

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL – UFFS
***CAMPUS* CHAPECÓ — SC**
CURSO DE MATEMÁTICA — LICENCIATURA

ANA CLÁUDIA HOPPE

MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL:
ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE NÚMEROS NATURAIS EM LIVROS
DIDÁTICOS DA DÉCADA DE 1960

CHAPECÓ/SC

2021

ANA CLÁUDIA HOPPE

**MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL:
ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE NÚMEROS NATURAIS EM LIVROS
DIDÁTICOS DA DÉCADA DE 1960**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática da Universidade Federal
da Fronteira Sul.

Orientação: Prof^ª Dr^a Marisol Vieira Melo

Coorientação: Prof^ª Dr^a Ana Maria Basei

CHAPECÓ/SC

2021

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Hoppe, Ana Cláudia

Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo sobre a abordagem de números naturais em livros didáticos da década de 1960 / Ana Cláudia Hoppe. -- 2021.

117 f.

Orientadora: Marisol Vieira Melo

Co-orientadora: Ana Maria Basei

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2021.

1. Movimento da Matemática Moderna. 2. Livros didáticos. 3. Números naturais. I. Melo, Marisol Vieira, orient. II. Basei, Ana Maria, co-orient. III. Universidade Federal da Fronteira Sul. IV. Título.

ANA CLÁUDIA HOPPE

**MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL:
ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DE NÚMEROS NATURAIS EM LIVROS
DIDÁTICOS DA DÉCADA DE 1960**

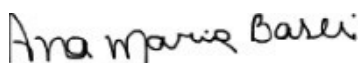
Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática da Universidade Federal
da Fronteira Sul.

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi defendido e aprovado pela banca em: 28/01/2021

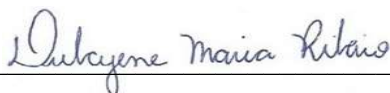
BANCA EXAMINADORA



Prof^ª Dr^ª Marisol Vieira Melo – UFFS
Orientadora



Prof^ª Dr^ª Ana Maria Basei – UFFS
Coorientadora



Prof^ª Dr^ª Dulcyene Maria Ribeiro – UNIOESTE
Avaliadora



Prof^ª Dr^ª Lucia Menoncini – UFFS
Avaliadora

DEDICATÓRIA

*À minha mãe, Sirlei Salete Lasch,
com profundo amor e inestimável gratidão.*

AGRADECIMENTOS

Entendo que o ato de agradecer propicia um momento de recolhimento e de recordação de tudo aquilo que se fez presente na trajetória do trabalho e que favoreceu para torná-lo mais leve e agradável. Nesse sentido, muitas foram as pessoas que contribuíram para que este objetivo se concretizasse.

A minha mãe, Sirlei, meu porto seguro, que sempre acreditou em mim e não mediu esforços para que eu chegasse até aqui.

Ao meu irmão Adenir, por todo apoio e carinho nessa trajetória.

A minha orientadora, professora Dr^a Marisol Vieira Melo, por aceitar o desafio de orientar este trabalho, pelos conhecimentos compartilhados e pelo incentivo à pesquisa. Obrigada por fazer parte da minha trajetória pessoal e profissional e sempre acreditar que essa caminhada fosse possível.

A minha coorientadora, professora Dr^a Ana Maria Basei, por suas orientações e encaminhamentos, obrigada por compartilhar suas experiências e ajudar na construção do estudo.

Aos professores que compuseram a banca: Dulcyene Maria Ribeiro e Lucia Menoncini. Agradeço a leitura atenta e as considerações visando aprimorar o trabalho.

A Universidade Federal da Fronteira Sul por abrir suas portas e me proporcionar o acesso a um curso superior de qualidade, contribuindo para minha formação acadêmica e proporcionando vivências especiais e enriquecedoras.

Aos professores do curso de Matemática, que ao longo de minha formação acadêmica deram suporte para a aquisição de conhecimentos e me ensinaram a seguir em frente, sempre.

Aos meus colegas de graduação, pelos momentos compartilhados e pela parceria de estudo, e em especial, a minha colega Tainá Both por toda a força, incentivo e por sempre ter as palavras certas para ajudar.

Aos meus amigos, pelos momentos vividos, pela presença nos meus dias e momentos compartilhados, especialmente Alysson, Michael e Thais.

Por fim, a todos, que de alguma maneira, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa se remete ao passado para evidenciar elementos que nos auxiliem na compreensão dos impactos do Movimento da Matemática Moderna (MMM) nos livros didáticos, buscando mostrar sua implicação nas intenções pedagógicas de se ensinar números naturais. Sendo assim, optamos por uma investigação documental de abordagem qualitativa buscando responder a seguinte questão: **Qual a abordagem dos números naturais no contexto do Movimento da Matemática Moderna nos livros didáticos no período de 1960 – 1970?** Para compor nosso estudo foram selecionados três livros didáticos de matemática publicados na década de 1960, sendo eles: *Matemática para a primeira série ginásial* (1963) de autoria de Ary Quintella, *Matemática Curso Ginásial* (1967) de autoria do *School Mathematics Study Group* e *Matemática Curso Moderno* (1969) de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci. A pesquisa foi fundamentada teoricamente em Kline (1976), Búrigo (1989), Pinto (2005) e D'Ambrosio (2017) que destacam sobre o contexto, características e ideais defendidos pelo MMM; a busca para evidenciar o papel do livro didático foi fundamentada em Choppin (2004), Bittencourt (2004) e Valente (2008); e para compreender o currículo de matemática do ensino secundário recorremos a Silva (2016). A nossa análise delineou-se em duas etapas: análise descritiva e análise comparativa, que nos revelou que os números naturais foram abordados com enfoque na contagem e correspondência biunívoca. Os livros didáticos apontam para a existência de vestígios de Matemática Moderna, identificados a partir da incorporação de noções da teoria dos conjuntos, expressas nas representações de conjuntos por chaves e diagramas, relação de pertinência e da representação do conjunto dos números naturais pela letra $\mathbb{N}$. De todo modo, salientamos que cada autor dos livros didáticos se apropriou à sua maneira do que propunha o MMM, e essa subjetividade fez emergir diferentes perspectivas para a abordagem dos números naturais nos livros didáticos de matemática.

Palavras-chave: Movimento da Matemática Moderna. Livros didáticos. Números naturais.

ABSTRACT

This research refers to the past in order to highlight elements that help us understand the impacts of the Modern Mathematics Movement (MMM) in textbooks, searching to reveal the implications in the pedagogical intentions of teaching natural numbers. Therefore, a documental research with qualitative approach was chosen to answer the following question of investigation: **What is the approach of natural numbers in the context of the Modern Mathematics Movement in textbooks from 1960 to 1970?** In the order to constitute the study, three mathematical textbooks published in the 1960s were selected: *Matemática para a primeira série ginásial* (1963) by Ary Quintella, *Matemática Curso Ginásial* (1967) by *School Mathematics Study Group* and *Matemática Curso Moderno* (1969) by Alcides Bóscolo and Benedito Castrucci. This research was theoretically based on Kline (1976), Búrigo (1989), Pinto (2005) and D'Ambrosio (2017) which highlight the context, characteristics and ideals defended by the MMM; the search to highlight the role of the textbook was based on Choppin (2004), Bittencourt (2004) and Valente (2008); in order to understand the secondary education math's curriculum we recourse to Silva (2016). The process of analysis considered two phases: descriptive analysis and comparative analysis, that show us that the natural numbers were approached with a focus on counting and biunivocal relation. The textbooks points to the existence of traces of Modern Mathematics, identified through the incorporation of notions of the set theory, expressed in the representations of sets by braces and diagrams, belonging relation and the representation of the set of natural numbers by the letter $\mathbb{N}$. In any case, it's important to highlight that each author appropriated the MMM proposals on they own way, and this tendency brought out different perspectives for the approach of natural numbers in math textbooks.

Keywords: Modern Mathematics Movement. Textbooks. Natural numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figuras

Figura 1 - Contracapa do livro Quintella.....	58
Figura 2 - Representação de contagem.....	59
Figura 3 - Representação de correspondência de conjuntos.....	60
Figura 4 - Representação da correspondência do zero a uma coleção vazia.....	61
Figura 5 - Representação de igualdade entre conjuntos	61
Figura 6 - Representação da desigualdade entre conjuntos.....	62
Figura 7 - Representação do quadro de símbolos.....	63
Figura 8 - Representação da soma através de exemplo	64
Figura 9 - Representação da propriedade associativa da soma	65
Figura 10 - Representação da propriedade dissociativa	65
Figura 11 - Representação da variação da soma.....	65
Figura 12 - Representação da propriedade da subtração	66
Figura 13 - Quadro com propriedade da subtração	67
Figura 14 - Observação sobre a propriedade	67
Figura 15 - Ilustração que representa a subtração	67
Figura 16 - Capa do Livro do SMSG	68
Figura 17 - A ideia de número por correspondência de conjuntos.....	71
Figura 18 - Representação de correspondência biunívoca	71
Figura 19 - O conceito de igualdade.....	72
Figura 20 - Tabela da operação de soma	72
Figura 21 - Propriedade comutativa da adição	73
Figura 22 - Propriedade associativa da adição	73
Figura 23 - A propriedade do fechamento da adição.....	74
Figura 24 - Exemplo de subtração.....	75
Figura 25 - Exemplo de exercício com tentativa de contextualização	76
Figura 26 - Exemplo de exercício algébrico.....	76
Figura 27 - Exemplo de exercícios envolvendo correspondência biunívoca	76
Figura 28 - Definição de conjunto.....	79
Figura 29 - Exemplos de conjuntos	79
Figura 30 - A contagem de elementos e a noção de conjunto	80
Figura 31 - Numerais.....	81

Figura 32 - A desigualdade entre numerais	82
Figura 33 - Relações de equivalência	82
Figura 34 - A relação de ordem de igualdade.....	83
Figura 35 - A relação de ordem $a > b$ entre dois conjuntos	83
Figura 36 - A relação de ordem $a < b$ entre dois conjuntos	83
Figura 37 - Propriedades dos números inteiros naturais.....	85
Figura 38 - Representação geométrica do conjunto $\mathbb{N}$	85
Figura 39 - Conjunto reunião.....	86
Figura 40 - Reunião de conjuntos por diagramas	86
Figura 41 - Dispositivo da adição.....	87
Figura 42 - Soma representada pela reunião de conjuntos	88
Figura 43 - Definição de adição	88
Figura 44 - Tabuada de dupla entrada da adição	89
Figura 45 - Representação do numeral pela adição	91
Figura 46 - Algoritmização da subtração	91
Figura 47 - Ordem na operação de subtração	92
Figura 48 - Exemplos de subtração e sua prova	93
Figura 49 - Quadro de resumo sobre subtração	93
Figura 50 - Exemplos de aplicabilidade de propriedade	94
Figura 51 - Representação de conjunto	95
Figura 52 - Atividades com simbolismo matemático.....	105

Quadros

Quadro 1 - Configuração do sistema educacional público na década de 1960	14
Quadro 2 - A apropriação da Matemática Moderna em regiões e/ou centros educacionais	34
Quadro 3 - Os aspetos da Matemática Moderna e os saberes matemáticos desse período	35
Quadro 4 - A formação de professores como aspecto de pesquisa	36
Quadro 5 - As práticas de professores durante o MMM como tema de pesquisa	37
Quadro 6 - Pesquisas relacionadas ao livro didático	37
Quadro 7 - Os estudos com livros didáticos referentes a Números	39
Quadro 8 - Assuntos Mínimos em um moderno programa de matemática no ensino ginásial	43
Quadro 9 - Aspectos gerais dos livros didáticos	97
Quadro 10 - O conceito de número nos livros didáticos	98

Quadro 11 - Definição de adição nos livros didáticos	100
Quadro 12 - Definição de subtração nos livros didáticos	101
Quadro 13 - Linguagem nos livros didáticos	103
Quadro 14 - Resumo dos resultados da análise dos livros didáticos	107

LISTA DE SIGLAS

CECIBA	Centro de Estudos de Ciências da Bahia
EUA	Estados Unidos da América
GEEM	Grupo de Estudos do Ensino da Matemática
GEEMPA	Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre
GHEMAT	Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática
IBECC	Instituto Brasileiro de Educação Ciência e Cultura
IMURN	Instituto de Matemática do Rio Grande do Norte
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NEDEM	Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática no Paraná
SMSG	<i>School Mathematics Study Group</i>
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul
UICSM	<i>University of Illinois Committee on School Mathematics</i>
UNESCO	<i>United Nations Education, Scientific and Cultural Organization</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
2	O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA	18
2.1	EMERGÊNCIA DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA	18
2.2	RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA DE MODELOS EDUCACIONAIS POR PAÍSES SUBDESENVOLVIDOS	22
2.3	O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL	24
2.4	O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL: O QUE REVELAM AS PESQUISAS ACADÊMICAS BRASILEIRAS NA DÉCADA 2010-2020.....	32
2.4.1	As pesquisas sobre números em livros didáticos no contexto do MMM publicadas na década 2010-2020	39
3	O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO SECUNDÁRIO DURANTE O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL	42
4	O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO DESENVOLVIMENTO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL.....	46
5	PROCESSO METODOLÓGICO.....	52
6	ANÁLISE DA ABORDAGEM DE NÚMERO EM LIVROS DIDÁTICOS DA DÉCADA DE 1960.....	57
6.1	ANÁLISE DESCRITIVA DOS LIVROS DIDÁTICOS	57
6.1.1	Livro: MATEMÁTICA para a primeira série ginásial (1963) de autoria de Ary Quintella	57
6.1.2	Livro: MATEMÁTICA Curso Ginásial (1967), de autoria do <i>School Mathematics Study Group</i>.....	68
6.1.3	Livro: Matemática Curso Moderno (1969), de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci.....	77
6.2	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS LIVROS DIDÁTICOS.....	96
7	RESULTADOS	107
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
	REFERÊNCIAS	111

1 INTRODUÇÃO

Dentre os movimentos reformistas no âmbito da educação matemática ocorridos no Brasil, nas décadas de 1960 e 1970 emergiu um movimento que provocou mudanças significativas nas intenções pedagógicas da época: o Movimento da Matemática Moderna (MMM). De acordo com Neuza Bertoni Pinto (2005) esse movimento seguiu tendências internacionais, modificando não somente as finalidades de ensino, mas principalmente os conteúdos tradicionais de matemática, enfatizando a axiomatização, as estruturas algébricas, a lógica e a teoria de conjuntos.

O presente trabalho foi motivado pelo interesse em compreender o processo histórico de construção da Educação Matemática em nosso país, mais especificamente como o MMM impactou diretamente sobre os conteúdos matemáticos estudados pelos alunos, condição passível de ser verificada em livros didáticos da época. O tema surgiu após diálogos sobre a constituição da Educação Matemática no Brasil e motivados pela curiosidade acerca das origens e desdobramentos do movimento, inseridas nos componentes curriculares de História da Matemática, Tendências na Educação Matemática e Pesquisa em Educação Matemática, integrantes do curso de Matemática - Licenciatura da UFFS, *campus* Chapecó.

O modelo de ensino adotado em uma determinada época exerce influência direta sobre a educação, os alunos, as políticas públicas e a formação de professores, sendo seu conhecimento imprescindível para a compreensão de sua importância no decorrer da história educacional do Brasil. Estes modelos são influenciados fundamentalmente por tendências pedagógicas e de pesquisas da área, que apontam para o contexto social e cultural em que esta ocorre.

Com o propósito de entender melhor como se deu o processo de ensino e de aprendizagem no auge do MMM, além de considerar a tendência em Educação Matemática vigente essencialmente na década de 1960, realizou-se um levantamento bibliográfico que aponta as origens e características do movimento. Desse modo, foi realizado um estudo de publicações sobre o tema, além de três livros didáticos publicados no período, os quais evidenciam o conceito de número, buscando assim, refletir sobre as influências do movimento no ensino daquela época.

Nesse sentido, o tema de pesquisa consiste na abordagem de números naturais em livros didáticos no período do MMM no Brasil, especialmente na década de 1960, buscando na análise de documentos uma fonte de investigação. Os livros didáticos analisados foram:

- *Matemática para a primeira série ginásial* (1963) de autoria de Ary Quintella;
- *Matemática Curso Ginásial* (1967) de autoria do *School Mathematics Study Group* com tradução de Lafayette de Moraes e colaboradores;
- *Matemática Curso Moderno* (1969) de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci.

Todos estes materiais eram destinados à primeira série do curso ginásial (Quadro 1). Com isso, tem-se a finalidade de detalhar e enriquecer a discussão, tendo os livros didáticos apresentados acima como objetos centrais da pesquisa, levando em consideração seus aspectos bibliográficos e metodológicos. Dessa forma, procuramos estabelecer relações entre as propostas defendidas pela Matemática Moderna e o conteúdo apresentado nas obras, de modo a responder o problema central da pesquisa: *Qual a abordagem dos números naturais no contexto do Movimento da Matemática Moderna nos livros didáticos no período de 1960 – 1970?*

Quadro 1 - Configuração do sistema educacional público na década de 1960

Nível de ensino	Corresponde ao
Ensino Primário (4 anos)	Atual Ensino Fundamental, anos iniciais
Exame de Admissão	-
Ensino Secundário • Ginásio (4 anos) • Colégio (3 anos)	Ginásio: atual Ensino Fundamental, anos finais. Colégio: atual Ensino Médio

Fonte: Elaborado pela autora

Com relação aos livros didáticos, estes foram encontrados em formato digital por meio da exploração do Repositório de Conteúdo Digital da Universidade Federal de Santa Catarina, no acervo de História da Educação Matemática¹. Ao escolhermos um assunto específico ponderamos que a análise de um dos temas possibilitaria o aprofundamento necessário no sentido de identificar tendências da Matemática Moderna e de que maneira o conteúdo é apresentado. Assim, elegemos o tema *Números*, uma vez que o conceito é base para o estudo da aritmética, que compreende grande parte da primeira série ginásial.

Para compreender os livros didáticos, enquanto documentos históricos e agentes da história da educação matemática, é preciso que sua “leitura” seja feita pela perspectiva em que

¹ O acervo é vinculado ao Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT). Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

a pesquisa está incluída, levando em consideração seu contexto e as questões que pretendem ser respondidas. Desse modo, ao nos referirmos a análise de livros didáticos inseridos no contexto do MMM precisamos tomar conhecimento do que foi esse movimento, quais as ideias defendidas pelo mesmo e como isso afetou os conteúdos de matemática.

Dessa forma, como objetivo geral, esse estudo visa *caracterizar a abordagem de número no contexto do Movimento da Matemática Moderna no Brasil verificando indícios que lhe foram peculiares a partir da análise de livros didáticos compreendidos nesta época.*

Quanto aos objetivos específicos, procuramos:

- Caracterizar o papel assumido pelos livros didáticos de matemática como agentes de disseminação da Matemática Moderna para as mais diversas regiões do país.
- Evidenciar por intermédio da análise de trechos de livros didáticos da época a relação entre os ideais do Movimento da Matemática Moderna e o conteúdo apresentado por eles, buscando esses indícios no interior das obras.
- Verificar metodologicamente a abordagem sobre números naturais em livros didáticos inseridos no Movimento da Matemática Moderna.

A investigação se deu por meio de busca em acervos digitais, artigos, dissertações no âmbito da Educação Matemática e em livros, com destaque para Morris Kline (1976), Elisabete Zardo Búrigo (1989), Wagner Rodrigues Valente (2008), Neuza Bertoni Pinto (2009), Beatriz Silva D'Ambrosio² (2017) e Viviane Barros Maciel (2019). Ademais, foi realizada uma revisão sobre o tema de modo a identificar o que dizem os estudos sobre o MMM dos últimos anos e especificamente, se há estudos envolvendo livros didáticos, de modo a traçar um breve panorama sobre a recorrência e as abordagens utilizadas.

Acerca da estrutura do trabalho, a pesquisa foi desenvolvida em 8 capítulos, sendo eles:

Capítulo 1 – Introdução. Neste capítulo pontuamos algumas considerações iniciais: apresentação do tema, dos objetivos, da motivação e da organização do estudo.

Capítulo 2 – O Movimento da Matemática Moderna. No segundo capítulo, situamos o leitor acerca do MMM, trazendo o contexto e as motivações que alavancaram o surgimento dessa

² Tradução da tese de doutorado em inglês *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education*, defendida em 1987, na Indiana University.

tendência a nível mundial, fazendo um breve levantamento sobre as principais características, intenções e ideais defendidos pelos pensadores apoiadores da Matemática Moderna. Posteriormente, discutimos sobre o contexto educacional dos países subdesenvolvidos mostrando como estes possuem uma dependência de tendências educacionais de países desenvolvidos, uma vez que o Brasil buscou nos EUA orientação e direção para as inovações curriculares que dizem respeito a matemática escolar. Além disso, destacamos o MMM no Brasil, de modo a identificar como ele se tornou uma tendência nos currículos de matemática e a natureza de seu desenvolvimento no nosso país. Encerramos este capítulo sistematizando uma revisão sobre o MMM, trazendo os trabalhos acadêmicos publicados na última década 2010-2020, de modo a identificar quais as temáticas têm sido recorrentes ao se estudar sobre esse período histórico.

Como referenciais teóricos, neste capítulo evidenciamos as contribuições de Morris Kline (1976), Elizabete Zardo Búrigo (1989), Neuza Bertoni Pinto (2005) e Beatriz Silva D'Ambrosio (2017).

Capítulo 3 – O currículo de matemática do ensino secundário durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Neste capítulo, abordamos algumas alterações sofridas pelo programa de matemática do ensino secundário, com destaque para as mudanças relacionadas com o surgimento da Matemática Moderna. Assim, relatamos brevemente a natureza das reformas Francisco Campos, Capanema e Simões Filho. Além disso, destacamos o IV Congresso de Ensino de Matemática, realizado no ano de 1962 em Belém (PA), onde foi apresentado o programa *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o ginásio e para o colégio* elaborado pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), currículo que trazia orientações didáticas e de conteúdos que guiaram a produção de livros didáticos e o ensino de matemática.

Como aporte teórico para esta discussão sobre o currículo de matemática usado na década de 1960, utilizamos a sistematização de Wilian Faias da Silva (2016).

Capítulo 4 – O papel do livro didático no desenvolvimento do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Neste capítulo, procuramos evidenciar o papel do livro didático enquanto objeto de estudo e seu uso no MMM, que teve a função de disseminar o movimento por todo o país. Nessa seção, fundamentada por Alain Choppin (2004), Circe Bittencourt (2004), Wagner Rodrigues Valente (2008) e Neuza Bertoni Pinto (2009), discutimos como os livros didáticos

acabaram sendo os protagonistas da tendência, destacando que até os professores mais resistentes acabaram cedendo à tendência da Matemática Moderna.

Capítulo 5 – Processo metodológico. No quinto capítulo delineamos o tipo de pesquisa realizada neste trabalho, que é entendido como qualitativo de fonte documental. Nesta etapa, destacamos os instrumentos e fontes escolhidos de modo a responder ao problema de pesquisa proposto, destacando o caminho metodológico adotado e as principais fontes teóricas que subsidiam o estudo.

Capítulo 6 – Análise da abordagem de número em livros didáticos da década de 1960. Neste capítulo, analisamos os livros didáticos procurando informações para identificar elementos que contribuam para a caracterização da matemática no contexto do MMM. A análise toma como tema principal, nesses livros, a abordagem de número. Portanto, a partir das etapas de análise descritiva e comparativa, esboçamos uma tentativa de identificar informações que nos fornecessem elementos para que seja possível caracterizar os aspectos que orientam o estudo sobre número em cada uma das obras.

A análise é baseada no currículo do programa *Assuntos mínimos*, elaborado pelo GEEM, e o livro didático é o objeto de análise, uma vez que, baseando-se em Choppin (2004), consideramos os livros didáticos como uma fonte referencial e instrumental. Para a análise dos dados, realizamos uma análise descritiva de maneira a caracterizar o conteúdo das obras, destacando trechos e realizando considerações sobre. A etapa de análise comparativa fundamentamos nas fichas-sínteses de Viviane Barros Maciel (2019), em que foram elaborados quadros que sintetizam a análise descritiva e permitem comparações sobre as abordagens, de modo a identificar possíveis similaridades.

Capítulo 7 – Resultados. Em busca de uma conclusão, é apresentada uma sistematização dos resultados interpretados a partir dos livros didáticos, pontuando contribuições, limitações e implicações do estudo. Desse modo, mostramos como, por meio da análise dos livros didáticos destinados à primeira série ginásial, foi possível identificar vestígios de Matemática Moderna, verificados através da linguagem e abordagem de conceitos.

Capítulo 8 – Considerações finais. Esta parte traz algumas ponderações para o desfecho do estudo.

2 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

2.1 EMERGÊNCIA DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Historicamente, diversos desenvolvimentos curriculares mundiais influenciaram a Educação Matemática no Brasil, como é o caso do movimento de reforma curricular conhecido como MMM. Este projeto se desenvolveu essencialmente nos Estados Unidos, país que era referência na busca de orientação e assistência para as reformas curriculares brasileiras. Assim, a compreensão de suas origens e características são fundamentais no sentido de entender de que maneira essa reforma foi utilizada como modelo para a elaboração do currículo em nosso país e como efetivamente esse movimento ocorreu.

Desse modo, ao apontar as origens da Matemática Moderna na década de 1960, é possível destacar duas forças que influenciaram as modificações curriculares: novas descobertas matemáticas e o impacto da Segunda Guerra Mundial.

Segundo D'Ambrosio (2017), algumas das principais evoluções na matemática incluíam o uso do método dedutivo, o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, a definição de números naturais com base em conceitos de conjuntos, o desenvolvimento de novos padrões de rigor, a evolução da geometria não euclidiana e a evolução da álgebra abstrata. A autora também destaca os trabalhos de Dedekind, Weierstrass, Cantor, Frege, Zermelo, Fraenkel e o grupo Bourbaki³, como influenciadores da evolução da matemática e que provocaram a alteração da matemática da época, fazendo germinar as primeiras sementes do MMM.

D'Ambrosio (2017) afirma que as inovações em matemática influenciaram o desenvolvimento de outros campos que usam a matemática como ferramenta, como é o caso da Física, Biologia e o desenvolvimento de tecnologias. Essas mudanças foram igualmente importantes devido à sua influência no currículo universitário de matemática, uma vez que os estudantes de outras áreas do conhecimento precisavam se familiarizar com as novas teorias que agiam sobre seu próprio campo.

³ Segundo Eliene Barbosa Lima (2012) o grupo Bourbaki foi um grupo formado em torno de um personagem fictício denominado Nicholas Bourbaki, sendo seus fundadores Henri Paul Cartan, Jean Frédéric Auguste Delsarte, Claude Chevalley, André Weil e Jean Dieudonné. O trabalho do grupo Bourbaki estava pautado no raciocínio dedutivo, formalismo lógico e o método axiomático, que objetivavam evidenciar o papel essencial que a ideia de estrutura teria para o estabelecimento da unidade do conhecimento matemático.

Entretanto, foram os desdobramentos da Segunda Guerra Mundial que alavancaram descobertas e os programas de matemática de modo a satisfazer as necessidades dos esforços de guerra. Assim, segundo D'Ambrosio (2017) houve uma busca de tópicos de matemática aplicada como: programação linear, teoria dos jogos, estatísticas e operações de investigação, uma vez que a precariedade da formação dos integrantes das forças armadas era um aspecto preocupante. Ademais, a autora destaca que:

Com o fim da guerra tornou-se evidente para a sociedade americana que não era suficiente preparar os alunos do ensino secundário para a competência funcional, que havia sido definida pelo movimento de educação progressista como a matemática para vida quotidiana em sociedade. Foi necessário redefinir a competência funcional em termos mais modernos, condizentes com uma sociedade tecnológica que se desenvolvia rapidamente. Além disso, muitos setores dessa sociedade exigiam que as pessoas fossem altamente treinadas em matemática. Tais setores modernos incluíam o governo, a indústria, os negócios, a engenharia, as ciências e outros. Aplicações da matemática foram ainda mais longe e se expandiram a outros domínios, como a psicologia, a sociologia, a gestão industrial, entre outros. Isso significava que a matemática estava se expandindo e seria estudada por um novo conjunto de pessoas anteriormente não incluídas nos cursos de matemática. (D'AMBROSIO, 2017, p. 66)

Nesse contexto pós-guerra, configurava-se uma disputa científica e tecnológica cada vez mais acirrada: as corridas espacial e armamentista. É nesse cenário de inovações matemáticas e pelo impacto dos desdobramentos da Segunda Guerra Mundial que emerge a Matemática Moderna. Desse modo, o movimento surgiu não apenas por meros interesses em práticas de ensino inovadoras e uma renovação no currículo, mas foram alavancados pela necessidade de novos conhecimentos científicos e tecnológicos, com fins sociais e políticos. Assim, havia a necessidade de uma reforma no ensino da matemática para superar a União Soviética científica e tecnologicamente, inspirados pelo lançamento do satélite soviético Sputnik, em 1957. Sobre isso, Morris Kline destaca:

No outono de 1957, os russos lançaram seu primeiro Sputnik. Esse acontecimento convenceu o governo norte-americano e o país de que deveriam estar atrás dos russos em matemática e ciência, e teve o efeito de afrouxar os cordéis de bolsas das agências governamentais e funções [...] nessa ocasião muitos outros grupos decidiram entrar no negócio de criar um novo currículo. (KLINE, 1976, p. 33).

Entretanto, apesar do lançamento do satélite soviético levar o povo americano a perceber que não detinham a superioridade científica e tecnológica e esse evento seja muitas vezes tido como o precursor do MMM, já havia esforços anteriores encaminhados, liderados principalmente pelo Comitê de Matemática Escolar da Universidade de Illinois (*University of Illinois Committee on School Mathematics* - UICSM), criado em 1951. Dessa forma, o evento

impulsionou os esforços dos grupos de reforma e aumentou os financiamentos de seus projetos curriculares, uma vez que atraiu bastante atenção pública na questão da melhoria da ciência e matemática escolar.

Nesse sentido, foram fundados grupos de estudos para a reformulação curricular, com destaque para o Grupo de Estudos de Matemática Escolar (*School Mathematics Study Group - SMSG*) da Universidade de Yale, que se tornou o maior projeto de currículo de matemática de ensino secundário nos Estados Unidos. O principal objetivo do grupo era escrever livros de Matemática Moderna para o ensino secundário, sendo que esses materiais foram traduzidos para mais de 15 idiomas e assim, a influência do SMSG não se limitou aos Estados Unidos, mas teve relevância mundial.

D'Ambrosio (2017) destaca que o SMSG teve influência do grupo Bourbaki, cujas obras tiveram um grande impacto no ensino de matemática a nível universitário, defendendo principalmente a reorganização do conteúdo dando ênfase às estruturas matemáticas⁴ e mediante a adoção de uma linguagem uniforme e mais precisa. Dessa forma, o SMSG tinha por objetivo a melhoria do ensino secundário de modo que fosse consistente com o ensino de matemática nas universidades, defendendo que os primeiros trabalhos com conjuntos, operações com conjuntos e lógica deveriam preceder o trabalho com números e todos os outros conceitos matemáticos. Assim, as discussões e esforços culminaram em uma nova tendência que visava modernizar o ensino e o currículo: a “nova matemática” ou “matemática moderna”.

O termo Matemática Moderna, segundo Búrigo (1989), fazia referência à evolução interna da própria disciplina no século XIX, em especial a partir do trabalho do grupo Bourbaki. O sentido de modernidade expresso também se relacionava à atualização do currículo, demanda de uma sociedade que exigia um progresso técnico acelerado. Segundo ela, o termo “moderno” também era sinônimo de “eficaz” e “de boa qualidade”, opondo-se diretamente com o ensino clássico tradicional. Portanto, é notório que o termo trazia consigo uma conotação positiva, evidenciando a tendência modernista como um componente fundamental para o progresso do ensino da matemática e a consequente expectativa de resolução de entraves econômicos e sociais da sociedade, que culminariam no progresso.

Os modernistas defendiam além de uma mudança curricular no que diz respeito aos conteúdos, que se alterasse o modo como a matemática era ensinada. As mudanças afetaram

⁴ Estrutura matemática é “um conjunto de propriedades a que determinadas relações, entre os elementos de um dado conjunto, obedecem – qualquer que seja a natureza – todos os teoremas deduzidos dos seus axiomas são gerais, no sentido de que se aplicam a quaisquer relações entre outros elementos que obedeçam as propriedades da estrutura considerada” (GUIMARÃES, 2007, p. 26 *apud* LAVORENTE, 2008, p. 51).

principalmente o ensino secundário em que consistiam na eliminação de alguns conteúdos e na reformulação de outros. Dentre os novos conteúdos programáticos propostos pela Matemática Moderna estão: álgebra abstrata, topologia, lógica simbólica, teoria estabelecida e a álgebra de Boole. Segundo Kline (1976, p. 35), esses educadores defensores da Matemática Moderna “ignoravam completamente o fato de que a matemática é um desenvolvimento cumulativo e que é praticamente impossível aprender as mais novas criações se desconhecem as mais antigas”, destacando a visão equivocada de que deveria se largar por completo a matéria tradicional em favor da Matemática Moderna.

Apesar dos grandes esforços dos defensores da Matemática Moderna, o programa teve algumas dificuldades e foi alvo de diversas críticas. Um dos obstáculos estava relacionado a formação de professores que segundo Fremont (1967) *apud* D'Ambrosio (1987, p. 76) “apesar da formação que estavam recebendo e da ajuda fornecida em guias que acompanhavam aos materiais didáticos, grande parte dos professores estava ensinando a nova matemática de uma forma rígida e mecânica”.

D'Ambrosio (2017) pontua que o MMM também sofreu algumas críticas e oposições, sendo que as mais influentes e consistentes foram feitas pelo matemático Morris Kline que defendia que os novos tópicos de matemática eram inúteis para vida cotidiana dos alunos e muito abstratos para os alunos do ensino secundário. Além disso, a autora destaca que Kline argumentava que a ênfase numa linguagem mais precisa prejudicava a aprendizagem matemática, pois aumentava a quantidade de memorização nesse processo de aprender.

Apesar das críticas, é evidente que houve muita atividade em relação ao desenvolvimento do currículo e de materiais curriculares, mudando a forma como os assuntos eram abordados e também pela inclusão de novos conteúdos. Essa inclusão foi mais enfatizada e discutida pelos educadores, dando espaço inclusive para o surgimento de grupos com ideias mais radicais, como um grupo internacional que se reuniu em Royaumont, na França, em 1959. O grupo recomendava o abandono de todos os conteúdos anteriores, inclusive a geometria euclidiana (ABREU, 2011).

É necessário compreender a evolução da Educação Matemática durante esse período como um resultado de diversos esforços para melhorar a matemática escolar, resultado principalmente do desenvolvimento da própria disciplina em consonância a uma sociedade que necessitava de avanços científicos e tecnológicos. Assim, o sucesso ou o fracasso da Matemática Moderna foi influenciado diretamente por diversos fatores socioculturais que não puderam ser previstos pelos autores do projeto.

Para entender o desenvolvimento e os desdobramentos do MMM no Brasil, na próxima seção há uma breve discussão sobre o contexto educacional dos países subdesenvolvidos, no cenário da década de 1960, evidenciando como estes apresentam uma dependência de tendências educacionais de países desenvolvidos, fato que acabou contribuindo para a adoção do currículo de Matemática Moderna por diversos países. Esta discussão se mostra pertinente para compreender as implicações da Matemática Moderna, especialmente no Brasil, que buscou nos EUA, uma orientação e direção para as inovações curriculares que dizem respeito a matemática escolar.

2.2 RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA DE MODELOS EDUCACIONAIS POR PAÍSES SUBDESENVOLVIDOS

Em todo o mundo, países subdesenvolvidos⁵ estão em uma constante busca de crescimento econômico e de melhoria dos índices de qualidade de vida da sua população. Apesar de haver diferenças substanciais entre eles, motivadas principalmente pela adoção de diferentes ideologias e sistemas de governo, para a maioria deles, o progresso está intimamente ligado à ocidentalização. Assim, segundo D'Ambrosio (2017, p. 20), quase todos eles decidiram modernizar-se através da construção de casas “em estilo ocidental e nesse mesmo estilo, desenvolveram suas instituições e sistemas educacionais”. Entretanto, segundo a autora, esse modelo de desenvolvimento não é o ideal para todos, uma vez que em muitos países subdesenvolvidos a pobreza e a desigualdade social ainda avançam a passos largos.

Educacionalmente, a ideia de desenvolvimento está ligada a disseminação e ampliação da escolaridade, através da adoção de modelos oriundos de países desenvolvidos (industrializados). Desse modo, esses países subdesenvolvidos acabam criando uma relação de dependência ao conhecimento gerado nos países desenvolvidos, por meio da importação de ideias, tecnologia e até em relação a inovações educacionais.

De acordo com D'Ambrosio (2017), apesar de recomendações da própria Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (*United Nations Education, Scientific and Cultural Organization* - UNESCO) para que o desenvolvimento de cada país seja autêntico,

⁵ O termo está relacionado ao conceito de subdesenvolvimento, cuja criação foi após a Segunda Guerra Mundial e é usado para explicar a diferença entre países industrializados e aqueles exportadores de matéria-prima. Esses países são também chamados de Emergentes, em desenvolvimento ou países de Terceiro Mundo, fazendo parte desse grupo nações pobres localizadas na América Latina, África e Ásia.

respeitando sua cultura e motivado por valores e aspirações da própria sociedade, esse fluxo de conhecimento dos países industrializados para os países em desenvolvimento ainda é uma realidade. A autora destaca ainda que o educador e filósofo Paulo Freire em sua descrição acerca da evolução da sociedade brasileira, demonstra a preocupação de que as sociedades que saem do estado colonial são basicamente passivas, sentindo-se incapazes de gerar soluções autônomas e fazem uso de soluções importadas para resolver os problemas de sua realidade.

Ao tratar dos objetivos do ensino de matemática é natural que estes sejam encarados de maneira distinta nos diferentes contextos educacionais. Apesar do desenvolvimento econômico e tecnológico ser um objetivo comum a todos eles, a maioria dos países subdesenvolvidos ainda lida com problemas relacionados a melhoria da qualidade de vida da sua população mediante a garantia de necessidades básicas como água tratada, saneamento, transporte público, serviços de saúde e educação. Desse modo, é fundamental refletir se a matemática ensinada nas escolas dos países desenvolvidos deve ser a mesma que é ensinada nos países subdesenvolvidos, levando em consideração as peculiaridades de cada uma das realidades sociais, políticas e econômicas.

Assim, segundo Paul Harrison (1979) *apud* D'Ambrosio (2017) o papel da educação formal baseada no modelo ocidental se torna um modelo que privilegia a poucos e condena a maioria pobre a um estado contínuo de pobreza e sofrimento ligados às desigualdades. Portanto, a educação pode ser vista como um meio politicamente aceitável de propagar as desigualdades de modo a beneficiar poucos bem-sucedidos e condenar a imensa maioria a se “encaixar” e aceitar sua condição social.

Desse modo, há várias décadas os países em desenvolvimento vêm se esforçando na melhoria dos índices educacionais e de qualidade de vida de suas populações. Com a falta de recursos, estes países buscaram amparo nos países desenvolvidos que em virtude dessa assistência sugeriram certas reformas educacionais.

Um exemplo disso é o fenômeno do projeto americano para o desenvolvimento do currículo de Matemática Moderna através do SMSG que foi transferido para muitos países subdesenvolvidos, inclusive o Brasil. Essa transferência veio em partes por meio de materiais curriculares de matemática, em que o SMSG teve materiais traduzidos, em pelo menos 15 idiomas diferentes, e que exerceram grande impacto nos programas de matemática escolar de todo o mundo. Acerca do SMSG e o currículo de matemática, D'Ambrosio afirma que

[...] tratava-se basicamente de uma reforma baseada no conteúdo, para garantir a criação de uma geração de matemáticos e cientistas mais qualificados, o que era uma perspectiva atraente para a maioria dos países em desenvolvimento, especialmente aqueles que haviam conquistado sua independência recentemente e lutavam por autonomia e autossuficiência. (D'AMBROSIO, 2017, p. 30)

A autora também mostra que essas transferências de materiais curriculares podem ser uma das causas para o fracasso dos projetos de “Matemática Moderna” na maioria dos países, que foram adotados sem restrições à realidade e ao contexto educacional. Logo, para compreender como essas amarras de dependência dos países subdesenvolvidos foram criadas no contexto da Matemática Moderna, buscaremos entender como foi o processo de adoção desse currículo no sistema escolar brasileiro, uma vez que foi empregado em uma realidade diferente da pretendida na sua elaboração.

Além disso, para compreender o MMM no Brasil é necessário destacar que este desembarca em um cenário de urgência do progresso, motivado principalmente pelo recente desenvolvimento industrial em contraste com uma população majoritariamente analfabeta. Sua implementação, por sua vez, promoveu uma intensa reestruturação dos conteúdos programáticos, impactando diretamente no currículo, na formação de professores e na produção de livros didáticos de matemática. Portanto, a nossa intenção de olhar para livros didáticos desse período é motivada, principalmente, pela capacidade desse material em apontar como se deu a adoção das tendências propostas pelo MMM no ensino de Matemática, indicando assim, possíveis mudanças nas intenções pedagógicas da época.

2.3 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

O final dos anos 1950 foram marcados por intensas modificações sociais e econômicas na sociedade brasileira. Por um lado, experimentava-se um crescimento industrial e um processo de urbanização nunca antes vistos, impulsionado pelo plano desenvolvimentista, por outro, havia um cenário de instabilidade política e a ascensão massiva de movimentos sociais, motivados principalmente pela polarização dos setores sociais. Segundo Búrigo (1990), durante o governo Juscelino Kubitschek (1956-1961), por meio do plano desenvolvimentista, houve um êxito na implantação de alguns setores de indústria de base, com destaque à siderurgia, crescimento no setor de transportes, na produção de energia e na implantação da indústria de bens de consumo durável, com ênfase para a indústria automobilística. Segundo a autora, esse crescimento industrial é decorrente de alguns fatores, pois

[...] havia se dado às custas da penetração maciça do capital estrangeiro e de sua dominância em vários setores de ponta da produção, do endividamento, do aumento das disparidades regionais e dos bolsões de miséria, da perda do poder aquisitivo dos salários pela inflação agravada a partir de 1959. (BÚRIGO, 1990, p. 256)

Deste modo, o debate econômico era polarizado pela defesa de um desenvolvimento autônomo em oposição ao desenvolvimento associado ao capital estrangeiro. Esse cenário deu espaço ao aparecimento de diversos movimentos populares, especialmente nos grandes centros urbanos, que eram resultados da própria transformação da sociedade por meio do aumento do número de trabalhadores assalariados, resultado da recente industrialização do país. Os mais destacados setores da esquerda, por sua vez, defendiam que o crescimento econômico, o progresso, podia ser centralizado no próprio sistema capitalista, desde que viesse acompanhado de algumas reformas sociais importantes.

O advento dessas modificações significou também uma expressiva mudança no cenário educacional do país. Essa necessidade, segundo Búrigo (1989), deu-se pelo processo de transformação que a sociedade brasileira vinha enfrentando nas últimas décadas, em especial pela intensificação da urbanização e a diversificação das possibilidades de emprego nas cidades, acompanhada pela pressão dos setores médios e populares pelo acesso ao ensino.

Nessa mesma década emergiam cada vez mais discussões em torno da escola pública. Essas discussões eram em parte devido à expansão do ensino secundário, que apresentava uma significativa mudança em sua função social. Cada vez mais sua finalidade preparatória ao ingresso nas universidades dava lugar a um ensino regular, que para as classes mais populares era de caráter mais técnico e profissionalizante.

Em 1961, a Lei nº 4024/61, conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação, foi aprovada. D'Ambrosio (2017) destaca que a referida lei estabeleceu assiduidade obrigatória para crianças de 7 a 14 anos de idade e reestruturou o sistema escolar em formato $4 + (4 + 3)$ anos, ou seja, os primeiros quatro anos formavam o programa de escola primária, que era seguido por sete anos de ensino secundário. Além disso, os anos do ensino secundário foram subdivididos em secundário inferior (“ginásio”) e secundário superior (“colegial”), de modo que, a transição da escola primária para a secundária não era automática: os alunos eram submetidos a um exame abrangente chamado de “Exame de Admissão”.

Além disso, os debates da Lei das Diretrizes e Bases evidenciaram a polarização entre a escola pública e privada, por educadores escolanovistas e católicos. O centro das discussões dos educadores matemáticos tinha por objetivo a superação da “cultura clássica” que se

mostrava um obstáculo à construção de uma sociedade moderna, pois beneficiava apenas uma minoria.

É nesse contexto que desembarca o MMM no Brasil, inicialmente em São Paulo, a partir da organização de um grupo de professores em torno da proposta, ancorada em experiências nas escolas e do debate mais ou menos estruturado dessas vivências. Segundo Búrigo (1990) o contexto de São Paulo era extremamente favorável para um movimento de renovação que envolvesse professores primários, secundários e universitários de modo a obter notoriedade nacional. Este fato era justificado pelo elevado grau de urbanização alcançado e pela expansão do ensino secundário muito além da média nacional. Ademais, a autora destaca que este estado possuía a “comunidade científica mais bem articulada do país, e pela multiplicidade de iniciativas por parte dos órgãos oficiais de ensino, das editoras de livros didáticos e dos próprios professores no sentido de sua qualificação e da melhoria do ensino” (BÚRIGO, 1990, p. 259).

A partir dos anos 1950, a notícia de um projeto de modernização no ensino de matemática nos Estados Unidos e na Europa já havia chegado ao Brasil. Entretanto, é a partir da década seguinte com o Instituto Brasileiro de Educação Ciência e Cultura (IBCEC), ligado à UNESCO, que as propostas de renovação de ensino passam a ser divulgadas e endossam as discussões de reforma no currículo brasileiro do ensino secundário.

Contudo, o marco decisivo para a implantação da Matemática Moderna no Brasil foi a criação do GEEM em São Paulo, permitindo a ampla divulgação da proposta e realização de experiências apoiadas numa discussão articulada. O grupo era liderado pelo professor Osvaldo Sangiorgi e teve um papel decisivo na divulgação da Matemática Moderna, através de reuniões e cursos de aperfeiçoamento para professores.

Em 1960, Sangiorgi participou de um curso de verão na Universidade de Kansas, chamado *Summer Institute for High School e College Teachers of Mathematics* (curso de verão para professores de matemática universitários e de ensino secundário). Segundo D'Ambrosio (2017) o programa dos cursos de verão naquela universidade incluía lógica matemática, conjuntos, introdução à álgebra abstrata, geometria moderna, análise estatística e contavam com aulas demonstrativas com alunos do ensino secundário que eram recrutados de várias escolas dos EUA. Posteriormente, essa experiência serviu como base para a maioria dos cursos de reciclagem, hoje conhecidos como formação continuada, oferecido pelo GEEM naquela época.

A fundação do GEEM em 1961 foi um marco decisivo para a implantação da Matemática Moderna, conforme já mencionado antes, sendo que sua influência sobre órgãos do governo na área da educação foi um fator importante para a implementação de mudanças.

Além disso, é importante ressaltar que a fundação do GEEM foi um esforço para reproduzir o que estava sendo feito nos Estados Unidos pelo SMSG, uma vez que o Brasil o tinha como referência educacional.

A ideia da modernização estava relacionada principalmente com a superação do ensino arcaico, da superação do ineficaz pelo eficaz, que encontrou terreno fértil na sociedade brasileira que buscava através da industrialização o tão almejado crescimento econômico e melhoria da qualidade de vida da sua população. Assim, um dos objetivos era modificar a matemática ensinada no ensino secundário de modo a aproximá-la da matemática que era ensinada nas universidades, uma vez que, o que diferenciava as duas era exatamente a modernidade de uma em oposição ao tradicionalismo da outra.

Um discurso que era expressivo entre os professores que defendiam a Matemática Moderna era o da deselitização do ensino. Nesse sentido, conforme Búrigo (1990, p. 262)

Havia, desde os anos 50, um discurso de que o curso secundário de um modo geral não fora adaptado aos novos contingentes que vinham à escola, permanecendo um curso livresco, moldado para atender uma elite. No caso da matemática, a alternativa de adaptação do secundário à expansão era buscada na tentativa da elaboração de um ensino mais prazeroso (e atraente), e na garantia de que todos os alunos que vinham à escola pudessem aprender matemática.

A autora ainda aponta que esse discurso de um ensino mais acessível a todos defendido pelo GEEM, articulava-se com a dimensão mais científica da proposta, na promessa de um ensino mais eficaz. Búrigo (1990) destaca que essa dimensão mais científica era dada através da correspondência apontada por Jean Piaget entre as estruturas da inteligência e as “estruturas-mãe” do edifício matemático apontado pelo grupo Bourbaki, e da ênfase da Matemática Moderna nessas estruturas. No entanto, mais adiante a autora aponta que não há indícios de que houve um estudo aprofundado da obra de Piaget pelo GEEM no que diz respeito ao pensamento lógico-matemático. Segundo ela, essa relação foi “tratada mais como um aval para a opção curricular do que como um elemento importante para a concepção pedagógica sobre a qual se deveria refletir” (BÚRIGO, 1990, p. 263).

Uma característica importante pretendida com a Matemática Moderna era apresentar a matemática de maneira mais simplificada do que a ensinada tradicionalmente, não enfatizando o uso de algoritmos complicados e ressaltando a compreensão da natureza das operações, dos problemas e na explicação dos “porquês” das verdades matemáticas. Desse modo, buscava-se a compreensão através da representação do pensamento por meio das regras de formalização da matemática.

Entretanto, quando se fala na introdução da Matemática Moderna no ensino secundário, é preciso ressaltar que não se pretendia ensinar um programa completamente diferente do já conhecido tradicionalmente. Assim, o que se desejava essencialmente era

[...] estudar os mesmos assuntos da Matemática, conhecidos como essenciais na formação do jovem ginásiano, usando, porém, uma **linguagem moderna** (grifo do texto) que seja mais atraente às novas gerações. Essa linguagem moderna envolve substancialmente o conceito de **conjunto** (grifo do texto), e deve atender à formação das **estruturas matemáticas** (grifo do texto), que permitam, com menos esforço, melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno, e dão ênfase ao caráter da Matemática atual. (IBECC, 1962 *apud* VALENTE, 2008a, p. 600, grifo do autor)

Então, na década de 1960, lentamente a Matemática Moderna começa a ser difundida pelo país, inicialmente nos grandes centros, chegando aos locais mais retirados, geralmente por meio do livro didático. Essa implantação se deu principalmente após o IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática que foi realizado em Belém (PA) em 1962, onde foram aprovadas propostas do GEEM de um novo programa de matemática para a escola secundária, chamado *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o ginásial e para o colégio*.

Os anos seguintes foram marcados pela introdução dos materiais de Matemática Moderna produzidos em outros países e traduzidos para o português, como os do SMSG, que foram apresentados para os professores da época em cursos de aperfeiçoamento e que serviram de base para a elaboração de livros didáticos nacionais de Matemática Moderna. No auge do movimento, foram realizados muitos projetos, seminários e congressos em que se discutiam o desenvolvimento de materiais didáticos, adaptações curriculares e a formação de professores, de modo a levar as ideias defendidas pela Matemática Moderna a um grande número de professores.

Ainda acerca da difusão da Matemática Moderna em solo brasileiro, D' Ambrosio (2017, p. 176) enfatiza que os principais meios que as ideias do exterior atingiam os educadores matemáticos eram: “o intercâmbio internacional de acadêmicos, a disponibilidade de livros e revistas estrangeiros, e a participação de brasileiros em conferências internacionais”. Assim, pode-se destacar também a importância da disseminação por meio dos Congressos Nacionais de Ensino da Matemática onde se discutiam sobre as novas direções para o ensino de matemática, abordando a metodologia, a formação de professores, o currículo, material didático, *etc.* Acerca disso, Flávia Soares (2008) pontua que o I Congresso Nacional de Ensino de Matemática no Curso Secundário, realizado em setembro de 1955 em Salvador (BA), tratou de assuntos diretamente ligados ao ensino de matemática, como: os programas, os livros de classe,

as novas tendências do ensino e discussão sobre os problemas no aperfeiçoamento dos professores. No entanto, nenhuma menção é feita em relação à Matemática Moderna no evento.

O II Congresso Nacional de Ensino de Matemática ocorreu em 1957, na cidade de Porto Alegre (RS), não ficou restrito apenas ao ensino secundário, pois apresentou palestras em relação ao ensino primário e a formação de professores. Soares destaca que o congresso

[...] se propôs a estudar questões relativas à aprendizagem da matemática nos diferentes níveis de ensino; definir as bases para a elaboração de programas “levando em conta aspectos científicos e psicológicos” buscando fixar normas para “uma boa articulação entre os programas dos diversos níveis de ensino”, além de estudar também a influência da Matemática nas demais disciplinas (CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 1959a, p. 21 *apud* SOARES, 2008, p. 738)

O III Congresso Nacional de Ensino de Matemática aconteceu em 1959 na cidade do Rio de Janeiro (RJ) e teve participação de cerca de 500 professores. O evento, de acordo com Soares (2008), teve como objetivo o estudo de problemas relativos ao ensino secundário, do ensino primário, comercial, industrial e normal, além de problemas de ordem geral relativos ao ensino de matemática como a formação e aperfeiçoamento dos professores do ensino secundário.

Assim, ao se referir da Matemática Moderna, o IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática realizado em Belém (PA) em 1962 foi bastante significativo, pois tratou de forma mais objetiva, pela primeira vez, a questão da introdução da Matemática Moderna no ensino secundário. Isso se deu pela presença expressiva de professores ligados ao GEEM⁶, grupo que recém havia sido fundado em 1961. Foram realizadas por membros do GEEM “sete aulas-demonstração enfocando o tratamento moderno de certos tópicos da Matemática na escola secundária, duas apresentações do desenvolvimento moderno de assuntos de Matemática e três palestras relativas à introdução da Matemática Moderna na escola secundária” (SANGIORGI, 1962 *apud* SOARES, 2008, p. 741).

Também foi no IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática que o GEEM apresentou sua sugestão de *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o ginásio e para o colégio*. Segundo Soares (2008, p. 742), a diferença deste programa “não estava tanto nos temas abordados, mas sim nas sugestões para sua execução, onde as estruturas, o conceito de conjunto e a linguagem conjuntista tem papel de destaque”.

⁶ Segundo D'Ambrosio (2017) o GEEM foi representado no Congresso por Omar Catunda, Osvaldo Sangiorgi, Benedito Castrucci e Lucília Bechara.

Entretanto, apesar dos esforços e das promessas de um ensino mais acessível e cativante em contramão ao ensino tradicional, Pinto (2005) destaca que a Matemática Moderna chegou carregada de simbolismos e enfatizava a precisão, fazendo com que professores e alunos passassem a conviver com teoria dos conjuntos, álgebra e logicismos.

A excessiva preocupação com a linguagem e simbologia matemática tratava a matemática como um objeto neutro, não reconhecendo sua história, sua constituição e qualquer interação sócio-política. Esse fato limitava os alunos em seu potencial crítico e criativo e a matemática podia ser compreendida como um conjunto de símbolos e signos para realizar operações, conforme destaca Pinto (2005, p. 05) quando relata que “o moderno dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade”.

Esses fatos reforçam a controvérsia nos ideais ditos “modernizadores”, evidenciando o fato de que era necessária uma mudança nos métodos de ensino de matemática e levando a questionar se o movimento efetivamente trouxe alguma melhora, por apresentar uma matemática descontextualizada e que não estimulava criticamente seus aprendizes. Além disso, ainda há lacunas sobre as implicações pedagógicas das práticas daquela época, ficando difícil estabelecer com precisão as marcas que esse viés formalista, pautado nas estruturas algébricas e linguagem formal da matemática, provocou de fato na educação da época.

A partir da década de 1970 o movimento começa a declinar pois, segundo Wilian Faias da Silva (2016, p. 22) começaram a ser percebidos exageros utilizados na Matemática Moderna, como a “linguagem de conjuntos e estruturas ainda impróprias para a compreensão de determinadas faixas etárias de jovens, adolescentes e crianças”. Além disso, o autor destaca que os próprios membros do GEEM encontraram divergências em relação aos objetivos do movimento e se questionaram em relação aos exageros cometidos durante o movimento no Brasil.

Outro ponto importante a ser destacado é que, durante seu desenvolvimento no Brasil, o MMM não foi homogêneo em relação a sua divulgação e profissionais preparados e envolvidos no desenvolvimento das propostas desse movimento. Os principais centros de divulgação se concentravam nos estados de São Paulo, Bahia, Paraná, Rio Grande do Sul e Rio Grande do Norte, onde se localizavam grupos de estudos que assumiram um papel de protagonismo no movimento. Dentro destes, podemos destacar o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática no Paraná (NEDEM), Grupo de Estudos sobre o Ensino de

Matemática de Porto Alegre (GEEMPA⁷), Centro de Estudos de Ciências da Bahia (CECIBA) e o Instituto de Matemática do Rio Grande do Norte (IMURN).

Assim, o livro didático assumiu o papel de principal instrumento de divulgação da Matemática Moderna, embora muitos dos professores que os recebiam não estivessem preparados para desenvolver a Matemática Moderna em sala de aula. Um dos problemas relatados era a dificuldade conceitual em alguns assuntos como teoria dos conjuntos, como constatado no relato a seguir:

Perguntava-me sobre a importância de ensinar conjunto vazio e duvidava de sua conceituação, tal como vinha sendo colocada nos manuais escolares. Se é conjunto... não deveria ter elementos? Era um sufoco, cada vez que tinha que definir, representar simbolicamente aquela ausência de elementos, para os alunos. Numa prova havia a questão: represente simbolicamente um conjunto vazio. E um dos alunos apresentou a resposta que eu também considerava correta. No espaço destinado à resposta, o aluno não registrou nenhum símbolo, apenas deixou o espaço em branco. Vazio. Estava decidida a considerar a questão certa, porém, troquei idéias (*sic*) com colegas. Eles não concordaram, alegaram que faltava diagrama, limitação. Mas, ousei em dar como certa a resposta do aluno, considerando que ele estaria com a mesma dúvida que eu sentia em relação ao conceito de conjunto vazio e como eu, estava saindo do trilho do manual. Com esse fato, experimentei uma certa “alegria profissional”, considerando que os alunos podiam ter suas próprias hipóteses e até caminhar de forma mais autônoma diante das amarras do manual. Por enquanto, era apenas um, mas já era uma boa amostra. A partir do conjunto vazio, pensei também na existência do nada pela presença invisível do tudo. E relacionei ao que havia aprendido na vida: “o nada com Deus é tudo, e tudo sem Deus é nada”. E nesse momento dei por encerrada a questão de conjunto vazio (PINTO, 1968, p. 7 *apud* PINTO, 2005, p. 10).

Ainda assim, o livro didático teve um papel fundamental na disseminação do movimento nas regiões distantes dos centros de formação, apesar que, não havia garantia de efetivo desenvolvimento da Matemática Moderna. Contudo, com objetivo principal de analisar livros didáticos compreendidos no contexto do MMM no Brasil, esse trabalho busca indícios dos impactos da Matemática Moderna nas intenções pedagógicas, especialmente em relação ao ensino de matemática no ensino secundário.

Para além dos diversos estudos já consolidados sobre o MMM no Brasil, com destaque para Búrigo (1989) e D’Ambrosio (2017), na seção seguinte realizaremos uma investigação em busca de trabalhos que abordam o MMM na última década (2010-2020), de modo a identificar um panorama do que está sendo pesquisado sobre o tema atualmente. Desse modo, verificaremos que o estudo com livros didáticos é uma abordagem recorrente ao se tratar do

⁷ Apesar de manter a nomenclatura, atualmente possui outro nome: Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia da Pesquisa e Ação. Cf. <https://geempa.com.br/o-geempa/>.

MMM, caracterizando-se como um importante objeto de estudo da história da Educação Matemática brasileira.

2.4 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL: O QUE REVELAM AS PESQUISAS ACADÊMICAS BRASILEIRAS NA DÉCADA 2010-2020

No final da década de 1980, foi possível notar um interesse por parte de alguns educadores em relatar e sistematizar de maneira consistente como foi o MMM no Brasil. Assim, foram desenvolvidos alguns estudos que buscaram retratar o que foi o movimento, suas características e principais influências, e personagens mais importantes.

Esse esforço de estruturar estudos sobre o tema pode ser verificado na tese de doutorado defendida em 1987 na Indiana University, por Beatriz Silva D'Ambrosio intitulada *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for brazilian mathematics education* (Dinâmica e as consequências do movimento da matemática moderna na Educação Matemática do Brasil). No estudo, D'Ambrosio destaca o MMM enquanto projeto educacional concebido em países desenvolvidos e transferido para países subdesenvolvidos, evidenciando o Brasil, mostrando o processo de adoção do currículo da “nova matemática” de modo a apontar como as ideias chegaram ao país, fazendo-o sentir a necessidade de incorporar a proposta. De acordo com Flávia Soares (2001, p.3), esse é o “primeiro estudo estruturado realizado no Brasil sobre Movimento da Matemática Moderna que se tem conhecimento”.

Destaca-se também o trabalho de Elizabete Zardo Búrigo, que em sua dissertação de mestrado intitulada *Movimento da Matemática Moderna no Brasil – Estudo da ação e do Pensamento de educadores Matemáticos nos anos 60*, defendida em 1989 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), mostra o movimento e suas origens, destacando-o como um importante capítulo da história do ensino de matemática no país e um marco fundamental para a sua evolução. Além disso, a autora se propõe a estudar os indivíduos envolvidos no movimento, evidenciando a relação desses com o contexto de crescente progresso da sociedade brasileira.

Assim, apesar de tratarem do mesmo assunto, os trabalhos o fazem de maneiras diferentes, enfatizando as diversas facetas do MMM no Brasil. Para além desses trabalhos, que são referências já consolidadas sobre o tema, nos propomos a realizar um breve levantamento bibliográfico acerca de estudos recentes que contemplem o MMM no Brasil, buscando no

Banco de Teses e Dissertações do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) trabalhos publicados a partir de 2010.

Da última década, encontramos 31 trabalhos entre teses e dissertações, que abordam o MMM. As teses e dissertações coletadas foram selecionadas por meio de uma busca utilizando o termo *movimento da matemática moderna*, que resultou em 157 resultados. Nossa amostra foi delimitada pelos títulos dos trabalhos; a leitura dos resumos dessa amostra possibilitou verificar as tendências das pesquisas brasileiras acerca do MMM e, assim, vislumbrar um panorama do que está sendo pesquisado sobre o tema atualmente.

Entre as pesquisas optamos por agrupá-las em temas comuns, de modo que possibilitassem de alguma forma compreender as temáticas de estudo. Assim, verificamos que os trabalhos correspondem ao estudo do livro didático, aos processos de apropriação da Matemática Moderna em uma determinada região ou centro educativo, a formação de professores, a práticas pedagógicas de professores; e a análise de documentos oficiais, revistas pedagógicas, exames de admissão e programa de televisão.

Uma das abordagens verificada está relacionada aos processos de *apropriação da Matemática Moderna em determinadas regiões e/ou centros educacionais*. Essas pesquisas analisam de que maneira os ideais do movimento foram acolhidos, apropriados e praticados pelos professores e outros atores envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem. O Quadro 2 apresenta as pesquisas com essa característica.

Quadro 2 - A apropriação da Matemática Moderna em regiões e/ou centros educacionais

Ano	Título do trabalho	Autor	Instituição
2010	O Colegio Técnico de Limeira e o Movimento da Matemática Moderna = uma paisagem	Murilo França Tabosa	Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
2011	Histórias e práticas de um ensino na escola primária: marcas e movimentos da matemática moderna	Joseane Pinto de Arruda	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
2013	História da Educação Matemática no estado de Mato Grosso: o movimento da matemática moderna no município de Juara no período de 1970 a 1990, a partir da Escola Estadual Oscar Soares	Reginaldo José dos Santos	Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)
2015	A transição do Clássico para o Moderno: O ensino da matemática no Colégio Taylor-Egídio de Jaguaquara-BA (1950-1969)	Malú Rose Brito Gomes	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)
2017	O Desembarque da Matemática Moderna no Ensino Normal de Itamaraju: Contextos do Ginásio Augusto Carvalho e do Colégio Vera Cruz (1964 - 1970)	Mirian Gelli da Costa Andrade	Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
2018	A matemática moderna e o Ginásio Estadual Vocacional Oswaldo Aranha: sobre caminhos e encontros	Mário Eduardo Marques Fernandes	Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
2019	Matemática moderna no Instituto Estadual de Educação Assis Brasil (1964-1979)	Makele Verônica Heidt	Universidade Federal de Pelotas (UFPel)
2010	O movimento da matemática moderna na região de Ribeirão Preto = uma paisagem	Zionice Garbelini Martos Rodrigues	Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
2012	O movimento da matemática moderna em escolas técnicas industriais do Brasil e de Portugal: impactos na cultura escolar	Barbara Winiarski Diesel Novaes	Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR)

Fonte: Elaborado pela autora

Os trabalhos que retratam a Matemática Moderna em contextos específicos (cidades, regiões ou centros educacionais) abordam as práticas pedagógicas presentes no ensino de matemática, as transformações advindas com o MMM e a apropriação das propostas do movimento. Nesse sentido, as pesquisas de Tabosa (2010), Arruda (2011), Santos (2013), Gomes (2015), Andrade (2017), Fernandes (2018) e Heidt (2019) tratam sobre a maneira que a Matemática Moderna foi apropriada e praticada em determinados centros educacionais, de modo a reconstruir um fragmento da história da Educação Matemática.

As pesquisas de Rodrigues (2010) e Novaes (2012) discutem a apropriação das propostas da Matemática Moderna por professores de uma região. Enquanto Rodrigues mostra o MMM na região de Ribeirão Preto (SP), Novaes tem por objetivo compreender comparativamente os impactos do MMM na cultura escolar do ensino técnico industrial no Brasil e em Portugal.

De modo a abordar *aspectos da Matemática Moderna e os saberes matemáticos desse período*, alguns trabalhos recorreram a outras fontes como: exames de admissão, revistas

pedagógicas e um curso de matemática exibido pela televisão. Além disso, um dos estudos busca identificar o que foi e qual o resultado do MMM. Os trabalhos com essas características foram sistematizados no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 - Os aspetos da Matemática Moderna e os saberes matemáticos desse período

Ano	Título do trabalho	Autor	Instituição
2019	Movimento da Matemática Moderna - de onde veio, qual foi o resultado?	Kurt Nielsen Junior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
2011	Circulação e apropriação do ideário do Movimento da Matemática Moderna nas séries iniciais: as revistas pedagógicas no Brasil e em Portugal	Rosimeire Aparecida Soares Borges	Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN)
2011	Curso de Madureza: matemática pela televisão - décadas de 1960 e 1970	Flainer Rosa de Lima	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
2017	Saberes matemáticos identificados em provas do exame de admissão ao ginásio do Colégio São Paulo (1931 - 1969)	Rosemary Santos	Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Fonte: Elaborado pela autora

No trabalho de Nielsen Júnior (2019) o objetivo foi estudar a origem e o desenvolvimento do MMM, mostrando de que maneira o trabalho do grupo Bourbaki influenciou nesse processo. Nesse sentido, o autor observa como desencadeou-se o movimento, as consequências provocadas em relação ao currículo, mudanças nos conteúdos escolares, nos métodos e nos objetivos de ensino.

A pesquisa de Borges (2011) analisou a dinâmica de circulação e apropriação do MMM no Ensino Primário no Brasil e em Portugal, a partir das revistas pedagógicas destinadas aos docentes desse nível de ensino. Desse modo, os periódicos são analisados quanto a sua contribuição para a difusão de concepções e apropriação de ideias de acordo com as propostas da Matemática Moderna, tendo em vista sua função de transmitir aos professores leitores conhecimentos relacionados a aprendizagem dos estudantes.

O trabalho de Lima (2011) estudou sobre o Curso de Madureza, que foi elaborado para ser transmitido pela televisão, buscando entender de que maneira pode ser caracterizado como escola com ou “sem” professor. Assim, o estudo mostra a existência de vestígios da influência da Matemática Moderna na estrutura do Madureza, fato reforçado pela participação de alguns professores influentes do MMM nos primeiros cursos televisionados.

O trabalho de Santos (2017) investigou os saberes matemáticos presentes nos enunciados das questões das provas dos exames de admissão ao ginásio, entre 1931 e 1969. O estudo mostrou uma mudança relacionada aos saberes matemáticos a partir de 1968, com os

enunciados de questões apresentando vestígios de Matemática Moderna, por meio da linguagem de conjuntos, inclusive na abordagem de frações.

A *formação de professores* também é um aspecto estudado em alguns trabalhos, onde são explicitadas ações de capacitação e aperfeiçoamento desenvolvidas durante o período de vigência do MMM. Estas pesquisas estão destacadas no Quadro 4.

Quadro 4 - A formação de professores como aspecto de pesquisa

Ano	Título do trabalho	Autor	Instituição
2013	A Capacitação e Aperfeiçoamento de Professores que ensinavam Matemática no Estado do Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna - 1961 a 1982	Reginaldo Rodrigues da Costa	Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR)
2019	A formação de professores no Instituto de Educação General Flores da Cunha: o curso de didática da matemática moderna na escola primária (1966 - 1972)	Sara Regina da Silva	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
2017	A matemática na formação das professoras normalistas: o Instituto de Educação General Flores da Cunha em tempos de matemática moderna	Elisete Maria Bonfada	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
2013	Sobre formação e prática de professores de matemática: estudo a partir de relatos de professores, década de 1960, João Pessoa (PB)	Marta Maria Maurício Macena	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)

Fonte: Elaborado pela autora

Referente a capacitação e aperfeiçoamento de professores, as pesquisas de Costa (2013), Bonfada (2017) e Silva (2019) mostram ações realizadas visando a formação continuada. Assim, Costa (2013) destaca atividades de capacitação de professores durante os tempos de Matemática Moderna no estado do Paraná. Em Silva (2019) e Bonfada (2017) aponta-se para a formação no Instituto de Educação General Flores da Cunha em Porto Alegre (RS), em que Silva (2019) evidencia o curso de Didática da Matemática Moderna e Bonfada (2017) aponta para a formação dos professores primários para compreender os modos de apropriação e aprender para ensinar os saberes matemáticos.

No trabalho de Macena (2013) a perspectiva é sobre a prática e formação de professores, constituindo-se através de relatos de professores de matemática do ensino secundário atuantes em João Pessoa (PB) na década de 1960. Enquanto os trabalhos de Silva (2019), Costa (2013) e Bonfada (2017) têm objetivos que apontam para ações direcionadas à formação de professores, Macena (2013) traz como sujeito central depoimentos de professores, que em suas narrativas evidenciaram campanhas de aperfeiçoamento e suas peculiaridades.

As *práticas de professores* são tema de estudo de dois trabalhos, em que se discute a prática de professores que lecionaram durante o MMM no Brasil, evidenciando a cultura escolar e o papel do docente. Essas pesquisas são destacadas no Quadro 5.

Quadro 5 - As práticas de professores durante o MMM como tema de pesquisa

Ano	Título do trabalho	Autor	Instituição
2016	Que geometria ensinar às crianças em tempos de matemática moderna? Referências e práticas de uma professora da cidade de Juiz de Fora	Thiago Neves Mendonça	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)
2010	Quando fui professor de matemática no Lyceu de Goiânia: um estudo sobre a prática docente imersa na permanência e mutações da cultura escolar na década de 1960	Rafaela Silva Rabelo	Universidade Federal de Goiás (UFG)

Fonte: Elaborado pela autora

A pesquisa realizada por Mendonça (2016) tem como objetivo discutir a presença histórica da geometria no Ensino Primário de Minas Gerais durante as décadas de 1960 e 1970, tendo como objetos de investigação materiais de uma professora que atuou na rede de ensino nesse período. No trabalho de Rabelo (2010) recorreu-se a fontes orais e escritas, ilustrando a prática do professor de Matemática de modo a identificar elementos constituintes da prática docente e do contexto desse processo.

As teses e dissertações da última década que apresentam como objeto de estudo os *livros didáticos* nos permitem caracterizar de que maneira se constituem como fonte de pesquisa e quais os saberes matemáticos são investigados. Essas pesquisas estão postas no Quadro 6.

Quadro 6 - Pesquisas relacionadas ao livro didático

Ano	Título do trabalho	Autor	Instituição
2010	As Figuras geométricas no ensino de matemática: uma análise histórica nos livros didáticos	Jussara Brigo	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
2010	Práticas e discursos: análise histórica dos materiais didáticos no ensino de geometria	Cristiani Maria Kusma Rocco	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
2013	A geometria analítica como conteúdo do ensino secundário: análise de livros didáticos utilizados entre a reforma Capanema e o MMM	Josélio Lopes Valentim Júnior	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)
2018	O modelo euclidiano nas abordagens dos poliedros de Platão em livros didáticos: Reflexos do movimento da Matemática Moderna?	Maelson da Silva Oliveira	Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
2015	O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos	Jose Luiz Soares dos Santos	Universidade de São Paulo (USP)
2016	O impacto da matemática moderna no ensino dos números naturais: uma análise de sete livros	Wilian Faias da Silva	Universidade de São Paulo (USP)
2013	A Matemática Moderna no ensino primário gaúcho (1960-1978): uma análise das coleções de livros didáticos Estrada Iluminada e Nossa Terra Nossa Gente	Antonio Mauricio Medeiros Alves	Universidade Federal de Pelotas (UFPel)
2013	Os Movimentos Matemática Moderna: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra Matemática - Curso Ginásial do SMSG	Tatiane Taís Pereira da Silva	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)

2015	O estruturalismo em livros didáticos: SMSG e matemática - curso moderno	Carlos Eduardo Félix Correia	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)
2015	Análise combinatória: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009	Carlos Alberto de Miranda Pinheiro	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
2010	Movimento da matemática moderna aos tempos atuais: uma análise de livros didáticos sobre explicitação e exploração das propriedades das operações	Walber Santiago Colaço	Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Fonte: Elaborado pela autora

É notório que as pesquisas envolvendo livros didáticos apresentam em sua maioria o estudo de um saber matemático específico, uma vez que, da amostra de onze trabalhos, oito apresentam essa característica. Entre as temáticas, verificamos que geometria é o assunto mais abordado, sendo desenvolvido nos trabalhos de: Brigo (2010), Rocco (2010), Valentim Júnior (2013) e Oliveira (2018). A expressiva quantidade de trabalhos envolvendo geometria, de acordo com Cristiani Maria Kusma Rocco (2010) citando Pavanello (1993), deve-se ao fato de que esse foi um dos conteúdos que mais sofreu modificações devido ao MMM, sugerindo-se que o foco fosse nas transformações.

As pesquisas de Santos (2015) e Silva (2016) tratam sobre a aritmética, referindo-se à abordagem das propriedades das operações com números fracionários e o ensino dos números naturais, respectivamente. Com finalidade de compreender o enfoque na aritmética das pesquisas sobre o MMM e os livros didáticos, mais adiante detalharemos cada um desses trabalhos.

No trabalho de Alves (2013) é analisada uma coleção de livros didáticos do ensino primário gaúcho, enquanto Silva (2013) e Correia (2015) tratam da análise de obras na íntegra com o objetivo de analisar como as propostas da Matemática Moderna se apresentavam. No trabalho de Pinheiro (2015) aborda-se a análise combinatória nos livros escolares brasileiros de 1895 a 2019, onde em um trecho destaca o seu ensino no período do MMM.

Já o trabalho de Colaço (2010) tem como foco o estudo das operações no contexto da álgebra, evidenciando que durante a Matemática Moderna havia uma maior explicação das propriedades nos livros didáticos. O autor destaca esse aspecto como algo positivo, pontuando que isso evitava que os alunos compreendessem sem um fundamento matemático. Além do mais, Colaço destaca que os livros atuais têm mostrado ausência, por muitas vezes completa, de explicações de teor matemático para que o aluno entenda matematicamente o porquê de algumas passagens na resolução de problemas envolvendo as propriedades das operações.

A investigação em busca de trabalhos que abordassem o MMM na última década (2010-2020) permitiu que identificássemos o que está sendo estudado e quais os aspectos foram abordados nessas pesquisas. Como foi possível verificar, da amostra de 31 trabalhos encontrados, aproximadamente 35,5 % tem como objeto de estudo os livros didáticos, e desse modo, é notória sua importância no estudo da história da Educação Matemática brasileira. Na procura por pesquisas sobre os livros didáticos e o MMM no Brasil nos deparamos com duas que tratam justamente do estudo de **Números**, que são abordadas a seguir.

2.4.1 As pesquisas sobre números em livros didáticos no contexto do MMM publicadas na década 2010-2020

Na busca por trabalhos que abordassem o MMM no Brasil, identificamos duas dissertações referentes ao estudo dos Números e que utilizam como objeto de pesquisa os livros didáticos, estando listadas no quadro a seguir.

Quadro 7 - Os estudos com livros didáticos referentes a **Números**

Ano	Título do trabalho	Autor	Instituição
2015	O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos	Jose Luiz Soares dos Santos	Universidade de São Paulo (USP)
2016	O impacto da matemática moderna no ensino dos números naturais: uma análise de sete livros	Wiliam Faia da Silva	Universidade de São Paulo (USP)

Fonte: Elaborado pela autora

O autor Jose Luiz Soares dos Santos escreveu em sua dissertação sobre *O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos*, defendida no Programa da Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade de São Paulo (USP). O autor recorreu a livros didáticos de Matemática publicados durante o MMM, envolvendo o período dos anos 1950, antes do MMM, ao início dos anos 1970, no qual ocorre o declínio do movimento no Brasil. Para o estudo, são considerados os livros de autoria de Osvaldo Sangiorgi, Ary Quintella, Carlos Galante e Miguel Asis Name.

A pesquisa de Santos (2015) teve como objetivo o estudo do ensino das operações com números racionais escritos na forma fracionária, nas décadas de 1950, 1960 e 1970, através de livros didáticos da época. Além disso, o autor buscou vincular o estudo aos “programas de

estudo, decretos e possíveis mudanças epistemológicas ocorridos no período em questão” (SANTOS, 2015, p.25).

Santos (2015) fundamentou e orientou seu trabalho a partir da dimensão histórica de livros didáticos de Gert Schubring. O autor discorre sobre a abordagem dos números fracionários presente nos livros didáticos, possibilitando uma comparação entre as diferentes abordagens.

Como conclusão, Santos (2015) destaca que foi possível observar alterações e manutenções na legislação, nos programas curriculares, na diagramação dos livros, nos conceitos e nas diferentes abordagens dadas aos números fracionários em cada um dos livros didáticos. Como mudança, foi possível constatar a introdução da teoria dos conjuntos, das propriedades estruturais, e das representações (diagramas, símbolos e nomenclaturas), acompanhadas de um aumento de exercícios, cores e imagens nas obras. Entretanto, o autor salienta que as mudanças conceituais relacionadas ao MMM não foram incorporadas de maneira homogênea nos livros didáticos de Matemática dos anos 1960, estando presentes em maior grau nas obras de Sangiorgi.

A pesquisa de Santos (2015) contribuiu para o conhecimento da evolução do ensino de números fracionários durante o período do MMM, evidenciando que havia uma ênfase na prática operatória característica da Matemática Moderna. Além disso, também destacamos a introdução de recursos visuais por meio de ilustrações, decorrentes da evolução dos recursos editoriais presenciada nessa época.

A segunda dissertação, de Wilian Faias da Silva (2016) intitulada: *O impacto da matemática moderna no ensino dos números naturais: uma análise de sete livros*, foi defendida também pelo Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT) na Universidade de São Paulo (USP). O autor teve como objetivo analisar as mudanças conceituais no ensino de números naturais através da análise de livros didáticos de Matemática, observando inovações pedagógicas e modificações editoriais. E, portanto, recorreu a livros didáticos de Matemática publicados entre 1950 e 1970, e de modo a melhor compreender o programa do ensino secundário, apresentou brevemente as principais reformas antes e durante o MMM: Francisco Campos (1931), Capanema (1942), de Simões Filho (1951), além dos Congressos Nacionais de Estudo do Ensino da Matemática que ocorreram antes e durante o MMM no Brasil. Além disso, o autor observou como era o uso de teoria dos conjuntos na abordagem dos números naturais, a adequação à legislação na época, o uso de imagens e

outros recursos editoriais. Os livros considerados são de autoria de Ary Quintella, Osvaldo Sangiorgi, Carlos Galante, Osvaldo Marcondes dos Santos e Miguel Asis Name.

O referido autor utilizou a metodologia comparativa, inspirada pelos ideais de Gert Schubring e sua obra *Análise histórica de livros de Matemática*. E, como conclusão, Silva (2016) chegou ao entendimento que as inovações relacionadas a Matemática Moderna estão associadas ao uso da teoria dos conjuntos estruturas matemáticas, e as novas orientações pedagógicas na explanação dos assuntos. Aliás, destacou a evolução dos recursos editoriais (desenhos e esquemas) que apesar de não se relacionarem com as propostas da Matemática Moderna, auxiliaram na explanação dos assuntos, principalmente na representação de conjuntos e diagramas, nas figuras para contextualizar situações e na explanação dos exercícios.

Assim, a pesquisa de Silva (2016) contribuiu para esta investigação no tocante a ampliação dos conhecimentos sobre as reformas do ensino que ocorreram no país, destacando-se as três reformas de: Capanema, Francisco Campos e Simões Filho. Além do mais, através da análise comparativa dos livros didáticos foi possível notar mudanças conceituais e metodológicas no ensino dos números naturais antes e durante o MMM e conhecer os congressos de matemática ocorridos durante as décadas de 1950 e 1960, o que auxiliou na compreensão de sua influência em discussões para o ensino de Matemática da época.

Diante do exposto, podemos notar que os dois trabalhos contribuem, cada um à sua maneira no campo da história da Educação Matemática, tendo como foco principal a abordagem da aritmética nos livros didáticos. Assim, nesse trabalho buscamos contribuir no esclarecimento sobre qual a abordagem de números naturais em livros didáticos de matemática publicados na década de 1960, contexto do MMM no Brasil, de modo a compreender de que maneira esse material se tornou um importante agente de disseminação das propostas da Matemática Moderna para os mais diferentes cantos do país. Para isso, no próximo capítulo abordaremos o currículo de matemática do ensino secundário durante a década de 1960, uma vez que o programa de matemática sofreu alterações com o advento da Matemática Moderna que impactaram diretamente no conteúdo dos livros didáticos da época.

3 O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO SECUNDÁRIO DURANTE O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

O programa de matemática do ensino secundário sofreu alterações com o advento da Matemática Moderna, e para compreendermos essas mudanças e conhecermos os programas de matemática, faremos um breve relato das reformas Francisco Campos (1931), Capanema (1942) e Simões Filho (1951). Além disso, trataremos do IV Congresso de Ensino de Matemática, realizado no ano de 1962 em Belém (PA), e suas implicações no currículo do ensino secundário.

Silva (2016) destaca que logo após a revolução de 1930, durante o governo provisório liderado por Getúlio Vargas, foi criado o Ministério da Educação e Saúde Pública do qual Francisco Campos foi ministro. Ele promoveu uma reforma na educação nacional, em que podemos destacar a criação do Conselho Nacional de Educação e a reorganização do ensino secundário e superior. A reestruturação do ensino secundário proposta na Reforma Francisco Campos estabeleceu:

O aumento da duração do ensino secundário, pois ele passou de cinco para sete anos de duração e foi dividido em dois ciclos. O primeiro ciclo, chamado “fundamental”, com um período de cinco anos, era um curso comum a todos os estudantes secundaristas e conferia formação geral. A segunda fase do ensino secundário, o “ciclo complementar”, formado por dois anos, era propedêutico para o curso superior e apresentava um leque de três opções: “para os candidatos à matrícula no curso jurídico”, “para os candidatos nos cursos de medicina, farmácia e odontologia” e “para os candidatos nos cursos de engenharia ou de arquitetura” (BRASIL, 1931, p. 01-02 *apud* SILVA, 2016, p. 26).

No entanto, o desejo de reforma do ensino secundário de matemática era uma tendência expressa internacionalmente, tendo no Brasil professores que defendiam as propostas de modernização do ensino, desenvolvidas principalmente como mudanças no currículo e metodologia de ensino de matemática. De acordo com Silva (2016), entre esses professores destacou-se Euclides Roxo que entre 1925 e 1930 foi diretor do Externato do Colégio Pedro II, situado no Rio de Janeiro, posteriormente assumindo a diretoria do internato, sendo que nesse momento a instituição era referência para o ensino secundário no país, e que a partir da reforma Francisco Campos teve seus programas tornados como oficiais em todo o território nacional.

Assim, conforme Silva (2016), os programas de matemática, assim como suas orientações didáticas em todo país, sofreram influências dos movimentos internacionais de reforma do ensino, uma vez que Euclides Roxo aplicava algumas inovações no Colégio Pedro II. Ainda nesse período, algumas das mudanças foram o ensino de matemática de acordo com as necessidades das outras disciplinas, a subordinação da finalidade do ensino às diretrizes

culturais da época e a unificação dos cursos de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, em uma disciplina unificada denominada matemática.

Ainda, segundo o autor, em 1942, o então ministro da educação e saúde Gustavo Capanema, começou a elaborar mudanças no ensino secundário no que mais tarde passaria a ser conhecida como Reforma Capanema (1942), preservando o ensino secundário em dois ciclos. Assim, o primeiro ciclo correspondia ao curso ginasial e o segundo ciclo era composto por dois cursos paralelos, o clássico e o científico, configurando uma nova revisão no segundo ciclo dos programas de matemática.

Em 1951, o então ministro da educação Simões Filho, por meio de portaria ministerial, reorganizou os programas de conteúdos do ginásio e colégio, com o suporte de alguns professores do Colégio Pedro II. O objetivo da reforma era simplificar os programas de ensino, e em matemática foram estabelecidos um *Programa Mínimo* e orientações metodológicas que todas as instituições públicas e privadas do país deveriam cumprir.

Dez anos mais tarde, em 1961, tivemos a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 4024/61), que estava prevista desde a constituição de 1934 e defendia a descentralização e a criação de sistemas estaduais de modo a permitir o debate com os demais estados brasileiros. Ademais, foi aprovado em 1962, no IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, realizado em Belém (PA), um novo programa de matemática para o ensino secundário denominado *Assuntos Mínimos* para um moderno programa de matemática. Este programa foi elaborado e apresentado pelo GEEM e segundo Silva (2016, p. 29), “norteou muitas produções de livros didáticos quanto a conteúdos e orientações didáticas”. De modo a ilustrar o cenário, no Quadro 8 estão dispostos os programas de conteúdos do curso ginasial do programa *Assuntos Mínimos* para um moderno programa de matemática.

Quadro 8 - Assuntos Mínimos em um moderno programa de matemática no ensino ginasial

Assuntos Mínimos	Sugestões
1 – Números inteiros; Operações fundamentais; propriedades. Sistemas de numeração.	1 – A ideia de conjunto deveria ser a dominante; as propriedades das operações com os números inteiros devem ser ressaltadas como início das estruturas matemáticas. Lembrar a importância de outros sistemas de numeração, além do decimal.
2 – Divisibilidades; múltiplos e divisores; números primos.	2 – O uso da linguagem de conjuntos e operações entre conjuntos, poderá trazer novos centros de interesse na explanação da matéria.
3 – Potenciação e radiciação; raiz quadrada.	3 – Estudá-las como operadores inversos; verificação da validade ou não das propriedades já introduzidas; justificar, tanto quanto possível à extração da raiz quadrada.
4 – Números fracionários; operações fundamentais; propriedades; potenciação e radiciação.	4 – Ressaltar com os números fracionários a permanência das propriedades já introduzidas com os números inteiros (a estrutura contínua); fazer alusão à aproximação na extração da raiz quadrada.

5 – Números relativos; operações fundamentais; propriedades.	5 – Ressaltar com os números relativos a permanência das propriedades já introduzidas (a ideia da estrutura comparece novamente); representar graficamente os números relativos.
6 – Medidas de figuras geométricas simples.	6 – Fazer a revisão do estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais; cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Usar nos problemas de aplicação as noções já conhecidas de moeda, peso, capacidade e tempo.
7 – Razões e proporções; aplicações.	7 – Discriminar as aplicações principais: divisão proporcional; regra de três; porcentagem; juros e câmbio.
8 – Números racionais; operações fundamentais; propriedades.	8 – Ressaltar o aspecto comum das propriedades dos números racionais englobando os números inteiros, números fracionários inclusive os relativos.
9 – Cálculo literal: polinômios com coeficientes racionais; operações fundamentais; propriedades.	9 – Estudar, nesse cálculo, os casos simples de fatoração; ressaltar as propriedades comuns às operações entre os números introduzidos e os polinômios (ideia de estrutura algébrica).
10 – Equações do 1º grau com uma incógnita; inequações do 1º grau com uma incógnita: inequações simultâneas.	10 – É aconselhável: estudar somente as equações do primeiro grau com coeficientes racionais; associar, para as inequações simultâneas as operações entre conjuntos; fazer problemas de aplicação.
11 – Frações algébricas; operações fundamentais; propriedades.	11 – Lembrar da ausência de significado do anulamento do denominador das frações algébricas; discutir as equações e inequações literais do primeiro grau com uma incógnita.
12 – Função; representação gráfica cartesiana de uma função.	12 – Dar a noção fundamental de função como correspondência; introduzir sistema de coordenadas no plano; estudar a função linear: $y = ax + b$.
13 – Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica. Sistema de equações do 1º grau com 3 incógnitas.	13 – Acentuar o princípio da eliminação que pode ser estendido a sistemas com um número qualquer de equações. Discutir completamente o caso do sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Lembrar as equações e os sistemas e fazer problemas de aplicação.
14 – Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas; interpretação – gráfica.	14 – Ressaltar a interpretação gráfica.
15 – Polígonos: generalidades; estudo do triângulo.	15 – Ressaltar a convexidade e não convexidade; apresentar os polígonos regulares; estudar congruência de triângulos, propriedades e aplicações.
16 – Perpendicularismo e paralelismo no plano; estudo dos quadriláteros.	16 – Na teoria das paralelas destacar o Postulado de Euclides e suas consequências.
17 – Circunferência; propriedades; posições relativas de retas e circunferência e circunferências.	17 – Continuar aplicando a linguagem dos conjuntos e suas operações.
18 – Número irracional e número real; operações fundamentais; cálculo de radicais.	18 – Ressaltar a permanência das propriedades já introduzidas com os números racionais; resolver equações e sistemas do 1º grau com coeficientes reais. Representação gráfica do número real na reta.
19 – Equações do 2º grau com uma incógnita; função; trinômio do 2º grau; equações redutíveis ao 2º grau; sistemas redutíveis ao 2º grau.	19 – Estudar as primeiras noções sobre o trinômio do 2º grau; representação gráfica e aplicação simples. Entre as equações redutíveis ao 2º grau, estudar as equações biquadradas e as irracionais simples.
20 – Segmentos proporcionais; semelhança de polígonos; seno, cosseno e tangente de um ângulo.	20 – Relacionar com o estudo das razões e proporções.
21 – Relações métricas nos triângulos. Lei dos senos e co-senos (<i>sic</i>).	21 – Lembrar a representação geométrica do número real; construção geométrica dos irracionais quadráticos.
22 – Relações métricas no círculo; polígonos regulares	22 – Ressaltar as construções geométricas de polígonos regulares.
23 – Área dos polígonos; medida da circunferência e área do círculo.	23 – Noção do número π .

Fonte: Sangiorgi (1967, p. 03 -05 *apud* Silva, 2016, p. 30 – 33)

Para a análise dos livros didáticos a seguir, consideramos como referência o programa *Assuntos Mínimos* para um moderno programa de matemática como o currículo base no período referente ao MMM, aprovado no IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática em 1962.

4 O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO DESENVOLVIMENTO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

Segundo Carolina Riego Lavorente (2008, p. 62) citando uma fala de Valente (2006), “um livro revela exatamente o que uma sociedade espera na época em que é escrito, estando em perfeita consonância com este tempo, sendo então capaz de revelar o contexto de um determinado período”. A autora também destaca, baseando-se em Nunez (1993), que o uso do livro didático pelo professor é um dos instrumentos didáticos de aprendizagem instituído historicamente, aliado ao currículo, aos programas e a outros materiais.

Nessa perspectiva, os livros didáticos passam a exercer um papel de documento histórico, que nos ajuda a compreender a história da Educação Matemática, conforme aponta Wagner Rodrigues Valente:

A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem à matemática hoje ensinada na escola básica. Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos (VALENTE, 2008b, p. 141).

Assim, ao analisarmos livros didáticos deve-se levar em consideração não apenas o seu conteúdo matemático, mas pensar nele como um produto cultural complexo. Alain Choppin (2004) aponta para uma extensão no campo de investigação dos livros didáticos após a década de 1980, e nesse sentido, verifica-se uma diversificação das problemáticas e a multiplicação dos agentes. O autor ainda caracteriza essa complexidade do livro didático afirmando que ele se situa no cruzamento da cultura, da pedagogia, da produção editorial e da sociedade.

Portanto, é necessário compreender o livro didático como produto cultural e não meramente visualizá-lo pelo conteúdo matemático que contempla, uma vez que, uma análise puramente conteudista não apresenta indícios suficientes para ser visto como agente da história da Educação Matemática.

Choppin (2004) ainda destaca que os livros escolares assumem diversas funções, no entanto, ressalta que estas variam segundo: o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, as metodologias e as formas de utilização. O autor ainda enfatiza quatro funções essenciais: referencial, instrumental, ideológica e cultural e documental; detalhadas na sequência.

1. **Função referencial:** também chamada de curricular ou programática, desde que existam programas de ensino: o livro didático é então apenas a fiel tradução do programa ou, quando se exerce o livre jogo da concorrência, uma de suas possíveis interpretações. Mas, em todo o caso, ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações.
2. **Função instrumental:** o livro didático põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades que, segundo o contexto, visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas, etc.
3. **Função ideológica e cultural:** é a função mais antiga. A partir do século XIX, com a constituição dos estados nacionais e com o desenvolvimento, nesse contexto, dos principais sistemas educativos, o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes. Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político. Essa função, que tende a aculturar — e, em certos casos, a doutrinar — as jovens gerações, pode se exercer de maneira explícita, até mesmo sistemática e ostensiva, ou, ainda, de maneira dissimulada, sub-reptícia, implícita, mas não menos eficaz.
4. **Função documental:** acredita-se que o livro didático pode fornecer, sem que sua leitura seja dirigida, um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno. Essa função surgiu muito recentemente na literatura escolar e não é universal: só é encontrada — afirmação que pode ser feita com muitas reservas — em ambientes pedagógicos que privilegiam a iniciativa pessoal da criança e visam a favorecer sua autonomia; supõe, também, um nível de formação elevado dos professores. (CHOPPIN, 2004, p. 553, grifos nossos)

Portanto, este nosso trabalho dialoga com o quadro teórico de Choppin, uma vez que consideramos os livros didáticos como uma fonte referencial, sendo uma ferramenta de apoio às atividades do professor em sala de aula; e instrumental, por disponibilizarem exemplos, exercícios e procedimentos tais como a conceituação de número e algoritmos para as operações, que pretendem apoiar a aprendizagem, facilitar a memorização e a aquisição de competências, aprimorar habilidades e resolver problemas.

Sobre o livro didático, a pesquisadora brasileira Circe Maria Fernandes Bittencourt (2004a) também nos fala sobre a dificuldade de defini-lo apesar de se tratar de um objeto familiar e de fácil identificação. Além disso, a autora também destaca as diversas interferências na elaboração e nos usos do livro didático que por ser um suporte de conhecimentos escolares, métodos pedagógicos e carregar todo um sistema de valores, também é uma mercadoria. Sobre isso destaca que:

Pode-se constatar que o livro didático assume ou pode assumir funções diferentes, dependendo das condições, do lugar e do momento em que é produzido e utilizado nas diferentes situações escolares. Por ser um objeto de ‘múltiplas facetas’, o livro didático é pesquisado enquanto produto cultural; como mercadoria ligada ao mundo editorial e dentro da lógica de mercado capitalista; como suporte de conhecimentos e de métodos de ensino das diversas disciplinas e matérias escolares; e, ainda, como veículo de valores, ideológicos ou culturais (BITTENCOURT, 2004a, p. 471).

Assim, enquanto suporte de conhecimentos escolares, o livro didático é determinante na implementação do currículo. Nesse sentido, Bittencourt também destaca que o livro didático assume o papel de disseminar as propostas curriculares do Estado e essa relação interfere de maneira indireta na elaboração dos conteúdos por ele veiculados. Ademais, pontua que “como os conteúdos propostos pelos currículos são expressos pelos textos didáticos, o livro torna-se um instrumento fundamental na própria constituição dos saberes escolares” (BITTENCOURT, 2004b, p. 301).

Os conteúdos matemáticos presentes em livros didáticos de matemática de outra época fornecem evidências e instrumentos para a produção de fatos históricos da história da Educação Matemática. Nesse sentido, os livros didáticos representam uma forma de disseminar uma determinada tendência educacional vigente e não foi diferente com o MMM. Como citamos anteriormente, os livros didáticos levaram as ideias modernizadoras da matemática as mais distantes localidades brasileiras, apresentando aos professores os novos conteúdos e recomendações curriculares.

Estes livros se espalharam pelas escolas e serviram de guia para muitos professores da Educação Básica planejarem suas aulas, mostrando assim, o imenso auxílio desse material nas práticas pedagógicas da Educação Matemática no período da Matemática Moderna. Sobre isso D’Ambrosio (2017) destaca que os professores usavam os livros como única fonte de informação, e dele extraíam os conceitos e a forma de abordá-los, os exemplos a serem utilizados, as atividades a serem propostas e até a sequência a ser seguida.

Para Pinto (2009, p. 62),

O livro didático tem um importante papel na constituição de uma cultura escolar. Longe de ser uma produção neutra, no gesto de ordenar um programa de ensino, organiza em seu discurso um conjunto de regras e proposições, considerado o mais adequado para o ensino e aprendizagem de uma disciplina escolar.

Nesse sentido, fica evidente que o estudo do livro didático é justificável tendo em vista nosso interesse em compreender as intenções pedagógicas e o conhecimento matemático empregado no período da Matemática Moderna.

A propagação do livro didático durante o MMM ocorreu simultaneamente à organização de diversos grupos de estudo pelo Brasil, dentre os quais se destacou o GEEM, fundado em 1961 e tendo como coordenador o professor Osvaldo Sangiorgi, conceituado autor de livros de matemática voltados aos cursos ginasiais. Sangiorgi não apenas liderou a difusão da Matemática Moderna no país através de cursos de formação para professores, como também é referenciado como autor dos primeiros livros didáticos dessa nova tendência.

No período de destaque do movimento no país, a grande maioria dos livros didáticos apresentava os mesmos conteúdos e atividades muito semelhantes, caracterizando uma linearidade excessiva quase impecável. Esse fenômeno é o que André Chervel denomina de “vulgata”. Segundo ele:

Um manual mais audacioso, ou mais sistemático, ou mais simples do que os outros, destaca-se do conjunto, fixa os ‘novos métodos’, ganha gradualmente os setores mais recuados do território, e se impõe. É a ele que doravante se imita, é ao redor dele que se constitui a nova vulgata (CHERVEL, 1990, p.204 *apud* PINTO; SOARES, 2010, p. 3).

Nesse sentido, a coleção de livros didáticos para o Ginásio, *Matemática Curso Moderno*, de autoria de Osvaldo Sangiorgi se apresentava como um material inovador que rompia com as práticas tradicionais inseridas na cultura escolar, ganhou logo grande notoriedade e se tornou uma referência para muitos outros autores de renome que apoiaram a proposta inovadora da Matemática Moderna.

De acordo com Soares e Pinto (2010), assim como Sangiorgi, muitos outros autores como Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci se apropriaram dessa proposta modernizadora e nas prateleiras das livrarias era comum encontrar a palavra “moderno (a)” nos títulos dos livros didáticos de matemática. É necessário ressaltar que muitos professores resistiram a proposta inicialmente, porém, pela força dos meios de comunicação que difundiam as ideias, muitos sentiram receio de serem taxados de antigos ou de serem cobrados pelos pais dos alunos, que eram surpreendidos com essa nova maneira de fazer matemática.

No entanto, a força da Matemática Moderna nos livros didáticos também estava relacionada a uma série de medidas estruturais governamentais que impulsionaram e modificaram o mercado editorial brasileiro, como as ações do governo federal, que entre 1950 e 1960, isentou o setor livreiro e a indústria de papel de quase todos os impostos, exceto o imposto de renda e que “aliado a renovação e modernização do parque gráfico, fez a indústria gráfica crescer 143%” (HALLEWELL, 2005 *apud* SILVA, 2016, p. 23).

Entretanto, Silva (2016) baseando-se em Hallewell (2005), pontua que em 1961 o governo Jânio Quadros estendeu à importação de papel as taxas de câmbio do mercado livre, e retirou o subsídio compensatório aos fabricantes brasileiros de papel, isso fez com que o custo de produção das editoras brasileiras aumentasse em 75%, então qualquer publicação só era realizada na certeza de ser vendida rapidamente.

No cenário nacional de livros didáticos durante o MMM houve a produção de muitos livros, alguns por um professor isolado, outros por grupos de professores, em que se destacou Osvaldo Sangiorgi. Graças a sua figura de liderança no MMM no Brasil, sua coleção *Matemática – Curso Moderno* vendeu cerca de 4,3 milhões de exemplares entre 1964 e 1973 (HALLEWELL, 2005 *apud* SILVA, 2016).

Contudo, Silva (2016) deixa claro que a produção de livros didáticos no período não se resume as coleções de Sangiorgi e destaca que a partir de 1964 começam a ser produzidas no Brasil as traduções dos livros didáticos norte-americanos do SMSG. Estes materiais, no entanto, eram considerados de “alto-risco” por editoras comerciais que não apresentaram interesse em investir em sua publicação, fazendo com que efetivamente não fossem muito utilizados. Nesse sentido, D’Ambrosio (2017) destaca que os textos desses livros do SMSG eram considerados difíceis de serem usados pelos professores e, no que diz respeito ao conteúdo e a forma de lecionar, muito diferentes do que estavam acostumados.

Ao entrevistar professores ligados ao movimento, D’Ambrosio destaca que:

Ao comparar materiais de projeto e textos comerciais alegaram que os últimos eram idênticos aos tradicionais, exceto por um novo capítulo sobre a teoria dos conjuntos e pela linguagem ligeiramente diferente. Acreditavam que essa característica levava os professores a utilizá-los, pois compreendiam esses textos mais facilmente porque estavam mais familiarizados com a maneira pela qual o material era apresentado (D’AMBROSIO, 2017, p. 140).

Silva e Siqueira (2011) após realização de análise quantitativa da produção de livros didáticos no Brasil entre 1950 e 1970, destacam que os autores mais significativos do período foram: Ary Quintella, Miguel Assis Name, Osvaldo Sangiorgi e Antônio Trajano. D’Ambrosio (2017) salienta, no entanto, que os livros didáticos verdadeiramente inovadores foram aqueles produzidos através de projetos. Entretanto, a maioria destes exigia a realização de oficinas para treinar os professores quanto ao uso, custo que as editoras não estavam dispostas a bancar. Assim, segundo D’Ambrosio (2017, p. 145), “a principal fonte de mudança foram os próprios livros, e a interpretação dependia exclusivamente dos esforços individuais dos professores”.

Desse modo, levando em conta a importância e as peculiaridades do livro didático como forma de disseminação da Matemática Moderna pelas mais diversas regiões do Brasil, realizamos uma análise de três obras compreendidas na década de 1960, no que diz respeito à abordagem e o desenvolvimento do conceito de número. Dessas obras, duas são nacionais e a outra é uma tradução do SMSG, todas destinadas a alunos do primeiro ano do ciclo ginásial, sendo elas: *Matemática para a Primeira Série Ginásial* (1963) de autoria de Ary Quintella, *Matemática Curso Ginásial* (1967) de autoria do *School Mathematics Study Group* com tradução de Lafayette de Moraes e colaboradores, e *Matemática Curso Moderno* (1969) de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci. Os livros didáticos foram escolhidos de modo a enriquecer a discussão sobre os desdobramentos do MMM no Brasil, especialmente no ensino da matemática da década de 1960, evidenciando, através de trechos das obras, como as tendências defendidas pelo movimento podem ser identificadas no conteúdo desses manuais.

5 PROCESSO METODOLÓGICO

Este estudo é de natureza documental, inserindo-se em uma perspectiva qualitativa, tendo por fontes livros didáticos produzidos durante a década de 1960 no contexto do MMM no Brasil.

Sobre a pesquisa documental Marconi e Lakatos (2003, p. 174) destacam que sua característica “[...] é que a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo o que se denomina de fontes primárias”. Além disso, as autoras destacam que esta sistematização das informações pode ser feita no momento em que o fato ou fenômeno ocorre, ou depois. Assim, de acordo com Lüdke e André (1986, p. 38) são considerados documentos quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação: “leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros de programas de rádio e televisão, até livros, estatísticas e arquivos escolares”.

Além disso, Kripka, Scheller e Bonotto (2015, p. 59) citando Flick (2009) destacam que em uma pesquisa documental o pesquisador precisa entender os documentos como “meios de comunicação” pois estes

[...] foram elaborados com algum propósito e para alguma finalidade, sendo inclusive destinado para que alguém tivesse acesso à eles. Assim, indica que é importante compreender quem o produziu, sua finalidade, para quem foi construído, a intencionalidade de sua elaboração e que não devem ser utilizados como ‘contêineres de informações’. Devem ser entendidos como uma forma de contextualização da informação, sendo analisados como “dispositivos comunicativos metodologicamente desenvolvidos na produção de versões sobre eventos”.

Ao se deparar com um trabalho de pesquisa, é natural realizar alguns questionamentos: “Qual o problema de pesquisa?”, “Que objetivos pretendem ser alcançados?” ou, ainda, “Qual a metodologia empregada?”. O problema de pesquisa delinea todo o estudo, sendo que por meio dele buscamos caracterizar o livro didático como uma fonte de conhecimentos educacionais, auxiliando na compreensão de algum conteúdo em alguma época em específico. Assim, o primeiro questionamento diz respeito a problemática de pesquisa do estudo, em que propomos mostrar como foi feita a abordagem de número em livros didáticos da década de 1960, inseridos no contexto do MMM.

Os objetivos representam aonde se quer chegar, mostrando a finalidade e a meta pretendida com o estudo. Assim, o propósito foi caracterizar a abordagem de número no contexto do MMM no Brasil verificando através da análise de livros didáticos pertencentes à

época, de que modo esse conteúdo se apresentava em termos de organização, linguagem, metodologia e uso dispositivos didáticos⁸. Além disso, buscamos caracterizar o papel assumido pelos livros didáticos como agentes disseminadores da tendência da Matemática Moderna para as mais diferentes regiões brasileiras, justificando assim sua importância enquanto objeto de estudo.

A busca por respostas às questões formuladas delineará métodos, e, portanto, o conjunto destes métodos, a metodologia. Num trabalho de natureza histórica, a metodologia é um aspecto difícil de ser previsto, dependendo diretamente das fontes de pesquisa, do espaço-tempo e do problema de pesquisa a ser respondido. Empregamos um método de investigação histórico, em que o contexto, o currículo vigente e o livro didático são os protagonistas e nos direcionam na busca por respostas que atendam os objetivos propostos pelo estudo. Ademais, é essencial pensar que “encarar a história como uma operação [historiográfica] será tentar, de maneira necessariamente limitada, compreendê-la como a relação entre um lugar (um recrutamento, um meio, uma profissão etc.), procedimentos de análise (uma disciplina) e a construção de um texto (uma literatura)” (CERTEAU, 1982, p. 66 *apud* MACIEL, 2019, p. 20).

O trabalho delimita como objeto de pesquisa os livros didáticos e, portanto, analisamos estes como instrumento pedagógico para o processo de ensino-aprendizagem de matemática. O uso do livro didático, enquanto fonte de pesquisa, é motivado pelo papel histórico que assume, uma vez que, segundo Valente (2008b), os conteúdos matemáticos de outra época nele presentes fornecem evidências e instrumentos para a produção de fatos históricos da história da Educação Matemática. Entretanto, é necessário levar em consideração que os livros didáticos enquanto fonte de estudo estão inseridos em um contexto específico, sendo que sua interpretação é feita por um ou mais sujeitos, que têm pontos de vista e interesses próprios.

Partimos da hipótese de que a matemática presente nos livros didáticos da década de 1960 poderia apresentar vestígios de Matemática Moderna. Assim, como objetivo geral de responder ao questionamento sobre *qual a abordagem de números naturais no contexto do Movimento da Matemática Moderna nos livros didáticos no período de 1960 – 1970*, delimitamos alguns objetivos específicos de modo a detalhar o objetivo geral:

⁸ Dispositivo didático neste contexto, diz respeito ao conjunto de ferramentas de natureza não-textual, empregadas para a explanação de algum conceito, como por exemplo, ilustrações e esquemas.

- Caracterizar o papel assumido pelos livros didáticos de matemática como agentes de disseminação da Matemática Moderna para as mais diversas regiões do país.
- Evidenciar através da análise de trechos de livros didáticos da época a relação entre os ideais do Movimento da Matemática Moderna e o conteúdo apresentado por eles, buscando esses indícios no conteúdo das obras.
- Verificar metodologicamente a abordagem sobre números naturais em livros didáticos inseridos no Movimento da Matemática Moderna.

Desse modo, com a finalidade de detalhar e enriquecer a discussão sobre a Matemática Moderna, os livros didáticos são os objetos centrais da pesquisa, levando em consideração seus aspectos bibliográficos e metodológicos.

Inicialmente buscamos por livros didáticos compreendidos no período estabelecido de modo a compor o material de análise. Assim, exploramos o Repositório de Conteúdo Digital da Universidade Federal de Santa Catarina, no acervo de História da Educação Matemática⁹. A opção por pesquisar nesse acervo, se deu pela significativa quantidade de material digitalizado (com 578 manuais até outubro de 2020) e ser de acesso livre, possibilitando a qualquer pesquisador interessado explorar os materiais do catálogo. Maciel (2019, p. 91) pontua que “o acervo presente nesse repositório digital foi constituído e organizado coletivamente por pesquisadores brasileiros, como um produto de projetos de pesquisa”. Além disso, outro motivo significativo de usar este repositório digital justifica-se por não encontrar um acervo físico na cidade de Chapecó (SC) que contenha este tipo de material, sendo assim necessário recorrer a fontes digitais.

Procuramos num primeiro momento verificar o que o repositório poderia nos fornecer de material relacionado à Matemática Moderna. Para isso, foi realizada uma busca na pasta “livros didáticos e manuais pedagógicos¹⁰” procurando por expressões como: matemática moderna, livro didático, moderno, ginásial, *etc.* Desse modo, foi possível localizar vários livros, sendo estes referentes a diferentes séries escolares do ciclo ginásial e colegial. E então, estabelecemos a intenção de analisar livros da primeira série ginásial e que estivessem compreendidos na década de 1960, década em que principia o MMM no Brasil.

⁹ Acervo do GHEMAT, disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

¹⁰ Acervo do GHEMAT, disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1772>.

Assim, após visualizar título e o ano de publicação, separamos os livros didáticos e arquivamos uma cópia digital no computador pessoal, de modo a facilitar a consulta. Em seguida, iniciamos uma análise minuciosa das informações desses livros, visualizando seu prefácio, sumário e o conteúdo dos seus capítulos, de modo a registrar as primeiras impressões e confirmar o material enquanto objeto de análise.

Após a busca inicial definiu-se analisar três obras:

1. MATEMÁTICA para a primeira série ginásial (1963), de autoria de Ary Quintella.
2. MATEMÁTICA Curso Ginásial (1967), de autoria do *School Mathematics Study Group* com tradução de Lafayette de Moraes e colaboradores.
3. MATEMÁTICA Curso Moderno (1969), de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci.

A escolha por esses livros didáticos foi motivada pela disponibilidade do repositório e, porque de acordo com os trabalhos de Silva e Siqueira (2011) e Santos (2015), Ary Quintella, Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci figuravam entre os autores mais significativos da década de 1960. Além disso, destacamos que a escolha pelo livro do SMSG se deu pelo fato de que esse material foi traduzido e adotado por algumas escolas brasileiras, além de que, sua análise possibilitou conhecer brevemente como MMM se desenvolveu nos livros didáticos dos EUA.

Com relação aos livros didáticos, ponderamos que a análise de um conteúdo da obra possibilitaria um aprofundamento necessário na direção de melhor identificar como as tendências da Matemática Moderna poderiam ser identificadas e de que maneira o conteúdo era apresentado. Desse modo, optamos pelo tema **Números**, uma vez que esse conceito é o pilar do estudo da aritmética e grande parte da primeira série ginásial estava pautada no estudo dos números, operações e aplicações.

A análise deteve-se, então, na forma como foi realizado o enfoque do conteúdo, buscando compreender como esses livros colocavam em prática as ferramentas de aprendizagem na abordagem de números naturais no contexto do MMM, de modo a pontuar qual a abordagem de cada uma das obras e mostrar possíveis evidências da presença de Matemática Moderna.

Ainda, a análise baseou-se no currículo do programa *Assuntos mínimos* elaborado pelo GEEM e teve como fonte o livro didático, consideramos os livros didáticos como fonte referencial e instrumental (CHOPPIN, 2004). Enquanto estrutura da análise dos dados, realizou-se em duas etapas: análise descritiva e análise comparativa.

A análise descritiva é uma etapa que busca descrever o conteúdo das obras, destacando trechos e realizando considerações sobre. Desse modo, caracterizamos o modo como o autor apresentou o conteúdo e os conceitos relacionados aos números naturais, a linguagem empregada, a introdução de simbolismos, o uso de dispositivos didáticos, a abordagem das operações de adição e subtração e os exercícios presentes nas obras.

A etapa de análise comparativa baseou-se nas fichas-síntese de Maciel (2019), as quais consistem em quadros que sintetizam a análise descritiva e permitem comparar as abordagens e reconhecer possíveis similaridades. Desse modo, buscamos identificar elementos que podem evidenciar aspectos comuns aos manuais, como: as indicações no prefácio, o formato geral das orientações, a ordem de apresentação dos conteúdos, o detalhamento da proposta a ensinar, o uso de ilustrações e os dispositivos didáticos. Para tal, criamos cinco categorias que representam aspectos de análise nos manuais:

- a) *Aspectos gerais das obras*: dimensão estrutural da obra, destacando particularidades sobre a capa, o prefácio e o sumário.
- b) *Apresentação*: como os autores retratam o tema números, ressaltando a forma de abordagem.
- c) *A adição dos números naturais*: qual a abordagem empregada na operação de adição nas obras.
- d) *A subtração dos números naturais*: qual a abordagem empregada na operação de subtração nas obras.
- e) *Linguagem e abordagem dos conceitos*: de que forma os conteúdos foram desenvolvidos, quais as metodologias empregadas e caracterização dos exercícios das obras.

Desse modo, as etapas de análise se constituem como uma tentativa de levantar informações nos livros para que possamos identificar e caracterizar a abordagem de número em cada uma das obras. Assim, ao analisar a estrutura e a composição de cada obra, a realizamos pelo estudo do contexto no qual está inserida, uma vez que, não podem ser descartadas as influências do contexto social, econômico e político vivido pelo Brasil durante o período em que se desenvolveu o MMM. Dessa maneira, o estudo permite compreender o vínculo entre as obras e a sociedade na qual estavam inseridas.

6 ANÁLISE DA ABORDAGEM DE NÚMERO EM LIVROS DIDÁTICOS DA DÉCADA DE 1960

Neste capítulo olhamos de forma mais detalhada para a maneira como se apresenta o conceito de número em livros publicados na década de 1960, contexto do MMM no Brasil. Desse modo, procedemos uma análise de livros didáticos publicados nessa década, levando em consideração aspectos bibliográficos e metodológicos das obras. Para tal, analisamos os livros:

- 1) **MATEMÁTICA para a primeira série ginasial** (1963), de autoria de Ary Quintella.
- 2) **MATEMÁTICA Curso Ginásial** (1967), de autoria do *School Mathematics Study Group* com tradução de Lafayette de Moraes e colaboradores.
- 3) **MATEMÁTICA Curso Moderno** (1969), de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci.

Inicialmente, realizamos uma análise descritiva de cada obra buscando caracterizar e destacar como o tema **números** foi apresentado. Em seguida, foi feita uma análise comparativa de modo a identificar similaridades e divergências entre as obras no que diz respeito a abordagem dos conteúdos, linguagem adotada, uso de dispositivos didáticos e atividades propostas. Estas etapas representam uma tentativa de identificar informações nos livros didáticos que nos forneçam elementos para caracterizar a abordagem de número em cada uma das obras, relacionando-as com as recomendações curriculares e tendências da Matemática Moderna.

6.1 ANÁLISE DESCRITIVA DOS LIVROS DIDÁTICOS

6.1.1 Livro: **MATEMÁTICA para a primeira série ginasial** (1963) de autoria de Ary Quintella

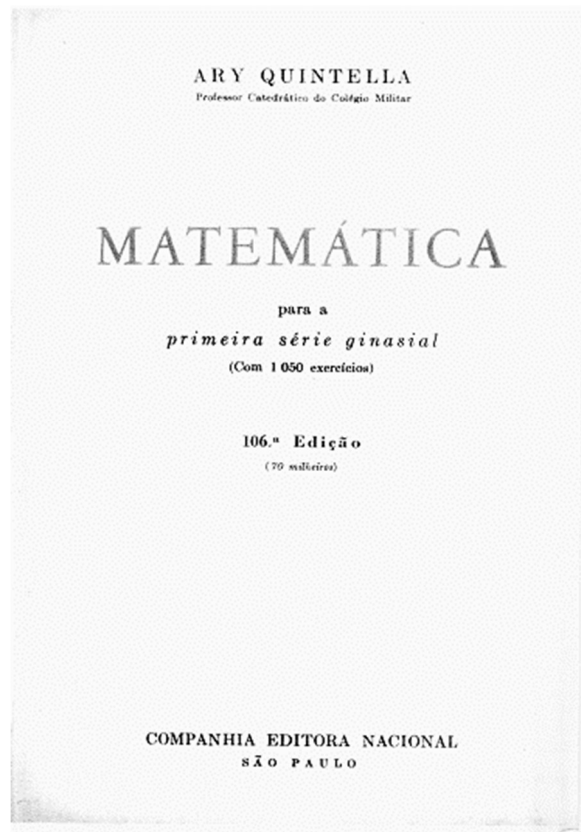
O livro *MATEMÁTICA para a primeira série ginasial* de Ary Quintella¹¹ foi publicado em 1963, sendo objeto de análise a 106ª edição. A obra possui 270 páginas que são compostas

¹¹ De acordo com Thiengo (2005), Ary Norton de Murat Quintella foi um professor brasileiro, catedrático de Matemática do Colégio Militar do Rio de Janeiro, onde também exerceu o cargo de diretor de ensino. Quintella foi autor de mais de vinte livros didáticos, dos quais podemos destacar uma série de seis volumes sobre Matemática Moderna.

por definições, exemplos, algumas ilustrações exemplificativas e exercícios. Em relação a utilização de cores na parte interna, verificou-se apenas duas cores: preto e branco, que podem ser resultado da digitalização de uma fotocópia do livro. Outro aspecto observado é que a obra está digitalizada sem capa, sendo desse modo inviável apresentar considerações sobre este aspecto, mas a contracapa nos fornece algumas informações importantes, como o fato que o livro continha 1050 exercícios (Figura 1).

O livro foi publicado pela editora Companhia Nacional, tendo como público alvo a primeira série ginásial

Figura 1 - Contracapa do livro Quintella



Fonte: Quintella (1963)

Ainda, considerando os elementos que compõem a obra, o prefácio apresenta um texto escrito pelo autor pontuando que a série Matemática para o Curso Ginásial não difere em seus fundamentos da versão anterior, referindo-se a edições precedentes. Nesse sentido, destaca que continua a julgar que as propriedades dos números, das operações e regras de cálculo devem ser justificadas de modo a manter o critério objetivo a partir da apresentação concreta de problemas simples. Além disso, Quintella (1963, s.p.) sinaliza que houve a preocupação “em tornar o livro didático atraente e de uso constante pelo aluno na aula e fora dela”.

Em sua dimensão estrutural a obra é dividida em quatro capítulos dedicados aos seguintes assuntos centrais:

- Números Inteiros; Números Relativos
- Divisibilidade; Números Primos
- Números Fracionários
- Sistema Métrico

Analisando os assuntos do livro pelo índice, percebemos que estão parcialmente de acordo com o programa *Assuntos Mínimos*. Embora Quintella não destaque um capítulo para noções de conjunto, explana a ideia intuitiva de conjuntos brevemente durante a unidade que trata dos números inteiros, primeira unidade do livro. A abordagem do autor é bem sutil, apresentando a ideia de conjunto, por exemplo, quando define número como unidade do conjunto. Entretanto, a recomendação do programa *Assuntos Mínimos* era que a ideia de conjunto deveria ser dominante, além de sugerir que fossem ressaltadas as estruturas matemáticas, mostrando dessa maneira, que o autor não incorporou essa exigência integralmente em sua obra.

A abordagem de Número na obra de Quintella

Em Quintella, a definição de número não possui pré-requisitos, uma vez que é o primeiro capítulo da obra. Assim, para abordar o conceito expõe que desde cedo o homem sentiu a necessidade de verificar quantos objetos figuravam em um grupo. Para explicar essa afirmação, exemplifica usando um pastor de ovelhas que faz cada pedra corresponder a uma ovelha de modo a verificar que nenhuma esteja perdida (Figura 2).

Figura 2 - Representação de contagem

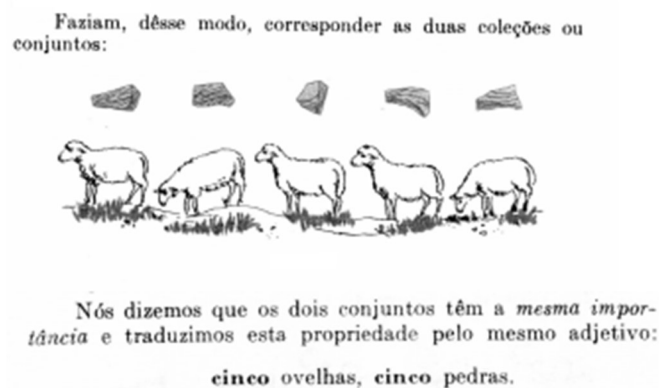


Fonte: Quintella (1963, p.13)

Em seguida apresenta a correspondência entre elementos de dois conjuntos (Figura 3), e estabelece que dois conjuntos têm a mesma importância quando cada elemento do primeiro corresponde a um elemento do segundo, e cada elemento do segundo corresponde a um

elemento do primeiro. Nesse ponto a autor também destaca que a natureza dos objetos não influencia na correspondência entre conjuntos. Também define número natural como a característica comum a dois conjuntos que têm a mesma importância.

Figura 3 - Representação de correspondência de conjuntos



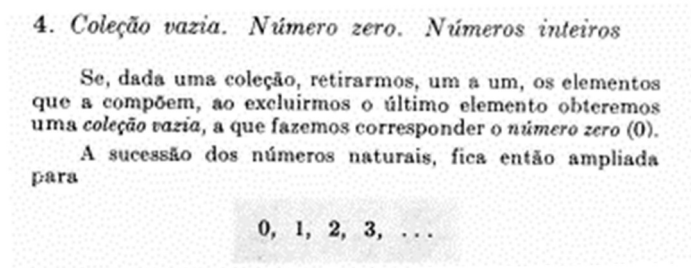
Fonte: Quintella (1963, p. 13)

Para representar os números naturais o autor utiliza os elementos do conjunto, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, definido como sucessão dos números naturais. Apesar de se referir aos números naturais como conjunto, podemos notar que o autor não utiliza chaves para representá-lo.

Quintella considera como contagem a representação dos elementos de um conjunto por um número da sucessão dos naturais. E, a partir da ideia de número sucessor, define uma propriedade na qual afirma que o conjunto dos números naturais é ilimitado. Para tal essa ideia é traduzida através da possibilidade “juntar mais uma unidade a uma coleção para formar uma coleção nova”, destacando que dado um número qualquer a , pode-se formar o seguinte juntando uma unidade: $a + 1$, denominado como consecutivo de a . Notamos que o autor apresenta a ideia de variável, uma vez que apresenta um número qualquer como a para definir o seu consecutivo, mostrando a introdução da abstração na obra.

Posteriormente, o autor faz corresponder o zero a uma coleção vazia, pontuando que a sucessão dos números naturais passa a ser ampliada com este elemento e o conjunto definido por $0, 1, 2, 3, \dots$, será chamado de números inteiros. Destacamos que o autor não apresenta simbologia para o conjunto vazio, apenas associa uma coleção vazia com o número zero (Figura 4).

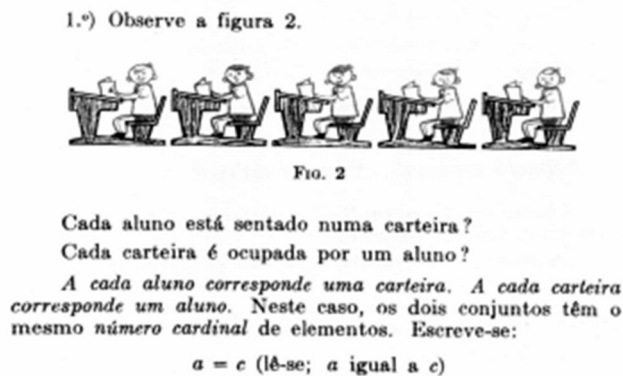
Figura 4 - Representação da correspondência do zero à uma coleção vazia



Fonte: Quintella (1963, p. 16)

Quintella destaca a estrutura de ordem ao comparar quantidades de dois conjuntos. Para isso, utiliza como exemplo duas figuras (Figura 5) que representam dois conjuntos: um de carteiras e outro de alunos, para explanar sobre as relações de ordem entre números inteiros. Define que a relação de igualdade entre dois conjuntos acontece quando ambos têm o mesmo número cardinal de elementos.

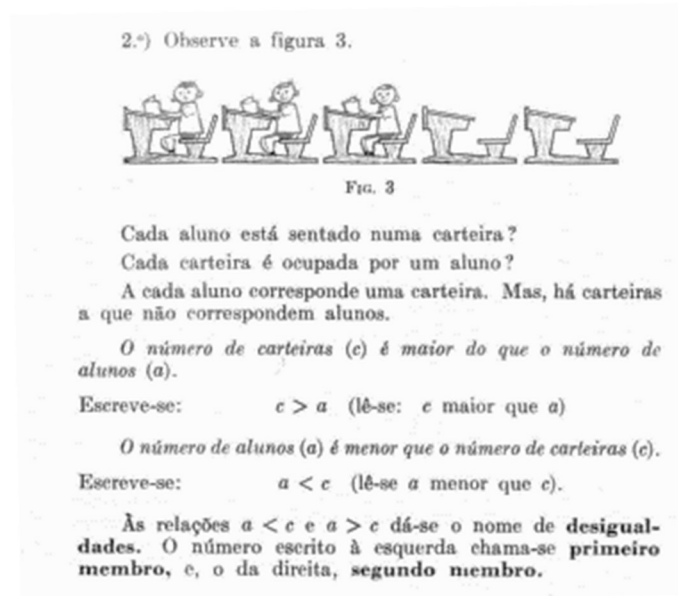
Figura 5 - Representação de igualdade entre conjuntos



Fonte: Quintella (1963, p. 16)

De forma semelhante, o autor define a relação de desigualdade, utilizando dois conjuntos que não têm o mesmo número cardinal de elementos (Figura 6)

Figura 6 - Representação da desigualdade entre conjuntos



Fonte: Quintella (1963, p. 17)

Notamos que Quintella introduz os sinais de $<$ (menor que), $>$ (maior que), $=$ (igual), através dos exemplos, relacionando quantidades entre conjuntos. No entanto, mais adiante, apresenta e exemplifica algumas propriedades: “duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si” e “ $a < b$ e $b < c$ resulta a desigualdade $a < c$ ”, expressando-as em linguagem matemática com a introdução do símbolo $\Rightarrow$. Segundo o autor o símbolo $\Rightarrow$ significa “daí resulta, acarreta ou implica em” e pode ser denominado “símbolo de implicação”.

O autor também apresenta um quadro que denomina como resumo, em que sugere a fixação do sentido dos símbolos (Figura 7). A partir do quadro, observamos que para as estruturas de *maior que* e *menor que* são introduzidas duas simbologias, no entanto observou-se apenas o uso da primeira em toda a obra. Inclusive, pode-se notar que aparece outra simbologia para representar que um número é maior que ou menor que outro, que difere da adotada atualmente ($>$ ou $<$), sendo esta notação composta pelos símbolos *não é maior que* ($\nlessgtr$) e *não é menor que* ($\ngtrless$). Além disso, constatamos a introdução de outros símbolos além dos já abordados: $\neq$ (diferente), $\geq$ (maior ou igual) e $\leq$ (menor ou igual). Entretanto, apesar de apresentar esses símbolos, o autor não exhibe exemplos da sua utilização, apenas informa que serão utilizados.

Figura 7 - Representação do quadro de símbolos

=	-----	igual
>	-----	maior que
<	-----	menor que
=>	-----	acarreta ou implica em
Além desses, usaremos os símbolos:		
≠	-----	diferente
≥	ou ≤	maior ou igual, isto, é não é menor
≤	ou ≥	menor ou igual, isto é, não é maior.

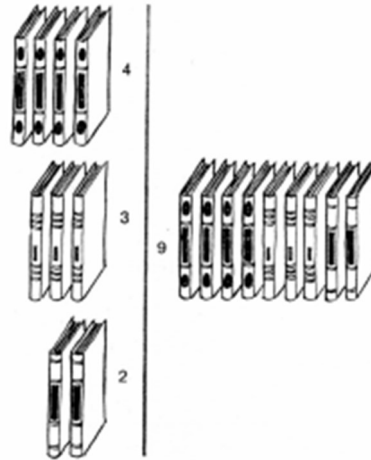
Fonte: Quintella (1963, p. 19)

A obra aborda os sistemas de numeração na base decimal, evidenciando a tabela das ordens e classes, e destacando o valor posicional de um número através de exemplos. Além disso, Quintella destaca o sistema de numeração romana e alguns exemplos envolvendo os números naturais nas bases doze e cinco.

Para definir a operação de adição de números inteiros¹² e seus elementos, utilizou a seguinte situação problema: “Um menino possuía 4 livros, e recebeu primeiro 3, depois 2. Quantos livros possui agora ao todo?” (QUINTELLA, 1963, p. 31). O autor diz que o menino reuniu os livros num só conjunto para contá-los, e em seguida define soma como o número de livros da coleção única, denomina os números 4, 3 e 2 de parcelas e comenta que o sinal + (mais) indica adição. Quintella define adição como: “a operação que tem por fim achar um número que tenha todas as unidades de dois ou mais números dados, e somente essas” (QUINTELLA, 1963, p. 31). Em seguida, apresenta uma situação problema que aplica o conceito de adição, com uma imagem de três pilhas de livros que são reunidos numa pilha só (Figura 8). Desse modo, a quantidade de livros de cada pilha são as parcelas e, a quantidade de livros da pilha única é a soma.

¹² Os números inteiros foram definidos na obra como o conjunto formado pelos números naturais com a inclusão do zero. Esse fenômeno foi observado nas três obras analisadas e nesse contexto os números inteiros se referiam ao conjunto formado por 0, 1, 2, 3, ...

Figura 8 - Representação da soma através de exemplo



Fonte: Quintella (1963, p. 32)

Assim, podemos notar que o autor definiu a soma como a reunião de elementos de dois conjuntos em um só, de modo que a soma resultaria da contagem dos elementos desse último.

As propriedades da adição são apresentadas pelo autor a partir da situação problema usada para definir adição: “Um menino possuía 4 livros, e recebeu primeiro 3, depois 2. Quantos livros possui agora ao todo?” (QUINTELLA, 1963, p. 31). Assim, Quintella define as propriedades da adição da seguinte forma:

- **Propriedade Comutativa:** a troca da ordem dos livros ganhos pelo menino, não altera a quantidade de livros reunidos, ou seja:

$$4 + 3 + 2 = 4 + 2 + 3 = 3 + 4 + 2$$

Ou seja, a ordem das parcelas não altera a soma.

- **Propriedade associativa:** se o menino recebesse os livros ao mesmo tempo, ainda assim a quantidade de livros seria a mesma, o que se traduz escrevendo as parcelas entre parênteses $(3 + 2)$, então:

$$4 + 3 + 2 = 4 + (3 + 2)$$

Assim, o autor pontua que o parênteses $()$ é um sinal de reunião e que a reunião pode ser expressa por colchetes $[]$ ou chaves $\{ \}$.

Outro exemplo apresentado pelo autor é dado através de um quadro em que utiliza cores para identificar e diferenciar as parcelas (Figura 9):

Figura 9 - Representação da propriedade associativa da soma

$$5 + 3 + 7 + 4 = 5 + 10 + 4$$

Fonte: Quintella (1963, p. 33)

Assim, a propriedade associativa é expressa por Quintella (1963, p. 34) de modo que “não se altera a soma de vários números substituindo duas ou mais parcelas pela sua soma”.

- **Propriedade Dissociativa:** a propriedade dissociativa é inversa da associativa. O autor representa isso através de exemplos (Figura 10):

Figura 10 - Representação da propriedade dissociativa

$$5 + 3 + 7 + 4 = 5 + 3 + 6 + 1 + 4$$

Fonte: Quintella (1963, p. 34)

Então, pode-se substituir uma parcela pela soma de duas ou mais que lhe correspondam. Do mesmo modo: $4 + (3 + 2) = 4 + 3 + 2$

Outro tópico abordado pelo autor, mas não definido como uma propriedade, é a variação da soma: “se aumentarmos as parcelas a soma aumenta e se diminuirmos as parcelas a soma diminui” (QUINTELLA, 1963, p. 35). Exemplifica essa afirmação (Figura 11) da seguinte maneira:

Figura 11 - Representação da variação da soma

$$5 + 2 + 7 + 4 > 5 + 2 + 7 + 3$$

Fonte: Quintella (1963, 35)

Então, a soma varia no mesmo sentido das parcelas.

Para apresentar e definir a operação de subtração e seus elementos, Quintella (1963, p. 39) utilizou a seguinte situação problema:

Tenho uma coleção de 14 selos. Quantos selos devo juntar para obter uma coleção de 20 selos? 6 é o número que, somado a 14, dá 20. O número 6 chama-se diferença entre 20 e 14. Escrevemos:

$$6 = 20 - 14 \text{ ou } 20 - 14 = 6$$

A operação por meio da qual achamos a diferença é a subtração. 20 (minuendo) e 14 (subtraendo) são os termos da diferença.

Subtração é a operação que tem por fim achar uma parcela, sendo dada a soma (minuendo) e a outra parcela (subtraendo).

Em seguida, o autor destaca que a “subtração é a operação inversa da adição” e que o subtraendo deve ser menor ou igual ao minuendo (QUINTELLA, 1963, p. 39). Além disso, através de exemplos mostra que o minuendo é igual a soma do subtraendo com o resto, fato que é mostrado pelo autor através da prova da subtração: $84 - 43 = 41$ e, desse modo $43 + 41 = 84$.

Acerca das propriedades da subtração, Quintella parte de uma situação problema (Figura 12), citando apenas uma propriedade, na qual destaca que ao se somar ou subtrair o mesmo número ao minuendo e subtraendo, o resto não se altera.

Figura 12 - Representação da propriedade da subtração

Qual é a diferença entre o número de bolas rosas e de bolas pretas na figura 13? É $8 - 5$.

Juntemos 4 bolas brancas à esquerda de cada coleção, como mostra a figura. Podemos indicar assim a nova diferença:

$$(8 + 4) - (5 + 4)$$


Fig. 13

Depois dessa alteração nas coleções, a diferença ficou modificada?

Então, podemos concluir:

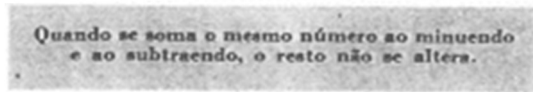
$$8 - 5 = (8 + 4) - (5 + 4)$$

Fonte: Quintella (1963, p. 41)

Posteriormente à explanação da propriedade, o autor faz uma observação de que subtraindo valores idênticos do minuendo e subtraendo, a diferença também não se altera.

No decorrer da obra de Quintella é possível observar a adoção de elementos gráficos na forma de pequenos retângulos ou caixas de resumo, em que estão inseridas informações importantes de modo a destacá-las (Figura 13). Além disso, o autor também apresenta algumas observações em alguns trechos (Figura 14), pontuando sobre a decorrência de alguma propriedade ou exibindo exemplos de sua aplicação.

Figura 13 - Quadro com propriedade da subtração



Fonte: Quintella (1963, p. 41)

Figura 14 - Observação sobre a propriedade

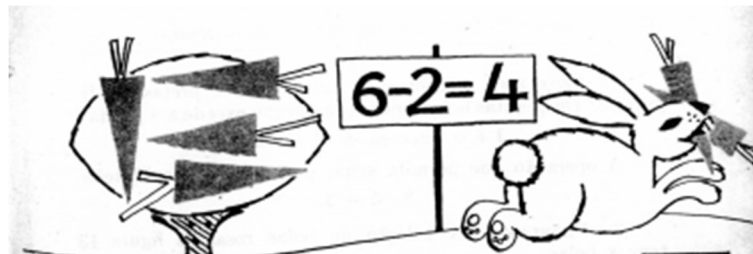
OBSERVAÇÃO: Observemos que, se alterarmos só um dos termos da subtração, o resto se modificará, variando no mesmo sentido do minuendo e no sentido contrário do subtraendo.

Fonte: Quintella (1963, p. 41)

No livro de Quintella os exercícios estão localizados sempre após os assuntos abordados, e as respectivas respostas constam no final do capítulo correspondente. Os exercícios exigem que o aluno memorize termos como “parcela”, “soma”, “diferença”, “minuendo” e “subtraendo” para resolver os problemas. Além disso, é possível notar que os exercícios não são contextualizados, como por exemplo: “A soma de duas parcelas é 485. Se somarmos 45 dezenas à 1ª parcela e subtrairmos 6 dezenas da 2ª, a nova soma será [...]” (QUINTELLA, 1963, p. 36), exigindo que o aluno preencha a lacuna com o número que corresponde à resposta correta. No entanto, percebemos que o autor requer do aluno a subtração de um número de cada parcela de uma soma antes de definir a subtração, apresentada no capítulo subsequente, o que indica que os estudantes já deveriam possuir este conhecimento na etapa do ginásio.

Também podemos destacar o uso de imagens na obra, que foram empregadas para contextualizar a abertura de assuntos em cada capítulo (Figura 15).

Figura 15 - Ilustração que representa a subtração



Fonte: Quintella (1963, p. 39)

Observando a imagem, vemos um coelho com duas cenouras na boca se afastando, um cesto com quatro cenouras e uma placa onde está indicada a operação $6 - 2 = 4$, caracterizando uma situação que representa a subtração. Existem outras imagens no interior da obra que

exemplificam e explicam conceitos, mas elas ainda são bastante simples devido aos recursos gráficos disponíveis da época. Os exercícios, por sua vez, não apresentam imagens, apenas texto.

6.1.2 Livro: MATEMÁTICA Curso Ginásial (1967), de autoria do *School Mathematics Study Group*

O livro “*MATEMÁTICA Curso Ginásial* do *School Mathematics Study Group*” foi publicado em 1967 no Brasil, sendo traduzido por Lafayette de Moraes, Lydia Condé Lamparelli e colaboradores. A obra possui 310 páginas que são compostas por definições, exemplos, algumas ilustrações exemplificativas e exercícios. Em relação a utilização de cores na parte interna, verificou-se que as únicas cores utilizadas foram: preto e branco. Além disso, segundo a descrição catalogada no livro, o material possui dimensões de 24,5 mm por 180 mm. Outro aspecto importante observado é que a obra traz uma capa simples e com poucas cores (Figura 16), basicamente bege, branco e roxo. Na parte inferior há algumas marcas que se assemelham a formas geométricas desenhadas em branco, entretanto, devido à conservação do material é difícil afirmar com precisão.

Figura 16 - Capa do Livro do SMSG



Fonte: SMSG (1967)

O livro apresenta dois prefácios: o da versão norte-americana e o da versão brasileira assinada pelo professor Lafayette de Moraes. A obra foi organizada pelo *School Mathematics*

Study Group, cuja autorização para tradução e publicação no Brasil foi dada pelo IBEEC-UNESCO.

O livro é destinado à 1ª série ginasial e foi publicado no Brasil em 1967 pela Edart editora. A obra foi apenas traduzida e desse modo não houve cortes e mudanças da versão norte-americana, sendo que no prefácio é ressaltado que, embora tenha sido escrita para uma realidade diferente da brasileira a mesma pode ser útil para os estudantes de nosso país.

Considerando os elementos que compõem a obra, o prólogo enfatiza que a crescente contribuição da matemática para a cultura do mundo moderno e a sua importância vital para uma educação tecnológica levou a necessidade de se pensar em um currículo melhorado. Esse processo, segundo o SMSG, é motivado pelo crescente uso da matemática em outros campos do conhecimento e ao mesmo tempo reflete os recentes avanços registrados na própria matemática. Além disso, há referências de que a matemática será abordada de uma perspectiva diferente da tradicional, com a finalidade de facilitar a aprendizagem buscando uma compreensão superior dos conceitos básicos e da estrutura da matemática, considerada patrimônio vivo e mutável. Assim, segundo o SMSG (1987, s.p.) “a matéria terá um caráter familiar, mas a apresentação e o ângulo sob o qual é vista serão diferentes”, apontando inclusive para novos temas, em que a finalidade é dar um fundamento mais sólido para a compreensão e o uso da matemática numa sociedade científica.

No prefácio, o SMSG apresenta as principais ideias presentes na obra: a estrutura da aritmética sob um ponto de vista algébrico, o sistema dos números reais como um desenvolvimento progressivo, relações métricas e não-métricas na geometria. Evidencia-se também que esses conceitos serão trabalhados associados com suas aplicações, sendo importante propiciar aos alunos “experiências sugestivas que levem uma apreciação dos conceitos abstratos, do papel da definição, do desenvolvimento do vocabulário preciso e do raciocínio, da experimentação e da demonstração” (SMSG, 1987, s.p.). Assim, fica evidente a introdução das estruturas matemáticas e um discurso em torno de uma linguagem precisa e da abstração, mostrando que os autores acreditavam que os alunos do ginásio já poderiam levantar e solucionar hipóteses, levando a um estudo da matemática bem sucedido e satisfatório.

Em sua dimensão estrutural, a obra é composta por oito capítulos, organizados da seguinte maneira:

- i. O que é matemática?
- ii. Numeração
- iii. Números Inteiros

- iv. Geometria não – métrica
- v. Fatoração e Números Primos
- vi. O Sistema dos Números Racionais
- vii. Medida
- viii. Área, Volume, Peso e Tempo

Analisando os assuntos do livro pelo índice, percebemos que há uma ênfase significativa ao estudo da Aritmética, já que a obra dispõe de quatro capítulos destinados aos números, operações e propriedades. A obra do MSG não destina um capítulo específico para Teoria dos Conjuntos, sendo que a ideia aparece no capítulo de números inteiros relacionado à propriedade do fechamento. Assim, é perceptível que os autores não fazem um tratamento formal da teoria dos conjuntos, no entanto, há uma ênfase na noção de correspondência biunívoca, inclusive nos exercícios.

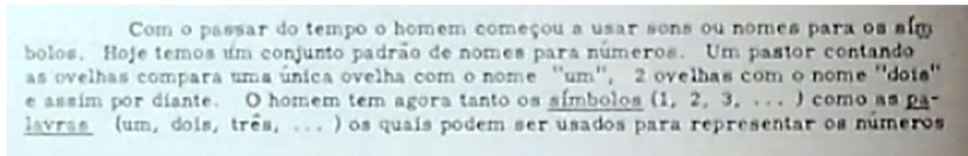
Não se aplica a análise em relação ao programa *Assuntos Mínimos*, uma vez que a obra é uma tradução da versão norte-americana, não seguindo as recomendações curriculares do nosso país.

A abordagem de número pelo MSG

Em MSG, o conceito de número possui como pré-requisitos dois capítulos: o primeiro a respeito do que é matemática e as diversas utilidades da mesma, e; o segundo, apresenta os sistemas de numeração na base decimal, notação exponencial, numerais na base sete, sistema binário e duo-decimal, além de numeração em outras bases e sistemas de numeração antigos. Assim, a obra apresenta os sistemas de numeração, abordando inclusive as ordens e classes do sistema decimal antes mesmo de definir número, aspecto desenvolvido no capítulo seguinte do livro didático.

Para abordar o conceito de número, a obra define a ideia de número natural sem o uso de figuras que representam conjuntos ou coleções, citando dois conjuntos: um de pedras e o outro de ovelhas, em que seus elementos se correspondem um a um, e têm o mesmo número de elementos (Figura 17).

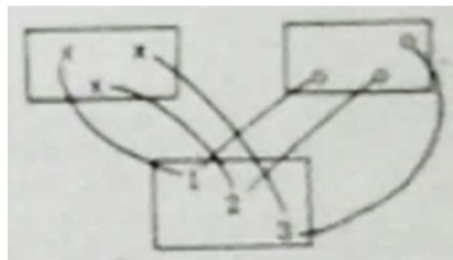
Figura 17 - A ideia de número por correspondência de conjuntos



Fonte: SMSG (1967, p. 16)

Portanto, o SMSG associa o conceito de número à contagem através da correspondência biunívoca, sendo que para ilustrar essa ideia, a obra apresenta um esquema relacionando cada marca a um numeral, de modo que o último numeral representa o número de marcas do conjunto (Figura 18). Assim, os números naturais são usados para contar objetos de uma coleção e, por isso, também são chamados de “números de contagem”. A reunião dos naturais e o zero é denominada na obra por números inteiros.

Figura 18 - Representação de correspondência biunívoca



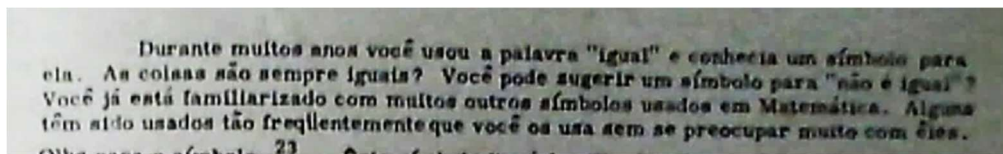
Fonte: SMSG (1967, p. 60)

Após definir as propriedades dos números, o livro define de maneira mais formal, a ideia de conjunto, representada por diagramas e chaves. O conjunto dos números naturais é definido como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, destacando que as reticências indicam que o conjunto é infinito. O livro também apresenta a definição de zero associando-o ao conjunto vazio de modo que “zero é o número de elementos do conjunto vazio” (SMSG, 1967, p. 90). No entanto, a obra não apresenta simbologia para representar o conjunto vazio, apenas o define como um conjunto em que não existem elementos.

O livro do SMSG (1967, p. 64-65) destaca a estrutura de ordem dos números inteiros apontando que frequentemente há referências sobre um número ser maior que outro. Assim, “para simplificar a frase ‘é maior que’ usamos o símbolo $>$ ”, ou seja, para descrever que 5 é maior que 3 pode-se simplesmente escrever $5 > 3$. Da mesma maneira, para o “menor que” usa-se o símbolo $<$, então ao dizermos que 4 é menor 7 escrevemos $4 < 7$. Além disso, a obra faz menção à situação em que simplesmente se quer dizer que dois números não são iguais, introduzindo o símbolo $\neq$ para “não é igual a” ou “é diferente de”.

Notamos que há a introdução dos sinais de $<$, $>$, $\neq$, através dos exemplos relacionando números inteiros, no entanto, não está exposta a situação em que dois números são iguais e sequer encontramos qualquer menção na obra sobre o símbolo $=$, mesmo ele sendo usado nas operações entre números inteiros e suas propriedades. Entretanto, ao voltarmos algumas páginas do livro, encontramos indícios de que esse conhecimento já faz parte do repertório do aluno (Figura 19), pois “durante muitos anos você usou a palavra ‘igual’ e conhecia um símbolo para ela” (SMSG, 1987 p. 15).

Figura 19 - O conceito de igualdade



Fonte: SMSG (1967, p.15)

Ao examinarmos a obra, percebemos que em nenhum momento seus autores definem formalmente a operação de adição de números inteiros, ficando implícito que os alunos já deveriam ter esse conhecimento ao chegar ao ginásio. A primeira referência a essa operação na obra é abordada quando se introduz o sistema de numeração decimal, em que a obra apresenta uma tabela da operação (Figura 20) de maneira que “os números representados na fila horizontal no alto da tabela são somados aos números da fila vertical sob o sinal ‘+’ à esquerda. A soma de cada par de números está escrita na tabela” (SMSG, 1967, p. 34). Assim, ao somar $2 + 3$ o resultado é 5, como indicado pelas setas na Figura 20.

Figura 20 - Tabela da operação de soma

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	1	2								
2			5							
3	3	4	5	6						
4	4	5	6	7	8					
5	5	6	7	8	9	10	11			
6										
7										
8										
9										17

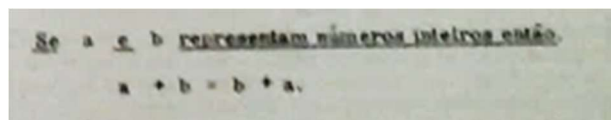
Fonte: SMSG (1967, p. 35)

Posteriormente, a adição é abordada com enfoque em suas propriedades: comutativa, associativa e fechamento. Os autores definem a propriedade *comutativa* através de uma situação

problema: “Se você tiver três maçãs num cêsto (*sic*) e colocar nêle (*sic*) mais duas maçãs, então o número de maçãs no cêsto (*sic*) será obtido somando dois a três” (SMSG, 1967, p. 63). Solicita que o aluno raciocine em termos de $3 + 2$. Então, considera que “se você tivesse começado com duas maçãs no cêsto (*sic*) e tivesse colocado três a mais, então número de maçãs no cêsto (*sic*) seria obtido somando 3 a 2” (SMSG, 1967, p. 63). E novamente, solicita ao aluno que raciocine em termos de $2 + 3$. Assim, fica evidente que em ambas as situações, há cinco maçãs no recipiente, ou seja, $3 + 2 = 2 + 3$.

Essa ideia é denominada na obra de propriedade comutativa de adição para números inteiros e afirma também que a ordem na qual adiciona-se dois números não afeta o resultado (Figura 21). Nesse sentido, a obra também destaca que a palavra propriedade é usada no sentido de que é algo característico à operação de adição.

Figura 21 - Propriedade comutativa da adição



Fonte: SMSG (1967, p.63)

A propriedade *associativa* é definida pelo *School Mathematics Study Group* (1967, p. 68) da seguinte maneira:

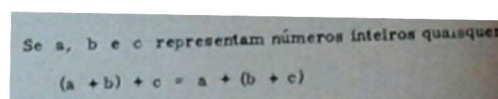
O que entendemos por $1 + 2 + 3$? Isto significa $(1 + 2) + 3$ onde adicionamos 1 e 2 e depois adicionamos 3 ao resultado ou quer dizer $1 + (2 + 3)$ onde adicionamos 2 e 3 e em seguida adicionamos 1 ao resultado? Ou isto não faz diferença? Nós vimos que a ordem pela qual dois números são adicionados não altera a soma (propriedade comutativa de adição). Vemos agora que a maneira de agrupar três números para adicioná-los não altera a soma. Por exemplo:

$$(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6 \text{ e}$$

$$1 + (2 + 3) = 1 + 5 = 6$$

Segundo os autores, essa ideia de agrupar números de maneiras diferentes, sem alterar a soma, é denominada de propriedade associativa da adição (Figura 22).

Figura 22 - Propriedade associativa da adição



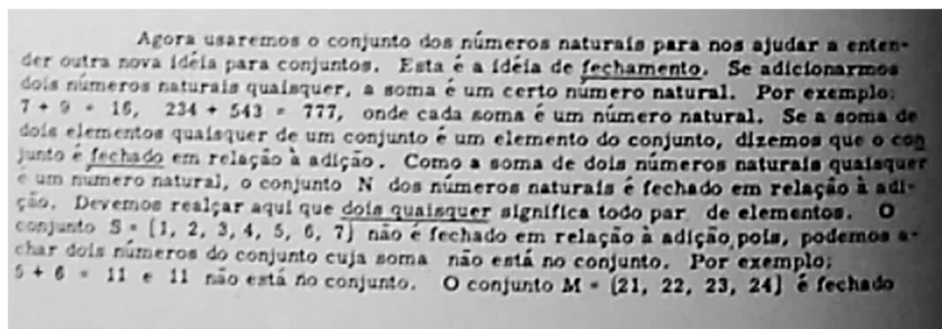
Fonte: SMSG (1967, p. 68)

A terceira propriedade destacada na obra é a propriedade do *fechamento*. Para isso, os autores definem conjunto de maneira intuitiva através de exemplos: um conjunto de números,

um conjunto de marcas numa página, um conjunto de estrelas num diagrama. Assim, destacam que os números naturais formam um conjunto, em que $\mathbb{N}$ é usado para representar os números naturais e usando-se chaves $\{\}$ para indicar que são elementos do conjunto $\mathbb{N}$. Desse modo, os números naturais formam o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ onde os três pontos indicam que o conjunto continua infinitamente.

Para entender a ideia de fechamento, usou-se o conjunto dos números naturais (Figura 23). Ao se adicionar dois números naturais quaisquer, a soma é um certo número natural. “Por exemplo: $7 + 9 = 16$, $234 + 543 = 777$, em que cada soma é um número natural. Se a soma de dois elementos quaisquer de um conjunto é um elemento do conjunto, dizemos que o conjunto é fechado em relação à adição” (SMSG, 1967, p. 78). Ademais, “como a soma de dois números naturais quaisquer é um número natural, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é fechado em relação à adição” (SMSG, 1967, p. 78).

Figura 23 - A propriedade do fechamento da adição



Fonte: SMSG (1967, p. 78)

Desta forma, a obra do SMSG apresenta três propriedades em relação à adição: *comutatividade*, *associatividade* e *fechamento*. Entretanto, apesar de conceituar $\mathbb{N}$ como o conjunto dos números naturais e mostrar que este é fechado em relação à adição, a obra não apresenta os números inteiros como conjunto e consequentemente, não demonstra se o mesmo é fechado em relação à adição.

A obra não define a operação de subtração de números naturais, apenas usando-a em problemas e exemplos, de modo que fica implícito que os alunos já deveriam ter esse conhecimento ao chegar na etapa ginásial. Após tratar das propriedades da adição, a subtração é abordada como a operação inversa da adição, com a ideia de desfazer a operação. Para exemplificar a situação, a obra apresenta duas situações problema:

Suponha que você tem Cr\$ 220 000 no banco e você adiciona Cr\$ 10 000 a ele. Então você tem Cr\$ 220 000 + Cr\$ 10 000 = Cr\$ 230 000. Agora desfaça isto retirando Cr\$ 10 000. A quantidade que fica é Cr\$ 230 000 – Cr\$ 10 000 = Cr\$ 220 000. O fundo de esportes de sua escola pode ter Cr\$ 180 000 no banco e depois de um jogo (*sic*) ter arrecadado Cr\$ 30 000. Então o fundo terá os Cr\$ 180 000 + Cr\$ 30 000 = Cr\$ 210 000. Mas o time precisa de uniformes novos que custam Cr\$ 30 000 e você retira Cr\$ 30 000 para comprá-los. A quantidade que fica é Cr\$ 210 000 – Cr\$ 30 000, ou seja, os Cr\$ 180 000. Estas operações se anulam entre si. A subtração é o inverso da adição. (MSG, 1967, p. 81)

Posteriormente, a obra aborda essa ideia em termos mais gerais. Assim, denomina como x o número de cruzeiros, então sistema monetário vigente, que existia inicialmente no banco e b , a quantidade depositada, então $x + b = a$, onde a representa o número de cruzeiros que se tem agora no banco. Deste modo, para anular esta operação e descobrir quantos cruzeiros havia no banco, escrevemos $x = a - b$, uma vez que a é o total depois do depósito e b é depósito. Ademais, essa ideia de operação inversa é usada pelo MSG de modo a usar uma adição para conferir uma subtração (Figura 24).

Figura 24 - Exemplo de subtração

The image shows four handwritten mathematical expressions. From left to right: 1. A subtraction problem: 203 minus 96 equals 107. 2. A subtraction problem with variables: a minus b equals x. 3. A subtraction problem labeled 'Prova:' (Proof): 107 plus 96 equals 203. 4. An addition problem with variables: x plus b equals a.

Fonte: MSG (1987, p. 81)

Em relação as propriedades da subtração, a obra não apresenta de forma explícita, uma vez que, conforme já exposto, a subtração é abordada apenas como a operação inversa da adição.

No livro do MSG os exercícios estão localizados sempre após os assuntos abordados e não possuem respostas no final da obra, diferentemente do livro de Ary Quintella. É possível notar que os exercícios são bem variados: alguns são contextualizados (Figura 25) e outros exigem que o aluno pense no problema algebricamente (Figura 26). Além disso, é possível notar que o aluno precisa estar familiarizado com termos como “parcela”, “soma”, “diferença”, “minuendo”, “subtraendo”, “produto” e “quociente” para resolver alguns problemas. Como, por exemplo: “Divida 272 por 16 , multiplique o quociente por 12 e subtraia 100 do produto” (MSG, 1967, p. 85), ficando evidente que muitas vezes estes problemas apresentam diversas etapas e envolvem várias operações.

Figura 25 - Exemplo de exercício com tentativa de contextualização

Se um prédio tem 900 janelas e outro prédio tem 811 janelas, quantas janelas a mais tem o primeiro prédio?

Fonte: SMSG (1967, p. 84)

Figura 26 - Exemplo de exercício algébrico

$$\begin{aligned} 5 + x &= 5 \\ 10 &= x + 2 \end{aligned}$$

Fonte: SMSG (1967, p. 84)

No entanto, cabe destacar que a presença do conceito de correspondência biunívoca é bem marcante na abordagem dos números, aparecendo inclusive em alguns exercícios da obra (Figura 27). Desse modo, podemos destacar que apesar de abordar a noção de conjuntos de maneira formal muito brevemente na obra, alguns conceitos relacionados estão bastante presentes, como a correspondência biunívoca que relaciona “um a um” os elementos de dois conjuntos.

Figura 27 - Exemplo de exercícios envolvendo correspondência biunívoca

Se existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pessoas de uma sala e o conjunto de pares de sapatos que estão na sala, então existe uma correspondência dois a um entre o conjunto de sapatos e o conjunto de pessoas da sala. Mencione alguns exemplos de correspondência dois a um e quatro a um.

A disposição seguinte ilustra uma correspondência um a um ou biunívoca entre os números _____ e os números _____.

1	2	3	4	5	6	.	.	.
↕	↕	↕	↕	↕	↕			
2	4	6	8	10	12	.	.	.

Fonte: SMSG (1967, p. 62)

Também podemos destacar que a presença de imagens na obra é bastante limitada, se restringindo a representação de conjuntos, ilustração de algumas situações problema e de figuras geométricas. No entanto, como a obra foi traduzida e não houve alterações em seu conteúdo, não podemos relacionar este fato aos recursos editoriais da época.

6.1.3 Livro: Matemática Curso Moderno (1969), de autoria de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci

O livro *MATEMÁTICA Curso Moderno* de autoria de Alcides Bóscolo¹³ e Benedito Castrucci¹⁴ foi publicado em 1969. O exemplar que tivemos acesso, não apresenta informações editoriais pois está sem capa e contra-capas. A obra possui 333 páginas que são compostas por definições, exemplos, algumas ilustrações exemplificativas e exercícios. Em relação a utilização de cores na parte interna, verificou-se que havia cores restritas: preto, branco, cinza e vermelho. Este livro também contém algumas atividades resolvidas por algum usuário, dispostas apenas em algumas páginas nos capítulos iniciais.

Ainda em relação aos elementos que compõem a obra, verificamos a existência de um prefácio apontando para a série ginásial a qual se destina e indicando para um ensino da matemática de maneira intuitiva e dedutiva. Além disso, Bóscolo e Castrucci trazem referências de que a matemática será abordada de uma perspectiva diferente da tradicional, que tem a finalidade de facilitar a aprendizagem. Podemos ressaltar também o destaque ao estudo de teoria dos conjuntos e a introdução de novas relações e seus respectivos simbolismos como é o caso da “implicação” ($\Rightarrow$) e da “equivalência” ($\Leftrightarrow$).

Os autores sinalizam que a matemática é apresentada na obra de forma bastante clara, trazendo as primeiras noções de conjuntos e uma ênfase nas propriedades estruturais das operações fundamentais, no conjunto dos números inteiros naturais¹⁵ e no conjunto dos números racionais. Além disso, o prefácio ainda nos informa que o processo de modernização do ensino de matemática é uma tendência não apenas no Brasil, mas em quase todas as partes do mundo e está empolgando as partes envolvidas na educação. Bóscolo e Castrucci finalizam pontuando que “é sem dúvida um movimento irreversível que não pode prescindir da preciosa colaboração dos professores (*sic*) em exercício” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 3).

¹³ O professor Alcides Bóscolo (1921-1972) foi professor de Matemática e autor de livros didáticos. Participou ativamente de vários congressos de ensino de Matemática e também das Olimpíadas de Matemática como coordenador. Além disso, em diversas ocasiões ministrou cursos de férias para professores secundários por convite do Ministério da Educação e Cultura. Disponível em: <http://ealcidesboscolo.blogspot.com/2007/09/historico.html>. Acesso em: 05 jan. 2021.

¹⁴ Benedito Castrucci foi professor da Universidade de São Paulo (USP), sendo autor de dezenas de livros didáticos que tiveram milhares de exemplares vendidos. Mais informações sobre o autor podem ser conferidas no trabalho de Ramassotti (2018), disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/153847>. Acesso em: 05 jan. 2021.

¹⁵ Bóscolo e Castrucci (1969) definem como conjunto dos números inteiros naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ sendo que posteriormente passam a referir-se a esse conjunto como *números inteiros*.

O livro de Bóscolo e Castrucci tem dimensões 21,5 *cm* por 15 *cm*, sem reformas, em brochura frágil. A sua estrutura é composta de vinte e cinco capítulos, distribuídos em cinco partes:

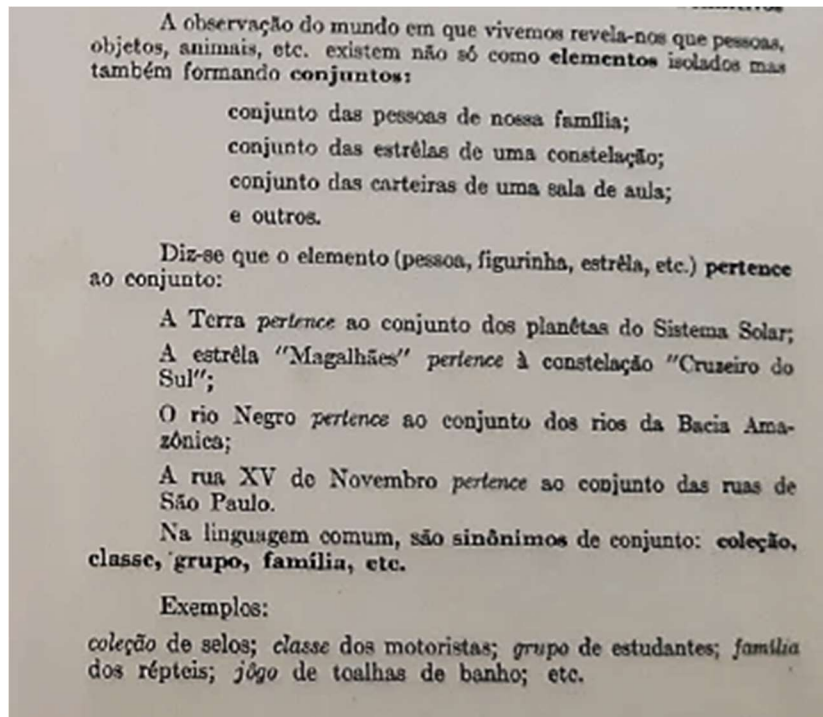
- ✓ **1ª parte:** conjuntos; o conceito de número; a sucessão dos números inteiros naturais; sistema de numeração decimal;
- ✓ **2ª parte:** adição; subtração; multiplicação; divisão; potenciação; raiz quadrada; expressões;
- ✓ **3ª parte:** divisibilidade; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum;
- ✓ **4ª parte:** os números racionais; operações com números racionais; representação decimal dos números racionais;
- ✓ **5ª parte:** medidas de comprimento; medidas de superfície; áreas de figuras planas; volume dos corpos; volume de sólidos geométricos; medidas de massa; medidas não-decimais.

Além disso, apesar da obra não mencionar o programa *Assuntos Mínimos*, foi possível notar que Bóscolo e Castrucci seguiram as recomendações, incorporando a teoria dos conjuntos como pré-requisito aos demais capítulos da obra.

A abordagem de número em Bóscolo e Castrucci

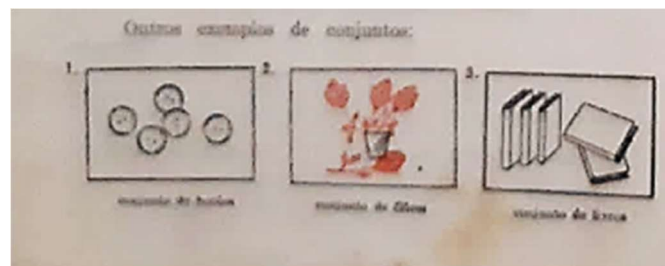
Em Bóscolo e Castrucci (1969) a definição de número possui pré-requisitos, uma vez que é o segundo capítulo da obra. Assim, antes de definir a ideia de número natural, os autores apresentam algumas noções de teoria dos conjuntos, definindo elemento e conjunto (Figura 28 e Figura 29), conjunto vazio, conjunto unitário, conjunto infinito, subconjuntos e a representação de conjuntos por meio de diagramas e chaves.

Figura 28 - Definição de conjunto



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 9)

Figura 29 - Exemplos de conjuntos



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 10)

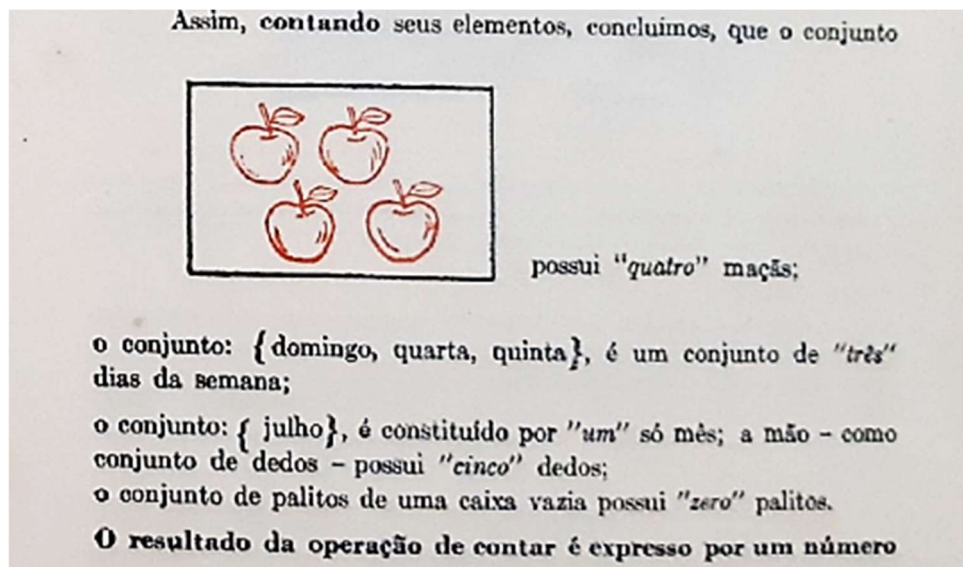
Os primeiros assuntos abordados sobre teoria dos conjuntos serviram de base para definir assuntos posteriores, como: correspondência biunívoca, operações entre números inteiros e representações de conjuntos numéricos. Observamos que a representação por diagramas só foi possível pelos recursos editoriais como figuras e cores, apesar de ainda um tanto limitados em espaços retangulares na maioria das vezes.

Desse modo, a obra define de maneira formal conjunto como uma coleção de elementos, como por exemplo " $\{\text{Vênus, Júpiter, Terra}\}$, conjunto de planetas" (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 10). Podemos notar o uso da representação de diagramas e chaves, além da introdução de simbologia para o pertencimento ($\in$) e não pertencimento ($\notin$). Além disso, os autores

também apresentam a definição de um conjunto sem elementos como Conjunto Vazio, representado por $\emptyset$.

No segundo capítulo, Bóscolo e Castrucci pontuam inicialmente que ligada a noção de conjunto está o ato de contagem de seus elementos (Figura 30). Assim, ao contarmos os elementos de um conjunto estabelece-se uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, associando os elementos um a um, sendo que o ato de contar é expresso por um número.

Figura 30 - A contagem de elementos e a noção de conjunto

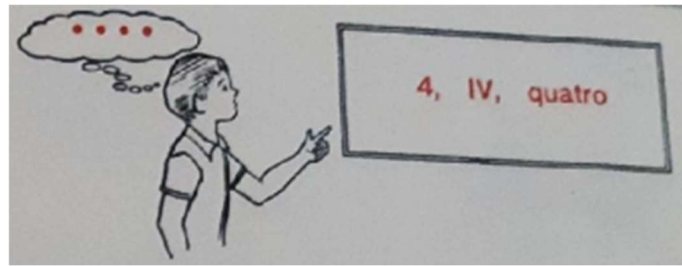


Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 23)

Notamos que os autores utilizam diferentes exemplos de objetos que compõem um conjunto, evidenciando que a natureza de seus elementos é indiferente. Assim, "quatro", "três", "um", "cinco" e "zero" constituem o número de elementos de cada conjunto, e desse modo, a cada conjunto foi associado um número através da operação de contar seus elementos. Nesse ponto podemos notar a associação do zero a um conjunto vazio.

Bóscolo e Castrucci (1969, p. 25) definem número como "[...] uma idéia (*sic*) associada a um conjunto através da operação de contar, constitui também um atributo comum a conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca". A partir dessa ideia de número, Bóscolo e Castrucci definem numeral como palavra ou símbolo que representa o número e afirmam que para um número é possível vários numerais, como expresso na Figura 31.

Figura 31 - Numerais



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 27)

Os autores definem que a sequência dos inteiros naturais, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., como infinita usando o fato de que todo número tem um sucessor e não existir o maior dos números inteiros naturais, sendo que esse conjunto será representado pela letra $\mathbb{N}$, dado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Desse modo, os autores deixam implícito que os números inteiros são definidos como a reunião do zero com o conjunto dos números naturais, limitando-se a definir o zero como o menor dos números inteiros. Nesse ponto, é possível notar que ao tratar de números inteiros os autores usam a mesma notação associada tradicionalmente aos números naturais, apenas os chamando de inteiros naturais pela inclusão do zero.

Mais adiante, Bóscolo e Castrucci destacam que ao comparar dois conjuntos A e B, se for possível realizar uma correspondência biunívoca entre seus elementos, então A e B têm o mesmo número de elementos. Destacando que

[...] consideremos dois conjuntos A e B de elementos quaisquer e sejam **a** e **b** os respectivos números de elementos. Se fôr (*sic*) possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto A e o conjunto B, então, como já vimos, A e B têm o *mesmo número* de elementos. Diz-se também que o número de elementos de A é **igual** ao número de elementos de B e escreve-se **a = b**, que se lê, “**a é igual a b**”. Dizemos que os números **a** e **b** estão na relação “**igual a**”, chamada de **relação de igualdade**. (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p.27, grifo dos autores)

Nesse sentido, os autores definem *a* e *b* como sendo dois numerais distintos do mesmo número, fazendo analogia ao cão e ao cachorro, duas palavras que são sinônimas. Assim, é possível substituir o numeral *a* pelo numeral *b* sempre que estes representam o mesmo número. A relação de desigualdade é definida utilizando-se da definição de igualdade, mostrando o caso em que *a* e *b* não representam o mesmo numeral (Figura 32).

Figura 32 - A desigualdade entre numerais

Se a não for igual a b , isto é, se a for diferente de b , escreve-se: $a \neq b$.

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 28)

Os autores também indicam que como $a = b$, isso significa que a e b representam o mesmo número, em que relações como “igual a” apresentam algumas propriedades chamadas de relações de equivalência (Figura 33). Assim:

- $a = a$ reflexiva
- Se $a = b$, então $b = a$ simétrica
- Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ transitiva

Figura 33 - Relações de equivalência

Assim, por exemplo, é também uma relação de equivalência a relação “ter o mesmo pai”, como se pode facilmente verificar. Para isso, consideremos três indivíduos, Antônio, Pedro e João:

reflexiva : Antônio tem o mesmo pai que Antônio;

simétrica : Se Antônio tem o mesmo pai que Pedro, então Pedro tem o mesmo pai que Antônio;

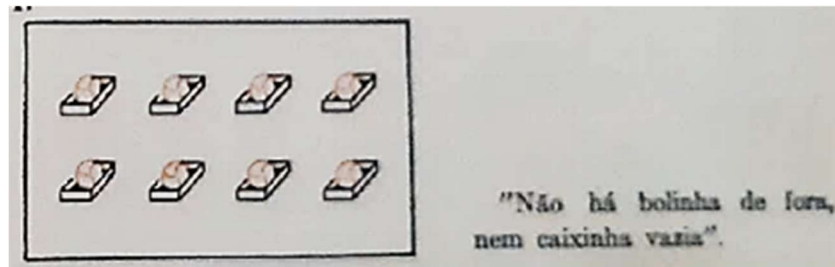
transitiva : Se Antônio tem o mesmo pai que Pedro e Pedro tem o mesmo pai que João, então Antônio tem o mesmo pai que João.

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 28)

Em seguida, o livro aborda a sucessão dos números inteiros naturais, pontuando a relação de ordem ao comparar quantidades de dois conjuntos. Para isso, utiliza como exemplo ilustrações que representam dois conjuntos: um conjunto de bolinhas de vidro e, conjunto de caixinhas de fósforo, a e b os respectivos números de elementos. Para explicar sobre as relações de ordem entre números inteiros, pontua-se que “coloquem em cada caixinha uma só bolinha até acabarem-se as bolinhas, ou as caixinhas” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 31). Assim, é possível vislumbrar três cenários distintos: $a = b$, $a > b$ ou $a < b$.

Se $a = b$, então o número de bolinhas é igual ao número de caixinhas e neste caso é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de bolinhas e o conjunto de caixinhas (Figura 34).

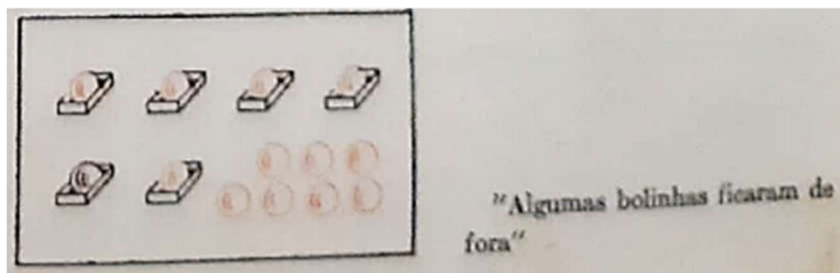
Figura 34 - A relação de ordem de igualdade



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p.31)

Se $a > b$, então há mais bolinhas do que caixinhas e dizemos que o número de bolinhas é maior que o número de caixinhas (Figura 35).

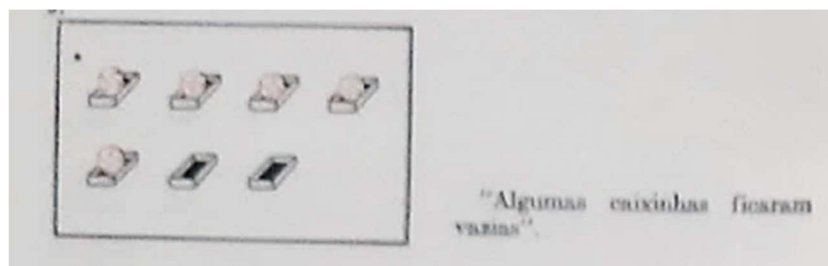
Figura 35 - A relação de ordem $a > b$ entre dois conjuntos



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 31)

Se $a < b$, significa que há menos bolinhas do que caixinhas e dizemos que o número de bolinhas é menor que o número de caixinhas (Figura 36).

Figura 36 - A relação de ordem $a < b$ entre dois conjuntos



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 32)

O livro pontua que no caso das situações em que $a > b$ e que $a < b$ não se estabeleceu uma correspondência biunívoca entre o conjunto de bolinhas e o conjunto de caixinhas. No entanto, os autores afirmam que no caso em que há mais bolinhas do que caixinhas ($a > b$) pode-se considerar uma correspondência biunívoca entre uma parte (subconjunto) do conjunto

de bolinhas e o conjunto de caixinhas. De maneira análoga, é possível fazer essa relação se o número de caixinhas é maior que o número de bolinhas ($a < b$).

Logo após esses exemplos, a obra aponta que zero é o menor dos números inteiros, isto é $0 < 1, 2, 3, 4 \dots$ destacando assim, algumas propriedades provenientes das relações de desigualdade. Portanto, dados dois números inteiros a e b ,

ou $a = b$

ou $a > b$

ou $a < b$, sendo que **umas dessas relações exclui as outras duas.**

Verifica-se também que: dados três números a, b e c ,

se $a > b$ e $b > c$, *então* $a > c$ - propriedade transitiva

Da mesma forma,

se $a < b$ e $b < c$, *então* $a < c$ – propriedade transitiva.

(BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 33, grifo dos autores)

Notamos que Bóscolo e Castrucci introduzem os sinais de $<$ (menor que), $>$ (maior que), $=$ (igual) e $\neq$ (diferente), através de exemplos relacionando quantidades entre dois conjuntos. Além disso, mais adiante, apresentam e exemplificam a introdução de outros símbolos além dos já abordados: $\geq$ (maior ou igual) e $\leq$ (menor ou igual).

Para representar os números inteiros naturais os autores utilizaram os elementos do conjunto de modo que quando ordenado pela relação de ordem “ $\leq$ ” é chamado de sucessão dos números inteiros naturais. Apesar de se referir aos números naturais como conjunto, podemos notar que os autores, até o momento, não haviam utilizado as chaves na representação do mesmo, escrevendo simplesmente: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$

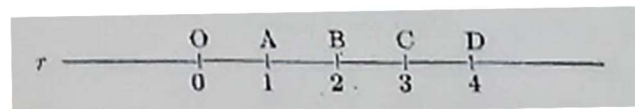
É a partir da ideia de número sucessor que é definida a propriedade do conjunto dos números naturais ser ilimitado, mostrando que ele contém infinitos elementos (Figura 37).

Figura 37 - Propriedades dos números inteiros naturais

1. *Todo número tem um sucessivo.*
Ex.: 1 é sucessivo de 0; 2 é sucessivo de 1; 3 é sucessivo de 2; ...
2. *Qualquer número, a partir de 1, é maior que todos os que o precedem e menor que todos os que o seguem*
Ex.: $6 > 5, 4, 3, 2, 1, 0$ e $6 < 7, 8, 9, \dots$
3. *ZERO é o menor dos números inteiros naturais; $0 < 1, 2, 3, 4, 5, \dots$*
Zero não é sucessivo de nenhum número.
4. *Não existe o maior dos números inteiros naturais; a sucessão $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ é ilimitada.*
5. *Há infinitos números inteiros naturais*

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 36)

Os autores também contemplam a representação geométrica do conjunto dos números inteiros naturais fazendo a correspondência do número 0 (zero) com o ponto de origem **O**, ao número 1 o ponto **A**, ao número 2 o ponto **B** e assim sucessivamente (Figura 38). De modo que fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e o conjunto P de pontos assinalados sobre a reta r , $P = \{\mathbf{O}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots\}$. Assim, P é definido como a representação geométrica do conjunto $\mathbb{N}$ e cada um dos pontos **O**, **A**, **B**, **C**, ... é a imagem de um número inteiro natural.

Figura 38 - Representação geométrica do conjunto $\mathbb{N}$ 

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 37)

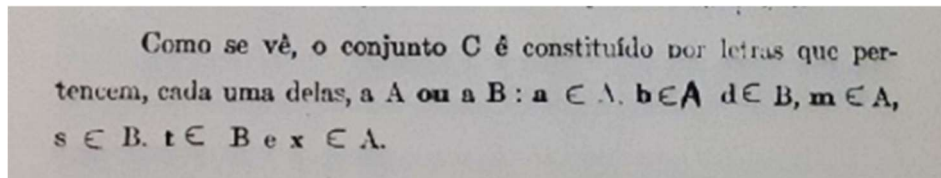
Assim, os autores utilizam com frequência o conceito de correspondência biunívoca e mostram que os números inteiros naturais formam um conjunto, em que $\mathbb{N}$ é usado para representar os números naturais e usando-se chaves $\{ \}$ para indicar que são elementos do conjunto $\mathbb{N}$. Desse modo, os números inteiros naturais formam o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ onde os três pontos indicam que o conjunto continua infinitamente. Assim, a partir desse ponto é possível perceber a adoção da linguagem de conjuntos ao se referirem ao conjunto dos números inteiros naturais.

Abordando os sistemas de numeração, os autores destacam o sistema de numeração de base decimal através do valor posicional dos algarismos e a tabela das ordens e classes. Além

disso, Bóscolo e Castrucci trazem exemplos usando as bases doze e sessenta e seus usos no cotidiano, por meio de exemplos envolvendo dúzias de ovos e o relógio, respectivamente. Notamos também que os autores trazem um texto que trata dos sistemas de numeração antigos: egípcio, babilônico e maia.

Antes de definir a soma de números inteiros, os autores determinam a reunião de conjuntos. Mostram que ao considerarmos os três conjuntos de letras: $A = \{a, b, m, x\}$, $B = \{d, s, t\}$ e $C = \{a, b, d, m, s, t, x\}$, C é chamado de reunião de A e B , formado por letras que pertencem a A ou B (Figura 39).

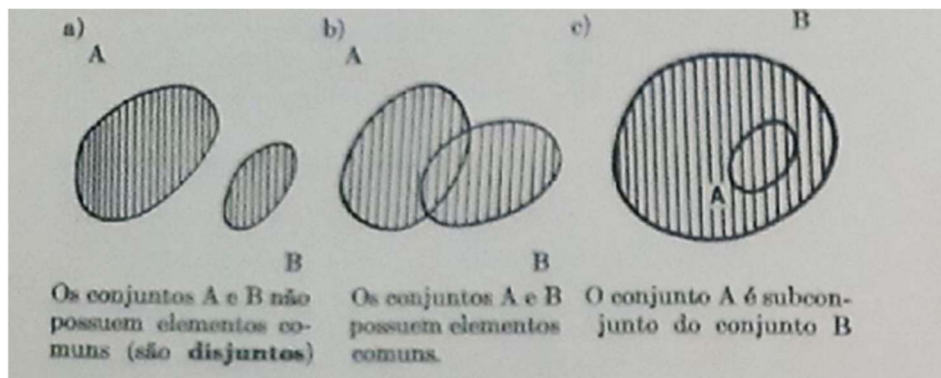
Figura 39 - Conjunto reunião



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 57)

Assim, definem que “dados dois conjuntos A e B , chama-se de reunião de A e B o conjunto C constituído pelos elementos que pertencem a A ou a B ” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 57). Além disso, destacam que para indicar a reunião de A e B escreve-se $A \cup B = C$ e se lê “ A u B é igual a C ”. Em seguida, os autores expõem como se dá a reunião de dois conjuntos através de diagramas, ressaltando que o conjunto reunião aparece hachurado (Figura 40).

Figura 40 - Reunião de conjuntos por diagramas



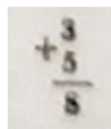
Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 58)

A Figura 40 contempla situações que envolvem dois conjuntos. Em (a) os conjuntos não possuem elementos em comum e são definidos como disjuntos. Na situação (b), os conjuntos **A** e **B** representados possuem elementos em comum, podendo ser observada uma intersecção; em (c) o conjunto **A** é subconjunto de **B**, que também pode ser entendido como “A está contido em B” e assim todos os elementos de **A** são também elementos de **B**.

Portanto, os autores definem que “dados dois conjuntos A e B, a operação por meio da qual determinamos o terceiro conjunto C, reunião de A e B, chama-se **operação de reunião**” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p.58, grifo dos autores). Como é indiferente a ordem dos elementos de **A** e **B** para constituir o conjunto de reunião **C**, pode-se afirmar que $A \cup B = B \cup A$, o que denomina-se como **propriedade comutativa** da operação de reunião. Posteriormente, a obra aborda a reunião de três ou mais conjuntos através de exemplos e pontua que o processo é análogo nessas situações.

Assim, para definir a operação de adição e seus elementos propõem a seguinte situação: “Consideremos dois números inteiros quaisquer, 3 e 5 por exemplo. Determinamos a **soma** de 3 e 5 efetuando a adição de acordo com a técnica e o dispositivo prático que já conhecidos” (BOSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p.59, grifo dos autores). Esse dispositivo é que conhecemos por “armar” a operação conforme ilustra a Figura 41.

Figura 41 - Dispositivo da adição

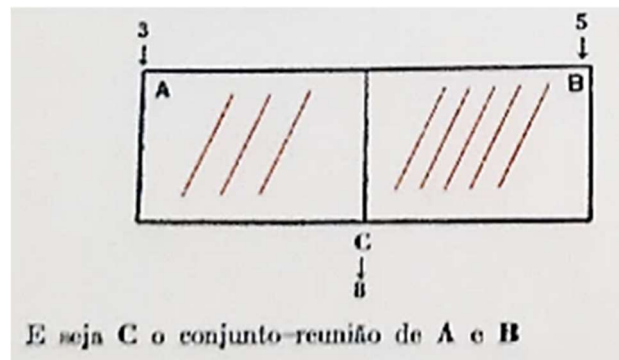


$$\begin{array}{r} 3 \\ + 5 \\ \hline 8 \end{array}$$

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 59)

Assim, a operação feita foi a adição, em que 3 e 5 são definidos como termos ou parcelas da adição e o resultado da operação é 8, denominado soma. Para indicar que a soma de 3 e 5 é 8, escreve-se $3 + 5 = 8$. Para justificar esse resultado, os autores destacam dois conjuntos: **A** com 3 elementos quaisquer e **B** com 5 elementos quaisquer da mesma espécie, de modo que **A** e **B** não tenham elementos comuns (Figura 42).

Figura 42 - Soma representada pela reunião de conjuntos



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 60)

Como **C** é formado pela reunião de **A** e **B**, a obra aponta que, contando seus elementos fica associado ao conjunto **C** exatamente o número 8. E desse modo, “o número 8, associado ao conjunto C, reunião desses conjuntos A e B, chama-se soma de 3 e 5” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 60).

Como é possível observar através dos exemplos, a cada par de números inteiros, considerados em certa ordem, fez-se corresponder um terceiro número dado pela soma do primeiro com o segundo e a isso chama-se adição (Figura 43). De maneira análoga, para se obter a soma de três ou mais números, adiciona-se cada parcela à soma do primeiro com o segundo.

Figura 43 - Definição de adição

A operação que a cada par ordenado de números inteiros faz corresponder a soma do primeiro com o segundo, chama-se adição

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 61)

Em seguida é apresentada a tabuada da adição, que segundo a obra, tem como objetivo evitar de fazer a operação a todo instante, além de fixar na memória. Assim, esquematiza-se a operação de soma de números inteiros em uma tabuada de dupla entrada (Figura 44), referindo-se a ela como um conhecimento familiar aos alunos nesta etapa do ginásio.

Figura 44 - Tabuada de dupla entrada da adição

+											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0		0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
→ 2		2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
3		3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
→ 4		4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
→ 5		5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
6		6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
7		7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
8		8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 62)

Usando a tabuada, ao somar dois números quaisquer, 3 e 5 por exemplo, temos que $3 + 5 = 8$. Entretanto, ao trocar a ordem das parcelas, isto é, ao somar 5 e 3 temos que $5 + 3 = 8$. Como é possível ver, obteve-se o mesmo resultado em ambas as operações e isso ocorre com qualquer par de números inteiros pois, a ordem em que as parcelas são consideradas, não influencia no resultado da adição. Logo em seguida, os autores mostram o comportamento do zero enquanto elemento neutro da adição, e através de exemplos mostram que “na adição de duas parcelas, onde uma delas é a parcela zero, a soma é a outra parcela” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 63).

A próxima abordagem do livro é acerca da sucessão dos números inteiros, em que se busca através da ideia natural da contagem exemplificar o conceito de sucessivo. Assim, segundo os autores “como já sabemos, 1 é o sucessivo de 0; 2 é o sucessivo de 1; 3 é o sucessivo de 2;54 é o sucessivo de 53; ...” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 63), de modo que, $1 = 0 + 1$; $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; ..., sendo que o sucessivo de um número obtém-se adicionando 1 a esse número. Na sequência destaca que, de modo geral, dado um número a qualquer, pode-se formar o seguinte: juntando uma unidade $a + 1$, denominado como sucessivo de a , em que podemos notar a introdução da abstração na obra, representando-se um número qualquer por uma variável.

No conjunto dos números inteiros naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, as propriedades da adição são apresentadas pelos autores como: fechamento, comutativa, elemento neutro e associativa. Assim, Bóscolo e Castrucci definem as propriedades da adição da seguinte forma:

- *Propriedade do Fechamento*: a soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro. Assim, $2 + 7 = 9$, que é um número inteiro isto, é, $(2 + 7) \in \mathbb{N} \dots$

De um modo geral: $(a + b) \in \mathbb{N}$, quaisquer que sejam a e b .

- *Propriedade Comutativa*: a mudança de ordem das parcelas não altera a soma. Assim, $4 + 15 = 15 + 4$; $7 + 3 = 3 + 7$; $6 + 11 = 11 + 6$; ...

De um modo geral, $a + b = b + a$, quaisquer que sejam a e b .

- *Elemento Neutro*: em $\mathbb{N}$ existe um número – o zero – chamado elemento neutro, cuja adição com outro número, em qualquer ordem, dá para soma esse outro número. Assim, $5 + 0 = 5$ e $0 + 5 = 5$; ...

De modo geral, $a + 0 = 0 + a = a$, qualquer que seja a .

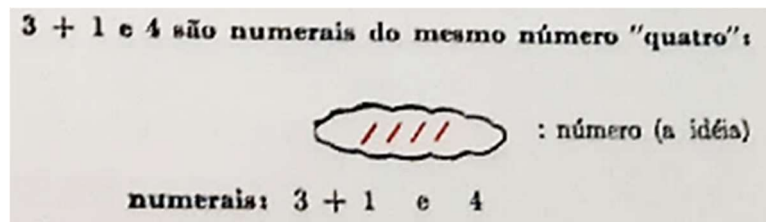
- *Propriedade Associativa*: a adição de três números inteiros pode ser feita, associando-se as duas primeiras ou as duas últimas parcelas, indiferentemente. Assim, $(3 + 7) + 10 = 3 + (7 + 10)$.

De um modo geral, $(a + b) + c = a + (b + c)$, quaisquer que sejam a , b e c .

É possível notar que a obra de Bóscolo e Castrucci apresenta a adição com ênfase em suas propriedades, fato verificado através da não utilização de exemplos contextualizados e situações-problema. Portanto, a adição é mostrada como uma operação característica dos números inteiros e não um instrumento de resolução de problemas relacionados ao cotidiano do aluno.

A partir da definição da soma, a obra pontua que uma soma pode representar um novo numeral. Ao tomarmos dois números inteiros quaisquer, 1 e 3 por exemplo, a soma é indicada pelo símbolo $3 + 1$, mas como é igual a 4 pode-se escrever $3 + 1 = 4$. Desta forma, $3 + 1 = 4$ significa que $3 + 1$ e 4 representam o mesmo numeral (Figura 45).

Figura 45 - Representação do numeral pela adição

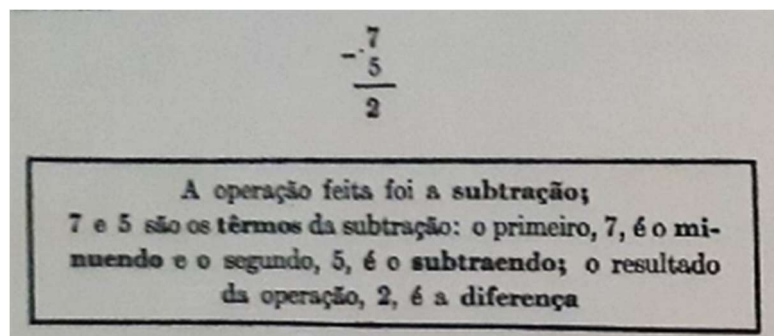


Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 67)

Logo, por meio da operação de adição criou-se um novo numeral. Usando este princípio, um número qualquer que possui apenas um numeral hindu-arábico simples, possui vários numerais compostos por adição. Assim, por exemplo, o número “quatro” possui o numeral simples 4, e os numerais compostos: $0 + 4$; $3 + 1$; $2 + 2$.

Para apresentar e definir a operação de subtração e seus elementos, Bóscolo e Castrucci consideram dois números inteiros em que o primeiro é maior ou igual ao segundo, 7 e 5 por exemplo. Assim, para fazer a diferença entre 7 e 5 basta fazer a operação de subtração com a técnica operatória usual (Figura 46).

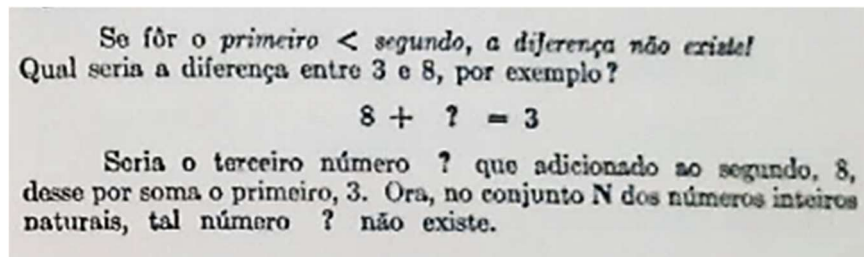
Figura 46 - Algoritmização da subtração



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 70)

Desse modo, para indicar que a diferença de 7 e 5 é 2, escreve-se $7 - 5 = 2$. Em seguida, é abordado o significado da diferença destacando que como é de conhecimento do aluno, $5 + 2 = 7$ e assim, a diferença 2 representa exatamente o número que adicionado a 5 dá 7. Portanto, de modo geral “dados dois números, o primeiro maior ou igual ao segundo, chama-se diferença entre o primeiro e o segundo, o terceiro número que adicionado ao segundo dá por soma o primeiro” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 70). Além disso, a obra salienta que somente existe a diferença de dois números inteiros, considerados em certa ordem, quando o primeiro for $\geq$ ao segundo (Figura 47).

Figura 47 - Ordem na operação de subtração



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 71)

A subtração é definida de modo que a cada par de números inteiros, considerados em certa ordem em que o primeiro é maior ou igual ao segundo, associa-se um terceiro número chamado de diferença entre o primeiro e o segundo. O primeiro e segundo número na operação de subtração são conhecidos como termos, em que o primeiro é o minuendo e o segundo é o subtraendo; o resultado da subtração denomina-se diferença. Ao encontrar que a diferença entre 8 e 5 é 3 é possível notar que o número 8 obtém-se por $5 + 3 = 8$, sendo que 8 é o minuendo e 5 o subtraendo da operação. Com esse exemplo, o livro mostra que é possível tirar a relação fundamental que indica que **subtraendo + diferença = minuendo**.

Em seguida, os autores abordam a subtração enquanto operação inversa da adição através de um exemplo, como: $11 + 4 = 15$ e $15 - 11 = 4$, disso concluem que “Dadas as parcelas, obtemos a soma através da adição; dada a soma e uma das parcelas, obtém-se a outra parcela através da subtração” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 73). Por isso, a subtração é dita operação inversa da adição.

Do mesmo modo que a subtração é a operação inversa da adição, a adição é a operação inversa da subtração e, portanto, as operações de adição e subtração são ditas operações inversas uma da outra.

Acerca das propriedades da subtração, Bóscolo e Castrucci relembam as propriedades da adição e questionam se elas também valem para a subtração, mostrando que não, por meio de contraexemplos. Assim, mostram que o conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à subtração, pois $4 - 9 = ?$, porém, não existe número que adicionado a 9 dê, por soma, 4. O único subtraendo que conserva o minuendo é o 0, pois $8 - 0 = 8$, entretanto, $0 - 8$ não é igual a 8 e, portanto, $\mathbb{N}$ não possui elemento neutro na operação de subtração.

A propriedade comutativa também não vale para a subtração, uma vez que, $13 - 10 = 3$, mas $10 - 13$ não existe no conjunto $\mathbb{N}$ e, além disso, $13 - 10 \neq 10 - 13$. A obra também mostra que a propriedade associativa não se aplica na subtração, exemplificando que $(20 - 12) - 3 = 8 - 3 = 5$ e $20 - (12 - 3) = 20 - 9 = 11$. Consequentemente, as propriedades de

fechamento, elemento neutro, associativa e comutativa que valem para a adição no conjunto $\mathbb{N}$, não valem para a subtração, sendo que para isso foi necessário apenas um exemplo de que elas não se verificam.

Posteriormente à explanação das propriedades que não se aplicam à subtração, os autores fazem uma observação de que é possível verificar se a operação está correta tirando a prova, sendo que para isso basta aplicar a relação fundamental: **diferença + subtraendo = minuendo** (Figura 48). Além disso, de maneira análoga à adição, é abordada a ideia de que ao indicar a diferença de dois números, 7 e 4 por exemplo, temos que $7 - 4 = 3$ e desse modo $7 - 4$ e 3 são ambos, numerais do número “três”. Enquanto 3 é chamado de numeral simples, $7 - 4$ é um numeral composto por subtração.

Figura 48 - Exemplos de subtração e sua prova

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 5807 \text{ m} \\ - 2545 \text{ s} \\ \hline 3262 \text{ d} \end{array} \quad \text{Prova: } \begin{array}{r} 2545 \\ + 3262 \\ \hline 5807 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 5807 \uparrow \\ - 2545 \\ \hline 3262 \end{array} +$$

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 76)

No decorrer da obra de Bóscolo e Castrucci é possível observar a adoção de elementos gráficos na forma de pequenos retângulos, nos quais estão inseridas informações importantes de modo a destacá-las (Figura 49). Além disso, os autores também pontuam sobre a decorrência de alguma propriedade mostrando exemplos sobre sua aplicabilidade, geralmente após algum conceito ou propriedade recém mostrada (Figura 50).

Figura 49 - Quadro de resumo sobre subtração

A operação feita foi a subtração;
 7 e 5 são os termos da subtração: o primeiro, 7, é o minuendo e o segundo, 5, é o subtraendo; o resultado da operação, 2, é a diferença

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 70)

Figura 50 - Exemplos de aplicabilidade de propriedade

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \{ \text{Pedro, João} \} \cup \{ \text{Antônio, Luís} \} &= \{ \text{Pedro, Antônio, João, Luís} \} \\ \text{b) } \{ a, e, m, r \} \cup \{ a, i, o, m, t \} &= \{ a, e, i, o, m, r, t \} \\ \text{c) } \{ 1, 9, 6 \} \cup \{ 1, 2, 6, 9, 4, 5, 10 \} &= \{ 1, 2, 6, 9, 4, 5, 10 \} \end{aligned}$$

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p.57)

No livro os exercícios estão localizados sempre após os assuntos abordados, sendo que após cada definição e/ou conjunto de propriedades há poucas atividades sobre o que acabou de ser demonstrado. É possível notar que os exercícios exigem que o aluno memorize termos como “parcela”, “soma”, “diferença”, “minuendo” e “subtraendo” para resolver os problemas. Além disso, é possível notar que os exercícios não são contextualizados, como por exemplo: “Associando as parcelas de duas maneiras diferentes, determinar as somas: a) $6 + 3 + 5$; b) $18 + 4 + 30$; c) $7 + 9 + 2 + 22$; d) $1 + 30 + 14 + 7 + 3$ ” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 68), exigindo que o aluno use a possibilidade de associar as parcelas para determinar uma soma, aplicação direta da propriedade associativa da adição.

Desse modo, ao analisar os exercícios da obra notamos que eles se apresentam como uma forma de exercitar as propriedades abordadas, de modo que o aluno saiba operar e memorize as propriedades pela repetição. Além disso, os exercícios também exigem que o aluno faça uso das relações de equivalência, da repetição do dispositivo usual (armar e resolver) e introduzem a álgebra através de variáveis (Figura 51).

Figura 51 – Exemplo de Exercício usando operações inversas e álgebra

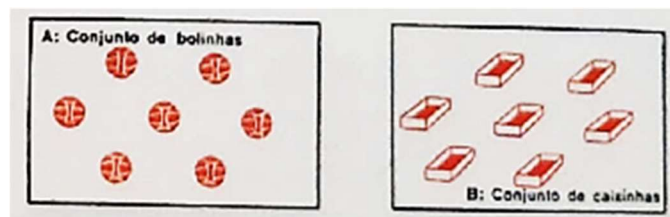
VI, VII. Tendo em vista a que adição e a subtração são operações inversas uma da outra, completar as seguintes igualdades:

12. $(6 - 1) + 1 =$	13. $(35 + 4) - 4 =$
14. $(7 + 7) - 7 =$	15. $(16 - 11) + 11 =$
16. $(308 + 115) - 115 =$	17. $(1821 - 799) + 799 =$
18. $(m - n) + n =$	19. $(y + x) - x =$

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 79)

Também podemos destacar que o uso de imagens na obra é restrita, aparecendo com maior incidência na definição de número através de conjuntos representando quantidades (Figura 52) e diagramas. Existem outras imagens no interior da obra de modo a exemplificar e explicar conceitos, mas elas são bastante limitadas pela própria característica da obra de focar nas propriedades matemáticas do conteúdo, mostrando uma abordagem centrada na aritmética. Os exercícios, por sua vez, apresentam imagens na seção que abordam o conceito de número, já no que diz respeito às operações apenas texto.

Figura 52 - Representação de conjunto



Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 29)

Após descrevermos sobre aspectos dos livros didáticos da 1ª série ginásial da década de 1960 e como é apresentado o conceito de número, o próximo capítulo é dedicado à uma análise comparativa entre as obras, buscando algumas aproximações e as influências da Matemática Moderna.

6.2 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS LIVROS DIDÁTICOS

A análise comparativa entre os livros didáticos da primeira série ginásial intenta sistematizar informações sobre o conteúdo das obras. Assim, buscamos identificar como cada livro didático apresenta o conceito de número e de que maneira é possível reconhecer aproximações de abordagem e aspectos de Matemática Moderna. Para isso, buscamos analisar nos livros didáticos, como era apresentada a estrutura geral, a abordagem dos conceitos, a explicação, a organização, a linguagem e as atividades propostas. Esperamos que esses aspectos nos forneçam elementos a fim de caracterizar a abordagem de número na primeira série ginásial na década de 1960.

Para ser possível descrever esses livros didáticos enquanto objetos de pesquisa, foi necessário selecionar informações, observá-las e questioná-las, o que é fundamental para o processo de análise. Desse modo, apoiando-se do modelo de “fichas-síntese” de Maciel (2019) e por meio da análise descritiva de como o conceito de número é abordado e explorado em cada uma das obras, utilizamos quadros-síntese para comparar e apontar diferenças e aproximações entre os manuais. De modo a tornar o processo de análise mais eficiente, organizamos as informações em alguns pontos como forma de revelar detalhes de cada aspecto e conseguirmos reconhecer nesses livros didáticos aspectos que dizem respeito ao problema de estudo.

a) Aspectos gerais das obras

A primeira dimensão que pontuamos ao fazer a análise descritiva de cada obra foram aspectos relacionados à capa, prefácio e sumário. Esses elementos dizem respeito a parte estética e estrutural da obra, em que foi possível visualizar, como está disposta a sequência de conteúdos a serem estudados pela primeira série ginásial durante o ano escolar. Assim, o Quadro 9 apresenta aspectos sobre cada um dos livros didáticos.

Quadro 9 - Aspectos gerais dos livros didáticos

	Quintella (1963)	SMSG (1967)	Bóscolo e Castrucci (1969)
Elementos gerais e estéticos	<i>Capa:</i> obra foi digitalizada sem capa. <i>Contracapa:</i> informações sobre a editora, edição, ano de publicação e autor. O livro indicava a informação de que havia 1050 exercícios. <i>Prefácio:</i> indicação de abordagem de maneira intuitiva e dedutiva. <i>Cores na parte interna:</i> preto e branco (fotocópia). <i>Dimensões e tamanho:</i> 270 páginas.	<i>Capa:</i> simples e com poucas cores, basicamente bege, branco e roxo. Na parte inferior há algumas marcas que se assemelham a formas geométricas desenhadas em branco. <i>Contracapa:</i> informações sobre a editora, edição, ano de publicação e autor. <i>Prefácio:</i> indicação de abordagem de maneira intuitiva e dedutiva. Há referências de abordagem diferente do tradicional. <i>Cores na parte interna:</i> preto e branco. <i>Tamanho:</i> 310 páginas, encadernado com dimensões 24,5 mm x 180 mm.	<i>Capa:</i> obra foi digitalizada sem capa. <i>Contracapa:</i> não apresenta <i>Prefácio:</i> indicação de abordagem de maneira intuitiva e dedutiva. Há referência à introdução da teoria dos conjuntos, introdução de novas relações e seus simbolismos. Ex: $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. <i>Cores na parte interna:</i> branco, preto, cinza e vermelho. <i>Tamanho:</i> 343 páginas, dimensões 21,5 cm por 15 cm.
Ordem de apresentação dos conteúdos	Quatro capítulos de temas centrais: - Números Inteiros - Números Relativos - Divisibilidade - Números Primos - Números Fracionários - Sistema Métrico	Oito capítulos: - O que é matemática? - Numeração - Números Inteiros - Geometria não – métrica - Fatoração e Números Primos - O sistema dos números racionais - Medida - Área, Volume, Peso e Tempo	Vinte e cinco capítulos, distribuídos em cinco partes: - 1ª parte: conjuntos; o conceito de número; a sucessão dos números inteiros naturais; sistema de numeração decimal - 2ª parte: adição; subtração; multiplicação; divisão; potenciação; raiz quadrada; expressões - 3ª parte: divisibilidade; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum - 4ª parte: os números racionais; operações com números racionais; representação decimal dos números racionais - 5ª parte: medidas de comprimento; medidas de superfície; áreas de figuras planas; volume dos corpos; volume de sólidos geométricos; medidas de massa; medidas não- decimais.

Fonte: Elaborado pela autora baseado em Maciel (2019)

Ao analisarmos os índices das três obras verificamos que os assuntos centrais de Quintella; Bóscolo e Castrucci são praticamente iguais, no entanto, nesta última obra, há um

capítulo relacionado a conjuntos que não aparece em Quintella. Além disso, a organização da obra difere, pois Quintella dividiu a obra em quatro capítulos e Bóscolo e Castrucci dividiram o livro em vinte e cinco capítulos dispostos em cinco unidades temáticas.

Quintella embora não destaque um capítulo para noções de conjunto, explana a ideia intuitiva de conjuntos durante a primeira unidade do livro que trata dos números inteiros. Essa abordagem é mais sutil que as outras duas obras, pois Quintella apresenta a ideia de conjunto ao definir número como unidade do conjunto, por exemplo. Já na obra do MSG, a ideia de conjuntos aparece no capítulo de números inteiros relacionado à propriedade do fechamento, mas sem destaque expressivo.

No geral, podemos afirmar que em sua maioria os assuntos correspondem aos previstos no currículo do programa *Assuntos Mínimos*, com a introdução de noções de conjuntos no livro de Bóscolo e Castrucci.

b) Apresentação

Na apresentação buscamos mostrar como os autores retratam o tema números. Para isso, descrevemos o modo como o conceito é introduzido por cada obra, de modo a detalhar as formas de abordagem utilizadas. Colocamos essas informações no Quadro 10 para facilitar comparações.

Quadro 10 - O conceito de número nos livros didáticos

Livro didático	Apresentação do conceito de número
Quintella, 1963	<i>“A característica comum a duas coleções ou conjuntos de terem a mesma importância independente da forma, da natureza, e da disposição de seus elementos é que nos dá a ideia de número natural”</i> (QUINTELLA, 1963, p. 14). Ideia central: correspondência biunívoca (cinco pedras, cinco ovelhas) A noção de número natural é associada à contagem de elementos.
MSG, 1967	Associa o conceito de número à contagem através da correspondência biunívoca, associando cada marca a um numeral de modo que o último numeral representa o número de marcas do conjunto (Figura 17). <i>“Os números naturais são números usados para responder à questão Quantos”</i> (MSG, 1967, p. 60).
Bóscolo e Castrucci, 1969	<i>“Número, que é uma ideia associada a um conjunto através da operação de contar, constitui também um atributo comum a conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca”</i> (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 25).

Fonte: Elaborado pela autora baseado em Maciel (2019)

Portanto, é notório que as três obras analisadas abordam o conceito de número usando a ideia de correspondência biunívoca entre dois conjuntos. Além disso, os livros didáticos

fazem a conceituação de maneira descritiva, com uso de exemplos e de dispositivos didáticos. Esses dispositivos didáticos aparecem como ilustrações ou situações-problema do cotidiano esquematizadas, como por exemplo, contar um conjunto de ovelhas ou maçãs.

Como as três obras abordam o conceito de número de maneira muito semelhante, podemos deduzir que esta era a maneira que tradicionalmente se abordava este conteúdo. Ademais, é possível notar que as obras de Quintella e do SMSG trazem, inclusive, o mesmo exemplo de relacionar um conjunto de pedras e um de ovelhas. Bóscolo e Castrucci, por sua vez, também trazem a contagem como elemento central do conceito de número, destacando que “o resultado da operação de contar é expresso por um número” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 23).

O número zero é associado ao conjunto vazio ou a uma coleção vazia nas três obras. Entretanto, em Quintella e SMSG não foi empregada simbologia para representar o conjunto vazio, se limitando a pontuar que zero é o número de elementos desse conjunto. Já no livro de Bóscolo e Castrucci, foi possível observar que o autor define e apresenta simbologia para o conjunto vazio no primeiro capítulo relacionado a conjuntos, mas ao se referir ao zero se limita a mostrar através da contagem um conjunto sem elementos.

No que diz respeito aos números inteiros naturais, as obras destacam a relação de ordem e mostram que o conjunto é infinito, sendo que dado um número qualquer sempre existe um sucessor. Em Quintella e, Bóscolo e Castrucci, a relação de ordem foi incorporada através de exemplos de comparar quantidades de dois conjuntos, introduzindo posteriormente a generalização e introdução de símbolos ($=$, $>$, $<$). No livro do SMSG a relação de ordem é tratada de maneira intuitiva, mostrando através de exemplos com números inteiros.

c) A adição dos números naturais

A operação de adição de números naturais é o terceiro aspecto analisado, no qual podemos ponderar sobre as distintas abordagens presentes nos manuais. Diferentemente da conceituação de número, que era muito similar nas três obras, a operação de adição apresentou diferenças nos recursos didáticos, especialmente na forma de realizar a abordagem do conceito. Assim, sistematizamos as informações no Quadro 11.

Quadro 11 - Definição de **adição** nos livros didáticos

Livro didático	Definição de adição	Propriedades
Quintella, 1963	O conceito é instigado por uma situação-problema: “<i>Um menino possuía 4 livros, e recebeu primeiro 3, depois 2. Quantos livros possui agora ao todo? Para saber, o menino reúne todos os livros numa só coleção e os conta</i>” (QUINTELLA, 1963, p. 31). E assim, $4 + 3 + 2 = 9$. Define adição como: “<i>operação que tem por fim achar um número que contenha todas as unidades de dois ou mais números dados, e somente essas</i>” (QUINTELLA, 1963, p. 31). Reunião de elementos de dois conjuntos em um só.	Comutativa Associativa Dissociativa
SMSG, 1967	Obra não define a operação de adição, usando-a de forma intuitiva. A primeira menção à adição é dada no início da obra, antes mesmo da definição de número, através de tabelas (tabuadas) de adição.	Comutativa Associativa Fechamento
Bóscolo e Castrucci, 1969	Obra define a adição da seguinte forma: “<i>Consideremos dois números inteiros quaisquer, 3 e 5 por exemplo. Determinamos a soma de 3 e 5 efetuando a adição de acordo com a técnica e o dispositivo prático que já conhecidos</i>” (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p.59, grifo dos autores). A obra aborda a reunião de conjuntos para exemplificar a soma de dois números, usando cada número como um conjunto de elementos que reunidos constituem a soma. Também aborda a tabuada da adição.	Fechamento Comutativa Elemento Neutro Associativa

Fonte: Elaborado pela autora baseado em Maciel (2019)

Notamos algumas diferenças no modo como a operação de adição é abordada em cada uma das obras. Inicialmente, é possível observar que Quintella, em uma situação-problema, usa a ideia de juntar quantidades, mostrando posteriormente como operar de modo a encontrar a soma. Já as obras do SMSG e de Bóscolo e Castrucci assumem que o conceito de soma é conhecido pelo aluno, se limitando a mostrar a tabela da adição e um exemplo usando dois números inteiros, respectivamente.

Além disso, Quintella usa diversos dispositivos didáticos e exemplos para ilustrar tanto o conceito como as propriedades relacionadas à adição, usando o mesmo exemplo que envolve livros (Quadro 11). Bóscolo e Castrucci e SMSG, mostram as propriedades da adição como características do conjunto dos números naturais e sua verificação e exemplos são feitas por meio de exemplos numéricos. Assim, é possível notar duas abordagens distintas ao referir-se à adição: uma mais contextualizada em exemplos simples do cotidiano e a outra com ênfase na estrutura e nas propriedades da operação.

Acerca das propriedades da adição, nota-se também que apenas a obra de Bóscolo e Castrucci pontua a existência do elemento neutro, não havendo nenhuma menção nas demais

obras. Já Quintella é o único a abordar a propriedade dissociativa, além de ser a única obra da amostra que não aborda a propriedade do fechamento.

d) A subtração dos números naturais

A operação de subtração de números naturais é o quarto aspecto analisado, sobre a qual podemos ponderar sobre as distintas abordagens presentes nos manuais. De maneira análoga à adição, a subtração também apresentou diferenças nos recursos didáticos empregados e nas abordagens do conceito, conforme descrito no Quadro 12.

Quadro 12 - Definição de **subtração** nos livros didáticos

Livro didático	Definição de subtração	Propriedades
Quintella, 1963	Através de situação-exemplo: <i>“Tenho uma coleção de 14 selos. Quantos selos devo juntar para obter uma coleção de 20 selos?”</i> (QUINTELLA, 1963, p. 39). Mostrando que $20 - 14 = 6$ Assim define que: <i>“Subtração é a operação que tem por fim achar uma parcela, sendo dada a soma (minuendo) e a outra parcela (subtraendo)”</i> (QUINTELLA, 1963, p. 39). Autor destaca a subtração como operação inversa da adição, e que o subtraendo deve ser menor ou igual ao minuendo.	Enuncia propriedade de que ao se somar ou subtrair o mesmo número ao minuendo e subtraendo, o resto não se altera.
SMSG, 1967	A obra não define a operação de subtração de números inteiros, apenas usando-a em problemas e exemplos. A subtração é abordada como a operação inversa da adição, com a ideia de desfazer a operação (exemplo com dinheiro). Obra mostra a subtração como operação inversa da adição.	Não apresenta de maneira explícita.
Bóscolo e Castrucci, 1969	A obra não define a operação de subtração, usando-as de maneira intuitiva. Como exemplo, os autores usam dois números e fazem o que denominam como “operação usual”. Destacam que <i>“dados dois números, o primeiro maior ou igual ao segundo, chama-se diferença entre o primeiro e o segundo, o terceiro número que adicionado ao segundo dá por soma o primeiro”</i> (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1969, p. 70). A subtração é abordada enquanto operação inversa da adição.	Obra mostra que as propriedades que valem para a adição, não valem para a subtração. Usam contraexemplos numéricos simples.

Fonte: Elaborado pela autora baseado em Maciel (2019)

Assim, ficou evidenciado que as três obras abordam a subtração enquanto operação inversa da adição, usando inclusive exemplos em que se “desmancha” a soma pela subtração. Além do mais, outro aspecto importante pontuado nos livros de Quintella e de Bóscolo e Castrucci é a relação de ordem entre os números envolvidos na subtração, sendo que o minuendo deve ser maior ou igual ao subtraendo, ou seja, dados dois números a e b para que

seja possível realizar a operação $a - b$, então $a \geq b$. Sobre este aspecto, a obra do SMSG não faz menção, uma vez que a operação de subtração é abordada rápida e superficialmente como a operação inversa da adição.

Além disso, é possível observar que apenas Quintella define formalmente a subtração, usando para isso um exemplo com selos. Tanto a obra do SMSG como Bóscolo e Castrucci usam a operação de forma usual em exemplos e problemas, deixando implícito que o aluno já devia ter se apropriado do conceito na etapa escolar precedente.

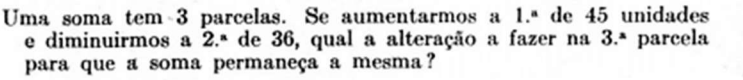
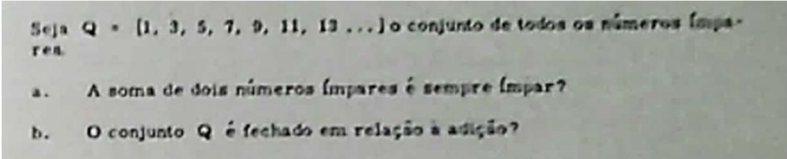
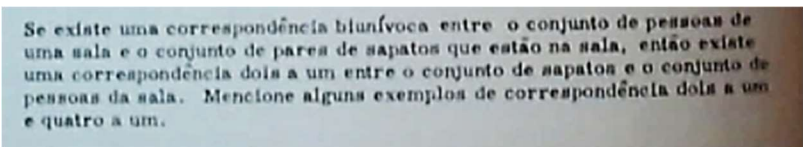
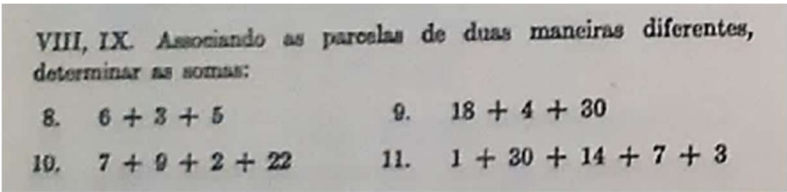
Acerca das propriedades da subtração, constatamos que o livro do SMSG não contempla informações a respeito, enquanto Quintella se limita a enunciar a propriedade: ao somar ou subtrair o mesmo número ao minuendo e subtraendo, o resto não se altera. Em Bóscolo e Castrucci, por sua vez, as propriedades da soma são todas testadas para a subtração, mostrando ao leitor que não são válidas por meio de contraexemplos numéricos.

Portanto, é possível notar que a operação de subtração e suas propriedades teve diferentes abordagens nas obras. Enquanto Quintella faz uso de exemplos simples do cotidiano do aluno para expor o conceito, Bóscolo e Castrucci, e SMSG apenas o usam para resolver exemplos e problemas, assumindo que o aluno já se apropriou da definição de subtração. Já no que diz respeito às propriedades, destacamos que a obra de Bóscolo e Castrucci mostra detalhadamente o motivo pelo qual a subtração não tem as mesmas propriedades da adição, mostrando que houve uma preocupação em apontar que apesar de serem operações inversas, não compartilham as mesmas características. Assim, é possível constatar que houve abordagens distintas ao referir-se à subtração: uma mais contextualizada em exemplos simples do cotidiano, com posterior generalização, e a outra com ênfase na estrutura e nas propriedades da operação.

e) Linguagem e abordagem dos conceitos

A linguagem e os conceitos empregados estão diretamente relacionados à percepção sobre a obra, ou seja, em relação à forma como os conteúdos foram abordados. A partir das três obras, que circularam na década de 1960, foi possível notar algumas proximidades e algumas diferenças no que diz respeito ao conteúdo e metodologias empregadas. Sintetizamos essas informações no Quadro 13.

Quadro 13 - Linguagem nos livros didáticos

Livro Didático	Abordagem de Conceitos	Exercícios
Quintella, 1963	Abordagem de conceitos por meio de situações-problemas, seguidas pela definição do conceito. A noção de conjuntos é bastante sutil, aparecendo basicamente na definição de número associada a contagem.	Não são contextualizados. Problemas de montar o dispositivo usual, sem nenhuma justificativa ou contexto. Exigem que o aluno saiba termos como “parcela”, “soma”, “diferença”, “minuendo” e “subtraendo”.  Fonte: Quintella (1963, p. 36)
SMSG, 1967	Abordagem de conceitos é baseada na ideia de conjunto e apresenta forte ênfase na noção de correspondência biunívoca. Obra também enfatiza as propriedades das operações, apresentando poucos problemas contextualizados.	Forte ênfase na ideia de correspondência biunívoca nos exercícios. Exercícios bem variados, alguns contextualizados e outros exigindo abstração.  Fonte: SMSG (1967, p. 79)  Fonte: SMSG (1967, p. 62)
Bóscolo e Castrucci, 1969	Capítulo dedicado à teoria dos conjuntos. Os conceitos no geral são abordados com ênfase nas suas propriedades, com pouca ou nenhuma contextualização. Os números inteiros naturais são tratados enquanto conjunto numérico $\mathbb{N}$.	Exigem que o aluno memorize termos como “parcela”, “soma”, “diferença”, “minuendo” e “subtraendo”. Não são contextualizados. Pede para resolver da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.  Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 68)

Fonte: Elaborado pela autora baseado em Maciel (2019)

Com um panorama geral das obras, é possível caracterizá-las de acordo com seu conteúdo, metodologia, conceitos e linguagem empregada. Apesar de os três livros estarem situados na década de 1960, é notória uma diferença na abordagem dos conceitos relacionados aos números, principalmente entre Quintella (1963) e Bóscolo e Castrucci (1969), que será evidenciada na sequência.

A obra do SMSG mostra um pouco de como a matemática era abordada nos Estados Unidos, uma vez que esse material foi pouco utilizado de fato no Brasil, conforme pontua D'Ambrosio (2017, p. 129) quando afirma que “esses textos sequer competiam comercialmente, pois eram considerados demasiado difíceis para a utilização dos professores”. Em relação aos conteúdos da obra, nota-se que seu conteúdo traz os conceitos com ênfase nas propriedades e com pouca contextualização. Apesar de abordar a noção de conjuntos de maneira formal muito brevemente na obra, alguns conceitos relacionados estão bastante presentes, como é o caso da correspondência biunívoca que relaciona “um a um” os elementos de dois conjuntos, aparecendo inclusive nos exercícios.

Publicada em 1963, a obra de Quintella se distingue pelo uso de exemplos e de dispositivos didáticos, trazendo os conceitos de modo contextualizado seguido por uma definição formal. Por outro lado, os exercícios são, em sua essência, um convite para a reprodução das propriedades e conceitos demonstrados, sem vínculo com situações relacionadas à realidade do aluno.

Enquanto linguagem matemática, observamos que para representar os números inteiros Quintella utilizou os elementos do conjunto, $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, definido como sucessão dos números inteiros. Apesar de se referir aos números naturais como conjunto, pode-se notar que o autor não utiliza chaves na representação do mesmo. Neste contexto, a palavra conjunto parece ter sentido de coleção de elementos, não apresentando simbolicamente os números inteiros enquanto conjunto numérico.

A obra não aborda a teoria dos conjuntos, apesar das indicações curriculares para a introdução deste assunto na primeira série ginásial. Entretanto, apesar de Quintella não dedicar um capítulo para abordar as noções de conjunto, notamos a presença da ideia intuitiva de conjuntos quando o autor define número através da correspondência biunívoca. A abordagem do autor é bem sutil, apresentando a noção de conjunto para definir: número, a sucessão dos números naturais e comparação de conjuntos (igualdade e desigualdade). Contudo, a recomendação era que a ideia de conjunto deveria ser dominante além de sugerir que fossem

ressaltadas as estruturas matemáticas, mostrando dessa maneira que o autor não incorporou essa exigência integralmente em sua obra.

De 1969, o livro de Bóscolo e Castrucci destaca o primeiro capítulo à teoria dos conjuntos, servindo como base para a abordagem de toda a obra. No que diz respeito ao seu conteúdo, os conceitos são abordados com pouca ou nenhuma contextualização e há ênfase nas propriedades e na estrutura dos números naturais enquanto conjunto numérico ($\mathbb{N}$). Além disso, outro aspecto importante é a adoção expressiva de símbolos matemáticos ($\cup$, $\in$ e uso de variáveis) e a adoção da linguagem relacionada a teoria dos conjuntos com termos como: reunião, subconjuntos, conjuntos disjuntos, conjunto-reunião, *etc.* Outro aspecto matemático adotado são os diagramas com conjuntos, mostrando visualmente, por exemplo, a reunião de conjuntos.

Além disso, observando os exercícios podemos verificar que eles se apresentam como uma maneira de o aluno aplicar as propriedades estudadas anteriormente, fazendo com que ao final da seção ele saiba operar com números (pede para resolver da direita para a esquerda e da esquerda para a direita). Além disso, exigem que o aluno faça uso da álgebra, de relações de equivalência e a repetição do uso da técnica usual: armar e resolver a operação (Figura 53).

Figura 53 - Atividades com simbolismo matemático

30. $\underset{d}{9} + 5 = 14 \iff 14 - 5 = 9$

31. $a - \underset{d}{b} = x \iff b + x = a$

32. $\underset{d}{m} + n = y \iff y - n = m$

Fonte: Bóscolo; Castrucci (1969, p. 80)

Assim, do ponto de vista do programa *Assuntos Mínimos*, podemos notar que a obra dos autores incorpora as mudanças propostas e apresenta os ideais da Matemática Moderna. Também, é possível identificar aspectos da Matemática Moderna através da incorporação de noções da teoria dos conjuntos, expressas nas representações de conjuntos por chaves e diagramas, relação de pertinência e da representação do conjunto dos números naturais pela letra $\mathbb{N}$.

Portanto, dadas as três obras analisadas no decorrer deste estudo, identificamos em MSG e em Bóscolo e Castrucci inovações relacionadas à Matemática Moderna. Essas

inovações aparecem na forma e na linguagem empregada na explanação dos conteúdos, associado ao uso da teoria dos conjuntos, das estruturas matemáticas e a incorporação de novas orientações pedagógicas exigidas pelo currículo do programa *Assuntos Mínimos*.

7 RESULTADOS

Em busca de uma conclusão, é conveniente retornarmos a alguns objetivos do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Neste estudo, evidenciou-se que o ensino na perspectiva da Matemática Moderna não pretendia ensinar um programa completamente diferente do tradicional já conhecido, mas a adoção de uma linguagem moderna que fosse mais atraente aos estudantes. Essa linguagem estava pautada no conceito de conjunto e deveria ter como finalidade as estruturas matemáticas, sendo apresentada como o método que permitiria ao aluno aprender matemática com menos esforço, uma vez que visava um melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes.

Assim, analisamos livros didáticos de modo a identificar a existência de traços de Matemática Moderna em seu conteúdo. A análise das obras tomou como tema central a abordagem de número e por meio das etapas de análise descritiva e comparativa, sistematizou-se uma tentativa de identificar informações que nos mostrassem elementos para que caracterizássemos o conceito de número em cada uma das obras.

Sobre a abordagem do conceito de número, operações fundamentais e propriedades, o programa *Assuntos Mínimos* indicava que “a ideia de conjunto deveria ser a dominante; as propriedades das operações com números inteiros devem ser ressaltadas como início das estruturas matemáticas” (SANGIORGI, 1967, p. 3-5 *apud* SILVA, 2016, p. 30). Assim, as análises indicaram que nem todas as obras estavam totalmente de acordo com essa recomendação curricular, mas foi possível identificar indícios de Matemática Moderna nas obras de Quintella (1963), MSG (1967) e de Bóscolo e Castrucci (1969), relacionados principalmente com a ideia de conjunto (Quadro 14).

Quadro 14 - Resumo dos resultados da análise dos livros didáticos

Obra	Quintella (1963)	MSG (1967)	Bóscolo e Castrucci (1969)
<i>De acordo com o programa Assuntos Mínimos?</i>	Não	Não se aplica	Sim
<i>Vestígios de Matemática Moderna?</i>	Sim	Sim	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor

Salientamos que, apesar das recomendações curriculares, muitos estudos mostram que o MMM não se manifestou de maneira homogênea em todo o território brasileiro e nem todos os autores adotaram completamente as propostas da Matemática Moderna. Nos livros

analisados, as inovações relacionadas com a Matemática Moderna estão relacionadas ao uso da teoria dos conjuntos e seus conceitos, estruturas matemáticas e as novas orientações pedagógicas na explanação dos conceitos, evidentes na obra de Bóscolo e Castrucci.

Assim, através das três obras publicadas na década de 1960, foi possível identificar vestígios de Matemática Moderna, por meio da linguagem e uso de dispositivos didáticos. Ao realizar as etapas relacionadas à análise de dados podemos responder a problemática central da pesquisa, mostrando por intermédio de trechos das obras e comparações, qual a abordagem de números naturais no contexto do Movimento da Matemática Moderna nos livros didáticos no período de 1960 – 1970, destacando-se a contagem e a correspondência biunívoca.

Desse modo, o estudo contribuiu para refletir sobre a abordagem de conceitos durante a vigência do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, em que por meio da análise destes livros didáticos foi possível obter algumas indicações sobre como esse movimento de reforma curricular afetou o conteúdo das obras. Possivelmente, outras fontes documentais e bibliográficas possam contribuir com a sistematização de informações, fornecendo novos elementos para compreender mais desdobramentos do MMM e suas implicações no estudo da matemática por alunos e professores.

As limitações do estudo ocorreram em dois aspectos: das fontes documentais, que representam uma pequena amostra digitalizada disponível, tendo em vista o aprofundamento buscado; e o tempo de execução que se restringiu à finalização do curso de graduação da autora. Ainda assim, essa limitação não nos impediu de sistematizar uma série de saberes relacionados ao MMM, ao currículo de matemática da etapa ginásial e a abordagem da temática números em livros didáticos da década de 1960, que podem ser aprofundados em estudos posteriores.

Deste modo, as contribuições deste estudo configuram um fragmento da produção de conhecimentos acerca da história matemática escolar brasileira. Uma ponta do *iceberg* de um assunto que ainda carece de muitos estudos para que seja possível traçar de maneira precisa, a trajetória da matemática escolar.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O MMM chega ao Brasil quase uma década após seu surgimento nos Estados Unidos e Europa e traz consigo a promessa de um ensino mais cativante e acessível, na contramão à matemática tradicional. Sua implementação em nosso país tem por influência principal movimentos internacionais, juntamente com a iniciativa de professores que assumiram o papel de protagonistas e necessidades econômicas e industriais. Entretanto, a inserção da Matemática Moderna no ensino secundário não tinha como pretensão uma reformulação do programa tradicional, sendo que a proposta era estudar os mesmos assuntos usando uma linguagem moderna, que envolvia substancialmente o conceito de conjunto e as estruturas matemáticas.

O objetivo deste trabalho foi analisar livros didáticos imersos no contexto do Movimento da Matemática Moderna, especialmente na década de 1960, considerando aspectos bibliográficos e metodológicos, de modo a caracterizar o conceito de número. Assim, buscou-se estabelecer relações entre as propostas defendidas pela Matemática Moderna e os conteúdos das obras, de modo a caracterizar o livro didático como uma das fontes de conhecimentos sobre essa tendência.

Para tal, inicialmente, buscou-se referenciais teóricos de modo a situar o leitor acerca do Movimento da Matemática Moderna, em que trazemos o contexto e as motivações que alavancaram o surgimento dessa tendência no mundo. Posteriormente, discutiu-se sobre o contexto educacional dos países subdesenvolvidos e em como estes possuem uma dependência de tendências educacionais de países desenvolvidos, uma vez que o Brasil buscou nos EUA orientação e direção para as inovações curriculares que dizem respeito a matemática escolar. Ademais, foi destacado que o MMM se tornou uma tendência nos currículos de matemática e a natureza de seu desenvolvimento no nosso país. Em seguida, foi realizada uma breve revisão de literatura, de modo a identificar o que dizem as pesquisas acadêmicas brasileiras sobre o tema na última década, em que pudemos verificar que o estudo de livros didáticos é uma abordagem recorrente ao se tratar do MMM.

Nossa análise baseou-se em livros didáticos enquanto fonte documental, assim, evidenciamos sua natureza enquanto objeto de estudo e seu uso como forma de disseminação da Matemática Moderna às mais diferentes localidades do país. Além disso, discutiu-se o programa curricular de matemática do ensino secundário, destacando as mudanças relacionadas com o surgimento da Matemática Moderna.

Em nossa análise dos livros didáticos, constatamos que Quintella (1963), SMSG (1967) e Bóscolo e Castrucci (1969) apresentaram traços de Matemática Moderna, relacionadas principalmente à ideia de conjunto. Em relação ao conceito de número, foi possível observar nas três obras que sua introdução está relacionada à correspondência biunívoca e ao ato de contar. A presença de elementos de Matemática Moderna aparece na forma e na linguagem empregada pelas obras no decorrer da explanação do conteúdo, associando o conceito de número aos conjuntos, uso das estruturas nas operações (associatividade, comutatividade, fechamento, elemento neutro) e a incorporação das orientações pedagógica do programa *Assuntos Mínimos*, usado enquanto currículo.

Espera-se que o trabalho tenha contribuído para o leitor compreender a Matemática Moderna e sua trajetória na história da Educação Matemática brasileira, em particular, de que maneira essas ideias influenciaram os livros didáticos da época. De modo geral, podemos afirmar que o sistema de ensino atual é resultado de diversas tentativas fragmentadas de reforma por meio de reorganizações curriculares, e expansão do acesso e dos anos de escolarização obrigatória. Assim, o caminho para compreender a educação dos dias atuais está em analisar como se chegou até aqui.

Salientamos que nosso intuito não foi julgar se a Matemática Moderna foi ou não uma boa abordagem para o ensino-aprendizagem, mas analisar o que foi e como se manifestou essa tendência. Ao nos remetermos ao currículo da Matemática Moderna, podemos notar que muitos dos objetivos que haviam sido propostos, como por exemplo o ensino pautado na compreensão em contraste com a tradicional memorização de grandes quantidades de informações, não foram alcançados conforme o desejado. Afinal de contas, sempre foi um dos objetivos do movimento um aperfeiçoamento que trouxesse um melhor aprendizado para os alunos, o que não pode ser comprovado efetivamente e o movimento declinou depois de alguns anos.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir para professores e alunos, a fim de situá-los nesse importante momento da história do ensino da matemática no Brasil, que reflete nos dias atuais. Acreditamos que esse trabalho de pesquisa foi muito enriquecedor para o conhecimento dos diversos aspectos do tema, contribuindo na formação da autora como professora de matemática e pesquisadora. Através do estudo e pesquisas, foi possível notar como fora o ensino de números em outra época e refletir como isso impactou no atual programa de matemática dos ensinos fundamental e médio.

REFERÊNCIAS

- ABREU, Kelyane Barboza de. **O movimento da matemática moderna: repercussão na abordagem no Brasil do conceito de função nos livros didáticos das décadas de 1950 a 1970.** 2011. 56f. Monografia (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, UFPB, João Pessoa (PB), 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/406/1/KBA26082013.pdf> . Acesso em: 25 ago. 2020.
- ALVES, Antônio Maurício Medeiros. **A Matemática Moderna no ensino primário gaúcho (1960-1978): uma análise das coleções de livros didáticos Estrada Iluminada e Nossa Terra Nossa Gente.** 2013. 320f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, UFPel, Pelotas (RS), 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189342> . Acesso em :10 jan. 2021.
- ANDRADE, Mirian Gelli da Costa. **O desembarque da Matemática Moderna no ensino normal de Itamaraju: contextos do Ginásio Augusto Carvalho e do Colégio Vera Cruz (1964-1970).** 2017. 156f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - UFES, São Mateus (ES), 2017. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/186651/Disserta%0c3%a7%0c3%a3o_Mirian%20Gelli.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Acesso em: 10 jan. 2021.
- ARRUDA, Joseane Pinto de. **Histórias e Práticas de um Ensino na Escola Primária: marcas e movimentos da matemática moderna.** 2011. 312f. Tese (doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - UFSC, Florianópolis (SC), 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1807/Tese%20Joseane%20Pinto%20de%20Arruda.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso em: 09 jan. 2021.
- BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. Em foco: história, produção e memória do livro didático. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, 2004a, v. 30, n. 3. p. 471-473. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/ep/article/view/27952/29724>. Acesso em: 02 jul. 2020.
- BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. **Ensino de História: fundamentos e métodos.** São Paulo: Cortez, 2004b. Disponível em: https://www.academia.edu/35717280/Circe_Bittencourt_-_Ensino_de_Hist%C3%B3ria_fundamentos_e_m%C3%A9todos. Acesso em: 21 jun. 2020.
- BONFADA, Elisete Maria. **A matemática na formação das professoras normalistas: o Instituto de Educação General Flores da Cunha em tempos de Matemática Moderna.** 2017. 206f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre (RS), 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/180932/001072530.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2021.
- BORGES, Rosimeire Aparecida Soares. **Circulação e apropriação do ideário do Movimento da Matemática Moderna nas séries iniciais: as revistas pedagógicas no Brasil e em Portugal.** 2011. 223f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNIBAN, São Paulo (SP), 2011. Disponível em:

<http://repositorio.pgskroton.com/bitstream/123456789/3659/1/ROSIMEIRE%20APARECID A%20SOARES%20BORGES.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2021.

BÓSCOLO, Alcides; CASTRUCCI, Benedito. **Matemática Curso Moderno**. vol. 1., [s. l.], [s. n.], 1969. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/196435>. Acesso em: 30 set. 2020.

BRIGO, Jussara. **As figuras geométricas no ensino de matemática: uma análise histórica nos livros didáticos**. 2010. 162f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - UFSC, Florianópolis (SC), 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/94507/276944.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2021.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. Teoria e Educação**, Porto Alegre, v. 2, p. 255-265, 1990. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/166108>. Acesso em: 26 abr. 2020.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. 1989. 293f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/163050>. Acesso em: 17 abr. 2020.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. Tradução de Maria Adriana C. Cappello. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/ep/article/view/27957/29729>. Acesso em: 20 jul. 2020.

COLAÇO, Walber Santiago. **Movimento da matemática moderna aos tempos atuais: uma análise de livros didáticos sobre explicitação e exploração das propriedades das operações**. 2010. 74f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, UEPB, Campina Grande (PB), 2010. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/1977/1/PDF%20-%20Walber%20Santiago%20Colaco.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2021.

CORREIA, Carlos Eduardo Félix. **O estruturalismo em livros didáticos: SMSG e matemática - curso moderno**. 2015. 234f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/132218>. Acesso em: 09 jan. 2021.

COSTA, Reginaldo Rodrigues da. **A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no estado do Paraná ao tempo do movimento da matemática moderna: 1961 a 1982**. 2013. 212f. Tese (Doutorado em Educação) – Escola de Educação e Humanidades, PUCPR, Curitiba (PR), 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/116743/COSTA_Reginaldo%20Rodrigues%20da%20a%20capacitacao%20e%20o%20aperfeiçoamento%20dos%20professores%20que%20ensinavam%20matemática%20no%20estado%20do%20paraná.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 09 jan. 2021.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. **Dinâmica e as consequências do movimento da matemática moderna na Educação Matemática do Brasil**. Tradução de Denise Negrão Rossi Piva. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2017.

FERNANDES, Mário Eduardo Marques. **A matemática moderna e o Ginásio Estadual Vocacional Oswaldo Aranha**: sobre caminhos e encontros. 2013. 137 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas (SP). Disponível em:
http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/250853/1/Fernandes_MarioEduardoMarques_M.pdf. Acesso em: 10 jan. 2021.

FRANÇA, Denise Medina de Almeida. **Do primário ao primeiro grau**: as transformações da Matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961-1979). 2012. 296f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo (SP), 2012. Disponível em:
https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/135357/DENISE_MEDINA_DE_ALMEIDA_FRANCA_rev.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 10 jan. 2021.

GOMES, Malú Rosa Brito. **A transição do clássico para o moderno**: o ensino de matemática no colégio Taylor-Egídio no município de Jaguaquara – BA (1950-1969). 2015. 126f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores) - UESB, Jequié (BA), 2015. Disponível em:
<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/161641/zMALU.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2021.

HEIDT, Makele Verônica. **Matemática Moderna no Instituto de Educação Assis Brasil (1964-1979)**. 2019. 195f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática, UFPel, Pelotas (RS), 2019. Disponível em:
http://guaiaca.ufpel.edu.br:8080/bitstream/prefix/4582/1/d_2017_Makele.pdf. Acesso em: 10 jan. 2021.

KLIN, Morris. **O fracasso da Matemática Moderna**. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo, IBRASA, 1976.

KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa de Lara. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. **Revista de investigaciones UNAD**, Bogotá - Colombia, vol. 14, n. 2, jul./dez, 2015. Disponível em:
<https://core.ac.uk/download/pdf/322589335.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2020.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas 2003. Disponível em:
https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india. Acesso em: 15 nov. 2020.

LAVORENTE, Carolina Riego. **A matemática moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi**. 2008. 254 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - PUC-SP, São Paulo (SP), 2008. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11351>. Acesso em: 05 jul. 2020.

LIMA, Eliene Barbosa. **Matemática e matemáticos na Universidade de São Paulo: italianos, brasileiros e bourbakistas (1934-1958)**. 2012. 260f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências), UFBA, Salvador (BA), 2012. Disponível em: https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/lima_eliene_b.matematica_e_matematicos_na_universidade_de_sao_paulo.italianosbrasileiros_e_bour.pdf. Acesso em: 04 jan. 2021.

LIMA, Flainer Rosa de. **Curso de Madureza – matemática pela televisão décadas 1960 e 1970**. 2011. 218f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC-SP, São Paulo (SP), 2011. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10903/1/Flainer%20Rosa%20de%20Lima.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2021.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4091392/mod_resource/content/1/Lud_And_cap3.pdf. Acesso em: 15 nov. 2020.

MACENA, Marta Maria Maurício. **Sobre formação e prática de professores de Matemática: estudo a partir de relatos de professores, década de 1960, João Pessoa (PB)**. 2013. 369f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102121/macena_mmm_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 10 jan. 2021.

MACIEL, Viviane Barros. **Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática: uma aritmética para ensinar nos manuais pedagógicos (1880 – 1920)**. 2019. 312f. tese (Doutorado em Ciências: Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) - Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, UNIFESP, Guarulhos (SP), 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/199390/Tese%20MACIEL_V_B_2019.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 25 out. 2020.

MENDONÇA, Thiago Neves. **Que Geometria ensinar às crianças em tempos de Matemática Moderna?** 2016. 130f. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) - UFJF, Juiz de Fora (MG), 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/186641/Disserta%3%a7%3%a3o-Thiago-Neves-Final-CD.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 09 jan. 2021.

NIELSEN JUNIOR, Kurt. **Movimento da matemática moderna - de onde veio, qual foi o resultado?** 2019. 48f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UTFPR, Curitiba (PR), 2019. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4291>. Acesso em: 09 jan. 2021.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. **O Movimento da Matemática Moderna em escolas técnicas do Brasil e de Portugal: impactos na cultura escolar**. 2012. 235f. Tese (Doutorado em Educação) – Escola de Educação e Humanidades, PUCPR, Curitiba (PR), 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/189998/Tese_Barbara%20Novaes.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 10 jan. 2021.

OLIVEIRA, Maelson da Silva. **O modelo euclidiano nas abordagens dos poliedros de Platão em livros didáticos:** Reflexos do movimento da Matemática Moderna? 2018. 132f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, UEPB, Campina Grande (PB), 2018. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3329#preview-link1>. Acesso em: 10 jan. 2021.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **Análise combinatória:** organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009. 2015. 144f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC-SP, São Paulo (SP), 2015. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11027/1/Carlos%20Alberto%20de%20Miranda%20Pinheiro.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2021.

PINTO, Neuza Bertoni. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba/PR, v. 5, n.16, p. 25-38, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/156658/dialogo-600.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 maio 2020.

PINTO, Neuza Bertoni. Um estudo histórico sobre o uso dos livros didáticos de Matemática. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, n.34, p.62-72, jun., 2009. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/histedbr/article/view/8639579>. Acesso em: 12 maio 2020.

PINTO, Neuza Bertoni; SOARES, Elenir Teresinha Paluch. Livros Didáticos de Matemática Moderna e o Poder da Cultura Escolar. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM, 10, 2010, Salvador, Bahia. **Anais...**, Salvador: ENEM, 2010, p.06. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais>. Acesso em: 15 maio 2020.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para a primeira série ginásial**. 106ª ed. 1963. São Paulo: Companhia Editora Nacional. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/182515>. Acesso em: 12 set. 2020.

RABELO, Rafaela Silva. **“Quando fui professor de matemática no Lyceu de Goiânia ...”:** um estudo sobre a prática docente imersa nas permanências e mutações da cultura escolar na década de 1960. 2010. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - UFG, Goiânia (GO), 2010. Disponível em: http://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/540/1/Dissertacao_Rabelo_2010.pdf. Acesso em: 10 jan. 2021.

RAMASSOTTI, Luiz Carlos. **Benedito Castrucci e as suas publicações destinadas ao ensino em geral com ênfase em Geometria**. 2018. 360f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2018. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/153847>. Acesso em: 21 dez. 2020.

ROCCO, Cristiani Maria Kusma. **Práticas e discursos:** análise histórica dos materiais didáticos no ensino de geometria. 2010. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - UFSC, Florianópolis (SC), 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/103265/275938.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2021.

RODRIGUES, Zionice Garbelini Martos. **O movimento da matemática moderna na região de Ribeirão Preto** = uma paisagem. 2010. 193f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas (SP), 2010. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251423>. Acesso em: 09 jan. 2021.

SANTOS, Jose Luiz Soares dos. **O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários**: uma análise histórica de livros didáticos. 2015. 106f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos (SP), 2015. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-20102016-164328/publico/JOSE_LUIZ_SOARES_DOS_SANTOS.pdf. Acesso em: 10 jan. 2021.

SANTOS, Reginaldo José dos. **História da Educação Matemática no estado de Mato Grosso**: o movimento da matemática moderna no município de Juara no período de 1970 a 1990, a partir da Escola Estadual Oscar Soares. 2013. 286f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Instituto de Educação, UFMT, Cuiabá (MT), 2013. Disponível em: http://crephimat.com/visor_dma.php?id_t=201&t=2. Acesso em: 10 jan. 2021.

SANTOS, Rosemary. **Saberes matemáticos identificados em provas do exame de admissão ao ginásio do Colégio São Paulo (1931 - 1969)**. 2017. 102f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - UFS, São Cristóvão (SE), 2017. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/180526/ROSEMARY_SANTO_S.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 10 jan. 2021.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. **Matemática Curso Ginasial**. Vol. 1. Trad. Lafayette de Moraes, Lydia Conde Lamparelli e colaboradores, São Paulo: EDART, 1967. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/156864>. Acesso em: 22 set. 2020.

SILVA, Luciana Vieira Souza da; SIQUEIRA, Rogério Monteiro de. Mercado Editorial do Livro Didático de Matemática: As Editoras e os Autores Mais Significativos de 1950 a 1978. In: Seminário Nacional de História da Matemática, SNHM, 9., 2011, Aracaju (SE). **Anais ... (online)**. Disponível em: http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Posteres/2_Silva_L_V_S_Mercado_Editorial_do_Livro_Did%C3%A1tico_de_Matem%C3%A1tica.pdf. Acesso em: 15 mar. 2020.

SILVA, Sara Regina da. **A formação de professores no Instituto de Educação General Flores da Cunha**: o curso de didática da matemática moderna na escola primária (1966 - 1972). 2019. 164f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre (RS), 2019. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/215286>. Acesso em: 10 jan. 2021.

SILVA, Tatiane Taís Pereira da. **Os movimentos matemática moderna**: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra Matemática - Curso Ginasial do MSG. 2013. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91045>. Acesso em: 09 jan. 2021.

SILVA, Wilian Faias da. **O impacto da matemática moderna no ensino dos números naturais**: uma análise de sete livros. 2016. 93f. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos (SP). 2016. Disponível em:
https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-31032016-173049/publico/VersaoRevisada_WilianFaiasdaSilva.pdf. Acesso em: 08 out. 2020.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso?**. 2001. 203f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), PUC-Rio, Rio de Janeiro (RJ), 2001. Disponível em:
https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/2191/1/DMA_SOARES_F_S_2001.pdf. Acesso em: 12 dez. 2020.

SOARES, Flávia. Ensino de Matemática e Matemática Moderna em congressos no Brasil e no Mundo. **Revista Diálogo Educacional**. Curitiba, v. 8, n. 25, p. 727 – 744, set./ dez. 2008. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/1891/189116827011.pdf>. Acesso em: 04 out. 2020.

TABOSA, Murilo França. **O Colégio Técnico de Limeira e o Movimento da Matemática Moderna = uma paisagem**. 2010. 202f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas (SP), 2010. Disponível em:
<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251627>. Acesso em: 09 jan. 2021.

THIENGO, Edmar Reis. Da matemática tradicional à matemática moderna: a trajetória de Ary Quintella via livro didático. In: Seminário Nacional de História da Matemática, SNHM, 6., 2005, p. 119-127, Brasília (DF), **Anais ... (online)**. Disponível em:
http://www.crephimat.com/visor_anais.php?id_t=6&tbl=snhm. Acesso em: 04 jan. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez. 2008a. Disponível em:
<https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3724/3640>. Acesso em: 25 jul. 2020.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Livro didático e Educação Matemática: uma história inseparável**. **Zetetiké**, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP, v. 16, p. 139-162, 2008b. Disponível em:
<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894>. Acesso em: 03 jun. 2020.

VALENTIM JÚNIOR, Josélio Lopes. **A geometria analítica como conteúdo do ensino secundário: análise de livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM**. 2013. 122f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, UFJF, Juiz de Fora (MG), 2013. Disponível em:
<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/162247/Jos%c3%a9lio%20Lopes%20Valentim%20J%c3%banior.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2021.