

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL**  
**CAMPUS CHAPECÓ**

**RELATÓRIO FINAL DE PÓS-DOCTORADO**  
**ESTUDO DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM**  
**DIFERENTES MODELOS FÍSICOS**

**Ederson Staudt**

**Chapecó**  
**Outubro de 2024**

**EDERSON STAUDT**

**TÍTULO: Estudo de soluções para as equações diferenciais parciais em diferentes modelos físicos**

Relatório de estágio Pós-doutoral realizado na  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul no  
Departamento Interdisciplinar do Campus Litoral  
Norte

Relatório Final

**Supervisor: Jorge Rodolfo Silva Zabadal**

**CHAPECÓ  
2024**

## **SUMÁRIO**

**RESUMO**  
**INTRODUÇÃO**  
**OBJETIVOS**  
**METODOLOGIA**  
**RESULTADOS E DISCUSSÕES**  
**CRONOGRAMA**  
**OUTRAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS**  
**PUBLICAÇÕES**  
**CONSIDERAÇÕES**  
**REFERÊNCIAS**

**Assinatura do orientador**

**RESUMO**

Este relatório apresenta as atividades desenvolvidas durante o estágio de pós-doutorado, focadas na pesquisa sobre métodos analíticos e de computação simbólica para resolver problemas envolvendo, principalmente, equações diferenciais parciais. Investigamos problemas inversos na localização de pontos de despejo de poluentes aquáticos, bem como no desenvolvimento de soluções para equações de Navier-Stokes bidimensionais. Além disso, inclui pesquisas sobre a teoria  $SU(2)$  e suas implicações na física das teorias de gauge para a descrição das partículas elementares. Ao longo do período, foram realizadas simulações e estudos que resultaram em publicações de artigos científicos, participação em grupos de pesquisa, eventos e o desenvolvimento de novas abordagens teóricas e computacionais para problemas complexos.

## **INTRODUÇÃO**

As equações advectivo-difusivas que modelam, por exemplo, a transferência de calor, massa e escoamentos viscosos são tradicionalmente resolvidas por métodos numéricos devido à complexidade introduzida por coeficientes variáveis e não-linearidades. Dentre as técnicas alternativas disponíveis na literatura utilizadas para contornar o uso exclusivo de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais complexas, como as de Navier-Stokes, estão a aplicação de simetrias de Lie e transformações de Bäcklund que permitam simulações analíticas computacionais [Ibragimov, 2004]. A importância das simulações está na obtenção de dados reais baseados em modelos. Quanto mais precisos os modelos, mais realistas serão os dados obtidos [Olver, 2000; Polyanin, 2004]. Para melhorar o grau de exatidão das simulações, utilizam-se equações diferenciais em modelos analíticos, mas a resolução dessas equações costuma ser onerosa em termos computacionais. Do ponto de vista teórico é necessário compreender o comportamento de fluidos incompressíveis em escoamentos dado pelas equações de Navier-Stokes na perspectiva da busca de soluções exatas que contribuam para a compreensão do comportamento laminar de fluidos em diferentes situações. Assim, o presente trabalho explora uma nova formulação analítica, aplicando transformações de Bäcklund para obter soluções exatas para a equação de Navier-Stokes bidimensional para fluidos incompressíveis em regime estacionário em torno placas planas.

As transformações de Bäcklund convertem equações diferenciais complexas em sistemas auxiliares mais simples, possibilitando a resolução analítica [Zabadal, 2014, Rogers, 1982]. No contexto deste trabalho, elas foram aplicadas para converter a equação de Navier-Stokes bidimensional em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, facilitando sua solução por separação de variáveis e integração. Neste sentido, o trabalho aborda novos métodos analíticos baseados em simetrias de Lie e transformações de Bäcklund [Bäcklund, 1880; Lie, 1895], aplicados à equação de Navier-Stokes para escoamentos bidimensionais de fluidos estacionários.

Por outro lado, a crescente preocupação com a poluição aquática e a necessidade de respostas rápidas em incidentes ambientais motivaram o estudo de métodos eficientes para a localização de fontes de despejo de poluentes em corpos d'água. Como principal resultado entendemos que a combinação desses dois focos principais propiciou uma integração entre a modelagem matemática e a aplicação em engenharia ambiental.

## **OBJETIVOS**

Os principais objetivos do plano de trabalho incluem: Desenvolver um método analítico eficiente para simulação de localização de despejos de poluentes aquáticos, utilizando técnicas de resolução de problemas inversos. Estudar e formular soluções exatas para as equações de Navier-Stokes bi-dimensionais aplicáveis a fluidos incompressíveis e explorar a aplicabilidade de simetrias de Lie e transformações de Bäcklund para reduzir o tempo de processamento em simulações e analisar a viabilidade computacional dos métodos. Investigar novos modos na teoria de campos  $SU(2)$  e suas aplicações em modelos que utilizam extensões topológicas. Publicar os resultados obtidos em periódicos científicos relevantes e participar de discussões acadêmicas através de congressos, seminários e colaborações científicas.

## **METODOLOGIA**

A pesquisa envolveu uma combinação de métodos analíticos e de computação simbólica no estudo de soluções envolvendo equações diferenciais parciais com o intuito de explorar os resultados fenomenológicos das equações formuladas. Para a poluição aquática, utilizou-se a formulação de problemas inversos baseada em equações advectivo-difusivas em um sistema de coordenadas adaptado à geometria do domínio – característica que dispensa a discretização do mesmo. Nas soluções de Navier-Stokes, o foco foi na aplicação de transformações de Bäcklund para reduzir a ordem das equações e facilitar sua resolução por meio de um conjunto de equações auxiliares. Assim, a busca por simulações com maior exatidão confere mais proximidade com a realidade. A teoria de campos  $SU(2)$  foi abordada via extensão topológica do espaço-tempo de 4D para 7D, permitindo a modelagem de interações de longo e curto alcance.

Para alcançar os objetivos propostos, a metodologia seguiu três linhas principais: Problemas Inversos e Localização de Pontos de Despejos: A partir de modelos advectivo-difusivos, aplicou-se técnicas de coordenadas curvilíneas para resolver as equações do escoamento e traçar plumas de poluentes. Foram realizadas simulações diretas para verificar a precisão das soluções obtidas e validar os resultados em experimentos numéricos. Equações de Navier-Stokes: Utilizou-se transformações de Bäcklund para reescrever as equações de Navier-Stokes em um sistema de equações diferenciais auxiliares de primeira ordem. As soluções obtidas foram comparadas com dados conhecidos da literatura, como a solução de Blasius, para validar a aplicabilidade dos métodos desenvolvidos. O método de Bäcklund, da maneira como aqui foi aplicado para reduzir a ordem das equações resulta na redução do tempo de processamento das simulações.

Teoria de Campos  $SU(2)$ : Extensões da teoria de campos  $SU(2)$  foram implementadas para explorar a interação entre cargas e a massa dependente da distância. Utilizou-se equações de Klein-Gordon modificadas para modelar o comportamento de massas em distâncias variáveis e o fenômeno de “screening” de cargas.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Dos estudos mencionados acima resultaram publicação em periódicos de circulação internacional. Menciona-se a publicação do Artigo "Analytical Simulations for Spill Point Source Localization Using Inverse Problems in Closed Form": Este artigo propôs um método inovador para localizar fontes de despejo de poluentes em ambientes aquáticos, utilizando soluções de problemas inversos. As simulações mostraram que o método pode localizar fontes com precisão significativa em tempo muito reduzido. A simulação direta revelou a fusão de plumas, sendo necessário um refinamento na análise para distinguir a origem de múltiplos despejos. A comparação entre o método desenvolvido e outras abordagens, como simetrias de Lie, demonstrou que o método proposto reduz o tempo de processamento de forma significativa, facilitando a aplicação prática em operações de emergência ambiental.

A partir de uma distribuição de concentrações conhecida, foram identificados máximos locais nas direções transversais às linhas de fluxo. A equação advectivo-difusiva foi utilizada para obter a função fonte  $Q$ , que foi mapeada na região delimitada. A função fonte  $Q$  foi representada por uma combinação de funções delta de Dirac, tratando o problema como um problema inverso baseado em funções de Green.

As equações paramétricas que descrevem as linhas de corrente permitiram a identificação de interseções com a malha de tubulação, localizando, assim, a origem do possível vazamento. Em cenários de águas profundas, foi observado que a função fonte pode mascarar a distribuição de concentrações, exigindo ajustes na aproximação por funções delta.

Artigo em Preparação: "Two-Dimensional Navier-Stokes Equation: Exact Solutions for Incompressible Fluids in Steady State": Este trabalho apresentou novas soluções exatas para escoamentos de fluidos incompressíveis. Utilizou-se as transformações de Bäcklund para reescrever as equações de Navier-Stokes em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. As soluções obtidas foram comparadas com dados conhecidos da literatura, como a solução de Blasius, para validar a aplicabilidade dos métodos desenvolvidos. Os resultados mostraram concordância com a solução de Blasius para baixos números de Reynolds, demonstrando a eficácia do método desenvolvido. A análise do desvio percentual em camadas-limite sugere que novas simetrias podem ser exploradas para aumentar a precisão das soluções para regimes com maiores números de Reynolds.

Teoria de Campos  $SU(2)$ : A investigação da equação da massa dependente da distância e o efeito de "screening" revelou novos insights sobre o comportamento de cargas em diferentes escalas de distância. Esta pesquisa está em andamento, com potencial para publicações futuras. Participação em Bancas e Eventos: Além das atividades de pesquisa, houve participação em bancas de defesa de mestrado, contribuindo com a avaliação de trabalhos acadêmicos na área de modelagem matemática e fluidos incompressíveis.

## CRONOGRAMA

Primeiro semestre: Desenvolvimento do método de localização de despejos. Primeiras simulações numéricas e validação do modelo. Implementação das transformações de Bäcklund nas equações de Navier-Stokes. Desenvolvimento das soluções exatas e comparação com a literatura.

Segundo semestre: Estudo da teoria de campos  $SU(2)$  e equações de Klein-Gordon. Preparação de artigos científicos e participação em eventos. Refinamento dos modelos. Submissão dos artigos restantes e participação em bancas.

## **OUTRAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS**

Participação da banca examinadora da defesa de mestrado da estudante Ana Paula Winter do MNPEF da UFTPR do Campus de Medianeira.

Participação como avaliador(a) na Inscrição e Avaliação Online, contribuindo na escolha dos finalistas da Feira de Inovação das Ciências e Engenharias - FICIENCIAS, realizada em Foz do Iguaçu – Paraná.

Integrante da equipe de elaboração do projeto “XI Simpósio Catarinense de Astronomia”, aprovado na CHAMADA PUBLICA Nº 02/2024 da FAPESC.

Participação da comissão organizadora do XI Simpósio Catarinense de Astronomia.

Integrante da equipe da UFFS de elaboração de projeto submetido a Chamada Pública CNPq/MCTI/FNDCT Conecta e Capacita nº 13/2024 - Programa Mais Ciência na Escola

Publicação do capítulo de livro: Problemas Abertos: Uma Possibilidade para Ressignificar a Resolução de Problemas no Ensino de Física. In: Rochele Loguercio. (Org.). Trajetos e Processos de Ensino Aprendizagem do PPGEci. 1ed.

Trabalho completo publicado em anais de congresso: A Teoria dos Campos Conceituais: Um referencial analítico e metodológico da resolução de problemas abertos. In: XIV - Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2023.

Resumos publicados em anais de congressos:

Klein-Gordon Effective Equation for Yang-Mills

$SU(2)$  Classical Theory - Light-Cone 2023: Hadrons and Symmetries.

Uma proposição de ressignificação do Ensino de Física através da metodologia de problemas abertos na perspectiva das situações-problemas dos Campos Conceituais e da Aprendizagem Significativa. In: I Encontro Interinstitucional, 2023, Porto Alegre. Resumos do I Encontro Interinstitucional do PPgECi. Porto Alegre, 2023.

## **PUBLICAÇÕES**

1) Analytical Simulations for Spill Point Source Localization Using Inverse Problems in Closed Form – Doi – 10.22115/cepm.2023.417005.1247. Publicado.

2) Two-Dimensional Navier-Stokes Equation: Exact Solutions for Incompressible Fluids in Steady State – Em fase de submissão.

3) Merging of Distance-dependent Mass Gap Equation and Screening Effect at  $SU(2)$  Classical Level – Em fase de preparação.

4) New  $SU(2)$  Classical Modes Exciting the Minkowskian Space and the Unity Sphere of Gauge Variables – Em fase de preparação.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos durante o estágio de pós-doutorado demonstram que os métodos desenvolvidos contribuem significativamente para a melhor compreensão dos modelos teóricos e dos métodos de soluções de equações diferenciais parciais, que se extrapolam para a descrições realistas como a localização de pontos de despejos de poluentes, bem como as soluções exatas para escoamentos incompressíveis. Adicionalmente, a formulação aplicada à equação de Navier-Stokes mostrou-se eficaz na análise de escoamentos ao redor de placas planas, confirmando a viabilidade da técnica para a modelagem de fluidos viscosos em escoamentos bidimensionais. Dessa forma têm potencial para contribuir significativamente com a ciência aplicada e a engenharia ambiental. Além disso, a pesquisa em teoria de campos  $SU(2)$  oferece novos caminhos para a compreensão de fenômenos de interação de cargas e massas dependentes de distância. O trabalho realizado estabeleceu uma base sólida para futuras colaborações e publicações, consolidando o impacto das contribuições na área.

O trabalho demonstra a eficácia na aplicação em problemas complexos de escoamento e poluição, oferecendo uma alternativa viável para a resolução de problemas inversos em ambientes aquáticos. A técnica permite a obtenção de soluções analíticas exatas de forma eficiente, o que pode contribuir para o avanço nas simulações de cenários de despejo de poluentes e na modelagem de fluidos.

**PERSPECTIVAS FUTURAS:** A continuação do trabalho focará no refinamento das simulações e na exploração de novas aplicações das técnicas desenvolvidas em outros campos da física dos fluidos, como escoamentos turbulentos e compressíveis. Além disso, há o objetivo de ampliar a colaboração com outros grupos de pesquisa e disseminar os resultados obtidos através de novas publicações e apresentações em conferências.

## REFERÊNCIAS

- Ibragimov, N. H. Lie Group Analysis: Classical Heritage, ALGA Publications, 2004.
- Olver, P. “Applications of Lie Groups to Differential Equations”, Springer, N. York, 2000.
- Polyanin, A., Zaitsev, V. “Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations”. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2004.
- Rogers, C. and W. F. Shadwick, Bäcklund transformations and their applications, Academic Press, New York, 1982.
- Zabada, J. R., Ribeiro, V. G., Silveira, A., Silveira, A. “Bäcklund Transformations: a Link Between Diffusion Models and Hydrodynamic Equations”. Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol 103, No 4, pp 215-227, 2014.
- Bäcklund, A. V. , Zür Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann., XVII, (1880).
- Lie, S., Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Von Sophus Lie. Leipz. Berichte, Heft I, 1895, S. 53–128. Reprinted in Collected Works of S. Lie [27], vol. 4, paper IX].