

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS REALEZA
CURSO DE FÍSICA - LICENCIATURA

Jacob Daniel Daros

**Métodos de inversão de dados acústicos em
poços preenchidos com fluido por integração da
semelhança espectral ao longo da curva de
dispersão**

Realeza

2023

Jacob Daniel Daros

**Métodos de inversão de dados acústicos em poços
preenchidos com fluido por integração da semelhança
espectral ao longo da curva de dispersão**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Física - Licenciatura da Universi-
dade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como
requisito para obtenção do título de Licenci-
ado(a) em Física.

Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Física - Licenciatura

Orientador: Tobias Heimfarth

Realeza

2023

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Daros, Jacob Daniel

Métodos de inversão de dados acústicos em poços preenchidos com fluido por integração da semelhança espectral ao longo da curva de dispersão / Jacob Daniel Daros. -- 2023.

52 f.:il.

Orientador: Dourtor Tobias Heimfarth

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Física, Realeza, PR, 2023.

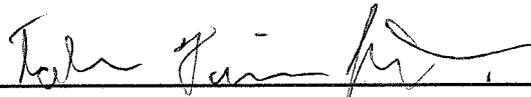
1. Poços preenchidos com fluido. 2. Método de inversão de dados acústicos. I. Heimfarth, Tobias, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Jacob Daniel Daros

**Métodos de inversão de dados acústicos em poços
preenchidos com fluido por integração da semelhança
espectral ao longo da curva de dispersão**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Física - Licenciatura da Universi-
dade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como
requisito para obtenção do título de Licenci-
ado(a) em Física.

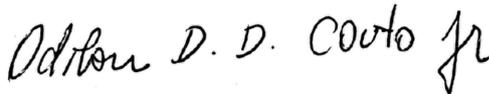
Trabalho aprovado em Realeza, 14 de Dezembro de 2023.



Tobias Heimfarth
Orientador



Clóvis Caetano
Membro titular



**Odilon Divino Damasceno Couto
Júnior**
Membro titular

Eduardo de Almeida
Membro suplente

Realeza
2023

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao meu orientador pelos ensinamentos e paciência.

À UFFS, expresso meu profundo reconhecimento por oferecer um ensino gratuito e de qualidade que foi fundamental para a minha formação.

Aos professores que impactaram significativamente minha jornada, agradeço por sua contribuição, não apenas para minha formação profissional, mas também para o meu crescimento pessoal.

À minha esposa, dedico um agradecimento por sua presença constante em cada experiência vivida e por ser o meu porto seguro em todos os momentos.

Aos meus pais e irmãos, expresso minha gratidão pelo amor e apoio incondicional que têm me proporcionado ao longo de todos esses anos.

“Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.” (René Descartes)

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise comparativa entre diferentes métodos de inversão de dados acústicos em poços preenchidos com fluido para a determinação da velocidade de propagação do modo Stoneley. Inicialmente, definiu-se um modelo acústico fundamentado na solução da equação de onda para meios elásticos lineares. Posteriormente, foram definidos dois métodos iterativos de inversão dos parâmetros do poço utilizando a curva de dispersão do modo Stoneley. No primeiro, utilizado como referência, a qualidade do ajuste foi baseada nas técnicas usuais de curva de máximos da semelhança espectral, enquanto que no segundo esta quantificação foi obtida por uma energia definida como o resultado da integração da curva de dispersão sobre a semelhança espectral. Para a combinação estatística de diferentes disparos foram utilizados e comparados três técnicas diferentes: a média aritmética ponderada, a média geométrica ponderada e a confluência ponderada. Aplicaram-se os métodos em dados experimentais produzidos por uma fonte monopolar em baixas frequências, condições ideais para a excitação do modo Stoneley. Nos dados testados, o método de integração da curva de dispersão sobre a semelhança espectral apresentou melhores resultados. Dentre os diferentes métodos de combinação, a média geométrica ponderada apresentou uma diferença RMS de 278,1 m/s em relação aos valores de referência, valor consideravelmente menor que os 579,1 m/s obtidos pela curva de máximos. Os valores considerados como referência são valores experimentais da velocidade de propagação da onda S coletados por uma ferramenta de dipolo.

Palavras-chave: Poços preenchidos com fluido; modo Stoneley; métodos de inversão.

Abstract

This work presents a comparative analysis of different acoustic data inversion methods in fluid-filled boreholes for determining Stoneley mode propagation velocity. Initially, an acoustic model was defined based on the wave equation solution for linear elastic media. Subsequently, two iterative methods for inverting the borehole parameters were defined, using the Stoneley mode velocity dispersion curve. In the first method, employed as a reference, the quality of fit was based on conventional techniques using the maximum spectral semblance curve, while in the second, this measure was obtained through a defined energy, result of integrating the dispersion curve over the spectral semblance. For the statistical combination of different shots, three different techniques were used and compared: weighted arithmetic mean, weighted geometric mean and weighted conflation. The methods were applied to experimental data generated by a monopole source at low frequencies, ideal conditions for Stoneley mode excitation. In the tested data, the method of integrating the dispersion curve over the spectral semblance yielded results closer to the known accurate ones. Among the different combination methods, the weighted geometric mean showed an RMS difference of 278.1 m/s compared to reference values, significantly lower than the 579.1 m/s obtained by the maximum curve. The reference values were experimental propagation velocity values of the S wave collected by a dipole tool.

Keywords: Borehole; Stoneley mode; Inversion methods.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Ondas em meio elásticos	14
2.1.1	Tensor de deformação	14
2.1.2	Tensor de estresse de Cauchy	14
2.1.3	Lei de Hooke para meios isotrópicos	16
2.1.4	Equações da dinâmica e equação da onda	16
2.2	Solução da equação de onda por meio da decomposição de Helmholtz	16
2.3	Ondas em um poço preenchido com fluido	21
2.3.1	Descrição do sistema	21
2.3.2	Solução cilíndricamente simétrica	22
2.3.3	Solução para o fluido	23
2.3.4	Solução para formação rochosa	24
2.3.5	Solução para a ferramenta	25
2.3.6	Condições de contorno e derivação das equações para modos confinados	26
2.3.6.1	Interface fluido-rocha	26
2.3.6.2	Interface ferramenta-fluido	28
2.3.6.3	Sistema de equações lineares	29
2.4	Métodos de inversão	30
2.4.1	Curvas de dispersão e semelhança espectral	30
2.4.1.1	Ajuste da semelhança espectral	30
2.4.2	Método de múltiplos disparos	31
2.4.3	Métodos de ajuste da curva de dispersão	34
2.4.3.1	Mínimos quadrados	35
2.4.3.2	Recozimento simulado	35
3	MÉTODO DE INVERSÃO POR INTEGRAÇÃO DIRETA DA SEMELHANÇA ESPECTRAL	37
3.1	Limitações do método de ajuste pelos máximos	37
3.2	Definição do método de energia de curva	38
3.3	Combinação das semelhanças espectrais	39
4	APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE INVERSÃO EM DADOS DE CAMPO	40

4.1	Dados de campo	40
4.1.1	Escolha do poço	40
4.1.2	Parâmetros do modelo	41
4.2	Inversão de uma profundidade	42
4.2.1	Processos de inversão	42
4.2.2	Exemplos de profundidades	44
4.3	Ajuste da seção do poço	47
5	CONCLUSÕES	50
	REFERÊNCIAS	51

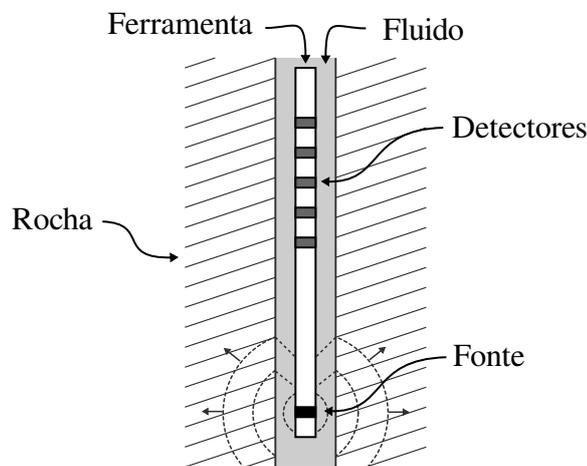
1 Introdução

A utilização de ondas sonoras para a caracterização do solo teve seu surgimento como uma abordagem complementar à sísmica, técnica mais antiga utilizada para correlacionar a propagação de ondas sonoras na rocha com as propriedades do meio. A sísmica consiste na dispersão de fontes e detectores sonoros na superfície, com o propósito de estabelecer uma associação entre reflexões sísmicas individuais e as diversas camadas rochosas presentes no subsolo.

No entanto, à medida que novas ferramentas foram desenvolvidas e um melhor entendimento da física envolvida na propagação dessas ondas foi adquirido, surgiram novas técnicas para a utilização das ondas sonoras, como o caso da perfilagem acústica de poços de exploração, onde se utiliza ondas sonoras produzidas por fontes no interior do poço. Essas técnicas possibilitam a aquisição de informações adicionais de interesse. Isso inclui a medição de parâmetros como porosidade, permeabilidade, litologia, mineralogia, pressão de poro, anisotropia, tipos de fluidos, direção do estresse, presença e alinhamento de fraturas e a qualidade da cimentação, bem como o imageamento de estruturas ao redor do poço (FRANCO et al., 2006; BRIE et al., 2000; SAXENA; KRIEF; ADAM, 2018; DALEN, 2013). Com isso as ondas acústicas passaram a ser utilizadas como um método independente de perfilagem de poços.

Na prática, esse procedimento é realizado por meio de uma ferramenta acústica inserida no interior do poço, conforme ilustrado na Figura 1. Uma fonte localizada na parte inferior da ferramenta emite um pulso sonoro, que também pode ser chamado de tiro, que se propaga pelo fluido, pela formação rochosa e pela própria ferramenta.

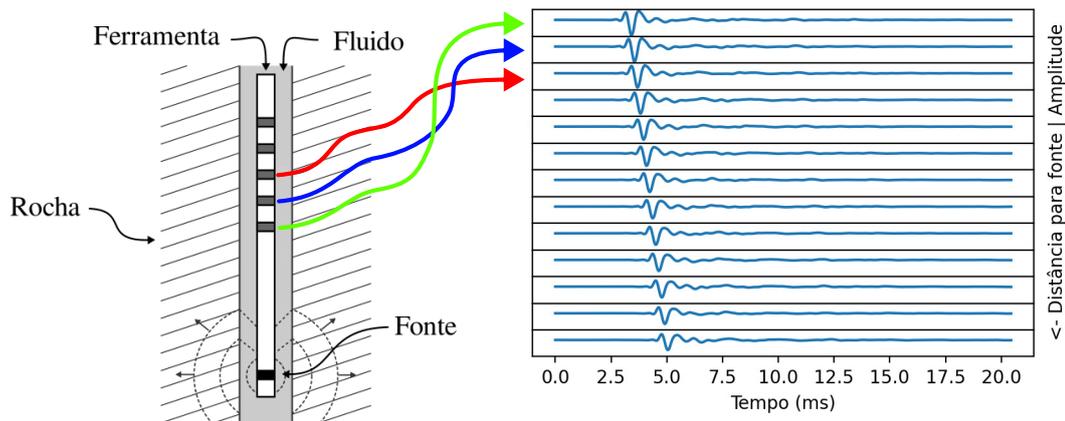
Figura 1 – Caracterização de um poço de perfilagem com a ferramenta acústica.



Fonte: Imagem cedida por Tobias Heimfarth.

As diversas estruturas presentes no sistema impactam a propagação dessa onda, incorporando informações relevantes. A onda modificada é, então, capturada pelos detectores na ferramenta, fornecendo dados detalhados sobre o meio pelo qual se propagou. Esse procedimento de emissão e coleta de dados ocorre ao longo de toda a extensão do poço, gerando grande quantidade de dados. Os dados são coletados como formas de onda para cada detector utilizado, como mostra a [Figura 2](#).

Figura 2 – Formas de onda coletadas em um disparo realizado pela ferramenta de perfilação no interior de um poço preenchido com fluido.

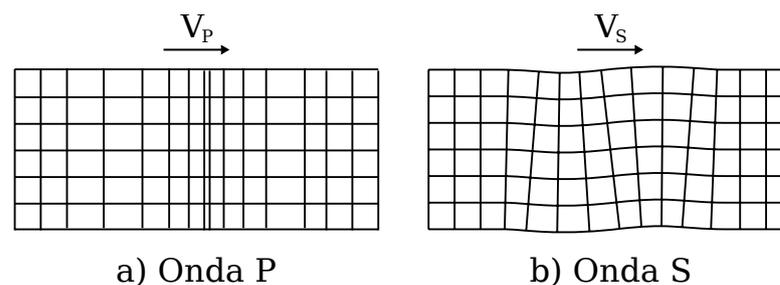


Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada sistema acústico, naturalmente, apresenta modos de propagação, assim como os modos de uma onda que se propaga em uma corda. Esses modos têm propriedades bem definidas, como velocidade e atenuação, que dependem das características do meio de propagação, como densidade e módulos elásticos. No sistema, dois tipos principais de ondas se propagam: ondas de pressão, conhecidas como ondas P, e ondas cisalhantes, denominadas ondas S (do inglês “*Shear waves*”).

As ondas P possuem uma velocidade característica, denominada V_P , e causam deformações volumétricas no meio. Por outro lado, as ondas S têm uma velocidade distinta, chamada V_S , e induzem deformações cisalhantes, como ilustrado na [Figura 3](#).

Figura 3 – Propagação dos modos P e S.



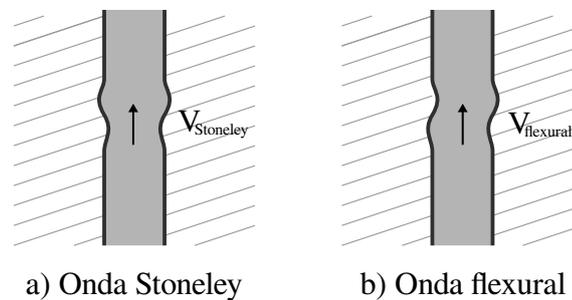
a) Onda P

b) Onda S

Fonte: Imagem cedida por Tobias Heimfarth.

Como se trata de um poço preenchido com fluido de perfuração, a complexidade do sistema aumenta. Como resultado, novos modos confinados surgem na região do poço, tais como os modos flexurais e Stoneley, os quais as velocidades variam conforme a frequência (SAXENA; KRIEF; ADAM, 2018). Esses modos se caracterizam pela propagação guiada e dispersiva, ou seja, eles se propagam com amplitude máxima ao longo da interface entre a rocha e o fluido, com uma diminuição significativa de amplitude à medida que se afastam dessas interfaces, como demonstrado por Stoneley e Baker (1924). Vale destacar que uma ferramenta rígida diminui o raio efetivo do poço, que por sua vez determina as amplitudes relativas dos modos gerados (CHENG; TOKSOZ, 1981). A Figura 4 ilustra a propagação dos modos flexural e Stoneley na interface do poço.

Figura 4 – Propagação do modo flexural e do modo Stoneley na interface do poço.



Fonte: Imagem cedida por Tobias Heimfarth.

Considerando um poço com paredes rígidas e impermeáveis, a onda Stoneley se propaga com velocidade igual à velocidade do som no fluido e é não dispersiva e não atenuante. Por outro lado, em um sólido elástico, a onda Stoneley se torna dispersiva, mas ainda é não atenuante (WINKLER; LIU; JOHNSON, 1989).

Entretanto, quando a parede do poço é permeável, a pressão no poço faz com que o fluido flua para a formação e a velocidade da onda Stoneley diminuí. Como há um fluxo de fluido do poço para formação rochosa, a energia é dissipada e a onda torna-se atenuante (CHENG; JINZHONG; BURNS, 1987; WHITE, 2000). Desse modo, a alteração na velocidade bem como a atenuação das ondas Stoneley podem fornecer informações sobre a permeabilidade da formação rochosa nas regiões de interface do poço (KHAYER et al., 2021).

Neste estudo, o foco está na determinação da velocidade de propagação da onda na interface do poço, sem a necessidade direta de determinar a permeabilidade da formação rochosa. A questão central que permeia a pesquisa é como extrair informações específicas, como a velocidade da onda, a partir dos dados acústicos fornecidos pela ferramenta. Para isso, dois desafios fundamentais orientam esta pesquisa:

1. Estudar um modelo acústico abrangente que leve em consideração todos os elementos relevantes e descreva com precisão a propagação dos modos de interesse no sistema;

2. Empregar um método eficaz para, a partir do modelo acústico, obter a informação desejada, a inversão dos dados.

O segundo desafio compreende uma variedade de técnicas numéricas. Os dados precisam passar por tratamentos que visam reduzir as incertezas experimentais, originadas, por exemplo, pelo ruído nas medidas acústicas, pelas dificuldades de separação do modo de interesse do restante do sinal e pelos desvios nos valores medidos para outros parâmetros do modelo (LI et al., 2015).

Um ponto fundamental no processo de inversão é o ajuste dos dados experimentais obtidos durante a operação de perfilagem. Esses dados experimentais são disponibilizados pela Agência Nacional de Petróleo e Gás Natural (ANP) e são utilizados para representar as condições reais do subsolo. Assim, a inversão permite obter as informações sobre os parâmetros do modelo a partir dos dados experimentais. Neste aspecto, o parâmetro buscado é a velocidade de propagação do modo S na interface do poço, esse parâmetro é determinado e ajustado por diferentes métodos. Por fim, as curvas de dispersão obtidas são comparadas com medidas acústicas coletadas experimentalmente por ferramentas de dipolo, que apresentam maior confiabilidade na obtenção desse modo e, portanto, podem ser utilizadas como referência.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Ondas em meio elásticos

A compreensão aprofundada dos princípios da propagação de ondas no sistema utiliza os conceitos de tensores, mais precisamente tensores de deslocamento e de tensão. Esta seção busca estabelecer uma base sobre o tema, tendo como principal referência o livro *Modern Global Seismology* (LAY; WALLACE, 1995).

2.1.1 Tensor de deformação

A fim de simplificar a compreensão da propagação de ondas acústicas em sólidos, é viável abordá-la sob o contexto de um meio elástico linear. Nesta perspectiva, a amplitude das perturbações torna-se diretamente proporcional às tensões que as originaram. É relevante salientar que, em geral, formações rochosas não obedecem estritamente o comportamento de um meio linear. No entanto, para perturbações de pequena magnitude, é admissível considerar o meio como linear, proporcionando uma significativa simplificação. Uma maneira conveniente de descrever a perturbação no meio consiste na utilização de tensores em termos do campo vetorial de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, assim o tensor de deformação pode ser escrito como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

onde \mathbf{x} representa as coordenadas espaciais e os índices 1,2 e 3 as três direções espaciais.

Observa-se que a deformação responde linearmente às derivadas dos componentes de deslocamento (u_i e u_j). A deformação em um material é caracterizada por alterações no comprimento e distorções angulares. Para serem aplicáveis em um sistema real, as deformações precisam incluir componentes tridimensionais, uma vez que um sólido pode sofrer deformações em todas as direções. As deformações são volumétricas, podendo ser compressivas quando negativas e extensivas quando positivas.

2.1.2 Tensor de estresse de Cauchy

Quando um meio contínuo é submetido a uma força, seja ela interna ou externa, essa influência se propaga por todo o corpo. Em termos mais específicos, ao aplicar uma força a um ponto em um meio contínuo, ocorre uma distribuição de forças ao longo desse corpo. Há dois tipos principais de forças que atuam em um meio contínuo:

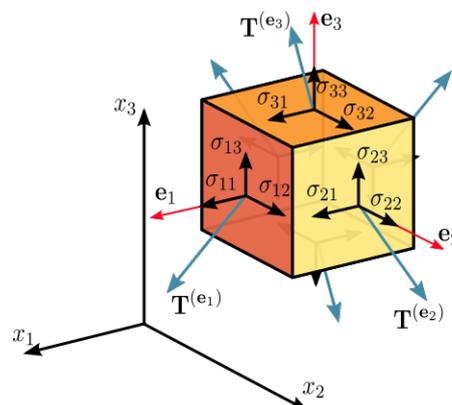
- Forças Volumétricas: essas forças são proporcionais ao volume do material. Elas se distribuem tridimensionalmente ao longo do corpo, afetando cada ponto no interior do material.
- Forças de contato: estas forças são proporcionais à área de contato. Um exemplo é a força de arrasto, que atua na superfície do material em contato com outro meio. Essas forças agem nas interfaces e contornos do material.

Assim, as forças no meio podem ser descritas pelas tensões em cada ponto do material $\mathbf{T}^{(n)}$, definida como força por área aplicada em uma superfície imaginária com vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$. Que pode ser escrita por meio das relações entre as tensões no meio e o tensor de estresse (tensor de Cauchy), σ_{ij} , ou seja,

$$\mathbf{T}_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j. \quad (2.2)$$

Pode-se demonstrar que tanto o tensor de estresse quanto o de deformação são simétricos e com isso restringir de nove para seis componentes independentes. As componentes da tensão em cada face de um cubo e como estas componentes se relacionam com o tensor de Cauchy podem ser visualizadas na [Figura 5](#).

Figura 5 – Componentes de tensão em três dimensões.



Fonte: [Wikipédia \(2021\)](#).

De modo geral, em qualquer material existem relações complexas entre a tensão e a deformação, dependendo de parâmetros como pressão, temperatura, taxa de tensão, histórico de deformação e magnitude da tensão. Para as tensões de pequena magnitude e curta duração, a grande maioria dos materiais exibem uma proporcionalidade linear entre a tensão e a deformação.

2.1.3 Lei de Hooke para meios isotrópicos

A forma mais geral de uma lei constitutiva para elasticidade linear de um meio isotrópico é a Lei de Hooke que pode ser escrita como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3)$$

onde μ e λ são parâmetros do material (parâmetros de Lamé) e δ_{ij} é da delta de Kronecker. μ é chamado de módulo de cisalhamento e mede a resistência de um material ao cisalhamento, sendo, portanto, nulo para fluidos. Já λ não tem uma relação tão direta com os parâmetros físicos do material. Pode-se, entretanto, escrever uma série de outros parâmetros em termos de λ e μ que têm interpretação física direta, como por exemplo a razão de Poisson,

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

que é a razão entre a deformação em uma direção e outra perpendicular quando uma tensão uniaxial é aplicada. Novamente, tomando um fluido como exemplo, $\nu = 0,5$.

2.1.4 Equações da dinâmica e equação da onda

Ao considerar um equilíbrio de forças em um elemento cúbico em um meio contínuo que está sob efeito de forças internas é possível aplicar as leis da dinâmica newtoniana para encontrar a equação do movimento

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i \in 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Combinando a [Equação 2.4](#) com a lei de Hooke ([Equação 2.3](#)) juntamente com a relação entre deslocamento e deformação ([Equação 2.1](#)) pode-se desenvolver uma equação de movimento para um meio elástico linear isotrópico, sem a presença de forças volumétricas, sendo ela:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Embora sua resolução não seja trivial, a mesma pode ser encontrada por meio de diferentes técnicas, entre elas a decomposição de Helmholtz.

2.2 Solução da equação de onda por meio da decomposição de Helmholtz

As soluções da [Equação 2.5](#) quando aplicadas a um conjunto de condições de contorno, fornecem informações sobre as perturbações no sistema. Para encontrar as soluções dessa equação pode-se aplicar a decomposição de Helmholtz, para isso utilizou-se

como principal referência o livro *FUNDAMENTAL SOLUTIONS IN ELASTODYNAMICS* (KAUSEL, 2006), onde a técnica de solução apresentada consiste em decompor o campo vetorial de descolamentos \mathbf{u} em um termo envolvendo um potencial escalar ψ e outro envolvendo um potencial vetorial $\boldsymbol{\xi}$, ou seja,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\psi + \nabla \times \boldsymbol{\xi}. \quad (2.6)$$

Aplicando a decomposição (Equação 2.6) na Equação 2.5

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\psi - \rho \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[\mu\nabla^2\boldsymbol{\xi} - \rho \frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} \right] = 0, \quad (2.7)$$

notavelmente, essa igualdade é satisfeita quando os termos entre colchetes forem nulos. Assim, pode-se escrever duas equações de onda:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

e

$$\nabla^2\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)} \frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

A solução para cada equação é independente da outra, com duas velocidades distintas, mostrando que dois tipos distintos de ondas podem existir no meio, esses dois tipos de onda são os modos P e S, respectivamente, $(V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}})$ e $(V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}})$ (SLAWINSKI, 2011). Uma observação importante sobre esta solução é que embora não exista garantia por este procedimento que se chegará na solução geral, uma vez que impôs o anulamento dos termos de forma independente, isto é verdade para meios lineares isotrópicos que ocupam todo o espaço (LAY; WALLACE, 1995).

Iniciando pela solução da Equação 2.8, o potencial ψ pode ser decomposto em $\psi = \varphi(\mathbf{x})\zeta(t)$. Assim, é possível aplicar o método de resolução por separação de variável para cada componente i

$$\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} = \frac{1}{V_P^2} \frac{\partial^2\zeta}{\zeta \partial t^2}.$$

Logo, pelo método de resolução sabe-se que ambos lados da equação diferencial ordinária (EDO) acima devem ser iguais a uma mesma constante, desse modo, escolhendo $-\kappa_P^2$ para a constante obtém-se

$$(\nabla^2 + \kappa_P^2)\varphi = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) \zeta = 0,$$

onde κ_P é o número de onda do modo P e $\omega = \kappa_P V_P$ é a frequência angular. Esta segunda equação diferencial, da parte temporal, tem a solução simples dada por

$$\zeta(t) = C_1 e^{-i\omega t},$$

onde C_1 é uma constante. Aqui já foi omitido o termo da solução geral proporcional a exponencial positiva, pois, somente a negativa descreverá as ondas de interesse, as quais são as ondas que viajam na direção $+z$.

Analogamente, para a solução da [Equação 2.9](#), onde, o potencial ξ pode ser decomposto em $\xi = \Psi(\mathbf{x})\Psi^*(t)$, tem-se

$$\frac{(\nabla^2 \Psi)_i}{\Psi_i} = \frac{1}{V_S^2} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2},$$

e, escolhendo $-\kappa_S^2$ para a constante, obtém-se

$$(\nabla^2 + \kappa_S^2)\Psi = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)\Psi^* = 0$$

onde, κ_S é o número de onda do modo S . Novamente, a solução da parte temporal é simples e dada por:

$$\Psi^*(t) = C_1 e^{-i\omega t}. \quad (2.11)$$

A equação espacial, pode ainda ser decomposta em duas polarizações, vertical e horizontal, ou seja,

$$\Psi = \Psi_V + \Psi_H, \quad (2.12)$$

trabalhando com a equação vetorial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas ($\Psi = \psi_r \hat{\mathbf{r}} + \psi_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \psi_z \hat{\mathbf{z}}$) e escolhendo o calibre onde $\nabla \cdot \Psi = 0$ (na decomposição de Helmholtz feita na [Equação 2.6](#) existem múltiplos Ψ s que produzem o mesmo campo \mathbf{u} , esta liberdade pode ser utilizada na escolha arbitrária de $\nabla \cdot \Psi$), apenas dois componentes de Ψ são independentes. De fato, pode-se escrever o potencial vetorial em termos de dois potenciais escalares, ϕ e χ ,

$$\begin{aligned} \Psi_H &= \phi \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{k_S^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \Psi_V &= \frac{1}{k_S} \nabla \times (\chi \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

que respeitam a equação de Helmholtz,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + k_S^2 \phi &= 0 \\ \nabla^2 \chi + k_S^2 \chi &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para provar que as relações dadas pela [Equação 2.13](#) e [Equação 2.14](#) descrevem o potencial vetor desejado, é necessário utilizar as identidades de operações vetoriais

$$\nabla \times \nabla f = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0 \quad (2.16)$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{f} \quad (2.17)$$

que são verdadeiras para quaisquer funções escalares e vetoriais. Com o calibre escolhido, $\nabla \cdot \Psi = 0$, tem-se desta última propriedade que

$$\nabla^2 \Psi = -\nabla \times \nabla \times \Psi,$$

assim, utilizando a [Equação 2.10](#),

$$\nabla \times \nabla \times \Psi = k_S^2 \Psi,$$

onde, separando Ψ nas componentes horizontal e vertical dada por [Equação 2.12](#) chega-se em

$$\nabla \times \nabla \times (\Psi_V + \Psi_H) = k_S^2 (\Psi_V + \Psi_H),$$

que também pode ser escrito como,

$$\nabla \times \nabla \times \Psi_V - k_S^2 \Psi_V = k_S^2 \Psi_H - \nabla \times \nabla \times \Psi_H, \quad (2.18)$$

como ficará claro nos próximos passos, ambos lados desta igualdade devem ser 0, pois os componentes do lado esquerdo são na direção z e os componentes do lado direito são perpendiculares a z , sendo possível escrever

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \Psi_V - k_S^2 \Psi_V &= 0 \\ \nabla \times \nabla \times \Psi_H - k_S^2 \Psi_H &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Assim, tomando-se o rotacional de Ψ_H dado pela [Equação 2.13](#) obtém-se

$$\nabla \times \Psi_H = \nabla \times (\phi \hat{\mathbf{z}}) + \frac{1}{k_S^2} \nabla \times \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right),$$

onde pode-se aplicar a identidade de operação vetorial [Equação 2.15](#),

$$\nabla \times \Psi_H = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Aplicando-se novamente o rotacional

$$\nabla \times \nabla \times \Psi_H = \nabla \times \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right],$$

que pode também ser escrito como,

$$\nabla \times \nabla \times \Psi_H = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \nabla^2 \phi \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.20)$$

Como Ψ_H deve satisfazer a relação $\nabla \times \nabla \times \Psi = k_S^2 \Psi$,

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \nabla^2 \phi \hat{z} = k_S^2 \left[\phi \hat{z} + \frac{1}{k_S^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]. \quad (2.21)$$

Por fim, basta realizar a distributiva de k_S^2 e simplificar para encontrar a relação que descreve o potencial vetor partindo de Ψ_H ,

$$\nabla^2 \phi + k_S^2 \phi = 0.$$

Analogamente para Ψ_V têm-se que

$$\nabla \times \Psi_V = \frac{1}{k_S} \left[\nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - \nabla^2 \chi \hat{z} \right], \quad (2.22)$$

aplicando o rotacional na [Equação 2.22](#), encontra-se

$$k_S \nabla \times \nabla \times \Psi_V = \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - \nabla^2 \chi \hat{z} \right], \quad (2.23)$$

ao simplificar obtém-se

$$k_S \nabla \times \nabla \times \Psi_V = \nabla \times \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - \nabla \times (\nabla^2 \chi \hat{z}),$$

onde, da identidade presente na [Equação 2.15](#) o primeiro termo é anulado e, portanto, resta

$$k_S \nabla \times \nabla \times \Psi_V = -\nabla \times (\nabla^2 \chi \hat{z}). \quad (2.24)$$

Do mesmo modo, a relação $\nabla \times \nabla \times \Psi = k_S^2 \Psi$ pode ser aplicada na [Equação 2.24](#),

$$-\frac{1}{k_S} \left[\nabla \times (\nabla^2 \chi \hat{z}) \right] = k_S^2 \left[\frac{1}{k_S} \nabla \times (\chi \hat{z}) \right],$$

ou seja,

$$\nabla \times \left[(\nabla^2 \chi + k_S^2 \chi) \hat{z} \right] = 0, \quad (2.25)$$

que é verdadeira quando $\nabla^2 \chi + k_S^2 \chi = 0$. Sendo assim, as soluções fornecidas realmente satisfazem a equação vetorial de Helmholtz. Agora, é possível substituir [Equação 2.20](#) e a [Equação 2.24](#) na [Equação 2.19](#) e verificar que ambos lados são iguais 0, pois a [Equação 2.20](#) aponta na direção z e a [Equação 2.24](#) aponta na direção perpendicular a z .

Para verificar se a condição de calibre é satisfeita, deve-se substituir a [Equação 2.13](#) na [Equação 2.12](#) e então aplicar o divergente,

$$\nabla \cdot \Psi = \nabla \cdot \left[(\phi \hat{z}) + \frac{1}{k_S^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{k_S} \nabla \times (\chi \hat{z}) \right],$$

realizando a distributiva percebe-se que a identidade dada pela [Equação 2.16](#) permite que o terceiro termo seja anulado. Assim, é possível reorganizar a [Equação 2.20](#) e substituir no segundo termo para obter

$$\nabla \cdot \Psi = \nabla \cdot (\phi \hat{z}) + \frac{1}{k_S^2} \nabla \cdot \left[\nabla \times \nabla \times (\phi \hat{z}) + \nabla^2 \phi \hat{z} \right],$$

novamente é possível aplicar a identidade dada pela [Equação 2.16](#) e substituir $\nabla^2(\phi\hat{\mathbf{z}})$ de acordo com a [Equação 2.14](#) chega-se em

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \Psi &= \nabla \cdot (\phi\hat{\mathbf{z}}) - \nabla \cdot (\phi\hat{\mathbf{z}}) \\ \nabla \cdot \Psi &= 0,\end{aligned}$$

que é a condição de calibre escolhida anteriormente.

Sendo assim, os três potenciais ψ , ϕ , e χ (grandezas diferentes das mencionadas anteriormente), respeitam a mesma equação diferencial (a equação da Helmholtz) cujas soluções em coordenadas cilíndricas, já multiplicadas pela solução temporal da [Equação 2.11](#), para ondas que viajam na direção $+z$ podem ser escrita como

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, z, t) &= [\alpha_n I_n(m_P r) + \beta_n K_n(m_P r)] e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t} \\ \chi(r, \theta, z, t) &= [\gamma_n I_n(m_S r) + \lambda_n K_n(m_S r)] e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t} \\ \phi(r, \theta, z, t) &= [\eta_n I_n(m_S r) + \tau_n K_n(m_S r)] e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{2.26}$$

onde I_n é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem n , K_n é a função de Bessel modificado de segunda espécie e ordem n . Os parâmetros m_P e m_S representam o número de onda radial compressional e radial cisalhante na formação e podem ser escritos como $m_P^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2}$ e $m_S^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2}$. O termo κ é o número de onda, $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \lambda_n, \eta_n$ e τ_n são constantes relacionadas aos meios de propagação. Ademais, o número $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e é interpretado como o modo, e a solução geral é uma superposição linear dos diferentes modos. O modo associado à $n = 0$ não depende de θ , ou seja, é simétrico sobre uma rotação em torno do eixo z , e é produzido por uma fonte monopolar sobre este eixo. De maneira análoga tem-se a fonte dipolar produzindo ondas do modo $n = 1$ e assim por diante ([CLARO, 2020](#)).

2.3 Ondas em um poço preenchido com fluido

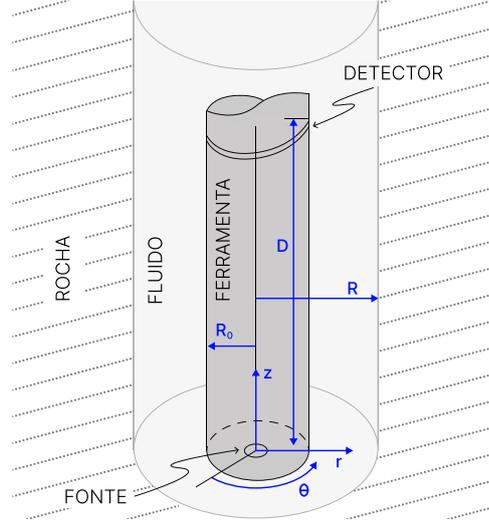
A principal referência para esta seção é o livro *Acoustic waves in Boreholes* ([PAILLET; CHENG, 2020](#)). Foram encontradas, todavia, uma série de inconsistências e possíveis erros de digitação no livro, corrigidos neste trabalho, assim como foi feita uma reorganização e complementação com partes omitidas, importantes para uma melhor compreensão geral da teoria.

2.3.1 Descrição do sistema

Nesta seção a solução geral dada pela [Equação 2.26](#) será aplicada no sistema de interesse: um poço preenchido por fluido com uma ferramenta de perfilagem no centro, como mostra a [Figura 6](#). Estes três elementos serão considerados cilíndricos e muito longos de maneira que o sistema como um todo tenha simetria cilíndrica. A fonte das

perturbações se encontra no eixo central do sistema e possui característica monopolar, ou seja, as perturbações geradas não dependem de θ . Também as soluções consideradas serão as ondas cuja amplitude diminui a medida que se afastam radialmente das paredes do poço no sentido de se afastarem deste, tendo em vista que a única fonte de perturbação está no eixo central.

Figura 6 – Diagrama da ferramenta de perfilagem no interior de um poço preenchido com fluido.



Fonte: Adaptada de Paillet e Cheng (2020).

2.3.2 Solução cilíndricamente simétrica

A simetria azimutal do sistema e da fonte monopolar ($n = 0$) somente são compatíveis com o modo P , associado à ψ , e com a componente do potencial associada a polarização azimutal, χ . Já o potencial ϕ , ligado a polarização radial, implica em movimento azimutal, ou seja, deve ser nula. Desta forma as soluções das pela Equação 2.26 se reduzem à

$$\psi = [\alpha_n K_0(m_P r) + \beta_n I_0(m_P r)] e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad (2.27)$$

$$\chi = [\gamma_n K_1(m_S r) + \lambda_n I_1(m_S r)] e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (2.28)$$

e

$$\phi = 0 \quad (2.29)$$

onde, as constantes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ e λ_n são relacionadas aos meios de propagação. Nas próximas seções estas constantes tomarão forma de D_1 e D_2 para o fluido, A_1 e B_1 para a formação rochosa e A_4 e B_4 para a ferramenta de perfilagem. Também m_P e m_S são funções que dependem do meio, e serão definidas para cada meio nas próximas seções.

Para a avaliação das condições de contorno serão necessárias as versões simplificadas pela simetria do deslocamento,

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad (2.30)$$

e de duas componentes do tensor de Cauchy (Equação 2.2), a tensão radial e tangencial em coordenadas cilíndricas, respectivamente,

$$\sigma_{rr} = \rho \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \right) \quad (2.31)$$

e

$$\sigma_{rz} = \rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad (2.32)$$

onde ν é a razão de Poisson, μ é o módulo de cisalhamento e ρ é a densidade do meio.

Na condição da fronteira entre a parede do poço e o fluido ($r = R$) e no limite entre a ferramenta e o fluido ($r = R_0$) a tensão radial e o deslocamento são contínuos e a tensão tangencial é nula. Além disso, sabe-se que a onda se anula no infinito e que tensão e os deslocamentos permanecem finitos no centro do poço ($r = 0$). Desse modo, tem-se um sistema de equações diferenciais com condições de contorno suficientes, possibilitando encontrar as soluções que descrevem o deslocamento e a tensão para todo espaço.

Como notação, será utilizado nas próximas seções o subíndice f nas grandezas relacionadas ao meio fluido, t para a ferramenta e s para a formação rochosa.

2.3.3 Solução para o fluido

A principal característica de um fluido é não comportar tensões de cisalhamento e, portanto, ondas S, de modo que $\chi_f = 0$ e $\mu = 0$, e $\nu = 0.5$ como já discutido. De fato tem-se que a pressão no fluido P_f é dada por

$$P_f = -\sigma_{rr} = -\rho_f \frac{\partial^2 \psi_f}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

enquanto que $\sigma_{rz} = 0$ e o deslocamento radial fica

$$u_f = \frac{\partial \psi_f}{\partial r}, \quad (2.34)$$

onde a solução da equação geral determina o potencial escalar no fluido

$$\psi_f = [D_1 I_0(m_1 r) + D_2 K_0(m_1 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad (2.35)$$

com D_1 e D_2 sendo constantes relacionadas ao fluido, e

$$m_1^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_f^2}, \quad (2.36)$$

onde V_f é a velocidade da onda no fluido.

Desse modo, substituindo a Equação 2.35 na Equação 2.33 obtém-se a pressão no fluido

$$P_f = -\rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [D_1 I_0(m_1 r) + D_2 K_0(m_1 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)} \right\},$$

ou seja,

$$P_f = \rho_f \omega^2 [D_1 I_0(m_1 r) + D_2 K_0(m_1 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.37)$$

Para obter o deslocamento radial no fluido, pode-se substituir a [Equação 2.35](#) na [Equação 2.34](#), desse modo,

$$u_f = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [D_1 I_0(m_1 r) + D_2 K_0(m_1 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)} \right\},$$

para realizar a derivação da expressão, é necessário fazer uso de algumas propriedades de derivação das funções de Bessel, que são úteis para manipular a expressão matemática e obter resultados derivativos. Essas propriedades são representadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{dI_0(y)}{dy} &= I_1(y) \\ \frac{dK_0(y)}{dy} &= -K_1(y). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aplicando essas relações juntamente com a regra da cadeia para o caso particular, a expressão do deslocamento no fluido pode ser simplificada da seguinte forma:

$$u_f = m_1 [D_1 I_1(m_1 r) - D_2 K_1(m_1 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.39)$$

2.3.4 Solução para formação rochosa

Os potenciais na formação rochosa que envolve o poço tem que dar origem a deslocamentos que tendem à zero para $r \rightarrow \infty$, assim, é necessário descartar os termos que divergem, como é o caso da função de Bessel de primeira espécie, resultando em

$$\begin{aligned} \psi_s &= A_1 K_0(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} \\ \chi_s &= B_1 K_1(m_3 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde A_1 e B_1 são constantes relacionadas ao meio rochoso,

$$m_2^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2}$$

e

$$m_3^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2},$$

sendo V_P e V_S as velocidades das ondas P e S, respectivamente, na formação rochosa.

Novamente buscamos as condições de contorno para o meio rochoso que serão aplicadas na interface. O deslocamento radial é encontrado por meio da substituição da [Equação 2.40](#) na [Equação 2.30](#)

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[A_1 K_0(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[B_1 K_1(m_3 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} \right],$$

resolvendo-a obtém-se

$$u_r = [A_1 m_2 K'_0(m_2 r) - i\kappa B_1 K_1(m_3 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad (2.41)$$

onde pode-se manter a derivada da função de Bessel em r , $K'_0(m_2 r)$ na forma explícita, pois irá facilitar o entendimento de manipulações futuras. Analogamente, a tensão radial é obtida por meio da [Equação 2.40](#) sendo substituída na [Equação 2.31](#)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \rho \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A_1 K_0(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}] + \\ & 2\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [A_1 K_0(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}] - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [B_1 K_1(m_3 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}] \right\}, \end{aligned}$$

Deve-se levar em consideração a relação $\mu = \rho_s V_S^2$ válida para meios elásticos e isotrópicos ([PAILLET; CHENG, 2020](#)), é importante também substituir a razão de Poisson pela relação entre as velocidades P e S :

$$\frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{V_P^2 - 2V_S^2}{V_P^2}.$$

Desse modo, resolvendo as derivadas para a tensão radial e fazendo as devidas substituições obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -\rho_s \left(\frac{V_P^2 - 2V_S^2}{V_P^2} \right) \omega^2 A_1 K_0(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} + \\ & 2\rho_s V_S^2 \left\{ m_2^2 A_1 K_0''(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} - i\kappa m_3 B_1 K_1'(m_3 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por fim, a tensão tangencial pode ser obtida substituindo-se a [Equação 2.40](#) na [Equação 2.32](#)

$$\sigma_{rz} = \rho_s \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial t^2} + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial z^2} \right],$$

resolvendo-a obtém-se

$$\sigma_{rz} = -\rho_s \omega^2 B_1 K_1(m_3 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} + 2\mu \left[i\kappa m_2 A_1 K_0'(m_2 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} + \kappa^2 B_1 K_1(m_3 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} \right],$$

que pode ser simplificada como

$$\sigma_{rz} = \left\{ -\rho_s \omega^2 B_1 K_1(m_3 r) + 2\rho_s V_S^2 [i\kappa m_2 A_1 K_0'(m_2 r) + \kappa^2 B_1 K_1(m_3 r)] \right\} e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.43)$$

2.3.5 Solução para a ferramenta

Para a solução no interior da ferramenta foram consideradas nulas as constantes dos termos envolvendo as funções modificadas de Bessel de segunda espécie, pois estas divergem na origem ($K_n(0) \rightarrow \infty$), resultando em:

$$\begin{aligned} \psi &= A_4 I_0(m_4 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} \\ \chi &= B_4 I_1(m_5 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

com A_4 e B_4 constantes relacionadas ao meio de propagação e

$$m_4^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_{Pt}^2}$$

$$m_5^2 = \kappa^2 - \frac{\omega^2}{V_{St}^2},$$

onde, V_{Pt} é a velocidade do modo P na ferramenta e V_{St} é a velocidade do modo S na ferramenta.

Para encontrar o deslocamento radial na ferramenta pode-se substituir a [Equação 2.44](#) na [Equação 2.30](#). Assim,

$$u_r = [A_4 m_4 I_0'(m_4 r) - i \kappa B_4 I_1(m_5 r)] e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.45)$$

Por meio da [Equação 2.44](#) e a [Equação 2.31](#) é possível determinar a tensão radial na ferramenta como:

$$\sigma_{rr} = -\rho_t \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) \omega^2 A_4 I_0(m_4 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} +$$

$$2\mu [m_4^2 A_4 I_0''(m_4 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} - i \kappa m_5 B_4 I_1'(m_5 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}], \quad (2.46)$$

que, quando utilizada a relação entre a razão de Poisson e as velocidades dos modos P e S , e $\mu = \rho_t V_{St}^2$, pode ser escrita como:

$$\sigma_{rr} = -\rho_t \left(\frac{V_{Pt}^2 - 2V_{St}^2}{V_{Pt}^2} \right) \omega^2 A_4 I_0(m_4 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} +$$

$$2\rho_t V_{St}^2 [m_4^2 A_4 I_0''(m_4 r) e^{i(\kappa z - \omega t)} - i \kappa m_5 B_4 I_1'(m_5 r) e^{i(\kappa z - \omega t)}]. \quad (2.47)$$

Analogamente, substituindo a [Equação 2.44](#) na [Equação 2.32](#) obtém-se a tensão tangencial para a ferramenta

$$\sigma_{rz} = \{-\rho_s \omega^2 B_4 I_1(m_5 r) + 2\mu [i \kappa m_4 A_4 I_0'(m_4 r) + \kappa^2 B_4 I_1(m_5 r)]\} e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.48)$$

2.3.6 Condições de contorno e derivação das equações para modos confinados

Pode-se agora aplicar as condições de contorno nas interfaces fluido-rocha e fluido-ferramenta onde o deslocamento radial e as tensões tangenciais e radiais deve ser contínuas, ou seja, idênticas em ambos os meios na interface.

2.3.6.1 Interface fluido-rocha

Na interface fluido-rocha, em $r = R$, como o fluido não é capaz de aplicar tensões tangenciais na rocha, tem-se então, como já discutido, que $\sigma_{rz} = 0$. A continuidade do estresse radial implica na igualdade entre σ_{rz} e a ([Equação 2.43](#)), ou seja,

$$0 = \{-\rho_s \omega^2 B_1 K_1(m_3 R) + 2\rho_s V_S^2 [i \kappa m_2 A_1 K_0'(m_2 R) + \kappa^2 B_1 K_1(m_3 R)]\} e^{i(\kappa z - \omega t)},$$

eliminando os termos comuns e manipulando a equação, obtém-se

$$\omega^2 B_1 K_1(m_3 R) = 2V_S^2 [i\kappa m_2 A_1 K_0'(m_2 R) + \kappa^2 B_1 K_1(m_3 R)]$$

evidenciando o termo $\kappa^2 B_1 K_1(m_3 R)$

$$\kappa^2 B_1 K_1(m_3 R) \left[\frac{\omega^2}{\kappa^2} - 2V_S^2 \right] = 2V_S^2 i\kappa m_2 A_1 K_0'(m_2 R),$$

de onde, por manipulação algébrica, obtém-se

$$\kappa^2 B_1 K_1(m_3 R) = \frac{2\kappa^2 V_S^2}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_S^2} i\kappa A_1 m_2 K_0'(m_2 R). \quad (2.49)$$

Como a derivada da função de Bessel foi indicada de forma explícita anteriormente, agora é possível utilizar uma relação entre as derivadas das funções de Bessel dadas pela [Equação 2.50](#) demonstradas por ([ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965](#))

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} K_0(u) &= -K_1'(y) \\ \frac{d^2}{dy^2} K_0(y) &= K_0(y) + \frac{1}{y} K_1(y). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Desse modo, pode-se eliminar a constante B_1 do deslocamento radial da formação na interface substituindo a [Equação 2.49](#) na [Equação 2.41](#). Onde foram utilizadas as identidades da [Equação 2.38](#) e [Equação 2.50](#). Com isso obtém-se

$$u_r = \frac{\omega^2}{2\kappa^2 V_S^2 - \omega^2} A_1 m_2 K_1(m_2 R) e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.51)$$

Analogamente, utilizando-se das relações entre as derivadas bem como substituindo a [Equação 2.49](#) na [Equação 2.42](#) é possível obter a tensão radial na interface fluido-rocha

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \rho_S \omega^2 A_1 \left\{ \frac{2\kappa^2 V_S^2 - \omega^2}{\omega^2} K_0(m_2 R) + \right. \\ \left. \frac{2V_S^2 m_2 m_3 K_1(m_2 R)}{\omega^2 - 2\kappa V_S^2} \left[\frac{1}{m_3 R} + \frac{2\kappa^2 V_S^2 k_0(m_3 R)}{\omega^2 K_1(m_3 R)} \right] \right\} e^{i(\kappa z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ainda na interface entre fluido e rocha, pode-se aplicar a continuidade do deslocamento radial e da tensão nas condições de contorno. Sendo assim, o deslocamento radial no fluido é igual ao deslocamento radial na formação, desse modo, igualando a [Equação 2.51](#) a [Equação 2.39](#) obtém-se

$$\frac{\omega^2}{2\kappa^2 V_S^2 - \omega^2} m_2 A_1 K_1(m_2 R) - m_1 D_1 I_1(m_1 R) + m_1 D_2 K_1(m_1 R) = 0, \quad (2.53)$$

sabendo que a Lei de Hooke da hidrostática estabelece a relação entre a tensão radial na formação e a pressão no fluido ($\sigma_{rr} = -P_f$), é possível por meio da [Equação 2.42](#) e a

Equação 2.37 obter

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \left\{ \frac{2\kappa^2 V_S^2 - \omega^2}{\omega^2} K_0(m_2 R) + \frac{2V_S^2 m_2 m_3 K_1(m_2 R)}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_S^2} \left[\frac{1}{m_3 R} + \frac{2\kappa^2 V_S^2 K_0(m_3 R)}{\omega^2 K_1(m_3 R)} \right] \right\} A_1 + I_0(m_1 R) D_1 + K_0(m_1 R) D_2 = 0, \quad (2.54)$$

2.3.6.2 Interface ferramenta-fluido

Também na interface ferramenta-fluido, em $r = R_0$ tem-se que garantir a continuidade do deslocamento radial e das tensões. A continuidade do deslocamento radial implica na igualdade entre a Equação 2.45 e a Equação 2.39, portanto

$$-m_1 I_1(m_1 R_0) D_1 + m_1 K_1(m_1 R_0) D_2 + \frac{\omega^2}{2\kappa^2 V_{St}^2 - \omega^2} m_4 K_1(m_4 R_0) A_4 = 0. \quad (2.55)$$

Novamente o fluido não é capaz de aplicar tensões tangenciais na ferramenta, de modo que $\sigma_{rz} = 0$ para a ferramenta também em $r = R_0$, ou seja, da Equação 2.48 tem-se

$$0 = \{-\rho_t \omega^2 B_4 I_1(m_5 R_0) + 2\rho_t V_{St}^2 [i\kappa m_4 A_4 I_0'(m_4 R_0) + \kappa^2 B_4 I_1(m_5 R_0)]\} e^{i(\kappa z - \omega t)},$$

onde, eliminando os termos comuns é possível escrever

$$\kappa^2 B_4 I_1(m_5 R_0) \left[\frac{\omega^2}{\kappa^2} - 2V_{St}^2 \right] = 2V_{St}^2 i\kappa m_4 A_4 I_0'(m_4 R_0).$$

Por fim, pode-se manipular a expressão para obter-se

$$\kappa^2 B_4 I_1(m_5 R_0) = \frac{2\kappa^2 V_{St}^2}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_{St}^2} i\kappa A_4 m_4 I_0'(m_4 R_0). \quad (2.56)$$

Torna-se conveniente expressar o deslocamento radial e a tensão radial com dependência de uma única constante, neste caso, A_4 . Para isso, é necessário utilizar as identidades das derivadas das funções de Bessel (Equação 2.38 e a Equação 2.50), bem como substituir a Equação 2.56 em Equação 2.45. Assim, o deslocamento radial pode ser escrito como

$$u_r = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_{St}^2} A_4 m_4 I_1(m_4 R_0) e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.57)$$

Do mesmo modo, substituindo a Equação 2.56 na Equação 2.47 pode-se expressar a tensão radial na interface ferramenta-fluido como

$$\sigma_{rr} = \rho_t \omega^2 A_4 \left\{ \frac{2\kappa^2 V_{St}^2 - \omega^2}{\omega^2} I_0(m_4 R_0) + \frac{2V_{St}^2 m_4 m_5 I_1(m_4 R_0)}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_{St}^2} \left[\frac{1}{m_5 R_0} + \frac{2\kappa^2 V_{St}^2 I_0(m_5 R_0)}{\omega^2 I_1(m_5 R_0)} \right] \right\} e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad (2.58)$$

Equitativamente, a relação entre a pressão no fluido e a tensão radial na ferramenta pode ser obtido manipulando a [Equação 2.33](#) e a [Equação 2.58](#) quando considerado $r = R_0$

$$I_0(m_1 R_0) D_1 + K_0(m_1 R_0) D_2 + \frac{\rho t}{\rho_f} \left\{ \frac{2\kappa^2 V_{st}^2 - \omega^2}{\omega^2} I_0(m_4 R_0) + \frac{2V_{St}^2 m_4 m_5 I_1(m_4 R_0)}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_{St}^2} \left[\frac{1}{m_5 R_0} + \frac{2\kappa^2 V_{St}^2 I_0(m_5 R_0)}{\omega^2 I_1(m_5 R_0)} \right] \right\} A_4 = 0. \quad (2.59)$$

2.3.6.3 Sistema de equações lineares

As equações (2.53), (2.54), (2.55) e (2.59) formam um sistema linear para as constantes A_1, D_1, D_2 e A_4 , que tem forma matricial

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & 0 \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & 0 \\ 0 & \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ 0 & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ D_1 \\ D_2 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.60)$$

onde, os termos θ_{ij} são justamente os termos que acompanham as constantes nas Equações (2.53), (2.54), (2.55) e (2.59) e podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \frac{\omega^2}{2\kappa^2 V_S^2 - \omega^2} m_2 K_1(m_2 R) \\ \theta_{12} &= -m_1 I_1(m_1 R) \\ \theta_{13} &= m_1 K_1(m_1 R) \\ \theta_{21} &= \rho_s \left\{ \frac{2\kappa^2 V_S^2 - \omega^2}{\omega^2} K_0(m_2 R) + \frac{2V_S^2 m_2 m_3 K_1(m_2 R)}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_S^2} \left[\frac{1}{m_3 R} + \frac{2\kappa^2 V_S^2 K_0(m_3 R)}{\omega^2 K_1(m_3 R)} \right] \right\} \\ \theta_{22} &= \rho_f I_0(m_1 R) \\ \theta_{23} &= \rho_f K_0(m_1 R) \\ \theta_{32} &= m_1 I_1(m_1 R_0) \\ \theta_{33} &= -m_1 K_1(m_1 R_0) \\ \theta_{34} &= \frac{\omega^2}{2\kappa^2 V_{St}^2 - \omega^2} m_4 K_1(m_4 R_0) \\ \theta_{42} &= \rho_f I_0(m_1 R_0) \\ \theta_{43} &= \rho_f K_0(m_1 R_0) \\ \theta_{44} &= \rho_t \left\{ \frac{2\kappa^2 V_{St}^2 - \omega^2}{\omega^2} I_0(m_4 R_0) + \frac{2V_{St}^2 m_4 m_5 I_1(m_4 R_0)}{\omega^2 - 2\kappa^2 V_{St}^2} \left[\frac{1}{m_5 R_0} + \frac{2\kappa^2 V_{St}^2 I_0(m_5 R_0)}{\omega^2 I_1(m_5 R_0)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Segue que, para que este sistema linear homogêneo de equações comporte soluções não triviais, o determinante da matriz θ_{ij} deve ser nulo.

$$D(\kappa, w, \mathbf{p}) = \det(\theta_{ij}) = 0. \quad (2.61)$$

O determinante é função de κ , ω e um conjunto de parâmetros do poço

$$\mathbf{p} = \{R, R_0, V_S, V_P, V_f, V_{St}, V_{Pt}, \rho_S, \rho_f, \rho_{St}\}. \quad (2.62)$$

Dado um conjunto de valores para \mathbf{p} , que descrevem o sistema, as raízes do determinante fornecem soluções para um conjunto reduzido de $\kappa_i(\omega)$, os modos acústicos do sistema. Estas funções podem ser reescritas como $v_i(f)$, que é a velocidade do modo em função da frequência ou curva de dispersão.

2.4 Métodos de inversão

Como mencionado, os métodos de inversão, baseados em um modelo físico, buscam recuperar os parâmetros do sistema a partir das formas de onda capturadas. Nesta seção são abordadas as diferentes técnicas utilizadas para a inversão de dados acústicos.

2.4.1 Curvas de dispersão e semelhança espectral

Nos modos de interface geralmente a velocidade da onda depende da frequência (ou frequência angular $\omega = 2\pi f$), ou seja, são modos dispersivos. A curva de dispersão é um gráfico que apresenta esta relação. Entretanto, para estimar esta curva de dispersão a partir de formas de onda coletadas pelo arranjo de detectores (Figura 2) é necessária uma estratégia de processamento. Neste aspecto Nolte, Rao e Huang (1997) utilizaram a ponderação da semelhança dos pontos espectrais do conjunto, aqui chamada de semelhança espectral. Este método resulta em um mapa de calor que mede a coerência entre os sinais de diferentes detectores dada uma velocidade de propagação e uma frequência, essa coerência é dada por

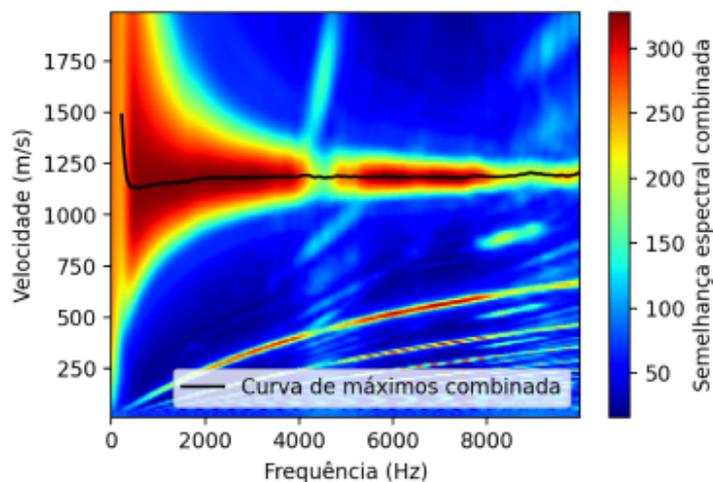
$$S_E(\omega, V) = \frac{\left| \sum_{n=1}^N X_n^*(\omega) z^{n-1} \right|}{\sqrt{N \sum_{n=1}^N X_n^*(\omega) X_n(\omega)}}, \quad (2.63)$$

onde $X_n(\omega)$ é a transformada rápida de Fourier dos dados dos n detectores, N é o número total de detectores, $*$ significa o complexo conjugado e $z = \exp(-i\omega d/V)$, com d sendo a distância entre os detectores (TANG; CHENG; CHENG, 2004). Um exemplo de um mapa de calor encontrado por meio da semelhança espectral pode ser visualizado na Figura 7.

2.4.1.1 Ajuste da semelhança espectral

Dada uma frequência angular ω_0 o valor máximo de $S_E(\omega_0, V)$ está associado ao valor mais provável da velocidade naquela frequência. Portanto, após maximizar a semelhança espectral para as diferentes frequências é possível obter uma curva de dispersão, onde cada ponto dessa curva representa um valor máximo de velocidade para um respectivo

Figura 7 – Exemplo de um diagrama de semelhança espectral da velocidade em função da frequência com ajuste de máximos, a semelhança é uma medida associada à probabilidade do modo Stoneley se propagar com a velocidade para essa frequência. A região com maior concentração está na faixa entre 1000 e 1250 m/s, mostrando uma alta probabilidade de que a velocidade do modo Stoneley esteja nessa região, onde a curva de máximos sobrepõe o diagrama. Note também que a velocidade do modo Stoneley tende à velocidade do fluido para altas frequências e é levemente dispersivo em baixas frequências, onde a velocidade é menor.



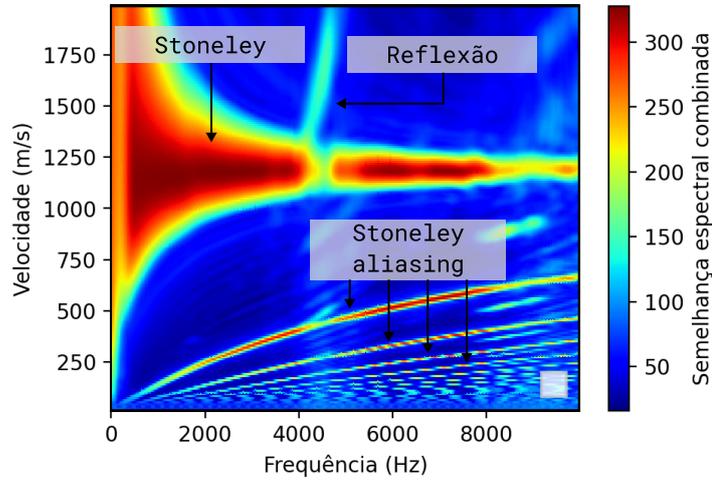
Fonte: Elaborado pelo autor.

valor de frequência, como a curva apresentada na região central da semelhança espectral da Figura 7. Um cuidado necessário vem do fato que podem existir vários máximos locais associados a modos diferentes para mesma frequência, de forma que a curva de dispersão de um dado modo deve ser obtida “seguindo uma cadeia” de máximos. Este processo, de seguir as cadeias de máximo, é bastante suscetível aos ruídos e outros modos vizinhos, ou modos que cruzem o modo de interesse, podendo gerar resultados espúrios. Por fim, uma segunda observação é que o mesmo modo aparece diversas vezes na semelhança espectral, em valores de velocidade relacionada por múltiplos inteiros do comprimento de onda, fenômeno denominando de *aliasing*. Na Figura 8 o modo Stoneley com a curva de máximos sobreposta aparece repetido diversas vezes com velocidades menores partindo da origem (TANG; CHENG; CHENG, 2004).

2.4.2 Método de múltiplos disparos

Durante a perfilagem acústica de poços a ferramenta emite pulsos sonoros em intervalos regulares de profundidade, essa característica permite aplicar uma técnica conhecida como método de múltiplos disparos. Os intervalos de movimento da ferramenta são de mesmo comprimento que a distância entre seus detectores (ou metade), ou seja, a cada tiro a ferramenta é movimentada uma distância d (ou $d/2$).

Figura 8 – Semelhança espectral com o modo Stoneley sendo cruzado por um modo oriundo de uma reflexão.



Fonte: Elaborado pelo autor

A técnica de múltiplos disparos é um conjunto de passos simples que utiliza informações repetidas para reduzir o ruído do sinal e melhorar a precisão de suas estimativas (HSU; CHANG, 1987). Dada uma profundidade de referência, a ferramenta é movimentada de modo que diferentes receptores sejam utilizados para coletar as formas de onda que transitaram nesta profundidade. Considera-se apenas as formas de onda vindas do conjunto de detectores em posição simétrica em relação à profundidade de referência, ou seja, sinais que carreguem a informação sobre uma porção da rocha centrada na profundidade de referência, como mostra Figura 9. Mas se, quando um maior número de receptores é utilizado, tem-se uma melhor precisão na velocidade, por envolver um intervalo maior de rocha e mais formas de onda, em contrapartida, diminui-se a resolução vertical - imagine a impossibilidade de se medir a velocidade de uma camada de rocha mais fina que a extensão dos detectores utilizados.

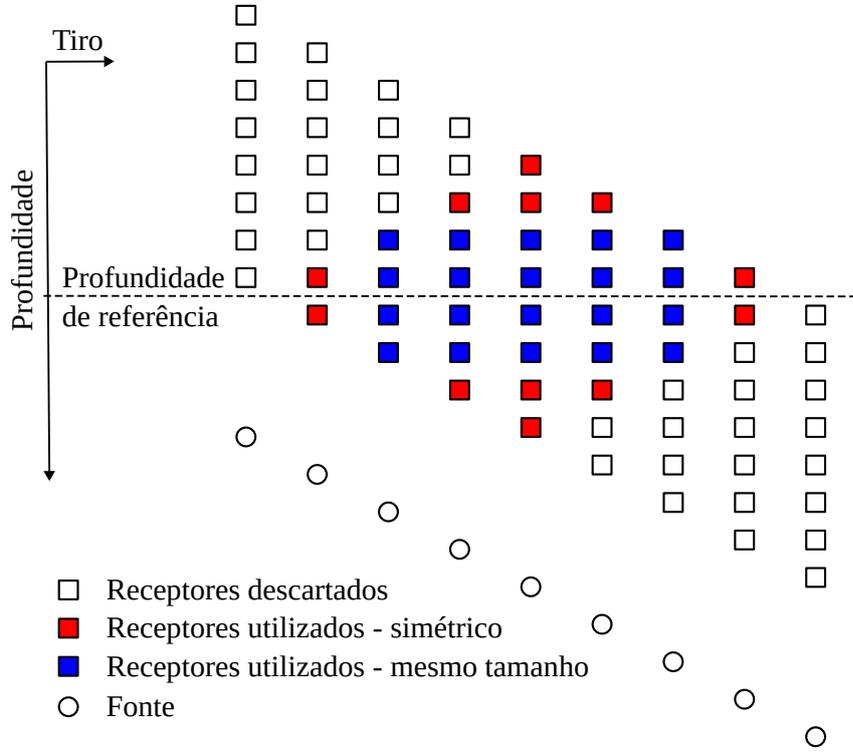
Cada disparo relativo a uma profundidade de referência dará origem a uma semelhança espectral, e no caso típico, a uma curva de máximos (curva de dispersão experimental). Estes dados devem ser combinados. Tipicamente faz-se a média aritmética entre as curvas de máximo oriundas de subconjuntos de detectores de mesmo tamanho (TANG; CHENG; CHENG, 2004) (Figura 9).

$$\bar{V}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{v}_k(\omega) \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2.64)$$

onde K é o número total de subconjuntos utilizados, no exemplo da Figura 9 $K = 5$.

Caso seja utilizado um esquema de empilhamento onde os subconjuntos tenham tamanho diferente, é necessário atribuir um peso diferente a cada subconjunto e calcular a média ponderada. Para isso, utiliza-se a média aritmética ponderada e a média geométrica

Figura 9 – Combinação de múltiplos tiros em uma mesma profundidade de referência. Em que cada movimento realizado pela ferramenta o número de receptores é alterado e conseqüentemente a precisão da semelhança espectral.



Fonte: Elaborado pelo autor.

ponderada, respectivamente

$$\bar{V}(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \tilde{V}_k}{\sum_{k=1}^K w_k} \quad (2.65)$$

e

$$\bar{V}(\omega) = \left[\prod_{k=1}^K \tilde{V}_k(\omega)^{w_k} \right]^{\frac{1}{\sum_{k=1}^K w_k}}, \quad (2.66)$$

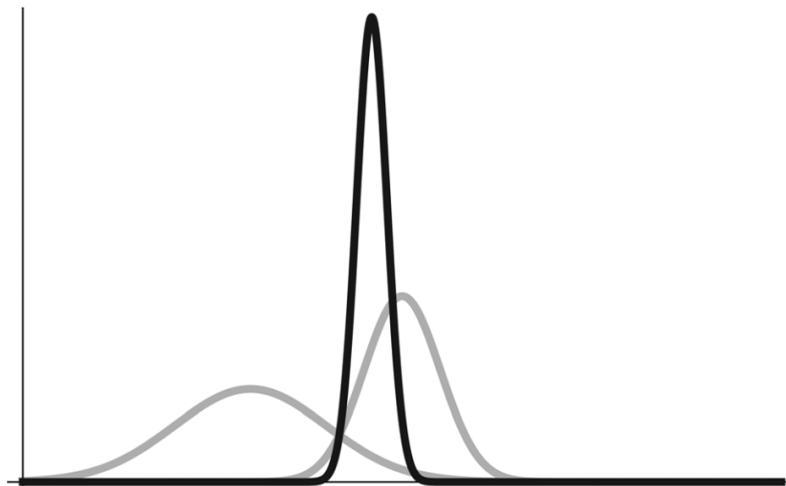
onde w_k é o peso atribuído a cada subconjunto. Neste trabalho foi considerado w_k o número de pares únicos formados pelo subconjunto de detectores k dado que esta é a combinação envolvida no cálculo das correlações entre as formas de onda que dão origem a semelhança espectral. Os dois métodos estatísticos fornecem resultados satisfatórios, porém em alguns casos a média geométrica apresenta uma melhora no processamento, isso é justificado pelo fato da média geométrica ser menor que a média aritmética, assim suprimindo o ruído de fundo de maneira mais eficaz (HSU; CHANG, 1987).

Há ainda outros métodos para a combinação de dados, como o método de confluência ponderada, que foi proposto por Hill e Miller (2011) como um método para consolidar dados de experimentos diferentes. Dado um conjunto de experimentos que medem uma mesma grandeza cujo resultado é uma distribuição de probabilidades para esta, $f_n(x)$, com peso w_n , a confluência ponderada é dada por

$$f(x) = \frac{f_1^{w_1/w_{max}}(x) \cdot f_2^{w_2/w_{max}}(x) \cdots f_n^{w_n/w_{max}}(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1^{w_1/w_{max}}(y) \cdot f_2^{w_2/w_{max}}(y) \cdots f_n^{w_n/w_{max}}(y) dy}, \quad (2.67)$$

onde w_{max} é o peso máximo do conjunto. Uma das propriedades interessantes deste método, compartilhada pela média geométrica, é evitar múltiplos máximos locais caso as distribuições originais tenham máximos em valores muito separados, e também a confluência dessas distribuições será mais estreita, como ilustrado na [Figura 10](#). Apesar de parecer contraditório, se as distribuições de entrada possuírem números diferentes de medições, cada qual com seu próprio desvio padrão, a combinação das medições realizadas resultará em um desvio padrão menor ([HILL; MILLER, 2011](#)).

Figura 10 – Confluência de duas distribuições. As curvas cinzas são as distribuições de entrada e a curva preta é a confluência dessas distribuições, se ambas distribuições possuírem confiabilidade alta, o valor verdadeiro deve estar na região de sobreposição.



Fonte: [Hill e Miller \(2011\)](#).

Nas próximas seções a confluência e também as médias serão aplicadas diretamente à semelhança espectral.

2.4.3 Métodos de ajuste da curva de dispersão

A inversão dos parâmetros do modelo pode ser feita ajustando-se a curva de dispersão vinda desse com a experimental (combinada). Existem diversos algoritmos de ajuste aplicáveis, como por exemplo o de Levenberg-Marquardt e o recozimento simulado ([TANG; CHENG; CHENG, 2004](#)). Neste trabalho utilizaremos o recozimento, que necessita a definição de uma quantidade chamada de “energia”, associada a diferença entre a curva experimental e teórica, quantidade que o algoritmo tenta minimizar. Assim os parâmetros estimados são aqueles correspondentes a curva de dispersão do modelo que minimiza esta energia. Este é o processo de inversão.

2.4.3.1 Mínimos quadrados

A “energia” mais comum utilizada em ajustes de funções a curvas é a vinda dos mínimos quadrados, ou seja,

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^N [M_{i,mod}(\omega) - M_{i,exp}(\omega)]^2}, \quad (2.68)$$

para o caso discreto, N é o número máximo de pontos da curva, $M_{i,mod}$ representa os pontos da curva teórica dada pelo modelo discutido na [seção 2.3](#) e $M_{i,exp}$ são os pontos da curva obtida experimentalmente.

A energia dada pela integração da semelhança espectral sobre a curva de dispersão, proposta neste trabalho, será definida e discutida mais à frente.

2.4.3.2 Recozimento simulado

Após identificar quais são os máximos dos diagramas espectrais e combiná-los utilizando a [Equação 2.64](#) é necessária uma estratégia que procure os parâmetros do modelo que minimize a energia da [Equação 2.68](#). Este é o papel do recozimento simulado, técnica inspirada no tratamento térmico de metais que busca aliviar tensões internas elevando a temperatura e deixando o material resfriar lentamente, de modo que os átomos tenham tempo de se reposicionarem em uma configuração de mais baixa energia, tratamento chamado de recozimento ([AARTS; LAARHOVEN, 1989](#)).

A busca pelo conjunto de parâmetros que minimiza a energia pode ser pensada como uma caminhada aleatória no espaço de parâmetros a serem determinados. O método pode ser resumido na sua forma mais simples como:

1. Escolha de um conjunto inicial de parâmetros;
2. Cálculo da energia;
3. Variação aleatória dos parâmetros, o que pode ser pensado como um passo aleatório no espaço de parâmetros;
4. Novo cálculo da energia e comparação com a energia anterior. Caso a energia não tenha diminuído, o passo é descartado. Volta ao item 3;

Um parâmetro do método chamado de temperatura T , em analogia com o tratamento térmico, determina o tamanho do passo a ser dado e é gradualmente diminuída de forma que a busca se torna cada vez mais refinada. A busca termina em um número determinado de passos ou quando a energia atinge um valor mínimo escolhido ([PEI; LOUIE; PULLAMMANAPPALLIL, 2007](#)).

As principais vantagens deste método se referem à facilidade em ajustar múltiplos parâmetros e lidar bem com situações em que existem muitos mínimos locais para a energia, não tendo a propensão de ficar “preso”. Por outro lado, tem o caráter aleatório, tornando os resultados não estritamente reprodutíveis.

3 Método de inversão por integração direta da semelhança espectral

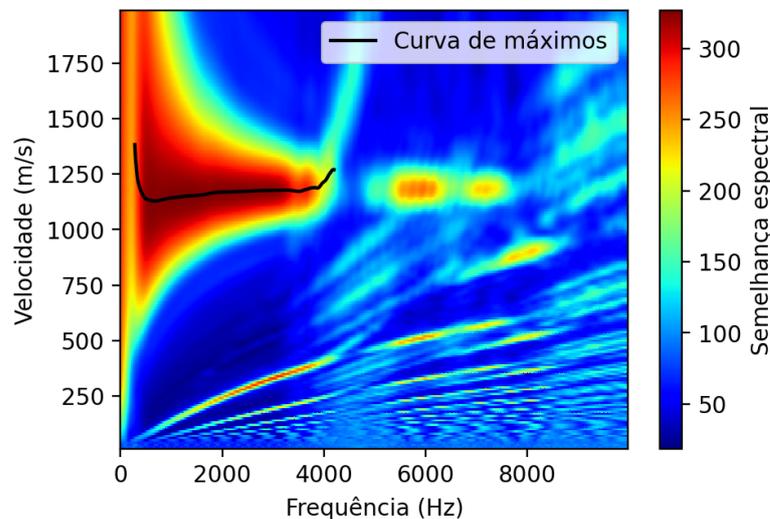
Neste capítulo será definido um método alternativo para a obtenção da curva de dispersão ajustando os parâmetros do modelo, na tentativa de superar algumas limitações relacionadas ao método de ajuste da curva de dispersão por meio dos pontos de máximo das semelhanças espectrais.

3.1 Limitações do método de ajuste pelos máximos

Conforme mencionado na [subseção 2.4.1.1](#), é viável construir uma curva de dispersão baseada em semelhança espectral, onde cada ponto da curva representa um valor de máximo. No entanto, esse método apresenta algumas limitações, tais como:

1. Este procedimento é bastante suscetível aos ruídos e de difícil automação, uma vez que identificar o “caminho” do modo em um mapa com descontinuidades (causadas pelo ruído) e bifurcações envolve algoritmos bastante complexos com muitos parâmetros que precisam ser escolhidos conforme a análise dos dados. A [Figura 11](#) é um exemplo de semelhança cujo algoritmo de achar os máximos teve dificuldades;

Figura 11 – Semelhança com cruzamento de modos e falhas na continuidade do modo Stoneley. O método de ajuste pela curva de máximos não percebe a falha na continuidade e ajusta-se para o modo que cruza o diagrama.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. As oscilações de alta frequência na semelhança são um problema para o algoritmo de obtenção da curva dos máximos. Desse modo, é necessário aplicar um filtro de “desfoque” na frequência, mas que nem sempre soluciona o problema;
3. A semelhança espectral pode ser considerada uma distribuição de probabilidade para o valor da velocidade do modo em uma dada frequência, uma vez que é baseada na correlação entre as ondas em diferentes detectores. Isto pode ser visto pelo caráter gradual dos mapas de calor das semelhanças espectrais, onde a “variância” da velocidade em torno do valor de máximo, para uma determinada frequência, é maior na região de baixas frequências e menor na de alta. Quando se considera somente o máximo, toda informação da largura desta distribuição é descartada. Também não é dado peso diferente para regiões na frequência onde existe mais sinal.

3.2 Definição do método de energia de curva

Um método alternativo para ajustar os parâmetros do modelo é a partir da definição de uma função energia que seja calculada diretamente da semelhança espectral, não necessitando da curva de máximos. Pode-se utilizar uma integral de linha sobre a semelhança $S_E(k, \omega)$, ou seja, a energia fica definida como

$$E = \frac{1}{\Delta\omega} \int S_E(\omega, V(\omega)) d\omega. \quad (3.1)$$

onde $\Delta\omega$ é o intervalo da curva e $V(\omega)$ é a curva ajustada pelo modelo acústico. A energia também pode ser escrita na forma discreta, ou seja,

$$E = \frac{1}{N} \sum_i^N S_E(\omega_i, V(\omega_i)) \quad (3.2)$$

onde N é o número total de pontos da curva.

Note que neste caso as curvas que melhor ajustam a semelhança espectral tendem a resultar em energias maiores, ou seja, tem-se que adaptar o recozimento simulado para maximizar a energia ou redefini-la como $E' = 1 - E$. Note que não é necessária uma preocupação com a normalização ou com os limites da energia, uma vez que se buscam extremos da função.

Este método supera ou atenua as limitações do método de curvas de máximo descritas na [seção 3.1](#). Assim, é possível listar as principais vantagens desse método:

1. Não é necessária a obtenção da curva de máximos ($k_{max}(\omega)$) associados ao modo acústico estudado;
2. O valor da energia é calculado globalmente, para todas as frequências, neste sentido flutuações locais não possuem grande impacto e pode-se optar por não aplicar o

filtro de “desfoque”. Por outro lado, este mesmo tipo de filtro se mostrou necessário quando há o empilhamento das semelhanças;

3. A energia captura naturalmente a distribuição da velocidade em torno do seu valor máximo para uma dada frequência, ou seja, o seu valor é afetado pelo valor local da semelhança, e não pela distância para o máximo. Dito de outra forma, a penalidade à energia em um ponto em que a curva de dispersão não passe sobre o máximo é dada pela própria redução local de $S_E(\omega, V(\omega))$. Além disto, a semelhança não normalizada para cada frequência (igualando o denominador da [Equação 2.63](#) a 1) carrega consigo a informação de quais frequências os dados tem mais amplitude, ou seja, mais informação, atribuindo naturalmente um peso maior a estas regiões. Neste trabalho optou-se por utilizar a normalização para dar homogeneidade aos métodos.

3.3 Combinação das semelhanças espectrais

Neste estudo, foram examinados os métodos de inversão por meio da curva de máximos e o método de energia de curva. Ao contrário do método de máximos, que requer a identificação dos valores máximos em cada semelhança, seguido pela combinação das curvas resultantes, o método de energia de curva adota uma abordagem direta. Nele, as semelhanças são combinadas de maneira direta, gerando um novo mapa de calor. Para realizar esse processo, as médias aritmética ([Equação 2.65](#)), geométrica ([Equação 2.66](#)), e confluência ([Equação 2.67](#)) são modificadas, sendo expressas respectivamente como:

$$S_E(\omega, V) = \frac{\sum_{k=1}^K w_k S_{E,k}(\omega, V)}{\sum_{k=1}^K w_k}, \quad (3.3)$$

$$S_E(\omega, V) = \left[\prod_{k=1}^K S_{E,k}(\omega, V)^{w_k} \right]^{\frac{1}{\sum_{k=1}^K w_k}} \quad (3.4)$$

e

$$S_E(\omega, V) = \frac{\prod_{k=1}^K S_{E,k}(\omega, V)^{\frac{w_k}{w_{max}}}}{\int \prod_{k=1}^K S_{E,k}(\omega, V')^{\frac{w_k}{w_{max}}} dV'}. \quad (3.5)$$

É importante notar que a solução da integral na [Equação 3.5](#) é feita sobre todo intervalo de velocidades analisado e deve ser um valor finito e diferente de zero. Exemplos dos diferentes resultados das semelhanças espectrais combinadas serão mostrados no próximo capítulo.

4 Aplicação dos métodos de inversão em dados de campo

Neste capítulo, a metodologia empregada no presente trabalho é abordada. Além disso, são apresentados os resultados obtidos através da aplicação das diferentes técnicas de inversão, seguidos por uma discussão aprofundada dos mesmos. O processamento dos dados foi realizado em conjunto com o Dr. Tobias Heimfarth utilizando a biblioteca `awlat` ([HEIMFARTH, 2022](#)).

4.1 Dados de campo

Os dados utilizados neste trabalho foram disponibilizados pela Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) através do projeto [REATE \(2021\)](#), onde dados de poços de exploração em diferentes bacias hidrográficas são catalogados.

4.1.1 Escolha do poço

O primeiro passo foi escolher um poço adequado no arquivo. Para dimensionar a complexidade da tarefa note que: 1) Somente na parte do arquivo de poços terrestres, são 24 bacias, cada uma contendo centenas de poços; 2) Em cada poço são feitas diversas inserções de diferentes ferramentas, no poço escolhido foram 22; 3) Cada ferramenta contém um conjunto de instrumentos diversos, no caso da ferramenta utilizada são 312 canais (cada canal representa a medida de um instrumento da ferramenta por profundidade). O resultado é uma maciça quantidade de dados a serem analisados. Este contexto é importante para se entender as escolhas feitas, pois foi necessário achar um conjunto de dados com o máximo de valores necessários para se testar o modelo acústico. As informações sobre o poço escolhido estão presentes na [Tabela 1](#).

O termo ferramenta utilizado acima refere-se a um conjunto de módulos com vários sensores para fins variados e a “ferramenta acústica” seria somente um destes módulos. Neste trabalho, o termo ferramenta é utilizado para fazer referência somente a parte acústica. A ferramenta utilizada possui 10,8 cm de raio, 13 detectores espaçados a uma distância de 0,1542 m e a distância entre a fonte e o receptor central é de 7,88 m.

Como o foco deste trabalho é o modo Stoneley, buscaram-se poços com medidas acústicas produzidas por uma ferramenta com fonte e detecção monopolar e com excitação de baixa frequência, região na qual a amplitude do modo Stoneley é predominante em relação aos outros. De fato, a maioria da energia dos sinais acústicos utilizados se encontram

Tabela 1 – Características do poço e da ferramenta utilizada.

	Código	Descrição
Poço	1-BRSA-1221-MA	Situado na Bacia do Parnaíba, no estado do Maranhão.
Ferramenta	1-brsa-1221- ma_8_ait_msip	Contém o instrumento Multimode Array Sonic Service Tool (MASST) responsável pelos dados.
Canal	WFA4_MONO	Conjunto de Formas de Onda — 4 Componentes de Monopolo de Baixa Frequência Distantes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

entre 500 e 3000 Hz. Além disso, grande parte dos parâmetros necessários para se aplicar o modelo físico (Equação 2.60) foram medidos, com exceção da velocidade da onda P no fluido e da densidade do fluido. Esta última, embora o canal esteja presente, os dados se encontravam corrompidos. Tem-se o perfilamento entre a profundidade de 750 e 2600 metros, entretanto, optou-se por fazer um recorte de um pequeno intervalo devido a limitações de tempo computacional. Foi escolhida a faixa de profundidades entre 2465 e 2500 metros, pois esta contém duas regiões distintas: uma região bastante homogênea e uma segunda parte com acidentes, onde alguns parâmetros medidos apresentam fortes oscilações, como será discutido adiante.

4.1.2 Parâmetros do modelo

A ideia para quantificar a qualidade dos métodos de inversão é ajustar um dos parâmetros do poço e comparar com uma medida confiável de referência. São 10 parâmetros, listados na Equação 2.62.

Foi escolhida a velocidade da onda S como alvo do ajuste, sendo os outros parâmetros tomados como de valor conhecido. Esta escolha tem como base o fato que existe nos dados o perfil da velocidade S medido por outras técnicas (medidas acústicas de dipolo) com precisão maior. De fato, o modo Stoneley não é utilizado para medidas da velocidade da onda S como será feito, pois a sua sensibilidade é muito pequena, ou seja, uma grande variação no valor de V_S produz uma pequena variação na curva de dispersão, tornado este tipo de medida extremamente suscetível a ruído e outras oscilações. Neste sentido pode-se utilizar a diferença entre os valores encontrados e os valores de referência medidos por ferramenta de dipolo como um quantificador da qualidade do ajuste.

Por outro lado, como dito anteriormente, os dados não contém dois parâmetros aqui tratados como conhecidos: V_f e ρ_f . Inicialmente, tentou-se ajustar os três simultaneamente, mas dado a baixa sensibilidade da curva de dispersão à V_S e alta aos outros 2, os resultados foram fortes instabilidades em V_S e pouca reprodutibilidade, ou seja, realizando múltiplas

vezes os mesmos ajustes com resultados muito diferentes. A solução encontrada foi ajustar V_f e ρ_f para a região considerada homogênea de maneira simultânea, mas utilizando o valor de V_S de referência. Com o perfil de V_f e ρ_f em mãos, calculou-se a média dos seus valores na região, valores que foram utilizadas na forma de constantes para o ajuste de V_S em todo intervalo de profundidades. É razoável considerar a velocidade no fluido e a sua densidade como constantes uma vez que o intervalo de profundidade é pequeno.

A [Figura 12](#) apresenta como ocorre a variação dos outros parâmetros conhecidos retirados diretamente dos dados do REATE, onde é possível perceber que há uma oscilação no valor do raio poço iniciando próximo à profundidade de 2492 metros, o início da seção “problemática”. Outros dados também exibem variações significativas nessa região, sugerindo a possível existência de um plano de interceptação. A [Tabela 2](#) apresenta os parâmetros constantes durante toda a extensão do poço, com exceção de V_f e ρ_f que foram ajustados pelo procedimento descrito acima, mas individualmente para cada método de inversão, e cujos valores serão descritos nas próximas seções.

Tabela 2 – Parâmetros do poço

Parâmetro	Valor
Velocidade da onda P na ferramenta (V_{Pt})	5900 m/s
Velocidade da onda S na ferramenta (V_{St})	3100 m/s
Raio da ferramenta (R_0)	0,10795 m
Densidade da ferramenta (ρ_t)	7800 kg/m ³

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Inversão de uma profundidade

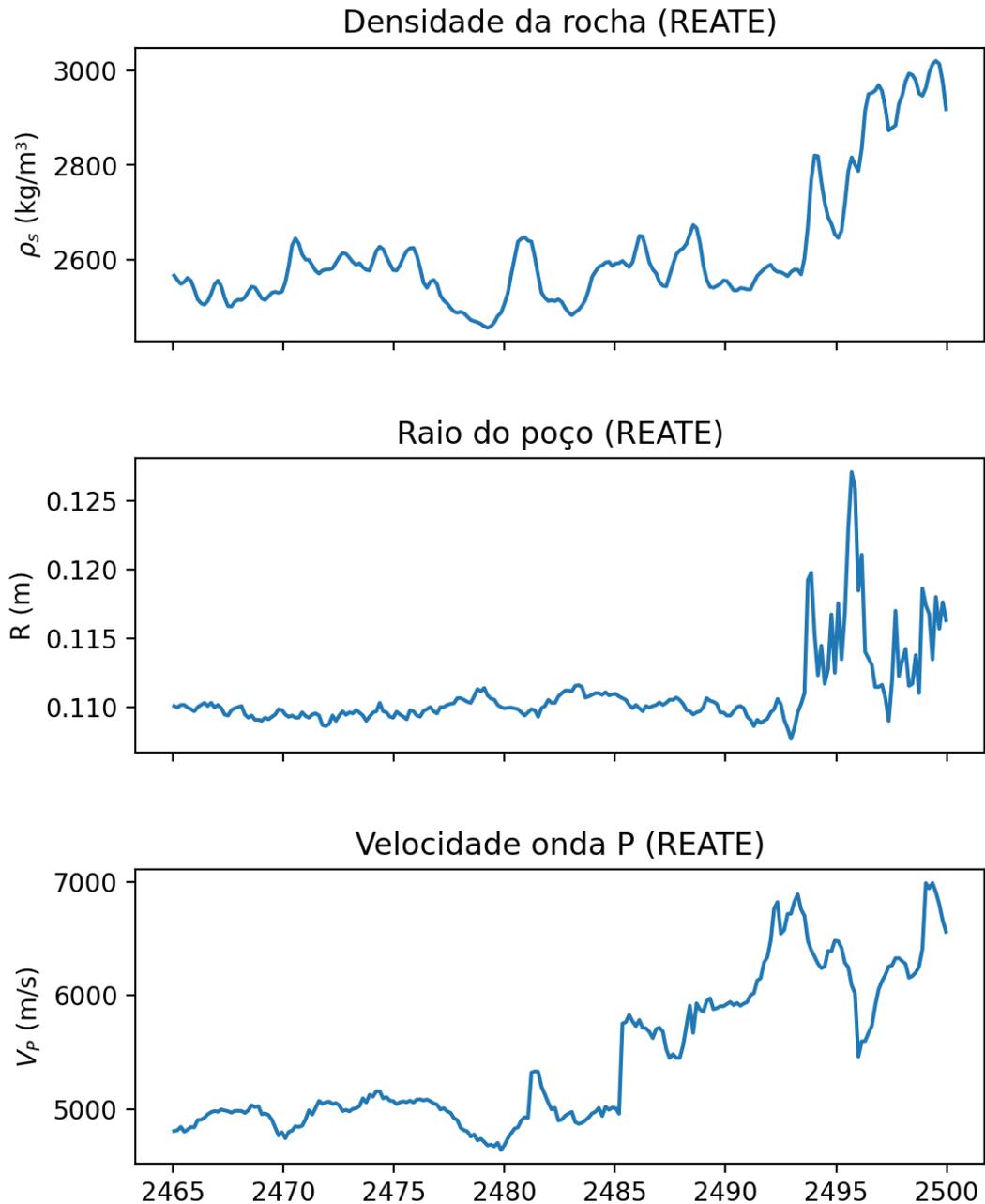
Considerando que o método de energia de curva pode ser utilizado como alternativa para fugir dos problemas relacionados ao ajuste pelos máximos ([seção 3.1](#)), nesta seção são abordadas estratégias para utilização e comparação dos métodos.

4.2.1 Processos de inversão

Para aplicar os métodos de inversão utilizando a curva de máximos e o método de energia de curva aos dados de campo, foi essencial seguir uma sequência de passos, que incluem:

- Método dos máximos:
 - A.1 Selecionar as formas de onda dos disparos relacionados a profundidade de referência;
 - A.2 Calcular as semelhanças espectrais para cada disparo utilizando a [Equação 2.63](#);

Figura 12 – Parâmetros que variam com a profundidade do poço



Fonte: Elaborado pelo autor.

- A.3 Obter as curva de máximo nas semelhanças;
 - A.4 Combinar as curvas de máximos utilizando a média aritmética ponderada (Equação 3.3);
 - A.5 Aplicar o método de recozimento simulado (subseção 2.4.3.2) para encontrar os parâmetros que melhor ajustam o modelo utilizando a “energia” dos mínimos quadrados (Equação 2.68).
- Método da energia de curva:

- B.1 Selecionar as formas de onda dos disparos relacionados a profundidade de referência;
- B.2 Calcular a semelhança espectral para cada disparo utilizando a [Equação 2.63](#);
- B.3 Combinar as semelhanças espectrais utilizando a média aritmética ([Equação 3.3](#)), média geométrica ([Equação 3.4](#)) e a confluência ([Equação 3.5](#));
- B.4 Aplicar o método de recozimento simulado ([subseção 2.4.3.2](#)) para encontrar os parâmetros que melhor ajustam o modelo utilizando a energia de integração de curva ([Equação 3.1](#)).

Vale salientar que o passo B.3 é realizado de modo independente, ou seja, realiza-se um empilhamento utilizando a média aritmética, outro utilizando a média geométrica e outro a confluência. A partir disso obtém-se três semelhanças combinadas (uma com cada método) e o recozimento simulado é aplicado em cada uma dessas semelhanças, como mostra a [Figura 13](#). Além disso, o recozimento simulado é repetido diversas vezes com a finalidade de melhorar a curva de dispersão.

4.2.2 Exemplos de profundidades

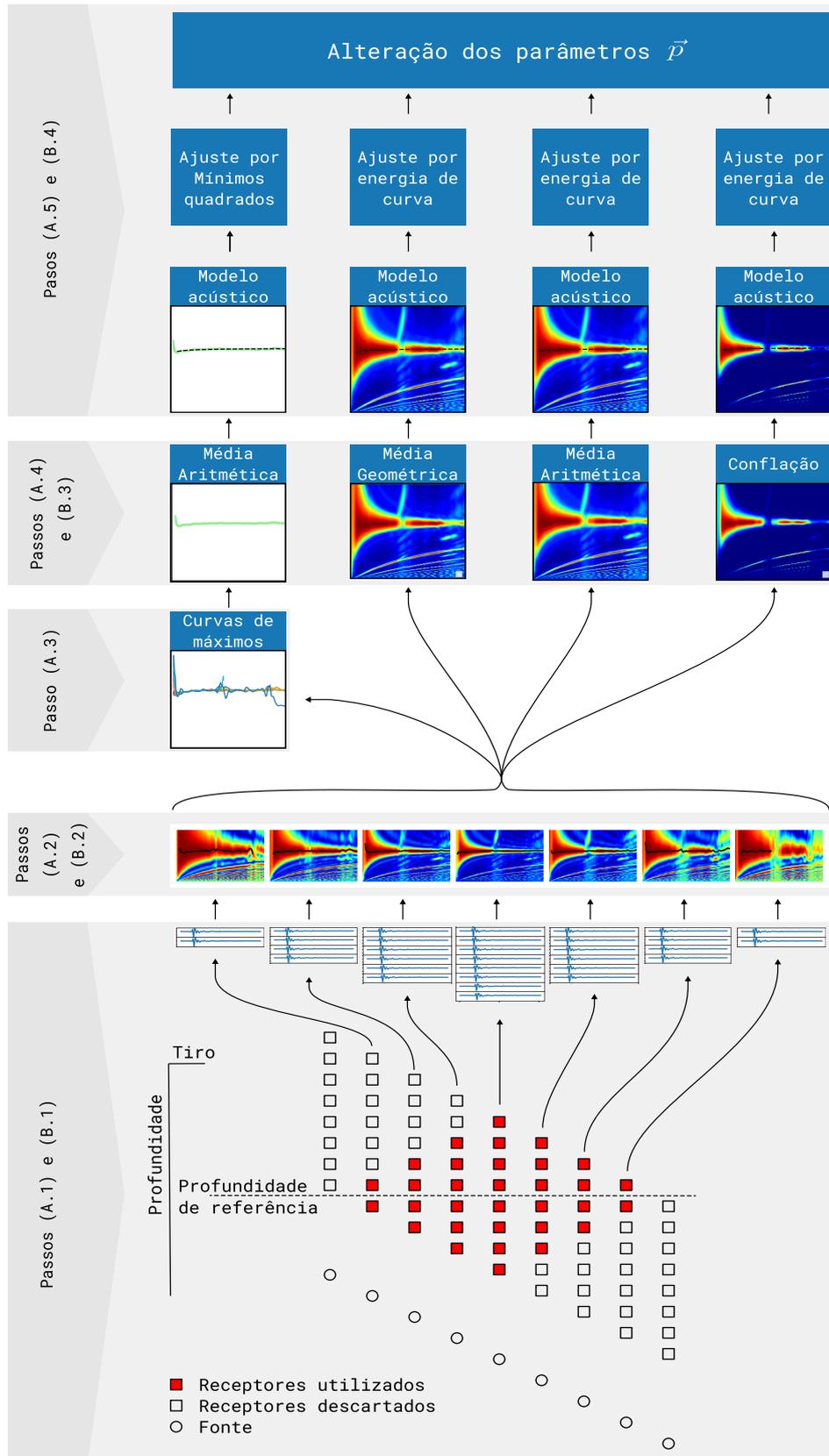
Para uma região do poço pouco acidentada, que não apresenta variações abruptas nos parâmetros, as curvas de dispersão não devem apresentar problemas com ruídos e interferências, como mostra a [Figura 14](#).

É perceptível que todos os métodos demonstram coerência entre o ajuste do modelo e o mapa da semelhança espectral, o que também se aplica à curva de máximos, onde o ajuste do modelo se alinha com os pontos de máximos. O valor do parâmetro ajustado ([Tabela 3](#)), V_S , está próximo da referência, e tanto ρ_f quanto V_f apresentaram valores próximos entre os métodos. Note que para frequências menores que aproximadamente 500 Hz a energia do sinal é somente residual. Optou-se, portanto, em limitar o ajuste em todos os métodos à faixa entre 600 e 10000 Hz. Mesmo assim, os valores vindos do método de curva de máximos foram significativamente afetados por esta região, explicando os desvios em relação à referência observados. Este é um exemplo das limitações discutidas na [seção 3.1](#), em particular da 3. Também não seria razoável estender o corte nas baixas frequências muito além de 600 Hz, pois é justamente nas frequências baixas que a dispersão do modo Stoneley aparece.

No contexto dos métodos de empilhamento, nota-se que o método de confluência apresenta um contraste significativamente maior em comparação com as médias aritmética e geométrica. Essa diferença de contraste reduz o impacto das oscilações de alta frequência e também dos modos que eventualmente cruzam o diagrama.

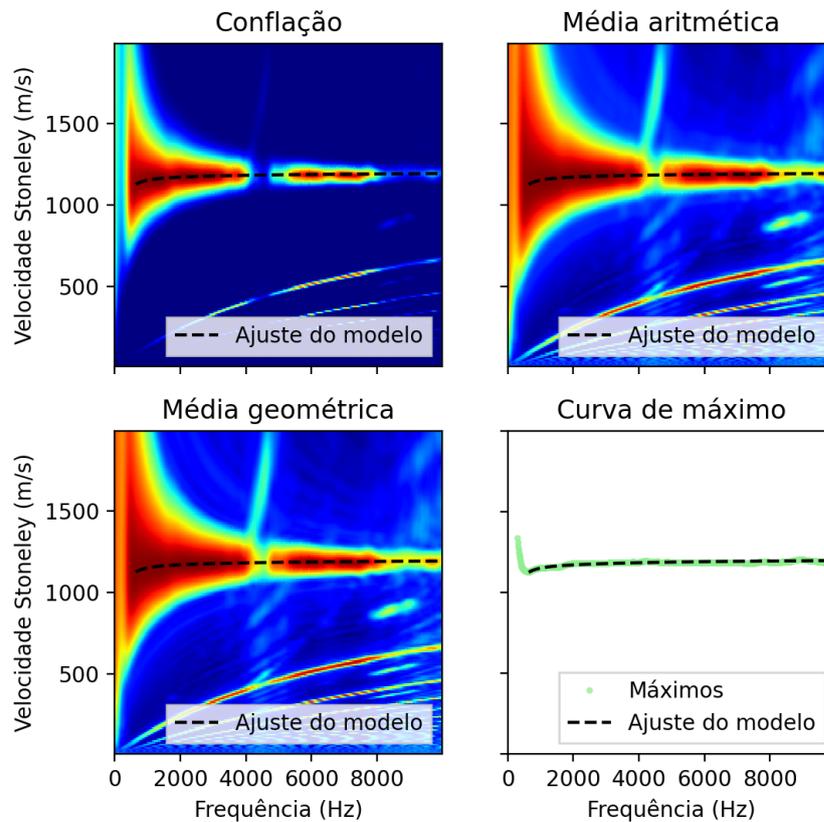
É crucial também aplicar os métodos a uma profundidade na região problemática, dado que é comum encontrar regiões com características semelhantes em poços de explora-

Figura 13 – Diagrama do procedimento realizado, partindo de múltiplos tiros até determinar o melhor ajuste por meio do recozimento simulado utilizando dois métodos distintos para o ajuste e três métodos de empilhamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – Ajuste da curva de dispersão do modelo acústico utilizando os quatro métodos de inversão distintos para a profundidade de 2470 m.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Valores para os parâmetros ajustados por diferentes métodos de V_S para diferentes profundidades, já ρ_f e V_f são considerados constantes para todo o intervalo.

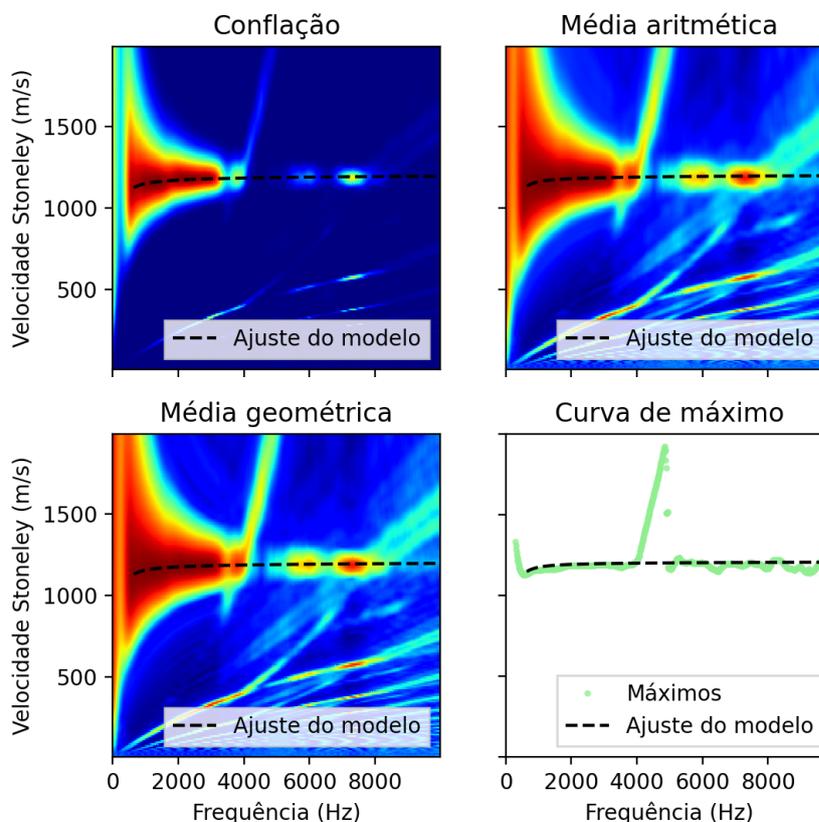
Método	V_S (m/s)		ρ_f (kg/m ³)	V_f (m/s)	
	Profundidade (m)	2470			2492
Conflação		3216,4	3036,4	1013,3	1205,5
Média aritmética		3231,6	3665,5	1008,6	1205,4
Média geométrica		3124,3	3276,2	1004,7	1205,4
Máximos		2875,5	4580,0	1005,6	1211,9
Referência		2913,5	3281,7	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

ção. Nos diagramas obtidos para essa profundidade evidencia-se a dificuldade relacionada ao ajuste do modo estudado, como mostra a [Figura 15](#)

É possível notar uma faixa interceptando o modo principal, esse fenômeno pode ser resultado de uma reflexão da própria onda Stoneley em um plano que cruza o poço na região. No entanto, o contraste aplicado pela confluência descaracteriza seu impacto. Em contrapartida, a curva de máximo não desconsidera esse modo e apresenta uma

Figura 15 – Ajuste da curva de dispersão do modelo acústico utilizando os quatro métodos de inversão distintos para a profundidade de 2492 metros.



Fonte: Elaborado pelo autor.

descontinuidade nos pontos, evidenciando a dificuldade na estimativa de V_S como pode ser visto na Tabela 3. Este é um caso claro da limitação 1 discutida na seção 3.1. Por fim, fica exemplificado como a integração da semelhança não é tão afetada pela reflexão, resultando em valores mais próximos ao de referência, em especial a média geométrica para este caso particular.

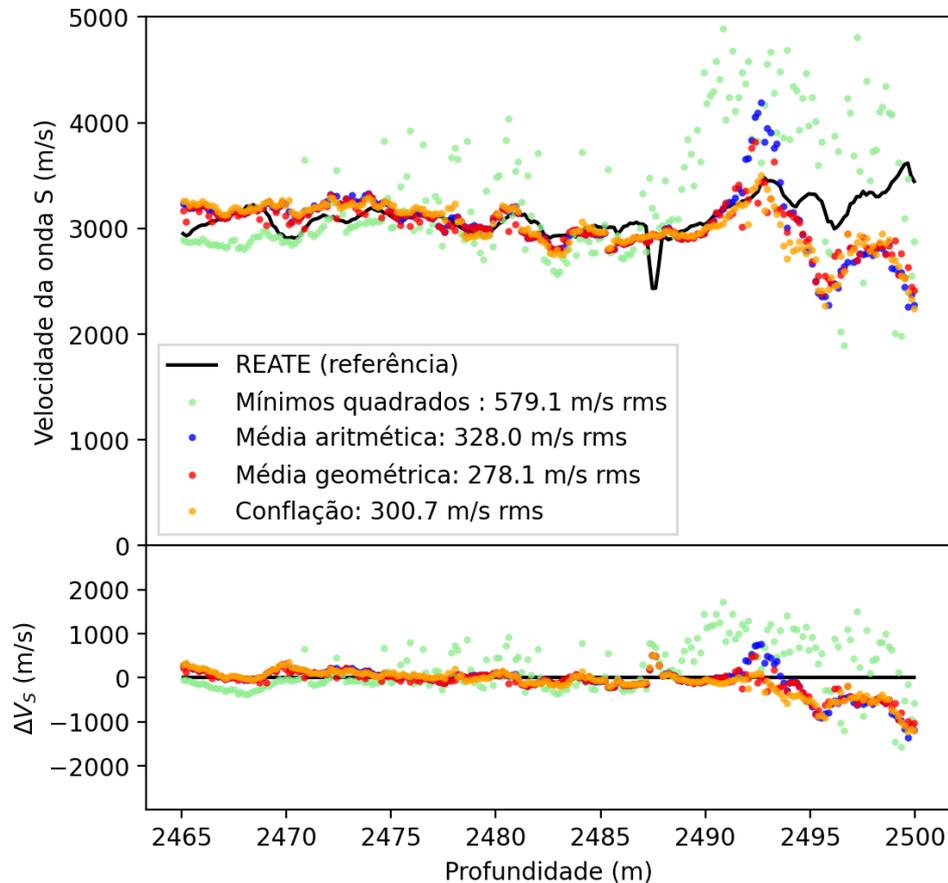
4.3 Ajuste da seção do poço

Para a construção de um perfil da velocidade V_S , ou seja, como que V_S varia com a profundidade z do poço, é necessário repetir esse procedimento ao longo de toda a extensão do poço ou para o intervalo de interesse. Analisar um conjunto de profundidades também é uma maneira de aumentar a confiabilidade estatística dos resultados.

O procedimento de inversão foi repetido em um intervalo de 35 metros de profundidade no qual foram realizados 230 disparos, com a ferramenta se deslocando meio pé (≈ 15 cm) entre os disparos. Os parâmetros iniciais (valores iniciais de V_S) utilizados no recozimento simulado foram os valores de referência para a primeira profundidade de 2465 m. O resultado deste processo é gráfico da velocidade de propagação da onda em função

da profundidade, [Figura 16](#).

Figura 16 – A figura superior representa um gráfico da velocidade em função da profundidade para uma faixa de 35 metros no poço para o modo S. Na figura inferior o gráfico representada a variação da velocidade em função da profundidade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se separar a análise em duas etapas, sendo elas:

1. Comparação visual entre o método de máximos e o método de energia de curva. Para isso pode-se observar o comportamento das curvas na [Figura 16](#), onde é possível perceber que as curvas que utilizam do ajuste por meio da energia estão mais próximas da curva de referência;
2. Comparação entre os diferentes métodos de empilhamento de semelhanças para o método de energia de curva. Essa tarefa requer uma precisão maior, para isso deve-se quantificar a comparação.

Para quantificar a qualidade dos valores estimados, utilizou-se a raiz do valor quadrático médio (do inglês *root mean square*, RMS) da diferença entre os valores de um

dado método e da referência. O valor da RMS pode ser escrito como

$$\Delta V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (V_{ref,i} - V_i)^2}, \quad (4.1)$$

onde N é o número total de disparos, $V_{ref,i}$ a velocidade de referência para o disparo i e V_i a velocidade ajustada para o disparo i .

No gráfico da [Figura 16](#) pode-se perceber os valores RMS encontrados para cada curva. Por meio destes valores nota-se que o método de ajuste pelos pontos de máximo apresentou uma diferença consideravelmente maior que os demais. Já para as diferentes formas de empilhamento a distância entre as curvas é pequena e dentre os métodos testados o qual apresenta a menor diferença é o método de média geométrica com $V_{RMS} = 278,1$ m/s.

5 Conclusões

Neste trabalho realizou-se a comparação de diferentes métodos de inversão de dados acústicos em poços preenchidos com fluido. Para isso, foi feito o uso de um modelo acústico, obtido através da aplicação das condições de contorno na solução da equação de onda para meio elásticos. Além disso, as técnicas de inversão de dados comparadas utilizam métodos estatísticos para a combinação de dados, métodos que também foram comparados.

Assim, foram utilizados e comparados os métodos de inversão por meio da curva de máximos e o método por integração da semelhança espectral. As diferentes técnicas de empilhamento foram aplicadas no empilhamento das semelhanças no método de integração da semelhança espectral.

Os métodos foram aplicados a dados de campo, uma vez que o modelo acústico necessita uma grande quantidade de parâmetros do poço. Os dados utilizados são de um poço exploratório desativado e são disponibilizados pela Agência Nacional de Petróleo e Gás Natural através do projeto [REATE \(2021\)](#).

Desse modo, nos dados testados, o método de integração da curva de dispersão sobre a semelhança espectral apresentou melhores resultados, independente da forma de combinação estatística da semelhança. Em especial, no ajuste da velocidade da onda S, a média geométrica teve uma diferença rms em relação aos valores de referência de 278,1 m/s, consideravelmente menor que os 579,1 m/s obtidos pela curva de máximo, mostrando-se menos suscetível às flutuações devido às condições não ideais do poço.

Referências

- AARTS, E.; LAARHOVEN, P. van. Simulated annealing: An introduction. **Statistica Neerlandica**, v. 43, n. 1, p. 31–52, 1989. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9574.1989.tb01245.x>>. Citado na página 35.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. Dover Publications, 1965. (Applied mathematics series). ISBN 9780486612720. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=MtU8uP7XMvoC>>. Citado na página 27.
- BRIE, A. et al. Quantitative Formation Permeability Evaluation from Stoneley Waves. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, v. 3, n. 02, p. 109–117, abr. 2000. ISSN 1094-6470. Citado na página 10.
- CHENG, C.; JINZHONG, Z.; BURNS, D. R. Effects of in situ permeability on the propagation of stoneley (tube) waves in a borehole. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 52, n. 9, p. 1279–1289, 1987. Citado na página 12.
- CHENG, C. H.; TOKSOZ, M. N. Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustic logs. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 46, n. 7, p. 1042–1053, 1981. Citado na página 12.
- CLARO, D. S. **Computational analysis of dispersive acoustic waves in fluid-filled boreholes**. Tese (Doutorado) — Instituto de Física Gleb Wataghin - Universidade Estadual de Campinas, 2020. Citado na página 21.
- DALEN, K. N. V. **Multi-component acoustic characterization of porous media**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 10.
- FRANCO, J. A. et al. Sonic investigation in and around the borehole. **Oilfield Review**, v. 18, n. 1, p. 14–31, 2006. Citado na página 10.
- HEIMFARTH, T. **Tobias Heimfarth / Awlat**. 2022. Disponível em: <<https://gitlab.com/tobias.heimfarth/awlat>>. Citado na página 40.
- HILL, T. P.; MILLER, J. How to combine independent data sets for the same quantity. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 21, n. 3, p. 033102, 07 2011. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3593373>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- HSU, K.; CHANG, S. Multiple-shot processing of array sonic waveforms. **GEOPHYSICS**, v. 52, n. 10, p. 1376–1390, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1442250>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- KAUSEL, E. **Fundamental solutions in elastodynamics: a compendium**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 17.

- KHAYER, K. et al. Permeability Estimation from Stoneley Waves in Carbonate Reservoirs. **Türkiye Jeoloji Bülteni**, v. 65, n. 1, p. 35–42, out. 2021. ISSN 1016-9164. Citado na página 12.
- LAY, T.; WALLACE, T. C. **Modern global seismology**. [S.l.]: Elsevier, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- LI, W. et al. Forward and backward amplitude and phase estimation method for dispersion analysis of borehole sonic measurements. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 80, n. 3, p. D295–D308, 2015. Citado na página 13.
- NOLTE, B.; RAO, R.; HUANG, X. **Dispersion analysis of split flexural waves**. [S.l.], 1997. Citado na página 30.
- PAILLET, F. L.; CHENG, C. H. **Acoustic Waves in Boreholes**. 1ª edição. ed. [S.l.]: CRC Press, 2020. ISBN 978-0-367-58000-1. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.
- PEI, D.; LOUIE, J. N.; PULLAMMANAPPALLIL, S. K. Application of simulated annealing inversion on high-frequency fundamental-mode rayleigh wave dispersion curves. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 72, n. 5, p. R77–R85, 2007. Citado na página 35.
- REATE. **Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis: Banco de dados**. 2021. Acesso em: 20 jul. 2023. Disponível em: <<https://reate.cprm.gov.br/anp/TERRESTRE>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 50.
- SAXENA, V.; KRIEF, M.; ADAM, L. **Handbook of Borehole Acoustics and Rock Physics for Reservoir Characterization**. [S.l.]: Elsevier Science, 2018. ISBN 9780128123324. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.
- SLAWINSKI, M. A. **Waves and Rays in Elastic Continua**. Illustrated edição. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Company, 2011. ISBN 978-981-4289-00-9. Citado na página 17.
- STONELEY, R.; BAKER, H. F. Elastic waves at the surface of separation of two solids. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 106, n. 738, p. 416–428, out. 1924. Publisher: Royal Society. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1924.0079>>. Citado na página 12.
- TANG, X.-M.; CHENG, C. H. A.; CHENG, A. **Quantitative borehole acoustic methods**. [S.l.]: Elsevier, 2004. v. 24. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 32 e 34.
- WHITE, J. E. **Seismic Wave Propagation: Collected Works of J. E. White**. jan. 2000. Citado na página 12.
- WIKIPÉDIA. **Tensor tensão de Cauchy** — **Wikipédia, a enciclopédia livre**. 2021. Acesso em: 25 de nov. 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Tensor_tens%C3%A3o_de_Cauchy&oldid=61918917>. Citado na página 15.
- WINKLER, K. W.; LIU, H.-L.; JOHNSON, D. L. Permeability and borehole stoneley waves: Comparison between experiment and theory. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 54, n. 1, p. 66–75, 1989. Citado na página 12.