions and questions to be answered by students who will manipulate the OVA. This work was characterized as research of a purposeful qualitative nature, based on a pedagogical imagination (PI) exercise from the perspective proposed by Skovsmose (2015), developed by the author and seven Mathematics teachers. From the analysis, some possibilities and potential for the material using for teaching and learning the objects of knowledge covered were highlighted, in particular by providing the teacher with greater dynamics to work on the concepts explored, and the student the possibility of interacting with the material of study.

Keywords: GeoGebra; Pedagogical imagination; Digital Technologies. Basic Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Dinâmica da pesquisa: transformações via imaginação pedagógica	27
Figura 2 – OVA 1: semelhança de triângulos	36
Figura 3 – OVA 2: razão entre pares de segmentos proporcionais dos triângulos semelhantes	38
Figura 4 – OVA 3: razões entre os lados do triângulo retângulo	39
Figura 5 – OVA 4: seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo	40
Figura 6 – OVA 5: medida linear de um arco	41
Figura 7 – OVA 6: medida linear da circunferência de raio r	42
Figura 8 – OVA 7: circunferência dividida em arcos de 1°	43
Figura 9 – OVA 8: medida angular em radiano	44
Figura 10 – OVA 9: circunferência dividida em arcos com medida em radianos para dois valores diferentes de α	45
Figura 11 – OVA 10: quadrantes e sentidos no ciclo trigonométrico	46
Figura 12 – OVA 10: sentido positivo e negativo no ciclo trigonométrico	47
Figura 13 – OVA 11: relação entre os ângulos notáveis 30° , 45° e 60° e ângulos de outros quadrantes	48
Figura 14 – OVA 11: valor de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico	49
Figura 15 – OVA 11: valor de seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° no ciclo trigonométrico	50
Figura 16 – OVA 12: valor de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um ângulo	52
Figura 17 – OVA 13: gráfico da função seno.....	54
Figura 18 – OVA 13: gráfico da função tangente.....	55
Figura 19 – OVA 13: gráfico da função cossecante	56
Figura 20 – OVA 14: gráfico da função $G(x) = A + C\text{sen}(Dx + B)$	57
Figura 21– OVA 15: gráfico da função $F(x) = A + C\text{cos}(Dx + B)$	60
Figura 22 – OVA 16: gráfico da função $H(x) = A + C\text{tg}(Dx + B)$	61
Figura 23 – OVA 17: gráfico que representa uma onda sonora e suas características	62
Figura 24 – OVA 18: gráfico de uma onda sonora.....	63

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
C	Comprimento da circunferência
CAd	Cateto adjacente
COp	Cateto oposto
Hip	Hipotenusa
IP	Imaginação pedagógica
OVA	Objeto(s) virtual(is) de aprendizagem
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
rad	Radiano
SA	Situação arranjada
SC	Situação corrente
SI	Situação imaginada
TD	Tecnologias digitais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MARCO TEÓRICO.....	18
2.1	TECNOLOGIAS DIGITAIS	18
2.1.1	GeoGebra.....	21
2.1.2	As tecnologias e os documentos norteadores da Educação Básica	24
2.2	IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA.....	25
3	DELINEAMENTO METODOLÓGICO	31
4	RESULTADOS E IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA NA PERSPECTIVA DA AUTORA	35
4.1	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (OVA 1 E 2).....	36
4.2	SENO, COSSENO E TANGENTE NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (OVA 3 E 4)	38
4.3	MEDIDA LINEAR E A MEDIDA ANGULAR DE UM ARCO (OVA 5, 6, 7, 8 E 9)	41
4.4	CICLO TRIGONOMÉTRICO (OVA 10).....	46
4.5	RELAÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO (OVA 11 E 12).....	47
4.6	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (OVA 13).....	54
4.7	FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE TRANSLADADAS (OVA 14, 15 E 16).....	57
4.8	ONDAS SONORAS: UMA APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA (OVA 17 E 18)	62
5	IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA NA PERSPECTIVA DOS PROFESSORES. 65	
5.1	PERCEPÇÕES INICIAIS DOS PROFESSORES COM RELAÇÃO AO USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS	65
5.2	FUNCIONALIDADE E APRESENTAÇÃO DOS OVA	68
5.3	POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO MATERIAL PARA A APRENDIZAGEM ..	69
5.4	POTENCIALIDADES, SUGESTÕES E POSSIBILIDADES DE USO DO MATERIAL.....	72
5.5	DIFICULDADES ENCONTRADAS, SUGESTÕES PARA MELHORAR O MATERIAL E OUTROS OBJETOS DE CONHECIMENTO QUE PODEM SER	

	EXPLORADOS	79
5.6	PERCEPÇÕES GERAIS DOS PROFESSORES SOBRE O MATERIAL	81
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

As metodologias para o ensino da Matemática na Educação Básica são tema de muita reflexão e discussão entre os professores que ministram essa disciplina. Percebe-se que as tecnologias digitais (TD) são recursos que os professores buscam para compor metodologias utilizadas nas aulas de Matemática. Outro ponto a ser considerado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática é a abordagem dos objetos de conhecimento considerados abstratos e de difícil compreensão por muitos estudantes como, por exemplo, a Trigonometria. Por consequência, a sua abordagem pode ser considerada complexa por parte dos professores, que almejam métodos variados a fim de superar as dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Assim, neste trabalho buscou-se alternativas para essas demandas, propondo possibilidades, a partir do uso das TD, em especial do *software* GeoGebra, para superar empecilhos e promover alternativas para o ensino e aprendizagem da Trigonometria. Deve-se considerar a importância do professor, enquanto mediador do processo, estar sempre em busca de novos métodos de abordagem dos objetos de conhecimento, visando a aprendizagem destes.

Os aparatos tecnológicos tornaram-se ferramentas indispensáveis para a sociedade em todos os segmentos, isso faz com que essas estejam presentes no dia a dia das pessoas, de forma direta ou indireta, e com a educação não poderia ser diferente. Para Audino e Nascimento (2010) as escolas cada vez mais se informatizam e aderem à realidade da era do computador e da internet.

Como a tecnologia faz parte da vida cotidiana do estudante, seu uso na sala de aula pode trazer benefícios para o ensino e a aprendizagem. Neste sentido, o uso de ferramentas tecnológicas vem ganhando espaço no ambiente escolar com o intuito de abordar os objetos de conhecimento de maneira atrativa e dinâmica, e atingir os objetivos almejados. Borges e Scheffer (2018), ponderam que utilizar tecnologias no ensino da Matemática pode contribuir para alcançar os objetivos pretendidos pelos professores dessa disciplina.

Kenski (2003, p. 52), comenta que as “tecnologias digitais de informação e comunicação criam novos tempos e espaços educacionais”. Assim, as alterações no processo de ensino e aprendizagem são fundamentais para ajudar a suprir as necessidades que a sala de aula impõe. Com isso, os docentes estão mais empenhados com relação ao uso da tecnologia,

visando contribuir e tornar o processo de ensino e aprendizagem mais atrativo, em especial, o da Matemática.

Para Bona (2009, p. 36) “as novidades tecnológicas e a grande variedade de *softwares* educativos [...] podem contribuir expressivamente para facilitar o processo ensino-aprendizagem e oferecer para o professor diferentes e enriquecedoras alternativas didáticas”. Além disso, o uso da tecnologia pode ser motivador para o estudante, visto que é uma ferramenta capaz de proporcionar que este seja protagonista de sua aprendizagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento norteador da Educação Básica, prevê o uso das TD no ensino de Matemática e suas Tecnologias a partir de um conjunto de habilidades tendentes “às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 540).

A aplicação dos objetos de conhecimento matemático é outra forma de contribuição para o ensino da Matemática. Uma vez que a Matemática também descreve fenômenos do cotidiano, levar essa relação para sala de aula pode possibilitar que o processo de aprendizagem ocorra de maneira mais dinâmica. Deve-se considerar que relacionar objeto de estudo matemático com situações-problema do cotidiano pode fazer mais sentido para os estudantes. O uso de atividades de aplicação nas aulas no Ensino Médio é citado pela BNCC, ao mencionar que “no Ensino Médio, o desenvolvimento do pensamento científico envolve aprendizagens específicas, com vistas a sua aplicação em contextos diversos” (BRASIL, 2018, p. 548). Percebe-se que as tradicionais aulas de Matemática, em que o estudante não é ativo, estão ficando ultrapassadas, por isso a sua ressignificação passa a ser cada vez mais necessária para atender às expectativas do processo de ensino e aprendizagem.

Para Guarda e Petry (2020, p. 708), “na perspectiva de um professor mediador dos processos de aprendizagem, cabe a ele a busca por métodos e estratégias que auxiliem o aluno na compreensão e representação dos objetos de estudo, visando torná-los mais significativos”. Nesse sentido e considerando que o avanço tecnológico está cada vez mais acelerado, é importante que o professor busque utilizar TD e metodologias variadas para diversificar as aulas e torná-las mais dinâmicas, focando em alcançar os objetivos da aprendizagem.

Os objetos virtuais de aprendizagem (OVA), são também, uma forma de utilizar as tecnologias nas aulas de Matemática. Com os OVA o professor tem a possibilidade de apresentar conceitos para os estudantes, de uma forma mais prática, proporcionando a

interação deles com objetos de uma forma diferente do tradicional, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem. Além disso, propor a manipulação dos OVA nas aulas de Matemática é uma forma de envolver o estudante, possibilitando seu aprendizado e contribuindo para seu desenvolvimento, despertando nele habilidades importantes para a vida, como raciocínio lógico, autonomia para resolver problemas, proatividade e protagonismo.

Para Borges e Scheffer (2018, p. 63), utilizar objetos virtuais no processo de ensino e aprendizagem pode “ressignificar a prática pedagógica, pois o processo de ensino e de aprendizagem beneficia-se de várias linguagens e métodos para o ensino. Diante disso, o uso deles em sala de aula poderá ser um facilitador para atender os objetivos da disciplina”. Assim, um OVA pode ser um recurso com potencialidades para o ensino de conceitos abstratos, como os presentes na Trigonometria, estudada no Ensino Médio, pois através da interação com o objeto, os conceitos envolvidos podem ser compreendidos mais facilmente.

Sendo assim, constituiu-se como problema de pesquisa deste trabalho, identificar possibilidades e potencialidades para o uso de OVA, na abordagem de conceitos relacionados ao estudo da Trigonometria no Ensino Médio. Na tentativa de responder a esta questão, buscou-se evidenciar a importância de utilizar as TD como metodologia de ensino da Matemática, bem como a relevância do uso de OVA para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, e ainda, as possibilidades e potencialidades que os OVA propostos podem proporcionar no processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria.

O presente trabalho teve por objetivo elaborar um material, usando o *software* GeoGebra, na forma de OVA voltado para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, acompanhados de um estudo de possibilidades e potencialidades por meio de um exercício de imaginação pedagógica (IP), realizado pela autora e por professores de Matemática da Educação Básica. Com o propósito de alcançar o objetivo proposto, delinear-se alguns tópicos considerados ao longo do processo de construção do trabalho: o uso de TD como ferramenta de ensino na Matemática; construção de OVA no GeoGebra, a fim de explorar os conceitos envolvidos no estudo da Trigonometria no Ensino Médio; elaboração de sequência didática que aborda conceitos, propriedades e aplicações da Trigonometria, como por exemplo, funções trigonométricas e o seu uso nas ondas sonoras; análise de possibilidades e potencialidades que os OVA construídos proporcionam no ensino de Trigonometria, na percepção da autora e de professores de Matemática da Educação Básica. Essa análise realizou-se por meio de um exercício na perspectiva proposta de Skovsmose (2015). Por fim, propõe-se a disponibilização do material produzido para livre uso por professores.

Assim, esse trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa propositiva que apresenta uma sequência didática composta por 18 OVA, acompanhados de um exercício de IP, realizados em dois momentos, primeiro na perspectiva da autora e posteriormente, na perspectiva de sete professores de Matemática da Educação Básica. Para melhor compreensão e análise dos dados, foram elencadas duas categorias, sendo a primeira voltada à descrição e análise, na percepção da autora, com relação às potencialidades e possibilidades de interação e manuseio dos OVA propostos e a segunda, para evidenciar as percepções dos professores de Matemática que participaram da pesquisa, com relação às potencialidades e possibilidades de interação e manuseio do material proposto.

Esta dissertação está estruturada em 6 capítulos. Na introdução, apresentam-se algumas considerações com relação ao uso das TD e de OVA para o processo de ensino e aprendizagem, bem como o problema de pesquisa e os objetivos pretendidos com a pesquisa. O capítulo dois faz referência ao marco teórico do trabalho, onde aborda-se as TD, os OVA e o *software* GeoGebra, temas relevantes para a Educação, em especial à Educação Matemática. Apresenta-se ainda o que os documentos norteadores da Educação Básica versam sobre o uso das TD e descreve-se a concepção de IP, proposta por Skovsmose (2015). Citam-se também produções científicas que abordam temas relacionados a este trabalho, como por exemplo, a IP e o uso de OVA elaborados no *software* GeoGebra para o ensino de objetos de conhecimento da Matemática.

O capítulo três é destinado à caracterização da pesquisa desenvolvida. Nesse capítulo descreve-se o que é pesquisa de natureza qualitativa propositiva com base em autores que são referência nesses temas. Apresenta-se ainda o que se propôs com este trabalho, bem como a organização da coleta e análise dos dados. Além disso, explora-se a análise de possibilidades na perspectiva proposta por Skovsmose (2015) e a análise de conteúdo, proposta por Bardin (2016), que fundamenta a análise dos dados.

No capítulo quatro apresenta-se a descrição e análise dos OVA desenvolvidos, acompanhadas de um exercício de IP, na perspectiva da autora, apontando potencialidades e possibilidades de uso e manuseio do material. No capítulo cinco aborda-se as ponderações de sete professores de Matemática com relação ao material, os quais indicaram possibilidades e potencialidades.

As considerações finais são apresentadas no capítulo seis, que contempla ponderações com relação a relevância do uso das TD e de OVA desenvolvidos a partir do GeoGebra, para o ensino e aprendizagem da Matemática, em especial da Trigonometria no Ensino Médio.

Busca-se evidenciar nesse capítulo as percepções com relação ao material, apontadas pela autora e os sete professores de Matemática que participam da pesquisa. Destaca-se ainda o processo de aperfeiçoamento do material proposto, via IP, a partir das ponderações feitas indicadas.

2 MARCO TEÓRICO

Neste capítulo apresentam-se as percepções de alguns autores com relação à relevância do uso de TD, em particular de OVA e do *software* GeoGebra, na Educação, em especial, na Educação Matemática. Além disso, aborda-se o que os documentos norteadores da Educação versam sobre o uso das TD na Educação Básica e descreve-se o que consiste a abordagem da IP, na perspectiva proposta por Skovsmose (2015). Ao final do capítulo, apresentam-se alguns trabalhos desenvolvidos sobre o exercício de IP e o uso de OVA elaborados com o GeoGebra para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

2.1 TECNOLOGIAS DIGITAIS

As pessoas são surpreendidas com o avanço das TD e dos meios de comunicação, mudando o meio em que vivem, e conseqüentemente, seus hábitos, considerando a interação entre os indivíduos, a tecnologia e meios de comunicação é cada vez maior. As TD podem ser consideradas “um conjunto de recursos tecnológicos integrados entre si, que proporcionam por meio das funções de software e telecomunicações, a automação e comunicação dos processos de negócios, da pesquisa científica e de ensino e aprendizagem” (OLIVEIRA; MOURA; SOUSA, 2015, p. 78).

Para Kenski (2003), as TD incentivam novas formas de aprendizado, considerando que:

As atuais tecnologias digitais de comunicação e informação nos orientam para novas aprendizagens. Aprendizagens que se apresentam como construções criativas, fluidas, mutáveis, que contribuem para que as pessoas e a sociedade possam vivenciar pensamentos, comportamentos e ações criativas e inovadoras, que as encaminhem para novos avanços socialmente válidos no atual estágio de desenvolvimento da humanidade (KENSKI, 2003, p. 55).

De acordo com Oliveira, Moura e Sousa (2015), com a popularização do uso da internet, a utilização de TD cresceu e se potencializou, em especial na área da Educação. Para esses autores, as TD são fortes aliadas no processo de ensino e aprendizagem.

Em se tratando de informação e comunicação, as possibilidades tecnológicas apareceram como uma alternativa da era moderna, facilitando a educação com a

inserção de computadores nas escolas, possibilitando e aprimorando o uso da tecnologia pelos alunos, o acesso a informações e a realização de múltiplas tarefas em todas as dimensões da vida humana, além de qualificar os professores por meio da criação de redes e comunidades virtuais (OLIVEIRA; MOURA; SOUSA, 2015, p. 78).

Raposo (2011) também comenta sobre o uso de TD na Educação e considera que seu uso favorece um processo de colaboração entre ensino e aprendizagem, “Se por um lado os computadores ocupam, cada vez mais, o espaço de sala de aula, por outro os alunos ganham uma organização colaborativa das aprendizagens e do trabalho. O trabalho colaborativo torna-se cada vez mais uma forma de realização” (RAPOSO, 2011, p. 37).

Vicente e Paulino (2013) versam sobre a relevância do uso tecnológico na Educação Matemática. Segundo esses autores as TD¹ contribuem no processo de ensino da Matemática. Salientam que,

[...] é sobretudo, na disciplina de Matemática que as TIC têm ajudado e funcionado como alavanca e motor de aprofundamento de conhecimentos, de sistematização de noções e conteúdos, de desenvolvimento da capacidade de observação, comunicação e investigação matemática, contribuindo para despertar e estimular para a disciplina, olhar para a Matemática como uma disciplina atrativa, interessante e necessária desfazendo a ideia de que a matemática é uma disciplina de sucesso, só para alguns alunos (VICENTE; PAULINO, 2013, p. 46).

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2015), o uso das TD no ensino de Matemática no Brasil teve início nos anos 1980, período em que já se discutia a utilização de calculadoras, computadores e *softwares*. Segundo esses autores, nos anos 1990 ganha destaque o uso de *softwares* de geometria dinâmica nas aulas de Matemática e da internet na formação continuada de professores (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015).

Contudo, através das TD, o professor pode explorar melhor os objetos de conhecimento, proporcionando aos estudantes experiências que sem os aparatos tecnológicos não seriam possíveis, pois as TD “[...] quando são utilizadas, melhoram o processo de ensino, pois criam ambientes virtuais de aprendizagem, colaborando com o aluno na assimilação dos conteúdos” (OLIVEIRA; MOURA; SOUSA, 2015, p. 79).

Considerando a contribuição das tecnologias para a Educação, os OVA destacam-se como apoio pedagógico para contemplar uma das necessidades da sala de aula, que é proporcionar um processo de ensino e aprendizagem dinâmico, com mais interação e experimentação do estudante com o objeto de estudo. Para Audino e Nascimento (2010, p.

¹ Mencionadas pelos autores como TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação).

142), os objetos de aprendizagem “devem ser encarados por todos (desenvolvedores, educadores e estudantes) não apenas como novos elementos educacionais, mas como recursos potencializadores no processo de ensino e aprendizagem”.

Segundo Spinelli (2007), o OVA é um recurso que, além de contribuir no processo de ensino de objetos de conhecimento, estimula outras habilidades nos estudantes. Ainda, de acordo com Spinelli (2007, p. 7),

[...] um objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilia na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimula o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade. Dessa forma, [...] pode compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades e integrando a metodologia adotada para determinado trabalho.

Kleemann e Petry (2020, p. 233) salientam a importância do uso de tecnologias como recurso metodológico por meio dos OVA, “visando uma aprendizagem mais dinâmica e proporcionando maior interação e protagonismo dos estudantes neste processo”. Ainda sobre o uso de OVA como recurso metodológico para o ensino, Guarda e Petry (2020) consideram que os OVA motivam os estudantes, visto que, são recursos que permitem melhor visualização gráfica e/ou geométrica dos objetos matemáticos estudados, sendo assim, consideram que estes objetos podem contribuir para a aprendizagem da Matemática.

Para Borges e Scheffer (2018, p. 64) objetos virtuais utilizados para o ensino “permitem a contextualização, no sentido de estabelecer relações entre os conteúdos, suas aplicações práticas e a inter-relação com várias disciplinas”. Assim, as aplicações práticas da Matemática por meio de OVA, podem exercer papel importante no processo de ensino e aprendizagem, pois proporcionam aos professores apresentarem a seus educandos a Matemática de forma atrativa, e aos estudantes a experiência de verificar os conceitos estudados na prática. Desse modo, é possível usar situações da realidade para despertar a curiosidade e envolver os estudantes no processo de aprendizagem, de modo que “o objetivo da apresentação de um exemplo de aplicação da Matemática é o de despertar o interesse do aluno em saber detalhes que o levará à resolução de um problema proposto, que inicialmente ele ainda não tem condições de apresentar a solução” (BELTRÃO; IGLIORI, 2010, p. 26). Nessa perspectiva, conjectura-se que utilizar OVA para abordar objetos de conhecimento matemáticos, propondo uma relação de aplicação do objeto de estudo, contribui com o processo de ensino e aprendizagem, por proporcionar aulas mais dinâmicas e envolventes, e com estudantes proativos.

2.1.1 GeoGebra

Na perspectiva do uso das TD nas aulas de Matemática, o *software* GeoGebra ganha espaço, em especial no ensino de Geometria e Álgebra. Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 45), consideram que “com a possibilidade de uso de um *software* multiplataforma, atividades matemáticas diferenciadas começaram a ser elaboradas com base no uso do GeoGebra [...]”. Para Oliveira, Guimarães e Andrade (2012), o GeoGebra traz vantagens significativas para o ensino de funções, por exemplo, pois viabiliza que as mesmas sejam construídas com certo grau de perfeição e, além disso, possibilita que os objetos matemáticos se movimentem no *software*, o que não é possível manualmente.

Levando-se em consideração a importância das TD e dos OVA para o ensino, em especial da Matemática, utilizou-se o GeoGebra para a elaboração dos OVA do presente trabalho. Esse *software* foi criado por Markus Hohenwarter, que iniciou o projeto em 2001, na Universidade de Salzburgo, na Áustria, continuando seu desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, nos Estados Unidos.

Oliveira, Guimarães e Andrade (2012, p. CCLXVIII), comentam que:

Além de ser livre e gratuito o GeoGebra é um software multiplataforma, ou seja, pode funcionar em qualquer computador independente de seu sistema operacional; e ainda não precisa ser instalado no computador quando utilizado online. A interface do software possui uma linguagem simples e contém vários recursos que são de fácil manipulação, pois a cada ferramenta escolhida é dada uma “dica” de como utilizá-la. Além disso, todas as tarefas executadas na área de construção aparecem também na janela algébrica.

Dikovic (2009) comenta que o GeoGebra oferece a possibilidade de criar ambientes interativos e motivadores para a aprendizagem e salienta que, por meio deste, os professores têm a oportunidade de compartilhar materiais gratuitos na internet. Petla (2008) considera o GeoGebra um programa de geometria dinâmica, pois permite fazer construções utilizando pontos, vetores, segmentos, retas, funções, entre outros, e após possibilita explorar geometricamente essas construções. Pondera ainda que, a possibilidade de representar a forma geométrica e a forma algébrica de um mesmo objeto é uma vantagem didática. Ainda sobre o assunto, Petla (2008, p. 20), comenta que a “[...] possibilidade de integrar em um mesmo *software* ferramentas de Geometria e Álgebra configura ao GeoGebra o local de destaque no campo de softwares educacionais aliado ainda a condição de software livre e multiplataforma”.

Para Raposo (2011) o ponto importante do GeoGebra é a ligação forte entre a álgebra e a Geometria, que Descartes explorou. Pondera ser “possível construir geometricamente objetos na janela, como inserir algebricamente qualquer construção” (RAPOSO, 2011, p. 41). Fernandes e Ferreira (2020, p. 54) também consideram o uso do *software* pertinente, pois “o GeoGebra estabelece-se como uma ferramenta relevante no ensino da Matemática, visto que é de acesso fácil e gratuito, a sua acessibilidade não se limita ao computador, permitindo a utilização de uma aplicação no telemóvel/*tablet*”.

Oliveira, Guimarães e Andrade (2012, p. CCLXIX) também explanam sobre o uso do GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem da Matemática:

O uso do GeoGebra nos processos de ensino/aprendizagem da Matemática tem grande importância por ser um recurso computacional que possibilita novas maneiras de compreender e dar significado à conceitos que muitas vezes são abstratos para os alunos, especialmente por meio da visualização e manipulação propiciadas pelo *software*.

Kleemann (2018), destaca que o GeoGebra apresenta mecanismos que são úteis para a abordagem de alguns objetos de estudos matemáticos e considera que o *software*

permite também a inserção de variáveis numéricas em equações e a manipulação de dados a partir da função “controle deslizante”, que possibilita associar uma variável de acordo com um intervalo desejado e uma variação específica, um incremento. É possível ainda desenvolver construções sob a perspectiva 3D, sendo de fundamental importância na análise de problemas com aplicação espacial (KLEEMANN, 2018, p. 32).

Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 49) consideram que “[...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional”. Esses autores compreendem que o protagonismo da tecnologia, baseada na linguagem da informática, foi ganhando espaço na educação por ser de natureza experimental e visual, possibilitando assim desenvolver conhecimentos matemáticos.

Através do GeoGebra é possível explorar alguns conceitos matemáticos de maneira dinâmica e interativa. Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 52) afirmam que com o início do uso das tecnologias no ensino da Matemática algumas possibilidades surgiram:

Objetos matemáticos começaram a ser representados de maneira inédita (digital); [...] construções matemáticas ganharam dinamicidade e simultaneidade devido às

formas de dependência entre representações; [...] novos tipos de problemas e estratégias de resolução entraram em cena.

Essas possibilidades citadas pelos autores podem ser proporcionadas pelo GeoGebra, tornando assim possível um contato mais direto com o objeto de estudo matemático.

A utilização do GeoGebra pode se revelar significativa para a aprendizagem matemática quando o cenário didático-pedagógico formado a partir da realização de atividades matemáticas envolve complexidade com relação ao pensamento matemático. [...] Buscar intensificar esse tipo de complexidade é um aspecto fundamental na (re)elaboração de uma atividade matemática [...] (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 54).

O GeoGebra é uma ferramenta que pode contribuir com as aulas de Matemática, pela característica de ser um *software* dinâmico, interativo e de fácil acesso, que propicia explorar e relacionar a Geometria e a Álgebra, além de poder ser utilizado de forma on-line. Assim, o uso do GeoGebra nas aulas pode enriquecer tanto o processo de ensino quanto o processo de aprendizagem, auxiliando todos os indivíduos envolvidos.

O GeoGebra possui uma versão para uso on-line, e que disponibiliza todas os recursos para *download*. Para as pessoas que se cadastram no GeoGebra on-line, são disponibilizados outros recursos, tais como, a criação e a disponibilização de atividades on-line, que permite elaborar atividades interativas com a inserção de textos, vídeos, imagens, OVA, perguntas objetivas e discursivas (sendo possível optar pela liberação da visualização ou não da resposta), entre outros; a disposição de atividades em formato de livro, que proporciona juntar várias atividades, assim, enquanto uma atividade tem uma página o livro pode ter várias páginas e ser organizado em capítulos ou seções, formando uma sequência didática digital; e uma plataforma denominada *classroom* (ou sala de aula no português) que possibilita criar uma sala virtual denominada tarefa, a partir de uma atividade ou de um livro, que pode ser acessada pelos estudantes através de um link ou código. No *classroom* o professor pode acompanhar a interação dos estudantes com a atividade proposta em tempo real ou após a sua finalização.

Além de proporcionar a elaboração de atividades no formato digital, o GeoGebra on-line permite que atividades e livros criados sejam publicados para livre acesso, uso e *download*, sem a necessidade de possuir cadastro. Assim, ao criar uma atividade é possível optar por disponibilizá-la livremente ou apenas por meio de link de acesso.

Para este trabalho foi desenvolvida uma sequência didática, criada no GeoGebra on-line, na forma de livro, composta de conceitos, OVA e questões que abordam os objetos de

estudo da Trigonometria no Ensino Médio. Espera-se que o material proposto contribua para a assimilação do objeto de conhecimento abordado, a partir da exploração dos conceitos, interação com objetos e resolução das questões.

2.1.2 As tecnologias e os documentos norteadores da Educação Básica

Considerando a importância das TD na sala de aula, a BNCC aponta para seu uso. Esse documento traz competências e habilidades que indicam o emprego de tecnologias e *softwares* como ferramentas no processo de ensino e aprendizagem. Das cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, apresentadas pela BNCC, a última se refere ao uso das tecnologias:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

No que diz respeito à Matemática no Ensino Médio, a BNCC orienta que “o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 474). Devido ao destaque que a BNCC dá ao uso de TD na educação, os livros didáticos de Matemática ilustram propostas de atividades com tecnologias, como aplicativos e *softwares*, para o professor desenvolver com os estudantes na abordagem de conceitos. Tais propostas auxiliam o professor no ensino da Matemática e o incentivam a utilizar mais a tecnologia, possibilitando assim tornar a aula mais dinâmica, ao invés de apenas usar algoritmos e regras prontas.

O uso das TD em sala de aula não deve ser apenas para diversificar a metodologia da aula, seu uso deve ter objetivo claro, com foco no ensino e na aprendizagem. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

a incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino. A simples presença de novas tecnologias na escola não é, por si só, garantia de maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na recepção e na memorização de informações. (BRASIL, 1998, p. 140).

Kenski (2003) também considera importante estar atento ao modo como se usa as tecnologias em sala de aula. Segundo a autora,

o uso inadequado dessas tecnologias compromete o ensino e cria um sentimento aversivo em relação à sua utilização em outras atividades educacionais, difícil de ser superado. Saber utilizar adequadamente essas tecnologias para fins educacionais é uma nova exigência da sociedade atual em relação ao desempenho dos educadores. (KENSKI, 2003, p. 51).

Sobre o uso de objetos virtuais para o ensino, Borges e Scheffer (2018), consideram que pode ressignificar a prática pedagógica, mas salientam que é importante ter atenção com o objetivo proposto para seu uso. Para esses autores “na construção de um objeto virtual de ensino é necessário ter em mente a preocupação com a dinâmica e a motivação para a aprendizagem” (BORGES; SCHEFFER, 2018, p. 64).

Ainda sobre a presença das tecnologias em sala de aula, os PCN alertam que não é garantia de que de fato vai haver mudança no processo de ensinar e aprender, mas que ela deve enriquecer esse processo de forma a proporcionar “[...] a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores” (BRASIL, 1998, p. 140). Sendo assim, utilizar as TD, além de contribuir para assimilação dos objetos de conhecimento, é uma maneira de tornar a aula dinâmica, contribuindo para que o estudante se torne ativo no processo e, ao mesmo tempo, possibilitando desenvolver o raciocínio e seu pensamento crítico.

2.2 IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA

Utilizar as tecnologias no ensino da Matemática sugere reflexões sobre o modo de uso e sua contribuição para o processo de aprendizagem. A intenção de usar um *software* para o estudo da Trigonometria pode ser observada, através de um estudo de potencialidades do material sugerido para o processo de ensino, desenvolvendo assim a possibilidade de identificar novas abordagens e conceitos que estão implícitos.

Para essa análise de possibilidades utiliza-se a concepção de IP, proposta por Skovsmose (2015). Segundo esse autor o principal objetivo da IP “é desenvolver uma compreensão mais profunda da situação imaginada. [...] É por meio desse processo que a situação imaginada se torna fundamentada” (SKOVSMOSE, 2015, p. 79).

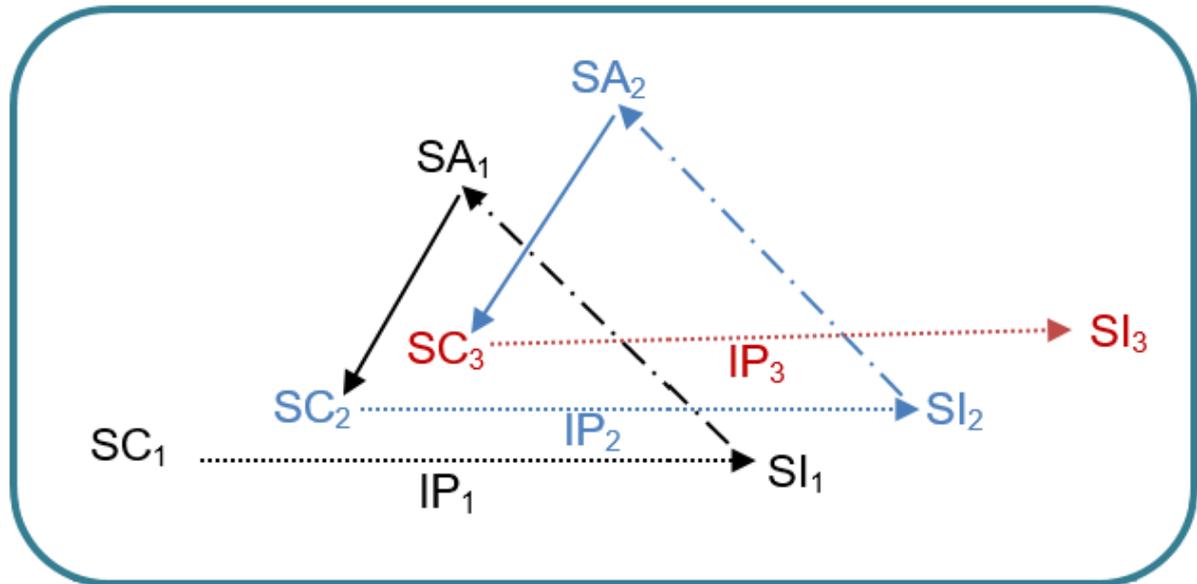
Segundo Lima (2021), a IP é um conceito trabalhado por Skovsmose ao pensar sobre o que pode ser chamado de pesquisa de possibilidades, na perspectiva da Educação Matemática Crítica. De acordo com Skovsmose (2015) o conceito surgiu de um trabalho com estudantes de doutorado, na África do Sul, no período pós *Apartheid*, momento em que a sala de aula era um ambiente segregado, onde pessoas brancas, pretas e indianas não se relacionavam. Assim, “para Skovsmose, uma saída foi pesquisar algo que ainda não havia ali, mas que poderia vir a ser. Imaginar possibilidades para aquela situação, denominada situação corrente (SC), buscando compreender o que poderia ser diferente” (LIMA, 2021, p. 123). Lima, define a situação corrente como “[...] aquela que pode ser observada”. A autora comenta ainda sobre SC.

Nela são identificados aspectos que podem ser mudados. O processo de pensar em possibilidades para essa situação corrente é chamado de Imaginação pedagógica. Um processo voltado a refletir sobre situações de sala de aula, questionando o que poderia ser feito diferente e buscando alternativas para a SC. Por meio da Imaginação pedagógica, chega-se em uma situação imaginada (SI) (LIMA, 2021, p. 123).

Lima (2021, p. 124) explica que “a partir de uma situação imaginada, pode-se analisar as possibilidades de levá-la à situação corrente. O que, de fato, pode ser feito? O que pode ser organizado? Que ferramentas existem à disposição? Há algum entrave que impossibilita a implementação de algo?”. Levando uma situação imaginada (SI) para a corrente chega-se a uma situação arranjada (SA). A autora salienta que assim a SA não será uma SI nem a SC observada no início. Neste sentido, “Pesquisar possibilidades altera a situação corrente. A imaginação, de certo modo, muda a realidade” (LIMA, 2021, p. 124).

Na perspectiva proposta por Skovsmose, os autores Kleemann e Petry (2020) apontam que a IP sugere estudar situações imaginadas com base nos recursos gerados na situação arranjada, transformando a imaginação em alternativas mais acessíveis e estabelecendo novas possibilidades ou formas de abordagem dos objetos de conhecimento a serem trabalhados com os estudantes. A Figura 1 apresenta o processo prático de transformação das situações propostas por Skovsmose.

Figura 1 – Dinâmica da pesquisa: transformações via imaginação pedagógica



Fonte: Lima (2021)

Conforme essa figura, e baseando-se no que Lima (2021) descreveu com relação as transformações que acontecem via IP, imaginando-se (IP_1) alternativas para uma SC_1 , chega-se a SI_1 . Quando se propõe ações com base na SI_1 , tem-se o que se chama de SA_1 . Essas SA_1 são alternativas para a SC_1 , mas não é mais a SC_1 , pois foi modificada, e tem-se uma nova situação corrente, chamada de SC_2 . Assim há um processo contínuo e iterativo, como mostra a Figura 1.

Com relação a esse processo, Skovsmose (2015, p. 78-79), comenta:

Um ponto crucial na pesquisa de possibilidades é a pesquisa do relacionamento entre situações atuais, arranjadas e imaginadas. As diferentes situações, em todas as suas multiplicidades, e as relações entrelaçadas têm que ser abordadas. Isto me leva a noção de *raciocínio exploratório*, que é tão importante quanto a Imaginação pedagógica para pesquisa de possibilidades.

Além disso, para esse autor, no que diz respeito ao raciocínio exploratório “com base no que é visto e experimentado por meio da situação arranjada, pode transformar a imaginação em alternativas mais acessíveis. Dessa forma, podem-se especificar novas possibilidades” (SKOVSMOSE, 2015, p. 79). Ou ainda, a IP pode possibilitar “práticas educativas alternativas” (SKOVSMOSE, 2015, p.76). A partir do exercício de IP é possível pensar em alternativas variadas para situações propostas.

Segundo Lima (2021, p. 125) “Skovsmose pensa a imaginação pedagógica no contexto da pesquisa. Esse processo, porém, extrapola a pesquisa ao possibilitar que algumas

ações sejam levadas para o ambiente escolar”. Segundo a autora, para Skovsmose, pesquisar as possibilidades corresponde a imaginar alternativas para a situação corrente.

Skovsmose (2015, p. 70), considera que a pesquisa de possibilidades “transcende os paradigmas tanto das pesquisas positivistas quanto das naturalistas”, visto que o autor compreende a pesquisa de possibilidades como uma pesquisa que “inclui não somente um estudo de ‘o que é’ ou ‘o que é construído’, mas também um estudo de ‘o que não é’ e ‘o que poderia ser construído’” (SKOVSMOSE, 2015, p. 69-70).

Contudo, Skovsmose (2015) considera que o exercício de IP é uma pesquisa de possibilidades que considera as possibilidades e não a sua relevância. Comenta que “algumas possibilidades podem ser exploradas, mas nenhuma pode ser considerada como a mais relevante, a mais interessante ou a mais promissora” (SKOVSMOSE, 2015, p. 85).

Na concepção de Lima (2022), a IP deve ser vista como uma estratégia para achar soluções para questões. “O processo de imaginação pedagógica possibilita pensar em estratégias para mudar uma situação corrente, por meio de uma postura crítica para questionar uma situação dada e reconhecer o que pode ser diferente” (LIMA, 2022, p. 224). Salienta ainda que o processo de IP precisa de motivação, pois ela tem um objetivo, uma situação para ser mudada e algo para perseguir.

Com relação à perspectiva de IP, proposta por Skovsmose (2015), constatou-se que já foi abordada em alguns trabalhos. Um exemplo é o estudo desenvolvido por Milani (2017), que apresenta um exercício de IP em turmas de estágio supervisionado em um curso de licenciatura em Matemática, com o intuito de contribuir para a formação docente. O objetivo foi propor aos licenciados que se imaginassem professores em diálogo com seus estudantes e analisassem os elementos desse diálogo, reconhecendo os benefícios para os educandos com a aprendizagem da Matemática.

Queiroz (2019) também realizou um estudo envolvendo um exercício de IP. Seu trabalho aponta questões e experiências vivenciadas em sala de aula. A autora propõe, a partir de um exercício de IP, inspirar ideias pedagógicas em outras disciplinas e níveis de ensino de Matemática. A autora apresenta “ideias que podem ser investigadas/exploradas por outras pesquisas de diversas disciplinas matemáticas e que podem inspirar práticas que se subvertam ao ensino tradicional” (QUEIROZ, 2019, p. 69).

Na perspectiva da IP, Kleemann e Petry (2020), desenvolveram um trabalho envolvendo TD. Propuseram um estudo de IP para investigar as potencialidades e contribuições do material desenvolvido. Neste trabalho, a proposta foi de usar a

interdisciplinaridade nas aulas de Matemática, fazendo relação com a Física. Os autores desenvolveram OVA, tendo como ferramenta o GeoGebra, e a partir desse, apresentaram o exercício de IP com a intenção de analisar as possibilidades e potencialidades desse material, baseados nas ideias fundamentadas de Skovsmose (2015). Para esses autores “este tipo de pesquisa é possível a partir da avaliação das potencialidades que as propostas metodológicas podem proporcionar para o ensino de Matemática e Física de forma interdisciplinar, permitindo imaginar além do que eventualmente ocorreria em um estudo de caso, por exemplo” (KLEEMANN; PETRY, 2020, p. 236).

Binotto, Petry e Gaio (2022) apresentaram um estudo de possibilidades para uso de OVA, desenvolvido no GeoGebra, para o ensino de cônicas no Ensino Médio. O trabalho constitui-se de uma sequência de atividades definidas por dez OVA, que contou com uma análise, desenvolvida pelos autores, de possibilidades e potencialidades de interação e abordagem dos conceitos matemáticos, por meio de um exercício de IP na perspectiva proposta por Skovsmose (2015). Foram abordados, no exercício, conceitos, elementos e propriedades da elipse, da parábola e da hipérbole, que permitem explorar, em especial, a propriedade reflexiva, usada em diferentes aplicações. Os autores consideram que a interação dos estudantes com os objetos pode contribuir com a aprendizagem dos conceitos matemáticos apresentados. Ponderam que o fato dos objetos estarem acompanhados de um exercício de IP, que aponta algumas possibilidades e potencialidades de manuseio e interação, favorece sua utilização. Salientam ainda, que as possibilidades não se esgotam com o trabalho e que “ao refazer o seu próprio exercício de IP, o professor pode avaliar a melhor forma de usar os OVA no momento de abordar esses objetos de estudos com seus estudantes” (BINOTTO; PETRY; GAIO, 2022, p. 126).

Santiago (2015) desenvolveu um trabalho voltado à contribuição do *software* GeoGebra como metodologia de ensino da Matemática e em como este agrega no processo de aprendizagem de funções trigonométricas. Para tanto, o autor desenvolveu uma sequência didática e aplicou-a, analisando os resultados obtidos. Segundo o autor, o “GeoGebra foi avaliado quanto instrumento para auxiliar o ensino-aprendizagem das funções trigonométricas Seno e Cosseno” (SANTIAGO, 2015, p. 56). O autor considera a necessidade de variar os instrumentos utilizados no processo de ensino e a constante reflexão sobre o uso de *softwares* educativos. Além disso, constatou que o desempenho dos estudantes na atividade foi satisfatório sendo favorecido pelo uso do GeoGebra, considerando que o *software* foi uma

ferramenta facilitadora no processo de ensino, pois contribuiu especialmente para a visualização gráfica.

3 DELINEAMENTO METODOLÓGICO

O presente estudo consiste em uma pesquisa de natureza qualitativa propositiva. Para Borba (2004, p. 2),

o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida.

Segundo Borba (2004, p. 3) a pesquisa qualitativa se refere a “forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador [...]”. Na concepção de Bicudo (2004, p. 102), o “qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões”. Essa autora também comenta que o significado de pesquisa qualitativa apresenta noções com relação a percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis e experiências.

Com relação a pesquisa propositiva, Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 69), consideram que é aquela em que o pesquisador “não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”.

Nesse sentido, propõem-se OVA elaborados no *software* GeoGebra para o estudo de Trigonometria, organizados em uma sequência didática que contempla conceitos, propriedades e uma aplicação da Matemática, relacionando as funções trigonométricas com as ondas sonoras. A intenção desta pesquisa foi desenvolver um material para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a partir do *software* GeoGebra, na forma de OVA, acompanhados de uma análise de possibilidades e potencialidades, por meio de exercício de IP na perspectiva proposta por Skovsmose (2015). Esse exercício foi realizado pela autora e sete professores de Matemática da Educação Básica e teve como finalidade apontar os principais objetos de conhecimento relacionados ao estudo de Trigonometria, que podem ser explorados pelos estudantes do Ensino Médio na interação com os OVA.

Com o intuito de produzir dados de pesquisa², os professores participantes responderam dois questionários disponibilizados de modo on-line, com questões objetivas e discursivas, e interagiram com o material proposto. Para melhor explorar as percepções dos professores quanto ao material desenvolvido, organizou-se um roteiro com o questionário inicial, nomeado por Questionário 1, o material que seria analisado (disponível no GeoGebra on-line), e questionário final, nomeado por Questionário 2, ambos disponibilizados através de links.

Assim, cada professor respondeu ao Questionário³ 1, que teve por intuito identificar características dos professores que exploraram o material, por meio de perguntas referentes a sua atuação docente, o uso de TD e do *software* GeoGebra em sala de aula, as percepções referentes ao uso didático de recursos digitais, em especial, quanto aos benefícios e as dificuldades. Na sequência, os professores puderam interagir com o material⁴, fazendo a manipulação dos OVA, explorando os conceitos e questões presentes, com a possibilidade de relatar suas observações e considerações em cada atividade. Após a interação com o material, cada professor respondeu ao Questionário⁵ 2, que abordou as considerações gerais com relação as potencialidades observadas durante a exploração do material, bem como a viabilidade e os benefícios dos objetos de estudo propostos.

Além da análise de possibilidades na perspectiva proposta por Skovsmose (2015), considerou-se também a análise do conteúdo na perspectiva proposta por Bardin (2016). Segundo Bardin (2016, p. 182) “o material verbal obtido a partir de questões abertas é muito mais rico em informações do que as respostas a questões fechadas ou pré-codificadas”.

Na perspectiva proposta por Skovsmose (2015), analisar possibilidades é analisar aquilo que pode ser diferente. Lima (2022, p. 25), considera que “Skovsmose buscou [...] modos de realizar pesquisas que investigassem possibilidades: pesquisar o que não é, mas poderia ser”. Assim, nessa concepção, analisar possibilidades é imaginar as possíveis alternativas para alguma situação observada ou imaginada.

Com relação à análise de conteúdo, Bardin (2016, p. 37), considera que “é um conjunto de técnicas de análise das comunicações”. Para essa autora, a análise do conteúdo se apresenta em diferentes fases, que “organizam-se em torno de três polos cronológicos: 1) a

² O trabalho faz parte de projeto de pesquisa aprovado no Comitê de Ética em Pesquisa da UFFS, com os seguintes dados CAAE: 64092222.1.0000.5564; número do parecer de aprovação: 5.760.815 e data da aprovação: 17/11/2022.

³ Disponível em: <https://forms.gle/4KVvsEiYfWN2ctdF9>. Acesso em: 01 ago. 2023.

⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/classroom/bcc8ywrw>. Acesso em: 09 ago. 2023.

⁵ Disponível em: <https://forms.gle/qg3D1hwAS5DzfceC9>. Acesso em: 13 ago. 2023.

pré-análise; 2) a exploração do material; 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação” (BARDIN, 2016, p. 125).

A primeira fase, chamada de *pré-análise* é considerada como a fase de organização, além de ser um período em que é permitido seguir intuições e ser mais flexível com relação a permitir incorporar novos procedimentos no decorrer da análise. É nessa fase que deve acontecer a escolha do material a ser analisado, a formulação de hipótese e objetivos, além da elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final. Para tanto, a autora considera que deve ocorrer a preparação do material. Outro aspecto dessa fase é o que a autora denomina como “leitura flutuante”, que consiste em, “estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 2016, p. 126). A autora ainda comenta que “a partir de uma primeira “leitura flutuante”, podem surgir intuições que convém formular em hipóteses” (BARDIN, 2016, p. 68).

A segunda fase, *exploração do material*, é considerada longa e fastidiosa. Segundo a autora, é a fase de análise por meio de um estudo aprofundado. Assim, “consiste essencialmente de operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 2016, p. 131).

Na última etapa, considerada como fase do *tratamento dos resultados*, os dados brutos são tratados para se tornarem significativos e válidos e ajudarem a responder o problema de pesquisa. Essa fase só acontece depois de escolhido o material a ser analisado bem como as categorias de análise. Após o tratamento dos dados “os resultados obtidos, a confrontação sistemática com o material e o tipo de inferências alcançadas, podem servir de base a uma outra análise disposta em torno de novas dimensões teóricas, ou praticada graças a técnicas diferentes” (BARDIN, 2016, p. 132).

Com relação a análise das respostas de um questionário com perguntas abertas, Bardin (2016) considera que se trata de examinar as respostas de uma investigação que explora as relações psicológicas que o indivíduo mantém com o objeto analisado. Contudo, baseando-se nas orientações da análise de possibilidades proposta por Skovsmose (2015) e da análise de conteúdo proposta por Bardin (2016), pretendeu-se responder ao problema de pesquisa.

Dessa forma, a análise dos dados baseou-se nas seguintes categorias de análise: i) Descrição e análise, na percepção da autora, com relação às potencialidades e possibilidades de interação e manuseio dos OVA propostos (apresentada no Capítulo 4); ii) Percepção de professores de Matemática com relação às potencialidades e possibilidades de interação e

manuseio do material (apresentada no Capítulo 5). Para melhor análise, essa última categoria foi dividida em subcategorias: (a) percepções iniciais dos professores com relação ao uso das tecnologias digitais; (b) funcionalidade e apresentação dos OVA; (c) possíveis contribuições do material para a aprendizagem; (d) potencialidades, sugestões e possibilidades de uso do material; (e) dificuldades encontradas, sugestões para melhorar o material e outros objetos de conhecimento que podem ser explorados; (f) percepções gerais dos professores sobre o material.

4 RESULTADOS E IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA NA PERSPECTIVA DA AUTORA

Neste capítulo são apresentadas a descrição dos OVA e análise de possibilidades do material elaborado, realizada pela autora do trabalho por meio de um exercício de IP, na perspectiva proposta por Skovsmose (2015). Esta análise visa descrever possibilidades e potencialidades desse material para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio.

Levando-se em consideração a aprendizagem do estudante, cada OVA é acompanhado de questões e dos conceitos que aborda, possibilitando aos estudantes a reflexão sobre o objeto e as ideias matemáticas envolvidas, com o intuito de proporcionar, através da manipulação e respostas aos questionamentos, a compreensão dos objetos de conhecimento apresentados. Esse material está disponível no link⁶, organizado em uma sequência didática e disposto no formato de livro no GeoGebra on-line. Os objetos, conceitos e questões, foram desenvolvidos baseando-se em Balestri (2016) e Paiva (1995).

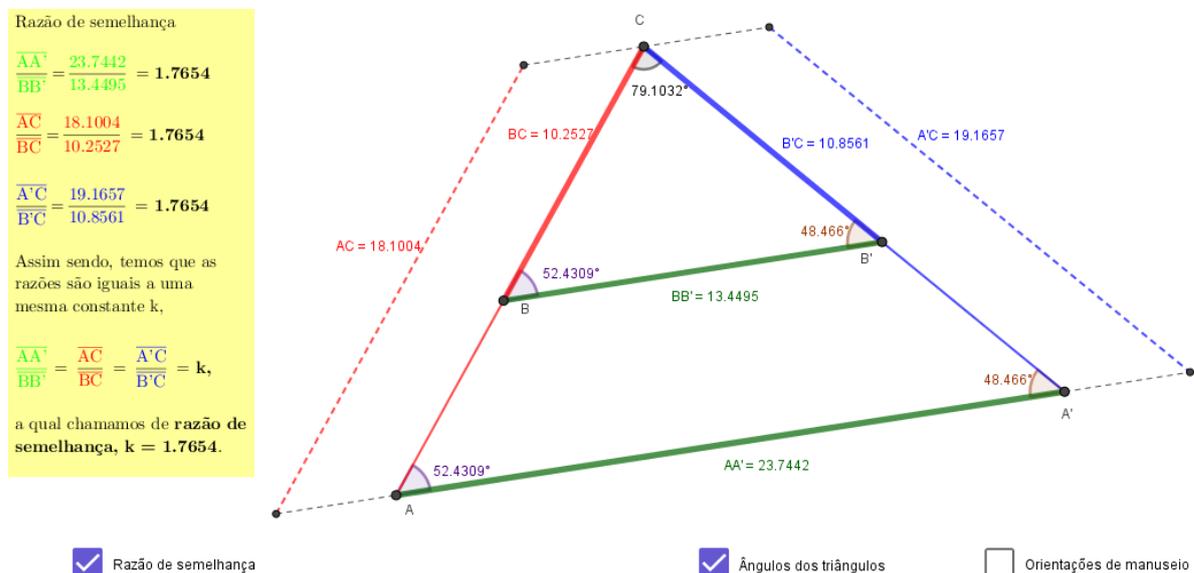
A apresentação dos OVA é feita em seções organizadas de acordo com os conceitos que cada objeto aborda. Na primeira seção estão descritos os OVA 1 e 2, que exploram o conceitos de semelhança de triângulos. Na seção seguinte são apresentados os OVA 3 e 4, como sugestão para explorar as razões entre os lados de um triângulo retângulo e sua relação com os ângulos agudos internos, desse triângulo, concluindo que essas razões são o seno, cosseno e tangente de um ângulo. Na sequência, são descritos os OVA 5, 6, 7, 8 e 9, que tratam da medida linear e medida angular de um arco. No OVA 10, apresenta-se o ciclo trigonométrico e suas principais características. Os OVA 11 e 12 descrevem as relações de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente de um ângulo de medida qualquer. Na sequência, apresenta-se o OVA 13, que explora as funções trigonométricas e suas características. Após, são apresentadas nos OVA 14, 15 e 16, as principais características das funções $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$ transladadas. Por fim, nos OVA 17 e 18, são descritas as relações entre as funções trigonométricas e as ondas sonoras.

⁶ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/r7qguzks>. Acesso em: 09 ago. 2023

4.1 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (OVA 1 E 2)

Para explorar os conceitos de semelhança de triângulos e razão entre segmentos proporcionais de triângulos semelhantes, foram elaborados dois objetos: OVA 1 e 2. No OVA 1, ilustrado na Figura 2, apresentam-se dois triângulos, $\Delta ACA'$ e $\Delta BCB'$, seus ângulos internos, as medidas de seus lados e as razões entre os lados proporcionais destes triângulos.

Figura 2 – OVA 1: semelhança de triângulos



Fonte: A autora (2023)

Seguindo as orientações de manuseio, o estudante pode interagir com esse OVA, movimentando os pontos B, B' e C, observando os ângulos internos dos triângulos ao acionar o botão “Ângulos dos triângulos” e a razão entre os segmentos correspondentes desses dois triângulos, selecionando o botão “Razão de semelhança”. A intenção com esse OVA é proporcionar ao estudante, através da interação, a compreensão dos conceitos envolvidos, como a semelhança de dois triângulos ($\Delta ACA' \sim \Delta BCB'$).

Ao interagir com esse OVA, o estudante pode perceber que, movendo os pontos B, B' e C, os ângulos internos correspondentes ($\widehat{A'AC}$ e $\widehat{B'BC}$, $\widehat{AA'C}$ e $\widehat{BB'C}$, $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{BCB'}$, respectivamente), dos dois triângulos se mantêm congruentes. Para auxiliar na percepção da congruência dos ângulos correspondentes, estes estão representados no OVA por cores iguais. A manipulação do OVA também possibilita ao estudante observar que o tamanho dos lados dos triângulos se altera a partir da movimentação dos referidos pontos, mas que apesar dessa

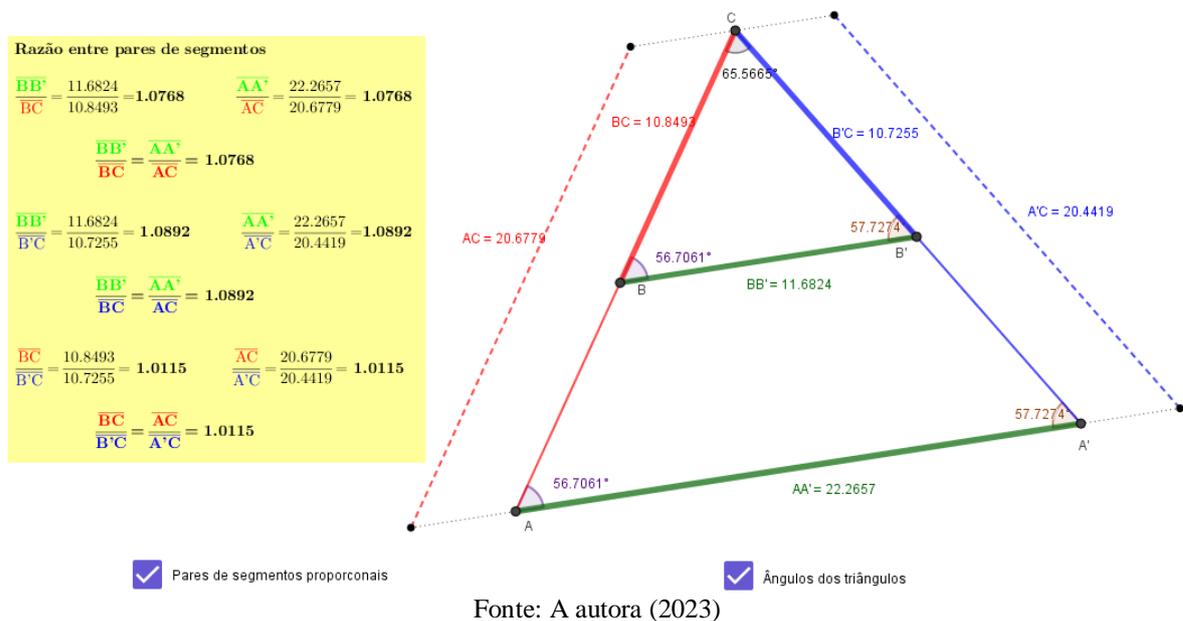
alteração, as razões entre os segmentos correspondentes ($\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, \overline{AC} e \overline{BC} , $\overline{A'C}$ e $\overline{B'C}$, que estão representados respectivamente por cores iguais) permanecem iguais. Verifica-se, portanto que, enquanto os pontos são movimentados, a razão entre os segmentos correspondentes será sempre igual a uma constante, chamada de razão de semelhança e indicada pela letra k .

Assim, é possível concluir que os dois triângulos $\Delta ACA'$ e $\Delta BCB'$ são semelhantes, pois mesmo movendo alguns pontos, que alteram as medidas dos lados dos triângulos, os ângulos internos correspondentes permanecem iguais entre si e as razões dos segmentos correspondentes são sempre iguais a uma constante k (que depende da razão entre as medidas dos respectivos lados). A manipulação do OVA, juntamente com as respostas aos questionários apresentados, permitem concluir que o valor k é a razão de semelhança entre os dois triângulos. O professor pode explicar que se uma dessas relações ocorre é possível garantir que exista a semelhança entre os triângulos. São elas: dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes; e, um par de ângulos internos correspondentes congruentes e a razão entre os dois pares de segmentos correspondentes igual, sendo esses segmentos lados dos triângulos e lados dos ângulos considerados a uma constante k .

O OVA 2 tem a finalidade de apresentar outras razões que podem ser exploradas em triângulos semelhantes. Nesse OVA é possível explorar nos dois triângulos, $\Delta ACA'$ e $\Delta BCB'$, seus ângulos internos através do botão “Ângulos dos triângulos” e a razão entre pares de segmentos proporcionais, habilitando o botão “Pares de segmentos proporcionais”, como mostra a Figura 3.

A interação com o OVA 2 permite que os pontos B , B' e C sejam movimentados. Assim, ao manipular esse OVA, o estudante poderá perceber que os ângulos internos correspondentes ($\widehat{A'AC}$ e $\widehat{B'BC}$, $\widehat{AA'C}$ e $\widehat{BB'C}$, $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{BCB'}$) são respectivamente congruentes, concluindo que se trata de dois triângulos semelhantes, visto que no OVA anterior essa relação foi abordada. O OVA 2 permite explorar a igualdade da razão entre os pares de segmentos proporcionais ($\frac{\overline{BB'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AC}}$, $\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'C}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C}}$). Ao movimentar os pontos B , B' e C , o estudante perceberá que as razões entre os pares de segmentos proporcionais, se tomadas na mesma ordem, são sempre iguais. Para facilitar a percepção do estudante, na razão os segmentos estão representados pela mesma cor que no triângulo.

Figura 3 – OVA 2: razão entre pares de segmentos proporcionais dos triângulos semelhantes



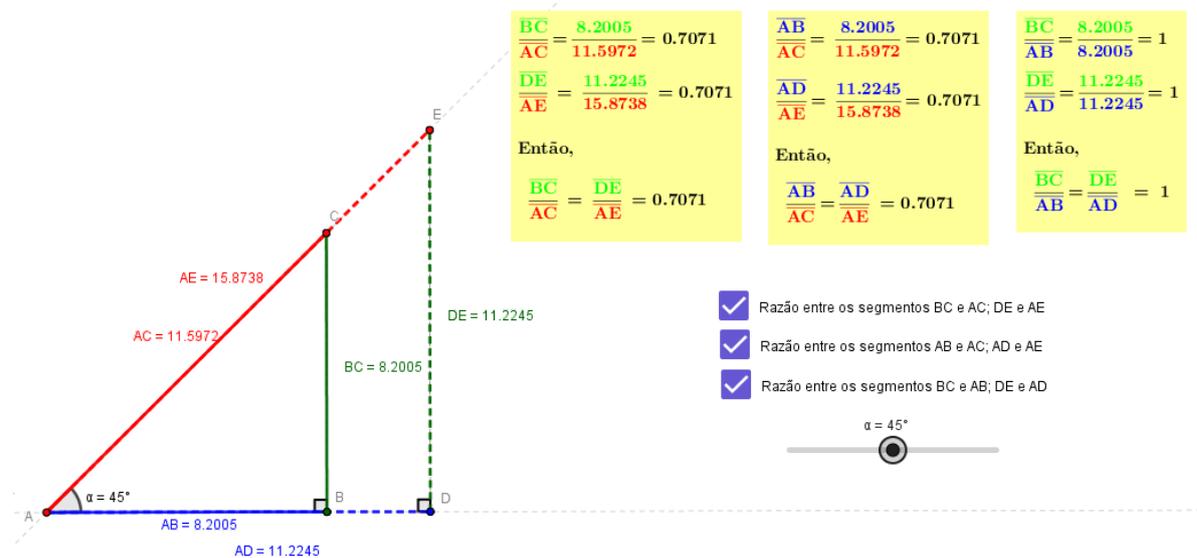
Os OVA 1 e 2, possibilitam explorar com os estudantes outras relações além do conceito de semelhança de triângulos. É preciso compreender, por exemplo, o que são ângulos correspondentes e segmentos correspondentes. Caso seja necessário, o professor pode revisar essas relações com os estudantes antes ou durante o estudo.

4.2 SENO, COSSENO E TANGENTE NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (OVA 3 E 4)

Os OVA 3 e 4 foram desenvolvidos com a finalidade de observar as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, no triângulo retângulo. Assim, o OVA 3 aborda as razões entre os lados do triângulo retângulo e o OVA 4 apresenta essas razões como as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente.

O OVA 3, apresentado na Figura 4, mostra dois triângulos retângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$, com as medidas de seus lados, um controle deslizante, que altera o valor do ângulo α e caixas de texto que apresentam as razões entre os lados correspondentes dos dois triângulos. O objeto permite que os pontos B e D sejam movimentados, mantendo colineares os pontos A , B e C .

Figura 4 – OVA 3: razões entre os lados do triângulo retângulo



Fonte: A autora (2023)

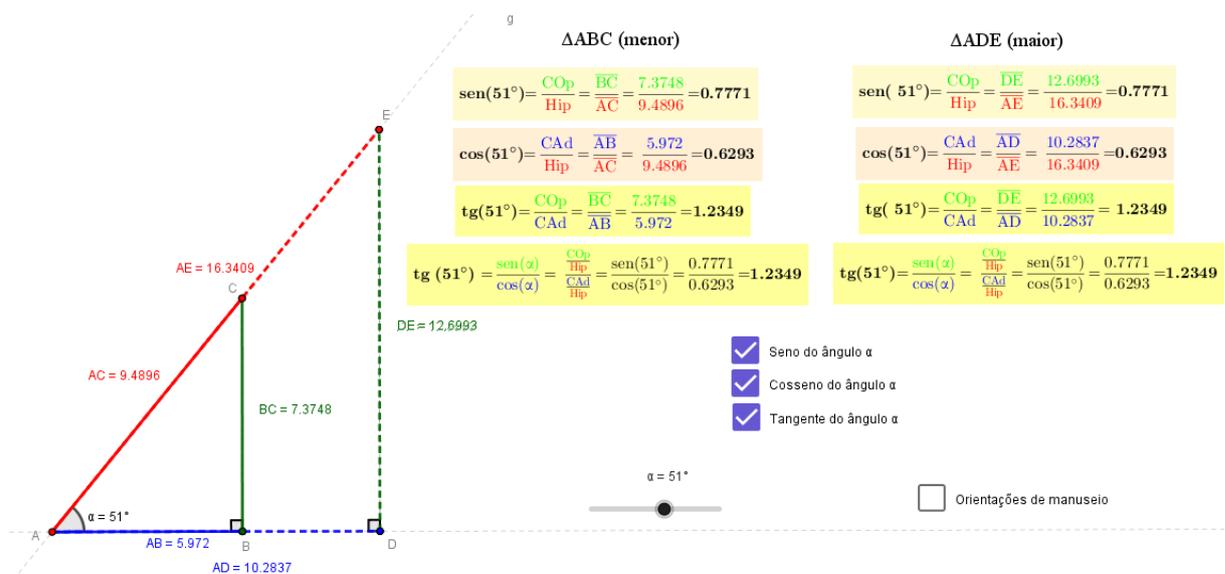
Ao manusear o OVA 3, de acordo com as orientações, o estudante poderá perceber que os dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$, são retângulos e semelhantes entre si, e mesmo movimentando os pontos B e D , a semelhança entre os triângulos é mantida. Por serem triângulos semelhantes, é possível estabelecer razões de proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos, como já observado no OVA 2. Essas razões estão dispostas no OVA 3, e nelas as medidas dos segmentos são apresentadas com cores iguais aos lados correspondentes dos triângulos, para facilitar a visualização. É possível perceber que, mesmo alterando a medida do ângulo α , e a posição dos pontos B e D , as razões entre os segmentos correspondentes se mantêm iguais entre si.

Nesse OVA é pertinente que o estudante seja instigado a recordar a nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo. Por serem retângulos, os lados dos triângulos recebem nomes específicos: hipotenusa que é o lado oposto ao ângulo reto e os demais lados são os catetos, além dos termos cateto oposto ao ângulo α , por exemplo, e cateto adjacente ao ângulo α . As cores distintas facilitam a visualização no OVA. A nomenclatura dos lados do triângulo retângulo ajudará o estudante na compreensão das relações envolvidas no OVA seguinte.

O OVA 4, ilustrado na Figura 5, tem a finalidade de apresentar as razões verificadas no objeto anterior, como razões trigonométricas denominadas seno, cosseno e tangente do ângulo agudo α , no triângulo retângulo. Para tanto, o OVA apresenta dois triângulos retângulos e semelhantes, $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$, e suas relações de seno, cosseno e tangente, apresentadas ao selecionar as opções “seno do ângulo α ”, “cosseno do ângulo α ” e “tangente

do ângulo α ". Além disso, o OVA possibilita alterar o valor do ângulo α , por meio do controle deslizante e, ao movimentar os pontos B e D , o estudante poderá observar que essas razões se mantêm constantes para um mesmo ângulo α e se alteram à medida que o ângulo é alterado.

Figura 5 – OVA 4: seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo



Fonte: A autora (2023)

Através da interação com o objeto, uma possibilidade é perceber que as razões entre os lados de um triângulo retângulo, já observadas no OVA 3, resultam nos valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo do triângulo. Assim sendo, por exemplo, o seno do ângulo α é a razão entre a medida do cateto oposto (COp) ao ângulo α e a medida da hipotenusa (Hip) do triângulo retângulo, ou seja, $\text{sen}(\alpha) = \frac{COp}{Hip}$ e o cosseno é a razão entre a medida do cateto adjacente ($CAAd$) ao ângulo α e a hipotenusa, isto é, $\text{cos}(\alpha) = \frac{CAAd}{Hip}$. Para o valor da tangente, o OVA 4 apresenta duas possibilidades: a razão entre a medida do COp e do $CAAd$ ao ângulo α , isto é, $\text{tg}(\alpha) = \frac{COp}{CAAd}$, e a partir dessa razão tem-se a razão entre o seno e o cosseno de α , ou seja, $\text{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\text{sen}(\alpha)}{Hip}}{\frac{\text{cos}(\alpha)}{Hip}} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$.

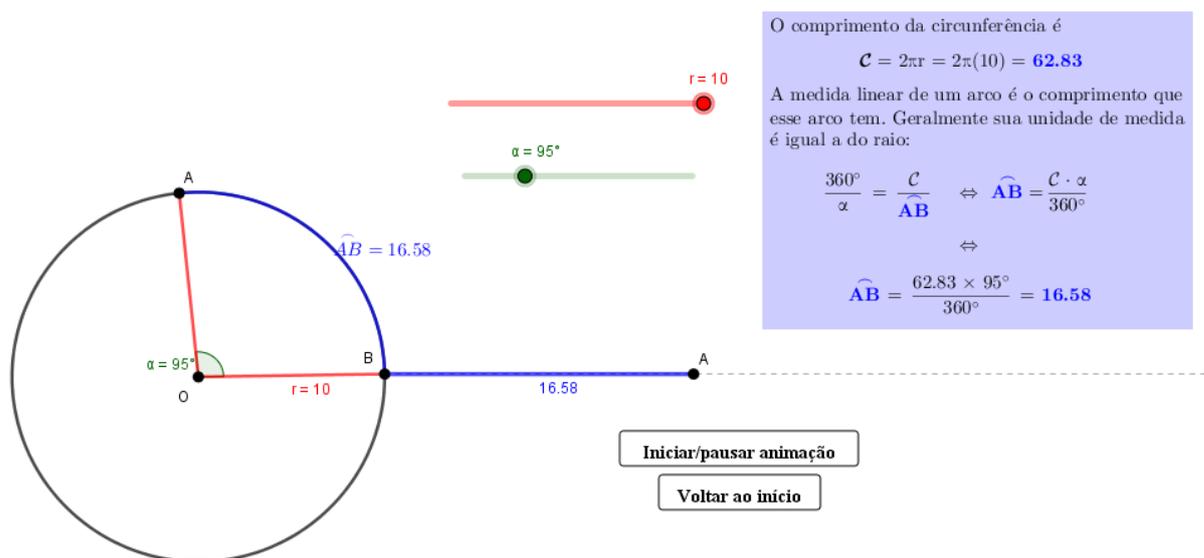
Como o objeto apresenta as razões trigonométricas para dois triângulos retângulos semelhantes, ele possibilita que o estudante observe a relação de igualdade entre essas razões, independente do valor de α e das medidas da hipotenusa e dos catetos. Assim, pode-se concluir que para cada valor de α dado no OVA, existe um valor para o seno, cosseno e

tangente desse ângulo, independente do comprimento dos lados do triângulo retângulo, reforçando o entendimento de que cada uma destas razões trigonométricas está associada ao respectivo ângulo.

4.3 MEDIDA LINEAR E A MEDIDA ANGULAR DE UM ARCO (OVA 5, 6, 7, 8 E 9)

Nos OVA 5 e 6 apresentam-se alguns conceitos envolvidos na medida linear de um arco. O OVA 5, ilustrado na Figura 6, tem a finalidade de explorar a medida linear de um arco de circunferência e apresentar o cálculo dessa medida. Para isso, são apresentados no objeto o controle deslizante r , sendo r a medida do raio da circunferência, e o controle deslizante α , que altera a medida do ângulo central da circunferência $A\hat{O}B = \alpha$, que subentende o arco AB . Além de uma caixa de texto com o cálculo da medida do comprimento da circunferência (C) e da medida linear do arco AB .

Figura 6 – OVA 5: medida linear de um arco



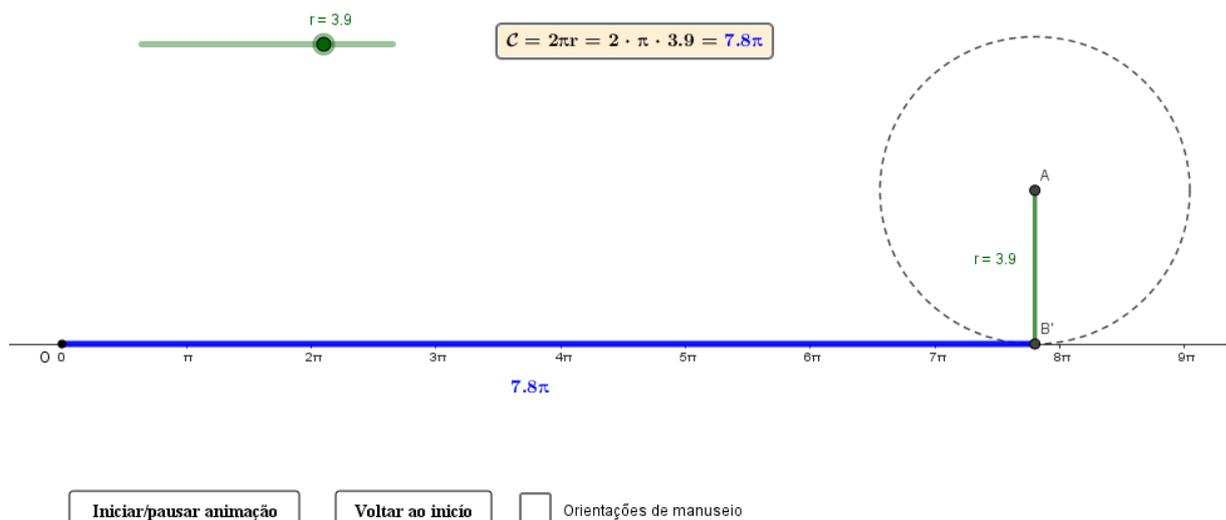
Fonte: A autora (2023)

Ao acionar o botão “Iniciar/pausar animação” no objeto, o controle deslizante α é animado, alterando a medida do ângulo central α e consequentemente, a medida do arco AB . Quando α é alterado, o objeto apresenta o cálculo do valor de C e da medida linear do arco AB , que pode ser observada ao acionar o botão “Explicações”.

A interação com esse OVA proporciona ao estudante observar que, ao alterar o valor do raio r a medida \mathcal{C} do comprimento da circunferência é alterada, visto que a medida \mathcal{C} é representada por $\mathcal{C} = 2\pi r$, e por isso o raio interfere nesse valor. Para calcular a medida linear do arco AB é possível relacionar, em uma proporção, a razão entre a medida do ângulo de 360° (que representa o ângulo central da circunferência) e a medida do ângulo α (ângulo central do arco AB), e a razão entre a medida \mathcal{C} e a medida linear do arco AB (medida a ser encontrada). Como a medida do ângulo α e a medida de \mathcal{C} são conhecidas, a partir da igualdade das razões, $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{\mathcal{C}}{AB}$, encontra-se a medida linear do arco AB : $\widehat{AB} = \frac{\mathcal{C} \cdot \alpha}{360^\circ}$.

O OVA 6, apresentado na Figura 7, tem a finalidade de explorar a medida \mathcal{C} do comprimento da circunferência, para qualquer raio r . Para isso, o objeto apresenta um controle deslizante r , que altera a medida do raio da circunferência. Além disso, o objeto proporciona uma animação, na qual o comprimento da circunferência vai sendo desenhado sobre o eixo das abscissas. Com esse objeto é possível comparar o cálculo da medida \mathcal{C} , apresentado em uma caixa de texto, com o comprimento da circunferência, expresso pelo segmento $\overline{OB'}$, sobre o eixo x .

Figura 7 – OVA 6: medida linear da circunferência de raio r



Fonte: A autora (2023)

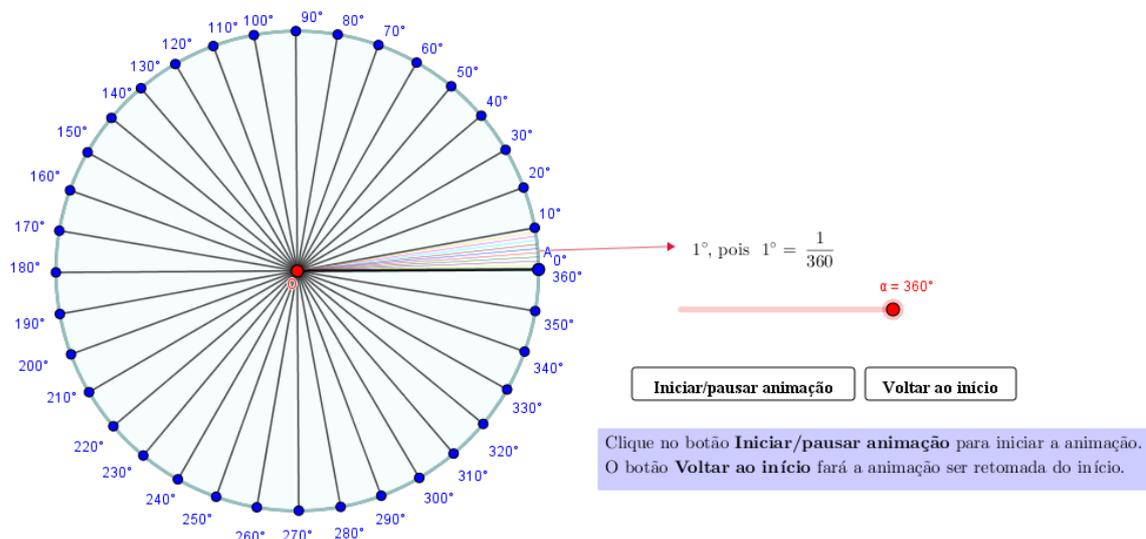
Na interação com esse OVA, ao alterar o valor de r , o tamanho da circunferência é alterado, e, conseqüentemente, a medida \mathcal{C} . O botão “Iniciar/pausar animação”, dá início à animação e faz com que a medida \mathcal{C} passe a ser representada pelo segmento $\overline{OB'}$ e, ao final da

animação, esteja sobre o eixo das abscissas. É possível que o estudante compare a medida \mathcal{C} , obtida através do cálculo $\mathcal{C} = 2\pi r$, com a medida do segmento $\overline{OB'}$, apresentada a partir da animação, como mostra a Figura 7.

Ao alterar o valor de r , no OVA observa-se que o tamanho da circunferência (ou seja, seu comprimento) é alterado e consequentemente, o valor da medida \mathcal{C} e do segmento $\overline{OB'}$. Assim, o estudante poderá perceber que o tamanho da circunferência e a sua medida linear estão relacionados ao valor do raio r .

Os OVA 7, 8 e 9, foram criados com o intuito de abordar conceitos relativos à medida angular de um arco. A finalidade do OVA 7, ilustrado na Figura 8, é definir uma das unidades de medida para ângulos: o grau ($^\circ$). Para tanto, o objeto representa, a partir de uma animação, que uma circunferência pode ser dividida em 360 arcos côngruos (isto é, de mesma medida). O objeto apresenta uma circunferência, com ângulo central α , comandado por um controle deslizante, que pode ser animado ou movimentado manualmente.

Figura 8 – OVA 7: circunferência dividida em arcos de 1°



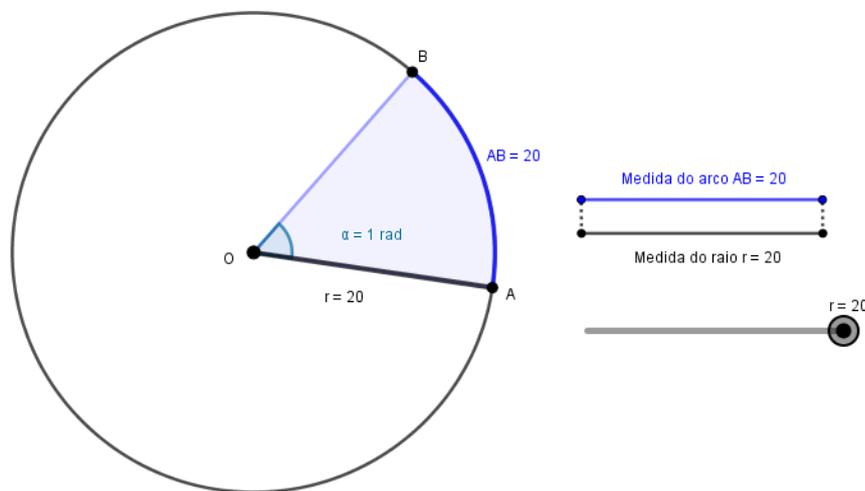
Fonte: A autora (2023)

Neste OVA, acionando o botão “Iniciar/pausar animação”, o controle deslizante α é animado, fazendo com que o ponto A se movimente sobre a circunferência e os arcos sejam construídos. Conforme ilustrado na Figura 8, foram construídos, iniciando em 0° , 10 arcos com ângulo central medindo 1° cada, ou seja, 10 arcos de 1° . Na sequência, foram construídos arcos com medida de ângulo central de 10° , até o ponto A completar a volta na circunferência, ou seja, até $\alpha = 360^\circ$. A interação com este OVA, poderá proporcionar ao

estudante identificar que a circunferência pode ser dividida em 360 arcos côngruos de ângulo central igual a 1° , ou seja, $1^\circ = \frac{1}{360}$ da circunferência.

O OVA 8, apresentado na Figura 9, tem o intuito de definir a unidade de medida angular radiano (*rad*). Para tanto, apresenta-se uma circunferência de centro O e raio r , com um arco AB de medida linear r e ângulo central $\widehat{AOB} = \alpha$. O objeto permite alterar a medida do raio e a medida linear do arco AB , através do controle deslizante r , ou seja, se o valor de r é alterado pelo controle deslizante, a medida linear do arco AB e o raio são alterados.

Figura 9 – OVA 8: medida angular em radiano

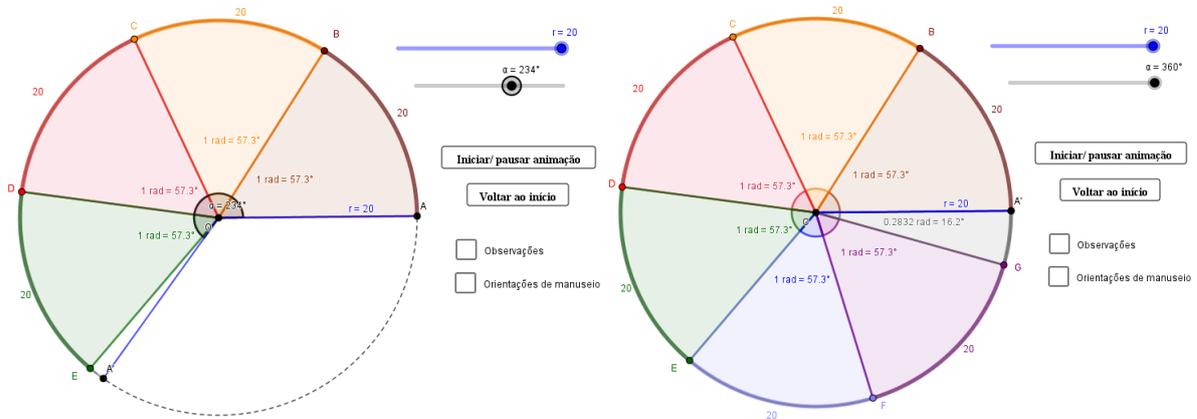


Fonte: A autora (2023)

Ao manusear o objeto é possível identificar que o arco AB , da circunferência de raio r , que possui medida linear igual ao raio, tem medida de ângulo central α igual a 1 radiano ($\alpha = 1 \text{ rad}$), como mostra a Figura 9. Sendo assim, por definição, o arco que possui a medida linear igual à medida do raio tem ângulo central igual a 1 radiano. Essa relação pode ser observada no objeto, pois mostra que, mesmo alterando o controle deslizante r , o ângulo central α continua medindo 1 radiano.

O OVA 9, apresentado na Figura 10, tem o objetivo de mostrar que o ângulo central de uma circunferência é de aproximadamente $6,28 \text{ rad}$ e ainda, a relação entre as unidades de medida do ângulo central, grau e radiano. Assim, o objeto apresenta a circunferência de centro O e raio r , dividida em 6 arcos de 1 rad e um arco de, aproximadamente $0,28 \text{ rad}$, dois controles deslizantes, r e α , que alteram a medida do raio e do arco AA' , respectivamente, além de uma caixa de texto que explica a relação entre as unidades de medida grau e radiano.

Figura 10 – OVA 9: circunferência dividida em arcos com medida em radianos para dois valores diferentes de α



Fonte: A autora (2023)

É possível observar, no OVA, a construção dos arcos na circunferência, com medidas de ângulo central em radianos, através da animação que pode ser obtida ao acionar o botão “Iniciar/ pausar animação”. Nessa animação, o controle deslizante α é animado e o ponto A' percorre o arco da circunferência, construindo 6 arcos que possuem medida linear igual à medida do raio r (arcos $A'B$, BC , CD , DE , EF , FG) e um arco menor (GA'), como mostra a Figura 10, que apresenta recortes do objeto em dois momentos distintos. Ao manusear este OVA, o estudante pode alterar a medida do raio r , movimentando o controle deslizante r , e assim identificar que a circunferência possui 6 arcos com medida angular de 1 *rad* cada, visto que o objeto mostra que nesses arcos a medida linear e o raio são iguais, mesmo que o valor de r seja alterado. Após desenhar os 6 arcos de 1 *rad*, percebe-se que a circunferência não está completa, restando um arco menor, de aproximadamente 0,28 *rad*. Assim, constata-se que uma circunferência completa possui, aproximadamente, 6,28 *rad* de ângulo central.

O texto, apresentado no OVA, que pode ser explorado selecionando a opção “Observações”, explica a relação entre as unidades de medida grau e radiano. Como a circunferência completa possui 360° ou 6,28 *rad*, é possível relacionar essas duas unidades de medidas do ângulo. Como essa relação é proporcional, pode-se calcular quantos graus equivale 1 *rad* através de uma regra de três simples, pois $\frac{6,28}{1 \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{x}$, ou seja, $x = \frac{360^\circ \times 1 \text{ rad}}{6,28 \text{ rad}} \cong 57,3^\circ$. Além disso, pode-se considerar que 360° equivalem a aproximadamente 6,28 *rad*, que é uma aproximação de $2\pi \text{ rad}$, com duas casas decimais. Assim, 180° equivale a aproximadamente 3,14 *rad* ou a $\pi \text{ rad}$. A partir disso, o estudante pode concluir

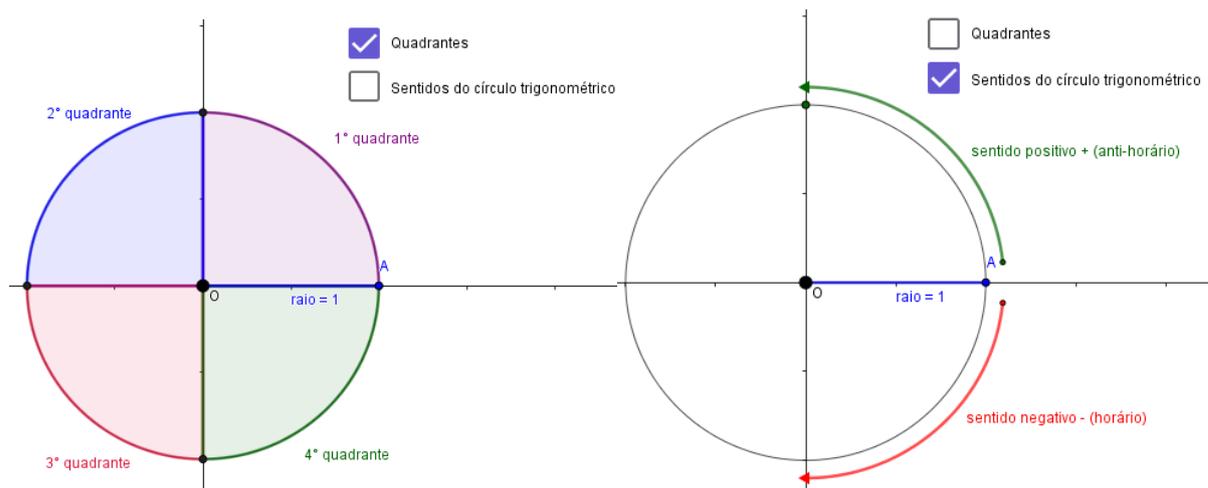
outras equivalências, como por exemplo, que 90° equivale a $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$, e 45° equivale a $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$, usando relações de proporcionalidade.

4.4 CICLO TRIGONOMÉTRICO (OVA 10)

O OVA 10, ilustrado na Figura 11, tem por objetivo apresentar o ciclo trigonométrico e suas principais características. O objeto mostra uma circunferência com centro na origem do plano cartesiano, raio unitário e dividida em quatro partes nos quatro quadrantes. Mostra ainda, o sentido positivo e negativo de orientação da circunferência através de uma animação e alguns exemplos de arcos com medida angular em grau e radianos, nos dois sentidos do ciclo.

No OVA 10, apresenta-se o ciclo trigonométrico de centro $O = (0,0)$ e raio $\overline{OA} = 1$. O ciclo trigonométrico está dividido em quatro quadrantes, sendo que o 1º quadrante possui os ângulos entre 0° a 90° , o 2º quadrante ângulos entre 90° a 180° , o 3º quadrante ângulos entre 180° a 270° e o 4º quadrante os ângulos entre 270° a 360° , bem como o sentido positivo (anti-horário) e o sentido negativo (horário), como mostra a Figura 11.

Figura 11 – OVA 10: quadrantes e sentidos no ciclo trigonométrico

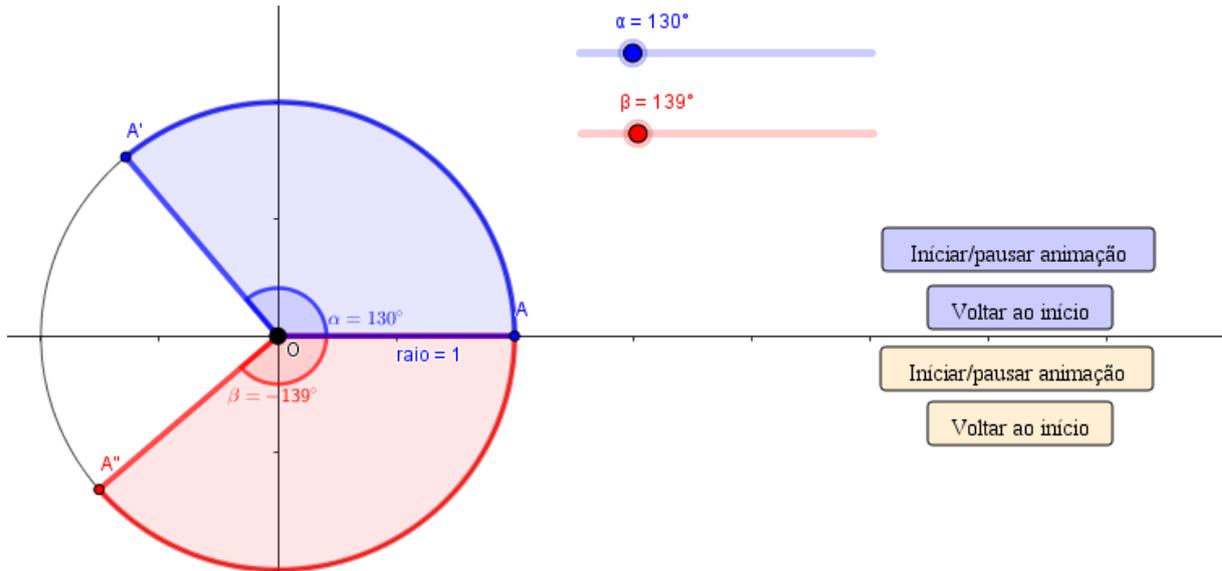


Fonte: A autora (2023)

Este OVA possibilita, ainda, analisar a medida do ângulo central nos dois sentidos, positivo e negativo. Em cada um dos sentidos, a partir da animação do objeto acionando o

botão “Iniciar/pausar animação”, é possível analisar os arcos e a medida angular desses arcos, como mostra a Figura 12.

Figura 12 – OVA 10: sentido positivo e negativo no ciclo trigonométrico



Fonte: A autora (2023)

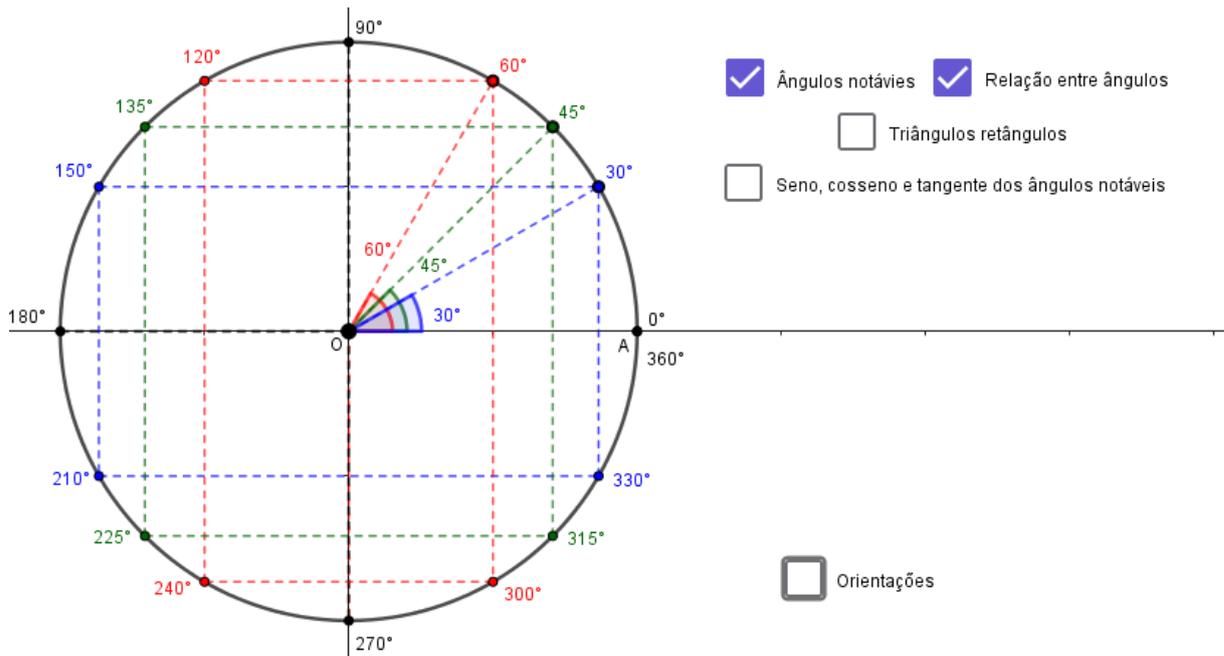
Ao manusear esse OVA, o estudante pode observar que, no sentido positivo (arco OAA' em azul no OVA), a medida do ângulo central α é positiva, já no sentido negativo (arco OAA'' em vermelho no OVA), a medida do ângulo central α é negativa. A animação e as opções de visualização de alguns arcos através dos botões “Alguns arcos no sentido positivo ou negativo” proporcionam observar que, para qualquer ângulo α , no sentido anti-horário, o valor do ângulo será sempre positivo e para qualquer ângulo β , no sentido horário, o valor do ângulo será negativo. O que indica se o ângulo central será positivo ou negativo, é a orientação do movimento (sentido anti-horário ou sentido horário).

4.5 RELAÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO (OVA 11 E 12)

O OVA 11, ilustrado na Figura 13, tem como finalidade explorar as relações do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo no ciclo trigonométrico. O objeto apresenta inicialmente três ângulos notáveis do 1º quadrante do ciclo trigonométrico, os ângulos de 30° ,

45° e 60°, e ângulos de outros quadrantes que se relacionam com esses, como mostra a Figura 13.

Figura 13 – OVA 11: relação entre os ângulos notáveis 30°, 45° e 60° e ângulos de outros quadrantes



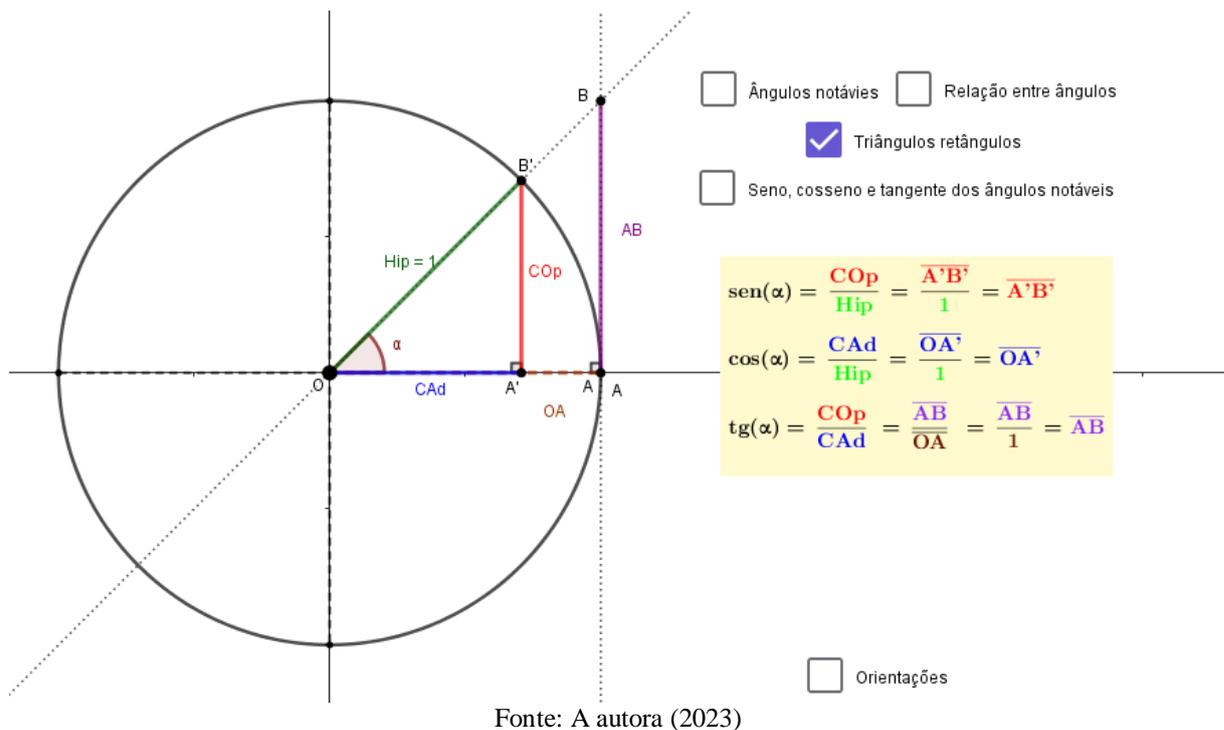
Fonte: A autora (2023)

Nesse OVA, o estudante pode selecionar a opção “Ângulos notáveis” e explorar os ângulos notáveis do 1º quadrante. A opção “Relação entre ângulos” apresenta, de maneira dinâmica e com a mesma cor, os ângulos de outros quadrantes que se relacionam com os três ângulos notáveis do 1º quadrante. Assim, o estudante percebe que em cada um dos demais quadrantes, cada ângulo tem relação com um ângulo notável do 1º quadrante, formando um retângulo inscrito no ciclo trigonométrico, como mostra a Figura 13. A partir disso, percebe-se que o ângulo de 30° se relaciona com os ângulos de 150°, 210° e 330°, o ângulo de 45° com os ângulos de 135°, 225° e 315°, e o ângulo de 60° com os ângulos de 120°, 240° e 300°.

Com o OVA, pode-se explorar também o valor do seno, cosseno e tangente de um ângulo, considerando um triângulo retângulo inscrito no ciclo trigonométrico, de hipotenusa 1, como mostra a Figura 14. O objeto mostra a relação do valor dessas três razões trigonométricas de forma dinâmica, de modo que o lado do triângulo tem a mesma cor que a medida do segmento que o representa na razão, para facilitar a compreensão.

Ao selecionar a opção “Triângulos retângulos” o objeto mostra os dois triângulos retângulos, ΔOAB e $\Delta OA'B'$, sendo que o triângulo $\Delta OA'B'$ está inscrito no ciclo trigonométrico, logo, sua hipotenusa coincide com o raio, ou seja, a hipotenusa mede 1. Como a hipotenusa mede 1, obtém-se a relação $\text{sen}(\alpha) = \frac{COp}{Hip} = \frac{\overline{A'B'}}{1} = \overline{A'B'}$, ou seja, o seno do ângulo α , nesse triângulo, coincide com a medida do COp ao ângulo α (segmento em vermelho no OVA). Da mesma forma, obtém-se o cosseno do ângulo α , visto que $\text{cos}(\alpha) = \frac{CAAd}{Hip} = \frac{\overline{OA'}}{1} = \overline{OA'}$. Assim, o valor do cosseno do ângulo α coincide com o valor da medida do $CAAd$ ao ângulo α (segmento em azul no OVA).

Figura 14 – OVA 11: valor de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico



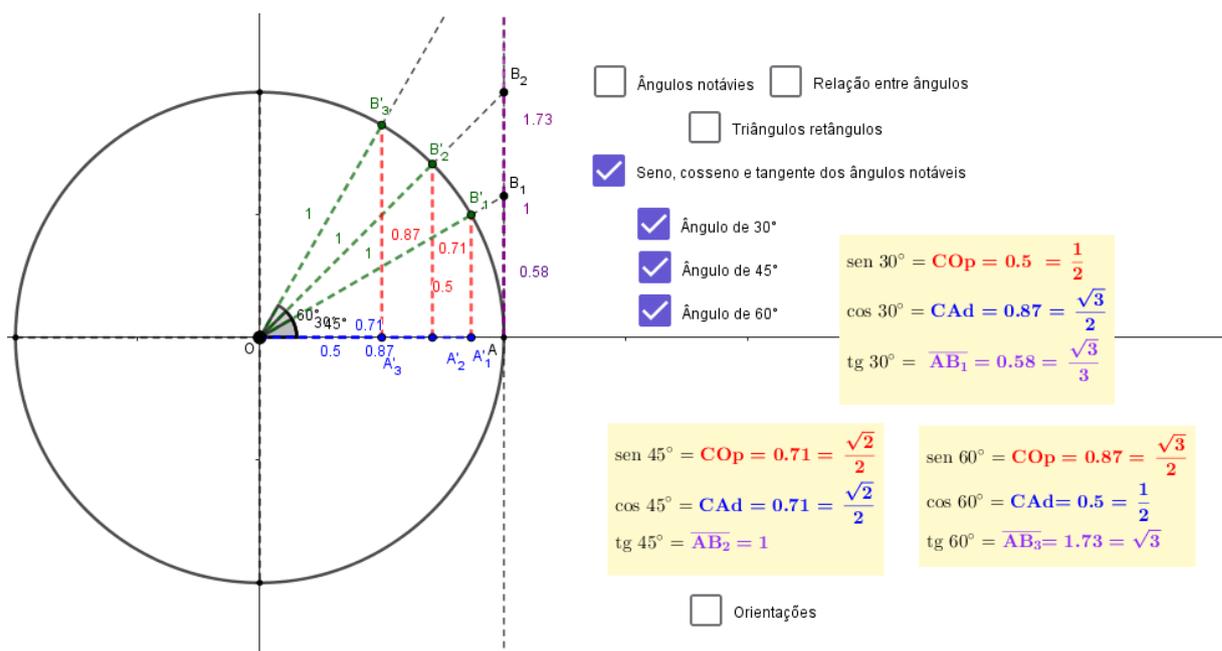
Para a tangente de α o objeto aborda a relação de semelhança entre os triângulos ΔOAB e $\Delta OA'B'$ (pois ambos são retângulos e possuem um ângulo em comum: α), visto que o conceito de semelhança de triângulos já foi explorado no OVA 1 (caso considerar necessário durante a exploração, o estudante pode retomar o OVA 1). A partir da semelhança dos triângulos ΔOAB e $\Delta OA'B'$ e considerando que $\overline{OA} = 1$, temos que $\text{tg}(\alpha) = \frac{COp}{CAAd} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$. Desse modo, o valor da tangente de α é a medida do segmento AB (em roxo no

OVA), do triângulo ΔOAB . As três relações estão descritas no OVA em uma caixa de texto, que pode ser explorada quando selecionada a opção “Triângulos retângulos”, como pode ser observado na Figura 14.

Pode-se considerar também, a partir desse OVA, que os valores do seno e cosseno do ângulo α podem ser relacionados com a ordenada e abscissa, respectivamente, do ponto B' . As relações descritas acima indicam que $\text{sen}(\alpha) = \overline{A'B'}$ e que $\text{cos}(\alpha) = \overline{OA'}$, que são a ordenada e abscissa do ponto B' , respectivamente. Essa relação pode ser observada para qualquer valor de α .

Depois de apresentar as relações do seno, cosseno e tangente para um ângulo α , no ciclo trigonométrico, o OVA 11 proporciona observar essas relações para os três ângulos notáveis do primeiro quadrante, 30° , 45° e 60° . Assim, ao selecionar a opção “Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis” no objeto, são apresentadas as opções “Ângulo de 30° , 45° e 60° ”. Selecionando cada uma dessas opções, pode-se observar o triângulo $\Delta OA'B'$ inscrito na circunferência com o respectivo ângulo (30° , 45° ou 60°), a medida de sua hipotenusa e de seus catetos. O objeto mostra também uma caixa de texto, que apresenta os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo, obtidos relacionando as medidas dos segmentos (COp , CAd e \overline{AB}), como mostra a Figura 15.

Figura 15 – OVA 11: valor de seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° no ciclo trigonométrico



Fonte: A autora (2023)

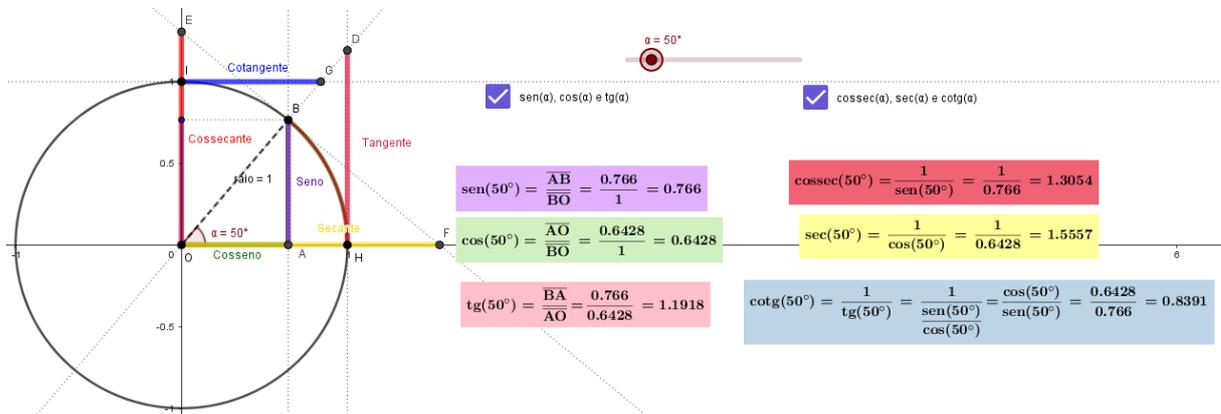
A Figura 15 apresenta triângulos (com ângulo central medindo 30° , 45° e 60°), com as respectivas medidas dos segmentos que correspondem aos valores de seno, cosseno e tangente desses três ângulos, conforme descritos nas caixas de texto. Conclui-se que a exploração deste objeto pode possibilitar ao estudante refletir acerca das relações descritas anteriormente, sobre o valor de seno e cosseno serem o COp e o CAd , respectivamente, do triângulo $\Delta OA'B'$ inscrito no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, e a tangente corresponder a medida do segmento AB do triângulo ΔOAB (ilustrado na Figura 14). A partir dessas observações, o estudante é instigado a pensar que, em todo triângulo retângulo de hipotenusa medindo 1, o valor do seno e cosseno de um ângulo qualquer será sempre a medida do COp e do CAd , respectivamente.

Para explorar o valor de seno, cosseno, tangente e demais relações trigonométricas de qualquer ângulo, foi desenvolvido o OVA 12, apresentado na Figura 16. Este apresenta o ciclo trigonométrico e duas opções a serem selecionadas durante sua manipulação. A opção “ $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$ ” apresenta no ciclo trigonométrico os segmentos que representam o $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$ e os seus respectivos valores, e caixas de textos que mostram as razões que resultam nesses valores. A opção “ $cossec(\alpha)$, $sec(\alpha)$ e $cotg(\alpha)$ ” também mostra no ciclo trigonométrico os segmentos que representam a $cossec(\alpha)$, $sec(\alpha)$ e $cotg(\alpha)$ e seus respectivos valores, além de caixas de texto que explicam a relação que $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$ têm com a $cossec(\alpha)$, $sec(\alpha)$ e $cotg(\alpha)$, e apresentam seus valores. A partir de uma animação do ângulo α , controlada pelo botão “Iniciar/pausar animação”, o OVA apresenta os valores de $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$, $tg(\alpha)$, $cossec(\alpha)$, $sec(\alpha)$ e $cotg(\alpha)$ para $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

Ao manusear o OVA 12 é possível observar os resultados apresentados para o seno, cosseno e tangente de um ângulo, separadamente, ou não, pois o objeto apresenta duas opções, (“ $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$ ” ou “ $cossec(\alpha)$, $sec(\alpha)$ e $cotg(\alpha)$ ”), que podem ser habilitadas simultaneamente, ou não. Os segmentos apresentados, assim como as caixas de textos, foram construídos com cores específicas para facilitar a compreensão e exploração do estudante.

Ao analisar e explorar o valor de seno, cosseno e tangente nesse OVA, o estudante poderá relacioná-lo com os resultados estudados no OVA 11, que também aborda essas relações no triângulo retângulo inscrito no ciclo trigonométrico. Desse modo, o estudante poderá ter mais facilidade na compreensão dos conceitos a serem apresentados.

Figura 16 – OVA 12: valor de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um ângulo



Fonte: A autora (2023)

Nesse OVA é possível perceber que para alguns valores de α , o valor de seno, cosseno e tangente são negativos. No caso do seno, quando α pertence ao intervalo $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ seu valor é negativo. Para os valores do cosseno, pode-se observar que estes são negativos quando α está no intervalo $90^\circ < \alpha < 270^\circ$. No caso da tangente, seu valor é negativo quando $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ e $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Essas relações são facilmente observadas no OVA através da orientação dos segmentos AB , OA e DH , (em roxo, verde e rosa, respectivamente, na construção), que, nos respectivos intervalos, são apresentados com orientação negativa em relação ao eixo das abscissas (para o seno e a tangente) e em relação ao eixo das ordenadas (para o cosseno). Ou ainda, podem ser observadas na caixa de texto que apresenta seu valor.

Com relação a secante, cossecante e cotangente de um ângulo, os estudantes podem observar, a partir da exploração do OVA 12, algumas características entre essas relações trigonométricas e as relações trigonométricas de seno, cosseno e tangente. Ao analisar a cossecante de um ângulo, conclui-se que é representada pelo inverso do seno de um ângulo ($\text{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$), assim sendo, o valor da cossecante de um ângulo será o inverso do valor o seno desse ângulo. Para a secante de um ângulo, podem observar que representa o inverso do valor do cosseno desse ângulo ($\text{sec}(\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(\alpha)}$), ou seja, o valor da secante de um ângulo será o inverso do valor o cosseno desse ângulo. Com relação à cotangente, podem perceber que seu valor é o valor inverso da tangente de um ângulo ($\text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$), ou

ainda, $\cotg(\alpha = \frac{1}{\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$). Caso o estudante não consiga assimilar essas relações ao explorar esse OVA, o professor pode ajudar na compreensão.

A partir dessas observações, conclui-se que a cossecante de um ângulo α é o inverso do seno de α , a secante de um ângulo α é o inverso do cosseno de α e a cotangente de um ângulo α é o inverso da tangente de α . Essas relações estão descritas nas caixas de textos, apresentadas no OVA, que podem ser exploradas quando selecionada a opção “*cossec(α)*, *sec(α)* e *cotg(α)*”.

Como os valores da cossecante, secante e cotangente de um ângulo são obtidos a partir do seno, cosseno e tangente desse ângulo, respectivamente, para alguns desses ângulos seus valores podem ser negativos. Desse modo, a cossecante apresenta um valor negativo quando α pertence ao intervalo entre 180° a 360° . A secante tem valor negativo quando α está no intervalo de 90° a 270° . Com relação à cotangente, seu valor é negativo quando $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ e $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Essas relações podem ser observadas no OVA, através dos segmentos *OE*, *OF* e *GI* (apresentados em vermelho, amarelo e azul, respectivamente), pois nos respectivos intervalos, os segmentos se encontram com orientação negativa em relação ao eixo das abscissas (no caso da cossecante) e no eixo das ordenadas (no caso secante e cotangente). Outra forma de observar que os valores dessas relações são negativos, nos respectivos intervalos, é através das caixas de texto que apresentam as razões que resultam em seus valores.

Ao observar e comparar os intervalos em que as relações trigonométricas apresentam valores negativos pode-se perceber a relação entre o seno e a cossecante, o cosseno e a secante, a tangente e a cotangente. Seus valores negativos coincidem no mesmo intervalo devido a relação que existe entre elas, como já mencionado. Esse OVA apresenta os valores dessas relações trigonométricas apenas para valores de 0° a 360° , porém é possível obter valores para qualquer ângulo α .

No OVA 12 é possível perceber que para alguns valores de α a tangente, a cossecante, a secante e a cotangente não são definidas, visto que as caixas de texto mostram que para esses casos a razão apresenta uma divisão por 0, o que não existe. Quanto aos segmentos que representam o valor dessas relações trigonométricas, percebe-se que não são apresentados nesses casos. O OVA permite observar que a tangente e a secante não estão definidas quando α é igual a 90° e 270° , a cossecante e a cotangente quando α é igual a 0° , 180° e 360° .

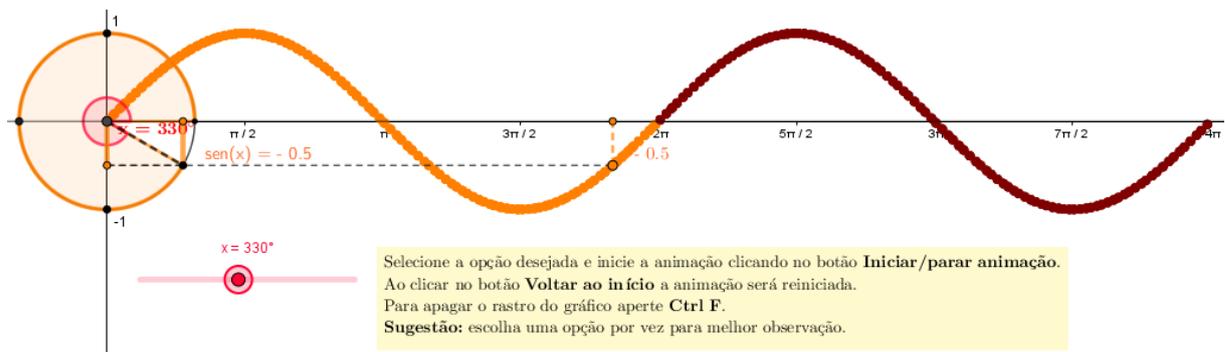
4.6 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (OVA 13)

O OVA 13, ilustrado nas figuras 17, 18 e 19, tem o intuito de apresentar, graficamente, as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente, e explorar os conceitos envolvidos nessas funções. Para tanto é possível animar a construção dos gráficos usando o botão “Iniciar/pausar animação”, que movimenta o controle deslizante x , valor do ângulo x . Para melhor exploração dos conceitos envolvidos, o OVA possibilita acionar a construção dos gráficos dessas funções de maneira independente, podendo escolher qual(is) funções explorar, através das opções “ $sen(x)$, $cos(x)$, $tg(x)$, $cossec(x)$, $sec(x)$ e $cotg(x)$ ”. Além disso, o objeto apresenta triângulos retângulos, inscritos no ciclo trigonométrico, com os segmentos correspondentes aos valores de seno e cosseno do ângulo x .

Para a construção desses gráficos considera-se a medida dos ângulos dada em radianos, uma vez que o domínio dessas funções é o conjunto dos números reais ou intervalos desse conjunto, conforme já observado, além do que, a maior parte do material disponível para o Ensino Médio apresenta a medida dos ângulos em radiano. Dessa forma optou-se por utilizar o radiano. Todavia, no OVA considera-se também a respectiva medida dos ângulos em grau.

Ao explorar nesse OVA, o estudante pode iniciar a animação e observar que, à medida que o valor de x é alterado, o gráfico da função selecionada é construído. O valor de x na construção varia de 0 a 4π , o que equivale ao intervalo de 0° a 720° . A Figura 17 ilustra a construção do gráfico da função $sen(x)$.

Figura 17 – OVA 13: gráfico da função seno



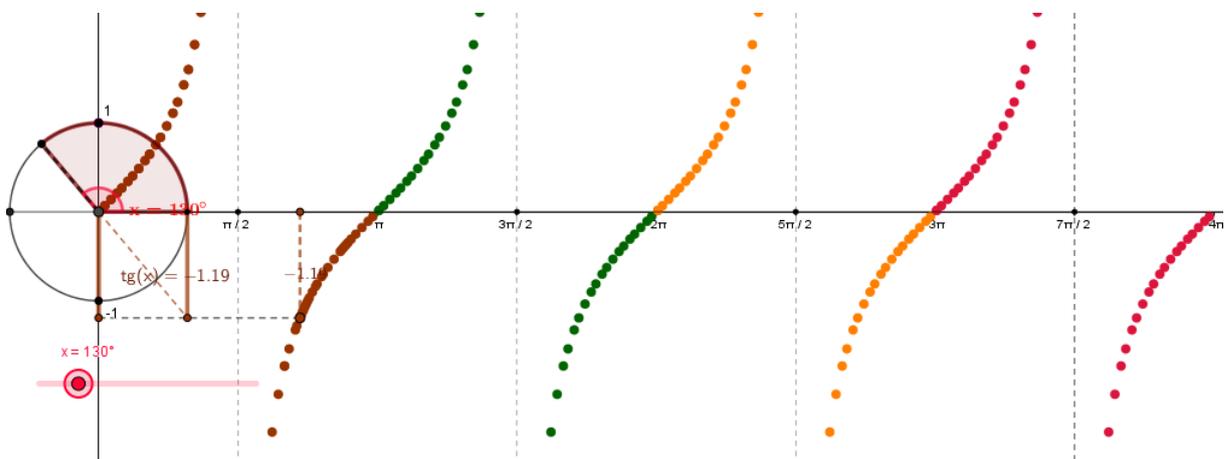
Fonte: A autora (2023)

Na Figura 17, é possível observar que o OVA apresenta o valor da função $\text{sen}(x)$ para cada valor de x , isso também ocorre para o gráfico da função $\text{cos}(x)$. Ao observar essa característica, o estudante pode relacionar a construção do gráfico neste OVA com o OVA 12, estudado anteriormente, que apresenta o valor do seno e cosseno de cada ângulo, sendo, em alguns intervalos, positivo ou negativo. Com a construção do gráfico da função $\text{sen}(x)$ é possível encontrar o intervalo em que o valor da função é positivo e em qual é negativo. O valor do seno é negativo quando $\pi < x < 2\pi$ (ou $180^\circ < x < 360^\circ$, como já observado no OVA 12) e quando $3\pi < x < 4\pi$ (ou $540^\circ < x < 720^\circ$), e positivo quando $0 < x < \pi$ (ou $0^\circ < x < 180^\circ$) e de $2\pi < x < 3\pi$ (ou $360^\circ < x < 540^\circ$).

Com relação ao gráfico das funções $\text{tg}(x)$, $\text{cossec}(x)$, $\text{sec}(x)$ e $\text{cotg}(x)$, não é possível definir o valor dessas funções para todo x real, como já mencionado. A Figura 18 ilustra o gráfico da função $\text{tg}(x)$ e mostra que para $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ (ou $90^\circ, 270^\circ, 450^\circ$ e 630° , respectivamente) essa função não está definida.

Assim como a função $\text{tg}(x)$, a função $\text{sec}(x)$ também apresenta restrição para $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ (ou $90^\circ, 270^\circ, 450^\circ$ e 630° , respectivamente). Devido a essas restrições, que se apresentam em intervalos de 180° (ou π), o domínio das funções $\text{tg}(x)$ e $\text{sec}(x)$ apresenta restrições e é representado pelo conjunto $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. As funções cossecante e cotangente apresentam restrições para $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ e 4π , por exemplo, (ou $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ$ e 720° , respectivamente), e assim o domínio dessas funções é o conjunto $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Figura 18 – OVA 13: gráfico da função tangente



Fonte: A autora (2023)

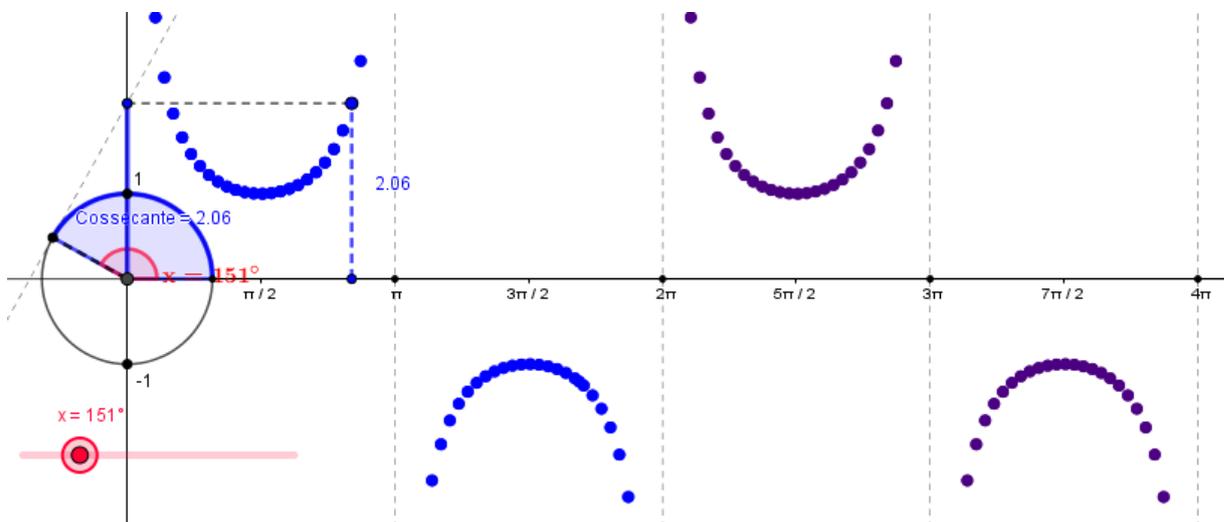
Como ilustram as figuras 17 e 18, o OVA 13 possibilita explorar a ideia do período da função, pois exibe o gráfico da função $\text{sen}(x)$ com duas cores distintas, uma para cada período (de 0 a 2π ou 0° a 360° , uma cor e de 2π a 4π ou 360° a 720° , outra cor). O OVA apresenta, para todas as funções, o gráfico com cores distintas para cada período.

Outro conceito que pode ser explorado no OVA 13 é a imagem das funções trigonométricas. As funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ atingem o valor máximo 1 e o valor mínimo -1 , sendo que para todos os valores no intervalo $[-1,1]$, existe um ângulo cujo seno ou cosseno é igual a este valor. A Figura 17 ilustra o gráfico da função seno. Sendo assim, o conjunto imagem dessas duas funções é expresso por $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

Para as funções $\text{tg}(x)$ e $\text{cotg}(x)$, a imagem da função é o conjunto de todos os números reais ($Im = \mathbb{R}$). O caso da função $\text{tg}(x)$ é ilustrado na Figura 18.

A Figura 19 ilustra o gráfico da função cossecante. O domínio desse gráfico é dado por $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Figura 19 – OVA 13: gráfico da função cossecante



Fonte: A autora (2023)

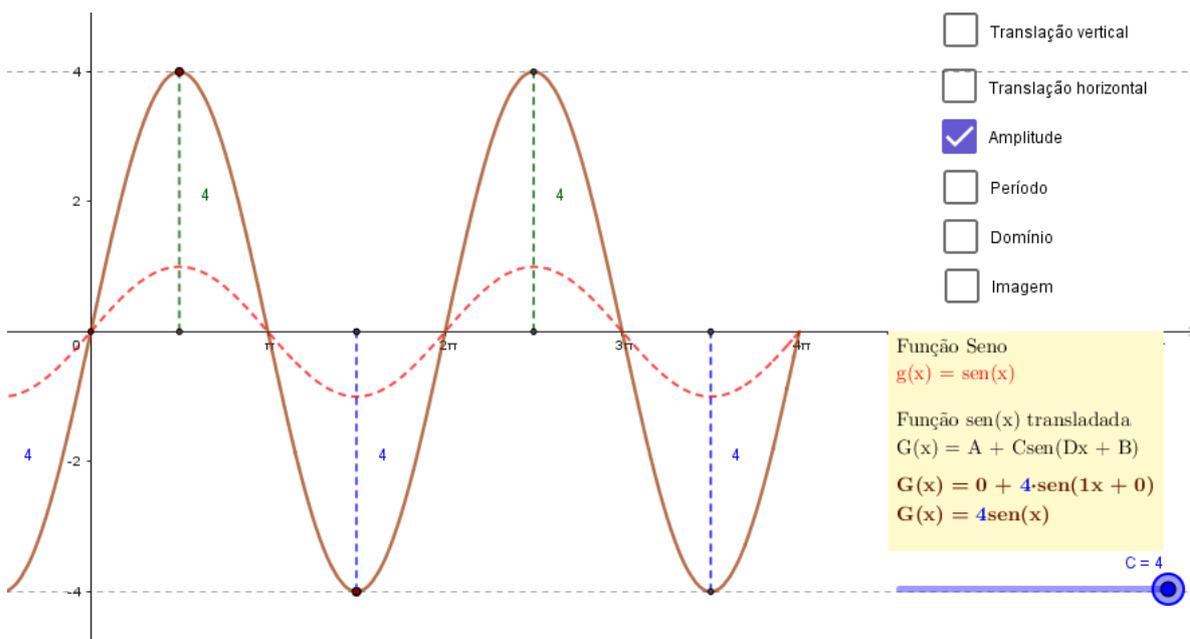
No caso das funções $\text{cossec}(x)$ e $\text{sec}(x)$, no intervalo de $-1 < y < 1$ não existe gráfico, como pode ser observado na Figura 19, ou seja, a imagem das funções apresenta restrição nesse intervalo. Logo, o conjunto imagem dessas funções é representado pelo conjunto $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ e } y \geq 1\}$.

4.7 FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE TRANSLADADAS (OVA 14, 15 E 16)

Os OVA 14, 15 e 16, foram criados com a finalidade de abordar as alterações nas funções seno, cosseno e tangente e no gráfico de cada função, quando um número é somado ou multiplicado a função, e quando um número é somado ou multiplicado ao argumento da função. Ao manusear os OVA, o estudante poderá relacionar a lei de formação da função e o comportamento do gráfico, à medida que os números são somados ou multiplicados na função ou em seu argumento.

No OVA 14 são apresentadas as variações da função $g(x) = \text{sen}(x)$, a partir de translações, ampliações e compressões, que resultam na função trasladada $G(x) = A + C\text{sen}(Dx + B)$, com A , B , C e D números reais. O objeto possibilita explorar as translações vertical e horizontal, a amplitude, o período, o domínio e a imagem. Para isso, é possível selecionar as opções desejadas, manusear e explorar o OVA através dos controles deslizantes e caixas de texto que são apresentadas. O objeto proporciona ao estudante comparar o gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$ (em vermelho) com o gráfico da função $G(x) = A + C\text{sen}(Dx + B)$ (em marrom) durante a interação, como mostra a Figura 20.

Figura 20 – OVA 14: gráfico da função $G(x) = A + C\text{sen}(Dx + B)$



Fonte: A autora (2023)

Nesse objeto, ao selecionar a opção “Translação na vertical”, é apresentada uma caixa de texto, a qual possibilita que o estudante compare a lei de formação da função $g(x) = \text{sen}(x)$ e da $G(x) = A + C\text{sen}(Dx + B)$, além do controle deslizante A , que altera o valor desse parâmetro e, conseqüentemente, a função $G(x)$. À medida que o controle deslizante A é movimentado, o gráfico da função $G(x)$ é transladado na vertical, de modo que se $A > 0$, o gráfico é deslocado $|A|$ unidade para cima e se $A < 0$, o gráfico é transladado $|A|$ unidades para baixo. A caixa de texto apresenta a função $G(x)$ com o valor de A , então quando esse valor é alterado, através do controle deslizante, a caixa de texto apresenta essa modificação. Assim, o estudante pode observar que o valor de A é somado à função e altera o gráfico dessa função.

Ao selecionar a opção “Translação horizontal”, o objeto mostra o controle deslizante B , que altera o valor de B na função $G(x)$, e uma caixa de texto, a qual possibilita comparar a lei de formação da função $g(x)$ e $G(x)$. Ao movimentar o controle deslizante B , o estudante pode observar na caixa de texto o valor de B (que é somado ao argumento x da função), sendo alterado. O estudante pode também comparar essa alteração no gráfico, visto que à medida que o valor de B altera, o gráfico é transladado na horizontal, de modo que, se $B > 0$ o gráfico se desloca para a esquerda e se $B < 0$, o gráfico se desloca para a direita.

Ao explorar essas duas opções no OVA 14, o estudante poderá concluir que o gráfico sofre uma translação vertical quando um valor é somado a função, e sofre uma translação horizontal quando um valor é somado ao argumento da função. As translações, verticais e horizontais, acontecem sempre que um valor é somado à função ou somado ao argumento da função, respectivamente. Essas relações de translação, vertical e horizontal, acontecem para qualquer função.

Com este objeto é possível explorar também a relação de amplitude da função, observada no OVA por meio da opção “Amplitude”. Ao selecionar esta opção, o OVA apresenta um controle deslizante C , que altera o valor de C , além de uma caixa de texto, que compara as funções $g(x)$ e $G(x)$. Na função $G(x)$, o número C multiplica a função $\text{sen}(x)$, assim, ao movimentar o controle deslizante C , o valor de C é alterado na função $G(x)$, modificando o seu gráfico. O gráfico da função $G(x)$ é ampliado ou comprimido na vertical, visto que a função é multiplicada por C .

Outra possibilidade com o OVA 14 é a de explorar o período da função, através da opção “Período”. Ao selecionar essa opção o objeto apresenta o controle deslizante D , duas caixas de texto, uma que permite comparar as funções $g(x)$ e $G(x)$ e a outra que apresenta o

período da função $G(x)$ à medida que o valor de D é alterado. Ainda, o objeto apresenta a opção de selecionar “Período da função $\text{sen}(x)$ ”, responsável por apresentar o período da função $g(x) = \text{sen}(x)$, que é 2π . Ao alterar o valor do número D , que multiplica o argumento x da função $G(x)$, o período da função é alterado, visto que o período da função $G(x) = \text{sen}(Dx)$ é $\frac{2\pi}{|D|}$. Ao manusear e observar o OVA, é possível analisar o período da função comparando a caixa de texto, que calcula o período, e o gráfico, que mostra os segmentos coloridos correspondentes ao período da função $G(x)$ para cada valor de D .

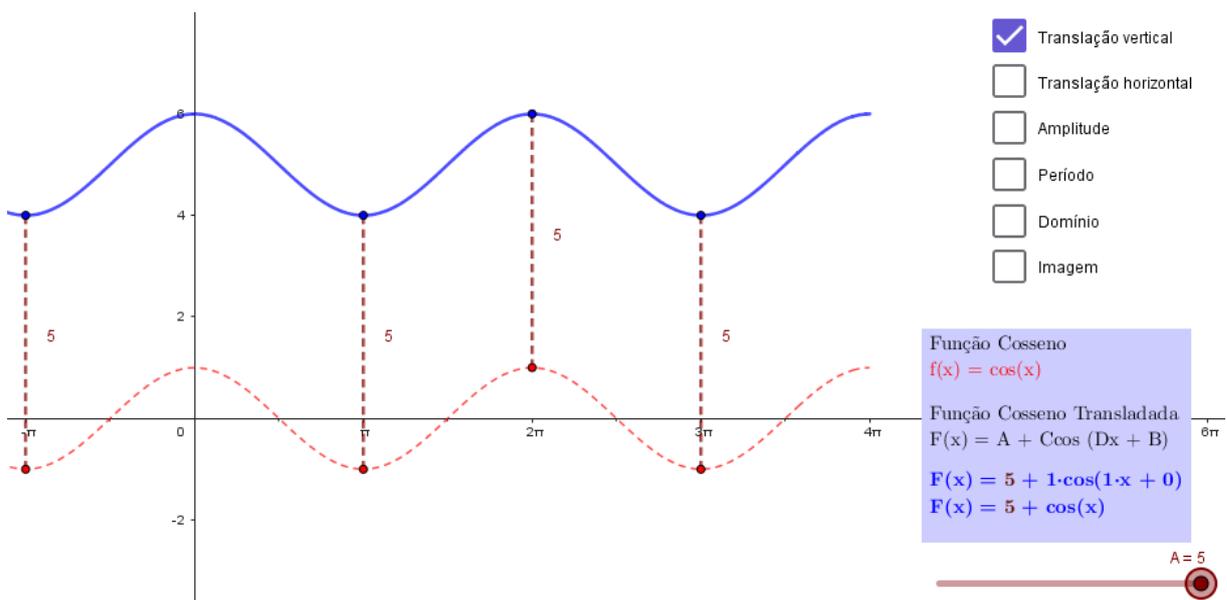
O domínio e a imagem da função $G(x)$ também são apresentados no OVA 14, através das opções “Domínio” e “Imagem”. Para explorar o domínio da função $G(x)$, o objeto apresenta uma caixa de texto com a explicação de que o domínio da função é o conjunto dos números reais. No gráfico é apresentado um segmento, sobre o eixo das abscissas, que representa o domínio da função. Ao explorar a imagem da função $G(x)$ no OVA 14, percebe-se que ela se altera à medida que o valor do número A e do número C são alterados, pois o número A é responsável por transladar, na vertical, o gráfico da função $G(x)$, e o número C por ampliar ou comprimir, na vertical, o gráfico da função $G(x)$. Assim, ao explorar a opção referente à imagem da função, o objeto mostra os controles deslizantes A e C e uma caixa de texto, que apresenta o intervalo que representa a imagem da função $G(x)$ é $Im = \{y \mid A - |C| \leq y \leq A + |C|\}$. No gráfico, a imagem da função é representada por um segmento sob o eixo das ordenadas.

No OVA 15 é apresentado o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ e sua função transladada $F(x) = A + C\cos(Dx + B)$, com A , B , C e D números reais. Este objeto possui dinâmica de construção semelhante à do OVA 14, logo o manuseio e orientações desses dois objetos coincidem. O OVA 15 possibilita explorar as translações vertical e horizontal, a amplitude, o período, o domínio e a imagem da função $F(x)$. Seguindo as orientações, ao manusear o objeto é possível selecionar as opções e explorar a construção através dos controles deslizantes e caixas de texto que vão sendo apresentados. Na construção é possível comparar as funções $f(x) = \cos(x)$ e $F(x) = A + C\cos(Dx + B)$, através das leis de formação, apresentadas em caixas de texto, ou pelos gráficos (em vermelho e em azul, respectivamente), como mostra a Figura 21.

De forma semelhante ao OVA 14, esta construção explora a translação, vertical e horizontal, por meio dos números A e B , respectivamente. A Figura 21 mostra a relação de translação vertical na função $F(x)$. As relações de amplitude e período também são expostas

de maneira similar as apresentadas no OVA anterior, visto que o número D é responsável pelo período da função $F(x)$, pois multiplica o argumento da função e C é responsável pela amplitude do gráfico da função $F(x)$, pois multiplica a função, fazendo com que o gráfico da função seja ampliado na vertical $|C|$ vezes, quando $|C| > 1$ e seja comprimido na vertical quando $0 < |C| < 1$.

Figura 21– OVA 15: gráfico da função $F(x) = A + C\cos(Dx + B)$



Fonte: A autora (2023)

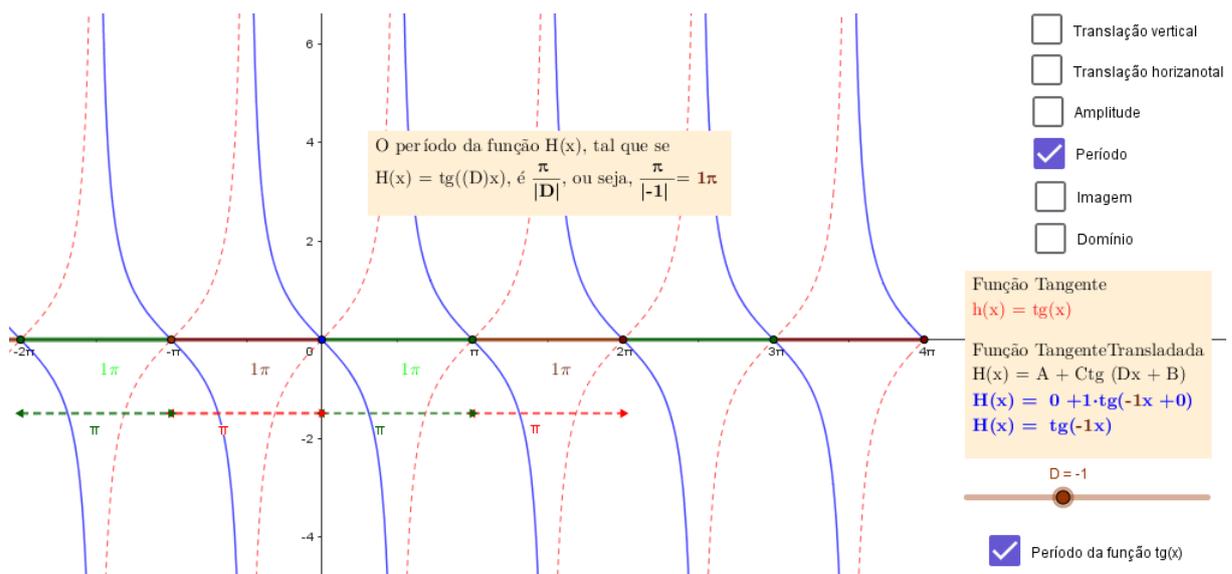
No OVA 15, ao explorar o domínio e a imagem da função $F(x)$, pode-se perceber que, assim como nas funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ (apresentadas no OVA 13) as funções $F(x)$ e $G(x)$ tem domínio e imagem igual, sendo o domínio da função $F(x)$ representado pelo conjunto $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ a imagem da função $F(x)$ representada pelo intervalo $Im = \{y \mid A - |C| \leq y \leq A + |C|\}$, visto que A e C alteram a imagem da função $F(x)$.

O OVA 16, disposto na Figura 22, apresenta a função $H(x) = A + Ctg(Dx + B)$, que representa a translação da função $h(x) = tg(x)$. Como nos OVA 14 e no OVA 15, que apresentaram as relações das funções $G(x)$ e $F(x)$, esse OVA permite explorar as relações de translação (vertical e horizontal), amplitude, período, domínio e imagem da função $H(x)$. Seguindo a mesma dinâmica de orientação, manuseio e apresentação das outras construções, as relações são apresentadas à medida que o estudante interage com o objeto.

Ao explorar o OVA 16, é possível perceber que as relações de translação (vertical e horizontal), e amplitude da função $H(x)$ são semelhantes as das funções $G(x)$ e $F(x)$, porém

o período, a imagem e o domínio diferem. Ao alterar o valor do número D , que multiplica o argumento x da função $H(x)$, o período da função é alterado, visto que o período da função $H(x) = \text{tg}(Dx)$ é $\frac{\pi}{|D|}$. A imagem da função $H(x)$ é $Im = \mathbb{R}$. Anteriormente observou-se que a função $h(x) = \text{tg}(x)$ apresenta restrições no seu domínio. De modo semelhante, o domínio da função $H(x)$ apresenta restrições, porém deve-se considerar que o período da função e a translação horizontal do gráfico alteram o domínio. Como o valor do parâmetro B é responsável pela translação do gráfico na horizontal e o valor do parâmetro D muda o período da função, estes interferem no domínio da função $H(x)$. O objeto mostra que esse domínio pode ser descrito pelo conjunto $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2|D|} - \frac{B}{|D|} + \frac{k\pi}{|D|}, k \in \mathbb{Z}\}$. Para melhor explorar esse conceito, ao selecionar a opção “Domínio”, o objeto apresenta os controles deslizantes B e D , responsáveis pela translação horizontal e determinação do período da função, respectivamente, que alteram o domínio. No OVA, há também uma caixa de texto que apresenta a descrição das restrições do período da função $H(x)$, observada ao selecionar a opção “Conjunto domínio”, e a opção “Algumas medidas”, que, ao ser selecionada, mostra medidas de segmentos a fim de ajudar na compreensão do conjunto domínio.

Figura 22 – OVA 16: gráfico da função $H(x) = A + C \text{tg}(Dx + B)$



Nos OVA 14, 15 e 16, o estudante tem a possibilidade de explorar as alterações do gráfico da função quando sua lei de formação é alterada (quando é somado ou multiplicado

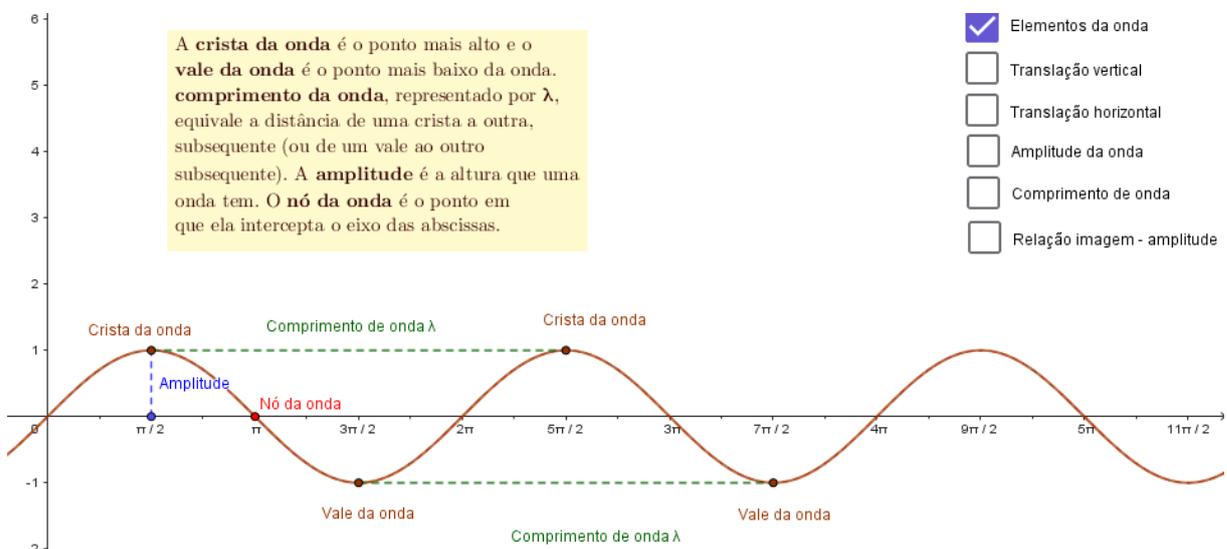
um valor na função ou ao argumento da função). A partir da interação com esses objetos, é possível comparar, em cada caso, as alterações na lei de formação, no domínio, na imagem, no período e no gráfico.

4.8 ONDAS SONORAS: UMA APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA (OVA 17 E 18)

As ondas sonoras podem ser representadas graficamente por uma senoide. Assim, as propriedades consideradas para o gráfico da função seno, podem ser relacionadas com as características presentes na representação gráfica da onda sonora.

O OVA 17 foi elaborado com o intuito de apresentar o gráfico de uma onda sonora e suas principais características, relacionando-as com as propriedades da função seno. Assim, no objeto é apresentado o gráfico da senoide de modo a compará-lo com a representação gráfica de uma onda. Ao selecionar a opção “Elementos da onda”, é possível explorar no objeto elementos específicos da onda, como crista e vale da onda, nó da onda, comprimento e amplitude da onda, bem como a caracterização de cada elemento, como mostra a Figura 23. Com relação às características específicas da onda sonora, é possível observar que a crista da onda é o ponto mais alto da onda, o vale da onda é o ponto mais baixo da onda, o nó da onda é o ponto em que ela intercepta o eixo das abscissas e a amplitude da onda é a metade da distância do ponto mais alto (crista) ao ponto mais baixo (vale).

Figura 23 – OVA 17: gráfico que representa uma onda sonora e suas características

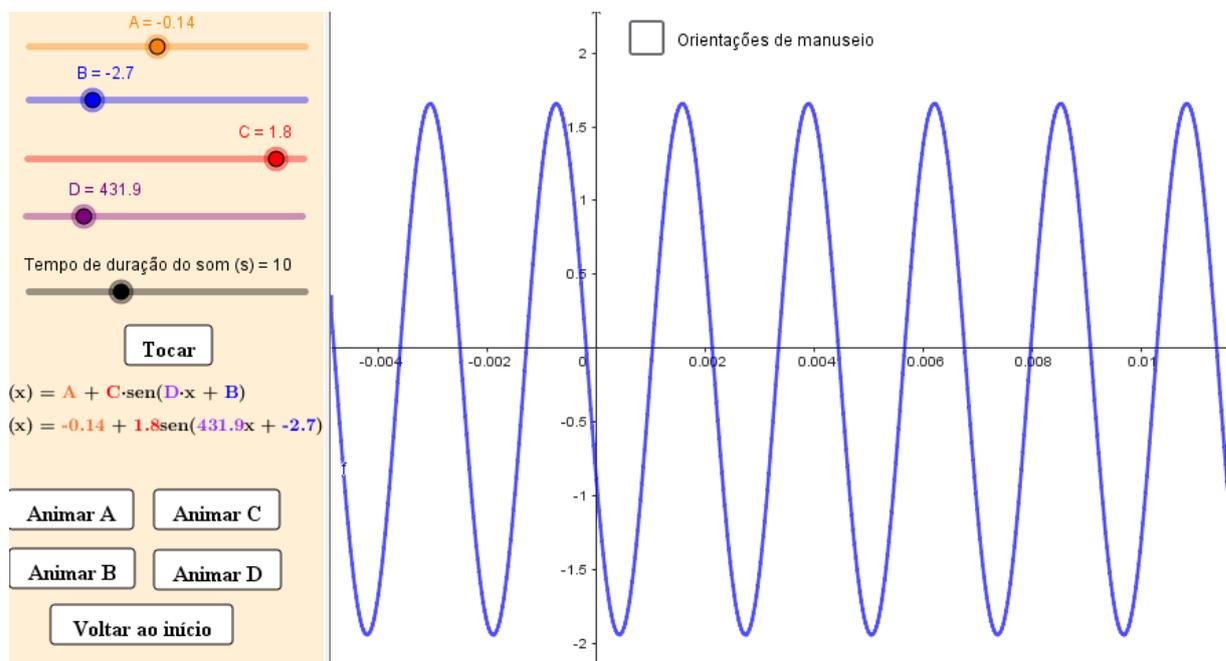


Fonte: A autora (2023)

Ao selecionar algumas opções que podem ser exploradas no OVA (translação, vertical e horizontal, amplitude da onda e comprimento da onda), a construção apresenta, além das características específicas de uma onda sonora (crista e vale da onda, nó da onda, comprimento e amplitude da onda), propriedades que foram exploradas no gráfico da função seno e estão presentes no gráfico da onda sonora (translação, vertical e horizontal, amplitude e período). O objeto proporciona ainda, observar que o comprimento da onda, representado por λ , distância de uma crista a outra (ou de um vale ao outro), equivale ao período da função seno, $\lambda = \frac{2\pi}{|D|}$. A opção “Relação imagem – amplitude”, ilustrada na Figura 23, tem a finalidade de relacionar a amplitude da onda sonora com a imagem da função seno, visto que a imagem dessa função é igual ao dobro da amplitude da onda.

O OVA 18, apresentado na Figura 24, foi planejado para explorar as características que envolvem o som que uma onda reproduz. Para isso, o objeto apresenta o gráfico da onda sonora e os controles deslizantes dos parâmetros A , B , C e D , que representam a translação vertical e horizontal, a amplitude e o comprimento da onda, respectivamente.

Figura 24 – OVA 18: gráfico de uma onda sonora



Fonte: A autora (2023)

Além do controle deslizante, que altera o tempo de reprodução do som, o objeto apresenta a lei de formação da função, $f(x) = A + C \cdot \text{sen}(Dx + B)$. Ao manusear o OVA 18,

é possível perceber que os controles deslizantes A , B , C e D , podem ser animados pelos botões “Animar A , B , C e D ”.

Essa construção proporciona explorar as relações entre os conceitos das funções trigonométricas, em especial da função seno, já estudada, com a onda sonora. Ao manusear o OVA é possível observar quais as propriedades estudadas alteram o som que a onda sonora reproduz.

Como já observado, os parâmetros A e B representam a translação da onda na vertical e horizontal, respectivamente. Ao explorar o OVA 18, o estudante pode perceber que a translação horizontal não altera o som, porém, a translação vertical, altera o som da onda. Assim, à medida que o valor de A (que é somado a função seno), é alterado, o som da onda também é alterado.

O parâmetro C , que representa a amplitude da onda, é o número que multiplica a função $f(x) = \text{sen}(x)$. Ao explorar o objeto é possível perceber que à medida que o valor de C é alterado, a amplitude da onda é alterada, assim como a intensidade do som. Ao alterar o parâmetro D , altera-se o comprimento da onda, e conseqüentemente sua frequência e som.

Através da interação com o OVA 18, o estudante pode perceber que algumas propriedades relacionadas as funções trigonométricas seno e cosseno, estudadas anteriormente, são responsáveis por alterar o som da onda sonora. Assim, é possível identificar que a translação vertical altera o volume do som. Com relação a amplitude da onda, percebe-se que altera a intensidade do som: quanto maior a onda sonora, mais intenso será o som, e quanto menor a onda, menos intenso será o som. Com relação ao período, sua interferência é na frequência que o gráfico da onda tem, e conseqüentemente, na altura do som (atributo que permite distinguir sons graves de sons agudos), assim, quanto maior a frequência da onda, mais alta será a frequência do som (mais agudo), ou quanto menor a frequência da onda, mais baixa será a frequência do som (mais grave).

5 IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA NA PERSPECTIVA DOS PROFESSORES

Na sequência, relata-se as percepções de sete professores de Matemática, participantes do estudo, sobre possibilidades e potencialidades do material, a partir do exercício de IP, visando seu uso para o ensino do objeto de conhecimento proposto para o Ensino Médio. Inicialmente, são caracterizados os professores que se dispuseram a participar deste exercício, quanto à atuação docente e o uso de TD em suas aulas de Matemática, a partir dos dados obtidos no Questionário 1. Na sequência são descritos os apontamentos feitos pelos professores com relação ao material, considerando as manipulações e registros feitos na plataforma do GeoGebra on-line, bem como as respostas do Questionário 2.

A fim de não identificar os participantes, os sete professores foram identificados por P1, P2, P3, P4, P5, P6 e P7, ao longo do texto, de acordo com a ordem em que finalizaram a participação na pesquisa. Todos os professores que participaram da pesquisa são licenciados em Matemática (sendo um licenciado também em Física) e possuem pós-graduação *lato sensu* em Matemática ou na área da Educação. Dois dos professores são mestres em Matemática, dois estão cursando o mestrado em Matemática e um é doutorando em Educação em Ciências. Com relação a atuação profissional como docentes, dois professores atuam há 20 anos ou mais, um atua entre 10 e 14 anos, um entre 5 e 10 anos e um atua entre 2 e 5 anos. Dois professores que participaram da pesquisa, no momento não atuam como professores de Matemática, sendo que um atuou entre 5 e 10 anos e outro entre 2 e 5 anos. Esses profissionais trabalham em escolas públicas (na rede estadual ou municipal) e escola privada. Atualmente, três professores atuam no Ensino Médio como professores de Matemática e um como professor de Física.

5.1 PERCEPÇÕES INICIAIS DOS PROFESSORES COM RELAÇÃO AO USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Na sequência são apresentadas as percepções iniciais dos professores quanto ao uso, em sala de aula, das TD e de *softwares* específicos de geometria, em especial o GeoGebra, bem como de OVA. Essas ponderações foram obtidas através do Questionário 1, respondido antes do manuseio e exploração do material proposto.

Todos os professores que participaram do estudo mencionaram usar ou terem usado alguma tecnologia como ferramenta de ensino em suas aulas de Matemática. As ferramentas citadas pelos professores são variadas, sendo: *softwares* (GeoGebra e Excel), alguns aparatos tecnológicos como lousa digital, calculadora, celular, *tablets* e computadores, além de ambientes como sala de informática, ambiente virtual de aprendizagem, laboratório de ensino de Matemática e espaço Maker. Além desses, alguns professores relataram que, em suas aulas, fazem o uso da robótica, videoaulas e jogos virtuais (gamificação). Segundo Guarda e Petry (2020), o uso de ferramentas tecnológicas auxilia no processo de aprendizagem, visto que permite a interação com diferentes formas de representar os conceitos trabalhados, contribuindo na elaboração do pensamento cognitivo do estudante.

Com relação ao uso de algum *software* específico de geometria para as aulas de Matemática, dois professores mencionaram não terem utilizado nenhum, enquanto que os demais informaram usar o GeoGebra, sendo que um professor apontou utilizar também o PhET Colorado, Scratch e Avogrado. Os professores que utilizam o GeoGebra em suas aulas de Matemática, apresentaram percepções positivas em relação ao seu uso como ferramenta de auxílio no processo de ensino e de aprendizagem. P4 comenta: “*de modo geral, aposto muito no potencial do GeoGebra no ensino de matemática, e percebo que quando utilizo, os estudantes aprendem e conseguem visualizar e assimilar/associar os conceitos com mais facilidade*”. Na percepção de P7 o *software*, além de contribuir para a assimilação do objeto de conhecimento, é estimulador de outras habilidades, visto que “*o uso do GeoGebra proporciona maior praticidade na resolução das experiências propostas, facilitando a compreensão dos conceitos [...], além de ser um estímulo a criatividade e o desenvolvimento lógico*”.

Observa-se nas percepções apresentadas pelos professores que consideram o GeoGebra como uma ferramenta com forte potencial para o ensino e aprendizagem da Matemática, por proporcionar aos estudantes manipular, visualizar e explorar mais facilmente diferentes representações relacionadas aos objetos de estudos. Segundo Oliveira, Guimarães e Andrade (2012), o uso do *software* facilita a compreensão visto que proporciona a visualização e, assim, o estudante tem a possibilidade de refletir sobre as conjecturas levantadas por ele mesmo ou pelo professor. De acordo com P4, o GeoGebra, além de contribuir para o processo de ensino, corrobora com a aprendizagem: “*ao utilizar essa ferramenta nas aulas, a aprendizagem passou a ser significativa no contexto de um complemento da aula, pois serviu de fonte de informação para as dificuldades*

apresentadas no ensino de Geometria”, além de considerar que “*os objetivos propostos são atingidos a partir da sequência de atividades realizadas no software, propiciando um modo de aprender mais prazeroso e menos cansativo*”.

Sobre as principais possibilidades e potencialidades do GeoGebra como ferramenta para o ensino de conceitos da Matemática, P1 considera-o de fácil manuseio, além de proporcionar uma “*aprendizagem dinâmica*”. Para P2, ao usar o *software*, “*as construções ficam mais fáceis e é possível mostrar mais rapidamente e com maior precisão propriedades da Geometria que não são demonstrados em sala de aula, mas podem ser verificados por meio de vários exemplos*”. Para P4 “*o software GeoGebra tem um potencial imenso decorrente das inúmeras possibilidades que o mesmo permite explorar*”. Algumas dessas alternativas foram apontadas por P1: “*ótimo software com muitas possibilidades em diferentes áreas: Geometria Euclidiana e Analítica, Funções, Polinômios, Trigonometria*”. As possibilidades mencionadas pelos professores são corroboradas por Oliveira, Guimarães e Andrade (2012), ao considerar que o GeoGebra é uma ferramenta que contribui com a maneira de ensinar conceitos, pois permite apresentá-los por meio de diferentes registros de representação.

Com relação ao uso de OVA nas aulas, alguns professores apontaram utilizá-los como estratégia de ensino em sua prática docente. Destes, dois professores mencionaram usar OVA disponíveis no GeoGebra on-line: P3 afirma que além de utilizar os OVA disponíveis, cria seus próprios objetos e P4 mencionou que, atualmente, “*os alunos estão criando sequências de aprendizagem, a partir de jogos diversos*”. Outros professores (P1, P5 e P7) mencionaram utilizar vídeos e jogos. Para P2, os OVA podem ajudar na compreensão de conceitos, visto que “*os OVA quando bem elaborados contribuem para percepção de regularidades e propriedades [...] que são vistas na teoria em sala de aula, possibilitam também a criatividade do aluno que pode criar novos elementos*”. Nessa observação, percebe-se que o professor faz referência a contribuição dos OVA no desenvolvimento de outras habilidades, além das relacionadas com o objeto de estudo. Essas ponderações corroboram com Spinelli (2007) ao afirmar que os objetos auxiliam no processo de aprendizagem e estimulam o desenvolvimento de outras capacidades, como, por exemplo, imaginação e criatividade.

Referente as percepções dos professores sobre as principais potencialidades do uso de recursos tecnológicos, em particular de OVA elaborados no GeoGebra na prática docente, P1 comenta que contribui para a “*interação de aluno e professor*”. Considera

também proporcionar a *“inclusão digital, [...] troca de materiais e experiência entre colegas de diferentes lugares, de forma digital”*. Para P3, o uso dos OVA tem grande *“potencial para explorar situações contextualizadas, resgatando aplicações de conceitos matemáticos na busca por justificar fenômenos cotidianos”*, além do *“desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos estudantes”*.

Sobre a percepção quanto às dificuldades ou limitações para a utilização de recursos tecnológicos na sala de aula, a maioria dos professores mencionou a estrutura física (falta de computadores e internet de qualidade). Comentaram também haver dificuldades com relação à preparação para o uso desses recursos em sala de aula. Neste sentido P2 afirma que há *“falta de tempo para planejamento por parte do professor para organizar uma sequência didática [...]”*. A falta de capacitação dos professores para usufruírem dos recursos tecnológicos é mencionada por P4: *“[...] não são oferecidos cursos gratuitos aos docentes, não tem divulgação dessas ferramentas nas escolas [...]”*. Estas percepções vão ao encontro do que afirma Kenski (2003), de que as tecnologias digitais oferecem novos desafios. Porém, acima das dificuldades, deve-se considerar que o uso das TD no processo de ensino enriquece a aprendizagem.

Na concepção de P7, *“a necessidade de inovação para acompanhamento das mudanças sociais é indispensável”*, afirmação que vem ao encontro do que menciona Kenski (2003, p. 49), *“toda aprendizagem, em todos os tempos é mediada pelas tecnologias disponíveis”*. Com relação à contribuição das TD para o envolvimento dos estudantes em aula, P2 comenta que é possível observar *“uma concentração por parte dos alunos em estar utilizando tecnologia para aprender um conteúdo matemático”*. Contudo, a utilização de estratégias de ensino ligadas as TD além proporcionar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e atrativo, facilita o processo de ensino pois os recursos tecnológicos proporcionam praticidade ao professor.

5.2 FUNCIONALIDADE E APRESENTAÇÃO DOS OVA

Com relação à funcionalidade e apresentação do material, os professores fizeram suas observações. Sobre os objetos que exploram a semelhança de triângulos e a razão entre segmentos proporcionais de triângulos semelhantes (OVA 1 e 2, respectivamente), P2 afirma que *“os botões para visualizar ou ocultar os elementos são bem úteis para dar ênfase a cada*

uma das propriedades”. Salienta que dessa forma as propriedades podem ser trabalhadas separadamente, para que o estudante explore o objeto sem tanta poluição visual. Esse aspecto é relevante, visto que os botões são utilizados para que, ao manusear o objeto, o estudante não se depare com muitas informações na tela ao mesmo tempo, o que poderia dificultar a assimilação dos conceitos apresentados, além de organizar a construção e deixá-la visivelmente mais atrativa.

Com relação ao OVA 12, que aborda as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico, P2 aponta que “*o esquema das cores*” (referindo-se a relação entre as cores das caixas de texto que apresentam as razões trigonométricas e os seus respectivos segmentos), “*auxilia muito para que os alunos visualizem o comportamento do ciclo trigonométrico*”. Ao falar em “comportamento do ciclo trigonométrico” o professor se refere a como são apresentadas as relações (seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente) no ciclo trigonométrico, considerando que as cores facilitam a visualização dessas relações. Nesse objeto são apresentadas várias informações (os valores de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um ângulo) que variam quando o valor do ângulo é animado. O fato de usar cores distintas para relacionar o valor de cada grandeza ao segmento correspondente contribui para que os estudantes sintetizem melhor as informações apresentadas. Para Fernandes e Ferreira (2020), ao usar cores e padrões, os objetos se tornam menos abstratos e mais concretos, contribuindo no desenvolvimento do pensamento crítico e matemático dos estudantes.

P1 afirma que o material traz “*elementos suficientes para adequada abordagem dos tópicos propostos no material, de maneira clara e objetiva, sendo de fácil entendimento para os alunos*”. P2 considera que “*as instruções e observações auxiliaram muito na manipulação dos objetos*”. A partir desses comentários, pode-se refletir sobre o fato de que quando são propostas atividades aos estudantes, é fundamental que elas sejam claras e objetivas visando o melhor aproveitamento das mesmas.

5.3 POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO MATERIAL PARA A APRENDIZAGEM

Com relação às contribuições do material para a aprendizagem, os professores também mencionaram alguns aspectos. Para P5, os objetos iniciais (OVA 1 e 2) facilitam o entendimento dos conceitos da semelhança de triângulos. Sobre as atividades que envolvem

esses dois objetos, P4 avalia que podem ser utilizadas não só para o Ensino Médio, pois considera *“excelentes atividades para demonstração das relações trigonométricas essenciais trabalhadas no 9º ano e revisadas na 2ª série do Ensino Médio”*. Alguns dos objetos criados foram pensados para revisar, no Ensino Médio, conceitos básicos da Trigonometria, contudo usá-los em turmas do Ensino Fundamental é uma alternativa que contribuirá para a aprendizagem dos estudantes.

Com relação aos OVA que abordam as relações trigonométricas de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo (OVA 3 e OVA 4), P2 comenta que considera *“[...] interessante à primeira questão fazer referência ao conteúdo anterior de semelhança, assim dá ideia de continuidade”*. Organizando desse modo, o estudante retoma os conceitos já estudados e faz associação com aqueles apresentados na nova atividade. Apresentar os conceitos de maneira interligada proporcionará, além da revisão, uma contextualização do objeto de estudo. Com relação à atividade que explora os OVA 3 e 4, P4 considera pertinente que inicia sem apresentar os conceitos, buscando construí-los: *“um ponto positivo é que inicia sem conceituar, apenas fazendo reflexões sobre a razão de semelhança e então só depois traz o conceito”* e aponta que *“esses objetos poderiam ser utilizados facilmente em sala de aula para mostrar de forma dinâmica a relação para encontrar o valor do seno, cosseno e tangente”*. Proporcionar que os conceitos sejam construídos pelos estudantes, e não os apresentar prontos, enriquece o processo de aprendizagem.

Ainda sobre os objetos OVA 3 e 4, P5 considera que *“geralmente os conceitos de seno, cosseno e tangente são difíceis para compreensão dos educandos, mas utilizando essa atividade tudo fica mais fácil e claro, pois os alunos terão a possibilidade de mudar as medidas e perceber o que muda e o que permanece”*. Nessa percepção, o professor refere-se à possibilidade de os estudantes interagirem com os objetos, alterando as medidas dos segmentos e observando o comportamento dos padrões destacados. De acordo com Raposo (2011, p. 37) *“a possibilidade de movimentar as construções, respeitando a sua estrutura, permite analisar as propriedades que lhe são características”*. Quando proporcionado ao estudante a experiência de interagir diretamente com o objeto de conhecimento, a aprendizagem se torna consequência do processo.

Como mencionado anteriormente, os estudantes podem ter dificuldade em compreender alguns conceitos matemáticos, mas quando esses conceitos são associados a uma prática, essa dificuldade pode ser sanada. Nesse sentido, P2 apontou que os objetos voltados à medida linear de um arco (OVA 5 e 6), são *“úteis para que os alunos possam*

observar, na prática, como é o comportamento da medida linear de um arco para vários tamanhos de circunferência". Quando o material proporciona uma visualização prática da teoria, os conceitos passam a ser ressignificados pelos estudantes.

Sobre as atividades que abordam os conceitos relacionados às funções trigonométricas e as translações (apresentadas nos OVA 14, 15 e 16), P2 considerou importante como *"as funções originais (seno, cosseno e tangente) são mantidas na tela para que o aluno consiga com mais facilidade perceber o comportamento desta função quando os parâmetros são alterados"*. Através dessas atividades, o estudante tem a possibilidade de identificar e refletir sobre a interferência de cada um dos parâmetros A , B , C e D considerando o comportamento da lei de formação das funções ($G(x) = A + C\text{sen}(Dx + B)$, $F(x) = A + C\text{cos}(Dx + B)$ e $H(x) = A + C\text{tg}(Dx + B)$) bem como de seu gráfico, visto que A e B são responsáveis pela translação vertical e horizontal, respectivamente, do gráfico da função, C e D são responsáveis por ampliar ou comprimir o gráfico da função na vertical e horizontal, respectivamente.

Levando em consideração o material como um todo, os professores fizeram suas observações com relação as suas contribuições para a aprendizagem. P3 considera que *"a possibilidade de manipular dados é algo que cativa a atenção dos estudantes e enriquece a aprendizagem. Os alunos almejam muito por aulas diversificadas, e fazer uso das TD, mais especificamente de OVA é muito produtivo"*. Para P5 *"o material é rico e cheio de possibilidades para uma aprendizagem significativa"*. P6 considera que através do material *"é possível mostrar aos estudantes diversas propriedades"*, se referindo aos objetos de conhecimento abordados nas atividades, enquanto P7 complementa afirmando que *"trabalhando [...] de forma dinâmica se faz possível atribuir novas características as representações, visualizações completas e entendimento das propostas, despertando novas possibilidades no processo de construção do conhecimento matemático"*. Considera ainda, que os OVA proporcionam *"possibilidades de aprendizagens diferenciadas para os alunos [...] facilitando a compreensão de diversos conteúdos matemáticos"*.

Sobre a possibilidade de o material contribuir no momento de ensinar a Trigonometria. P1 pondera que *"a pesquisa trouxe uma ótima oportunidade de ferramenta para trabalhar a Trigonometria, sem dúvida uma ótima opção para abordar esses tópicos com nossos alunos"*. Na concepção de P5, o uso do material *"certamente propiciará aos educandos uma aprendizagem significativa"*. P3 considera que o material poderá contribuir para além da assimilação dos objetos de conhecimento matemático propostos: *"os OVA contribuirão para o ensino de Geometria, com especificidade à Trigonometria. Facilita a compreensão dos*

conceitos matemáticos pelos estudantes, bem como a relação da teoria com a prática. Desenvolve o senso crítico-reflexivo, permitindo assimilar teoria-prática-cotidiano". O material foi pensado para propor atividades que possibilitem explorar conceitos da Trigonometria através de OVA e questões, com a finalidade de atingir várias habilidades ao usá-lo em sala de aula.

5.4 POTENCIALIDADES, SUGESTÕES E POSSIBILIDADES DE USO DO MATERIAL

Os professores apontaram algumas potencialidades observadas no material, que podem ser exploradas ao utilizá-lo. P2 mencionou o modo como foi feita a descrição de alguns conceitos na atividade de medida linear de um arco: *“achei muito interessante a forma como o conceito de dependência de variáveis foi descrito e também a proporcionalidade, essas percepções e raciocínio, quando compreendidos, podem ser utilizados em outras situações, até mesmo no dia a dia, então esses objetos e atividades abrangem muito mais que o conteúdo da medida linear do arco*”.

Com relação a atividade voltada à medida angular de um arco (OVA 7, 8 e 9), P3 comenta que *“está bem elaborada e permite explorar diversos conceitos sobre o assunto*”. Sobre a mesma atividade, P4 considera que *“[...] buscou trabalhar de maneira simples a conversão de graus para radianos e vice versa*”, o que considera positivo. Para P5, *“os conceitos abordados dessa forma, demonstrando o processo de construção, propiciam aos educandos uma aprendizagem bastante significativa*”. Essa última observação vem ao encontro da feita por P4 sobre os OVA 3 e 4, enaltecendo uma das essências do material, que é proporcionar ao estudante refletir sobre os conceitos e não apenas apresentá-los.

Sobre a construção que aborda o ciclo trigonométrico e suas características (OVA 10), P2 diz que *“esse objeto contém os elementos e conceitos principais sobre o círculo trigonométrico*”. Tem-se assim, a observação de um importante potencial, pois os elementos e conceitos presentes na construção são fundamentais na Trigonometria e devem ser compreendidos pelos estudantes da Educação Básica.

Sobre a atividade que explora as relações seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico (OVA 11), P2 comenta que um ponto positivo a ser considerado é a apresentação dos valores de seno, cosseno e tangente, de alguns ângulos, na forma decimal e fracionária, pois *“mesmo que espera-se que o aluno já tenha domínio de todas as formas de*

representação dos números é importante sempre trazer exemplos". P2 considera outro ponto relevante na atividade, o de relacionar os ângulos notáveis do 1º quadrante com ângulos dos demais quadrantes: *"mostrar a relação entre os ângulos dos quatro quadrantes é algo muito importante, pois assim o aluno consegue relacionar e perceber que essa relação pode ajudar a resolver problemas que envolvem ângulos que estão em outros quadrantes"*.

De acordo com P2 e P5, os estudantes geralmente apresentam dificuldades em compreender as relações trigonométricas, e consideram que o OVA 12 pode contribuir com a assimilação das relações que permeiam esse objeto de conhecimento, pois o objeto apresenta as relações de maneira dinâmica. Para P2, *"no geral os alunos possuem muitas dificuldades em entender as relações trigonométricas, acredito que o objeto em questão tem um potencial muito grande para contribuir com a abstração do conceito e relações entre as medidas do seno e cosseno, por exemplo"*. Segundo P5 *"as relações seno, cosseno e tangente parecem tão complicadas de serem visualizadas pelos educandos, e dessa forma fica tão prático, além de que os desenhos são incríveis"*. Possibilitar aos estudantes a experiência de interagir com o material de estudo é impulsionar a assimilação dos conceitos. Oliveira, Guimarães e Andrade (2012), consideram que a partir da manipulação e visualização é possível dar significados aos conceitos apresentados.

Com relação ao objeto que explora o gráfico das funções trigonométricas (OVA 13), P2 considera abordar todos os elementos necessários ao estudo desse objeto de conhecimento. Salienta que a construção do gráfico usando a animação possivelmente irá prender a atenção dos estudantes, e que *"os elementos da função como assíntotas, domínio e imagem foram abordados de uma forma muito interessante nas questões, pois o aluno mesmo sem ter o conhecimento prévio da definição desses elementos consegue identificá-los"*. Com essa colocação, o professor aponta a possibilidade de o material poder proporcionar aos estudantes a formulação de conceitos apenas conciliando a experiência de interagir com o objeto e de responder os questionamentos. Vale ressaltar que o papel do professor como mediador do processo de aprendizagem é fundamental. Complementando, P2 considera que *"ter atividades e explicações de reflexão também aumentaram o potencial de contribuição, pois da forma que os conceitos são apresentados é possível em muitos casos que os alunos consigam realizar as atividades e reflexões sem a necessidade de acompanhamento direto do professor"*. Essa observação faz refletir sobre as formas de usar e organizar o material. Não precisa ser utilizado exclusivamente como ferramenta de ensino do professor, mas pode ser

usufruído diretamente pelo estudante, a fim de complementar o assunto abordado em aula, proporcionando um estudo auto didático.

Sobre a atividade envolvendo o OVA 13, P5 salienta novamente como os estudantes consideram complexo os objetos de conhecimento que envolvem a Trigonometria e pondera que a atividade proposta pode ser um recurso que propicie a estes, aprender os conceitos envolvidos nas relações trigonométricas: *“como já comentei anteriormente esse é um conteúdo que para os alunos é bastante complexo [...] e essa atividade é um recurso excelente para que os alunos possam aprender essas relações e funções possibilitando o uso e interpretação de gráficos com maior facilidade”*. O material foi pensado para contribuir com o ensino e com a aprendizagem dos conceitos de Trigonometria, visando facilitar a apresentação das relações e a sua assimilação.

Sobre o objeto que explora as translações da função seno a partir dos parâmetros A , B , C e D (OVA 14), P2 comenta que através dele *“é possível abordar todos os elementos do gráfico de funções senoides”*. Complementa apontando a relevância da experiência que o estudante tem ao interagir com a construção e observar as relações: *“observar o que acontece com o gráfico quando alterados os valores de A , B , C e D é mais uma das formas de contribuir para que o aluno sintetize e organize os conceitos aprendidos de forma teórica em sala de aula”*. Com relação ao objeto que aborda as translações da função cosseno a partir dos parâmetros (OVA 15), P2 considera que, *“da mesma forma que o objeto relativo à função seno esse da função cosseno possibilita as mesmas análises e até mesmo comparações com o objeto anterior fazendo com que o aluno perceba comportamentos semelhantes e distintos entre as duas funções”*. Os OVA 14, 15 e 16, que abordam as translações das funções seno, cosseno e tangente, respectivamente, foram construídos com as mesmas funcionalidades, possibilitando que os estudantes observem padrões nos três objetos, cada um com características específicas da respectiva função. Assim, os conceitos comuns aos três objetos, como amplitude, por exemplo, podem ser reforçados.

Com relação à atividade que relaciona funções trigonométricas e ondas sonoras (OVA18), P2 comenta que por alguns instantes não se ouve o som que a onda produz, mas que o motivo está descrito nas observações feitas na atividade: *“um ponto muito interessante é que por vezes paramos de ouvir o som conforme mudamos alguns parâmetros, e isso está explicado nas observações e curiosidades sobre as ondas sonoras, explicando de forma clara e objetiva o porquê isso acontece”*. No material, o objeto de estudo descrito e as questões que acompanham as construções têm o intuito de complementar os conceitos apresentados nos

objetos, em especial nessa atividade, que contextualiza a função senoide com as ondas sonoras. É relevante apresentar, junto a construção, informações sobre o contexto a fim de informar aos estudantes o sentido do objeto apresentado. Esta atividade corrobora com Beltrão (2009, p. 57), quando menciona que cabe “aos professores articular situações e atividades que promovam o desenvolvimento da competência para as Aplicações [...], juntamente com o desenvolvimento de outras competências matemáticas”.

Ainda sobre a atividade do OVA 18, P3 considera que *“os alunos irão adorar essa parte. A mistura do som com o movimento das funções (no caso representações das ondas) permite aos estudantes perceberem aplicações de conceitos explorados mais especificamente na física”*. Ao propor a aplicação dos conceitos estudados espera-se que os estudantes revisem o objeto de conhecimento e façam a contextualização, visualizando a teoria na prática. A aplicação também foi mencionada por P1, que considera possível, através dos OVA, relacionar a Matemática com situações do cotidiano do estudante: *“através dessa estratégia é possível interligar a Matemática com outras situações do mundo vivenciadas pelo aluno”*.

Considerando as potencialidades do material de forma geral, P2 julga ser *“um material completo que possibilita tanto perceber e concluir padrões e propriedades, quanto reforçar conceitos já vistos em sala de aula anteriormente”*. Outra possibilidade, levantada por P3, é o fato de *“o material ser excelente para trabalhar de forma interdisciplinar com a Física”*.

Os professores mencionaram o potencial do material com relação a conclusões e sistematizações que podem ser desenvolvidas com os estudantes do Ensino Básico a partir da interação com os OVA. Nessas menções, a importância de usar as TD aparece, como mencionado por P1 ao afirmar que, *“os OVA estão vindo ao encontro do ensino básico e trazendo muitas contribuições na caminhada escolar, uma vez que possibilita aos alunos a apropriação das linguagens das tecnologias digitais”*, e P3 comenta que através do material *“é possível desenvolver diversas competências e habilidades previstas na BNCC. Nas habilidades, ao final delas, a grande maioria aponta ‘com ou sem o uso das tecnologias digitais’. Porém, com o uso das TD torna-se mais produtivo”*. As TD podem se tornar aliadas dos professores no processo de ensino ao contribuir com o desenvolvimento de competências e habilidades nos estudantes. Para Kleemann e Petry (2020), usar recursos tecnológicos em atividades desenvolvidas em sala de aula favorece a prática pedagógica, além da possibilidade de impulsionar a aprendizagem dos objetos de conhecimento curriculares. Sobre o material favorecer o desenvolvimento de habilidades específicas, P2 considera que *“esses objetos*

podem auxiliar no desenvolvimento de habilidades como correlação de variáveis, elementos do gráfico, padrões e regularidades por meio das razões de semelhança”.

O uso do GeoGebra para criar os OVA foi mencionado por P2 ao afirmar que “*o material [...] tem um grande potencial de uso uma vez que o GeoGebra, por ser uma ferramenta on-line que não necessita de instalação, pode ser utilizado mais facilmente em sala de aula*”. O acesso ao referido *software* de ensino (bem como outros) é fácil e importante, visto que a “*rentabilização das aprendizagens passa pela acessibilidade das aplicações informáticas por parte dos alunos*” (RAPOSO, 2011, p. 37).

Na opinião de P3 “*o material tem [...] elevado potencial, pois os OVA permitem a manipulação de dados, o que contribui significativamente na melhor compreensão e assimilação de conceitos, bem como na visualização e/ou explicação de problemas cotidianos*”. Para P6: “*é de grande valia a utilização dos OVA, principalmente em conteúdos que não temos objetos para mostrar aos estudantes aquele conceito, então com o uso dos OVA é possível explicar o conteúdo de uma forma diferente, chamando a atenção do estudante, fazendo com que ele veja o processo e possa compreender melhor o conteúdo*”.

Com relação as questões presentes no material, P2 comenta que, “*as atividades propostas [...] possibilitam um momento de verificação ao aluno, para que ele possa perceber se compreendeu o conceito ou se ainda restaram dúvidas*”. Na opinião de P7, o material agiliza e torna mais dinâmico o processo de ensino e aprendizagem, pois proporciona “*aos educadores possibilidades de demonstrar o que é explicado em sala, sem precisar desenhar inúmeras vezes no quadro, agiliza o processo e possibilita a melhora do processo ensino/aprendizagem*”.

De acordo com as percepções dos professores, o material apresenta um grande potencial, indicando que pode contribuir com o ensino, a partir do uso das tecnologias e com a aprendizagem, através da possibilidade de interação do estudante com os objetos. Além disso, a partir das considerações feitas, é possível ponderar que o trabalho proporciona abordar, através de OVA, um conjunto de atividades que exploram vários conceitos. De acordo com Spinelli (2007), um OVA pode compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades focalizando apenas determinado aspecto do objeto de conhecimento envolvido, ou formando, com exclusividade, a metodologia adotada para determinado trabalho.

Ao interagirem e analisarem a sequência didática disponibilizada no GeoGebra on-line, os professores apresentaram sugestões e elencaram possibilidades de uso do material em sala de aula. Para os OVA 1 e 2, P2 considera ser possível abordá-los de duas formas

diferentes, *“em um momento inicial, de forma exploratória, afim de que os alunos ao manusearem o objeto percebam algumas regularidades como a constante de semelhança e os ângulos correspondentes iguais, ou então como uma forma de complementar os conhecimentos teóricos vistos em sala anteriormente, servindo como um instrumento de exercício e avaliação sobre a semelhança de triângulos”*. Sobre essas atividades P4 comenta que é possível abordar no Ensino Fundamental (8º e 9º ano) para *“construção de definições de conceito”* e na 2ª série do Ensino Médio, *“como revisão de conceitos essenciais, para dar início ao conteúdo de ciclo trigonométrico”*.

Sobre o OVA 10, P2 sugere que poderia ser utilizado *“como uma forma de síntese de conhecimentos teóricos por meio da visualização e das animações, e as questões poderiam ser utilizadas como uma revisão ou até auto avaliação de conhecimentos e entendimento do aluno sobre os conceitos vistos”*. É pertinente considerar que essa sugestão pode ser relevante para outras atividades presentes no material.

Com relação as atividades propostas na interação com o OVA 12, P4 considera que os estudantes *“precisam ter em mente o cálculo do inverso de um número e observar que essas relações surgem disso. Assim, antes de trabalharmos as relações citadas acima, precisamos ter trabalhado bem as três iniciais. Acredito que se tivesse mais atividades reforçando o material anterior e também o inverso de um número, ajudaria na aprendizagem dessas relações”*. Vale lembrar que o material proposto é um apoio para o ensino da Trigonometria no Ensino Médio, de forma que se faz necessário buscar alternativas a fim de contemplar os objetivos pretendidos ao abordar os objetos de conhecimento, bem como adaptar a cada realidade, complementando com outras atividades, sempre que se julgar necessário.

Para P2, a construção que explora a onda sonora e suas principais características (OVA 17) permite contextualizar o objeto de conhecimento, visto que é possível fazer *“a relação entre os termos utilizados nas ondas sonoras e no gráfico da função seno ou cosseno, por exemplo, a relação entre as cristas, vales e a amplitude fazem com que o aluno possa correlacionar e entender que os conhecimentos matemáticos aprendidos em sala de aula podem aparecer no dia a dia com nomes diferentes, mas com o mesmo conceito e significado”*.

Muitas vezes é difícil para o professor relacionar os objetos de conhecimento matemático com o cotidiano do estudante, na concepção de P2 isso acontece com os conceitos de funções trigonométricas. Pensando nisso, considera que a atividade sobre a relação entre funções trigonométricas e onda sonora (OVA 18), *“seria ideal abordar de forma coletiva,*

onde o professor poderia ir manuseando os parâmetros e os alunos percebendo a diferença dos sons, para então depois as questões serem respondidas de forma coletiva”. Complementa sugerindo que “em situações reais na sala de aula [...] alguns objetos poderiam ser explorados pelo próprio professor com projeção dentro da sala de aula, como é o caso do objeto que emite o som das ondas, ou ainda como a relação das funções, seno, cosseno, tangente, cotangente e cossecante, pois como possuem mais elementos seria mais fácil que todos acompanhassem com a orientação guiada do professor. Já os outros objetos poderiam ser abordados com uma ida ao laboratório de informática visando também proporcionar momentos diferentes de exploração e aprendizado”.

Ainda sobre a atividade do OVA 18, P5 sugere que outras ondas possam ser exploradas ao trabalhar essa atividade. Seria possível apresentar outras ondas (mecânicas e eletromagnéticas) ou instigar os estudantes a pesquisarem sobre os temas, promovendo a observação dessas ondas e estabelecer suas relações com as funções trigonométricas. Uma sugestão feita por P3 se refere às questões apresentadas na sequência didática, pois considera que “ficaria interessante substituir em todas as demais tarefas algumas descritivas por múltipla escolha” com a finalidade de variar o formato das questões, pois considera que chama mais a atenção dos estudantes. Como a finalidade das questões propostas aos estudantes é de possibilitar que reflitam sobre os conceitos apresentados, considerou-se mais pertinente propor no material questões abertas, porém, cabem complementações por parte dos professores que julgarem pertinente fazê-lo.

Com relação à forma de usar o material em aula, P4 observou que pode ser adaptado, de acordo com cada turma: “[...] um ótimo material a ser trabalhado na sua íntegra ou adaptado de acordo com as necessidades de cada turma. Portanto, precisamos analisar a turma que iremos aplicar e verificar se essa está em condições de aprender tudo o que estava sendo proposto no material”. Esse é um importante ponto a ser considerado, visto que cada turma possui suas particularidades, fato que o professor deve levar em consideração ao planejar suas aulas. Na concepção de P4 as atividades “serão trabalhadas em vários momentos, devido à extensa relação de conteúdos matemáticos”. A organização do material para uso em aula deve ser analisada e adequada a cada realidade, especialmente pelo fato de abordar variados conceitos e, de acordo com P1, considerando a estrutura física de cada escola: “a partir da proposta, será necessário adequação à realidade de cada turma/escola, em função de limitações de equipamentos, espaço ou acesso”.

P3 pondera que o professor deve planejar a melhor forma de utilizar o material: *“considerando as potencialidades do material, é relevante que o professor busque estratégias para sua utilização. Eu, particularmente, gostei muito da contextualização feita ao final, permitindo ouvir os sons conforme manipulava-se os dados”*. Deve-se considerar que a proposta aqui apresentada para o ensino de funções trigonométricas no Ensino Médio foi pensada de modo geral, assim é fundamental que ao utilizar o material o professor considere a turma, estrutura física da escola (e outros), para melhor aproveitamento e resultado final.

Outras considerações foram observadas, na perspectiva dos professores, a partir de alguns questionamentos sobre o uso do material proposto nas aulas de Matemática. Todos os professores acreditam que os OVA apresentam elementos suficientes para proporcionar uma abordagem adequada dos tópicos propostos. Para P1 *“todos os objetos possuem [...] abordagem adequada para a faixa etária e séries propostas”*. Para P3 *“os OVA elaborados exploram vários elementos, o que acredito serem suficientes de acordo com os objetivos da pesquisa”*.

Sobre o fato de ser viável e apropriado usar o material com os estudantes em suas aulas de Matemática, os professores foram unânimes em concordar que sim. Para P1, através do material o estudante terá a oportunidade de construir o conhecimento matemático: *“considero viável a utilização do material, pois a matemática precisa ser abordada em sala de aula com estratégias que possibilite ao aluno a construção do conhecimento, comunicação de resultados entre alunos e professores e essa abordagem proposta no OVA é uma ótima oportunidade para essa construção e comunicação”*.

5.5 DIFICULDADES ENCONTRADAS, SUGESTÕES PARA MELHORAR O MATERIAL E OUTROS OBJETOS DE CONHECIMENTO QUE PODEM SER EXPLORADOS

Ao pedir que os professores apontassem as principais dificuldades ou problemas encontrados na manipulação dos objetos ou em uma eventual identificação dos seus propósitos, estes comentaram não terem encontrado dificuldades ou problemas na manipulação. As avaliações com relação ao potencial de contribuição dos OVA na compreensão dos objetos de conhecimento matemático (ou de áreas afins), foram todas positivas.

Os professores apontaram também algumas sugestões de ajustes com a finalidade de melhorar o material. Com relação ao OVA 4, P3 comenta que, *“como o OVA é pensado para os estudantes da educação básica, sugeriria criar uma nova caixinha para esconder/mostrar informações, e nela indicar quem é o cateto oposto, adjacente e a hipotenusa do triângulo maior e do menor. Ou, como são 2 triângulos, talvez possa ser descrito [...] o que (quem) é o cateto oposto, o adjacente e a hipotenusa”*. Nota-se que o professor não mencionou o ângulo, mas ao falar dos catetos, o material apresenta de maneira clara, qual o ângulo está sendo analisado.

Com relação ao objeto que aborda a medida linear da circunferência de raio r (OVA 6), P3 aponta que seria interessante propor uma contextualização. Tal sugestão vem de encontro com a menção feita por P2 sobre observar o objeto de conhecimento na prática, referindo-se a essa mesma atividade e discutido anteriormente. Para P3 *“uma possibilidade seria associar com uma roda de bicicleta/veículo, e explorar a distância percorrida após a bicicleta/veículo percorrer um número x de voltas”*, e justifica a sugestão afirmando que *“problemas contextualizados atraem mais a atenção dos estudantes”*. Além de promover maior envolvimento dos estudantes na atividade, relacionar o objeto de conhecimento com aspectos do cotidiano tornam o material potencialmente mais significativo. De acordo com Moreira (2003, p. 11), um material potencialmente significativo contribui para aprendizagem visto que para aprender, *“o aluno deve relacionar, de maneira não-arbitrária e não-literal, à sua estrutura prévia de significados aqueles que captou dos materiais potencialmente significativos do currículo”*.

Com relação ao OVA 11, P3 sugere *“explorar os valores de seno, cosseno e tangente também no 2º, 3º e 4º quadrantes, explorando o sinal e a redução ao 1º quadrante”*. Para a atividade que apresenta esse mesmo objeto, P4 sugere: *“aprofundar o estudo da tangente. O eixo tangenciando a circunferência não foi comentado. Acredito que seria uma ótima oportunidade de rever a posição dessa reta no ciclo trigonométrico”*. O OVA 18 reproduz o som da onda sonora por 10 segundos, uma sugestão, feita por P3, é de ampliar esse tempo com a finalidade de melhor *“acompanhar todo o movimento da onda”*.

A partir das sugestões feitas por esses professores, observa-se que é possível criar e explorar outras situações, além do que foi imaginado pela autora no momento do planejamento e elaboração do material. Essas sugestões podem ser aplicadas diretamente no material ou utilizadas pelos professores no planejamento de suas aulas, adaptando de acordo com cada realidade. Para Skovsmose (2015) o exercício de IP considera as possibilidades que

podem ser observadas e não a sua relevância. Assim, o processo de IP, feita por vários professores, amplia as possibilidades e contribui para deixar o material potencialmente mais significativo.

Os professores identificaram também a possibilidade de abordar outros conceitos com o material criado. Na concepção de P4, as atividades considerando o OVA 10 “*trabalharam as conversões principais e aprofundaram o plano cartesiano*”. Com relação ao OVA 14, P5 considera que explora conceitos utilizados em outra disciplina: “*sem dúvidas essa simulação propicia além do entendimento dos conceitos matemáticos aplicados aqui, pois a ondulatória em Física precisa desses conceitos*”. Sobre o OVA 18, P3 comenta que: “[...] *é interessantíssimo não só para a Matemática, mas também para a Física*”. Esses apontamentos corroboram com o objetivo dos OVA 17 e 18, que é propor uma aplicação das funções seno e cosseno, relacionando a senoide e a cossenoide com as ondas sonoras.

O material produzido nesse trabalho é uma sugestão. Assim, os professores devem adaptá-lo sempre que considerarem necessário, bem como utilizá-lo para explorar conceitos que vão além dos mencionados no material, sempre que achar conveniente. O intuito de promover a análise de professores foi de criar uma discussão em torno das possibilidades de uso do material, visando o aperfeiçoamento do mesmo, tendo como foco final, contribuir com a aprendizagem dos estudantes que em algum momento terão a oportunidade de interagir com os OVA apresentados na sequência didática.

5.6 PERCEPÇÕES GERAIS DOS PROFESSORES SOBRE O MATERIAL

Os professores tiveram a oportunidade de expressar suas percepções gerais sobre o material, ao responderem o Questionário 2. P4 comenta sobre a importância e a dificuldade de ensinar a Trigonometria, algo também perceptível pela autora, visto que este foi um dos aspectos que motivou a criação do material. Em sua intervenção, observa que “[...] *é importante, mas difícil de apresentar aos alunos devido à falta de material prático*”. O material foi pensado para usar as TD a fim de contribuir com o ensino e a aprendizagem de conceitos que não são considerados fáceis de serem ministrados por muitos professores. Nessa perspectiva, P5 considera que alguns objetos de conhecimento da Física seriam assimilados mais facilmente se objetos de conhecimento matemático forem compreendidos pelos estudantes: “[...] *olhando essa atividade percebi o quanto seria mais fácil trabalhar os*

conceitos de ondulatória em Física, caso esses conceitos sejam abordados e compreendidos na matemática”. Percebe-se que a aplicação da Matemática em outras áreas é importante para a aprendizagem, além de possibilitar desenvolver outras habilidades nos estudantes. Segundo Skovsmose (2001, p. 21), “a essência da matemática encontra-se em suas aplicações e, portanto, de um certo modo, fora da matemática”

Sobre o material, de modo geral, P3 aponta que um “[...] *aspecto relevante da atividade é que ela inicia apresentando mais especificamente conceitos da matemática, mas é finalizada com uma contextualização que permite visualizar aplicações do estudo desses conceitos. Com isso, não fica uma atividade vaga, onde simplesmente se anotam conceitos e busca-se memorizá-los*”. Promover a interação do objeto de conhecimento com a realidade não é uma tarefa fácil, e no material buscou-se essa relação.

Na concepção de P4 “*os objetos virtuais de aprendizagem apresentados nesse material, mostraram mudanças em como ensinar conteúdos de matemática utilizando tecnologia e até a forma de conduzir as aulas. As metodologias ativas são adaptações nos ambientes escolares [...]. A nova geração busca um aprender mais prazeroso e com rotinas de aprendizagem. Portanto, aplicar OVA nas sequências didáticas propostas pelos professores, proporciona um aprender completo relacionando definições (livro didático) com a prática*”. Na mesma perspectiva, P1 salienta que a “*inserção dos OVA nas aulas é fundamental, pois essa metodologia proporciona aos alunos momentos para discussões de resultados, valorizando as ideias e execução, ou seja, ótimos momentos para desenvolvimento intelectual do aluno*”. As TD, em especial os OVA, são excelentes ferramentas no ensino da Matemática, pois aproximam os estudantes do objeto de estudo e facilitam a compreensão dos objetos de conhecimento estudados. Porém, como menciona Kenski (2003), a apropriação das TD para fins pedagógicos deve ser aliada ao conhecimento das metodologias de ensino e dos processos de aprendizagem.

A partir do exercício de IP feito pelos professores foi possível aprofundar e observar o material com sete “lentes” diferentes, apesar de muitas das ponderações se combinarem. Assim, além de avaliar a viabilidade e potencialidade do material para o ensino da Trigonometria, foram levantadas novas hipóteses e possibilidades, enriquecendo o trabalho.

6 CONSIDERAÇÕES FILNAIS

Nesse trabalho, buscou-se evidenciar as potencialidade e possibilidades do material proposto para a abordagem dos conceitos relacionados ao estudo de Trigonometria no Ensino Médio, considerando a relevância do uso das TD, em especial de OVA elaborados no GeoGebra, para o processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, buscou-se explorar, por meio do exercício de IP, a percepção da autora e de sete professores de Matemática que interagiram com o material produzido.

Considerando as percepções dos sujeitos participantes da pesquisa, bem como dos autores referenciados, quanto ao uso das TD, evidenciou-se sua importância e relevância para o processo de ensino e aprendizagem. Observou-se que as TD são ferramentas facilitadoras nesse processo, visto que podem proporcionar aos professores praticidade e precisão ao explorarem objetos de conhecimento, aos estudantes, experiências de manuseio e interação com os objetos de estudo abordados, enriquecendo o processo de aprendizagem.

A partir do material proposto é possível explorar conceitos que envolvem a Trigonometria no Ensino Médio: a semelhança de triângulos, a razão de semelhança e razões entre pares de segmentos proporcionais de triângulos semelhantes; caracterização dos valores do seno, cosseno e tangente de ângulos agudos no triângulo retângulo; medida do ângulo central e a definição da unidade de medida radiano (*rad*); a medida linear de um arco e sua relação com a medida do raio da circunferência e o ângulo central; ciclo trigonométrico e suas principais características, permitindo explorar nele as relações do seno, cosseno e tangente de qualquer ângulo; as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente; e para finalizar, relações entre as funções trigonométricas e ondas as sonoras.

Observou-se que os OVA elaborados no GeoGebra são ferramentas que, na percepção dos sujeitos participantes da IP, podem potencializar o processo de ensino e a aprendizagem, visto que permitem a obtenção de uma precisão não atingida manualmente, além de possibilitar movimentos nas construções. Segundo as percepções coletadas durante a pesquisa, possibilita que estudantes interajam com os objetos de estudo de modo a comparar padrões e assimilar mais facilmente os conceitos envolvidos, além de proporcionar o desenvolvimento de outras habilidades, como proatividade, criatividade e raciocínio lógico, por exemplo.

A aplicação dos objetos de conhecimento matemático em outra área do conhecimento, abordada em dois OVA, foi considerada relevante, visto que possibilita proporcionar ao estudante a interação do objeto de estudo apresentado com algo real podendo assim despertar maior interesse e maior envolvimento, aspectos importantes para a aprendizagem. Propor nas aulas de Matemática que o objeto de conhecimento estudado possa ser observado em situações reais e explorar essas situações com os estudantes enriquece o processo de ensino e aprendizagem.

Os OVA são acompanhados de conceitos e questões, de forma a contemplar o propósito de auxiliar na compreensão dos objetos do conhecimento apresentados. O material foi elaborado na forma de sequência didática, relacionando, sempre que possível, os conceitos já explorados. Assim, observou-se a possibilidade de proporcionar ao estudante uma melhor compreensão e exploração do material. Desse modo, entende-se que a interação com o material possibilitará ao estudante construir relações necessárias para compreender e assimilar os conceitos apresentados. Considera-se que o material pode ser utilizado de diferentes formas no processo de ensino e aprendizagem, como por exemplo, pelo professor como ferramenta de ensino, ou pelo estudante como ferramenta de estudo, de forma mais autônoma, a fim de reforçar conceitos estudados em sala.

Deve-se considerar que durante o processo de exploração do material, é importante que o professor seja ativo, oferecendo o suporte necessário ao estudante, sanando eventuais dúvidas que possam surgir. É pertinente ressaltar que o material proposto nesse trabalho é uma ferramenta auxiliar para o ensino dos objetos de conhecimento apresentados, podendo ser necessário fazer uso de outras atividades e procedimentos metodológicos durante o processo. Ao utilizar o material, recomenda-se considerar a realidade de cada escola ou turma e, sempre que necessário, fazer adaptações.

A partir da análise da percepção dos professores foi possível observar que o material é potencialmente viável para o ensino dos conceitos abordados, visto que possibilita a interação dos estudantes com os OVA. Além de apresentar os conceitos abordados nas construções, contém questões que promovem a reflexões sobre os objetos de conhecimento tratados. De acordo com as percepções coletadas na análise dos dados, é um material de fácil acesso, que aborda os objetos de conhecimento necessários para aprendizagem de maneira dinâmica, oportunizando a assimilação através dos conceitos, objetos e questões apresentados e potencialmente permite que o estudante que venha a interagir com o material, seja protagonista no processo de aprendizagem.

Ao longo da pesquisa, o material foi sendo reformulado à medida em que foram realizados os processos de IP, pela autora e professores de Matemática. Conforme Lima (2022), esse processo possibilita, através de uma postura crítica, questionar uma situação, reconhecer o que pode ser diferente e pensar em estratégias para mudá-la. Dessa forma, o material inicialmente elaborado pela autora, sofreu transformações via IP, seguindo o processo proposto por Lima (2021) e apresentado na Figura 1. Assim, a versão inicial do material criado pode ser chamada de situação corrente (SC_1) e foi transformado, via IP (IP_1), pois ao realizar o exercício de IP_1 , a autora imaginou alternativas para essa SC_1 , chegando assim a uma situação imaginada (SI_1). A partir da SI_1 o material foi adaptado, obtendo-se então a situação arranjada (SA_1), que apresenta um novo material. Esse novo material é uma alternativa para a SC_1 , mas com modificações, assim tem-se uma nova SC, que não é mais a SC_1 , pois foi modificada e, de acordo com Lima (2021), pode ser chamada de SC_2 . Com a análise das percepções dos professores, houve um novo processo via IP (IP_2), que proporcionou pensar em alternativas para a SC_2 , e assim obter a SI_2 . Ao levantar hipóteses, os professores corroboraram e oportunizaram uma nova SA, a SA_2 , que representa a SC_2 , mas com alterações, criando então uma nova SC, a SC_3 . Vale ressaltar que esse processo é contínuo, e não acaba com esta pesquisa, visto que ao utilizar o material, cada professor poderá realizar o seu exercício de IP, considerando seus objetivos, bem como a realidade da sua escola e turma.

A IP, com as percepções da autora e dos sete professores que participaram da pesquisa, oportunizou aperfeiçoar o material, considerando alternativas variadas por meio de opiniões distintas. Assim, os exercícios de IP possibilitaram pensar em diferentes maneiras possíveis de explorar e organizar o material através, segundo Lima (2021), das reflexões feitas na SI, ao pensar-se em como poderia ser feito, como poderia ser organizado, entre outros.

Assim, observa-se que a pesquisa de possibilidades enriqueceu o trabalho, contribuindo para uma melhora significativa do material, visto que, de acordo com Skovsmose (2015), a pesquisa de possibilidades proporciona uma reflexão a cerca do que não é, mas que pode ser construído. Considera-se também que os dois exercícios de imaginação apresentados poderão contribuir com a utilização do material para o ensino de Trigonometria, visto que apresentam possibilidades e potencialidades, além de inspirarem novas percepções.

Espera-se que o material desenvolvido seja utilizado por professores em suas aulas e contribua com o processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio. Futuramente pretende-se buscar aprofundamento do conhecimento com relação a relevância

das TD, bem como dos OVA elaborados com o GeoGebra para o ensino da Matemática, em especial, analisar a viabilidade do uso do material proposto na prática, com estudantes do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- AUDINO, Daniel Fagundes; NASCIMENTO, Rosemy da Silva. Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos uma nova proposição aplicada à educação. **Revista Contemporânea de Educação**, [s.l.], v.10, n. 5, p. 128-148, 2010. Disponível em: <<https://revistas.ufrj.br/index.php/rce/article/view/1620/>>. Acesso em: 15 abr. 2022.
- BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e tecnologia**. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 2.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BELTRÃO, Maria Eli Puga. **Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações: teoria e prática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <<https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11394>>. Acesso em: 15 ago. 2023.
- BELTRÃO, Maria Eli Puga; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Modelagem matemática e aplicações: uma abordagem para o ensino de funções. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 17-42, 2010. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/2171>>. Acesso em: 15 ago. 2022.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In*: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2004. p. 99-111.
- BINOTTO, Rosane Rossato; PETRY, Vitor José; GAIO, Sandy Maria. Estudo de Possibilidades do Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Cônicas por meio de um Exercício de Imaginação Pedagógica. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 108–129, 2022. DOI: <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2022v9i257628>.
- BONA, Berenice de Oliveira. Análise de softwares educativos para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Experiências em ensino de ciências**, [s.l.], v. 4, n. 1, p. 35-55, 2009. Disponível em: <<https://fisica.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/article/view/300>>. Acesso em: 20 jun. 2023.
- BORBA, Marcelo Carvalho. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. *In*: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004. Caxambu. **Anais [...]**. Caxambu: ANPED, 2004. Disponível em: <http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2022.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; SCHEFFER, Nilce Fátima. Contribuições de Objetos Virtuais para a aprendizagem de conceitos de Geometria. *In*: SCHEFFER, Nilce Fátima; COMACHIO, Eliziane; CENCI, Danuza. (Org.). **Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018. p. 63-77.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/UNDIME, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Orientações didáticas. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DIKOVIC, Ljubica. Implementing dynamic mathematics resources with GeoGebra at the college level. **International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)**, [s.l.], v. 4, n. 3, p. 51-54, 2009. Disponível em: <<https://www.learntechlib.org/p/45282/>>. Acesso em: 20 jul. 2023.

FERNANDES, Dárida; FERREIRA, Juliana Vaz Almeida Gomes. As Potencialidades do GeoGebra no 1º Ciclo do Ensino Básico. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [s.l.], v. 9, n. 2, p. 52-77, 2020. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i2p052-077>.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

GUARDA, Solange Maria; PETRY, Vitor José. Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem Visando a Compreensão e a Representação de Elementos da Geometria Analítica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, local, v. 33, n. 1, p. 707-717, 2020. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/22452/1/Guarda2020Uso.pdf>>. Acesso em: 15 mai. 2022.

KENSKI, Vania Moreira. Aprendizagem Mediada pela Tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, [s.l.], v. 4, n. 10, p. 47-56, 2003. Disponível em: <<https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/6419>>. Acesso em: 12 abr. 2022.

KLEEMANN, Robson. **Desenvolvimento de propostas metodológicas para o trabalho interdisciplinar nas disciplinas de matemática e física**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Fronteira Sul – PROFMAT – Mestrado profissional em Matemática – Chapecó, SC, 2018. Disponível em: <<https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/2182>>. Acesso em: 4 mai. 2022.

KLEEMANN, Robson; PETRY, Vitor José. Desenvolvimento de um Exercício de Imaginação pedagógica a partir de uma Proposta Metodológica Interdisciplinar. **Investigações em Ensino de Ciências**, [s.l.], v. 25, n. 3, p. 232-251, 2020. DOI: <https://doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2020v25n3p232>.

LIMA, Priscila Coelho. **Imaginação pedagógica e educação inclusiva**: possibilidades para a formação de professores de matemática. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2022. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/234464>>. Acesso em: 18 mai. 2022.

LIMA, Priscila Coelho. Imaginação pedagógica, Educação Matemática e Inclusão: em busca de possibilidades para aulas de Matemática. **Intermaths**, [s.l.], v. 2, n. 1, p. 121-137, 2021. DOI: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i1.8595>.

MILANI, Raquel. “Sim, Eu Ouvi o que Eles Disseram”: o Diálogo como Movimento de Ir até Onde o Outro Está. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 35-52, 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/C4wJkKzphWyT4w85PZTHvRy/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 20 mai. 2022.

MOREIRA, Marco Antonio. Linguagem e aprendizagem significativa. In: II Encontro Internacional: Linguagem, Cultura e Cognição. Mesa redonda Linguagem e Cognição na Sala de Aula de Ciências. Belo Horizonte, MG, 2003. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/folder/view.php?id=2552629>. Acesso em: 16 ago. 2023.

OLIVEIRA, Cláudio de; MOURA, Samuel Pedrodo.; SOUSA, Edinaldo Ribeiro de. TIC’S na educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. **Pedagogia em Ação**, [s.l.], v. 7, n. 1, p. 75-94, 2015. Disponível em: <https://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/view/11019>. Acesso em: 20 mai. 2022.

OLIVEIRA, Iara Leticia Leite de; GUIMARÃES, Simone Uchôas; ANDRADE, José Antônio Araújo. As potencialidades do GeoGebra em processos de investigação matemática: uma análise do desenvolvimento de objetos de aprendizagem da EaD no ensino presencial. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [s.l.], v. 1, n. 1, p. CCLXV-CCLXXIX, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/9598>. Acesso em: 20 mai. 2022.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995. v.1.

PETLA, Revelino José. **GeoGebra: Possibilidades para o Ensino da Matemática**. Unidade Didática (Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE) – Secretaria Estadual de Educação – Universidade Federal do Paraná, Departamento de Matemática, do Setor de Ciências Exatas. União da Vitória, PR, p. 1-44, 2008. Disponível em: <https://goo.gl/pF7EM3>. Acesso em: 14 de mai. 2022.

QUEIROZ, Maria Rachel Pinheiro Pessoa Pinto de. Caracterizando e Analisando Insubordinações Criativas e Reativas em Designs Educacionais e Ambientes de Aprendizagem. **RIPEM**, [s.l.], v. 9, n. 3, p. 68-83, 1 set, 2019. DOI: <https://doi.org/10.37001/ripem.v9i3.2182>.

RAPOSO, Rui Pedro. Novas ferramentas, dentro e fora da sala de aula: Uma exploração com o GeoGebra. **Educação e Matemática**, [s.l.], n. 113, p. 37-42, 2011. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1943>. Acesso: 12 mai. 2022.

SANTIAGO, Eilson. **O Ensino da Trigonometria usando o Software GeoGebra como Ferramenta de Ensino Aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática, Vitória da Conquista, BA, 2015. Disponível em: <http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp->

content/uploads/2018/11/Dissertacao_EILSON_SANTIAGO.pdf>. Acesso em 8 mai. 2022.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. São Paulo: Papyrus, 2001.

SKOVSMOSE, Ole. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D'AMBROSIO, Beatriz Silva, Lopes, Celi Espasandin. (Orgs.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado das Letras, 2015, p. 63-90.

SPINELLI, Walter. Os objetos virtuais de aprendizagem: ação, criação e conhecimento. **Aprendizagem Matemática em Contextos Significativos: Objetos Virtuais de aprendizagem e Percursos Temáticos**. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, n. d. Disponível em:
<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6749/mod_resource/content/2/Objetos_de_aprendizagem.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2022.

VICENTE, José Manuel; PAULINO, Raquel. O PTE, As Tic, A Matemática e o GeoGebra. **AdolesCiência: Revista Júnior de Investigação**, [s.l.], v. 2, n. 1, p. 45-38, dez. 2013. Disponível em: <<https://bibliotecadigital.ipb.pt/handle/10198/12974>>. Acesso em: 12 mai. 2022.