UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

ANDRESSA BOSA

FORMAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL DO ALGORITMO DA DIVISÃO:
ANÁLISE DE APRENDIZAGEM

CHAPECÓ
2024

ANDRESSA BOSA

FORMAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL DO ALGORITMO DA DIVISÃO:
ANÁLISE DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges.

CHAPECÓ
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, km 02
CEP: 89801-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Bosa, Andressa
FORMAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL DO ALGORITMO DA DIVISÃO: ANÁLISE DE APRENDIZAGEM / Andressa Bosa. -- 2024.
86 f.:il.

Orientador: Doutor Pedro Augusto Pereira Borges

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó,SC, 2024.

1. Matemática. 2. Aprendizagem. 3. Divisão. 4. Ensino Fundamental. I. Borges, Pedro Augusto Pereira, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ANDRESSA BOSA

FORMAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL DO ALGORITMO DA DIVISÃO:
ANÁLISE DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

Aprovado em: _____/_____/_______

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges - UFFS

____
Prof. Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira - UPF

____
Profa. Dra. Rosane Rossatto Binotto – UFFS

Chapecó/SC, março de 2024

Dedico esta dissertação aos grandes
pensadores e pesquisadores, cujo trabalho inspirou e influenciou minha abordagem e
perspectiva neste estudo.

AGRADECIMENTOS

À CAPES pela oportunidade de estudo pelo PROFMAT.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

À UFFS e seus estimados professores, pelo ensino excepcional em Matemática.

Ao Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges, por compartilhar seu conhecimento e auxiliar na construção deste trabalho.

À família que sempre me apoiou em meus estudos, expresso minha gratidão.

A matemática é a arte de dar ordem e significado ao caos.

Alfred North Whitehead

RESUMO

A motivação do trabalho surgiu devido a dificuldades enfrentadas pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental ao realizar operações de divisão, uma preocupação constante no contexto pedagógico. O embasamento teórico deste estudo incorpora trabalhos relevantes de diversos autores, selecionados por sua pertinência temática, sendo que as ideias desses estudos foram agrupadas e relacionadas com a pesquisa em questão. A pesquisa está fundamentada na abordagem de Gérard Vergnaud e sua Teoria dos Campos Conceituais, que investiga o tema da divisão e explora as duas concepções propostas por Vergnaud: divisão por partição e divisão por quotas. Essas concepções são integradas para formar uma compreensão mais ampla e atribuir significado à operação de divisão. O tema central concentra-se na investigação da aquisição de conceitos e habilidades durante o processo de aprendizagem da divisão, conduzido por meio de oficinas semanais em duas escolas de ensino fundamental, sendo dois grupos de quatro alunos. Embasado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, o estudo busca compreender a formação do campo conceitual do algoritmo da divisão com o uso de materiais concretos e pedagógicos, onde é observada a interação entre os estudantes e o raciocínio perante questionamentos, explorando diferentes estratégias de resolução e promovendo a colaboração entre colegas e professores. A análise detalhada do processo de formação conceitual envolve desde a compreensão inicial do conceito de divisão até a aplicação prática em problemas matemáticos, passando pela construção de estratégias de divisão e pela interpretação dos resultados. Por fim, o estudo realiza a análise dos resultados obtidos, alinhada aos princípios de análise de Bardin (2002).

Palavras-chave: Matemática. Aprendizagem. Divisão. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The motivation for this work arose from the difficulties faced by students in the final years of Elementary School when performing division operations, a constant concern in the pedagogical context. The theoretical framework of this study incorporates relevant works from various authors, selected for their thematic relevance, with the ideas from these studies being grouped and related to the research at hand. The research is grounded in Gérard Vergnaud's Approach and his Theory of Conceptual Fields, which investigates the theme of division and explores the two conceptions proposed by Vergnaud: division by partition and division by quotients. These conceptions are integrated to form a broader understanding and to attribute meaning to the division operation. The central theme focuses on the investigation of the acquisition of concepts and skills during the division learning process, conducted through weekly workshops in two elementary schools, with two groups of four students each. Based on Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields, the study seeks to understand the formation of the conceptual field of the division algorithm using concrete and pedagogical materials, observing the interaction between students and reasoning in response to questions, exploring different resolution strategies, and promoting collaboration among peers and teachers. The detailed analysis of the conceptual formation process involves understanding the initial concept of division, practical application in mathematical problems, the construction of division strategies, and the interpretation of results. Finally, the study analyzes the obtained results, aligned with the principles of Bardin's analysis (2002).

Keywords: Mathematics. Learning. Division. Elementary School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

TCC – Teoria dos Campos Conceituais**.**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na prática pedagógica da Escola Básica, as dificuldades enfrentadas pelos alunos do 5º ao 9º ano ao realizar divisões são uma preocupação constante entre os docentes de Matemática, que se estende para outras disciplinas, como Física e Química, comprometendo a capacidade de resolução de problemas. A motivação desta pesquisa surge naturalmente da prática escolar: por que os alunos enfrentam dificuldades ao realizar o algoritmo de divisão? Será que isso se deve à falta de motivação para aprender ou à complexidade intrínseca do próprio algoritmo? O tema central desta investigação gira em torno da aprendizagem da divisão, um processo fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos.

Assim, no intuito de compreender as referidas dificuldades, o problema proposto nesta pesquisa é: como ocorre a aquisição dos conceitos e habilidades no processo de aprendizagem da divisão? Para abordar essa questão, a pesquisa foi conduzida em duas escolas de Ensino Fundamental, onde foram realizadas oficinas semanais mediadas pela pesquisadora. Para isso, foram selecionados dois grupos de quatro alunos, em duas escolas públicas diferentes. As oficinas ocorreram no turno inverso, sendo no total oito encontros de duas horas. Nas oficinas foram utilizados materiais concretos (bolinhas e cestos), didáticos (escala Cuisenaire) e outros (dinheirinho falso) e os alunos foram organizados em duplas, possibilitando a interação entre eles e troca de informações. Durante as oficinas, a atividade era proposta, os alunos as realizavam de acordo com incitações ou questionamentos. Em casos onde surgiram dúvidas, estas foram exploradas com mais questionamentos e enfim sanadas. Os questionamentos, dúvidas e interações foram anotados num diário de bordo, que era redigido durante as aplicações das oficinas. Em seguida, foi realizada uma análise detalhada dos resultados apresentados pelos estudantes e de seu desempenho qualitativo durante a aplicação da operação, seguindo os princípios de análise de Bardin (2002). Essas ações estão descritas no capítulo de Metodologia da pesquisa.

O embasamento teórico deste estudo abrange trabalhos relevantes de Bessa e Costa (2019), Melo e Oliveira (2023), Nunes e Bryant (1997), Ribeiro *et al.* (2018), bem como diversos outros autores, cujos artigos foram selecionados por possuir temática semelhante ao apresentado nesta pesquisa. Houve seleção e agrupamento de ideias consoantes à pesquisa. Há descrição desses estudos no capítulo referente à Revisão Bibliográfica. A base do capítulo da Fundamentação Teórica é alicerçada em Gérard Vergnaud e fundamenta-se na Teoria dos Campos Conceituais, que abrange o tema divisão, explorando as duas concepções de divisão propostas por Vergnaud: divisão por partição e divisão por quotas. Unindo as duas ideias na formação da conceituação e atribuição de sentido à operação.

A formação do campo conceitual do algoritmo da divisão envolve uma progressão de compreensão e habilidades que os alunos desenvolvem ao longo do tempo. Inicialmente, o aluno é apresentado aos conceitos básicos da divisão, como a ideia de compartilhar quantidades igualmente entre grupos. Conforme avança, ele começa a compreender os princípios do algoritmo da divisão, que incluem dividir um número em partes iguais e registrar os passos do processo de divisão através do algoritmo. Ao longo desse processo de formação do campo conceitual, o aluno também explora diferentes estratégias de resolução de problemas relacionados à divisão e desenvolve sua capacidade de aplicar o algoritmo em diversas situações. Ele aprende a identificar padrões e relações entre os números envolvidos divisãona divisão, bem como a interpretar corretamente os resultados.

Analisar a formação do campo conceitual do algoritmo da divisão por meio de uma abordagem prática envolve observar a interação dos estudantes através de exercícios que exigem a aplicação dessa operação matemática. Durante essas atividades, o aluno enfrenta desafios que o levam a explorar diferentes estratégias de resolução e a aprofundar sua compreensão do conceito de divisão. Lorenzato (2009, p. 25) destaca que

> para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoestima, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar.

Ao observar os estudantes em ação, é possível identificar como ele aborda os problemas de divisão, quais estratégias utiliza e como desenvolve sua capacidade de aplicar o algoritmo da divisão de forma eficaz. Além disso, é importante observar como o aluno interage com seus colegas e com o professor durante essas atividades, pois a colaboração e a discussão podem desempenhar um papel significativo no processo de aprendizagem. O compartilhamento de ideias e a troca de experiências entre os alunos podem enriquecer o entendimento do conceito de divisão e promover um ambiente de aprendizagem mais colaborativo e participativo.

A formação do campo conceitual do algoritmo da divisão envolve uma análise detalhada das etapas pelas quais o estudante passa ao aprender e dominar esse processo matemático complexo. Inicialmente, é essencial observar como o aluno desenvolve uma compreensão do conceito de divisão, desde a identificação das posições até a aplicação prática em problemas matemáticos. Em seguida, é importante analisar como o estudante progride na construção de estratégias de divisão, passando da utilização de materiais concretos e representações visuais para o uso do algoritmo formal. Durante esse processo, é fundamental observar como o aluno enfrenta desafios específicos, como divisões com e sem resto, divisões com números decimais e a compreensão dos diferentes papéis dos termos envolvidos no algoritmo (dividendo, divisor, quociente e resto). Além disso, é crucial investigar como o estudante internaliza e generaliza esses conceitos, aplicando-os de forma flexível em uma variedade de contextos matemáticos. Ao analisar a formação do campo conceitual do algoritmo da divisão, é possível identificar padrões de aprendizagem, obstáculos comuns e estratégias de ensino que podem auxiliar práticas pedagógicas.

Assim, este estudo investiga o nível de compreensão da operação aritmética de divisão, explorando as ideias de partição e quotas propostas por Vergnaud. Para isso, conduz uma intervenção pedagógica por meio de oficinas específicas, voltadas para o desenvolvimento da operação de divisão por partição ou por quotas, abrangendo a conceitualização do algoritmo, o uso de dispositivos práticos e diversos casos de divisões.

A análise foi embasada em Bardin (2002), onde houve a criação de um quadro de categorias referente a apropriação de significado, sentido e fluência nos cálculos. Com isso, durante a aplicação das oficinas, foram selecionadas questões com resultados interessantes ou que durante a aplicação geraram questionamentos ou discussões, analisando conforme o quadro, o engajamento do estudante com a operação divisão, se houve atribuição de sentido, se soube calcular corretamente, se possui domínio para cada etapa de divisões. Já nas considerações finais verificou-se se as oficinas transcorreram conforme o previsto, bem como uma generalização de fatos coletados.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Promover, através de uma oficina sobre divisão, embasada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, condições para a aprendizagem desta operação matemática, com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

1.1.2 Objetivos específicos

i) Verificar o conhecimento prévio através de sondagem.
ii) Possibilitar a troca de ideias e estimular o raciocínio.
iii) Explorar a operação divisão utilizando diferentes representações.
iv) Analisar discussões e resultados.

1.2 JUSTIFICATIVA

A investigação da formação do campo conceitual da divisão se justifica pela constatação da prática escolar e da literatura, presente nas pesquisas de Bessa e Costa (2019) e Silva *et al.* (2015), das dificuldades enfrentadas pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, ao realizar divisões. Além disso, a fluência na execução das operações aritméticas, é de fundamental importância para garantir uma base sólida em matemática durante os anos fundamentais da educação. A divisão é uma operação crucial que abre caminho para a compreensão de conceitos mais avançados, não apenas na matemática, mas também em outras disciplinas. Ao identificar e abordar as dificuldades específicas encontradas pelos alunos nessa área, os educadores podem intervir de maneira mais eficaz, fornecendo apoio personalizado e estratégias de ensino adaptadas. Isso não apenas fortalece as habilidades matemáticas dos alunos, mas também promove confiança e motivação para enfrentar desafios acadêmicos mais complexos no futuro. Assim, compreender as dificuldades na realização de divisões entre dois números é fundamental para garantir uma educação de qualidade e o sucesso acadêmico dos alunos. A motivação da pesquisa decorre do fato de que atualmente os estudantes demonstram descontentamento ao se deparar com cálculos que envolvem a operação divisão, bem como possuem dificuldade na resolução e compreensão da mesma.

2 PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA OPERAÇÃO DIVISÃO

Desde os anos iniciais, ensina-se o conceito de número através da organização ordinal e cardinal. Ao longo da alfabetização, esses conceitos passam a se tornar conteúdos complexos e estruturados, dando uma forma à aprendizagem sequencial, ou seja, com o passar dos anos da Educação Básica, o estudante aprimora e amplifica seu aprendizado matemático, complementando o que foi aprendido no ano anterior em questão de complexidade. Porém, apesar do sistema de ensino ser organizado dessa forma, “os professores frequentemente tentam ensinar às crianças conceitos matemáticos para os quais elas estão totalmente despreparadas” (NUNES; BRYANT, 1997, p. 17-18). Nunes e Bryant (1997) defendem que para ensinar matemática às crianças precisa-se saber, para além da matemática, como é que essas crianças aprendem os conceitos matemáticos e de que forma o aprender matemática pode contribuir para a formação do pensamento crítico delas.

O conceito de divisão, principalmente, nem sempre é compreendido pelos estudantes, mesmo que estes saibam efetuar o cálculo através do algoritmo decorado. Percebe-se a falta da estrutura conceitual acerca desse algoritmo. De acordo com Bessa e Costa (2019), essa lacuna se deve ao fato de que os professores têm dificuldades para entender de que maneira as crianças pensam e conceituam um cálculo de divisão. É notável, quando os estudantes passam para os anos finais do Ensino Fundamental, a insegurança e o temor pela operação divisão. Percebe-se que o algoritmo foi introduzido precocemente, sem que houvesse um preparo do pensamento da criança acerca dos conceitos envolvidos na operação. Ribeiro *et al.* (2018) afirmam que para além do conhecimento pedagógico e do saber ensinar, é necessário que o professor domine a estrutura conceitual da divisão permitindo a atribuição de significado e sentido ao que está ensinando, e com isso, deixando explícita a relevância dos temas matemáticos, sua conceituação e procedimentos viabilizando, então, a abstração, pois “ao ter em atenção as especificidades do conhecimento do professor, deverá permitir que este (professor em serviço ou futuro professor) passe a entender, a atribuir sentido e significado ao que faz e a explicitar por que o faz” (RIBEIRO *et al.*, 2018, p. 153).

Conforme Cunha *et al.* (2022), as metodologias ativas consistem em um conjunto de estratégias pedagógicas que visam incentivar os estudantes a aprenderem de forma autônoma e participativa, proporcionando uma educação crítica, onde o estudante está no centro do processo de aprendizagem, tornando-os protagonistas no processo de construção do próprio conhecimento.

Bessa e Costa (2019) afirmam que o uso de metodologias ativas permite maior participação dos educandos, bem como é uma forma de mediar a abordagem do conteúdo à abstração, permitindo esforços espontâneos dos estudantes na construção de um conceito, unindo o ensino com a pesquisa, já que há troca de informações entre professor e aluno para solucionar problemas. Em contraste com o modelo tradicional de ensino, onde o professor desempenha um papel central na transmissão do conhecimento, as metodologias ativas incentivam a participação ativa dos estudantes, envolvendo-os em atividades que promovem a reflexão, o debate e a resolução de problemas. Essas metodologias são baseadas na ideia de que os estudantes aprendem melhor quando estão engajados em um processo ativo, no qual têm a oportunidade de construir o conhecimento de forma significativa.

Isso cria um ambiente de aprendizagem colaborativo e significativo, que promove o desenvolvimento integral dos alunos. Essas abordagens podem assumir diversas formas, como aprendizagem baseada em projetos, aprendizagem cooperativa, sala de aula invertida, estudos de caso, debates, simulações, entre outras. O objetivo central é engajar os alunos em atividades práticas e reflexivas que estimulem o raciocínio crítico, a resolução de problemas e a aplicação dos conceitos em situações reais. As metodologias ativas têm sido cada vez mais valorizadas no cenário educacional, pois permitem que os alunos se tornem aprendizes ativos, autônomos e críticos, preparando-os para enfrentar os desafios do mundo atual e futuro.

Ribeiro *et al*. (2018) afirma que o saber da sala de aula deve ir além do saber somente fazer e obter um resultado correto, é necessário que o professor exceda as expectativas, não apenas passando conteúdo da maneira como foi ensinado, mas sim, abordando o proposto, consolidando a compreensão e contribuindo para o desenvolvimento dos educandos, que enfim compreendam e internalizem não só como calcular e saber fazer, mas sim o motivo e os caminhos que os levaram a tal solução.

A aprendizagem da operação divisão é focada no ensino do algoritmo e não no desenvolvimento conceitual em si. Kamii (2010) afirma que, quando inseridos precocemente e sem contexto, os algoritmos acabam se tornando incoerentes e danosos, fazendo com que o estudante perca sua linha de raciocínio e não desenvolva noções entre grandezas e ordem, acarretando em uma visão fragmentada de número. Silva *et al.* (2015) trazem que, apesar de garantir agilidade nos cálculos e obter o resultado correto, o uso precoce dos algoritmos interfere na construção e evolução da abstração sobre o significado da operação. Dessa forma, não está baseado nas estruturas mentais interpretativas dos educandos, mas na memorização de regras e processos mecânicos.

Cabe ao educador instigar os estudantes a observar seu raciocínio através das relações estabelecidas durante a construção do pensamento, havendo três maneiras de estabelecer associações, conforme Fernandes e Leite (2015): interligando diferentes tipos de conhecimento, científicos ou não, e suas diversas representações, incitando o pensamento e dedução da explicação, promovendo a compreensão significativa e profunda de conceitos; favorecendo a persistência no estudo de matemática, como um processo contínuo, sempre relacionando o que já foi aprendido com o que se está aprendendo; e, por último, valorizando as ideias e pensamentos dos educandos (conhecimentos prévios), corrigindo o que não é coerente e aperfeiçoando as argumentações com o emprego da linguagem matemática.

Bessa e Costa (2019) afirmam que compete à escola incentivar a pesquisa e ensinar proporcionando a experimentação e a descoberta. Para promover a síntese do conhecimento prévio do estudante e conectá-lo ao conhecimento científico, é fundamental que o professor seja capaz de refletir sobre o que o aluno já sabe e como ele chegou a essas conclusões. Essa reflexão deve ser acompanhada por uma prática mediadora em sala de aula, na qual o professor atue como facilitador do processo de aprendizagem, buscando alcançar os objetivos propostos. O professor desempenha um papel ativo na mediação, oferecendo orientação, questionamentos, exemplos e atividades que estimulem a reflexão e a conexão entre os conhecimentos do aluno e o conhecimento científico. Essa abordagem de ensino baseada na repetição de informações é substituída por uma prática educativa que promove a construção ativa do conhecimento, permitindo que os alunos explorem, questionem e vivenciem os conceitos de forma significativa.

Nesse âmbito, concordando com Ribeiro *et al.* (2018), é necessário o aprimoramento da formação de professores e pesquisas com enfoque na ascensão de um conhecimento especializado aos educadores, potencializando o sentido de número e operação numérica, à formulação e resolução de problemas. Também é necessário, em nível de graduação, conhecer os conceitos além do nível da Educação Básica, para que o professor possa planejar suas aulas tendo como referência a estrutura, a linguagem e os métodos da matemática. Ou seja, a formação inicial do professor, mesmo que limitada, não seja limitante, mas sim, viabilize a ampliação dos conhecimentos profissionais, sejam eles matemáticos ou pedagógicos.

De acordo com Zatti, Agraniohih e Enricone (2010), a maior parte dos erros na operação divisão se dá em torno da má compreensão do algoritmo, que é inserido precocemente e apenas trabalhado de forma mecânica, através do algoritmo, sem uma compreensão precisa de seus fundamentos. Melo e Oliveira (2023) trazem que é comum associar o algoritmo da divisão ao dispositivo prático utilizado para calcular diretamente o resultado, sendo que por anos professores e estudantes estavam convencidos de que o dispositivo era o próprio algoritmo da divisão. Essa divergência surge porque, ainda no Ensino Fundamental, os alunos não internalizam completamente a ideia de divisão, sendo crucial que o professor compreenda que esse algoritmo confere significado ao processo regular de divisão, sem necessariamente se associar ao dispositivo mencionado anteriormente. Isso evita que o aluno confunda a operação de divisão com um mecanismo desenvolvido para executá-la. Ribeiro *et al.* (2018) afirmam que o problema mais comum constatado na aprendizagem dos alunos e no conhecimento do professor, no contexto das operações, é a falta de significado atribuído ao que se está fazendo. Em suma, a má compreensão do algoritmo de divisão e a falta de significado atribuído a essa operação podem levar a erros frequentes na aprendizagem dos alunos.

Fernandes e Leite (2015) concordam com Schulman (1986) que é possível identificar três categorias de conhecimento: o conhecimento do conteúdo, referente ao saber científico a ser explorado, incluindo o conhecimento comum do conteúdo, a habilidade do professor na formulação e desenvolvimento de sequências de ensino; o conhecimento pedagógico do conteúdo, referente a como o professor irá administrar o saber científico em sala de aula; e o conhecimento do currículo, referente aos materiais de ensino, datas e eventos escolares. Consoante a Ribeiro *et al.* (2018), cabe ao professor conhecer recursos de ensino, bem como suas potencialidades de modo a explorar os conceitos e conectá-los a assuntos distintos. Porém, Ribeiro e Carrillo (2011) ressaltam que somente o recurso, em si, não é suficiente, se não houver a mediação do professor, fazendo com que a atividade, por mais simples que pareça, seja atrativa e didaticamente favorável.

No contexto de estruturas multiplicativas, Vergnaud (1986) sistematiza dois tipos de divisão: a divisão por partição e a divisão por quotas. Outros autores concordam com Vergnaud nessa separação em dois tipos de divisão. Conforme Silva *et al.* (2015), Bessa e Costa (2019) e Bianchini (2018), na divisão por partição, tal quantidade é repartida um a um, dividindo o elemento termo a termo individualmente, trazendo a ideia de divisão equitativa. Já na divisão por quotas, leva-se em consideração o tamanho da quota e quantas quotas menores equivalem àquela, ou seja, quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Essa concepção contrapõe-se à inserção da divisão como um mero dispositivo prático, e, aos poucos, com pensamento e questionamento, o estudante estrutura a divisão “como um conjunto de técnicas” (Bessa; Costa, 2019, p. 156), atribuindo sentido aos procedimentos que ocorrem durante a operação. À medida que os alunos progridem na sua compreensão, é importante encorajá-los a explicar e articular o processo de divisão em suas próprias palavras. Isso ajuda a solidificar seu entendimento e a desenvolver habilidades de comunicação matemática. Ao entender como o aluno chegou a uma determinada conclusão ou conceito, o professor pode identificar possíveis lacunas ou concepções equivocadas e abordá-las de forma adequada. Isso envolve questionar, promover o diálogo, oferecer exemplos e desafiar as ideias dos alunos, incentivando-os a refletir e a reconstruir seu conhecimento de maneira mais precisa e alinhada ao modo de expressar-se matematicamente.

Bessa e Costa (2019) relatam que enfatizar somente a fixação e a obtenção de respostas corretas, sem se preocupar com a compreensão, serve quando se necessita o resultado imediato, porém pode prejudicar a formação do conhecimento estruturado, interligado e adequado, já que em matemática, se faz necessário adquirir um raciocínio e este não é adquirido através da memorização, mas sim do fazer pensar e conectar informações. Valorizar o pensamento do estudante, enfatizando o correto e corrigindo o necessário sem constrangê-lo é ideal para conseguir que o estudante abstraia determinado assunto. Conforme Silva *et al*. (2015), o fazer pensar durante a exploração de diferentes meios de mediação é o que viabiliza a aprendizagem, desde que consiga valorizar a lógica individual e as reflexões dos alunos, levando-os ao desenvolvimento do raciocínio lógico é o ideal durante a abstração, inclusive são nesses momentos que se constrói o pensamento crítico, que não é somente utilizado na escola, mas sim para interpretar acontecimentos da sociedade.

Ribeiro *et al.* (2018) expõem que o foco no resultado, e não no processo de obtenção da solução, implica também na interpretação e compreensão de problemas, prejudicando a formação dos estudantes. Mesmo que os alunos já tenham sido apresentados ao algoritmo, é importante reforçar o pensamento sempre que necessário, pois muitos possuem insegurança ou lacunas acerca da construção e resolução do mesmo, seja com ou sem o uso do algoritmo. As crianças manifestam noções particulares e uma riqueza de informações em forma de questionamentos. Essa interação aluno-professor é positiva para a aprendizagem de ambos, pois o pensamento do aluno é evidenciado e incentivado, bem como o professor compreende como seus alunos aprendem determinados conceitos e constroem seu pensamento.

A operação divisão, conforme Silva *et al.* (2015), consiste em um conjunto de operações delimitadas a um formato com armação de cálculo diferente das demais, expressas através do algoritmo, aparentemente sem as ideias de medida ou repartição. Por necessitar observação e atenção, a divisão se torna uma operação difícil, ainda mais pelas inseguranças e incertezas durante o uso do algoritmo, já que os alunos geralmente não compreendem bem o que estão a realizar, apenas aplicam o que aprenderam para obter o resultado. Em sala de aula, frequentemente utiliza-se frases de memorização, como “a ordem dos fatores não altera o produto”, para que os estudantes se lembrem que por vezes os caminhos são diferentes, porém o resultado será o mesmo. Porém, Ribeiro *et al.* (2018) traz que em diversos casos utiliza-se de regrinhas ou explicações simplesmente como se fossem proposições matemáticas, sem a explicação matemática originária adequada, o que acarreta em lacunas no processo de abstração, já que somente houve memorização. Em divisão, não é diferente, é necessário atribuir significado.

O uso adequado da linguagem e definições na aplicação da operação divisão é essencial desde o início, efetuando as correspondências necessárias quando ainda se está na fase de apresentação dos conceitos básicos através do uso de materiais concretos. Concorda-se com Ribeiro *et al.* (2018) que é através da analogia entre as representações que utilizam de materiais concretos e a representação simbólica numérica, que ocorre a compreensão, alinhando a linguagem natural e numérica. A introdução da operação de divisão pode ser facilitada pelo uso de materiais concretos, como blocos, fichas ou qualquer outro recurso manipulável que represente quantidades. Esses materiais ajudam o aluno a visualizar e manipular as quantidades envolvidas na divisão, tornando o processo mais tangível e concreto.

Ultimura e Curi (2021) apresentam o significado de quociente, onde um número racional pode ser usado para representar o quociente de dois números naturais quaisquer. O símbolo $\frac{a}{b}$ em que $b \neq 0$, indica antecipadamente uma partilha equitativa. Para elucidar o significado do quociente, explora-se alguns estudos sobre o assunto. O quociente é um conceito fundamental na matemática e representa a relação entre dois números. Ele pode ser expresso como um número racional, que é a razão entre dois números inteiros. Quando se trata do quociente de dois números naturais, o símbolo $\frac{a}{b}$ é frequentemente utilizado para representá-lo, compreendendo que o número a será dividido igualmente em b partes, com a condição de que b seja diferente de zero ($b \neq 0$), essa condição é necessária porque a divisão por zero não é definida na matemática.

Além disso, Ultimura e Curi (2021) destacam que o quociente também pode ser expresso como um número decimal ou como uma fração decimal, dependendo das circunstâncias. Isso ocorre porque nem todas as divisões resultam em números inteiros ou frações exatas. Às vezes, as divisões produzem resultados com casas decimais ou frações decimais, que são uma representação precisa do quociente. A representação pictórica evidencia o raciocínio que o aluno utiliza durante a divisão como partilha, usando grandezas contínuas ou discretas. Ela permite visualizar e compreender como as quantidades podem ser divididas e comparadas.

Bessa e Costa (2019) apresentam que a divisão, como uma operação multiplicativa, exige que as crianças compreendam as relações entre o dividendo e o divisor para determinar o valor do quociente. Nessa operação, o dividendo é o número a ser dividido, enquanto o divisor é o número pelo qual o dividendo é dividido. O objetivo é encontrar o valor do quociente, que representa a quantidade resultante da divisão. Para ilustrar essa relação, pode-se utilizar a ideia de que a divisão pode ser vista como uma forma de distribuir ou agrupar quantidades de maneira equitativa. Por exemplo, ao ter 12 maçãs e dividi-las em grupos de 3, precisa-se determinar quantos grupos de 3 maçãs podem ser formados. Nesse caso, o dividendo é 12, o divisor é 3 e o quociente é o número de grupos resultantes.

Pode-se reescrever essa divisão como uma operação multiplicativa da seguinte forma: $3 \times 4 = 12$. Isso significa que o valor do quociente pode ser encontrado multiplicando o divisor pelo quociente. Nesse exemplo, 3 multiplicado por 4 é igual a 12, o que indica que pode-se formar 4 grupos de 3 maçãs cada um a partir das 12 maçãs originais. Essa abordagem permite que as crianças compreendam que a divisão pode ser vista como uma operação inversa da multiplicação. É válido pensar como operações opostas, pois geralmente usa-se a tabuada para recorrer ao divisor, porém, ao se deparar com divisores cujo número seja dezena ou centena, há a necessidade de realizar "testes" multiplicativos verificando qual o multiplicador adequado para aquele dividendo, porém este não é o foco da pesquisa.

É importante ressaltar que, à medida que as crianças avançam em sua compreensão da divisão, elas também podem encontrar situações em que há um resto, ou seja, uma quantidade que não é dividida de forma exata. Isso pode ser representado como uma fração ou como um número decimal. Por exemplo, se tivermos 10 maçãs e quisermos dividi-las em grupos de 3, obteremos um quociente de 3 e um resto de 1, representado como 10 ÷ 3 = 3 com resto 1. Em resumo, a divisão, como uma operação multiplicativa, requer que as crianças entendam as relações entre o dividendo e o divisor para determinar o valor do quociente. Ao reescrever a divisão como uma operação multiplicativa, as crianças podem visualizar a divisão como uma distribuição equitativa e estabelecer conexões importantes entre a divisão e a multiplicação.

Isso contribui para uma compreensão significativa da divisão como uma operação matemática, porém esta relação de operações inversas não será o enfoque desse trabalho.

É essencial estabelecer as conexões necessárias e corretas entre as diferentes operações, concordando com Ribeiro *et al.* (2018). As operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, estão interligadas e possuem relações intrínsecas entre si. Ao estabelecer conexões entre as operações, os estudantes podem perceber como elas se relacionam e como os conceitos e princípios subjacentes se aplicam em diferentes contextos. Isso permite uma compreensão mais abrangente e significativa das operações, em vez de vê-las como processos isolados.

A abordagem tradicional no ensino das operações matemáticas, conforme Bessa e Costa (2019), geralmente apresenta apenas um caminho: a apresentação das propriedades do algoritmo e uma série de problemas para ilustrar a operação. Nessa abordagem, a tarefa do aluno muitas vezes se resume em descobrir a conta, fórmula ou procedimento algorítmico correto. No ensino tradicional, o foco principal está no ensino do algoritmo e na memorização dos passos necessários para executá-lo, geralmente através de algoritmos. Os alunos são frequentemente expostos a uma sequência linear de instruções, sem muita ênfase na compreensão dos conceitos por trás da operação. Isso pode levar a uma aprendizagem superficial e mecânica, em que os alunos executam os procedimentos sem uma compreensão real do significado por trás deles. Ou seja, há a aplicação do cálculo por meio do algoritmo, porém sem a devida associação à definição do algoritmo, sendo que o algoritmo consiste em uma representação que organiza os termos do algoritmo facilitando o cálculo.

Essa abordagem pode limitar o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais amplas, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a aplicação dos conceitos em situações reais. Ao se concentrar apenas na descoberta da conta correta, o aluno pode perder a oportunidade de explorar diferentes estratégias e entender as relações entre as operações. Uma abordagem alternativa é aquela que valoriza a compreensão dos conceitos subjacentes e incentiva os alunos a explorarem diferentes estratégias e soluções. Isso pode ser alcançado através de atividades práticas, materiais manipulativos e situações do mundo real que contextualizam as operações matemáticas.

Ao invés de se concentrar apenas no algoritmo, o aluno é encorajado a refletir sobre as propriedades das operações, a fazer conexões entre elas e a explicar seu raciocínio matemático. Essa abordagem promove a compreensão conceitual, o pensamento crítico e a capacidade do aluno de resolver problemas de forma flexível e criativa. Além disso, a abordagem mais atual enfatiza a importância da construção do conhecimento pelos alunos, por meio de investigações, discussões em grupo e resolução colaborativa de problemas. O aluno é incentivado a explorar, experimentar, fazer conjecturas e justificar suas respostas. Ao incentivar a compreensão dos conceitos e a construção do conhecimento pelo aluno, pode-se promover uma aprendizagem significativa das operações matemáticas.

A operação de divisão apresenta procedimentos mais complexos em comparação com a multiplicação, pela estrutura e posicionamento dos números no algoritmo. É evidente que as crianças precisam ter um bom domínio das operações anteriores para lidar com esse tipo de cálculo, que envolve elementos da adição, multiplicação e subtração durante seu desenvolvimento. Além disso, conforme expõe Silva *et al.* (2015), é importante destacar que a divisão é a única das quatro operações em que se desenvolve seu algoritmo partindo da esquerda para a direita, enquanto as outras três operações são realizadas da direita para a esquerda. Em consonância com Ribeiro *et al.* (2018), é comum que os alunos enfrentem dificuldades ao realizar a divisão, muitas vezes devido à falta de compreensão da operação e à dependência excessiva do algoritmo. Essas dificuldades podem se manifestar na linguagem utilizada pelos alunos ou na crença equivocada de que o algoritmo de divisão comumente ensinado pode ser aplicado da mesma forma e com sentido em qualquer situação.

O algoritmo tradicional de divisão ensinado nas escolas é baseado no método da divisão longa, através do dispositivo prático. Ele permite dividir números maiores e é uma forma sistemática de realizar a divisão. No entanto, o uso exclusivo desse dispositivo pode dificultar a compreensão conceitual da divisão, especialmente para estudantes mais jovens. Ribeiro e Carillo (2011) trazem que para promover uma compreensão efetiva da divisão, é recomendável utilizar recursos que ajudem os alunos a visualizar e manipular quantidades. Um recurso comumente utilizado é o material dourado, que consiste em blocos de diferentes tamanhos. Cada bloco representa uma unidade diferente (unidade, dezena, centena, etc.). Ao utilizar o material dourado, os alunos podem explorar a divisão de forma concreta. Eles podem manipular os blocos para dividir quantidades em grupos iguais e compreender a ideia de divisão como uma partição justa. Não se limitando a esse material, pois pode ser tranquilamente adaptado conforme a necessidade e disponibilidade de materiais. Bessa e Costa (2019) apontam que inicialmente o material concreto é importante, porém, ao longo do processo de intervenção com estudantes, os mesmos começam a recorrer a cálculos e hipóteses, se desprendendo dos objetos utilizados.

Conforme Ribeiro *et al.* (2018), a exploração do algoritmo tradicional de divisão visa proporcionar uma compreensão detalhada de cada etapa do processo e sua justificativa. Ao realizar a divisão, segue-se uma sequência de passos para alcançar o resultado desejado. De acordo com Silva *et al.* (2015), essa exploração, embora seja específica em relação aos valores numéricos e ao conteúdo matemático abordado, também tem como objetivo levar cada indivíduo a refletir e questionar sua própria prática e o conhecimento que possui sobre os diversos tópicos matemáticos ensinados em diferentes níveis de educação.

Com base nos estudos apresentados, Ultimura e Curi (2021) destacam a importância de os alunos utilizarem diferentes representações matemáticas, em vez de se limitarem a apenas uma, uma vez que é o uso e a conexão entre essas representações que demonstra a compreensão dos estudantes sobre esse conjunto numérico. Isto é, primeiramente introduzir a operação utilizando-se de materiais concretos e situações favoráveis ao raciocínio, partindo à apresentação detalhada do algoritmo. Essas representações, conforme Ribeiro *et al.* (2018), são estratégias para facilitar a compreensão, incluindo a visualização, explorando com os alunos várias representações de uma mesma situação, promovendo assim um entendimento da correspondência entre essas diferentes representações.

A utilização de representações pictóricas (desenhos, rabiscos, etc.), abordada por Ultimura e Curi (2021), pode fornecer aos alunos imagens mentais que os ajudam a compreender uma situação, mesmo que essas representações não sejam precisas em todos os detalhes. Essas imagens mentais podem ser valiosas para os professores, pois fornecem pistas sobre possíveis intervenções para impulsionar o progresso dos alunos.

Duval (2012) apresenta sua teoria sobre as diferentes representações na aprendizagem matemática, focando na análise das diferentes formas como os alunos representam conceitos matemáticos, destacando as representações semânticas, discursivas e gráficas, e defende a importância de integrar essas representações no ensino para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos. Por outro lado, Vergnaud investiga a estrutura e a organização dos conceitos matemáticos em campos conceituais, analisando como os conceitos são adquiridos, organizados e utilizados na resolução de problemas matemáticos. Enquanto Duval se concentra nas diferentes maneiras de representar os conceitos matemáticos, Vergnaud investiga a estrutura interna desses conceitos e como são organizados na mente dos aprendizes. Embora suas teorias possam se complementar em certos aspectos, cada uma delas oferece uma perspectiva única e valiosa sobre a aprendizagem e o ensino da matemática. Ambas teorias são fundamentais no decorrer desta pesquisa.

Para isto, foi organizada uma intervenção em formato de oficinas, onde é explorado o significado da operação divisão através de diferentes representações, com o intuito de compreender o raciocínio dos estudantes, verificando os saberes dos estudantes e colaborando na aprendizagem da operação divisão.

3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD E O CONCEITO DE DIVISÃO

3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (2017) é uma abordagem cognitivista que oferece um conjunto de princípios para estudar a aprendizagem e o desenvolvimento de competências complexas. Vergnaud, em sua obra, apresenta uma teoria de base piagetiana que, embora se inspire em Piaget, distancia-se significativamente ao centrar sua atenção no "próprio conteúdo do conhecimento e na análise conceitual do progressivo domínio desse conhecimento" (MOREIRA, 2002). Em contraste com Piaget, essa abordagem enfatiza o estudo do desenvolvimento cognitivo do sujeito em situações específicas, ao invés de se concentrar em operações lógicas gerais ou em estruturas gerais do pensamento.

Ao descrever, analisar e interpretar o que ocorre em sala de aula durante o processo de aprendizagem da matemática, Vergnaud e Moreira (2017) sugerem que a ideia de campos conceituais é de extrema utilidade para embasar tanto a prática pedagógica quanto a pesquisa. Ele reconhece que a TCC foi desenvolvida também a partir do legado de Vygotski, agregando assim uma perspectiva sócio-histórica ao seu arcabouço teórico.

Consequentemente, a TCC proposta por Vergnaud (1991) emerge como uma teoria complexa, pois busca abarcar, em uma única perspectiva teórica, todo o desenvolvimento de situações progressivamente dominadas, dos conceitos e teoremas necessários para operar eficientemente nessas situações, bem como das palavras e símbolos que podem representar esses conceitos e operações para os estudantes, levando em conta seus níveis cognitivos.

Vergnaud e Moreira (2017) fundamentam o conceito dos campos conceituais com base em três argumentos: Um conceito não se forma exclusivamente dentro de um único tipo de situação; Uma situação não pode ser analisada apenas com um único conceito; e A construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito, ou todos os aspectos de uma situação, é um processo abrangente que se estende ao longo de vários anos.

Os campos conceituais, portanto, representam uma unidade de estudo destinada a fornecer sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real. Como mencionado anteriormente, a TCC pressupõe que a conceitualização é a essência do desenvolvimento cognitivo, e os campos conceituais fornecem uma estrutura para compreender essa complexa interação entre conceitos, procedimentos e representações em diversos contextos de aprendizagem. De acordo com essa teoria, quando um conceito faz sentido para um estudante, isso indica que houve uma conexão entre o indivíduo, as circunstâncias que definem os conceitos e as representações simbólicas necessárias para compreendê-los. Em outras palavras, é por meio das interações que os conceitos adquirem significado, enfatizando a importância das aprendizagens científicas e técnicas.

A teoria enfatiza que os conceitos não são aprendidos de forma isolada, mas sim em relação a outros conceitos e situações. As interações entre diferentes conceitos e situações são essenciais para a consolidação e aprofundamento do conhecimento. De acordo com Vergnaud e Moreira (2017, p.19), "um campo conceitual é justamente o que permite analisar e relacionar entre si as competências progressivamente formadas". A teoria oferece uma abordagem abrangente e coerente para estudar como os conceitos são adquiridos, compreendidos e aplicados pelos estudantes, considerando as interações entre o indivíduo, as situações e as representações simbólicas.

Vergnaud e Moreira (2017) argumentam que o objetivo do campo conceitual é delinear subcampos da experiência, centrados em duas ideias fundamentais: situação e conceito. O desenvolvimento das competências e das conceitualizações conduz ao estudo de uma variedade de situações, às quais não podem ser analisadas a partir de um único conceito, mas sim de vários. Dessa forma, um campo conceitual pode ser entendido como um conjunto de situações e um conjunto de conceitos inter-relacionados, que se entrelaçam para proporcionar uma compreensão abrangente e contextualizada de determinado objeto de estudo. Portanto, um Campo Conceitual é composto por duas partes essenciais: um conjunto de situações e um conjunto de conceitos. O conjunto de situações abrange uma variedade de contextos cujo domínio progressivo exige a aplicação de uma gama diversificada de conceitos, esquemas e representações simbólicas que estão intimamente interconectados. Por outro lado, o conjunto de conceitos compreende os elementos que contribuem para o domínio dessas situações, fornecendo as bases teóricas e práticas necessárias para enfrentar os desafios apresentados pelos diferentes contextos dentro do campo conceitual.

Vergnaud e Moreira (2017), Plaisance e Vergnaud (2003) e Vergnaud (1986) afirmam que a TCC define um conceito a partir de um tripé composto por três conjuntos distintos, porém inter-relacionados: O conjunto de situações (S) que atribuem significado ao conceito; O conjunto das invariantes operatórias (I) que estudam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocadas pelas situações. Este conjunto representa os objetos, propriedades e relações sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou seja, as invariantes operatórias associadas ao conceito que os sujeitos reconhecem e usam para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; E o conjunto das representações linguísticas e simbólicas (R), que compreende a linguagem natural, gráficos, diagramas, sentenças formais, etc, utilizadas para indicar e representar essas invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Neste estudo, o tripé é apresentado como: (I) é a concepção da operação divisão; (S) é o sentido atribuído com o uso de materiais concretos; e (R) é a representação apresentada pelos estudantes através de escritos, fala ou símbolos. De acordo com Borges[1] (2018) a representação simbólica encapsula os significados dos conceitos (invariáveis) de maneira subterrânea, residindo no âmago das mentes das pessoas. Essas situações não são independentes umas das outras, e algumas podem ser fundamentais para a compreensão de outras, não sendo conveniente estudar esses elementos de forma isolada. Nesse sentido, os campos conceituais são unidades de estudo proveitosas para atribuir significado aos problemas de aquisição e às observações feitas em relação à conceitualização.

De acordo com Moreira (2002), a organização dos comportamentos de um sujeito ao interagir com uma situação específica ou com representações simbólicas desempenha um papel fundamental na atribuição de significado ao conteúdo. Essa organização é conceituada como esquema. É evidente que, para esquematizar uma solução, são necessários objetos significativos, construções conceituais e atividades perceptivo-motoras. Vergnaud (1986) afirma que essas atividades mentais envolvem processos de pensamento e sensação, permitindo o reconhecimento e a integração de estímulos.

Ao buscar os princípios fundadores e as possibilidades de educação, Plaisance e Vergnaud (2003) enfatizam a importância da reflexão ética e do recurso global à filosofia para compreender o ato da educação. Eles propõem uma abordagem progressista da escola, que busca emancipar as crianças, levando em consideração seus valores, sua positividade e suas dificuldades específicas para superá-las. A atividade do sujeito que aprende, a oferta de situações favoráveis ao aprendizado, a mediação por parte das pessoas que o rodeiam e a utilização de formas linguísticas e simbólicas são aspectos fundamentais para o ensino. A criança deve ser ativa para aprender e deve ter oportunidades de resolver problemas, produzir resultados tangíveis e julgar por si mesma os resultados de sua ação. Os esquemas constituem

[1] Material do Projeto de Extensão: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica, ações com tecnologias digitais, objetos de aprendizagem no contexto da política educacional da BNCC, promovido pela UFFS/SBEM, em 2022.

uma organização invariante em relação a uma certa classe de situações. Essa organização é estruturada por invariantes operatórios, que são conhecimentos adequados para selecionar e processar informações. Os significados dos conceitos estão muitas vezes implícitos nos esquemas. Por exemplo, Plaisance e Vergnaud (2017) expõem que o campo conceitual das estruturas multiplicativas abrange todos os níveis de ensino e envolve uma variedade de situações, esquemas, conceitos e formas de representação. De acordo com Borges (2018) a representação simbólica carrega significados dos conceitos de forma oculta, sendo essencial compreender e utilizar adequadamente essas representações no ensino da matemática.

Conforme Moreira (2002), durante as fases iniciais da aprendizagem da aritmética, existem conhecimentos implícitos que são difíceis de serem explicados, pois espera-se que a criança adquira habilidades operacionais sem necessariamente compreender os conceitos matemáticos específicos no início. No entanto, esses conhecimentos implícitos são fundamentais para o desenvolvimento conceitual, e a falta de uma compreensão adequada pode levar a erros sistemáticos. Esses erros estão relacionados à organização e à abstração do que se pretende operar. Por exemplo, em problemas que se espera que o aluno resolva através da divisão, qual é o dividendo? qual é o divisor? Quais relações pode-se estabelecer entre esses números? Por que deve-se utilizar a divisão nesse caso? Será que o aluno realmente compreende o que está fazendo?

O conhecimento implícito é essencialmente composto por conhecimentos adquiridos de forma natural e inconsciente, quando ocorre a abstração do que foi aprendido. Nesse tipo de conhecimento, as informações são internalizadas de tal forma que se tornam automáticas e intuitivas, não exigindo um esforço consciente para serem utilizadas. É como se estivessem enraizadas no nosso repertório cognitivo, influenciando nossas ações e decisões de maneira sutil e subconsciente. O conhecimento implícito é resultado de experiências, vivências e práticas repetidas ao longo do tempo, e é frequentemente difícil de ser explicado ou verbalizado de forma explícita. No entanto, ele desempenha um papel fundamental em nosso processo de aprendizagem e na nossa capacidade de agir de forma eficiente em diferentes contextos. Para isso, Moreira (2002) afirma que é essencial que a educação proporcione aos estudantes uma variedade de situações que abrangem conceitos amplos em diferentes contextos. Isso permite a adaptação dos esquemas, encorajando os estudantes a interpretar qual a melhor maneira de organizar suas ideias, evitando que a esquematização se torne um hábito automático.

Ainda, Vergnaud e Moreira (2017), ressaltam que a ênfase excessiva no conhecimento explícito pode levar à subestimação e até à desvalorização do conhecimento implícito dos alunos. Eles enfatizam que a maior parte de nossa atividade física e mental é constituída por esquemas, os quais têm como componentes essenciais os invariantes operatórios. Muito do conhecimento está implícito nos esquemas. Para o ensino de ciências, Vergnaud e Moreira (2017) argumentam que é fundamental facilitar a transformação do conhecimento implícito em explícito, sem nunca menosprezar ou desvalorizá-lo. Eles destacam que a trajetória do aprendiz ao longo de um campo conceitual científico é sinuosa, difusa, difícil e, sobretudo, demorada, e que não se pode esperar que um aluno domine um campo conceitual através de uma ou duas unidades didáticas.

Segundo Vergnaud e Moreira (2017), a construção do conhecimento consiste na progressiva organização de representações mentais, sendo essencial entender por que uma determinada representação simbólica pode ser útil, em quais condições, e quando e por que pode ser substituída por outra mais abstrata e geral. A promoção do uso e da percepção de diferentes representações de um mesmo número racional é de extrema importância no ensino. Além disso, destaca-se a necessidade de trabalhar com transformações em cada uma dessas representações. Conforme apontado pelos autores, é durante a exploração de ideias, conceitos e diversas representações que os alunos constroem novos conhecimentos e expandem suas compreensões anteriores. Essa abordagem permite uma ampliação e aprofundamento dos conhecimentos matemáticos, possibilitando uma compreensão abrangente e completa das ideias envolvidas. Eles definem um conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação, o que implica a existência de um conjunto de situações que constituem o referente e um conjunto de esquemas postos em ação pelos sujeitos nessas situações. Um único conceito não se refere a um único tipo de situação, e uma única situação não pode ser analisada com apenas um conceito. Os esquemas evocados pelos sujeitos são fundamentais para dar sentido a uma dada situação.

Um esquema é um universal que é eficaz para uma gama de situações e pode gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. Os invariantes operatórios são os conhecimentos contidos nos esquemas e constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas. Todas as condutas comportam uma parte automatizada e uma parte de decisão consciente. Para estabelecer um esquema válido, Vergnaud (1986) ressalta a importância de considerar os invariantes operatórios. Esses invariantes incluem conceitos, teoremas, metas e objetivos, antecipando o que se deseja alcançar, bem como regras de informações. As regras de informações são necessárias para lidar com a continuidade das informações ao longo do tempo, levando em conta se elas variam ou permanecem constantes. Moreira (2002) cita que, por exemplo, na probabilidade, a presença ou ausência de reposição afeta a forma como o problema se desenrola. Vergnaud amplia o conceito de esquema ao afirmar que eles devem estar diretamente relacionados aos aspectos e informações das situações em questão.

Quando fala-se de invariantes operatórios, faz-se referência aos conceitos em ação e aos teoremas em ação, conforme afirmam Vergnaud e Moreira (2017). O conceito em ação é um instrumento ou conjunto de pensamentos relevantes, enquanto o teorema em ação é uma hipótese sobre o mundo real, que pode ser validada ou não, e compreende as regras de funcionamento do conceito. A diferença entre eles, de acordo com Vergnaud (1986), é que um teorema pode ser verdadeiro ou falso, enquanto um conceito é considerado apropriado ou não apropriado. A escola muitas vezes desvaloriza os conhecimentos implícitos dos estudantes e dá uma ênfase exagerada ao conhecimento explícito. No entanto, a teoria de Vergnaud não aborda apenas conceitos explícitos e formalizados, mas também reconhece que o conhecimento em ação pode evoluir ao longo do tempo em direção a conhecimentos mais específicos.

Vergnaud e Moreira (2017) explicam que o objetivo do campo conceitual é delinear subcampos da experiência, centrados nas ideias de situação e conceito. O desenvolvimento das competências e das conceitualizações conduz ao estudo de uma diversidade de situações, onde uma situação não é analisada apenas a partir de um único conceito, mas sim de vários. Assim, um campo conceitual envolve tanto um conjunto de situações quanto um conjunto de conceitos, constituindo-se como um espaço onde a interação entre eles é essencial para a compreensão e aprofundamento do conhecimento. Os autores trazem que a aprendizagem da matemática vai além do simples desenvolvimento de habilidades, como o cálculo ou a resolução de problemas, ou da memorização de conceitos por meio de exercícios repetitivos. Para que o aluno realmente assimile a matemática de forma significativa, ele precisa ser capaz de atribuir sentido e significado às ideias matemáticas. Isso implica pensar sobre essas ideias, estabelecer relações, justificar argumentos, analisar, discutir e até mesmo criar. Borges (2018) traz que um conceito matemático não existe isoladamente, uma vez que sua compreensão e desenvolvimento muitas vezes dependem da interligação com outros conceitos. Cada conceito matemático estabelece uma relação intrínseca com outros dentro do vasto campo da matemática, sendo que alguns são essenciais para a construção e entendimento dos demais. Essa interdependência entre os conceitos matemáticos ressalta a importância de uma abordagem holística no ensino e aprendizado da matemática, onde os alunos são incentivados a explorar e compreender as conexões entre os diferentes conceitos, contribuindo assim para uma compreensão mais profunda e integrada do conteúdo matemático.

A TCC apresentada por Vergnaud e Moreira (2017), inicialmente direcionou-se para a aprendizagem em matemática, abrangendo áreas como as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas, a álgebra elementar e a geometria. A TCC possibilita não apenas aprofundar o que é necessário aprender, mas também generalizar para todos os registros de atividade, desde o gesto até o raciocínio, explorando as formas de organização dessa atividade.

Os esquemas, essenciais na TCC, conforme propõe Plaisance e Vergnaud (2003), são dinâmicos e se adaptam às novas situações enfrentadas. Certos esquemas podem não levar ao sucesso e, muitas vezes, são abandonados antes de serem estabilizados, evidenciando a existência de vários esquemas alternativos. A atividade gestual, como destacado por Vergnaud e Moreira (2017), contém operações de pensamento, especialmente em termos de representações de objetos materiais e suas propriedades. Compartilhar entre os alunos juízos e valores, induzir perguntas e passar por sub-metas como análise ou argumentação, são estratégias cruciais no processo educacional. É fundamental reconhecer o duplo caráter sistemático e oportuno do pensamento presente na atividade humana.

O esquema, conforme explicado por Vergnaud e Moreira (2017), é uma organização invariante formada por componentes direcionados a determinadas situações. De acordo com Moreira (2002) os esquemas de ação consistem em estruturas cognitivas que guiam a atividade do sujeito em direção a metas e submetas, sustentadas por regras do tipo se ... então que orientam a sequência de ações e permitem a busca de informações e controle dos resultados. Os invariantes operatórios, como teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, são os conhecimentos contidos nos esquemas, proporcionando a base para reconhecer os elementos pertinentes à situação e inferir as metas a alcançar, juntamente com as regras de ação apropriadas. Além disso, as possibilidades de inferência permitem que o sujeito, com base nas informações e invariantes operatórios disponíveis, calcule aqui e agora as regras e antecipações necessárias para a atividade.

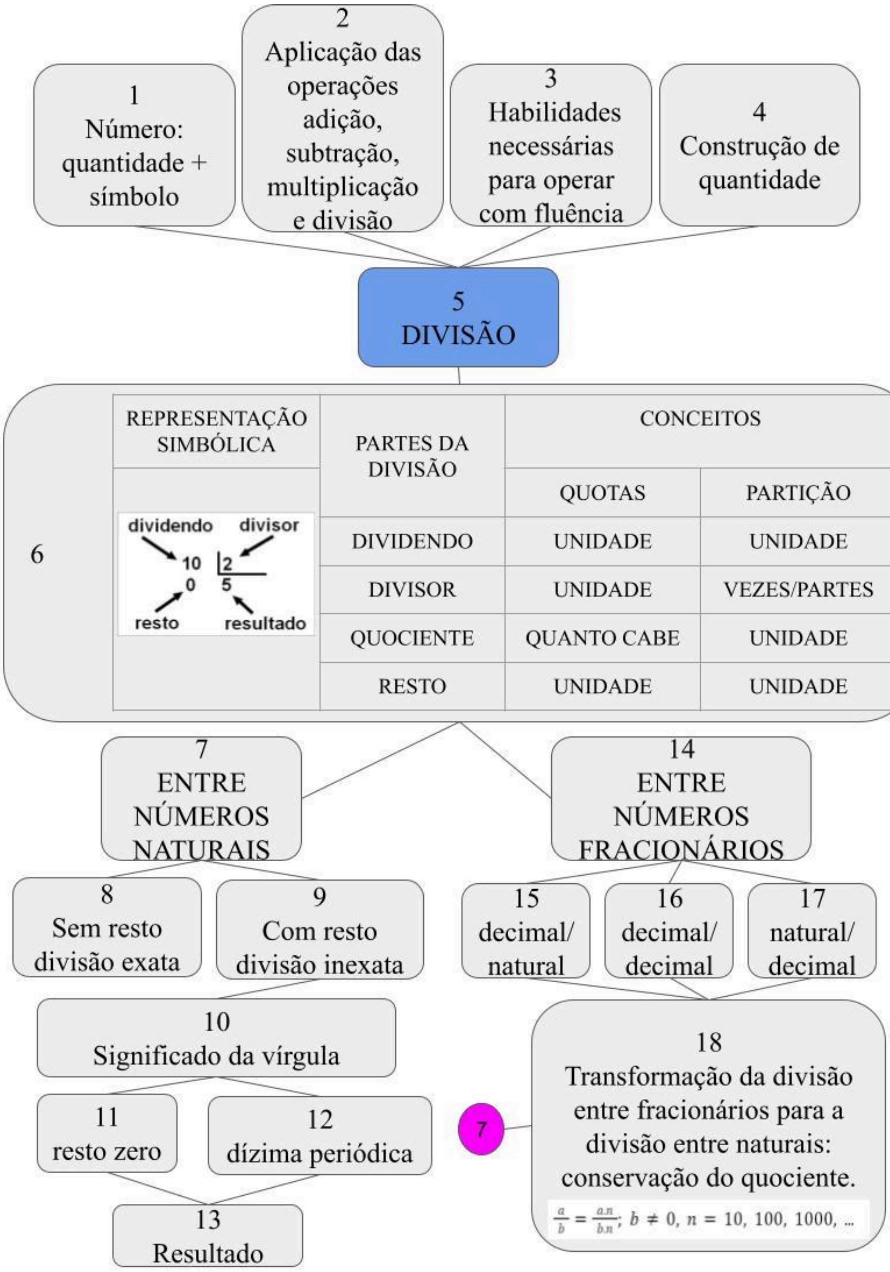
A linguagem desempenha um papel crucial na conceitualização, mas é insuficiente, uma vez que a formação de invariantes operatórios é a base desse processo. O mediador educacional desempenha um papel essencial na escolha e organização das situações de aprendizagem, na clarificação das metas da atividade, na contribuição para sua organização e na facilitação da emergência de conceitos e teoremas relevantes. A tendência predominante no ensino é a de ensinar maneiras de fazer, vinculando esses problemas a classes relativamente limitadas. O objetivo prioritário na pesquisa em didática, conforme Vergnaud (1986), é investigar, analisar e classificar exaustivamente as situações-problema que conferem significação e função a um conceito, o que permite uma maior variedade de relações e problemas e uma compreensão mais profunda da função e da radicação do conceito.

Neste âmbito, a escolha da Teoria da Concepção Conceitual (TCC) conduz à hipótese implícita ou explícita de que o ser humano aprende algo na medida em que atribui a ele um significado, (re)elabora o conceito e o representa simbolicamente. Essa hipótese reconhece a centralidade da construção de significados na aprendizagem, destacando que o processo cognitivo não se limita à mera absorção de informações, mas envolve uma ativa participação do aprendiz na atribuição de sentido ao conhecimento. A TCC pressupõe que a aprendizagem é um processo complexo que envolve a compreensão e a internalização de conceitos, requerendo não apenas a compreensão conceitual, mas também a capacidade de representar simbolicamente esses conceitos de diversas maneiras. Essa abordagem destaca a importância da interação entre o sujeito e o conhecimento, evidenciando que a aprendizagem não ocorre de maneira passiva, mas sim por meio de uma construção ativa e significativa do conhecimento.

3.2 A OPERAÇÃO DE DIVISÃO E SUA CONCEITUALIZAÇÃO

A operação de divisão é fundamental na matemática, encontrando aplicação em uma variedade de contextos práticos e teóricos. Entender seus conceitos, propriedades e métodos de resolução é essencial para uma compreensão abrangente da matemática e para resolver uma variedade de problemas do mundo real. Para explicitar os conceitos envolvidos nessa operação, foi elaborado um mapa conceitual, ilustrado na Figura 1, que parte de conceitos preliminares (invariantes, na linguagem da TCC), tais como quantidade e número, de operações numéricas relacionadas (adição e multiplicação) e de habilidades operatórias com números (esquemas). Os dois conceitos de divisão (invariantes), o de quotas e o de partição, foram tomados como base para desenvolver o algoritmo (esquema), usando a representação simbólica usual dos termos da divisão, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto. Por fim, foram elencadas as diferentes situações numéricas da divisão com números inteiros e fracionários (situações, na linguagem de Vergnaud).

Figura 1 – Mapa conceitual da operação divisão.



Fonte: autor (2023).

A concepção de número de Courant e Robbins (1981), pressupõe a ideia de contagem e alguma representação simbólica. Segundo eles, os números foram

> criados pela mente humana para contar os objetos em diferentes agrupamentos e (...) não fazem referência às características individuais dos objetos contados. (...) seis é

> uma abstração de todas as coleções reais que contêm seis coisas; não depende de nenhuma qualidade específica dessas seis coisas ou dos símbolos usados. (Courant e Robbins, 1981, p.1. Tradução da autora)[2]

No Quadro 1 da Figura 1, o entendimento do número como quantidade e símbolo é o ponto de partida para a compreensão dos sentidos envolvidos na operação de divisão. Além da representação de unidades, é necessário entender a estrutura do sistema decimal, o qual utiliza apenas dez símbolos (algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) para representar, de modo posicional ordenado com unidades, dezenas, centenas, etc, qualquer quantidade finita. As transformações simbólicas (decomposição, por exemplo) com esses números, de forma coerente com os respectivos sentidos e significados, é que viabilizam a criação dos algoritmos das operações.

Ao compreender o conceito de número, desenvolve-se a capacidade de entender as operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação e divisão e suas propriedades (dado no Quadro 2 da Figura 1). O aperfeiçoamento das representações dos algoritmos tende a levar a uma economia de símbolos e etapas, e uma vez comprovados eficazes, adquirem o status de método. Ou seja, um conjunto de procedimentos, que leva com segurança e rapidez ao resultado correto. Esse é o objetivo da criação de algoritmos: rapidez e precisão. Para tanto, o desenvolvimento de habilidades básicas com os símbolos (apresentado no Quadro 3), como a tabuada, o cálculo mental e o cálculo escrito são essenciais para a investigação e execução do conceito da divisão.

Dessa maneira, a partir do contexto estabelecido, é possível solucionar problemáticas e propostas que desfrutem de soluções matemáticas. No contexto da matemática o número é uma abstração que representa uma quantidade (ilustrado no Quadro 4). A quantidade expressa um agrupamento particular de objetos com um atributo em comum, medidas ou uma série de sentidos físicos. A relação entre o número e a quantidade é fundamental, onde o número (símbolo) está ligado à quantidade que ele representa. A construção de quantidade, a que se refere o Quadro 4, consiste na compreensão de que o número é constituído por algarismos que compõe a unidade, podendo haver dezena, centena e as demais nomenclaturas de valor posicional. Conforme Bianchini (2018) o sistema de numeração utilizado é o indo-arábico e é um sistema posicional, já que o mesmo algarismo tem valor diferente de acordo com a

[2] Created by the human mind to count the objects in various assemblages, numbers have no reference to the individual characteristics of the objects counted. The number six is an abstraction from all actual collections containing six things; it does not depend on any specific qualities of these six things or on the symbols used. (COURANT; ROBBINS, 1981, p.1)

posição que ocupa no número. Por exemplo, no número 345, o algarismo 4 ocupa a posição de dezena, já no número 4596 está na posição de unidade de milhar.

A ideia de quantidade é invariante, o que significa que a quantidade de objetos ou elementos é constante, independentemente da forma como é representada ou simbolizada. Para abordar a relação entre quantidade, símbolo e o invariante de Vergnaud, é fundamental entender o contexto da interpretação do significado do invariante e sua conexão com os números e a operação de divisão. O invariante de Vergnaud refere-se à compreensão de que a quantidade é um conceito, independentemente da maneira como é expressa ou simbolizada. Em outras palavras, a quantidade é uma propriedade fundamental que não muda, mesmo quando representada de diferentes formas.

Portanto, o significado de número está intrinsecamente relacionado à quantidade referida, que remete ao sentido e a interpretação do símbolo através da representação. O sentido de número vai além da mera contagem e está relacionado à compreensão mais profunda das relações e operações que podem ser realizadas com esses números. Borges (2018) afirma que é fundamental notar que nem os materiais em si, nem suas representações, conferem sentido ou significado aos conceitos. Essa tarefa é realizada pelos indivíduos, seja de forma individual ou em grupo.

A partir dessas ideias iniciais, constrói-se a concepção da operação divisão (dado no Quadro 5). A divisão é a operação oposta da multiplicação. É a distribuição de um valor em partes iguais. Simbolicamente, de acordo com Caraça (1951), sendo a e b ambos pertencentes ao conjunto dos números racionais, com $b \neq 0$, a divisão pode ser escrita como $a: b$, ou ainda $\frac{a}{b}$. Pela definição tem-se que $a: b = c$, já que $b. c = a$. O número a é chamado de dividendo, b é o divisor e c o quociente, em que "dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo" (CARAÇA, 1951, p. 22). Ainda, para que seja possível efetuar a operação o dividendo deve ser múltiplo do divisor, senão, deve existir um quarto número, o resto, $r < b$, tal que $a = b. c + r$.

A divisão é estruturada em partes (dado no Quadro 6), onde o dividendo é o número a ser dividido. O divisor é o número pelo qual o dividendo é dividido. O quociente é o resultado da divisão, a quantidade de vezes que o divisor cabe no dividendo. O resto é o que resta depois que toda a divisão é feita. A representação simbólica de uma divisão consiste em representar as partes de uma divisão através do algoritmo, onde evidencia-se o dividendo e o divisor, opera-se conforme as possibilidades de cálculo utilizando cada algarismo do dividendo em ordem da esquerda para a direita, recorrendo à multiplicação e subtração, até que se determine o quociente e o resto, para então finalizar o cálculo.

Pode-se separar a ideia de divisão em dois casos, conforme já detalhado anteriormente, por quotas ou partição, de acordo com a ideia de Vergnaud. Na divisão por partição tem-se que o dividendo é uma quantidade determinada de itens a ser distribuído igualmente em agrupamentos, com isso, o dividendo consiste em uma unidade numérica a qual será aplicado um divisor que define em quantas partes o dividendo será separado, ou ainda, em quantas vezes o dividendo será distribuído, de maneira igual, perante o divisor atribuindo o resultado e resto em forma de unidade. Já a divisão por quotas traz a ideia de seção, onde o dividendo e o divisor são denotados por unidades e então o quociente traz a ideia de quantas vezes o divisor cabe no dividendo, com resto unitário.

Numa divisão tem-se a representação simbólica do algoritmo, onde o divisor fica ao lado esquerdo, seguido pela chave, nomenclatura de acordo com Iezzi (2016), onde posiciona-se o divisor, com o decorrer do algoritmo determina-se o quociente e enfim o resto. Melo e Oliveira (2023) trazem em seu estudo diferentes "algoritmos da divisão", detalhando as possibilidades de casos e o funcionamento da definição proposta por Caraça, porém esse não é o intuito deste trabalho. Esses autores enfatizam que o algoritmo consiste na definição $a = b.c + r$, e que se confunde isto com o dispositivo prático que é a representação simbólica posicional apresentada no Quadro 6.

Pode-se seccionar a divisão em casos, ou ela ocorre entre números naturais ou entre números fracionários. Na divisão entre números naturais (ilustrado no Quadro 7), ao chegar no quociente, obtém-se ora cálculos sem resto (conforme o Quadro 8), cuja divisão é exata, ora cálculos com resto (dado no Quadro 9), tornando uma divisão com resto e quociente inteiro ou com quociente fracionário, conforme proposto porIezzi (2016). Nos casos de divisão com resto, para que seja possível prosseguir com o cálculo é necessário compreender o significado da vírgula (presente no Quadro 10). Como aborda Bianchini (2018), ao realizar um cálculo, cujo quociente é fracionário, precisamos iniciar a conta, considerando a parte inteira, décimos, centésimos, milésimos, e assim por diante. Por exemplo, se há 26 inteiros para dividir por 8 inteiros, primeiro verifica-se que 26 dividido por 8 resulta no quociente 3 inteiros com resto 2 unidades. Essas duas unidades correspondem a 20 décimos, que dividido por 8, resulta em 2 décimos com 4 décimos de resto. Os 4 décimos de resto correspondem a 40 centésimos, que divididos por 8 inteiros, resulta em 5 centésimos, com resto zero. Ou seja, 26 dividido por 8 resulta em 3 inteiros, 2 décimos e 5 centésimos, ou ainda, 3,25. É a vírgula que separa a quantidade inteira das quantidades decimais, tornando assim a divisão com resto precisa e coerente se considerarmos que a divisão deve ser equitativa. Porém, há dois casos, num deles a divisão é exata, onde o resto é zero (presente no Quadro 11), noutro a divisão resulta em uma dízima periódica (dado no Quadro 12), sendo ambos considerados resultados válidos (conforme o Quadro 13).

Numa divisão entre números fracionários (de acordo com o Quadro 14), há três subdivisões: pode-se efetuar uma divisão onde o dividendo é um número fracionário na forma decimal e o divisor natural (dado no Quadro 15); pode-se efetuar a divisão com ambos, dividendo e divisor, sendo números fracionários na forma decimal (dado no Quadro 16); e pode-se efetuar a divisão entre dividendo natural por um divisor na forma decimal (apresentado no Quadro 17). Essas três opções necessitam do ajuste do número fracionário em sua forma decimal (presente no Quadro 18), fazendo com que ambos, dividendo e divisor sejam expressos como números naturais, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{a.n}{b.n}$; $b \neq 0$, $n = 10, 100, 1000, \ldots$, dessa forma, retorna-se ao Quadro 7 para finalizar o algoritmo (por este motivo há uma marcação em rosa no Quadro 18 de que deve-se retornar ao Quadro 7). De acordo com Caraça (1951) o conjunto de números racionais compreende os números inteiros e os números fracionários, entretanto, o foco do estudo consiste apenas nos números fracionários escritos na forma decimal.

4 ESTRATÉGIAS E ABORDAGENS METODOLÓGICAS

A presente pesquisa é identificada como qualitativa porque tem como foco de análise, os sentidos das manifestações de alunos sobre o processo de formação de conceitos envolvidos no algoritmo da divisão. A constatação de erros ou acertos, interessa para a análise, não tanto pela frequência, mas principalmente para investigar o que e por que eles ocorreram. Nesse sentido, a pesquisa é também descritiva e analítica. Para cada resposta, foi feita a análise, valorizando seu conteúdo e qualidade, de acordo com Fiorentini e Lorenzato quando questionam: "que tipo de dificuldades de aprendizagem da matemática as pesquisas tem investigado e que explicações são dadas para elas?" (2012, p.11).

A pesquisa adota traços característicos da abordagem de pesquisa-ação, evidenciando um interesse genuíno no que os alunos estão fazendo e na interação do pesquisador com o grupo pesquisado. A origem da pesquisa-ação remonta à antropologia, onde pesquisadores imergiram em determinadas comunidades durante um período específico, vivenciando de perto seu modo de vida e colhendo informações detalhadas sobre suas práticas e costumes. A pesquisa-ação, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), é uma abordagem metodológica que busca promover uma interação mais próxima entre a teoria e a prática, permitindo uma compreensão mais profunda dos fenômenos estudados. Nesse tipo de pesquisa, os participantes não são apenas objetos de estudo, mas também colaboradores ativos que contribuem para a definição dos problemas de pesquisa, a coleta e análise de dados, e a implementação de intervenções ou mudanças. A pesquisa-ação enfatiza a importância da participação ativa dos sujeitos envolvidos, bem como uma abordagem colaborativa entre pesquisadores e participantes. Além disso, ela valoriza a utilização de múltiplos métodos de coleta de dados, como observação participante, entrevistas e análise documental, visando obter uma compreensão abrangente do problema em estudo e das perspectivas dos participantes.

Essa abordagem aproxima o pesquisador do pesquisado, permitindo uma compreensão contextualizada do fenômeno em estudo. Os traços de pesquisa-ação presentes neste estudo incluem a participação ativa dos sujeitos, que não são simplesmente objetos de estudo, mas colaboradores ativos na definição dos problemas de pesquisa, na coleta e análise de dados, e na implementação de possíveis intervenções. Além disso, destaca-se a abordagem colaborativa adotada, onde os pesquisadores trabalham em estreita colaboração com os membros da comunidade escolar para identificar questões relevantes e desenvolver estratégias de intervenção. Por fim, a pesquisa também se beneficia da utilização de alguns métodos de coleta de dados, como registros dos alunos, anotações em formato de diário de bordo, áudios e observações. Esses elementos combinados conferem uma robustez metodológica ao estudo, permitindo uma análise mais completa e contextualizada da aprendizagem da divisão de números naturais.

As atividades propostas foram organizadas em forma de oficinas. A coleta de dados foi conduzida no ambiente pedagógico de oficinas que empregam uma variedade de recursos didáticos para atingir uma aprendizagem consistente. Foram realizadas oficinas em duas escolas distintas. A Escola A é uma instituição da rede pública municipal, situada em um município de pequeno porte no Rio Grande do Sul, onde existem apenas duas escolas. Participaram das oficinas quatro estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, todos do sexo feminino, identificados como A1, A2, A3 e A4. Por outro lado, a Escola B é uma escola da rede pública estadual, localizada em um bairro de baixa renda, em um município de maior porte. Nessa escola, participaram quatro estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental, sendo dois meninos e duas meninas, designados como B1, B2, B3 e B4.

As oficinas foram estruturadas em etapas, cada uma consistindo em um encontro semanal com duração de duas horas, totalizando oito encontros por escola. As atividades foram realizadas no contraturno escolar, utilizando espaços disponibilizados pela escola, como a biblioteca, a sala de ciências e as salas de aula. Os alunos foram agrupados em duplas, visando a troca de informações, porém foram instruídos a não copiar as respostas, apenas trocar ideias com sua dupla.

Inicialmente, um questionário foi elaborado, como sondagem, contendo perguntas que indagam se o estudante gosta de matemática, se enfrenta dificuldades em cálculos de divisão, se conhece as nomenclaturas das posições no algoritmo da divisão, se compreende o conceito de algoritmo, entre outras, incluindo alguns cálculos a serem resolvidos (Ver Apêndice A). Em seguida, a atividade foi dividida em etapas. Na primeira etapa, os estudantes foram desafiados a dividir bolinhas em cestos usando material concreto, para verificar se dominavam o conceito de divisão por partição, conheciam os sentidos das palavras dividendo, divisor, quociente, resto e da divisão exata. Na segunda etapa, a escala Cuisenaire foi utilizada como recurso didático, permitindo a exploração das posições numéricas dos números e introduzindo o conceito de divisão como quotas, além de questionar como a divisão ocorre quando o divisor é uma dezena ou centena.

Na terceira etapa, não se faz uso de materiais concretos, e os casos de divisões são separados para serem resolvidos usando o algoritmo. Nesse momento, foi possível identificar dificuldades específicas durante o cálculo com divisor de um ou dois algarismos. Quando o divisor consiste em um único algarismo, os estudantes podem recorrer à tabuada para realizar o cálculo. No entanto, quando o divisor possui dois algarismos, formando uma dezena, não há uma resposta direta na tabuada, sendo necessário realizar testes com o divisor. Além disso, são abordadas divisões em que o dividendo é menor que o divisor e requer a adição de zero no quociente, como no exemplo de 1208 dividido por 4. Também são exploradas divisões em que "sobram zeros" no dividendo e esses zeros são incorporados ao quociente, como no caso de 3600 dividido por 9. Por fim, são apresentadas divisões com resto, e ao final, é estabelecido como ocorre a divisão por quotas e por partição, relacionando esses conceitos com as atividades anteriores envolvendo bolinhas e a escala Cuisenaire.

Até então, a proposta consiste em aplicar divisões entre números naturais. Consequentemente, é trabalhado entre números racionais na forma decimal. Na quarta etapa da intervenção, introduz-se divisões entre números naturais, porém que ocasionam resto, sendo necessário utilizar a ideia de números decimais e o uso da vírgula. Para esta etapa, o material disponibilizado consiste em dinheirinho falso, também explorando as posições dividendo, divisor, quociente e resto, cálculos mentais e estratégias de como proceder caso o quociente resulte em um número irracional. Na quinta etapa, há questionamentos que envolvem divisor e dividendo na forma de números decimais, sendo transformados em números naturais através da multiplicação por dez. Para esta etapa, utilizou-se da ideia de conversão de medidas de comprimento.

Na sexta etapa, a aplicação do dispositivo prático entre números racionais, com ou sem resto, é trabalhada de forma objetiva, verificando se as propostas das oficinas anteriores são contempladas. Por fim, um questionário é aplicado novamente, com algumas diferenças em relação à sondagem inicial, com o intuito de verificar e compreender o raciocínio estabelecido durante os encontros. Se um professor encara a Matemática como um conjunto de proposições dedutíveis, auxiliadas por definições, cujos resultados são regras ou fórmulas que servem para resolver exercícios em exames, avaliações, concursos, então ele acredita que basta ensinar diretamente essas regras e aplicar exercícios de memorização. Nesse cenário, Lorenzato afirma que "não conseguimos admirar a beleza e harmonia dela, nem ver nela um essencial instrumento para cotidianamente ser colocado a nosso serviço" (2009, p. 25).

Bardin (2002) aborda a metodologia de análise de conteúdo, oferecendo uma estrutura sistemática para examinar dados textuais e identificar padrões, temas e significados subjacentes. Bardin destaca a importância da análise de conteúdo como uma técnica de pesquisa versátil e aplicável em diversas áreas, incluindo ciências sociais, comunicação, psicologia e educação. A obra oferece diretrizes claras para a coleta, organização e interpretação de dados qualitativos, permitindo aos pesquisadores uma compreensão aprofundada das narrativas e mensagens contidas nos materiais analisados.

Uma hermenêutica controlada, baseada na dedução, consiste em um conjunto de instrumentos metodológicos em constante aperfeiçoamento, cada vez mais sutis. Bardin (2002) argumenta que por trás do discurso aparentemente simbólico e polissêmico, existe um sentido a ser desvendado. A análise de conteúdo, conforme descrita por Bardin, não se resume a um único instrumento, mas sim a um conjunto de técnicas destinadas à análise das comunicações. Portanto, não é apenas um instrumento, mas sim uma gama de ferramentas, altamente adaptáveis e com diversas formas de aplicação, adequadas a um vasto campo de comunicação.

Bardin (2002) compara o analista a um arqueólogo, que trabalha com vestígios, documentos que podem ser descobertos ou suscitados. Esses vestígios representam estados, dados e fenômenos, revelando algo a ser descoberto por meio deles. Segundo Bardin (2002), as fases da análise são fundamentais para a compreensão e interpretação dos dados. Na pré-análise, há uma organização inicial do material, onde as intuições iniciais são sistematizadas para estabelecer um esquema claro de procedimentos subsequentes. Posteriormente, durante a exploração do material, ocorre uma administração meticulosa das decisões tomadas na fase anterior, seguindo um plano previamente definido. Por fim, no tratamento dos resultados, inferência e interpretação, o analista utiliza os dados obtidos de forma significativa e confiável para propor inferências e avançar nas interpretações em relação aos objetivos propostos, além de considerar outras descobertas que possam surgir durante todo o processo de análise. Essas fases são cruciais para garantir a consistência e a validade dos resultados alcançados.

A partir da questão da pesquisa, do referencial teórico e da leitura preliminar dos dados, foi elaborado um quadro de categorias, Quadro 1, para analisar e classificar as informações coletadas durante as oficinas. O quadro é dividido em três categorias de análise. Primeiramente, na seção I, o objetivo é observar o domínio conceitual, segundo Vergnaud, do estudante. Esta seção possui três itens: o item I.1 verifica a apropriação dos conceitos do campo conceitual da divisão, o invariante (I); o item I.2 examina os sentidos (S) atribuídos aos conceitos, através do uso de materiais concretos, como bolinhas, escala Cuisenaire, dinheirinho falso e conversor de medidas; e o item I.3 verifica a representação simbólica (R) através de falas, símbolos matemáticos, palavras, escritos, dentre outras representações.

Na seção II, verifica-se o domínio de habilidades numéricas e é dividida em cinco itens: o item II.1 observa a habilidade de realização de cálculos mentais; o item II.2 verifica se o estudante possui conhecimento de decomposição em somas; o item II.3 observa o domínio de subtrações; no item II.4 inspeciona-se a fluência em multiplicações e o domínio da tabuada; e, finalmente, no II.5, é contemplada a habilidade de divisão.

Por fim, na seção III, observa-se o domínio do algoritmo, dividido em 4 itens: o item III.1 refere-se ao conhecimento dos termos e posições do algoritmo; o item III.2 observa se houve facilidade na divisão entre divisor inteiro e dividendo inteiro sem que haja resto, ou seja, divisões exatas entre números inteiros positivos; no item III.3 demonstra-se aptidão na divisão entre números inteiros positivos, porém com resto, subdividido entre III.3.a onde o quociente é um número inteiro positivo e III.3.b onde o quociente é fracionário escrito na forma decimal, exigindo o uso adequado da vírgula; e por último, o item III.4, dividido em III.4.a que consiste na destreza da divisão entre um dividendo fracionário escrito na forma decimal por um divisor inteiro positivo e o III.4.b que verifica a maestria em divisões entre números racionais, entre dividendo e divisor fracionários escritos na forma decimal.

Quadro 1 - Quadro de categorias de análise

<table>
<tr><td rowspan="3">I – Domínio conceitual</td><td colspan="2">I.1 - Conceito: Invariante (I)</td></tr>
<tr><td colspan="2">I.2 - Sentido: utilização de materiais concretos (S)
(dinheiro, medidas, bolinhas, Cuisenaire, ...)</td></tr>
<tr><td colspan="2">I.3 - Representação Simbólica: fala, desenhos, palavras, símbolos matemáticos (R)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">II – Domínio de habilidades numéricas</td><td colspan="2">II.1 - Cálculo mental</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.2 - Decomposição em somas</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.3 - Subtrações</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.4 - Multiplicações (Tabuada)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.5 - Divisões</td></tr>
<tr><td rowspan="4">III – Domínio do algoritmo</td><td colspan="2">III.1 - Conhecimento dos termos/posições</td></tr>
<tr><td colspan="2">III.2 - Inteiro por inteiro sem resto</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.3 - Inteiro por inteiro com resto:</td><td>III.3.a - quociente inteiro.</td></tr>
<tr><td>III.3.b - quociente fracionário.</td></tr>
</table>

	III.4 - Divisão entre números fracionários:	III.4.a - fracionário por inteiro
		III.4.b - fracionário por fracionário.

Fonte: autor (2023).

O item I, do Quadro 1, se refere ao domínio conceitual, onde consta a definição do tripé de Vergnaud. Para isso a análise é feita constando se o estudante contempla em: I.1 o domínio conceitual, que corresponde ao invariante; I.2 se houve sentido com o uso de materiais concretos, os quais foram utilizados bolinhas e cestos, a escala Cuisenaire, dinheirinho falso e a tabela de conversão de medidas; e em I.3 verifica qual a representação utilizada, se foi fala, escrita, símbolo, cálculo. Já no item II, é feita a verificação do domínio de habilidades numéricas, abrangendo as categorias: II.1 refere-se aos cálculos mentais, onde não foi necessário a escrita do algoritmo para desenvolver a divisão; II.2 trata-se da decomposição em somas, separando centenas, dezenas e unidades; II.3 verifica-se se o estudante consegue resolver subtrações; II.4 trata-se da fluência em multiplicações e no domínio da tabuada; e II.5 se refere a resolução de divisões em si.

Já no item III, é observada mais precisamente a aplicação da divisão em casos isolados: em III.1 verifica-se se há conhecimento dos termos e posições no algoritmo da divisão, qual é o dividendo, o divisor, o quociente e o resto; em III.2 trata-se da divisão entre dois números inteiros, onde não há resto; em III.3 verifica-se divisão entre dois números inteiros, sendo o sub-item III.3.a sobre divisão com quociente inteiro, havendo resto e III.3.b com quociente fracionário, com o uso da vírgula, podendo haver ou não o resto; e em III.4 verifica-se a divisão entre números fracionários, sendo III.4.a divisão onde o dividendo é fracionário e o divisor é um número inteiro e III.4.b divisão onde ambos, dividendo e divisor são números fracionários.

5 ANÁLISE DA FORMAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO

Nesta seção, é apresentada a análise dos registros obtidos com a aplicação das atividades de ensino, na forma de oficinas.

5.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES SOBRE A OPERAÇÃO DIVISÃO

Para a análise, foram consideradas as situações que surgiram ao longo das oficinas, registradas conforme o APÊNDICE A, e analisadas com base nas categorias do Quadro 1. A análise traz alguns questionamentos da oficina, relatados a seguir, agrupando respostas parecidas e detalhando observações necessárias, acerca de resultados espontâneos e curiosos registrados. É fundamental reconhecer também o papel da linguagem natural, tanto verbal quanto escrita, na comunicação do pensamento dos alunos, sempre colocando à disposição a linguagem correta e termos matemáticos[3].

5.1.1 Análise da sondagem

O primeiro encontro cumpriu a função de uma sondagem e trouxe várias respostas importantes, que tornaram possível caracterizar os estudantes, já trazendo noções iniciais do domínio dos conceitos, de como raciocinam e se posicionam. Os outros encontros transcorreram da mesma maneira, os alunos já compreendendo como proceder, seguindo instruções e em cada oficina avançando na construção do significado da operação divisão como um todo, conforme traz o mapa conceitual da Figura 1.

Na sequência apresenta-se as seis questões do questionário de sondagem e a análise das respostas dos alunos.

Questão 1. O que você entende por dividir um número por outro?

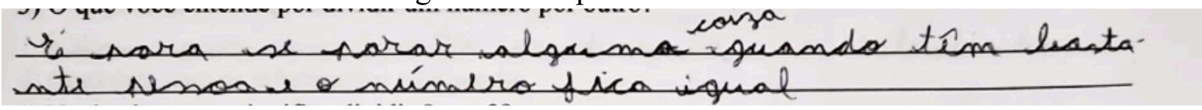
Todos os estudantes responderam de maneira semelhante, demonstrando o domínio dos itens I.1 e I.3 da Tabela 1. O aluno A4 respondeu: *dividir em partes iguais de uma forma*

---

[3] Alguns termos foram adaptados para melhor abordagem durante as oficinas, recorrendo a expressões informais, porém sempre havendo propriedade e correspondência com a linguagem matemática.

justa[4], demonstrando questões éticas de que uma divisão é justa quando as partes resultantes são equivalentes, do contrário, não seria justo. O aluno B1 respondeu conforme ilustra a Figura 2, expressando a quantidade de *coisa*, sendo algo que pode ser dividido, atribuindo o sentido da categoria I.2, pois expressa as partes da divisão: alguma coisa é o dividendo, o número de pessoas é o divisor e o número que fica igual é o quociente, descrito através de uma linguagem informal e interpretação própria.

Figura 2 – Resposta do aluno B1.



Fonte: autor (2023).

Questão 2. Você sabe o que significa dividir 8 por 2?

Todos os alunos responderam de maneira semelhante, demonstrando o domínio dos itens I.1, I.2, I.3 e II.1. Os alunos A1, B2, B3 e B4, de forma genérica, responderam que resulta em 4. Os alunos A2, A3 e A4 exemplificaram a situação, através de 8 objetos distribuídos entre duas pessoas, onde resulta em 4 para cada uma. O aluno B1 respondeu com símbolos matemáticos, evidenciando a compreensão do item III.1.

Questão 3. Para que serve a operação divisão?

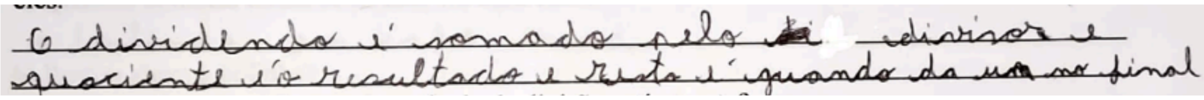
Os alunos A1, A3 responderam de maneira genérica que serve para dividir coisas ou números. Já os alunos A2 e A4 não responderam. Os alunos B1, B3 e B4 responderam que serve para dividir algo em partes iguais, novamente surgindo a ideia do justo. Vergnaud diz que os conceitos são formados durante a vida do sujeito, não são formados exclusivamente na escola. O conceito de justo aqui apresentado vem de casa, onde provavelmente ao haver a necessidade de dividir algo, isso deve ser de forma justa, resultando em partes iguais. O papel da escola é aprofundar esses conhecimentos prévios com linguagem própria e conceitos bem definidos.

[4] As manifestações dos alunos, sejam escritas ou faladas, estão nesse texto em itálico.

Questão 4. Se você conhece os termos: dividendo, divisor, quociente e resto, escreva o que você sabe sobre eles.

Nesse questionamento, 50% dos alunos responderam que não conheciam, sendo necessário a mediação do pesquisador, nomeando e mostrando o significado concreto de cada termo. Posteriormente à explicação, os alunos compreenderam. Os outros 50% responderam através de um exemplo do algoritmo, com setas indicando as posições e descrição, onde o dividendo, ao ser dividido pelo divisor, resulta em determinado quociente e resto. Nesse caso, os alunos B2, B3 e B4 representaram simbolicamente, contemplando os itens I.3 e III.1. Já o aluno B2 demonstrou conhecimento sobre os termos, porém com alguns equívocos, conforme mostra a Figura 3, não conseguindo se expressar com coerência.

Figura 3 – Resposta do aluno B2.


O dividendo é somado pelo divisor e quociente é o resultado e resto é quando da um no final

Fonte: autor (2023).

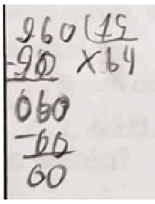
Questão 5. Como podemos verificar se o resultado da divisão está correto?

Do total de alunos, 37,5% deixou a resposta em branco, 25% respondeu *corrigindo a conta*, apenas 25% respondeu o esperado que seria *fazendo a prova real*. Um dos estudantes respondeu que *é quando o final dá [da] conta da zero*, não demonstrando compreensão sobre o que significa o resultado da divisão estar correto ou não. Provavelmente confundiu com cálculos exatos, onde o resto é zero.

Questão 6. i) Você tem dificuldade para fazer uma divisão?
ii) Monte e resolva os cálculos.

O aluno A1 respondeu que não tem muita dificuldade, porém somente conseguiu efetuar corretamente um dos seis cálculos propostos, demonstrou que sabe montar a conta, mas não sabe calcular, sendo falho o item II.4 e não possui o domínio do algoritmo. O aluno A2 também não domina o algoritmo. Mostrou os itens II.4 e III.1, porém houve equívoco no item III.3.b, onde ao invés da vírgula, foi colocado zero no quociente, ocasionando um resultado confuso. Assim, é evidente que não conseguiu abstrair o sentido do quociente, I.2. Os alunos A3 e A4 responderam *mais ou menos* à questão de possuir dificuldade, em seus cálculos demonstraram os itens II.4, II.5, III.2 e III.3.a, não contemplando o item III.2.b, bem como há a ausência do item I.2, pois o algoritmo flui quando se entende o que se está fazendo, o que não ocorreu, já que havia alguns equívocos. O aluno B1 respondeu que não possuía dificuldade, já que bastava saber a tabuada, porém apresentou resultados desconexos, apenas realizando a metade dos cálculos corretamente. Já o aluno B2, que respondeu que possuía dificuldade em alguns casos, conseguiu contemplar os itens I.2, II.4, II.5, III.2, III.3.a e III.3.b, inclusive, no item I.3 apresentou uma representação curiosa, conforme ilustra a Figura 4. Percebe-se que o estudante utilizou uma notação própria ao incluir o símbolo da operação multiplicação (o símbolo de multiplicação), abaixo da chave, na frente do quociente, possivelmente lembrando que o quociente deve ser multiplicado pelo divisor.

Figura 4 – Notação do aluno B2



Fonte: autor (2023).

Os dois últimos alunos, B3 e B4, responderam que possuíam dificuldades em alguns casos, porém em geral não, e realizaram os cálculos corretamente, demonstrando os itens I.2, I.3, II.4, II.5, III.2, III.3.a, porém escreveram que não lembraram como utilizar a vírgula, expressando a ausência do item III.3.b.

Com a sondagem pode-se observar que: aproximadamente 12,5% dos estudantes apresentaram pouco ou nenhum domínio do algoritmo; 62,5% dos alunos apresentaram possuir domínio, porém sem atribuição de significado da divisão; e 25% dos alunos apresentaram domínio e atribuição de significado da divisão. Esses dados contribuem como uma visão geral do conhecimento dos alunos.

5.1.2 Análise das situações de ensino e aprendizagem

O propósito das atividades da oficina é fazer a transição do uso de materiais concretos ou didáticos para o cálculo mental ou no papel. Segundo Borges (2018), o material didático, os processos indutivos e a generalização desempenham papéis importantes nesse contexto. O material didático, seja concreto ou pictórico, tem a função de atribuir sentido e significado, porém, sem a reflexão sobre o observado, isso não necessariamente conduz à conceptualização ou aprendizagem. Os dados e fatos fornecidos pela manipulação do material são casos particulares de operações que levam à indução de regras, como teoremas em ação e proposições. Quando os resultados confirmam a regra para vários casos, ocorre a generalização e a respectiva representação simbólica. Embora esse procedimento envolva principalmente a verificação empírica das proposições, também constitui uma forma de argumentação. Conforme bem menciona Lorenzato, "convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que essa efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental" (2009, p. 21). É relevante compreender, como salientado por Borges (2018), que a matemática não se resume apenas à memória, embora esta desempenhe um papel importante. Isso é um dos principais motivos que levaram à criação da oficina, cujo objetivo é observar o pensamento dos estudantes, auxiliar na construção de conceitos e no desenvolvimento do conhecimento sobre a divisão. Além disso, a oficina apresenta uma variedade de exercícios que priorizam o raciocínio e a abstração, os quais também envolvem aspectos relacionados à memória.

Na primeira etapa, foram distribuídos cestos e bolinhas aos estudantes. O intuito dessa atividade é verificar como os alunos compreendem o algoritmo da divisão através de material concreto. As bolinhas consistem no dividendo e os cestos são o divisor, sendo o quociente a quantidade de bolinhas distribuídas de acordo com os cestos. Essa atividade traz a ideia de divisão por partição, cujo propósito é compreender que a quantidade de bolinhas será distribuída tantas vezes, conforme a quantidade de cestos, gerando o resultado. Nesta etapa, houve boa interpretação por parte dos estudantes, que compreenderam bem como prosseguir. A seguir, será apresentada a análise de algumas questões.

Questão 1. Utilizando apenas duas caixas, divida as 20 bolinhas fazendo com que cada caixa fique com a mesma quantidade de bolinhas.

a) Quantas bolinhas foram colocadas em cada caixa?

b) Restou alguma bolinha?

c) Podemos concluir que essa divisão é exata?

d) Complete com as informações e responda: dividendo__ divisor __ quociente __ resto __

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

Ao ler as instruções, os estudantes já separaram a quantidade de caixas e bolinhas, de acordo com o enunciado, sem dificuldades. Nas respostas, pode-se analisar que todos os estudantes contemplaram o item I, descrito no Quadro 1 apresentaram os itens II.1, III.1 e III.2, mesmo com algumas escritas diferentes. Os alunos da escola A, no item c da atividade escreveram que $2 \times 10 = 20$, demonstrando com essa representação o item II.4, compreendendo que dois cestos, cada um com dez bolinhas, resultam nas vinte bolinhas totais. Nesta atividade descobriu-se que os estudantes da escola A não tinham conhecimento das posições no algoritmo da divisão e após a explicação compreenderam a atividade.

Questão 2. Utilizando três caixas, divida as 20 bolinhas fazendo com que cada caixa fique com a mesma quantidade de bolinhas.
a) Quantas bolinhas foram colocadas em cada caixa?
b) Restou alguma bolinha?
c) Podemos concluir que essa divisão é exata?
d) Complete com as informações e responda: dividendo__ divisor __ quociente __ resto __
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

A segunda questão, já apresentava a ideia de divisão com resto, com isso os estudantes distribuíram vinte bolinhas nos três sextos e perceberam que restaram duas. Todos os alunos contemplaram os itens I.1, I.2, I.3, II.1, III.1 e III.3.a, conforme esperado. Os alunos da escola A, além de descrever a relação dos números e suas posições no algoritmo, apresentaram novamente a representação $3 \times 6 + 2 = 20$, compreendendo não só com palavras, mas na linguagem algébrica, o funcionamento do algoritmo da divisão. Os alunos da escola B, ao ler o enunciado, antes mesmo de distribuir as bolinhas, perceberam que haveria resto. O aluno B4 ao se deparar com a instrução mencionou que, *se botar 6 fica 18, mas se colocar 7 fica 21*, com isso o aluno B2 completou não dá exato, vai sobrar, assim concordando que seriam seis bolinhas em cada sexto e restariam duas.

Questão 5. O que é uma divisão exata?

Na questão 5 todos os estudantes responderam de acordo com o esperado, havendo respostas tais como *quando não sobra*, *quando o resto é zero*, *quando divide em partes iguais e não tem resto*, mostrando que os estudantes têm o domínio conceitual, itens I.1 e I.2.

Questão 6. Agora, sem utilizar as bolinhas e as caixas, efetue a divisão 207 através do algoritmo e indique as posições dos números (dividendo, divisor, quociente e resto).
Questão 7. Efetue as divisões:

Nas questões 6 e 7 todos os estudantes apresentaram as respostas esperadas, realizando o algoritmo através do dispositivo prático, descrevendo cada cálculo em forma de equação e compreendendo as posições de cada número, contemplando os itens 1.1, I.2, I.3, II.1, II.3, II.4, II.5, III.2 e III.3.a.

Na segunda etapa, o material utilizado foi a Escala Cuisenaire. Apesar de ambas as escolas possuírem o material, os estudantes nunca haviam utilizado esse material. Inicialmente foi introduzida a escala, explicando seu uso para que fosse possível solucionar as atividades propostas. O uso desse material aborda a ideia de divisão por quotas, onde determinada quantidade cabe em outra tantas vezes. No caso, foi explicado que se forma o valor do dividendo e utilizando a barrinha correspondente a quantidade do divisor, completa-se o comprimento do dividendo.

Questão 1. $20 \div 5$
a) Quais e quantas barrinhas você utilizou para formar o 20?
b) Quantas barrinhas de 5 unidades cabem no comprimento 20?
c) Qual é o resultado da divisão?
d) Essa divisão é exata? Por que?
e) Complete com as informações e responda: dividendo__ divisor __ quociente __ resto __
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

Nessa atividade, todos os estudantes responderam conforme o esperado, apresentando os itens I.1, I.2 e I.3. Os alunos da escola A, ao serem questionados se a divisão era exata, mantiveram a escrita $4 \times 5 = 20$, demonstrando o item II.4, já os alunos B2, B3 e B4 responderam que a divisão estava exata porque não faltaram nem sobraram barrinhas, ou seja, para a quantidade 20, quatro barrinhas de cinco unidades foram necessárias e suficientes.

Questão 3. $25 \div 8$

a) Quais e quantas barrinhas você utilizou para formar o 25?

b) Quantas barrinhas de 5 unidades cabem no comprimento 25?

c) Qual é o resultado da divisão?

d) Essa divisão é exata? Por que?

e) Complete com as informações e responda: dividendo__ divisor __ quociente __ resto __
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

Os estudantes perceberam prontamente que iria faltar uma unidade, conforme o esperado. Os alunos da escola A responderam que *o comprimento não deu certo* ou *o comprimento não deu exato*, e durante a atividade o aluno A4 pegou uma barrinha de uma unidade, preencheu o comprimento e disse *ah, então é por isso que sobra um, dá bem certinho um quadradinho*, sendo tal observação interessante, pois a aluna percebeu visualmente o funcionamento do resto. Foram contemplados os itens I.1, I.2, I.3, II.1 e III.3.a.

Questão 4. É possível montar a divisão $625 \div 25$ utilizando a escala Cuisenaire. Explique.

Questão 5. O que podemos concluir sobre divisões com números maiores e o uso da escala Cuisenaire?

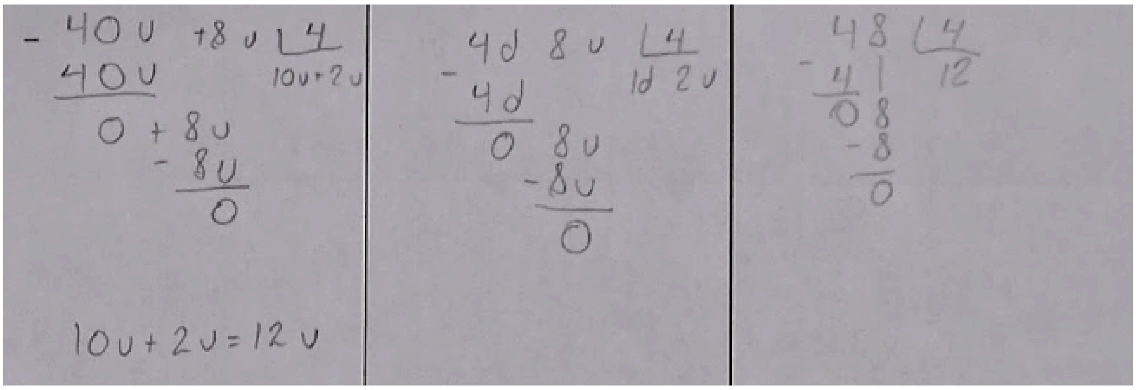
O intuito dessas questões era fazer com que os estudantes compreendessem que o material concreto é limitado, podendo utilizar-se dele até determinados momentos, posteriormente sendo necessário outros meios de cálculo, pois o material não supria grandes quantidades. Todos os estudantes compreenderam essa situação e, mesmo com variações nas respostas, concluíram que não haveria peças suficientes, nem espaço, para montar números tão grandes, e que seria mais prático utilizar o algoritmo, contemplando os itens I.1, I.2 e I.3.

Na terceira etapa, o intuito inicial era demonstrar as duas ideias de divisão propostas por Vergnaud, a divisão por partição e a divisão por quotas, demonstrando através da decomposição de números em somas de acordo com seus valores posicionais. Utilizando a decomposição é possível perceber como funciona o dispositivo prático da divisão e gera uma compreensão direta, pois o entendimento das concepções da divisão leva a solidificação do algoritmo, a justificativa de como ele procede. As concepções são a ideia de quantos cabem e a ideia de medida e é unindo a essência delas que se difunde o algoritmo. Ao compreender essas significações o estudante entende o que está realizando ao aplicar o algoritmo da divisão, hipoteticamente. Quando o estudante apenas decora o algoritmo, acaba criando lacunas quando se depara com determinadas situações, pois não houve a construção do significado, o que geram dúvidas e equívocos, incluindo a possibilidade de esquecer-se como proceder ao se deparar com um cálculo que exige divisão. Com isso, foi feita a relação entre as concepções e a aplicação do algoritmo através do dispositivo prático.

O algoritmo é formado por dois meios:

1) Ideia de partição (unidade): por exemplo, 48 ÷ 4, decompõe-se em 40 unidades mais 8 unidades e verifica-se quantas vezes o 4 cabe no 40 unidades mais 8 unidades, que resulta em 10 unidades mais 2 unidades, ou seja, 12 unidades, conforme apresentada na Figura 5. Novamente, de acordo com os valores posicionais, pode-se escrever o 48 como 4 dezenas e 8 unidades, que dividido em 4 forma 1 dezena e 2 unidades, e finalmente chega-se à conclusão de que 48 dividido por 4 resulta em 12 pelo processo rápido.

Figura 5 – Resposta do aluno B4.



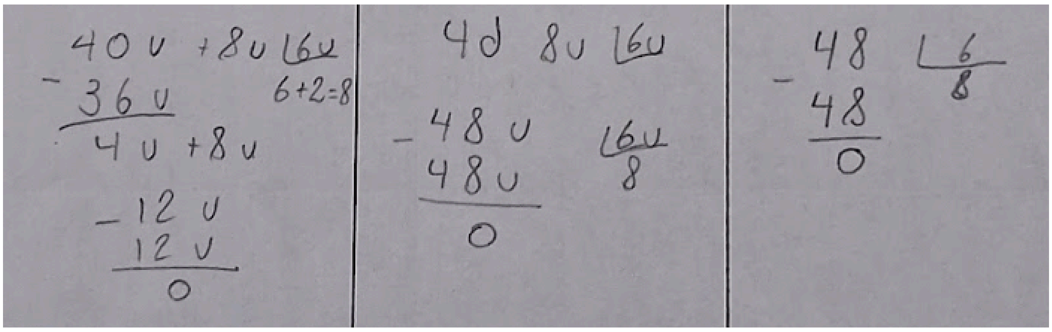
Fonte: autor (2023).

Vergnaud, baseado em Piaget, traz que são os esquemas, através de caminhos diferentes, que levam ao que se quer. Como foi feito nessa atividade, através de três representações diferentes, primeiro com a ideia de separar em unidades pela decomposição em somas, depois a partir dos valores posicionais unidade, dezena e centena, enfim chegando ao algoritmo em si. Percebe-se, que as três representações estão intrinsecamente ligadas, pois a partir da primeira forma-se a segunda e a partir da segunda, chega-se no que se deseja. A segunda representação é mais próxima ao algoritmo, colocando 4d (4 dezenas) corresponde às

40 unidades, sendo uma notação simbólica mais sofisticada e precisa, e o resultado é imediato. A terceira representação já é uma simbologia sem precisar indicar as posições dos algarismos, com linguagem formal mais sofisticada, usando a ideia do posicionamento, onde escreve-se da direita para a esquerda já havendo a internalização do significado e aperfeiçoamento da representação simbólica. Houve uma evolução de linguagem e aperfeiçoamento nas formas de representação, conforme Vergnaud aborda. Há significado ao que se está fazendo, pois cada representação possui linguagem diferente, partindo de um cálculo detalhado ao prático, ambos apresentando o invariante.

2) ideia de quotas (medida): por exemplo, 48 ÷ 6, pode ser decomposto em somas obtendo-se 40 unidades mais 8 unidades, que ao ser dividido por 6 unidades, resulta em 8, ou seja, seis unidades cabem oito vezes nas 48 unidades, apresentado na Figura 6. Aperfeiçoando a escrita, pode-se escrever como 4 dezenas mais 8 unidades, porém quando dividido por 6 há necessidade de utilizar 48 unidades, pois 4 dezenas não dá pra dividir exatamente pelo 6. Finaliza-se como 48 dividido por 6 que resulta em 8.

Figura 6 – Resposta do aluno B4.



Fonte: autor (2023).

Também utilizando as diferentes representações e esquemas, propostos por Vergnaud, tem-se o aperfeiçoamento do cálculo escrito na forma de medida, realizando a divisão como quotas. Nessa atividade, ainda, é explícito como funciona quando o primeiro algarismo não é divisível e é menor que o divisor, sendo necessário utilizar ambos os algarismos, um dos motivos de dificuldade dos estudantes em sala de aula.

Entre as duas concepções de divisão, houve variação do significado, pois um abordava em forma de partição e outro em quotas, porém, ambos levaram a construção do dispositivo prático da divisão e a atribuição do sentido acerca do algoritmo. A partir de uma linguagem detalhada é possível compreender como ocorre a construção da representação com poucas informações, porém suficiente para calcular de forma prática uma conta que exige divisão. Nessa etapa, todos os estudantes apresentaram os itens I.1, I.2, I.3, II.2, II.3, II.4, II.5 e III.3.a.

Ao se deparar com o cálculo $48 \div 6$, onde o 48 foi decomposto em 40 unidades mais 8 unidades, o aluno A2 fez a seguinte observação: *40 unidades não têm na tabuada do 6, mas tem o 36*", sugerindo reorganizar a soma, ao invés de $40 + 8$ coonsiderar $36 + 12$ que estaria contemplado na tabuada do 6, fato curioso, contemplando os itens II.1 e II.2. Como realizar essa troca não traria a atribuição do sentido proposto nessa etapa, explicou-se aos estudantes que seria prático para realizar cálculos mentais, porém não era o intuito do momento.

Em um dos exercícios, o aluno A3 explicou ao aluno A1 como deveria realizar o cálculo $306 \div 34$: *primeiro pega o 3 e vê que é menor que o 34, daí tem que usar o 30, mas também não dá, daí tem que usar todo o 306, testa o 34 por vezes e vê quanto dá*. Pôde-se perceber, ao longo da atividade, que o aluno A1 possuía limitações nos itens II.3 e II.4, o que comprometeu o item II.3, sendo assim o aluno A3 auxiliou, já que apresentou domínio das habilidades numéricas presentes nos itens II.2, II.3, II.4 e, finalmente, II.5. Na mesma atividade, o estudante B3, ao se deparar com a decomposição em somas afirmou que *só que desse jeito é mais complicado, pois se usar o 9 daria certinho*, apresentando já a compreensão do algoritmo rápido, item II.5.

A partir da questão 3 desta etapa, todos os estudantes concordaram que decompor tornava a conta extensa e mais complicada, já que os dividendos ficavam cada vez maiores em relação aos exercícios anteriores. Com isso, concordou-se que houve compreensão do significado da divisão e a partir de então foi possível apenas realizar o algoritmo em seu processo prático, já que houve internalização do que se queria. Em toda essa etapa, os estudantes, com auxílio, conseguiram contemplar os itens I.1, I.2, I.3, II.1, II.2, II.3, II.4, II.5 e III.2.

Na quarta etapa utilizou-se como material dinheirinho falso, pois é um instrumento que os alunos possuem conhecimento visto que já lidam com o sistema monetário. Primeiramente foram feitas seis questões sobre as correspondências entre moedas e notas de dinheiro, as quais foram prontamente respondidas pelos estudantes. A questão 7 traz a ideia de divisão entre números inteiros positivos, porém com resultado um número fracionário.

Questão 7. Dividindo $R\$5,00$ para 2 pessoas, quanto cada uma receberá? (por extenso)

a) Qual é o resultado da divisão? (em números)

b) Essa divisão é exata? Por que?
c) Complete com as informações e responda: dividendo__ divisor __ quociente __ resto __
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

Todos os estudantes responderam conforme o esperado, primeiro verificando o resultado por extenso, depois a escrita numérica, abrangendo as diferentes representações e confirmando se eles compreendem a leitura e escrita decimal, com isso, houve a contemplação dos itens I.2, I.3, II.1, III.1 e III.3.b. O aluno B4 demonstrou compreender o item III.3.b. e I.1, pois na resposta da questão b respondeu que *sim, não sobrou nada, porém seu quociente não é um número inteiro*, sendo a única resposta com esse nível de compreensão.

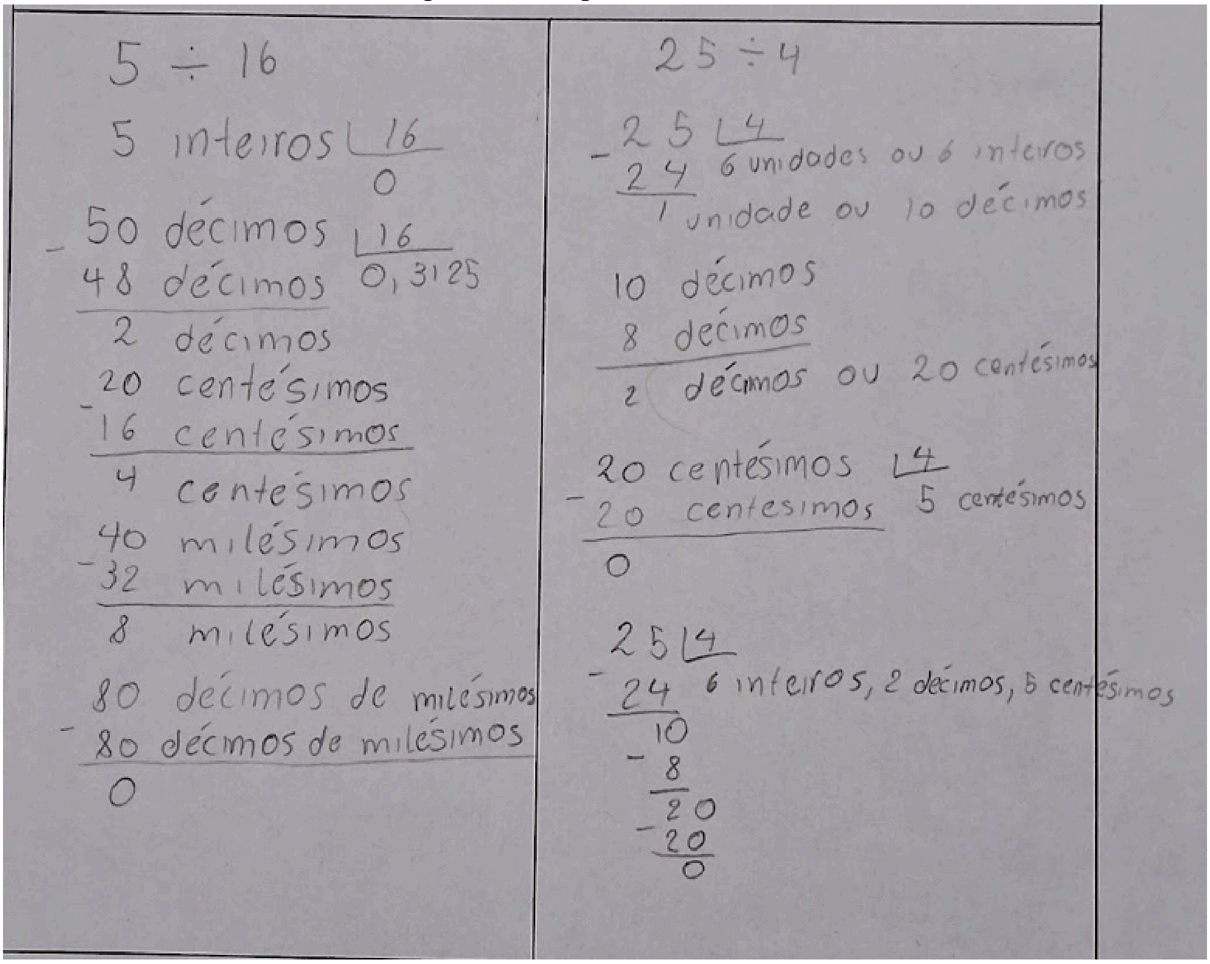
Questão 10. Dividindo $R\$8,00$ para 3 pessoas, quanto cada uma receberá? (por extenso)
a) Qual é o resultado da divisão? (em números)
b) Essa divisão é exata? Por que?
c) Complete com as informações e responda: dividendo__ divisor __ quociente __ resto __
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

Na questão 10 o quociente resultava em um número racional, mais precisamente em uma dízima periódica, com isso, surgiram algumas respostas interessantes para a questão b, como *não, pois sobrou e não deu resultado exatamente igual para todos* ou *não, porque uma pessoa receberá um valor diferente*, ou ainda *não, pois ela é infinita*, demonstrando a compreensão quando ocorre o item III.3.b.

Na quinta etapa da oficina, a temática determinada foi conversão de medidas, assim visando compreender como ocorre o processo de converter um número decimal em valores inteiros para finalmente poder dividir. Na escola A, os estudantes relataram que não haviam aprendido as conversões de unidade de medida, sendo necessário realizar toda a explicação para dar continuidade ao proposto. Após explicação, não houve mais dificuldades na realização dos cálculos. Os alunos demonstraram aptidão nos itens II.4 e II.5. Os alunos da escola A realizaram as divisões, porém mantendo o resto, contemplando o item III.3.a, já os alunos da escola B acrescentaram a vírgula e prosseguiram a conta até que possível, demonstrando o item III.3.b.

A sexta etapa focou na aplicação do algoritmo em si e na compreensão dos estudantes sobre tudo o que foi feito durante a oficina. Inicialmente, o cálculo de divisão entre números inteiros positivos foi feito detalhadamente, verificando cada algarismo que procede as casas decimais, visando aprimorar o conhecimento sobre o item III.3.b, descrevendo cada posição e convertendo conforme necessário, como mostrado na Figura 7. Nessa etapa, os alunos da escola A questionaram como continuar um cálculo com o uso da vírgula, pois estavam com dúvidas em como funcionava o acréscimo do zero para proceder o cálculo.

Figura 7 – Resposta do aluno B4



Fonte: autor (2023).

O questionário final consistia em algumas questões da sondagem e outros exercícios para verificar se houve avanço em algumas dúvidas ou lacunas que haviam no início.

1) O que é dividir algo?

2) O que é a operação divisão?

3) Para que serve a operação divisão?

4) O que é algoritmo?

5) Quais operações aparecem no algoritmo da divisão?

6) Você ainda tem dificuldade no uso do algoritmo da divisão?

7) Essa oficina agregou na sua aprendizagem sobre a operação divisão?

5.1.3 Análise do questionário final

O aluno A1, aluno com maior dificuldade ao longo das atividades, necessitou ajuda várias vezes e em alguns cálculos não soube finalizar. No questionário final apresentou respostas vagas, exemplificou o que é uma divisão, porém não soube explicar o que é a operação, deixando a questão 2, do questionário final, em branco. Na questão 3, respondeu "*para contas grandes"*. Na questão 4 respondeu *o número*. No item 4, respondeu *mais, menos e vezes*. Ainda, respondeu que não possui tanta dificuldade e que aprendeu *bastante coisa legal* durante as oficinas. Com isso, percebe-se que não houve evolução significativa do domínio conceitual da divisão em sua totalidade. Houve carência de atribuição de sentido (item I.2), dificuldades com habilidades numéricas (itens II.4 e II.5) e, consequentemente, falta de domínio do algoritmo.

Os alunos A2, A3, A4, B1, B2, B3 e B4 demonstraram domínio conceitual, com respostas claras e objetivas, contemplando todo o item I da análise, pois compreenderam o conceito, o algoritmo e apenas responderam que possuíam dificuldade em algumas contas. Também apresentaram bom rendimento e domínio do algoritmo, contemplando os itens II e III. Inclusive, relataram que a oficina ajudou a lembrar conceitos ou sanar dúvidas que havia sobre a operação. Com isso, 12,5% dos estudantes apresentaram melhora no domínio do algoritmo, porém sem atribuição de significado e 87,5% apresentaram domínio do algoritmo com atribuição de significado.

Durante as atividades, em geral, pode-se perceber que havia alunos mais lentos na realização dos cálculos, alguns necessitavam de afirmação para prosseguir com os cálculos. Outros, por sua vez, realizavam com maior rapidez, alguns acabaram sendo afobados, o que resultava em vários errinhos de cálculos básicos. Alguns estudantes escreviam respostas curtas, outros tentavam detalhar mais, alguns participavam ativamente e expunham seus pensamentos, enquanto outros realizavam a atividade em silêncio. É relevante compreender, como salientado por Borges (2018), que a matemática não se resume apenas à memória, embora esta desempenhe um papel importante. Isso é um dos principais motivos que levaram à criação da oficina, cujo objetivo é observar o pensamento dos estudantes, auxiliar na construção de conceitos e no desenvolvimento do conhecimento sobre a divisão. Além disso, a oficina apresentou uma variedade de exercícios que priorizam o raciocínio e a abstração, os quais também envolvem aspectos relacionados à memória. No entanto, com as condições de observação utilizadas na pesquisa, percebe-se que as oficinas propiciaram a consciência de sentido, significado e representação simbólica dos conceitos da divisão, e com isso, melhorou o entendimento do algoritmo. Porém, pode não ter sido suficiente para melhorar o desempenho da execução do algoritmo para alguns alunos.

As diferentes representações, como traz Vergnaud (2017), proporcionam uma compreensão da operação, permitindo atribuir significado ao que está sendo realizado, enquanto delineiam a diversidade de casos e o funcionamento subjacente. Essa variedade de representações, como ilustradas por Duval (2012), engloba desde figuras geométricas até fórmulas algébricas, cada uma exibindo sistemas semióticos distintos. Embora muitas vezes sejam vistas apenas como ferramentas de comunicação, essas representações desempenham papéis cruciais além disso.

Elas são fundamentais tanto no desenvolvimento das representações mentais, que dependem da interiorização dessas representações semióticas, quanto na realização de diversas funções cognitivas, como a objetivação e o tratamento de informações. Além disso, as representações semióticas desempenham um papel central na produção de conhecimento, permitindo diferentes visões de um mesmo objeto e contribuindo para o avanço das ciências por meio do desenvolvimento de sistemas semióticos mais complexos, ampliando assim a atividade cognitiva do pensamento.

As diferentes representações propostas por Vergnaud e Duval abrangem uma variedade de formas de expressão matemática que visam facilitar a compreensão e o aprendizado dos conceitos. Por exemplo, Vergnaud propõe a representação em campos conceituais, que envolve diferentes maneiras de abordar um conceito matemático, como operações aritméticas, geometria ou álgebra, permitindo aos alunos explorarem esses conceitos sob diferentes perspectivas. Por outro lado, Duval enfatiza a importância das representações semióticas, incluindo não apenas símbolos matemáticos, mas também figuras geométricas, gráficos e linguagem natural, que desempenham papéis cruciais no desenvolvimento das representações mentais e na compreensão dos conceitos matemáticos. Ambas as abordagens visam enriquecer a compreensão dos alunos e promover uma aprendizagem mais profunda e significativa da matemática, este sendo o intuito das diferentes representações abordadas através das oficinas. Ora, se o estudante compreendeu a apropriação de conceitos de diferentes maneiras, então ele enfim compreendeu os procedimentos e símbolos, bem como as nomenclaturas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da constatação das dificuldades dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental para executarem o algoritmo da divisão, e as reflexões propostas pela pesquisa, é possível considerar que:

1. A análise dos dados revelou que a aquisição dos conceitos e habilidades no processo de aprendizagem da divisão é influenciada por uma série de fatores, incluindo a abordagem pedagógica, a compreensão do campo conceitual do algoritmo, a qualidade das interações em sala de aula e a capacidade de os alunos perceberem a matemática como um campo acessível e significativo.
2. É possível que na escola A, alguns conceitos não foram explorados ou abordados, por alunos que faltaram parte dos encontros. Afinal, a participação das oficinas era voluntária. Além disso, a participação em si, não garante a aprendizagem conceitual. Não se mudam hábitos de aprendizagem, como a memorização-repetição, com apenas algumas aulas, mesmo que ocorram interações com colegas e professor e oportunidades de construção de conceitos. Essa observação, leva a afirmar que, apesar do empenho e vivências pedagógicas propostas, não houve a devida apropriação do tripé SIR (sentido-invariante-representação) de Vergnaud, relativamente aos conceitos envolvidos no algoritmo da divisão, por alguns alunos.
3. Para os alunos que melhoraram seu desempenho com o algoritmo da divisão, no período das oficinas, pode-se considerar, ao menos, duas possibilidades: (a) a prática do algoritmo fez com que lembrassem os procedimentos; e/ou (b) as atividades proporcionaram a atribuição de sentido, significado e respectivas representações dos conceitos e esquemas, envolvidos no campo conceitual do algoritmo da divisão. Na primeira alternativa, predomina a simples memorização de processos e uso dos símbolos mecanicamente. Esta é uma forma de aprender um algoritmo. De modo geral, ela é necessária para desenvolver a habilidade de aplicá-lo. Na segunda alternativa, ao entender os conceitos da divisão, como cotas ou medida, os alunos saberiam explicar porque se pergunta: Quantas vezes o divisor cabe no dividendo? Ou ainda, conhecendo a estrutura da numeração decimal, explicar, porque coloca-se o zero e a vírgula no quociente, quando o dividendo é menor que o divisor.

Entendendo que uma das funções da escola é a socialização do conhecimento científico, poderia-se inferir que o importante, no caso do ensino da divisão, seria desenvolver a capacidade de executar o algoritmo. Ou seja, dada uma divisão, chegar a um resultado confiável. Essa tarefa é executada, mais rápida e precisamente, pelas calculadoras disponíveis em celulares. Nesta opção, porém, não há raciocínio matemático algum. Também pode-se questionar, porque ensinar os significados de algoritmos, sendo que a eficiência desses já foi demonstrada e são facilmente executados? O aprofundamento dessa questão e a ampliação de experimentos pedagógicos sobre como resolver as dificuldades de alunos com o algoritmo da divisão, são objetos interessantes de pesquisa, para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Marlene Pires; DAMÁZIO, Ademir. Apropriação das significações do conceito de divisão de números racionais. **Educação Matemática**, [s. l], v. 0, n. 19, p. 1-19, jan. 2007. Disponível em: http://30reuniao.anped.org.br/trabalhos/GT19-3564--Int.pdf. Acesso em: 14 maio 2023.

BARDIN, Laurence. (2002). **Análise de Conteúdo** (L. A. R. e. Pinheiro, Trad.). Edições 70.

BESSA, Sônia; COSTA, Váldina Gonçalves da. Apropriação do Conceito de Divisão por meio de Intervenção Pedagógica com Metodologias Ativas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 33, n. 63, p. 155-176, abr. 2019. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a08. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/xVwsrLfgZZQCXJZgTcCn8Rc/?lang=pt. Acesso em: 02 maio 2023.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 336 p.
IEZZI, Gelson *et al*. Matemática ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2016. 384 p.

BORGES, Pedro Augusto Pereira. **Atividades de ensino de frações**: construção de conceitos e algoritmos. 2018. Disponível em: https://www.uffs.edu.br/institucional/pro-reitorias/pesquisa-e-pos-graduacao/pesquisa/grupos_de_pesquisa/grupo-de-pesquisa-em-tic-matematica-e-educacao-matematica/produção. Acesso em 12 dez. 2022.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951. 318 p. Disponível em: https://im.ufrj.br/~nedir/disciplinas-Pagina/Caraca_ConceitosFundamentais.pdf. Acesso em: 20 set. 2023.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David Willian; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. Na Vida Dez; na Escola Zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. **Caderno de Pesquisa**, São Paulo, v. 0, n. 42, p. 79-86, ago. 1982. Disponível em: https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/1552/1551. Acesso em: 14 maio 2023.

COURANT, Richard.; ROBBINS, Herbert. **What Is Mathematics?**: An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2.ed. Oxford, 1981. Disponível em: https://doi.org/10.1093/oso/9780195105193.003.0001. Acesso em: 14 maio 2023.

CUNHA, Marcia Borin da *et al*. **Active Methodologies**: in Search of a Characterization and Definition. In SciELO Preprints, 2022. https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.3885. Disponível em: https://preprints.scielo.org/index.php/scielo/preprint/view/3885/version/4110. Acesso em: 12 abr. 2024.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento: revista eletrônica de educação matemática. **Revemat**, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 37-64, 13 dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 10 dez. 2023.

FERNANDES, José António; LEITE, Laurinda. Compreensão do Conceito de Razão por Futuros Educadores e Professores dos Primeiros Anos de Escolaridade. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 29, n. 51, p. 241-262, abr. 2015. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a13. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/f4VmF6xg3cFmfKLTbnS6Ycz/?lang=pt. Acesso em: 14 maio 2023.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. **Coleção formação de professores**, 2012.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática, ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2016. 384 p.

KAMII, Constance. Os efeitos nocivos do ensino precoce dos algoritmos. Trad. Marta Rabióglio. In: MANTOVANI DE ASSIS (org.) **Jogar e Aprender Matemática**. São Paulo. Book Editora, 2010. p. 39-48.

LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 178 p.

MELO, Carlos Ian Bezerra de; OLIVEIRA, João Luzeilton de. O algoritmo da divisão na formação inicial do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, ed. 25, n. 3, p. 344-372, 10 mar. 2023.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, [S. L.], v. 7, n. 1, p. 7-29, jan. 2002. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf. Acesso em: 02 maio 2023.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997. 246 p. Tradução de Sandra Costa.

PEREIRA, Tania Michel; DREWS, Sonia Beatriz Telles; JAGMIN, Angela Susana; BORGES, Pedro Augusto Pereira (org.). **Matemática nas Séries Iniciais**. 2. ed. Ijuí: Unijuí, 1989. 78 p.

PIAGET, Jean. **Psicologia e Pedagogia**. 6. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2010. 172 p. Tradução de DIRCEU ACCIOLY LINDOSO e ROSA MARIA RIBEIRO DA SILVA. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4082168/mod_resource/content/1/Psicologia%20e%20Pedagogia_Piaget.pdf. Acesso em: 02 maio 2023.

PLAISANCE, Eric; VERGNAUD, Gerard. **As Ciências da Educação**. São Paulo: Loyola, 2003. 147 p. ISBN 8515025043. Revisão Maurício Balthazar Leal.

RIBEIRO, Miguel et al. Conhecimento Especializado do Professor que Ensina Matemática para Atribuir Sentido à Divisão e ao Algoritmo. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 19, p. 152-167, jul. 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/326494024_CONHECIMENTO_ESPECIALIZADO_DO_PROFESSOR_QUE_ENSINA_MATEMATICA_PARA_ATRIBUIR_SENTIDO_A_DIVISAO_E_AO_ALGORITMO_Mathematics_Teachers'_Specialized_Knowledge_in_Giving_Sense_to_Division_and_its_Algorithm. Acesso em: 02 maio 2023.

RIBEIRO, Miguel; CARRILLO, José. Discussing a Teacher MKT and its Role on Teacher Practice When Exploring Data Analysis. **Proceedings Of The 35Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education**, Ankara, Turkey, v. 4, p. 41-48, jan. 2011. Behiye Ubuz ed.. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258960370_Discussing_a_teacher_MKT_and_its_role_on_teacher_practice_when_exploring_data_analysis. Acesso em: 02 maio 2023.

SFARD, Anna. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies In Mathematics**, [S.L.], v. 22, n. 1, p. 1-36, fev. 1991. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/bf00302715. Disponível em: https://im.ufrj.br/~nedir/disciplinas-Pagina/Caraca_ConceitosFundamentais.pdf. Acesso em: 14 dez. 2023.

SHULMAN, Lee. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, New York, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986. Disponível em: https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf. Acesso em: 14 maio 2023.

SILVA, João Alberto da *et al*. Estratégias e procedimentos de crianças do ciclo de alfabetização frente à situações-problema que envolvem multiplicação e divisão. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 4, p. 740-776, 20 dez. 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/18819. Acesso em: 02 maio 2023.

UTIMURA, Grace Zaggia; CURI, Edda. Indícios de aprendizagens de alunos de 4º ano sobre os números racionais envolvendo o significado quociente. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.L.], v. 23, n. 1, p. 632-654, 11 abr. 2021. Pontifical Catholic University of Sao Paulo (PUC-SP). http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p632-654. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/53198. Acesso em: 02 maio 2023.

VERGNAUD, Gerard. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas. 1991.

VERGNAUD, Gerard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas.: um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, [S. L.], v. 5, n. 1, p. 75-90, jan. 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/handle/10400.12/2150. Acesso em: 13 dez. 2023.

VERGNAUD, Gerard; MOREIRA, Marco Antônio. **O que é aprender?**: o iceberg da conceptualização. teoria dos campos conceituais.. Porto Alegre: Geempa, 2017. 124 p. (9788598022628). Organização Esther Pillar Grossi.

ZATTI, Fernanda; AGRANIONIH, Neila Tonin; ENRICONE, Jacqueline Raquel Bianchi. Aprendizagem Matemática: desvendando dificuldades de cálculos dos alunos. **Perspectiva**, Erechim, v. 34, n. 128, p. 115-132, dez. 2010. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/site/pdfs/perspectiva/128_142.pdf. Acesso em: 14 maio 2023. file:///home/chronos/u-c11400b5bf0ab7ddf2eaeeb635054a3517ba92c7/MyFiles/Downloads/darsand,+CI%C3%8ANCIAS+HUMANAS+-+268+a+288.pdf

APÊNDICE A – Oficina disponibilizada aos estudantes

OFICINA DE MATEMÁTICA SOBRE A OPERAÇÃO DIVISÃO

PROF. ANDRESSA BOSA

Questionário inicial

Data: __/__/__

Nome: ____

Responda o questionário:

1) Em que ano você está?

____

2) Você gosta de matemática? Por que?

____

____

3) O que você entende por dividir um número por outro?

____

____

4) Você sabe o que significa dividir 8 por 2?

____

____

5) Para que serve a operação divisão?

____

____

6) Se você conhece os termos: dividendo, divisor, quociente e resto, escreva o que você sabe sobre eles.

____

____

7) Como podemos verificar se o resultado da divisão está correto?

____

____

8) Você tem dificuldade para fazer uma divisão?

____

____

9) Monte e resolva os cálculos abaixo:

$24 \div 4$	$960 \div 15$	$603 \div 3$	$3600 \div 6$	$94 \div 5$	$240 \div 19$

Primeira etapa: divisão em partes

Para esta etapa iremos utilizar 6 caixas e 20 bolinhas. Faça o que se pede e responda aos questionamentos:

1) Utilizando apenas duas caixas, divida as 20 bolinhas fazendo com que cada caixa fique com a mesma quantidade de bolinhas.
a) Quantas bolinhas foram colocadas em cada caixa?

____

b) Restou alguma bolinha?

____

c) Podemos concluir que essa divisão é exata?

____

d) Complete com as informações e responda:
dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

2) Utilizando três caixas, divida as 20 bolinhas fazendo com que cada caixa fique com a mesma quantidade de bolinhas.
a) Quantas bolinhas foram colocadas em cada caixa?

____

b) Restou alguma bolinha?

____

c) Podemos concluir que essa divisão é exata?

____

d) Complete com as informações e responda:
dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____
Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

3) Utilizando quatro caixas, divida as 20 bolinhas fazendo com que cada caixa fique com a mesma quantidade de bolinhas.
a) Quantas bolinhas foram colocadas em cada caixa?

____

b) Restou alguma bolinha?

____

c) Podemos concluir que essa divisão é exata?

____

d) Complete com as informações e responda:
dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

4) Utilizando seis caixas, divida as 20 bolinhas fazendo com que cada caixa fique com a mesma quantidade de bolinhas.

a) Quantas bolinhas foram colocadas em cada caixa?

____

b) Restou alguma bolinha?

____

c) Podemos concluir que essa divisão é exata?

____

d) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

5) O que é divisão exata?

____

____

6) Agora, sem utilizar as bolinhas e as caixas, efetue a divisão $20 \div 7$ através do algoritmo e indique as posições dos números (dividendo, divisor, quociente e resto).

7) Efetue as divisões:

$16 \div 2 =$	$10 \div 5 =$	$12 \div 4 =$	$15 \div 7 =$
$19 \div 3 =$	$26 \div 8 =$	$14 \div 6 =$	$27 \div 9 =$

Segunda etapa: divisão por quotas

A escala cuisenaire é um material criado pelo professor belga George Cuisenaire Hottelet (1891-1980), composto por barras coloridas, onde cada cor e tamanho corresponde a uma quantidade, conforme apresentado na tabela 1.

Tabela 1: cores e a quantidade correspondente na escala cuisenaire.

COR	QUANTIDADE (UNIDADE)
BRANCA	1
VERMELHA	2
VERDE-CLARO	3
LILÁS OU ROSA	4
AMARELA	5
VERDE-ESCURO	6
PRETA	7
MARROM	8
AZUL	9
LARANJA	10

Fonte: autora (2023).

Para realizar divisões utilizando a escala, primeiramente precisamos sempre iniciar separando as barrinhas que representam as maiores quantidades de acordo com o dividendo e então comparar quantas barrinhas da quantidade do divisor cabem no dividendo.

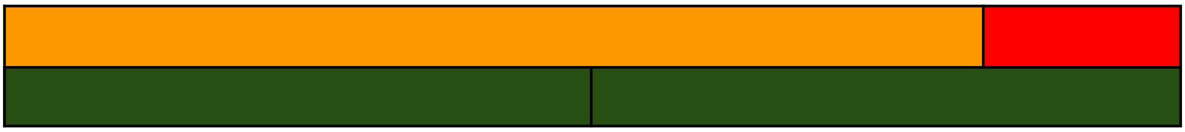
Por exemplo, ao efetuar $10 \div 2$, utilizaremos uma barrinha laranja que corresponde ao comprimento 10 unidades, que é o dividendo:

Então, utilizando barrinhas vermelhas de comprimento 2 unidades, tamanho correspondente ao divisor, temos que cabem 5 barrinhas de comprimento 2 unidades na barrinha de comprimento 10:

Com isso, descobrimos que $10 \div 2 = 5$, já que cabem 5 peças de 2 unidades no comprimento 10 unidades.

Outro exemplo, ao efetuar a divisão $12 \div 6$, é necessário formar o número 12 através das maiores barrinhas, nesse caso, uma barra de 10, na cor laranja, mais uma barra de 2, de cor vermelha, veja:

Então, utilizando a barra correspondente a quantidade do divisor, no caso a verde-escuro, completaremos o comprimento formado pelo número 12, observe:



Com isso, descobrimos que $12 \div 6 = 2$, já que cabem 2 peças de 6 unidades no comprimento formado por 12 unidades.

Com o uso das barrinhas da escala Cuisenaire, faça as divisões:

1) $20 \div 5$

a) Quais e quantas barrinhas você utilizou para formar o 20?

b) Quantas barrinhas de 5 unidades cabem no comprimento 20?

c) Qual é o resultado da divisão?

d) Essa divisão é exata? Por que?

e) Complete com as informações e responda:

dividendo: ______ divisor: ______ quociente: ______ resto: ______

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

2) $18 \div 2$

a) Quais e quantas barrinhas você utilizou para formar o 18?

b) Quantas barrinhas de 2 unidades cabem no comprimento 18?

c) Qual é o resultado da divisão?

---

d) Essa divisão é exata? Por que?

---

e) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

---

3) $25 \div 8$
a) Quais e quantas barrinhas você utilizou para formar o 25?

---

b) Quantas barrinhas de 8 unidades cabem no comprimento 25?

---

c) Qual é o resultado da divisão?

---

d) Essa divisão é exata? Por que?

---

e) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

---

4) É possível montar a divisão $625 \div 25$ utilizando a escala Cuisenaire? Explique.

---

5) O que podemos concluir sobre divisões com números maiores e o uso da escala Cuisenaire?

Terceira etapa: compreensão do algoritmo através do dispositivo prático

Divisão por partição

a) $48 \div 4$

b) $32 \div 2$

Divisão por quotas

a) $48 \div 6$

b) $56 \div 5$

1) Monte e efetue os cálculos: (divisão exata com um algarismo no divisor)
Exemplo:

$30 \div 5 =$	$48 \div 6 =$	$146 \div 2 =$	$448 \div 4 =$

2) Monte e efetue os cálculos: (divisão exata com dois algarismos no divisor)

$150 \div 25 =$	$306 \div 34 =$	$1300 \div 20 =$	$972 \div 18 =$

3) Monte e efetue os cálculos: (divisão exata que necessita descer o próximo algarismo, acrescentar zero no quociente)

$1208 \div 4 =$	$12024 \div 6 =$	$1635 \div 15 =$	$7248 \div 12 =$

4) Monte e efetue os cálculos: (divisão exata que "sobram zeros" no dividendo)

$1260 \div 6 =$	$2800 \div 14 =$	$54900 \div 9 =$	$24300 \div 27 =$

5) Monte e efetue os cálculos: (divisão com resto com um algarismo no divisor)

$26 \div 7 =$	$56 \div 9 =$	$549 \div 6 =$	$4659 \div 5 =$

6) Monte e efetue os cálculos: (divisão com resto com dois algarismos no divisor)

$246 \div 14 =$	$549 \div 31 =$	$1246 \div 54 =$	$4923 \div 10 =$

Quarta etapa: divisão com resto através do sistema monetário brasileiro

Utilizando as notas e moedas do sistema monetário brasileiro, o Real, podemos fazer diversas combinações de valores. Lembre-se das notas e moedas existentes:

Responda às questões a seguir utilizando notas e moedas de dinheirinho de brinquedo:

1) Quantas moedas de $R\$1,00$ cabem em uma nota de $R\$5,00$? (descreva)

___

2) Quantas notas de $R\$10,00$ cabem em uma nota de $R\$50,00$? (descreva)

___

3) Quantas notas de $R\$2,00$ cabem em uma nota de $R\$20,00$? (descreva)

___

4) Como podemos formar $R\$1,00$ utilizando outras moedas? (descreva duas formas diferentes)

___

5) Como podemos formar $R\$10,00$ utilizando outras notas? (descreva duas formas diferentes)

___

6) Como podemos formar $R\$2,00$ utilizando moedas? (descreva duas formas diferentes)

___

7) Dividindo $R\$5,00$ para 2 pessoas, quanto cada uma receberá? (por extenso)

___

a) Qual é o resultado da divisão? (em números)

___

b) Essa divisão é exata? Por que?

___

c) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

___

___

8) Dividindo $R\$14,00$ para 4 pessoas, quanto cada uma receberá?(por extenso)

____

a) Qual é o resultado da divisão? (em números)

____

b) Essa divisão é exata? Por que?

____

c) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

9) Dividindo $R\$21,00$ para 2 pessoas, quanto cada uma receberá? (por extenso)

____

a) Qual é o resultado da divisão? (em números)

____

b) Essa divisão é exata? Por que?

____

c) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

10) Dividindo $R\$8,00$ para 3 pessoas, quanto cada uma receberá? (por extenso)

____

a) Qual é o resultado da divisão? (em números)

____

b) Essa divisão é exata? Por que?

____

c) Complete com as informações e responda:

dividendo: _____ divisor: _____ quociente: _____ resto: _____

Qual é a relação desses números em suas respectivas posições no algoritmo da divisão?

____

____

Quinta etapa: divisão entre números decimais (igualando as casas decimais)

Para efetuar a divisão onde o dividendo ou divisor ou ambos sejam números Racionais escritos na forma decimal finita, primeiramente é necessário igualar a quantidade de casas decimais, para isso usa-se a multiplicação por 10. Nesta etapa iremos utilizar a conversão entre medidas de comprimento apresentadas abaixo:

Exemplo 1: Dividendo e divisor decimal.
Vamos dividir 3,6 m por 0,12 m, tabelando podemos compreender.

m	dm	cm	mm		m	dm	cm	mm	
3,	6	0		$\times$ 10	0,	1	2		$\times$ 10
3	6,	0		$\times$ 10	0	1,	2		$\times$ 10
3	6	0,	0		0	1	2,	0	

Ou ainda,
3m,6dm : 0m,1dm2cm (x10)
36dm : 1dm,2cm (x10)
360cm : 12cm
E basta dividir 360 por 12 para encontrar o resultado, nesse caso o quociente é 30.

Exemplo 2: Dividendo inteiro e divisor decimal.
Vamos dividir 35 dm por 0,5 dm.

m	dm	cm	mm		m	dm	cm	mm	
3	5,	0		$\times$ 10		0,	5		$\times$ 10
3	5	0,	0			0	5,	0	

Ou ainda:

35dm : 0dm,5cm (x10)
350cm : 5 cm
E, efetuando a divisão 350 por 5, resulta no quociente 70.

Exemplo 3: dividendo decimal e divisor inteiro.
Vamos dividir 7,4 cm por 2cm.

dm	cm	mm		
	7,	4		$\times\ 10$
	7	4,	0	

dm	cm	mm		
	2,	0		$\times\ 10$
	2	0,	0	

Ou ainda:
7cm,4mm : 2cm (x10)
74mm : 20mm
E, efetuando a divisão 74 por 20, resulta no quociente 3,7.

Efetue as divisões, lembrando de igualar as casas decimais para isto.

$3,6\ \div\ 0,4\ =$	$2,5\ \div\ 0,05\ =$	$360\ \div\ 0,06\ =$	$16,975\ \div\ 0,7\ =$
$48\ \div\ 0,8\ =$	$56\ \div\ 0,07\ =$	$400\ \div\ 0,5\ =$	$144\ \div\ 0,04\ =$

$128,34 \div 9 =$	$112,44 \div 12 =$	$125,34 \div 6 =$	$75,24 \div 11 =$

Sexta etapa: divisão com resto através do algoritmo (acrescentando a vírgula)

Quando a divisão entre números Naturais não for exata, podemos continuar a operação a partir do resto, obtendo um quociente decimal, ou seja, que pertence ao conjunto dos números Racionais. Para isso, colocaremos uma vírgula no quociente e, pode-se então, adicionar um zero ao resto para continuar a divisão.

Processo de divisão detalhado

a) $5 \div 16$	b) $25 \div 4$

Processo prático de divisão

a) $5 \div 16$ b) $25 \div 4$

$20 \div 8 =$	$35 \div 9 =$	$549 \div 6 =$	$4659 \div 5 =$
$120 \div 16 =$	$975 \div 30 =$	$1320 \div 50 =$	$252 \div 40 =$
$246 \div 15 =$	$549 \div 36 =$	$1246 \div 56 =$	$4923 \div 100 =$

Questionário Final

Agora que você estudou um pouco mais sobre a divisão, responda:

1) O que é dividir algo?

2) O que é a operação divisão?

3) Para que serve a operação divisão?

4) O que é algoritmo?

5) Quais operações aparecem no algoritmo da divisão?

6) Você ainda tem dificuldade no uso do algoritmo da divisão?

7) Essa oficina agregou na sua aprendizagem sobre a operação divisão?

8) Efetue as divisões:

$32 \div 4 =$	$1568 \div 98 =$	$3318 \div 21 =$
$560 \div 4 =$	$864 \div 64 =$	$865 \div 8 =$

$4,5 \div 0,5 =$	$18,371 \div 1,35 =$	$1,863 \div 0,6 =$
$1,49 \div 5 =$	$65,4 \div 4 =$	$76,42 \div 2 =$
$72 \div 0,09 =$	$132 \div 0,03 =$	$41 \div 1,64 =$

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - CHAPECÓ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 5/2024 - PROFMAT - CH (10.41.13.10.01)

Nº do Protocolo: 23205.007901/2024-15

Chapecó-SC, 26 de março de 2024.

Defesa de Dissertação do(a) mestrando(a) **Andressa Bosa**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Aos vinte e dois dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e quatro, às quatorze horas, na sala 305 – Bloco C, *Campus* Chapecó-SC, da Universidade Federal da Fronteira Sul, reuniu-se, para defesa da dissertação apresentada por **Andressa Bosa** intitulada: **"Formação do Campo Conceitual do Algoritmo da Divisão: Análise das Dificuldades de Aprendizagem"**, a Banca Examinadora composta pelos(as) professores(as): Prof(ª) Dr(ª). Pedro Augusto Pereira Borges (UFFS), presidente e orientador(a); Prof(ª). Dr(ª). Rosane Rossato Binotto (UFFS), membro interno(a), Prof(ª). Dr(ª). Luiz Henrique Ferraz Pereira (UPF), membro externo(a), como membros titulares; e Prof(ª). Dr(ª). Vitor José Petry (UFFS), membro suplente. O(A) professor(a) Dr(ª). Pedro Augusto Pereira Borges deu por aberta a sessão e logo a seguir passou a palavra ao(a) mestrando(a), para que no intervalo de trinta até cinquenta minutos expusesse seu trabalho. Terminada a exposição, passou-se à arguição da Banca Examinadora. A seguir, a sessão foi suspensa e os examinadores decidiram por **APROVAR** reprovar o trabalho.

Observações:

Fazer os ajustes na dissertação, considerando os apontamentos da banca.

A Banca orienta que no prazo de 45 dias seja entregue a versão final do trabalho de dissertação à Secretaria do PROFMAT. Nestes termos, esta ata segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

(Assinado digitalmente em 26/03/2024 15:51)
PEDRO AUGUSTO PEREIRA BORGES
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
ACAD - CH (10.41.13)
Matrícula: ###085#7

(Assinado digitalmente em 26/03/2024 16:02)
ROSANE ROSSATO BINOTTO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
ACAD - CH (10.41.13)
Matrícula: ###157#1

(Assinado digitalmente em 09/04/2024 10:49)
LUIZ HENRIQUE FERRAZ PEREIRA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.430-##