UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS ERECHIM

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO

LUCINÉIA GIACOMELLI KORALESKI

O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

ERECHIM, RIO GRANDE DO SUL

2024

LUCINÉIA GIACOMELLI KORALESKI

O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito para a obtenção do título de Mestra em Educação.

Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cristina Pasa

Coorientadora: Profa. Dra. Nilce Fátima Scheffer

ERECHIM, RIO GRANDE DO SUL

2024

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Koraleski, Lucinéia Giacomelli
O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA / Lucinéia Giacomelli Koraleski. -- 2024.
135 f.

Orientadora: Doutora Bárbara Cristina Pasa
Co-orientadora: Pós-Doutora Nilce Fátima Scheffer
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação, Erechim,RS, 2024.

1. Ensino. 2. Aprendizagem. 3. Matemática. 4. Representações Semióticas. 5. GeoGebra. I. Pasa, Bárbara Cristina, orient. II. Scheffer, Nilce Fátima, co-orient. III. Universidade Federal da Fronteira Sul. IV. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LUCINÉIA GIACOMELLI KORALESKI

O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação da Universidade Federal da Fronteira Sul, como requisito para a obtenção do título de Mestra em Educação.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 16/08/2024.

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
BARBARA CRISTINA PASA
Data: 22/08/2024 11:58:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profa. Dra. Bárbara Cristina Pasa – UFFS
Orientadora

gov.br Documento assinado digitalmente
NILCE FATIMA SCHEFFER
Data: 21/08/2024 17:46:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profa. Dra. Nilce Fátima Scheffer – UFFS
Coorientadora

gov.br Documento assinado digitalmente
LUCIA MENONCINI
Data: 21/08/2024 11:35:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profa. Dra. Lucia Menoncini – UFFS
Avaliadora (Membro Externo)

gov.br Documento assinado digitalmente
JERONIMO SARTORI
Data: 21/08/2024 14:23:00-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Jeronimo Sartori – UFFS
Avaliador (Membro Interno)

Dedico este trabalho à minha alma gêmea,
Ricardo André Koraleski, e às nossas filhas,
por todo o AMOR e incentivo.
A vida é hoje!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS pelo dom da vida e FÉ diária.

A minha mãe e o meu pai por terem desejado e cuidado da minha vida com toda dedicação e AMOR, sempre apontando o melhor caminho para a conquista dos meus sonhos.

Ao meu esposo e nossas filhas, por segurarem firme a minha mão, pelos abraços, por todo incentivo e por toda vez que falaram: - Você consegue! Estamos contigo!

As professoras Dra. Bárbara e Dra. Nilce com o coração cheio de gratidão por cada palavra incentivadora, pela orientação e carinho. Palavras que seguirão comigo para sempre, pois ter retomado os estudos com a segurança de que vocês estariam caminhando comigo foi essencial. Entre tantos momentos marcantes da nossa caminhada, quero registrar que apresentar a nossa pesquisa no IX ECEM, foi extraordinário, pois sendo a minha primeira apresentação da vida em eventos de Educação Matemática, o coração acelerou, deu medo, mas vocês estavam comigo e então, conseguimos, foi lindo e emocionante. Obrigada!

Aos colegas da turma do PPGPE 2022.2, meu agradecimento especial e cheio de carinho pela parceria, troca de experiências e conhecimento, estudo, escritas, seminários, palavras de incentivo, amizades construídas, confraternizações e recreios alegres. A amizade e a admiração por cada um e cada uma seguem comigo.

Ao GPTMEM - Grupo de Pesquisa em Tecnologias da Informação e Comunicação, Matemática e Educação Matemática pelas reflexões, diálogos e momentos de descontração, os quais foram importantes durante toda Pós-Graduação e necessárias durante a escrita da dissertação.

Aos professores e professoras do PPGPE pelas aulas, reflexões e avaliações que apresentaram posicionamentos parecidos aos meus e outros que me desafiaram, questionaram e suscitaram para um novo olhar sobre aspectos da Educação Integral.

Aos professores Dr. Jeronimo Sartori e Dra. Lucia Menoncini, titulares, e a professora Dra. Adriana Salete Loss, suplente, por aceitarem examinar, avaliar e participar das bancas de qualificação e defesa da pesquisa.

Aos amigos e familiares que torceram e acompanharam a conquista desse sonho presencialmente ou pelas redes sociais.

Aos colegas da UFFS *Campus* Passo Fundo pelo apoio nas atividades da SUBCEG e diálogos sobre a rotina durante o Mestrado e o desenvolvimento da pesquisa.

Aos amigos e colegas da UFFS Campus Erechim.

RESUMO

O ensino da Matemática vem passando por mudanças significativas há muito tempo e, com a pandemia, houve uma intensificação destas mudanças, que evidenciaram a necessidade de diferentes abordagens dos conteúdos para atender as demandas emergentes do cenário pós-pandêmico e as dificuldades apresentadas na aprendizagem matemática. Essas questões, entre outras, motivaram o presente trabalho que apresenta uma investigação sobre o estudo da função quadrática no GeoGebra com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS. Nesta teoria, Raymond Duval, seu precursor, enfatiza o papel das representações semióticas dos objetos matemáticos e das conversões entre elas, na aprendizagem desses objetos, nos apresentando a Hipótese fundamental de aprendizagem com base na estrutura da representação em função de conceitualização. Tendo como objetivo investigar aspectos cognitivos em atividades de função quadrática no GeoGebra na perspectiva da elaboração de uma Proposta de Ensino (Produto Educacional), realizamos uma revisão bibliográfica sobre o tema, e, a partir do estudo da TRRS e da análise de atividades compartilhadas no GeoGebra, elaboramos uma Proposta de Ensino para o estudo da função quadrática. Esta proposta foi desenvolvida no GeoGebra e explora as operações semiocognitivas da função, em especial a operação de conversão, de modo a favorecer a compreensão conceitual da função quadrática. Metodologicamente, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica, propositiva e analítica. A coleta, organização e análise de dados foram embasadas na Análise de Conteúdo de Bardin. Os resultados desta pesquisa envolvem a análise teórica de atividades do Geogebra, a elaboração de atividades e de um Produto Educacional, apresentando a TRRS como contribuição e embasando o ensino da função quadrática utilizando o GeoGebra. As atividades encontradas, selecionadas e analisadas oportunizam o ensino e a aprendizagem da função quadrática com diferentes representações e a conversão. O Produto Educacional apresentado é uma Proposta de Ensino no formato “livro” no GeoGebra com o título “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS”, nele constam as atividades analisadas e outras elaboradas que evidenciam os aspectos da TRRS.

Palavras-chave: Ensino; Aprendizagem; Matemática; Representações Semióticas; GeoGebra.

ABSTRACT

The teaching of Mathematics has been undergoing significant changes for a long time and, with the pandemic, there was an intensification of these changes, which highlighted the need for different approaches to content to meet the emerging demands of the post-pandemic scenario and the difficulties presented in mathematical learning. These questions, among others, motivated the present work, which presents an investigation into the study of the quadratic function in GeoGebra based on the Theory of Semiotic Representation Registers – TSRR. In this theory, Raymond Duval, its precursor, emphasizes the role of semiotic representations of mathematical objects and the conversions between them in the learning of these objects, introducing us to the fundamental hypothesis of learning based on the structure of representation as a function of conceptualization. Aiming to investigate cognitive aspects in quadratic function activities in GeoGebra from the perspective of developing a Teaching Proposal (Educational Product), we conducted a bibliographical review on the topic, and, based on the study of the TSRR and the analysis of activities shared in the GeoGebra, we have formulated a Teaching Proposal for the study of the quadratic function. This proposal was developed in GeoGebra and explores the semi-cognitive operations of the function, especially the operation of conversion, to promote a conceptual understanding of the quadratic function. Methodologically, we conducted qualitative, bibliographical, propositional and analytical research. The collection, organization and analysis of data were based on Bardin's Content Analysis. The results of this research involve the theoretical analysis of Geogebra activities, the development of activities and an Educational Product, presenting the TSRR as a contribution and supporting the teaching of the quadratic function using GeoGebra. The activities found, selected and analyzed provide opportunities for teaching and learning the quadratic function with different representations and conversion. The Educational Product presented is a Teaching Proposal in the format of a “book” in GeoGebra titled “Quadractic Function Activity Workbook in Light of TSRR” (originally in portuguese: “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS”), which contains the analyzed and other elaborated activities that highlight aspects of TSRR.

Keywords: Teaching; Learning; Mathematics; Semiotic Representations; GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ECEM	Encontro Catarinense de Educação Matemática
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IFES	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPGPE	Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação
SME	Secretaria Municipal de Educação
SUBCEG-PF	Subcoordenação de Ensino de Graduação do *Campus* Passo Fundo
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As inquietações para esta pesquisa iniciaram há muito tempo. Sempre fui[1] a criança que preferia as atividades de Matemática na escola. A partir desse interesse, quando foi possível o meu ingresso no Ensino Superior, decidi cursar a Licenciatura em Matemática. O início da vida acadêmica foi no ano 2000 e me formei em agosto de 2006.

Durante o percurso da Graduação, em 2003, assumi concurso na área administrativa escolar da Secretaria Estadual de Educação do Rio Grande do Sul e atuei em demandas da rotina escolar, cargos de gestão, de apoio aos professores e estudantes em escolas estaduais de Educação Básica e na Coordenadoria Regional de Educação. Cursando a Licenciatura em Matemática, ministrando aulas particulares de Matemática e atuando em ambientes educacionais, observei em diversas oportunidades o interesse dos estudantes pelas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC[2].

Na realização dos estágios de Matemática e Física em escolas de Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio), atividades práticas abordando conteúdos de geometria e desenho geométrico com estudantes nos laboratórios da Universidade Regional Integrada, *Campus* Erechim, e posteriormente como professora, presenciei as incertezas de compreensão dos estudantes em relação ao conteúdo de funções. Ao relacionar a representação algébrica com o gráfico marcado à mão no quadro da sala de aula surgiam questionamentos. Como tentativa de auxiliar na visualização, de pontos, retas e curvas, passei a utilizar nas aulas o *software* GeoGebra. Naquele momento, ao estudar funções, a visualização propiciada pelo *software* partia de uma ideia de compreensão associada a encontrar os valores da equação para determinados valores da variável “x”, localizá-los no plano cartesiano e na sequência coordenar com outros conteúdos e interpretar situações do cotidiano.

Buscando integrar os aprendizados da Licenciatura em Matemática com a minha atuação na escola, sempre que possível, participava de atividades e momentos de formação com Tecnologias[3]. Os computadores eram precários e as atividades desenvolvidas dependiam de programas instalados, uma vez que raramente a internet funcionava. Mesmo assim, era possível

---

[1] Conjugado em primeira pessoa por ser relato das vivências da mestranda.
[2] Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, termo utilizado para as tecnologias que têm o computador e a Internet como instrumentos principais e se diferenciam das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) pela presença do digital, sendo uma evolução delas, que por sua vez utilizam recursos de tecnologia para o processamento de informações.
[3] O termo Tecnologias nesse momento é utilizado pois não havia acesso à internet, eram computadores e atividades em CDs.

verificar mudanças nas formas de ensinar e aprender, pois motivava os professores e estudantes para o estudo a partir da inserção das Tecnologias disponíveis, nas aulas e da interação com as mesmas.

Em 2014, fui nomeada para o cargo de professora na Secretaria Estadual de Educação do Rio Grande do Sul e passei a ministrar aulas nos primeiros anos do Ensino Médio na disciplina de Matemática. Nas primeiras aulas já percebi que as minhas explicações, demonstrações no quadro e resoluções de questões não atendiam à expectativa em relação a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e tampouco propiciavam articulações com as demais disciplinas. Passei a inserir nos planos de aula momentos utilizando TDIC no conteúdo de funções, mais especificamente o GeoGebra e alguns aplicativos que os próprios estudantes utilizavam, sugeriam e compartilhavam durante as atividades.

Assumi, em 2016, o concurso na Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para a área administrativa, atuando até os dias atuais em setores da Coordenação Acadêmica do *Campus* Passo Fundo. Nesse ambiente de Ensino Superior, presenciando a Matemática fora da sala de aula, após ter vivenciado o ensino e a aprendizagem como professora e a percepção das dificuldades dos estudantes e da sociedade em geral envolvendo essa disciplina, surgiram reflexões ao ponto de me tirar da inércia e elaborar um projeto para retomar minha caminhada como estudante e futuramente, novamente como professora.

O Mestrado esteve no meu horizonte profissional desde a conclusão da Graduação, o que se concretizou em agosto de 2022, com o ingresso no PPGPE na UFFS, *Campus* Erechim. O pré-projeto para o ingresso já abordava as minhas inquietações sobre a aprendizagem matemática e durante o primeiro semestre de Mestrado, ao entrar em contato com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS[4] na leitura de um artigo sobre a aprendizagem de funções e as TDIC, senti-me encorajada para estudar sobre essas questões e elaborar uma Proposta de Ensino embasada em aspectos da TRRS.

Cursando a Graduação tive contato em algumas disciplinas com teorias de aprendizagem e psicologia da Educação, mas não lembro de ter ouvido falar em Raymond Duval naquela época. Participando de eventos de Educação, momentos de formação nas escolas em que atuei e Cursos da Secretaria Estadual de Educação que apresentavam dados do censo escolar sobre a aprendizagem matemática comecei a me interessar sobre o assunto.

Com base nas minhas experiências com as TDIC e diante das dificuldades dos estudantes na compreensão de funções, para esta pesquisa optei pela exploração da função

---

[4]Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval a partir dos estudos sobre semiótica de Charles Peirce e Ferdinand de Saussure, aplicados à Matemática.

quadrática, por estar presente nos conteúdos trabalhados em anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e nos primeiros semestres de alguns Cursos Superiores. Essas questões perpassam minhas motivações pessoais e profissionais, as quais nortearam essa pesquisa. Contudo, existem questões relevantes no âmbito da Educação Matemática e que também justificam esse trabalho.

A Matemática está presente no contexto sociocultural dos estudantes e é estudada desde o início da vida escolar, mesmo assim as dificuldades na aprendizagem desta, surgem em todos os níveis de ensino e geram discussões e reflexões no âmbito escolar e das pesquisas das áreas de Educação e Educação Matemática. Os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática vêm passando por mudanças significativas há muito tempo e, com a pandemia[5], houve uma intensificação destas mudanças, que evidenciaram a necessidade de diferentes abordagens dos conteúdos para atender às demandas emergentes do cenário pandêmico e pós-pandêmico.

Durante o período da pandemia os professores precisaram utilizar as TDIC. Pós-pandemia, o desafio é expandir a utilização das TDIC para as aulas presenciais a fim de construir conhecimento a partir delas. Para tanto, faz-se necessário que os professores conheçam as possibilidades que estão disponibilizadas em plataformas de livre acesso e, quando for o caso, tenham segurança para investir financeiramente em materiais que atendam às suas necessidades relativas aos processos de ensino e de aprendizagem.

No cenário pandêmico, o Ensino Remoto Emergencial foi utilizado para atender as demandas urgentes no âmbito da Educação e assegurar o trabalho pedagógico no sentido de não atrasar os estudantes, garantindo a continuidade mínima da vida escolar, forçando a adaptação dos professores e estudantes às novas formas de abordar os conteúdos, como por exemplo, o uso das plataformas de videoconferências, ambientes virtuais de aprendizagem, *softwares*, aplicativos, entre outros. Assim, no período pandêmico, a inserção das TDIC foi necessária para a efetivação das aulas e os conhecimentos adquiridos podem ser utilizados nas aulas presenciais. Para isso, torna-se fundamental estudos que investiguem iniciativas referentes ao uso das TDIC nas aulas de Matemática e as possibilidades de implementação das mesmas nas aulas presenciais, não apenas como suporte para projeção do conteúdo, mas como recursos dinâmicos que promovam a construção do conhecimento matemático.

Especificamente no caso de atividades matemáticas, pontuamos as peculiaridades relativas ao acesso aos objetos matemáticos. Devido à impossibilidade de acesso perceptível e

[5] Pandemia da covid-19, causada pelo vírus SARS-CoV-2: vírus da família dos coronavírus que, ao infectar humanos, causa uma doença chamada covid-19. A epidemia iniciou na China em dezembro de 2019 e em março de 2020 foi declarada a pandemia.

instrumental a um objeto matemático, sua apreensão ocorre por meio de suas distintas representações que foram produzidas ao longo da história humana. Assim, segundo a TRRS, a aprendizagem matemática perpassa necessariamente o conhecimento dos diversos registros de representações semióticas de um objeto matemático e, além disso, das transições entre essas representações. Por isso, ao refletir sobre a utilização das TDIC em atividades com a função quadrática, é importante levar em conta estas características que tornam o ensino e a aprendizagem matemática peculiares e distintos de outras áreas da ciência.

Em vista disto, esta pesquisa aborda aspectos da TRRS e suas possibilidades para o estudo da função quadrática no *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Pelas ferramentas disponibilizadas de forma gratuita pelo *site* deste *software*, em várias plataformas, compartilha-se materiais que auxiliam professores e estudantes. No GeoGebra é possível visualizar e interagir com as funções e os gráficos no plano cartesiano de forma a promover a curiosidade e o interesse pela busca do conhecimento matemático. Sabendo da aplicabilidade do uso deste *software* que auxilia, entre outras coisas, na visualização das características da função, especificamente, da função quadrática, analisamos as possibilidades de uma Proposta de Ensino (Produto Educacional) sobre este conteúdo observando as operações de conversão para a compreensão com distintas representações.

Para tal, neste estudo, foram explorados aspectos da TRRS, preconizada por Raymond Duval, relevantes para o estudo da função quadrática mediado pelo GeoGebra. No decorrer do trabalho apresentamos as discussões acerca das representações semióticas, das atividades cognitivas do registro (formação, tratamento e conversão) e da aprendizagem matemática segundo Raymond Duval.

Ao mesmo tempo, a expectativa de solidariedade envolvendo professores, estudantes e interessados no assunto no sentido de disponibilização de alternativas educacionais com recursos práticos de fácil e rápido acesso motivaram esta pesquisa. Assim, vinculando a TRRS, as TDIC e a construção de atividades com potencial de emergir e/ou evocar aspectos cognitivos necessários no ensino da Matemática, é que se constituiu a presente dissertação e o Produto Educacional a ela relacionado.

Tendo como tema o **estudo exploratório da função quadrática no GeoGebra na perspectiva da TRRS**, esta pesquisa se encaminhou com a seguinte questão: **Que possibilidades a Teoria dos Registros de Representações Semióticas oferece para o ensino da função quadrática no GeoGebra?**

A fim de responder a questão de pesquisa, definimos como objetivo geral **investigar aspectos cognitivos em atividades de função quadrática no GeoGebra na perspectiva da**

elaboração de uma Proposta de Ensino. Para alcançar tal objetivo, foram realizadas as seguintes ações: produção de uma revisão bibliográfica sobre o tema de pesquisa; estudo da TRRS com foco no estudo de funções; investigação e estudo de atividades compartilhadas no GeoGebra que abordam função quadrática; convergindo à elaboração do Produto Educacional à luz da TRRS.

Com o intuito de alcançar os objetivos propostos optamos por uma pesquisa com abordagem qualitativa, propositiva e analítica com base nos pressupostos da Análise de Conteúdo de Bardin (2016). Além do estudo da TRRS, algumas atividades que estão postadas no *site* do GeoGebra foram discutidas na perspectiva da referida teoria e outras elaboradas. O Produto Educacional, requisito no Mestrado Profissional, conta com a construção de uma Proposta de Ensino que une atividades do próprio GeoGebra e outras elaboradas pela pesquisadora utilizando como base a TRRS de Raymond Duval. Anexamos no Apêndice o Produto Educacional, enquanto Proposta de Ensino, intitulado "Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS", compartilhado de forma acessível a todos, em formato de "livro" nas plataformas do *software* GeoGebra e no Repositório Digital da UFFS.

Diante do exposto e buscando investigar o que existe de produções relacionadas ao tema da pesquisa, realizamos a revisão da literatura sobre o uso das TDIC no ensino remoto da Matemática e aprendizagem da função segundo Raymond Duval nos *sites* de periódicos da CAPES, apresentada no capítulo 2.

No capítulo 3, apresentamos os aspectos da TRRS, de Raymond Duval, relevantes ao ensino da função quadrática e sobre os quais se embasa as reflexões das atividades do GeoGebra e a Proposta de Ensino.

No capítulo 4, abordamos a utilização das TDIC no cenário pandêmico na Educação Matemática, a partir de breve relato histórico desenvolvido por Borba *et al*. (2015, 2022). Apresentamos ainda a *interface* do GeoGebra, sinalizando potencialidades e possibilidades de interação com o *software* em computador, *tablet* e *smartphone*.

No capítulo 5, a metodologia da pesquisa de cunho qualitativo e ancorada nas premissas da Análise de Conteúdo segundo Bardin (2016), é detalhada. Explanamos as atividades do GeoGebra analisadas a partir de um protocolo na perspectiva de Creswell (2010, 2013), as possibilidades para o Produto Educacional embasado na TRRS e desenvolvido no GeoGebra, o qual nominamos como Proposta de Ensino com o título "Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS".

No Capítulo 6, apresentamos reflexões sobre atividades que foram encontradas no *site* do GeoGebra, analisadas e selecionadas para constarem no Produto Educacional. Por fim, o Capítulo 7 destinamos às considerações finais.

No Apêndice consta o Produto Educacional (Proposta de Ensino): “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS”, que está postado no *site* do GeoGebra e no repositório da UFFS.

2 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO REMOTO DA MATEMÁTICA E APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SEGUNDO RAYMOND DUVAL

A revisão bibliográfica realizada teve como objetivo investigar trabalhos relacionados ao tema da pesquisa, partindo da questão: **Que possibilidades a Teoria dos Registros de Representações Semióticas oferece para o ensino da função quadrática no GeoGebra?**

Ou seja, procuramos por trabalhos que abordaram a TRRS e possibilidades de ensino de funções com o *software* GeoGebra, buscando, a partir disso, conhecer o que está sendo produzido, a fim de visualizar informações, armazenar, subsidiar e nortear a pesquisa. De acordo com Almeida (2014, p. 18), essa parte da pesquisa "é a base para que você tenha condições de dar prosseguimento a sua pesquisa".

Diante da questão, dos objetivos de pesquisa e a fim de situar este estudo no contexto atual sobre o tema realizamos buscas no *site* da CAPES em 07/03/23. O Portal de Periódicos da CAPES foi criado em 2000 e democratizou o acesso ao conhecimento científico no país, por ser uma biblioteca virtual e de livre acesso. Optamos inicialmente pelos buscadores "educação", "GeoGebra" e "função quadrática", selecionando a partir do *título* dos documentos do banco de dados, delimitando os últimos cinco anos (2018 a 2022). Dessa forma, foram encontrados 03 artigos. Ao adicionar, além dos termos mencionados, alguma palavra relacionada à TRRS, o sistema não retornou documentos.

Os 03 artigos mencionados na busca inicial, indicam favoravelmente o uso do GeoGebra para trabalhar conceitos matemáticos. Porém, tínhamos como interesse a relevância da TRRS de Raymond Duval no ensino da Matemática sobre funções com possibilidades no GeoGebra, por isso, para complementar a busca por trabalhos recentes em aspectos constantes nesta pesquisa, nova investigação foi realizada no *site* da CAPES, com os buscadores "educação", "matemática", "representação semiótica" e "funções", mantendo-se o limite temporal de 5 anos e a busca pelo *título*. Assim, foram encontrados mais 03 artigos.

A fim de aprofundar a busca, nova pesquisa foi realizada deixando de delimitar pelo *título* e foi utilizado a opção *qualquer campo* com os buscadores "matemática", "semiótica", "geogebra" e "Raymond Duval". Desta vez, foram encontrados 04 artigos.

Com a alternância de termos, visando encontrar relação com o propósito da pesquisa, chegamos aos 10 artigos do *site* da CAPES, apresentados no Quadro 1:

Quadro 1 - Artigos obtidos na revisão bibliográfica

(continua)

Item	**Título**	**Publicado**	**Vinculação institucional dos autores**	**Autores**	**Relação com a pesquisa**
1	O sociointeracionismo de Vygotsky na aprendizagem das funções quadráticas: um estudo com a mediação do *software* GeoGebra	Revista Tangram, MS, v. 05, n. 01, jan/mar 2022, 2595-0967	Universidade Federal do Ceará (UFC) – Fortaleza, CE	Wendel Melo Andrade, Jorge Carvalho Brandão e Maria José Costa dos Santos	Função quadrática, mediação pedagógica e o GeoGebra
2	O *software* GeoGebra no ensino da função quadrática	Número Especial – I Encontro Cearense de Educação Matemática – v. 08, n. 23, p. 861 – 876, 2021	Instituto Nacional de Ensino (INE) – Iguatu, CE	Tamara Sued Pinheiro de Oliveira, Dailton Cicerofram Souza Silva e Ana Cristina de Souza Lima	GeoGebra, interpretação gráfica e recurso pedagógico
3	O uso do GeoGebra nas aulas remotas: uma abordagem do conteúdo de função quadrática	Número Especial – I Encontro Cearense de Educação Matemática – v. 08, n. 23, p. 752 – 767, 2021	Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) – Ipu, CE	Maria Thaís Azevedo de Sousa e Francisca Cláudia Fernandes Fontenele	Visualização, GeoGebra e funções.
4	Aprendizagem de funções à luz da teoria dos registros de representação semiótica: uma revisão sistemática da literatura	Educação Matemática em Revista Brasília, v. 27, n. 77, p. 58 - 69, out/dez 2022	ABA Global School – Recife, PE; Universidade Federal de Pernambuco (UFPE); e SME do Recife – Recife, PE	Marcelo Muniz, Verônica Gitirana e Rosilângela Lucena	TRRS, funções, registros de representação semiótica e Raymond Duval
5	Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a análise do capítulo de funções de um livro didático	Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), Brasil v. 04, e202006, p. 1 - 16, 2020	SME de Presidente Kennedy, ES; IFES – Aracruz, ES; e IFES - Cachoeiro de Itapemirim, ES	Izabella Batista Silva, Giovani Prando e Jorge Henrique Gualandi	TRRS, objeto matemático funções, registros de representação e Raymond Duval
6	Registros de representação semiótica: experiência no	Educação Matemática Debate, Montes Claros, Brasil v.	IFES - Cachoeiro de Itapemirim, ES; e Universidade	Linus Tannure Santana, Jorge	TRRS, diferentes registros de função

	ensino de funções quadráticas com alunos do Ensino Médio Integrado	03, n. 07, p. 08 - 30, jan/abr 2019	Federal de Mato Grosso do Sul – MS	Henrique Gualandi e Maria Rosana Soares	quadrática, reflexões nos processos de ensino e de aprendizagem
7	Apreensões operatórias em registros figurais: um estudo com alunos de Licenciatura em Matemática	EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - PE – v. 08, n. 01 – 2017	Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão – Paraná	Mariana Moran e Carla Larissa Halum Rodrigues	Semiótica, Raymond Duval, representação, registros e visualização de conceitos.
8	A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas	Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 20, n. 02, p. 283 - 308, 2018	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)	Sérgio Florentino da Silva e Méricles Thadeu Moretti	GeoGebra, o ensino e a aprendizagem, TRRS, Raymond Duval e registros.
9	Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria	REVEMAT. Florianópolis (SC), v. 10, n. 02, p. 61 - 75, 2015	Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão – Paraná	Mariana Moran e Valdeni Soliani Franco	Raymond Duval, tratamentos e registros.
10	Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica	Boletim online de Educação Matemática, Florianópolis, v. 08, n. 15, p. 109 - 127, out/2020	Sem vínculo institucional, Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão – Paraná e Universidade Estadual do Paraná – Unespar	Fabrícia de Carvalho Paixão, Mariana Moran e Veridiana Rezende	GeoGebra, ensino de matemática e representação.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

No primeiro artigo, **O sociointeracionismo de Vygotsky na aprendizagem das funções quadráticas: um estudo com a mediação do *software* GeoGebra**, os autores Wendel Melo Andrade, Jorge Carvalho Brandão e Maria José Costa dos Santos, destacaram o desafio ainda existente na compreensão do conceito de função e a importância do aspecto dinâmico que o GeoGebra colabora na relação entre representação algébrica e gráfica, facilitando a explicação do conteúdo pelo professor e a compreensão do estudante. O artigo evidencia também a utilização dos preceitos da teoria sociointeracionista de Vygotsky (2005, 2016), que se mostraram essenciais para realização do trabalho, pois a partir de seus desígnios foi possível proceder com as atividades mediadas durante a Oficina Pedagógica e o entendimento sobre internalização e conceitos espontâneos e científicos, auxiliaram na compreensão da formação de novos conhecimentos nos sujeitos da pesquisa. Os autores concluíram que o *software* GeoGebra, quando utilizado adequadamente como instrumento de mediação e juntamente com a mediação pedagógica, contribui para a aquisição de conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas, principalmente no que se refere ao estudo das suas representações gráficas.

No segundo artigo, **O *Software* GeoGebra no Ensino da Função Quadrática** o objetivo proposto pelos autores Tamara Sued Pinheiro de Oliveira, Dailton Cicerofram Souza Silva e Ana Cristina de Souza Lima, foi analisar a compreensão dos estudantes no estudo da função quadrática por intermédio do GeoGebra. A realização da pesquisa teve motivação em relatos de professores a respeito das dificuldades apresentadas pelos estudantes das turmas de 1º ano do Ensino Médio quanto ao estudo do conceito de função quadrática. Com base nos dados obtidos foram comparados os resultados das atividades antes e depois da utilização do GeoGebra, sendo que os resultados foram satisfatórios no aspecto da aprendizagem dos estudantes e a intervenção com o GeoGebra contribuiu para o ensino e aprendizagem da função quadrática, principalmente sobre as interpretações gráficas.

No terceiro artigo, **O uso do GeoGebra nas aulas remotas: uma abordagem do conteúdo de função quadrática**, é relatada pelas autoras Maria Thaís Azevedo de Sousa e Francisca Cláudia Fernandes Fontenele a experiência de uma acadêmica em estágio supervisionado durante aulas remotas, cujo objetivo foi descrever as contribuições do GeoGebra para o ensino remoto. Os estudantes observaram a pesquisadora utilizando o *software* e a visualização dos principais conceitos da função quadrática suscitou a interação e os mesmos conseguiram entender com mais clareza alguns conceitos da função quadrática. A pesquisadora percebeu que com a utilização do GeoGebra, a explanação do conteúdo aconteceu com mais facilidade, sendo perceptível por meio das participações dos estudantes, que eles conseguiram entender alguns conceitos da função quadrática.

No quarto artigo intitulado **Aprendizagem de funções à luz da teoria dos registros de representação semiótica: uma revisão sistemática de literatura**, é apresentada a revisão sistemática da literatura pelos autores Marcelo Muniz, Verônica Gitirana e Rosilângela Lucena sobre a teoria proposta por Duval em 6 bancos de dados (ERIC, Periódico CAPES, Research Gate, HAL, Google Scholar e Scielo), definidos os critérios iniciais, 609 textos foram encontrados, estabelecidos alguns critérios de exclusão e novas leituras, foram analisados 18 artigos em 3 línguas buscando entender os aspectos da TRRS em contextos sobre funções recentemente. O foco dos autores estava em solucionar a inquietação sobre a temática: quais aspectos da teoria dos registros de representação semiótica são apresentados em trabalhos recentes sobre funções? Na conclusão os autores relatam como importantes as contribuições e a relevância da TRRS como base teórica em relação ao papel primordial do funcionamento e da constituição de um sistema de representação que rege a construção dos saberes sobre um objeto matemático a ser estudado. Foi possível observar, conforme as literaturas pesquisadas, a falta de relação entre as ações dos sujeitos enquanto realizavam as atividades propostas e as transformações cognitivas de registros de representação.

O quinto artigo, **Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a análise do capítulo de funções de um livro didático** apresentou a análise dos autores Izabella Batista Silva, Giovani Prando e Jorge Henrique Gualandi de um capítulo do livro didático do Ensino Médio "Matemática: Contexto e Aplicações", de Luiz Roberto Dante, sobre o conteúdo de funções, fundamentada em alguns pressupostos da TRRS. A obra escolhida para a análise foi o volume 1 de uma coleção aprovada pelo PNLD (2018). A análise foi restrita ao texto explicativo e pontuou como importante a investigação de atividades presentes em livros didáticos, utilizando a TRRS de Raymond Duval, buscando uma aprendizagem matemática em que o estudante possa estar envolvido com os diferentes registros de representação, explicitando a possibilidade da continuação da pesquisa em tal área.

No sexto artigo, **Registros de representação semiótica: experiência no ensino de funções quadráticas com alunos do Ensino Médio Integrado**, a pesquisa dos autores Linus Tannure Santana, Jorge Henrique Gualandi e Maria Rosana Soares visava investigar como os estudantes transitam entre diferentes registros da função quadrática. Após análise dos dados obtidos em uma turma com 15 trios, onde 12 estiveram presentes em todos os encontros e 8 realizaram todas as tarefas, foi observado que vários fatores justificaram o fato de os estudantes apresentarem dificuldades em transitar entre as formas de registros de um objeto matemático, tais como: a) dificuldade de visualização; b) de representação algébrica partindo do registro gráfico, sendo esta, justificada pelos estudantes, como a forma mais difícil de entender função quadrática; c) quando é solicitada a fórmula algébrica e é dado o gráfico com os pontos destacados. Os resultados contribuem para a reflexão da prática pedagógica em conteúdos matemáticos, pois trabalhando-se os mesmos em várias abordagens e formas possibilita-se reflexões nos processos de ensino e de aprendizagem. Tendo como dificuldade maior a parte gráfica da função quadrática e suas possíveis interpretações e aplicações. Neste trabalho não foram utilizados *software*s.

Seguindo, temos o sétimo artigo **Apreensões operatórias em registros figurais: um estudo com alunos de Licenciatura em Matemática**, no qual as autoras Mariana Moran e Carla Larissa Halum Rodrigues tinham o propósito de pesquisar os indícios de apreensões operatórias que o contato com os registros figurais na forma de Materiais Manipuláveis, do *software* GeoGebra e das Expressões Gráficas proporciona. A investigação com aplicação de atividade individual com licenciandos do 3º e 4º anos de Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná, sendo 6 estudantes do 3º ano e 6 estudantes do 4º ano de Matemática constatou que a diversidade de registros figurais contribui para a visualização de conceitos e propriedades, auxiliando na resolução do problema, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio, proporcionando diferentes operações e completando um registro figural ao outro.

O oitavo artigo, **A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas**, apresenta uma análise dos autores Sérgio Florentino da Silva e Méricles Thadeu Moretti sobre o ensino e a aprendizagem das superfícies quádricas (não cilíndricas e não degeneradas) na perspectiva da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, principalmente, no que diz respeito à abordagem de interpretação global de propriedades figurais. São indicadas as articulações semiocognitivas[6] envolvendo os registros em língua natural, cartesiano e simbólico de maneira explícita, modo não encontrado em livros didáticos consultados. Além dessas articulações, em especial, é sugerido o recurso das interseções com planos articulado à ideia de que os valores visuais dependem ou são condicionados ao conjunto e a combinação das unidades significativas simbólicas da equação correspondente, o que é básico para o reconhecimento dos diferentes casos de quádricas ou de uma quádrica em diferentes posições. Sugere o uso do GeoGebra pelo fato de que com ele há o potencial para trabalhar em sintonia com a TRRS com o diferencial da forma interativa, dinâmica e participativa permitida aos estudantes.

O nono artigo, **Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria**, os autores Mariana Moran e Valdeni Soliani Franco apresentam parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado, cujo objetivo foi a investigação da influência dos registros figurais, Material Manipulável, *software* GeoGebra e Expressão Gráfica, na construção e organização do raciocínio dedutivo com apoio visual figural durante a resolução de um problema de Geometria. Realizada com 15 professores de Matemática de Educação Básica no Paraná, a partir da pesquisa pode-se concluir que o uso da TRRS foi primordial para a investigação, direcionando o modo como foram elaborados os instrumentos de pesquisa e as conclusões descritas nas análises. A pesquisa mostrou que, ao utilizar diferentes registros figurais na resolução de problemas de geometria, fatores referentes aos tratamentos e às mobilizações de registros são modificados, gerando consequências diretas na busca da solução do problema. Do ponto de vista matemático, Duval (2011) explica que a solução do

[6] Termo utilizado por Duval (2020) para definir a aprendizagem do objeto matemático por meio da coordenação de diferentes registros de representação, envolvendo semiótica e cognição.

problema é o que demonstra os diferentes conhecimentos que permitem resolvê-lo e, do ponto de vista cognitivo, são analisados os processos que permitem reconhecer os conhecimentos matemáticos a serem empregados.

No décimo artigo, com o título **Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica,** as pesquisadoras Fabrícia de Carvalho Paixão, Mariana Moran e Veridiana Rezende ressaltam a intenção de responder as questões: os professores, colaboradores desta pesquisa, exploram diferentes Registros de Representação Semiótica ao elaborarem atividades relacionadas à Geometria Fractal? Se sim, o processo de conversão entre estas representações ocorre? De que maneira? Com a participação de 14 professores de Matemática da Educação Básica na pesquisa, foi identificado que a representação semiótica mais solicitada na atividade elaborada pelos professores durante a exploração Matemática do Fractal Hexagonal Tipo Dürer, foi a numérica. A conversão do registro figural para o simbólico numérico teve destaque, e a representação simbólico algébrica foi a menos sugerida pelos professores. Abordar a Geometria Fractal em sala de aula e construir seus entes geométricos (fractais), na constatação das pesquisadoras, proporciona que os professores explorem diversos conteúdos matemáticos. Com a utilização do GeoGebra, além de proporcionar atividades dinâmicas com relação à conversão entre os registros de representação semiótica, concluíram que é possível explorar diferentes conversões entre os registros ao se trabalhar uma atividade na construção do Fractal Hexagonal Tipo Dürer.

A partir da leitura dos artigos percebemos a TRRS embasando e subsidiando as propostas educacionais didáticas em atividades matemáticas uma vez que, a partir dela se pode oportunizar a aprendizagem com maior apropriação dos conceitos. Com o GeoGebra, os trabalhos pontuam as possibilidades de interação entre estudantes e objeto matemático, além da visualização de possibilidades gráficas. Ademais, nos artigos que não há menção sobre a utilização de *softwares* durante as intervenções, são deixadas indicações de que a parte gráfica na aprendizagem da função quadrática é importante e os estudantes apresentam dificuldade no momento da transcrição para o plano cartesiano e entendimento dos valores dispostos no sistema de coordenadas e o traçado do gráfico.

Do mesmo modo, os textos que apresentam pesquisas realizadas em Ensino Superior com estudantes deste nível e com professores atuantes na área de Matemática na Educação Básica, pontuam sobre a utilização de *softwares* associada ao conteúdo para minimizar as dificuldades que surgem. As pesquisas apontam o *software* GeoGebra no estudo da função quadrática como importante aliado para a visualização, o ensino e a aprendizagem.

No capítulo a seguir, serão abordados aspectos da TRRS com vista para o ensino da Matemática.

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Sendo o interesse desta pesquisa a exploração da função quadrática em atividades matemáticas no GeoGebra, apresentamos a importância de olhar para a Proposta de Ensino à luz de uma teoria de aprendizagem matemática. No desenvolvimento das atividades, foram destacados aspectos da teoria de Duval que perpassam a aprendizagem matemática a fim de responder à questão de pesquisa.

Os estudos em torno da semiótica iniciaram-se ainda com Platão (427–347) e Aristóteles (384-322) quase que simultaneamente, em locais distintos e por autores diferentes. No século XX, surgiu a "consciência semiótica", assim chamada por Santaella (2012 *apud* Pasa, 2017, p. 47), são três modelos: Peirce, entre os anos 1890-1910, nos Estados Unidos; Saussure, publicado em 1916 na antiga União Soviética e Frege, entre os anos de 1892 e 1894, na Europa Ocidental.

Apesar da existência de uma "consciência semiótica" estar evidente nos três estudos, Duval (2011) afirma que eles não têm nada em comum. Eles diferem na definição de unidades significativas (signos), nos critérios de análise e na descrição do funcionamento cognitivo que permitem. Para Peirce, os domínios de referência para análise das unidades significativas se baseiam nas ciências em geral e na lógica; para Saussure, na linguística; e, para Frege, na Matemática, especialmente na análise e aritmética.

Cada um dos três modelos de análise das unidades significativas considera uma ideia essencial para examinar o papel delas e das representações no conhecimento geral, sendo que a noção de unidade significativa varia em cada teoria. No entanto, em relação ao funcionamento da atividade matemática e seu aprendizado, Duval (2011) afirma que nenhum desses modelos é adequado para uma abordagem semiótica de análise. É pela comparação dos três modelos que se torna possível, segundo este autor (2011), extrair a noção de representação semiótica, com a peculiaridade essencial de não reduzir o papel das unidades significativas no funcionamento cognitivo do pensamento a uma simples codificação de informação ou conceitos.

Apesar das diferenças apresentadas entre os estudos, segundo Duval (2011), todos os trabalhos posteriores têm como base estes três autores e, foi neles que Raymond Duval buscou inspiração para a criação da TRRS.

A TRRS de Raymond Duval é uma teoria semiocognitiva que condiciona a aprendizagem de um objeto matemático às representações semióticas deste objeto. Devido aos objetos matemáticos serem abstratos, seu acesso não ocorre por meio dos sentidos e a aprendizagem passa pela abstração possível em cada estudante, mediante as interações vivenciadas anteriormente. Nessa construção mental de um determinado objeto e quando o estudante consegue realizar a representação do mesmo podemos dizer que foi com a utilização de registros de representação semiótica dos objetos matemáticos que a aprendizagem aconteceu, de acordo com Duval (2012).

Assim, o acesso aos objetos matemáticos ocorre a partir das representações semióticas deste objeto que foram criadas ao longo da história humana. Cada representação semiótica apresenta um conteúdo sobre o objeto que permite conhecer características deste, por isso a importância de conhecer ao menos duas representações semióticas do objeto a ser apreendido[7]. Assim, são descritos três itens importantes no processo cognitivo de acessar um objeto matemático: o objeto matemático, a construção mental do objeto e o registro de representação semiótica. A construção mental e a representação semiótica estão relacionadas com o mesmo objeto.

Raymond Duval menciona que problemas de aprendizagem apresentados na Matemática, geralmente, não são encontrados em outros domínios do conhecimento devido aos aspectos peculiares de acesso aos objetos matemáticos. As dificuldades podem ser locais ou globais, as locais podem ser percebidas em contato inicial com os estudantes enquanto as globais são percebidas após um período maior e estão associadas ao raciocínio, à visualização e às aplicações dos conhecimentos no cotidiano.

As interrogações sobre o entendimento e incompreensões apresentadas pelos estudantes e o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, são questões de ordem cognitiva e epistemológica. Conforme destacado por Duval (2011, p. 15)

> A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos. Essa questão do “como podemos ter acesso por nós mesmos” é evidentemente essencial para a formação e aprendizagem em matemática.

Quando registros de representação com descrição, inferência, raciocínio e cálculo são associados aos conteúdos, o entendimento no ensino e na aprendizagem matemática é percebido. Isso promove o desenvolvimento intelectual e a autonomia dos estudantes. Assim, a visualização de uma determinada questão se estende a outras situações, melhorando o raciocínio e a interpretação das atividades propostas.

---

[7] Apreensão de um objeto matemático ocorre a partir das atividades cognitivas ligadas à produção de uma representação semiótica: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão (Duval, 2012).

Duval (2012) aponta dois conceitos na aprendizagem matemática sobre a atividade cognitiva do ser humano: *noesis* e *semiose*. A primeira é a apreensão conceitual de um objeto, enquanto a segunda é a apreensão ou a compreensão de uma representação semiótica, não existindo *noesis* sem a *semiose*, pois elas são parte da mesma atividade e objeto. Este autor (2012) classifica os registros de representação em: natural, determinada como a escrita discursiva, cuja ideia é escrever sobre um conceito compreendido; gráfico, que pode demonstrar uma situação com informações escritas ou aproximadamente descrever um trajeto durante um dado intervalo de tempo; algébrico, com a mesma importância, é utilizado não apenas para expressar variáveis, mas também pode caracterizar situações que envolvem conjuntos; e o tabular, que apresenta várias informações em quadros ou tabelas, podendo ou não estar vinculado a outro registro de representação semiótica.

Para que um sistema semiótico seja considerado uma representação, deve permitir as três transformações cognitivas fundamentais ligadas à *semiose* (Duval, 2012, p. 6): *formação de uma representação identificável*, *tratamento* e *conversão*.

Duval (2009, p. 36 e 37) apresenta as três atividades cognitivas sobre as representações perante os sistemas semióticos em relação aos pares possíveis de serem formados considerando conhecimento e representação. Inicialmente, é mencionada a *possibilidade de constituir um grupo com identificação*, juntando-os (formação de uma representação identificável); na sequência com regras próprias transformar de modo a obter outra representação e possibilitando uma relação de conhecimento com as representações iniciais (tratamento); e finalmente para explicar as significações da representação, realizar a conversão em outro sistema. O autor pontua que os registros de representação semiótica disponibilizam aos sujeitos condições de objetivação e de posicionamento sobre assuntos constituindo graus de liberdade. Explicita que as três atividades precisam acontecer, e portanto, não está presente em todos os sistemas semióticos.

3.1 FORMAÇÃO DE UMA REPRESENTAÇÃO

É na atividade cognitiva de *formação das representações* que o estudante consegue “manifestar” uma representação mental ou “conceber” um objeto real, como afirma Duval (2009). Uma escrita, uma notação ou um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor; assim como os traçados e figuras: um segmento, um ponto, um círculo. Isso quer dizer que eles não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles (Duval, 2012).

Para ilustrar, apresenta-se os exemplos a seguir, extraídos de Moretti (2002, p. 347):

a) $y = x^2 - 4x + 3$
b) $y + 1 = (x - 2)^2$
c) $y = (x - 3)(x - 1)$
d) esboço da parábola no plano cartesiano

Segundo Moretti, cada um dos itens anteriores faz referência a um mesmo objeto matemático, no entanto

> [...] do ponto de vista cognitivo, um certo tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma: em (c) vemos com clareza as raízes; em (b), as coordenadas do vértice da parábola; em (d), uma representação em um sistema semiótico diferente dos anteriores e que em muitas vezes é bastante adequada à interpretação, se for o caso, do fenômeno representado (Moretti, 2002, p. 347)

Temos também o item (a), que ao ser observado, surgem por exemplo informações dos coeficientes, sendo $a = +1$, $b = -4$ e $c = +3$, indicando a ideia mental da concavidade voltada para cima e da intersecção do gráfico com o eixo.

3.2 TRATAMENTO

Os *tratamentos* correspondem às transformações dentro de um mesmo registro de representação, ou seja, não há modificação do sistema semiótico. Seria, por exemplo, a resolução de uma equação, ou encontrar o valor de $f(x) = x^2$, para $x = 2$, resultando em $f(2) = 2^2$ e, por fim, $f(2) = 4$.

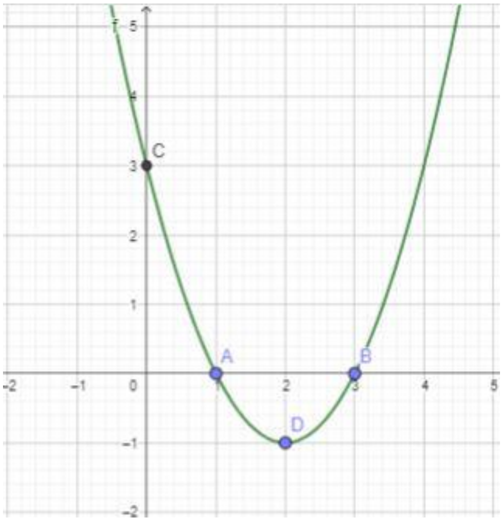
Temos então, a constatação da relação entre duas ou mais grandezas a partir da qual é possível obter a lei de formação de uma função, por exemplo, a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Neste objeto matemático é possível realizar *tratamento* utilizando a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes que são as abcissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo x. Outros tratamentos podem ser realizados, por exemplo, encontrar as coordenadas do vértice com fórmulas e os valores dos coeficientes, sendo que o valor de a é o valor que está multiplicando (coeficiente) x^2, b é o valor que multiplica o x e o c é definido pela variável independente.

Ainda em relação à $f(x) = x^2 - 4x + 3$, podemos realizar tratamento na representação gráfica, pois visualizando a representação gráfica é possível perceber os pontos $A(1,0)$, $B(3,0)$,

$C(0{,}3)$, e $D(2,-1)$. Os pontos A, B, C, e D da Figura 1 pertencem às unidades significativas do objeto matemático função quadrática. Os pontos A e B são as raízes, o ponto C é o ponto de intersecção com o eixo y e o ponto D é o vértice.

Numa representação gráfica, como a da Figura 1, as regras próprias estão visíveis e podem ser exploradas de maneira que a relação com o objeto matemático fique demonstrado.

Figura 1 - Plano cartesiano com pontos da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 set. 2023.

As transformações realizadas na representação algébrica e na representação gráfica isoladamente, são tratamentos da mesma função quadrática. Iniciar pela representação gráfica e mediar o entendimento das características da função quadrática pode levar à melhor compreensão de conteúdos matemáticos.

Sendo assim, a *formação de um registro*, no caso do objeto matemático funções, pode ser algébrico (simbólico), por exemplo $f(x) = x^2$; gráfico (o traçado do gráfico); registro de representação discursivo; e para cada um deles existem funções cognitivas características que precederam a produção semiótica da representação. A coordenação dos registros de diferentes tipos de representação objetiva a aprendizagem de maneira global e essa atividade chama-se *conversão*.

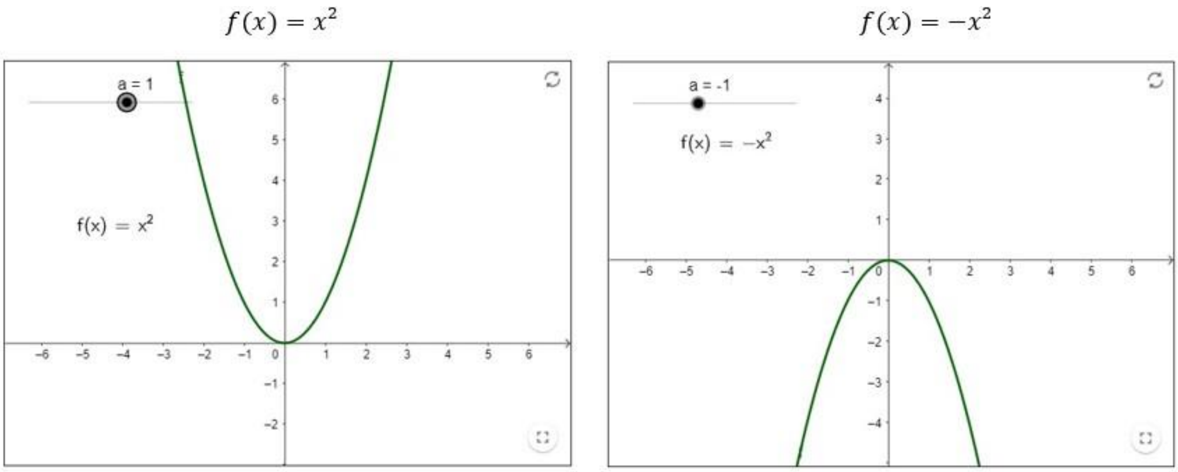
3.3 CONVERSÃO

As *conversões*, no que lhes concerne, correspondem à mobilização entre diversos registros de representação semiótica. Portanto, representam a passagem de um tipo para outro diferente do registro de partida. Para Duval (2012), a conversão pode ser realizada quase instantaneamente e intuitivamente, quando os registros de partida e chegada são congruentes[8].

A conversão está relacionada à aprendizagem matemática, uma vez que corresponde à coordenação de pelo menos dois registros de representações, promovendo conjecturas e elaboração de pensamento e raciocínio sobre conceitos, valores, definições do que está envolvido, por exemplo, entre uma representação algébrica e a representação gráfica.

Na Figura 2 é possível visualizar as representações algébricas $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2$ e suas respectivas representações gráficas. A representação gráfica de $f(x) = -x^2$ é também a reflexão de $f(x) = x^2$. Com a utilização do GeoGebra para a visualização das parábolas a conversão entre representações algébricas e gráficas pode promover a compreensão sobre o valor que está multiplicando o x^2 na representação algébrica como sendo o mesmo que determina quando a parábola estará voltada para cima ou para baixo.

Figura 2 - Exemplos de conversão utilizando o GeoGebra



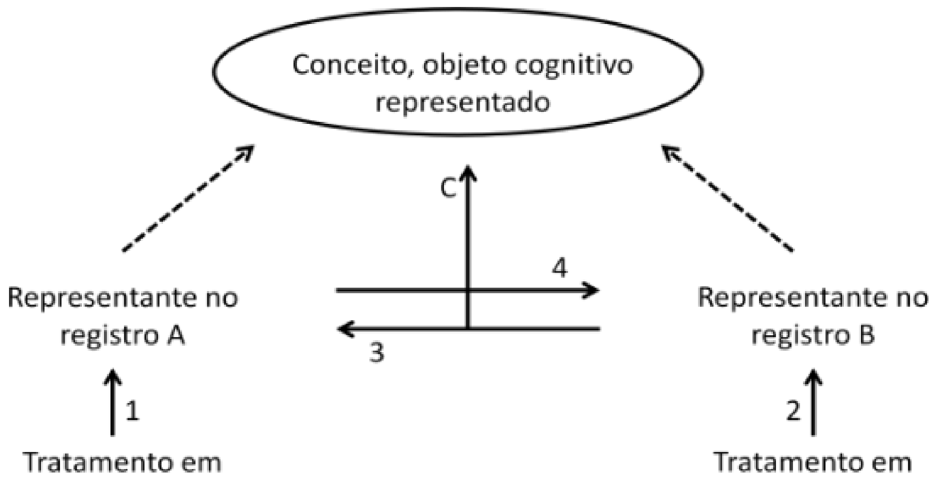
Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/V66M2MgB> Acesso em 16 jul. 2024.

A conversão envolve, assim, a capacidade de compreensão entre diferentes representações. Essa apreensão é central na aprendizagem matemática por permitir que os estudantes entendam como a mesma ideia pode ser abordada de maneiras distintas e isto enriquece a fluência Matemática, desenvolvendo a habilidade de traduzir conceitos entre as diferentes representações, como texto, equações, gráficos e diagramas.

No esquema da Figura 3, Duval (2012) apresenta sua hipótese para que ocorra a aprendizagem matemática a partir das conversões entre registros de representação.

[8] Quando há correspondência direta entre os conteúdos que os tornam equivalentes.

Figura 3 - Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Segundo Duval (2012, p. 270), a coordenação de diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto "aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual do objeto". No caso do estudo de funções, a articulação entre o registro de representação gráfica e o registro da representação algébrica pode possibilitar a compreensão desse objeto matemático. Na Figura 3 - Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização, as flechas verticais 1 e 2 correspondem às transformações internas a um registro, os tratamentos, e as flechas horizontais 3 e 4, às transformações externas, ou seja, às mudanças de registro por conversões. A compreensão integral, representada pela flecha vertical C, supõe uma coordenação de dois registros e uma percepção do conteúdo de forma abrangente (p. 282). O próprio Duval pondera que:

> Esta coordenação está longe de ser natural. E ela não parece poder realizar-se no quadro de um ensino, principalmente determinado por conteúdos conceituais. Pode-se observar, em todos os níveis de ensino, na grande maioria dos alunos, um isolamento de registros de representação. Estes não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes: a expressão algébrica de uma relação e sua representação gráfica [...] (Duval, 2012, p. 283).

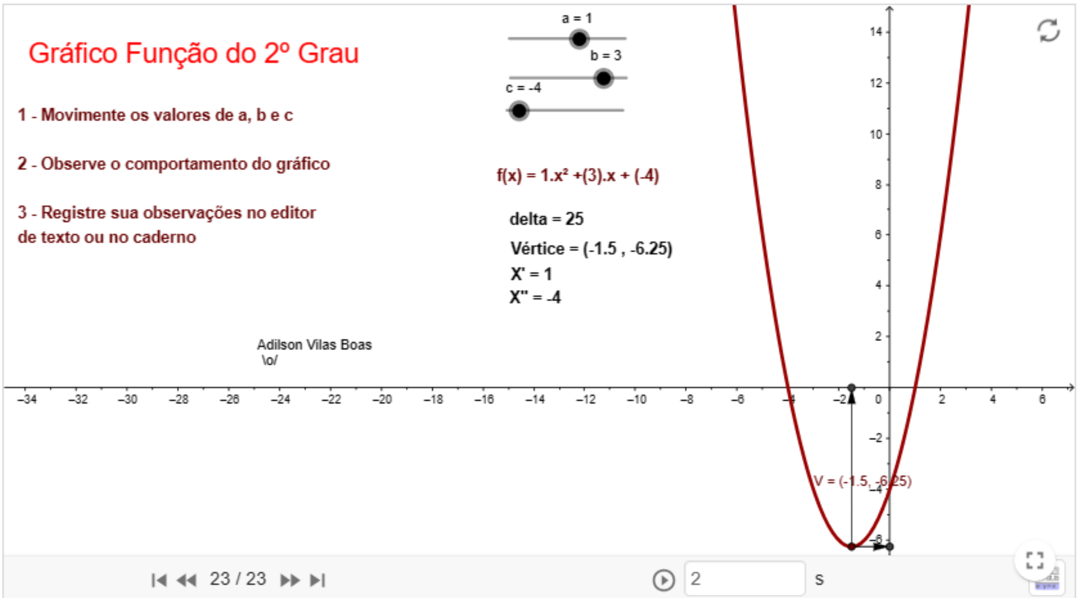
A partir da citação, enfatizamos a importância da tomada de consciência por parte do professor, em sala de aula, organizando seu ensino de modo que este propicie o conhecimento de diferentes representações de um objeto matemático e, além disso, as conversões, já que elas não são naturais, mas essenciais.

Na Figura 4 (página 35) apresentamos uma atividade do *site* do GeoGebra a título de caracterizar as operações cognitivas apontadas por Duval (2003). Se o estudante tem acesso a apenas um registro de representação, isso pode significar uma limitação na sua capacidade de reconhecimento dessas diferentes representações. Portanto, não podemos negar a importância da pluralidade de registros de representação que se apresenta no trabalho dinâmico.

É nesta perspectiva que buscamos analisar algumas atividades do *site* do GeoGebra, no intuito de apresentar aspectos da TRRS essenciais para a aprendizagem e que perpassam as atividades. Na Figura 4, os coeficientes a, b e c aparecem com valores atribuídos como "1", "3" e "-4", respectivamente, e podem variar de "-5" e "5", por exemplo, o coeficiente a quando acionado para movimentar-se percebe-se facilmente que ao trocar o sinal de positivo para negativo a concavidade da parábola se volta para baixo, ao mesmo tempo a equação aparece reformulada com os valores que estão marcados no gráfico. A atividade permite ainda que sejam trabalhados o vértice, raízes e o delta.

A conversão representada pela seta C da Figura 3 - Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização está demonstrada na Figura 4 - Atividade do GeoGebra para estudo da função quadrática e compreende o raciocínio mental perpassando a representação gráfica e a representação algébrica, tendo conhecimento dos tratamentos realizados, seria então o reconhecimento da função quadrática em ambas as representações (gráfica e algébrica) e a relação entre as variáveis existentes em cada representação.

Figura 4 - Atividade do GeoGebra para estudo da função quadrática



Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/VbXTYuPk#material/bvSvr3St>
Acesso em 02 mar. 2024.

Compreender as conversões entre as distintas representações semióticas de um objeto matemático requer discernimento dos estudantes para reconhecimento das unidades significativas que identificam as representações de funções. Sobre isso, Scheffer *et.al*. (2018, p. 37) pontuam que “Cada registro de representação tem um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado e o sujeito se apropria do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracterizam”.

A coordenação de representações semióticas se manifesta pela agilidade e espontaneidade especialmente da tarefa cognitiva de conversão, incluindo as operações de tratamento de cada uma. Envolvendo essas perspectivas é que se iniciam as dificuldades em torno das representações, identificações de unidades significativas e reconhecimentos necessários para a apreensão conceitual de objetos matemáticos. A falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica, é para Duval (1988), a razão dessas dificuldades.

3.4 ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES

As três operações cognitivas fundamentais para Duval na aprendizagem matemática apresentadas anteriormente perpassam todos objetos matemáticos, embora existam distinções e especificidades. Como o foco deste trabalho é o estudo de funções, apresentamos peculiaridades da atividade matemática com funções. De acordo com Duval (1988), existem três abordagens de ensino distintas para trabalhar com representações gráficas, cada uma delas abordando dados visuais diferentes e orientadas para tipos de perguntas diferentes. A primeira abordagem, chamada de ponto a ponto, é usada para introduzir e definir representações gráficas, onde pares de números estão associados aos pontos no plano e vice-versa. Esta abordagem é útil para traçar gráficos de funções, como nas funções do primeiro ou segundo grau, e para ler coordenadas de pontos de interesse.

A segunda abordagem envolve a extensão do traçado feito, sendo mais mental e não adiciona traços explicativos, concentrando-se em um conjunto infinito de pontos potenciais. No entanto, assim como a primeira abordagem, não leva em consideração variáveis visuais relevantes na representação gráfica.

A terceira abordagem, nomeada por Duval (2011) de interpretação global de propriedades figurais, considera a imagem formada pelo conjunto traçado/eixos como a representação de uma expressão algébrica. Qualquer modificação na imagem que altere a expressão algébrica correspondente é considerada uma variável visual relevante para a interpretação gráfica. Essa abordagem é essencial quando se deseja partir da representação gráfica para encontrar a representação algébrica correspondente ou para compreender conceitos como inclinação ou direção. Assim, a interpretação global de propriedades figurais consiste em identificar unidades significativas simbólicas na expressão algébrica e unidades significativas gráficas ou variáveis visuais na representação gráfica e, além disso, transitar entre essas unidades.

De acordo com Duval (1988), resultados obtidos com grupos de estudantes demonstram que a maioria deles, mesmo após receberem instrução sobre a noção de função em nível de Ensino Médio, não consegue distinguir as variáveis visuais significativas nos gráficos, mesmo quando essas variáveis são visualmente distintas umas das outras, nem conseguem relacioná-las com as expressões algébricas correspondentes.

As variáveis visuais para a função afim ($y = ax + b$) são apresentadas por Duval na Figura 5 - Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano:

Figura 5 - Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita. OBSERVAÇÃO*:* a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos.
- os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido.** - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical; OBSERVAÇÃO*:* no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Fonte: Duval (1988, p. 101).

Para cada variável visual corresponde uma unidade significativa na expressão algébrica da reta conforme a Figura 6.

Figura 6 - Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (1988, p. 101).

Em teste de reconhecimento proposto a três turmas na França no primeiro trimestre de 1987, correspondentes ao primeiro ano do Ensino Médio no Brasil, os estudantes foram solicitados a relacionar a expressão algébrica à visualização da reta no plano cartesiano. Dos 105 estudantes, 16 acertaram os cinco itens, um pouco mais de 15% dos estudantes acertaram. Depois que tiveram um ensino sobre a função afim, o teste foi aplicado em duas outras turmas totalizando 60 estudantes e desta vez 14 estudantes acertaram os cinco itens, um pouco mais de 23% dos estudantes. Impressionantemente, estudantes do segundo ano do Ensino Médio, mesmo tendo passado por esta prova apenas 60% deles perceberam a diferença de sentido na inclinação da reta associada à diferença entre $y = x$ e $y = -x$. Para Duval (1988, p. 106), os resultados dos testes "mostram de forma muito forte o fosso que separa a abordagem 'ponto a ponto' da abordagem de interpretação global".

> E sem esta abordagem de interpretação global, não existe utilização de gráficos possíveis para dar um valor intuitivo à expressão algébrica que exprima analiticamente as propriedades geométricas ou, a fortiori, para interpretar gráficos cujos eixos representam grandezas heterogêneas (tempo, distância percorrida, velocidade, etc.). (Duval, 1988, p. 106).

Infelizmente, no ensino, ainda se prioriza a abordagem "ponto a ponto" e se negligencia e/ou não se conhece a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, a qual oferece subsídios para que as conversões ocorram e, desta forma, a aprendizagem.

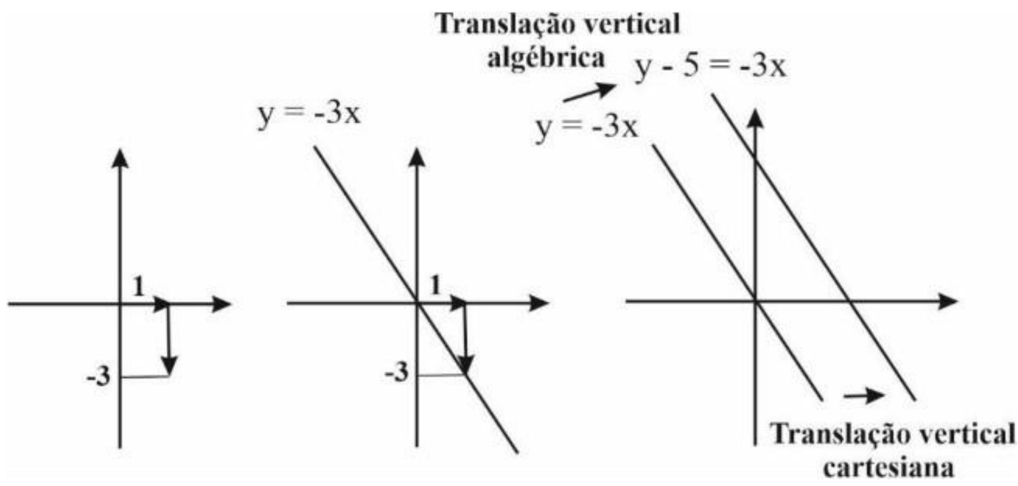
A partir dos trabalhos de Duval, os quais apresentam a abordagem de interpretação global de propriedades figurais por meio do estudo da função afim, pesquisadores vêm destacando essa abordagem e explorando outras funções e recursos de interpretação global.

Moretti (2024, p. 12) explora a função afim na perspectiva da interpretação global a partir da operação de translação, considerando a reta na forma $y - b = ax$, obtida a partir da reta na forma reduzida $y = ax + b$, destacando a possibilidade de observar no plano cartesiano:

- translação vertical de $y = ax$ para cima em b unidades, caso $b > 0$;
- translação vertical de $y = ax$ para baixo em b unidades, caso $b < 0$; e
- no caso em que $b = 0$, a reta se mantém na origem do sistema.

Na figura 7, Moretti (2024, p. 12) esboça o gráfico de $y = -3x + 5$ a partir de $y = -3x$.

Figura 7 - Translação da Função Afim



Fonte: Moretti (2024, p. 12).

Algebricamente, a equação $y = -3x + 5$ é transformada em $y - 5 = -3x$. A reta $y = -\ 3x$ é traçada no plano cartesiano e sofre translação vertical de 5 unidades que transforma $y\ =\ -\ 3x$ em $y - 5 = -3x$ no sistema algébrico, e como visualizado na Figura 7, no plano cartesiano, o deslocamento para cima em 5 unidades.

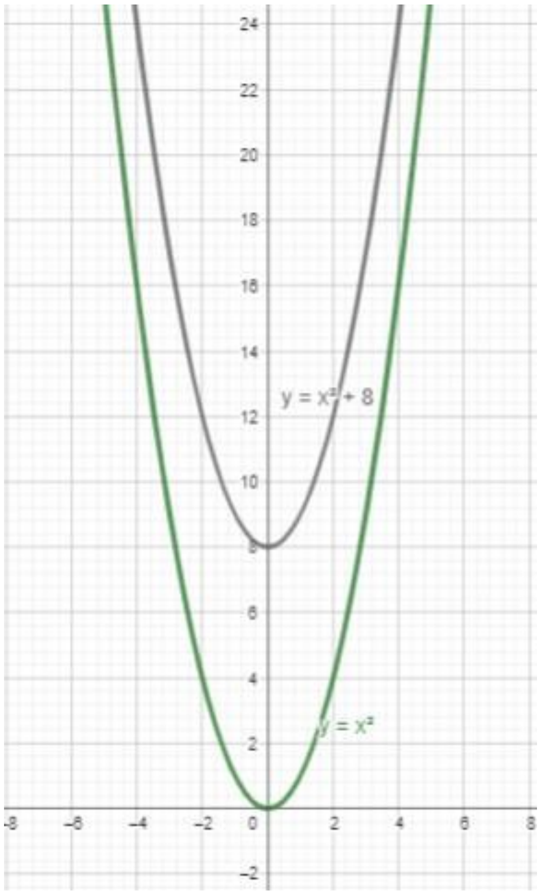
Esse esboço de curvas baseado na translação é diferente da relatada por Duval (1988) analisando as variações dos coeficientes a e b da equação $y = ax + b$ simultaneamente à variação posicional da reta. O problema é o mesmo, as perspectivas são diferentes e nesse sentido Moretti (2024, p. 13) diz que:

> - o uso da translação pode ser facilmente estendido para outras funções ou equações. Equações com mais de dois coeficientes, como é o caso por exemplo das funções quadráticas, o estudo das variações dos coeficientes pode se tornar muito confuso: para o caso de dois coeficientes da reta, Duval (2011A) estudou 18 posições qualitativas diferentes o que tornaria essa análise impraticável para um estudo com três ou mais coeficientes.

A abordagem retomada por Moretti (2024) evidenciando a reta e a função afim a partir da translação, está publicada em Moretti (2003), como possibilidade entre a relação visual de representação e a escrita algébrica da função quadrática utilizando o mesmo recurso: a translação. Conhecendo a forma de uma curva podemos, a partir de seu esboço, utilizando propriedades da curva e a interpretação global das propriedades figurais, proposta por Duval (1988), chegar à representação gráfica de outras curvas semelhantes, por exemplo, "as parábolas com equações gerais do tipo $y = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, b e c constantes reais, podem ser esboçadas a partir de deslocamentos de parábolas com vértice localizado na origem $(y = ax^2)$." (Moretti, 2003, p. 153). Isso possibilitará reconhecer quais modificações na expressão algébrica refletem em modificações na expressão gráfica da curva e vice-versa, o que contribuirá para uma melhor aprendizagem.

Exemplificando, Silva (2008), nos apresenta a translação de $y = x^2$ para $y\ =\ x^2 +\ 8$. Esta expressão algébrica pode ser escrita, sem perda de generalidade como: $y - 8\ =\ x^2$ ou ainda $y - (+8) =\ x^2$, que é obtida graficamente com uma translação vertical de oito unidades para cima da parábola $y = x^2$, ou seja, é uma parábola com mesma abertura, mas com novo vértice no ponto de coordenadas $(0, 8)$.

Figura 8 - Translação da função quadrática $y = x^2 + 8$



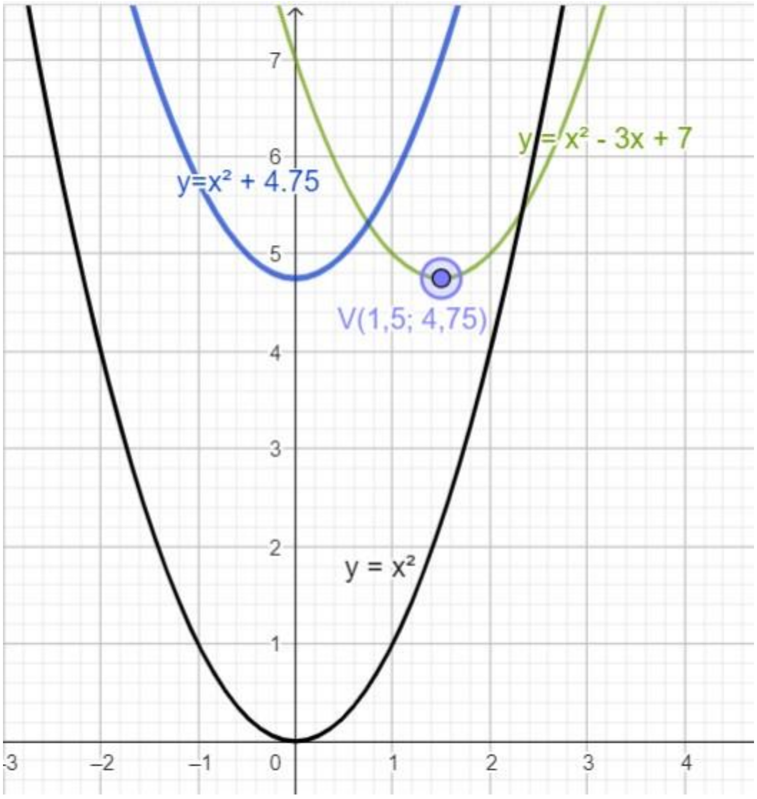
Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 02 jun. 2024.

Utilizando a translação como recurso favorecemos uma relação mais direta entre a expressão algébrica e o esboço da curva no plano como um todo, conforme sugere Duval (1988). A curva não é vista apenas como a ligação de alguns pontos previamente determinados, tendo em vista que os procedimentos utilizados por Moretti (2003) no esboço de parábolas, levam à compreensão da conversão da representação algébrica para a representação gráfica da curva à medida que são identificadas unidades significativas pertencentes às representações e às variações via tratamento algébrico na expressão algébrica, possibilitando assim a identificação das variações de deslocamento (translação) na representação gráfica. Dessa forma, a conversão de um registro em outro não se resume a uma simples codificação.

Como vimos na Figura 8, a translação vertical ocorreu com a movimentação de $f(x) = x^2$ no eixo y para cima e sem movimentar no eixo x pois o valor do x_v mantivemos igual a zero.

Moretti (2003) evidencia a translação com tratamentos na expressão algébrica, vejamos o exemplo de Silva (2008, p. 41), $y = x^2 - 3x + 7$ reescrita com tratamentos para transformá-la em um quadrado perfeito e explicitação do vértice $(y - y_v) = a(x - x_v)^2$ usando a translação para a conversão entre a representação gráfica e algébrica ocorrer:

Figura 9 - Translação da função quadrática $y = x^2 - 3x + 7$



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 16 jul. 2024.

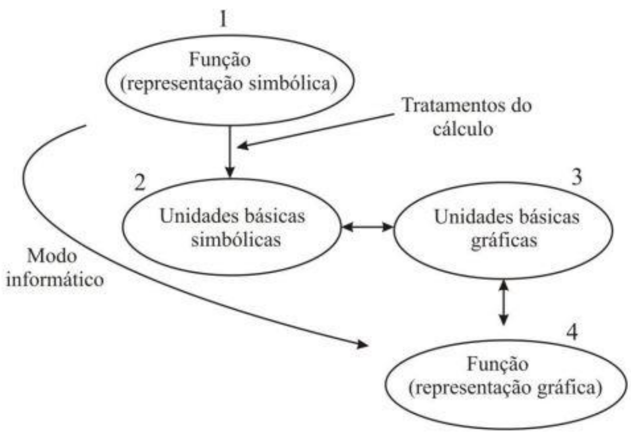
Algebricamente o vértice, conforme visualizado na Figura 9 com o par ordenado $(1{,}5;\ 4{,}75)$ transladou para a direita horizontalmente em $1{,}5$ e para cima verticalmente em $4{,}75$:

$$y = x^2 - 3x + 7$$
$$y = (x - 1{,}5)^2 + 4{,}75$$
$$y - 4{,}75 = (x - 1{,}5)^2$$
$$y - \ +4{,}75 = (x - \ +1{,}5)^2$$

Para estudantes da Educação Básica, aqueles que provavelmente não estudarão derivadas e integrais, a importância em se desenvolver um estudo qualitativo das funções reais se encontra nos problemas do cotidiano ou em problemas das ciências que abordam quantidades variáveis, como o tempo, o lucro, a temperatura, o peso, a população, o preço ou qualquer outra grandeza. Rezende (2007, p. 13) também reforça a ideia que, no exercício da cidadania, não adianta apenas ter conhecimento que “o preço da gasolina vai subir” ou que “as taxas de juros no varejo caíram”. Este exercício envolve também compreender como e o quanto variam as grandezas presentes em problemas cotidianos, ou seja, envolve compreender funções.

O procedimento de marcar o gráfico por pontos em *softwares* e visualizar a função e a representação gráfica não é mencionada por Duval, porém, Moretti e Luiz (2014), ao estudar as funções do Ensino Superior, acrescentaram o caminho informático envolvendo tratamentos do cálculo ao esquema anteriormente apresentado em Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 110) e lembram a rapidez na visualização, na mudança de escalas e/ou parâmetros e chamam essa forma de esboçar curvas de procedimento informático de interpretação global, conforme apresentado no esquema da Figura 10.

Figura 10 - Procedimento informático de Interpretação Global no esboço de curvas no Ensino Universitário



Fonte: Moretti e Luiz (2014, p. 69).

Em funções, a conversão da representação simbólica (1) para a representação gráfica (4) e da representação gráfica (4) para a representação simbólica (1), ocorre facilmente na função afim, já na quadrática nem sempre é viável e nas funções no Ensino Superior é praticamente inexistente essa possibilidade. Por isso, o uso do procedimento informático e de tratamentos do Cálculo, conforme mostra a Figura 10.

Embora nem sempre seja viável, existe a possibilidade de proporcionar e agilizar conversões por meio computacional e com isso, deixar o estudante com tempo para a interpretação e reflexão. Esses momentos são importantes em todos os níveis de ensino pois quando o estudante consegue responder, percebendo que interpretou e entendeu a atividade, sente-se seguro e confiante para explorar e avançar com seus estudos de forma autônoma.

Outro trabalho que reflete o estudo de funções é de Pasa (2017). Perpassando a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, utilizando as taxas de variação de uma função enquanto recurso orientador da articulação de unidades significativas básicas das funções, Pasa (2017) apresenta um caminho alternativo para esboçar e compreender curvas das funções reais polinomiais do segundo (quadrática) e terceiro graus. A mesma abordagem é apresentada para funções trigonométricas por Pasa, Moretti e Binotto (2022), os quais demonstram a possibilidade de discussões sobre as potencialidades e articulação entre unidades significativas das taxas de variação de uma função, compreendidas e calculadas por meio da noção de infinitésimos sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada. Tanto para a função quadrática quanto para as demais funções, entre elas as trigonométricas, a formação das representações e a conversão embasadas pela TRRS oportunizam a aprendizagem.

Na mesma perspectiva em relação à aprendizagem e embasados na TRRS de Duval, Menoncini e Moretti (2020) apresentam a discussão de um elemento que se encontra implícito no estudo da integral definida no cálculo de áreas: a equivalência de regiões planas. Analisando como estudantes usam operações semióticas de tratamento e de conversão para desenvolverem atividades que exploram a equivalência de áreas, foi possível constatar que os problemas envolvendo área requerem a mobilização de múltiplas operações semióticas e que a equivalência de áreas pode ser inserida no estudo da integral definida. As atividades foram planejadas de modo a possibilitar o desenvolvimento de operações semióticas, que se dinamizaram com o uso da ferramenta computacional, indo ao encontro da proposta de Duval (2004). Na aplicação da atividade foi possível concluir que o estudo da integral no cálculo de área requer, entre outros, a mobilização de operações semióticas, as quais auxiliaram os estudantes na compreensão do objeto em estudo. Outrossim, que a temática equivalência de áreas pode ser explorada no ensino da integral.

Esses detalhes envolvendo a TRRS, as TDIC e as funções estão presentes em situações do cotidiano, em diversas atividades, por exemplo:

- o agrônomo ao avaliar a dosagem de fertilizante que possibilita a maior produtividade, observando a restrição por lei de quantidade mínima e máxima;
- numa indústria pode-se avaliar qual o melhor formato de uma embalagem para acondicionar o produto e que tenha o menor custo de produção;
- em treinos de atletas de lançamento de disco, pode-se investigar a altura máxima atingida pelo disco em cada tentativa; e

- o motorista pode estudar a velocidade com a qual deve dirigir o automóvel para que o consumo de combustível seja o menor possível, considerando a velocidade máxima e mínima permitida na estrada.

Dessa forma, o campo de pesquisa é vasto e continuamente são publicados trabalhos científicos que refletem o estudo de funções na perspectiva de interpretação global de propriedades figurais utilizando variados recursos e contextos. Apresentamos aqui, os relevantes para o tema da pesquisa e para a compreensão de como ocorre o processo de aprendizagem da função quadrática que nos ajudaram a definir aspectos da TRRS que foram considerados nas atividades analisadas. No decorrer desse estudo estão ampliadas as discussões acerca das representações semióticas, objeto matemático e sua representação, atividades cognitivas do registro (formação, tratamento e conversão) e a aprendizagem da álgebra segundo Raymond Duval.

4 TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Apresentamos neste capítulo aspectos relevantes sobre utilização das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação - TDIC nas aulas no período de pandemia e as TDIC na Educação Matemática. Vivenciamos e percebemos a cada geração as alterações nas rotinas, que muitas vezes são atribuídas às inovações tecnológicas presentes em praticamente todas as áreas da vida e na Educação se apresentam potencializadas essas percepções, por ser o ambiente onde as próximas gerações estão em formação.

4.1 O PERÍODO DA PANDEMIA DA COVID-19, O ENSINO REMOTO E AS TDIC

Durante a pandemia ocorreu uma adaptação forçada das aulas e a utilização de equipamentos, plataformas e *softwares* para as aulas on-line. A partir dessa aproximação das TDIC, atualmente a maioria dos professores utilizam algum tipo de tecnologia de informação e comunicação em seu cotidiano. Neste sentido, Borba (2022, p. 14) aponta:

> A intensificação do uso de tecnologias digitais na Educação Matemática durante a pandemia foi algo extraordinário do ponto de vista quantitativo. Colegas professores, em todos os níveis, foram forçados, devido ao poder de ação do vírus, a pensar em usar mesas digitais, ambientes virtuais de aprendizagem, redes sociais e vídeos para ensinar.

Na revisão da literatura da pesquisa trouxemos no item 3 do Quadro 1 - Artigos obtidos na revisão bibliográfica o relato de experiência vivenciado durante a pandemia, por meio do *Google Meet*, utilizando o GeoGebra para apresentação dos principais conceitos da função quadrática aos estudantes. A pesquisadora relata a explanação realizada sobre o conteúdo e a participação dos estudantes com perguntas sobre dúvidas, o que possibilitou o registro das interações para a construção do conhecimento utilizando as TDIC. Diante da necessidade vivida, a pesquisa enfatiza o auxílio das TDIC no período de aulas remotas e relembra a necessidade de os professores aprenderem a usá-la.

No cenário mencionado, para a elaboração de planos de aula com as tecnologias, evidenciamos que durante a pandemia foi necessária a utilização e com o passar do tempo está cada dia mais presente a demanda de buscar *softwares* que tenham aplicação para a Educação. Borba (2022, p. 14) apresenta a utilização das TDIC durante a pandemia e registra o alerta “Isso é bom ou ruim? Difícil responder, mas é certo que a situação pandêmica forçou a utilização das tecnologias digitais por todos, praticamente".

Observando os ambientes educacionais e na sociedade contemporânea percebemos que são vivenciadas na realidade as TDIC em todos os ambientes, sendo que diversos recursos, informações, *softwares* e redes sociais fazem parte do cotidiano, o que pode impactar na falta de interesse em métodos de ensino tradicionais. A pandemia, que assolou o Brasil e o mundo no ano de 2020, fez com que, emergencialmente, os professores tirassem as teorias do papel e praticassem o que há anos já era discutido: a educação remota por meio do uso das TDIC. Em termos educacionais, foi necessário adaptar os processos de ensino e aprendizagem de forma a dar continuidade às atividades, uma vez que não se sabia ao certo quando seria possível retomá-las de forma presencial.

Neste sentido, para que fossem enfrentados os desafios e a busca pela continuidade dos processos de ensino e de aprendizagem, a alternativa foi a mediação utilizando TDIC e ambientes virtuais. Ainda que se tenha, de longa data, uma vasta experiência com o ensino a distância, ela existia no âmbito do Ensino Superior. No nível da Educação Básica, a conjuntura estabelecida pelo contexto da pandemia exigiu uma rápida e forçada inovação e adaptação de todos os atores envolvidos no processo educacional, tanto da comunidade escolar, quanto dos responsáveis pelos estudantes.

Pinheiro (2020, p. 1) argumenta sobre o período da pandemia ter sido de "dúvidas, mudanças, projeções, replanejamentos e densas reflexões", marcado pela inovação e reinvenção da prática docente, da gestão educacional, da relação entre família e escola, por exemplo. Dessa forma, especialistas, empresários, gestores, professores e familiares precisaram pensar nos possíveis caminhos da Educação em um cenário pós pandemia, buscando articular o uso das TDIC e da aproximação entre as famílias e as escolas.

Considerando as mudanças deflagradas nas práticas pedagógicas nos últimos tempos e a crescente demanda por professores e aulas diferenciadas, partimos do princípio que a escola é um espaço onde uma formação educacional de qualidade passa pela aquisição de conhecimentos necessários, entendemos que a forma de ensinar Matemática no sentido de construir o conhecimento, também deve ser problematizada.

Inúmeras reflexões e questionamentos quanto à Educação contemporânea partem da perspectiva da modernização dos processos educacionais pela inserção das TDIC como alternativas pedagógicas. Conte e Martini (2015) afirmam que para além dos aspectos técnicos do uso das TDIC em ambiente escolar, existem novos paradigmas sobre a Educação e a afirmação no papel docente que pedem por inovações para que seja possível o aproveitamento dos recursos tecnológicos para a aprendizagem. Conforme argumenta Vasconcellos (2005, p. 31), é necessário “se tocar numa questão delicada: objetivamente, a metodologia expositiva é a mais fácil de ser colocada em prática; seu uso constante, portanto, não deixa de revelar o comodismo do professor […]”

Contudo, a metodologia unicamente expositiva pode não dar conta das questões educacionais emergentes da sociedade contemporânea pós pandemia. No âmbito da Matemática, especificamente, antes da pandemia já tínhamos diversas reflexões e proposições a respeito da importância e relevância do trabalho pedagógico com TDIC, não apenas no sentido de auxiliar a visualização e confirmar conceitos, mas no sentido de construir o conhecimento com e a partir das TDIC.

Durante a pandemia as desigualdades sociais e econômicas foram evidenciadas quanto ao acesso à tecnologia e ao sinal de internet, tanto que em alguns locais foi necessário que o acesso às aulas ocorresse por meio do rádio e da televisão. Ao ensino remoto emergencial foi atribuído várias terminologias, EaD, on-line e remoto, na tentativa de flexibilizar o alcance ao conteúdo e dar andamento às aulas, inclusive o treinamento para uso das plataformas ocorreu de forma on-line. Ficou evidenciada também a necessidade de um canal de comunicação entre professor e estudante buscando zelar pelo aprendizado. Além destas questões, as metodologias foram sendo adaptadas e ganharam espaço as TDIC em ambientes educacionais, observado por Tamashiro (2021), como quebra de paradigma migrando da unilateralidade de comunicação para a multicanalidade entre os professores e estudantes.

Nesse sentido, do que vivenciamos durante a pandemia, houve movimentação da sociedade e órgãos vinculados à Educação para que o acesso à internet e equipamentos atingisse o maior número possível de professores e estudantes. Sendo assim, os materiais criados com fins educacionais, sejam por vídeos, por canais exclusivos institucionais de comunicação, redes sociais entre tantos outros possíveis, nos permite pensar em compartilhamento cada vez maior de conteúdos matemáticos com fácil acesso e inserção em planos de aula.

Na perspectiva de aproximar as gerações com atividades que favoreçam a aprendizagem, temos o alerta de Libâneo (2016) que nos apresenta a seguinte consideração:

> [...] tem urgência a busca de um consenso nacional entre educadores, dirigentes de órgãos públicos, políticos, pesquisadores e sindicatos sobre a valorização da escola, do conhecimento escolar e, por consequência, do trabalho dos professores. São esses os agentes centrais da qualidade do ensino e da educação. Se a educação escolar obrigatória é condição para se formar a base cultural de um povo, então são necessários professores que dominem os conteúdos da cultura e da ciência e os meios de ensiná-los e que usufruam de condições favoráveis de salário e de trabalho,

> bagagem cultural e científica, formação pedagógica, autoestima e segurança profissional.

O consenso mencionado pelo autor, em muitos momentos aparece para a sociedade apenas quando ocorrem manifestações de desgosto pelos professores que percebem a aprendizagem sendo prejudicada. A sociedade acompanha pouco as movimentações políticas que envolvem a Educação, as imposições e as alterações nos projetos educacionais que vem de instâncias superiores, em algumas situações sem a adequada verificação da realidade nas localidades.

Embora sejam vivenciadas na Educação proposições de órgãos regulamentadores superiores que influenciam professores, pois de certa forma são obrigados a seguir modelos pré-definidos, ainda existe a autonomia para os métodos didáticos. Essa possibilidade, foi observada por Ribeiro, Koraleski e Roman (2023, p. 93), enquanto mestrandas do PPGPE, evidenciando a responsabilidade do professor "como formador de cidadãos críticos e conscientes de seus direitos e deveres"

O envolvimento com a realidade local ocorre diante da interação do professor, com os estudantes e a comunidade escolar, e de fato precisa ser levado em consideração para as tomadas de decisões que envolvem as demandas educacionais.

4.2 TDIC, EDUCAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nas últimas décadas, uma importante movimentação envolvendo aprendizagem e formas de ensinar ocorreu a partir da inserção de equipamentos tecnológicos e da internet nas escolas. O Programa Nacional de Informática na Educação – PROINFO, foi criado em 1997 e visa até os dias atuais promover o uso da tecnologia como possibilidade pedagógica em escolas públicas.

Para Kenski (2012), inicialmente as TDIC foram usadas como diferencial para atrair estudantes para as escolas, porém as atividades não complementavam as práticas visando ganho no currículo e interdisciplinaridade. Com o surgimento da internet e a possibilidade de interação com o mundo, as TDIC iniciaram uma trajetória que desencadeou confiança em ambientes escolares, informa-nos ainda, que a maior intensidade para o uso das TDIC tem ocorrido na última década e que o tempo é curto para tantas mudanças e relativamente longo se pensarmos nas defasagens da formação dos professores.

O conservadorismo e a inércia aos poucos precisam ser vencidos, pois além da linguagem oral e escrita, há a necessidade de inclusão da linguagem digital nas propostas metodológicas (Behrens, 2011). A mesma autora relembra os quatro pilares da aprendizagem colaborativa: aprender a conhecer; aprender a fazer; aprender a viver juntos; e aprender a ser; do “Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI” coordenado por Jacques Delors em 1998. Pensando em alternativas para os professores no ensino de Matemática utilizando TDIC, os quatro pilares são o alicerce, pois dessa colaboração e interação com uma prática pedagógica colaborativa forma-se a Educação integral dos sujeitos que trazem da vida, para dentro das escolas suas vivências, refletem e experimentam aspectos nos ambientes educacionais, que levarão para a vida em sociedade.

> [...] a tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes (Gravina; Basso, 2012, p. 13).

De acordo com Borba (2015), a ênfase sobre a importância de formar estudantes com autonomia, capazes de fazer as melhores escolhas, na maioria das vezes, essa demanda é atribuída ao professor a partir da intermediação das TDIC e a formação integral. Segundo o autor (2015, p. 17), as “dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial, para o ensino e aprendizagem de Matemática”.

A caracterização das TDIC na Educação Matemática ao longo dos anos é apresentada por Borba (2015), dividida em quatro fases. A primeira fase é caracterizada pelo uso do *software* LOGO, nos anos 1980 e o Projeto EDUCOM[9] que foi iniciado em 1985 e era voltado ao uso das TDIC na formação de professores. A segunda fase teve início na metade dos anos 1990, com a popularização dos computadores pessoais e o uso de *softwares* voltados às múltiplas representações de funções. Com início por volta de 1999 a partir do advento da internet, a terceira fase permitiu interação síncrona e os ambientes virtuais passaram a oportunizar formação continuada online e à distância. Em meados de 2004, chegou a quarta fase com o advento da internet rápida e acessível. A partir da quarta fase com a comunicação

[9] O Projeto EDUCOM foi iniciado em 1985 e encerrado em 1991. As seguintes universidades faziam parte do Projeto: Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

online e perpassando os conhecimentos entre as fases, foram ampliando-se as possibilidades de utilização de *softwares* em aulas de Matemática.

Em 2020, ocorreu abruptamente uma transformação na relação do uso das TDIC por toda a sociedade e de forma intensa nos processos de ensino e de aprendizagem na Educação Matemática. Para Borba (2022), a pandemia desencadeou a utilização de vídeos ao vivo (*lives*) com interação e indicou o ingresso na quinta fase das TDIC. Segundo Borba (2022, p. 9), "os vídeos podem ser uma forma de avaliar, de expressar Matemática, e mais ainda: ao ser divulgado, ele se torna um participante na produção de conhecimento [...]".

Sobre a quinta fase, vinculada à pandemia, é importante enfatizar que:

> Uma discussão pedagógica sobre o uso das TD em Educação Matemática não pode ser feita sem pensarmos nas imensas desigualdades sociais vivenciadas no Brasil e no mundo. Mais ainda, a quinta fase – cronologicamente associada à pandemia e ao poder de ação do vírus em relação ao uso das TD em Educação Matemática – ocorre num momento de grandes discrepâncias sociais (Borba, 2022, p. 15).

Momentos de incerteza e o receio de falta de procedimentos para enfrentar a explosão de conhecimento advinda do crescimento exponencial das TDIC, para Borba (2022), impactaram os processos de ensino e de aprendizagem matemática, conforme argumentado:

> A participação de tecnologias digitais deixou a combinação de recursos semióticos (O'halloran, 2011) com outro "status" na sala de aula. Agora, por exemplo, uma avaliação que envolva um trabalho com vídeo pode também ser multimodal, ao passo que, antes, uma prova de Matemática validava apenas o escrito em português e na linguagem própria da Matemática (Borba, 2022, p. 25).

As TDIC estão em todos os lugares e podem possibilitar que os estudantes tenham acesso a muitas informações e instrumentos tecnológicos. Esse contato e por saberem manuseá-los com habilidade, aulas interessantes e as possibilidades sendo demonstradas por professores com inserção de *softwares*, jogos, vídeos, passam por modificações nos planos de aula, tratando do mesmo conteúdo, porém com a utilização de laboratórios de informática, vídeos de aulas de outros professores, retroprojetor com projeções e demonstrações. Neste sentido, argumenta Kenski (2012, p. 38) que:

> As novas TICs não são apenas meros suportes tecnológicos. Elas têm suas próprias lógicas, suas linguagens e maneiras particulares de comunicar-se com as capacidades perceptivas, emocionais, cognitivas, intuitivas e comunicativas das pessoas.

As reflexões e possibilidades de mudanças, utilizando TDIC, nos processos de ensino e de aprendizagem tiveram início na década de 90, quando algumas opções de utilização de recursos passaram a auxiliar a exploração de aspectos gráficos e numéricos em aulas de Matemática, no conteúdo de funções. De acordo com Scheffer (2017, p. 30), a integração destes recursos e a interação entre professores, TDIC e estudantes levam a um ambiente que oportuniza "usar, testar ou aprender, tanto os conceitos envolvidos na solução do problema, quanto às estratégias de resolução".

Embora estejamos vivendo a quinta fase de utilização das TDIC na Educação, de acordo com Borba (2022), mesmo sendo possível encontrar nos ambientes escolares algumas opções para a utilização das TDIC em aulas, nem sempre os professores sabem utilizá-las e por estarem envolvidos com muitas demandas e jornadas de trabalho dupla e até tripla optam por seguir com seus planejamentos antigos. Na perspectiva de Moran (2011, p. 32), "passamos muito rapidamente do livro para a televisão e o vídeo e destes para o computador e a internet, sem aprender e explorar todas as possibilidades de cada meio". Essa ideia de 2011 é vivenciada atualmente nas escolas, uma vez que se tem inúmeros recursos, mas sua exploração nem sempre é efetiva.

As crianças, ao iniciarem a vida escolar, e à medida que se integram, passam a compartilhar momentos de entretenimento e estudo utilizando redes sociais. Quando chegam no Ensino Médio, já trazem uma bagagem de conhecimento sobre navegadores, aplicativos, funcionalidades e uma habilidade de uso dessas opções que podem favorecer a aprendizagem. Inclusive, ensinam aos professores opções e alternativas para algumas situações em aula, o que, para muitos professores, é um obstáculo. Sobre isso, Moran (2011, p. 63) aponta que:

> Ensinar com as novas mídias será uma revolução se mudarmos simultaneamente os paradigmas convencionais do ensino, que mantêm distantes professores e alunos. Caso contrário, conseguiremos dar um verniz de modernidade, sem mexer no essencial. A internet é um novo meio de comunicação, ainda incipiente, mas que pode nos ajudar a rever, a ampliar e a modificar muitas das formas atuais de ensinar e de aprender.

Dados do IBGE (2019) mostram que 82,7% dos domicílios brasileiros utilizam internet, porém quando a informação se refere a finalidade do acesso, não aparece, entre os principais itens a relação com estudo ou aprendizagem. O uso da internet ainda está bastante relacionado à comunicação e entretenimento. Em vista disto, Masetto (2011) argumenta que a orientação e a indicação aos estudantes sobre as possibilidades que a internet apresenta para a construção do conhecimento é, sem dúvida, tarefa dos professores. Dialogar, trocar informações, participar, e refletir sobre as alternativas que a internet oferece nos ambientes escolares. Ainda, o autor se refere aos valores éticos, criativos, políticos e sociais, que podem ser abordados pelos professores direcionados aos estudantes na tentativa de orientar para uma formação integral.

O ensino da Matemática dispõe de algumas possibilidades de compartilhamento solidário e gratuito de recursos que se alinham às expectativas deste estudo, entre elas, temos o GeoGebra. Conforme destacado, por Menoncini (2018, p. 211), “O GeoGebra potencializou a aprendizagem à medida que agilizou os cálculos, as construções gráficas, evitando trabalhos tediosos e consequentemente, possibilitando maior tempo aos alunos para análises e interpretações.”

O GeoGebra é um *software* bastante útil para alguns conteúdos matemáticos, a utilização em aula pode, se explorada de forma não apenas para motivar o estudante, mas de fato criar meios de construir o conhecimento, pode melhorar a aprendizagem de funções. A análise realizada por Oliveira (2021, p. 1), reforça essa constatação:

> O aluno gosta do novo, de novidades, e quando o professor busca contribuir com as aulas é certo que a aprendizagem dos alunos só tem a crescer. Cada dia é uma oportunidade de o professor incentivar o aluno a aprender, e sabe-se que o educando só aprende se for motivado a isso.

Novas tomadas de decisões considerando as exigências educacionais levam à implementação de currículos reformulados. Os espaços virtuais compartilhados, como Wikipédia, blogs, *sites*, jogos online trazem toda a força da nova realidade em sociedade e, portanto, a Educação nunca mais será a mesma, nas palavras de Kenski (2012). Isto significa que a Educação deve promover o desenvolvimento de competências diversificadas e flexíveis, capazes de se adequar a complexidade e a dinâmica das sociedades atuais, que estão em transformação constante, em muito, como consequência das inovações tecnológicas.

Atualmente, utilizar TDIC para a aprendizagem matemática está atrelada à necessidade de novas estratégias para instrumentalizar as habilidades que os estudantes precisam para seguir com os seus estudos. Um importante aliado, como abordado na revisão bibliográfica, é o GeoGebra, que apresenta vários recursos, possibilidades e procedimentos que auxiliam professores e estudantes. Num contexto de trabalho com GeoGebra, Oliveira e Brandt (2022, p. 6) salientam que “o professor de matemática passa a assumir a postura de mediador do conhecimento, a partir da elaboração de atividades variadas, oportunizando o desenvolvimento da autonomia dos alunos, considerando a construção e a reconstrução do conhecimento”.

4.3 O *SOFTWARE* GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* educacional gratuito de Matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Ele envolve geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo. Além disso, o GeoGebra oferece uma plataforma online com diversos recursos de sala de aula gratuitos. Segundo Bortolossi, Rezende e Pesco (2016), o criador do GeoGebra, o matemático austríaco e professor Markus Hohenwarter, disponibilizou em 2001, esse importante *software* para ser utilizado em ambiente de sala de aula, permitindo professores, estudantes e pessoas interessadas em Matemática a possibilidade de calcular, explorar, construir, formular, levantar hipóteses e testar conjecturas, entre outras possibilidades. A linguagem é a Java e possibilita estar disponível em várias plataformas, inclusive em Android e iOS, permitindo acesso por *smartphones* facilitando o manuseio e a utilização com praticidade.

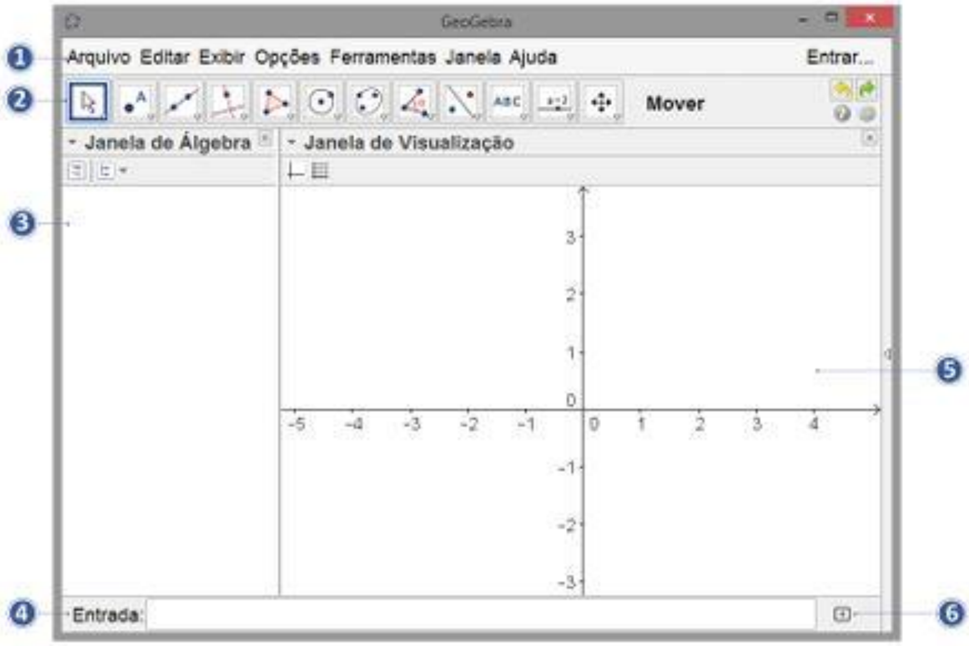
Para Bortolossi (2016), o GeoGebra, oferece por meio de suas múltiplas janelas uma vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si e, assim, podem contribuir para a interpretação das funções quadráticas. A *interface* do GeoGebra permite a visualização simultânea da janela algébrica, gráfica e tabular. Na Figura 11 podemos visualizar a página inicial onde é possível realizar o cadastro ou entrar no sistema, onde também é possível realizar a pesquisa por materiais postados.

Figura 11 - *Interface* inicial do GeoGebra no *site*

Fonte: *Site* do GeoGebra, acesso em 11 set. 2023.

Na Figura 12 a *interface* e janelas algébrica e de visualização do *software* GeoGebra com a indicação e descrição das Barras de Menus e Ferramentas.

Figura 12 - *Interface* e ferramentas



Fonte: *Site* GeoGebra, acesso em 11 set. 2023.

1 Barra de Menus

A Barra de Menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.

2 Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.

3 Janela de Álgebra

Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

4 Entrada

Campo de entrada para digitação de comandos.

5 Janela de Visualização

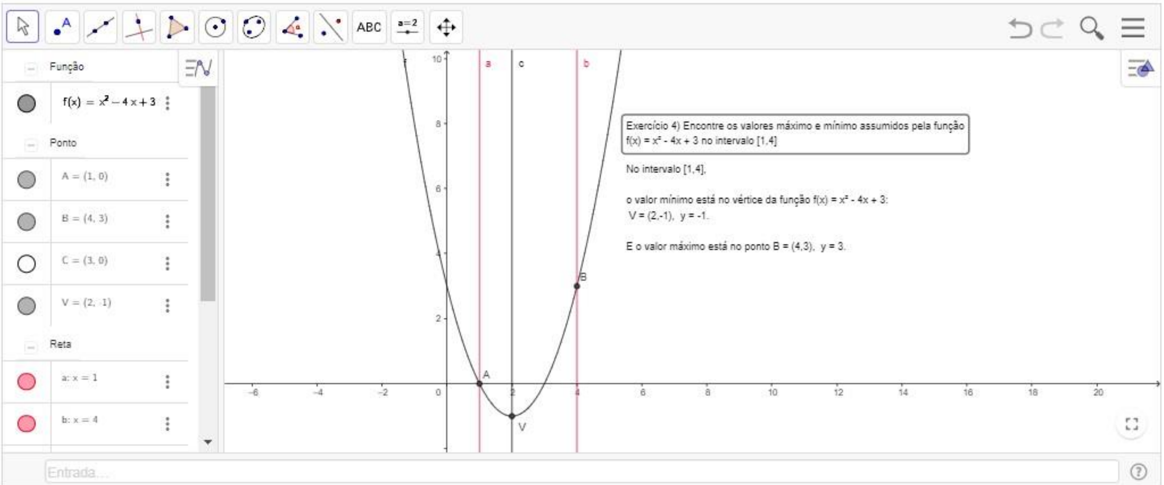
Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.

6 Lista de Comandos

Listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.

A Figura 13 - *Interface* de atividade interativa no computador apresenta uma atividade elaborada com possibilidades de interação entre a janela da álgebra e a janela de visualização juntamente com a representação geométrica de uma função quadrática.

Figura 13 - *Interface* de atividade interativa no computador



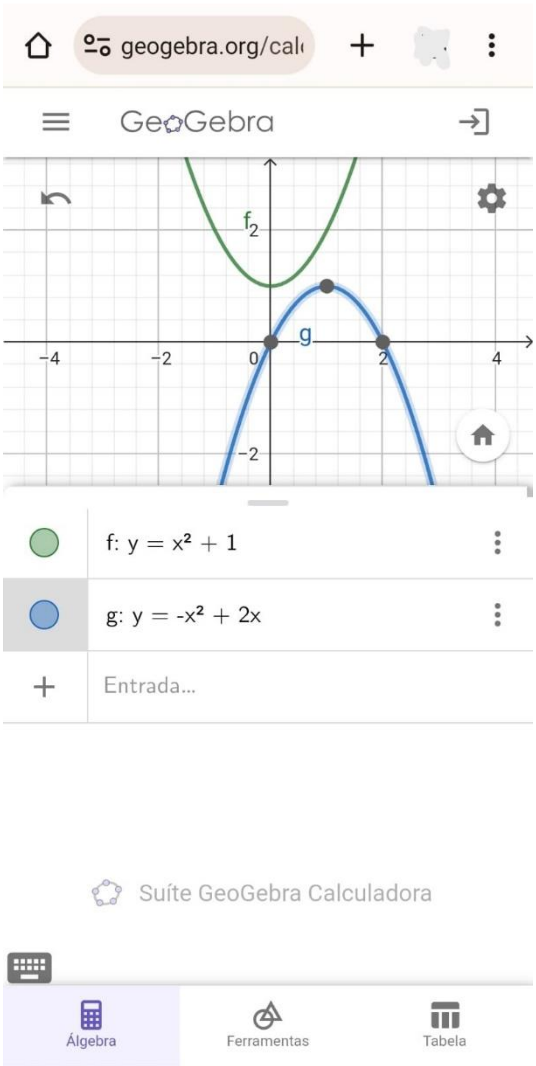
Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/udghtv3h> Acesso em 05 nov. 2023.

Atualmente a maioria dos estudantes possui *smartphone*, o que pode facilitar a utilização do GeoGebra em aulas de Matemática. O uso constante desse aparelho tecnológico, muitas vezes, causa transtornos no andamento das aulas, visto que os professores não têm encontrado uma alternativa para amenizar este problema e em algumas escolas é proibido o seu manuseio durante as aulas. Inevitavelmente, os professores têm a incumbência de transformar esses aparelhos em instrumentos pedagógicos. Porém, para que isso realmente aconteça, é necessário que o professor tenha claro o seu propósito pedagógico e que essa tecnologia seja incorporada em seu planejamento, assim como deve ser para o uso do computador.

Alguns programas governamentais distribuíram *tablets* para as escolas, o que pode possibilitar que todos os estudantes tenham acesso e realizem as atividades em aparelhos móveis, sejam próprios ou cedidos pela escola, ou ainda, realizem as atividades no laboratório de informática, colaborando para estudar e observar como o *software* se comporta nas diferentes plataformas para a mesma atividade.

Grande parte das ferramentas presentes na versão para computador, possíveis de instalação nos sistemas operacionais Windows, Mac e Linux, também estão disponíveis para aparelhos móveis, como *smartphone* e *tablet*. Os controles deslizantes e as demais ferramentas são de fácil manuseio pelo *touch screen*, um tipo de tela sensível ao toque, que possui um *display* eletrônico visual que detecta a presença do toque pela pressão. O usuário de um dispositivo que contenha essa tecnologia pode utilizar os seus próprios dedos ou contar com uma caneta especial, o que é bastante comum em *tablets.* Na Figura 14 - *Interface* do GeoGebra em *smartphones* e *tablets* temos a imagem do GeoGebra visualizado na tela de *smartphone*.

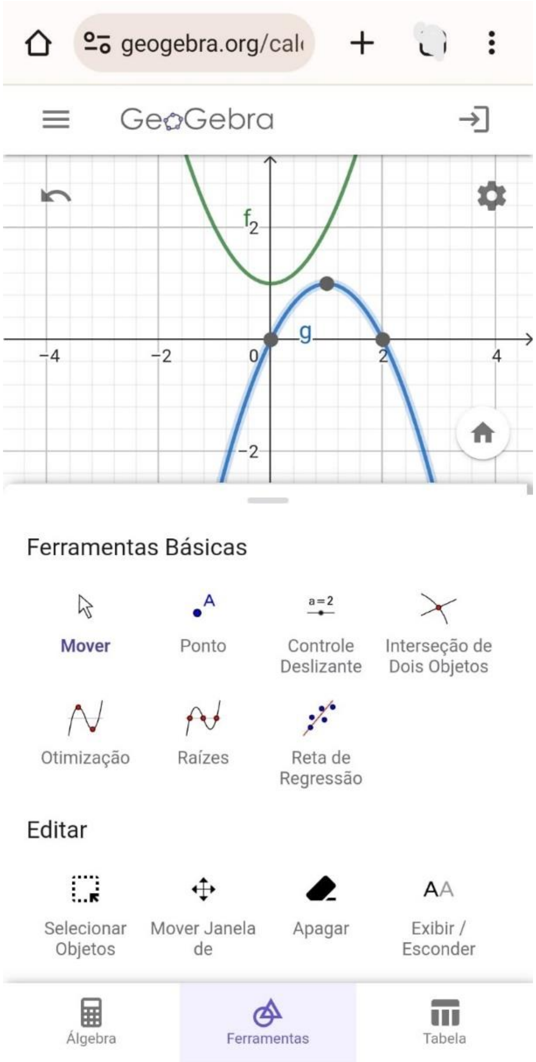
Figura 14 - *Interface* do GeoGebra em *smartphones* e *tablets*



Fonte: *Site* do GeoGebra, em 11 set. 2023.

Na Figura 15 - *Interface* do GeoGebra em *smartphones* e *tablets* – ferramentas básicas-*Interface* do GeoGebra em *smartphones* e *tablets* – ferramentas básicas visualizamos a *interface* ou superfície de contato com as ferramentas básicas, ao realizar-se o movimento dos dedos para a tela ampliar ou reduzir é possível visualizar em tamanho maior uma determinada ferramenta e explorar as demais ferramentas disponíveis no *software*.

Figura 15 - *Interface* do GeoGebra em *smartphones* e *tablets* – ferramentas básicas



Fonte: *Site* do GeoGebra, em 11 set. 2023.

Para o estudo de funções quadráticas, a visualização da escrita algébrica juntamente com a representação gráfica, propiciadas pelo GeoGebra, possibilita que aspectos da TRRS venham à tona no ensino contribuindo com a aprendizagem matemática. Partimos da premissa que, devido às características dinâmicas do Geogebra, estudar a função quadrática pode oportunizar um ensino com base na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, o que para Duval (1988), é essencial para aprendizagem de funções. Contrário a isso, o que se tem no ensino é uma visão estática da ideia de função, constante na maioria dos livros didáticos, em que há a priorização da passagem do registro de representação algébrica para a representação gráfica por meio da construção "ponto a ponto", ocasionando obstáculos à aprendizagem da função quadrática.

Por outro lado, nos resultados apresentados nas pesquisas de revisão da literatura, a respeito das interpretações gráficas, a intervenção com o GeoGebra foi contribuição significativa para o ensino do conceito de função quadrática. Em linhas gerais, o *software* pode oportunizar aos estudantes a visualização de função quadrática, o que seria capaz de aumentar o interesse dos estudantes, favorecendo a compreensão do conteúdo: construção do gráfico de funções quadráticas, identificação dos coeficientes compreendendo o significado geométrico; identificação da concavidade, quantidade de raízes e os pontos de máximo e mínimo da função.

Dessa maneira, entendendo que as TDIC, a Matemática e a aprendizagem podem estar conectadas e evoluindo intencionalmente para uma sociedade colaborativa e mobilizada em ações globalizadas, elaboramos uma Proposta de Ensino (Produto Educacional) para o estudo da função quadrática, considerando a TRRS de Raymond Duval e o GeoGebra.

Para que a comunicação seja leve e interativa entre estudantes e professores é necessário interesse pelo momento em que se está junto e construindo o conhecimento. Por acreditar que as TDIC podem favorecer a comunicação e trazer melhoras significativas para o ambiente escolar será muito produtivo indicar uma possibilidade de transformação das aulas expositivas para aulas com utilização do GeoGebra na aprendizagem da função quadrática.

A seguir, apresentamos a metodologia da pesquisa.

5 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Marconi e Lakatos (2022, p. 2) não distinguem o conhecimento popular do conhecimento científico pela veracidade ou pela natureza, mas, afirmam que o que faz diferença é a forma, o modo ou o método e os instrumentos do "conhecer". Diante disso, a fim de responder à questão: **Que possibilidades a Teoria dos Registros de Representações Semióticas oferece para o ensino da função quadrática no GeoGebra?** utilizamos como metodologia, a perspectiva qualitativa.

Na pesquisa qualitativa, destacam Marconi e Lakatos (2022, p. 296), "os dados vão surgindo com o desenrolar da pesquisa", e o resultado é flexível, reflexivo e aberto à aceitação de tendências. Além disso, Gil (2021, p. 16), enfatiza a:

> ...natureza socialmente construída da realidade, o relacionamento íntimo entre o pesquisador e o que é estudado, além das restrições situacionais que moldam a investigação. Os pesquisadores qualitativos reconhecem que a investigação é permeada por valores e buscam respostas para perguntas que enfatizam como a experiência social é criada e ganha significado.

Ainda, segundo Flick (2009), a pesquisa qualitativa tem como aspecto central a escolha das teorias convenientes para análise e embasamento teórico do Produto Educacional e o reconhecimento e consideração das diferentes perspectivas acerca do objeto de estudo. Assim, essa pesquisa utiliza a revisão da literatura, enunciada por Marconi e Lakatos (2022, p. 296), para que "seja justificativa para a formulação e necessidade do estudo".

Temos, desta forma, uma pesquisa qualitativa, com dados coletados por meio de pesquisa bibliográfica, observação e exploração sobre as características da função quadrática e aspectos da TRRS observados em atividades do GeoGebra que foram analisados e registrados. Elaborada com o propósito de fundamentar teoricamente, na pesquisa bibliográfica, segundo Gil (2022), utilizamos como base materiais publicados no *site* da CAPES, bem como materiais disponibilizados pela Internet em Repositórios Digitais de Universidades, Institutos Federais, Grupos de Estudo, *ebooks*, *sites* de Eventos e livros impressos. Temos ainda em Gil (2022, p. 44), a afirmação de que:

> Praticamente toda pesquisa acadêmica requer em algum momento a realização de trabalho que pode ser caracterizado como pesquisa bibliográfica. Tanto é que, na maioria das teses e dissertações desenvolvidas atualmente, um capítulo ou seção é dedicado à revisão bibliográfica, que é elaborada com o propósito de fornecer fundamentação teórica ao trabalho, bem como a identificação do estágio atual do conhecimento referente ao tema.

Para tal, o caminho metodológico possibilitou subsídios teóricos que fundamentaram as reflexões e construções a partir da "realização de uma revisão exploratória, que teve como propósito identificar o que existe na literatura acadêmica em termos de teoria, evidências empíricas e métodos de pesquisa relativos ao tópico e às questões de pesquisa" (Gil, 2021, p. 66). Durante as etapas e à medida que os dados foram sendo coletados e analisados, o avanço aconteceu com atenção voltada à relevância da pesquisa, retornando ao embasamento teórico ao longo das análises e na elaboração do Produto Educacional.

Diante dessas questões, sendo o objetivo geral deste trabalho **a investigação de aspectos cognitivos em atividades de função quadrática no GeoGebra na perspectiva da elaboração de uma Proposta de Ensino** (Produto Educacional), a pesquisa bibliográfica permitiu elencar aspectos fundamentais da função quadrática, do *software* GeoGebra e da TRRS. A partir disso, atividades já prontas do *site* GeoGebra foram analisadas e construídas atividades autorais, apresentando, assim, possibilidades de ensino embasadas na Teoria de Aprendizagem e que podem levar à conversão e à aprendizagem conceitual.

A coleta e organização dos dados (atividades) perpassou as três fases da Análise de Conteúdo de Bardin (2016), a saber: pré-análise; exploração do material; tratamento das informações a partir das inferências e interpretações denominado interpretação inferencial.

Assim, a pré-análise consistiu no referencial teórico utilizado para a pesquisa e no levantamento de constatações a partir desse referencial. No âmbito da pré-análise, foram organizados e a preparados os materiais da pesquisa, iniciados com textos indicados pelos professores do PPGPE durante as aulas das disciplinas e com leituras aleatórias. A revisão bibliográfica foi realizada no *site* da CAPES, onde buscamos documentos com palavras relacionadas aos nossos interesses. Na sequência, após a leitura dos arquivos retornados, buscamos complementarmente em livros impressos e em alguns repositórios de Universidades e Institutos Federais por publicações que tivessem relação com a TRRS, o GeoGebra e à Matemática.

Na segunda fase da Análise de Conteúdo, nomeada exploração do material, as atividades do *site* do GeoGebra foram analisadas a partir de um protocolo, apresentado no item 5.2 deste capítulo, no Quadro 3, na perspectiva de Creswell (2010 e 2013), contendo os aspectos emergentes da pré-análise relacionados ao conteúdo de função quadrática e às atividades cognitivas essenciais para sua aprendizagem de acordo com a TRRS. Conforme este autor, "algumas formas de dados qualitativos podem ser decididas antes de um estudo ser iniciado e outras vão emergir durante o estudo" (Creswell, 2013, p. 161).

A última fase da Análise de Conteúdo refere-se ao tratamento dos resultados, às inferências e interpretações. Desse modo, nessa pesquisa, a terceira fase perpassou a elaboração de inferências, averiguando a TRRS nas atividades sobre o conteúdo função quadrática utilizando o GeoGebra e a construção da Proposta de Ensino que envolve os aspectos explorados nas fases anteriores.

5.1 ASPECTOS EMERGENTES DA PESQUISA BIBLIOGRÁFICA – PRÉ-ANÁLISE

A partir dos estudos realizados na pré-análise, foi possível elencar aspectos importantes que estão nas atividades prontas e na elaboração da Proposta de Ensino (Produto Educacional) no formato de “livro”, com o título “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS”. Esses aspectos referem-se ao conteúdo de função quadrática, ao *software* GeoGebra e também à TRRS.

5.1.1 Aspectos relativos à TRRS

Representação algébrica

Definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e, no GeoGebra, sendo a, b e c controles deslizantes que, ao serem movimentados apresentam os novos valores para os coeficientes. Assim, as unidades significativas no caso da expressão $y = ax^2 + bx + c$ são os coeficientes a, b e c, que, ao terem seus valores alterados, possibilitam a visualização de unidades significativas gráficas, relativas à concavidade, eixo de simetria à esquerda ou à direita do eixo y e valor onde intercepta o eixo y, respectivamente.

Outra possibilidade de recurso de interpretação global para a função quadrática é encontrada em Moretti (2003), o qual propõe tratamentos e a utilização da equação reescrita, associada com $y = ax^2$ onde $a \neq 0$, na qual o vértice da parábola ($V(x_x, y_v)$) fica explícito. A partir dessa representação o gráfico pode ser traçado no plano cartesiano de modo significativo, pois evidencia o par ordenado que são as unidades significativas do vértice com a translação. Segundo Brandt e Búrigo (2022, p. 8) essa alteração é do tipo:

$y = ax^2 \Rightarrow y + \frac{b^2-4ac}{2a} = a\left(x - \frac{b}{a}\right)^2$, que equivale a: $y - y_v = a(x - x_v)^2$.

Representação gráfica

Com os controles deslizantes sendo movimentados os valores na visualização da parábola demonstram a movimentação no plano cartesiano para os eixos x e y, vértice, concavidade e abertura da parábola.

Representação tabular

Também conhecida como abordagem ponto a ponto, para Duval, não permite a conversão da tabela para o par ordenado no gráfico por ser desenvolvida de forma mecânica. Dessa forma, seria uma simples codificação dos pontos no plano cartesiano associado aos pares ordenados. Mesmo sendo assim, tem aspectos que necessitam estar presentes na intermediação do ensino da Matemática por ser ainda a abordagem mais utilizada em aulas de Matemática.

Tratamentos

São as modificações realizadas dentro de cada registro de representação. Como exemplo, temos a resolução da equação do segundo grau, para cálculo das raízes da função quadrática e os caminhos para encontrar o vértice de uma parábola, um deles a seguir exemplificado:

$$y = x^2 + 2x - 3$$
$$y = (x^2 + 2x + 1) - 4$$
$$y + 4 = (x + 1)^2 \quad \rightarrow \quad V(-1, -4)$$

Conversões

Operação cognitiva essencial para aprendizagem de acordo com Duval. No caso das funções quadráticas, as conversões ocorrem a partir da coordenação entre representações semióticas. Para tal, faz-se necessário identificar unidades simbólicas da expressão algébrica e unidades visuais, relativas ao gráfico, coordenando-as. Essa coordenação pode ocorrer, no caso da expressão $y = ax^2 + bx + c$ a partir dos coeficientes a, b e c, e visualmente o que esses influenciam no gráfico e vice e versa. Aí o recurso de interpretação global são os coeficientes da expressão algébrica. Mas, pode ocorrer também no caso da expressão $y - y_v = a(x - x_v)^2$, em que as unidades simbólicas são as coordenadas do vértice $V(x_x, y_v)$ e visualmente, a translação que ocorre quando o vértice é alterado. Assim, o recurso de interpretação global é a translação.

Para tal, é preciso a compreensão sobre:

- *Unidades significativas algébricas* como sendo a identificação das unidades significativas no registro de representação e que serão submetidas a variações, por sua vez provocam modificações nas unidades significativas do registro correspondente. No caso da expressão $y = ax^2 + bx + c$, movimentando o coeficiente a para valores maiores ou menores observa-se no gráfico a abertura aumentando e diminuindo e até mudando a concavidade, portanto o coeficiente a é uma unidade significativa algébrica que implica em alteração na representação gráfica. O valor do coeficiente c é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y do plano cartesiano e desta forma também é unidade significativa.

- *Unidades significativas gráficas*, na representação gráfica temos características da função quadrática apresentadas no plano cartesiano. Com a coordenação das unidades significativas é possível visualizar na representação algébrica e gráfica os mesmos elementos.

Em representações gráficas estão as unidades significativas gráficas também nomeadas como variáveis visuais em alguns textos. Por exemplo, o coeficiente c interceptando o eixo y, sendo uma unidade significativa gráfica. Outra possibilidade é com a translação mostrar uma parábola semelhante com um novo vértice e esse ponto será a unidade significativa gráfica da parábola presente na representação algébrica, após a realização de tratamento.

Os aspectos da teoria supracitados foram evidenciados no Quadro 3 - Protocolo com aspectos emergentes que serão analisados (página 72) informando sobre os recursos de interpretação global, presentes nos livros do GeoGebra. Esses recursos foram identificados desta forma por conterem as atividades com características da função quadrática, contemplarem atividades cognitivas e relacionarem-se com situações do cotidiano. Em Duval (2009, p. 81) temos que "Esta 'utilidade' da variedade de registros de representação é um dado fundamental e trivial que ninguém contesta".

Sob esse foco, a variedade se refere às atividades cognitivas envolvendo um sistema semiótico cognitivamente criador com a identificação das operações, ou possibilidades, de produção de representações algébricas, gráficas e o uso de tratamentos. Além disso, conforme apresenta, Duval, (2009, p. 98), "a coordenação dos diferentes registros de representação ligados à objetivação ou ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo no decorrer de um ensino que mobiliza essa diversidade de registros".

5.1.2 Aspectos relativos à função quadrática em atividades do GeoGebra

Aspectos da TRRS estiveram presente em todos os momentos da pesquisa. A busca por atividades prontas de função quadrática no *software* GeoGebra iniciou em 10/08/2023, selecionando o buscador “qualquer tipo de material”, com o termo “teoria dos registros de representação semiótica” sendo que o sistema não retornou atividades. Mudamos o termo para “Raymond Duval” e selecionando o buscador “qualquer tipo de material” retornando, assim, 04 atividades sobre o conteúdo de “transformações lineares planas” postada por Sérgio Fiorentino da Silva como contribuição para a aprendizagem e 01 livro sobre “Polarização da Luz” postada por Davy Dias Andrade como resultado do TCC de Licenciatura em Física. Ou seja, nenhum deles sobre a função quadrática.

As atividades encontradas no GeoGebra sobre transformações lineares possuem objetivos e indicam a intenção de interação nas aulas de forma interdisciplinar voltada para a computação. O livro sobre polarização da luz envolve conteúdos de física, possui sequência para o ensino e a aprendizagem. Embora ambos apresentem aspectos para a aprendizagem cognitiva e mencionando Raymond Duval, não se relacionam aos objetivos dessa pesquisa, e não constam na lista de atividades analisadas.

Reduzimos o número de palavras e utilizamos “teoria dos registros” e retornou as mesmas atividades quando foi utilizado o termo “Raymond Duval” e mais uma atividade que traz a postagem de um artigo sobre livros dinâmicos de Matemática, publicado por Nóbriga e Sipler (2020, p. 79) “evidenciando as características que tais livros precisam conter para serem considerados como dinâmicos”.

Visualizando e identificando aspectos da TRRS nas atividades postadas, realizamos uma busca no *site* GeoGebra em 24/08/2023 com o termo “função quadrática” em “qualquer tipo de material” retornou da busca mencionada um número incontável de atividades. Mantendo o termo “função quadrática” e selecionando a opção “livros” retornou 37 postagens. Optamos por realizar a descrição dos 10 primeiros livros e de 01 livro que não estava entre os 10, mas que aborda sobre translação e função quadrática.

No Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra descrevemos as características dos livros encontrados no GeoGebra, tendo em mente os conteúdos que geralmente constam nos livros didáticos e são trabalhados em sala de aula sobre a função quadrática. Souza (2020, p. 9), nos diz que:

> Representar as funções quadráticas [...], no plano cartesiano a partir de sua representação algébrica, e vice-versa, colabora para ampliar a capacidade de pensar matematicamente, uma vez que são definidos e utilizados diferentes ferramentas e argumentos para realizar as conversões entre essas representações, além de conceitos, propriedades matemáticas, entre outros.

O autor apresenta no livro didático, disponibilizado a partir do PNLD aos estudantes de escolas públicas, definição da função quadrática, concavidade, onde intercepta o eixo y, onde intercepta eixo x (zeros da função), abertura da parábola, eixo de simetria, construção do gráfico (ponto a ponto), vértice, valores máximo e mínimo, estudo do sinal, expressão algébrica, situações do cotidiano e atividades com o GeoGebra. Embora esteja mencionado pelo autor a palavra "conversões", o conteúdo e as atividades do livro necessitam de intermediação do professor, pois apresentam questões para a aprendizagem acontecer com perguntas e espaços para a escrita sobre o objeto matemático. Apresenta a utilização do GeoGebra com uma sucinta explicação. As atividades poderiam ser exploradas pelo estudante individualmente, porém, para acontecer em ambiente escolar com toda a turma, depende de estar previsto no plano de aula do professor.

As características apontadas em 5.1.1 e 5.1.2 foram observadas para a elaboração do Quadro 2.

Quadro 2 - Descrição das atividades dos "livros" postados no GeoGebra

(continua)

Livro	*Link* e autores	Descrição
Livro 1	https://www.geogebra.org/m/VbXTYuPk Tainara e Robson	Atividades com frases para movimentar os controles deslizantes, observando e registrando o que acontece com a figura geométrica e os valores modificando na representação algébrica da função, vértice, raízes possibilitam conhecer características da função quadrática. Vídeos com tratamentos sendo realizados para encontrar as unidades significativas da função quadrática e a representação tabular.
Livro 2	https://www.geogebra.org/m/hTVqqj4a mpr.mauricio07	Apresentação com texto das características da função quadrática, coeficientes, raízes, delta e na última página a função $f(\mathrm{x}) = 1.5(\mathrm{x} - 2.8)^2 - 2.5$ com interação dos coeficientes entre a representação algébrica e gráfica.
Livro 3	https://www.geogebra.org/m/u9yahvhb Adenilson Sousa da Rocha	Coeficientes da função quadrática apresentada como $f(x) = ax^2 + bc + c$ ou $y = ax^2 + bc + c$ com a visualização e definição dos coeficientes no plano cartesiano.
Livro 4	https://www.geogebra.org/m/tGZ7Zjju amandha e jordana	Definição da função quadrática, coeficientes da expressão algébrica $y = ax^2 + bx + c$, raízes e aplicações.
Livro 5	https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r Thais de Carvalho Jorge Cássio Costa Nóbriga	TCC de Licenciatura em Matemática da UFSC. Textos e questões que proporcionam reflexão. Atividades descritivas, interativas e vídeos do canal do orientador Prof. Jorge Cassio. As atividades contemplam definição, pontos

		importantes do gráfico, vértice, imagem, estudo do sinal e problemas envolvendo a função quadrática. As diferentes representações e o reconhecimento do mesmo objeto nelas oportuniza a conversão.
Livro 6	https://www.geogebra.org/m/pgtubaFG Bruno & Arthur & Igor	Uma foto de uma parábola ($a < 0$), apresentada de forma estática, não oportuniza identificação de unidades significativas e embora o perfil dos autores apresente mais atividades, as mesmas não constam no “livro”.
Livro 7	https://www.geogebra.org/m/v5jvvfDx Lais Garda	Atividades que apresentam as representações gráfica, algébrica e tabular com textos e imagens, vídeo do youtube e atividades com aplicações do cotidiano.
Livro 8	https://www.geogebra.org/m/h2kJyZYu Luiz Geraldo da Silva	A atividade interativa possui várias caixas de seleção e ao serem marcadas apresentam os tratamentos e as representações gráficas, algébricas e tabular. Três problemas estão postados relacionando a parábola e cálculo de área. Com intermediação é possível trabalhar e relacionar com situações do cotidiano.
Livro 9	https://www.geogebra.org/m/Y2sMD9tM Helena e Fernanda	Explicação inicial apresentando a função quadrática e vídeo do youtube mostrando tratamentos. Texto mencionando a aplicação em antenas parabólicas, fogões solares, os estudos de balística e aplicações na economia.
Livro 10	https://www.geogebra.org/m/P4HYsknV Éverly e Guilherme	Textos apresentando a função quadrática e atividade que proporciona a visualização dos coeficientes alternando entre -5 e 5, as raízes, o y_v e o x_v juntamente com a equação e o valor do delta (Δ) simultaneamente com a figura geométrica, parábola movimento no plano cartesiano.
Livro 11	https://www.geogebra.org/m/etgmwu5x Lúcia Maria Santos	Translação – Atividades propostas por licenciandos em Matemática IFFluminense sob a orientação da Profa. Lívia Azelman de Faria Abreu. Por meio dos coeficientes a, h e p dispostos em controles deslizantes é possível evidenciar na parábola o coeficiente a agindo na expansão e contração da parábola (Transformação do tipo $f(x) = ax^2, a \in IR^*$), o coeficiente h no deslocamento horizontal (Transformação do tipo $f(x) = (x + h)^2, h \in IR^*$) e o coeficiente p no deslocamento vertical (Transformação do tipo $f(x) = x^2 + p, p \in IR^*$) para estudo das transformações da função quadrática. O arquivo de extensão pdf com resumo e apostila de atividades pode ser baixado para utilização em aulas.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

A interação com as atividades dos 11 livros do GeoGebra nos permitiu a constatação que em todos os eles aparecem características algébricas e gráficas evidenciando a possibilidade em utilizar as TDIC para auxiliar na visualização da função quadrática, no ensino e na aprendizagem. Com os comandos do GeoGebra e os controles deslizantes para os coeficientes a, b e c da expressão $y = ax^2 + bx + c$ é possível visualizar simultaneamente a expressão algébrica e o gráfico. A representação tabular, que geralmente é utilizada para o esboço da curva na abordagem “ponto a ponto” em sala de aula, é explicitada em algumas das atividades do

GeoGebra, embora ela seja realizada em todas pelo *software* que apresenta a figura geométrica parábola traçada instantaneamente no plano cartesiano.

Nos livros do Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra identificamos as características da função quadrática e possibilidades sobre a compreensão do objeto matemático a partir das suas diferentes representações. As atividades apresentam, por exemplo, unidades significativas na expressão algébrica, coeficientes a, b e c, evidenciando unidades significativas do vértice. Em alguns livros do GeoGebra constam questões, atividades, resumos, *links* para outros *sites* sobre as transformações gráficas da função quadrática.

5.1.3 Observações sobre os “livros” a partir da TRRS

Na análise dos livros do GeoGebra constante no Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra, observamos a utilização da representação algébrica $y = ax^2 + bx + c$ com os controles deslizantes para a, b e c. O estudante pode acessar a atividade e mover os controles deslizantes e assim será possível coordenar unidades simbólicas e variáveis visuais. Embora isso permita as conversões, cabe ao professor explicitar, enquanto mediador do ensino e da aprendizagem essa intenção realizando a elaboração de atividades e análise das interpretações e raciocínio dos estudantes. Ressaltamos a importância dessa compreensão envolvendo a coordenação entre representações semióticas distintas e que a mesma precisa estar nos planos de aula e nas intenções do professor com atividades envolvendo a aprendizagem cognitiva.

A representação tabular, apesar de não estar explícita em grande parte das atividades dos livros, ela pode ser desenvolvida em sala de aula a fim de se fazer uma retomada de conhecimentos dos conteúdos que antecedem a função quadrática, inclusive em assuntos básicos da Matemática como radiciação, frações, soma e multiplicação com valores positivos e negativos. Embora a abordagem ponto a ponto, a qual faz uso da representação tabular, não permitir o trânsito entre as representações algébricas e gráficas e ser desenvolvida de forma mecânica, ainda assim ela é trabalhada em sala de aula e atende algumas demandas do ensino de Matemática.

Nesse sentido, o Livro 8 apresenta conforme as Figura 16 e 17 o desenvolvimento dos cálculos (tratamentos) para a definição das raízes e pares ordenados de pontos na função, os quais com mediação do professor, são instrumentos para retomada de conhecimentos que subsidiam a aprendizagem da função quadrática. Os tratamentos aparecem na atividade realizados pelo *software* e podem servir de exemplo para desenvolvimento de outras atividades do objeto abordado.

Figura 16 - Cálculo das raízes

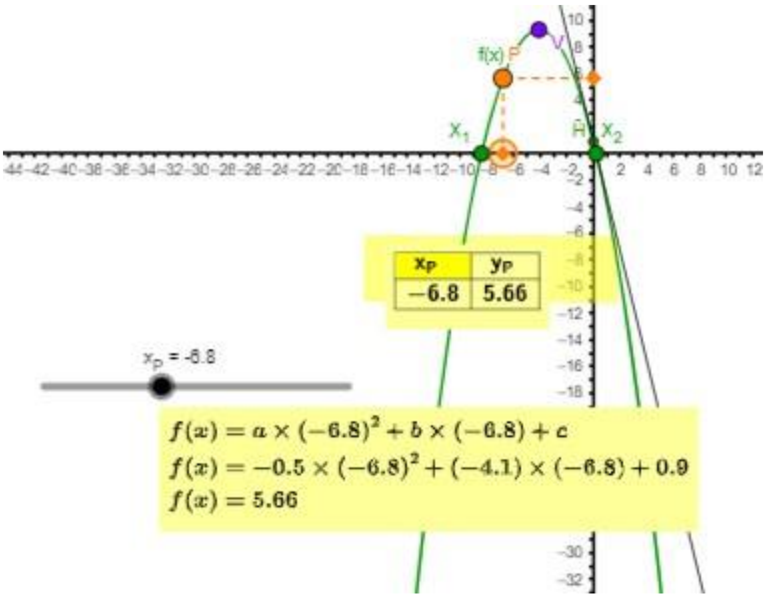
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4.1)^2 - 4.(-0.5).(-2) = 16.81 - (4) = 12.81$$

$$\begin{array}{c} \Delta > 0 \\ \textit{Há 2 raízes reais} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4.1) + \sqrt{12.81}}{2.(-0.5)} = -7.6791 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4.1) - \sqrt{12.81}}{2.(-0.5)} = -0.5209 \end{cases}$$

Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/h2kJyZYu#material/xPFKwwuw>
Acesso em 26 abr. 2024.

Do mesmo modo, ao selecionarmos na tela a opção Ponto na Função os cálculos surgem ao mesmo tempo em que o ponto é movimentado sobre a figura geométrica ou com o deslocamento do controle deslizante x_p para valores entre -30 e 30 no eixo x. Vale ressaltar que na atividade foram fixados os valores para x_p, mas que o domínio da função é o conjunto dos números reais.

Figura 17 - Ponto sobre a figura geométrica



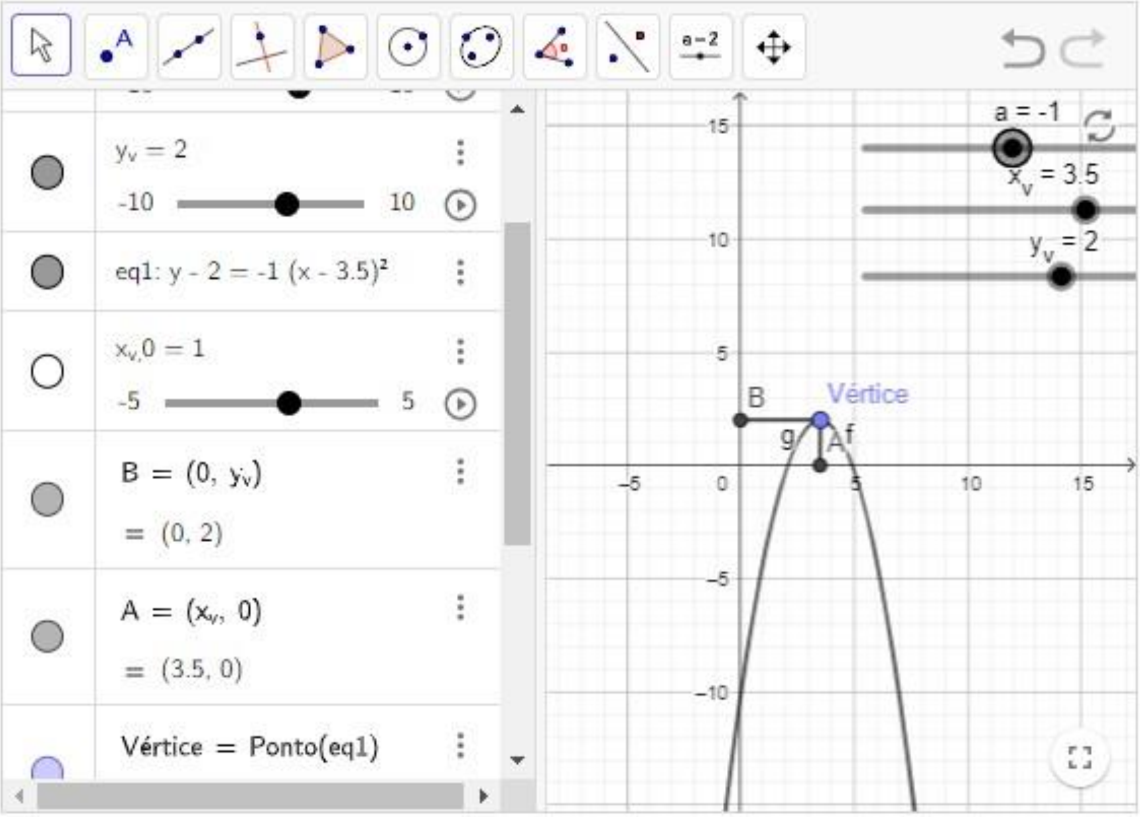
Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/h2kJyZYu#material/xPFKwwuw>
Acesso em 26 abr. 2024.

Os conteúdos que antecedem o ensino da função quadrática têm relevância em outras disciplinas, como física, química e biologia. Portanto, utilizar a agilidade que o *software* GeoGebra pode oferecer para o traçado da figura geométrica (parábola) e para as conversões pode favorecer essa retomada de conteúdos, trabalhando tratamentos necessários, utilizados interdisciplinarmente na Educação Básica. Como exemplo de tratamentos, encontrar as raízes da função utilizando a fórmula de Bhaskara, identificar os coeficientes, existência ou não de raízes na parábola e onde intercepta o eixo y.

As conversões, nos livros estudados, foram propiciadas pelas unidades significativas algébricas, que são os coeficientes a, b e c da expressão $y = ax^2 + bx + c$ e as variáveis visuais, que são, onde intercepta o eixo y (valor do c), abertura da concavidade para cima ou baixo (valor do a), parábola com eixo de simetria à esquerda ou à direita (valor do b). Nas atividades do GeoGebra que foram identificadas as conversões, não há utilização desta palavra (conversão), porém conhecendo a TRRS é possível evidenciar tais operações, iluminando com intencionalidade esses aspectos no ensino.

Uma das características da função quadrática que oportuniza a conversão é o vértice a partir da translação. A ideia de vértice permite interpretar e compreender atividades do cotidiano sobre valores máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, custo e lucro, entre outros. Moretti (2003) apresenta a expressão da função quadrática reescrita a partir de tratamentos, $y - y_v = a(x - x_v)^2$, e, estando nesse formato, é possível a identificação do vértice. Procuramos, diante disso, por atividades que utilizassem a translação no GeoGebra com a expressão reescrita conforme Moretti descreveu de forma que evidenciasse o vértice, mas não encontramos. Sendo assim, elaboramos a atividade da Figura 18, acessível pelo *link* <https://www.geogebra.org/m/bftaeuyk>, a qual constará no “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS”, com os controles deslizantes a, x_v e y_v onde as unidades significativas constam na representação algébrica e gráfica.

Figura 18 - Expressão e gráfico evidenciando o vértice



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 08 jun. 2024.

Os tratamentos e as unidades significativas nas representações precisam emergir das atividades de alguma forma. Além da conscientização dessas operações semiocognitivas, vídeos, atividades interativas, perguntas para que o estudante responda com suas próprias palavras sobre o que entende da atividade proposta, também são possibilidades interessantes e necessárias para a compreensão. Diante disso, os Livros 1, 5, 8 e 11 contemplam diversos aspectos da TRRS, relacionando e promovendo a interação com o conteúdo, além de solicitar que o estudante escreva, interprete e apresente suas constatações.

Tendo como possibilidade a interpretação global a partir dessas atividades, a mediação em sala de aula pode ser potencializada pelo professor e seu planejamento. No próximo capítulo, apresentamos o protocolo e análise das atividades.

5.2 ATIVIDADES DO *SITE*

A realização da busca e escolha de atividades sobre a função quadrática já prontas no *site* do GeoGebra foram realizadas com intuito de estudá-las sob a ótica da TRRS. As atividades escolhidas e estudadas fazem parte do Produto Educacional desenvolvido. Assim, organizamos um protocolo com os aspectos apresentados no Capítulo 5, item 5.1, a fim de identificar os aspectos da TRRS e discutir as potencialidades da atividade nessa perspectiva de ensino.

Destacamos que a função quadrática é geralmente trabalhada nas escolas no final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio, após o conteúdo de conjuntos, noções de funções, intervalos, unidades de medidas e função afim. Esses conhecimentos prévios fazem parte da identificação das características e atividades cognitivas.

A partir da definição dos aspectos (categorias) emergentes relativos à pesquisa que supostamente interferem no fenômeno estudado, relevantes para a escolha e construção das atividades sobre funções quadráticas, foi elaborado um protocolo para de analisar as atividades no formato de "livro" do GeoGebra identificando o que cada atividade "desenvolve", "não desenvolve" e "pode desenvolver a partir de mediação". Os itens do protocolo foram elencados buscando sistematizar as ideias sobre o tema a partir da leitura de referências, escolha dos documentos, reformulação dos objetivos e definição de aspectos que envolvem diretamente a pesquisa. O protocolo, segundo Creswell (2010, p. 215), orienta o registro das informações, pois "os pesquisadores com frequência se engajam em observações múltiplas no decorrer de um estudo qualitativo e usam um protocolo para registrar as informações".

Levando em conta que, para Duval (2011, p. 102), o ensino da função deve partir de uma abordagem que contemple um conjunto de variáveis semiocognitivas que permitam aos estudantes a compreensão desse objeto matemático de forma global e qualitativa, apresentamos o Quadro 3 - Protocolo com aspectos emergentes que serão analisados, construído com base nos aspectos relevantes sobre os conceitos que envolvem a função quadrática e a TRRS para a análise dos livros encontrados no *site* do GeoGebra, dos quais foram selecionadas atividades para o Produto Educacional e serviram para a construção de atividades. A identificação dos livros, numerados de 01 a 11 está de acordo com o Quadro 2 - Descrição das atividades dos "livros" postados no GeoGebra do Capítulo 5, item 5.1.2.

Quadro 3 - Protocolo com aspectos emergentes que serão analisados

Denominação	**Identificação**	**Desenvolve**	**Não desenvolve**	**Pode desenvolver a partir da mediação**
Características/conteúdos da função quadrática	Definição da função quadrática	1, 3, 4, 5, 9, 10, 11	6, 7, 8	2
	Concavidade	1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11	6, 9	2
	Onde intercepta eixo y	3, 5, 8, 10	6, 7, 9, 11	1, 2, 4
	Onde intercepta eixo x – zeros	4, 5, 7, 8, 9, 10	2, 3, 6, 11	1
	Abertura da parábola	1, 2, 5, 7, 8, 10, 11	4, 6, 9	3
	Eixo de simetria		2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11	1, 5
	Construção do gráfico (ponto a ponto)	1, 5, 7	2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11	
	Vértice	1, 4, 5, 7, 8, 10	6, 9, 11	2, 3
	Valores máximo e mínimo	1, 5, 8, 10	2, 3, 4, 6, 7, 9, 11	
	Estudo do Sinal	1, 5, 7, 10	2, 3, 4, 6, 8, 9, 11	
	Expressão algébrica	1, 4, 5, 7, 8, 10, 11	6, 9	2, 3
	Situações do cotidiano com funções quadráticas	1, 4, 5, 7	2, 3, 6, 8, 10, 11	9
Aspectos da TRRS	Representação algébrica	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11	6, 9	3
	Representação gráfica	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11	6, 9	
	Representação Tabular	1, 5, 7, 8, 10	2, 3, 4, 6, 9, 11	
	Tratamentos	1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11	3, 6	4
	Conversões	1, 5, 8, 11	3, 6, 7, 9	2, 4, 10
	Unidades significativas algébricas	1, 5, 8, 11	3, 4, 6, 7, 9	2, 10
	Unidades significativas gráficas	1, 5, 8, 11	3, 4, 6, 7, 9	2, 10
	Recurso de interpretação global	5, 11	3, 6, 10	1, 2, 4, 7, 8, 9

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O Quadro 3 - Protocolo com aspectos emergentes que serão analisados apresenta constatações das atividades como estão postadas no GeoGebra no formato de livro, porém vale destacar que o professor pode trazer para o ensino aspectos do objeto matemático e intermediar as atividades cognitivas elencadas por Duval, de forma a complementar o raciocínio e a compreensão. A coluna “pode desenvolver a partir da mediação” significa que, por meio de perguntas complementares ou atividades direcionadas adicionais, é possível trazer para o ensino tais características/conteúdos/aspectos. Pontuando que a argumentação/atividade matemática perpassa, em termos de representações semióticas, a língua natural também. Sobre isso, Duval (2009, p. 105 - 106), nos diz que:

> A língua natural constitui um registro à parte. Não somente em razão de sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela oferece, mas também em razão de sua prioridade genética sobre os outros registros e de seu papel único em relação à função meta-discursiva de comunicação. Ela se traduz em todos os indivíduos, por uma espontaneidade discursiva que serve de ponto de ancoragem e toda a aprendizagem ligada a um ensino, independentemente do fato que essa espontaneidade possa não respeitar todas as regras de conformidade da língua e que ela possa ser inibida ou favorecida pelo jogo das interações sociais.

Mediante a intermediação possível em língua natural presente em sala de aula, as possibilidades de diálogo e explanação entre professor e estudante, a análise dos textos, atividades interativas, vídeos, atividades para resolução e *links* para outras plataformas, ou seja, levando em conta todas as possibilidades que compunham os livros, foi realizada a classificação de “desenvolve” ou “não desenvolve”. Além das representações algébrica, gráfica e tabular, mencionadas no Quadro 3 e evidenciadas nas atividades analisadas, é relevante lembrar que o professor utiliza intensamente o diálogo para que o ensino e a aprendizagem aconteçam. Sobre isso, Moretti (2023) argumenta que a maneira de apresentar e esboçar as curvas deve contribuir para o reconhecimento das unidades significativas, uma vez que os gráficos cartesianos são utilizados em articulação com outros registros, entre eles, a língua natural.

Do mesmo modo, além da explanação, a seleção de atividades como as analisadas nessa pesquisa no *software* GeoGebra e a proposição de outras atividades complementares, para além das que o livro do GeoGebra apresenta, direcionadas em aspectos da função quadrática, a formação de representação e a conversão podem orientar o ensino e a aprendizagem. A possibilidade de desenvolver aspectos importantes para a aprendizagem está relacionada com uma mediação intencional e consciente por parte do professor.

Desta forma, nas postagens em formato de livro, presentes no Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra, que apresentam um *link* ou uma atividade postada por outro autor e que possibilita ao estudante acessar outros *sites* e tenha contato com o conteúdo, foi considerado que “pode ser desenvolvido” com mediação. Diante dos aspectos que podem oportunizar o ensino na perspectiva da aprendizagem, a coluna do Quadro 3, “não desenvolve”, significa que tal aspecto não consta explicitamente naquela atividade.

5.3 PRODUTO EDUCACIONAL

A Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS com a oferta de vagas para o PPGPE no *Campus* Erechim proporciona para toda a região uma movimentação importante, pois forma mestres em Educação, egressos de cursos de licenciaturas das diversas áreas do conhecimento e assim disponibiliza os produtos educacionais, desenvolvidos durante o Mestrado, em seu *site*, para acesso de todos os interessados em atividades de ensino e de aprendizagem. Estes Produtos Educacionais, pensados, analisados e elaborados por mestrandos com acompanhamento dos orientadores, aplicados em ambientes educacionais ou de revisão bibliográfica, apresentam informações de aplicabilidade aos professores atuantes em sala de aula, coordenação escolar, gestão escolar, gestores de Secretarias Municipais, Coordenadorias Regionais de Educação e Secretarias Estaduais de Educação.

O PPGPE traz para a realidade do próprio pesquisador a busca pelas percepções dos atores presentes na rotina escolar, incluindo aspectos familiares e da participação em sociedade. Nesse sentido, o questionamento inicial para a pesquisa emanado da própria vivência e que, muitas vezes, inquieta o profissional da Educação, retornará para a sociedade dados e informações, que poderão ser acessados e confirmados ou reanalisados sob outro olhar. Segundo Sartori e Pereira (2019), a UFFS *Campus* Erechim, envolvida com as demandas educacionais da região e entendendo que o enfrentamento das demandas em algum momento passa pelas mãos dos professores, busca contribuir na formação de professores de forma acessível e pública, ofertando o PPGPE aos profissionais que têm como objetivo atuar de forma ativa na Educação Básica.

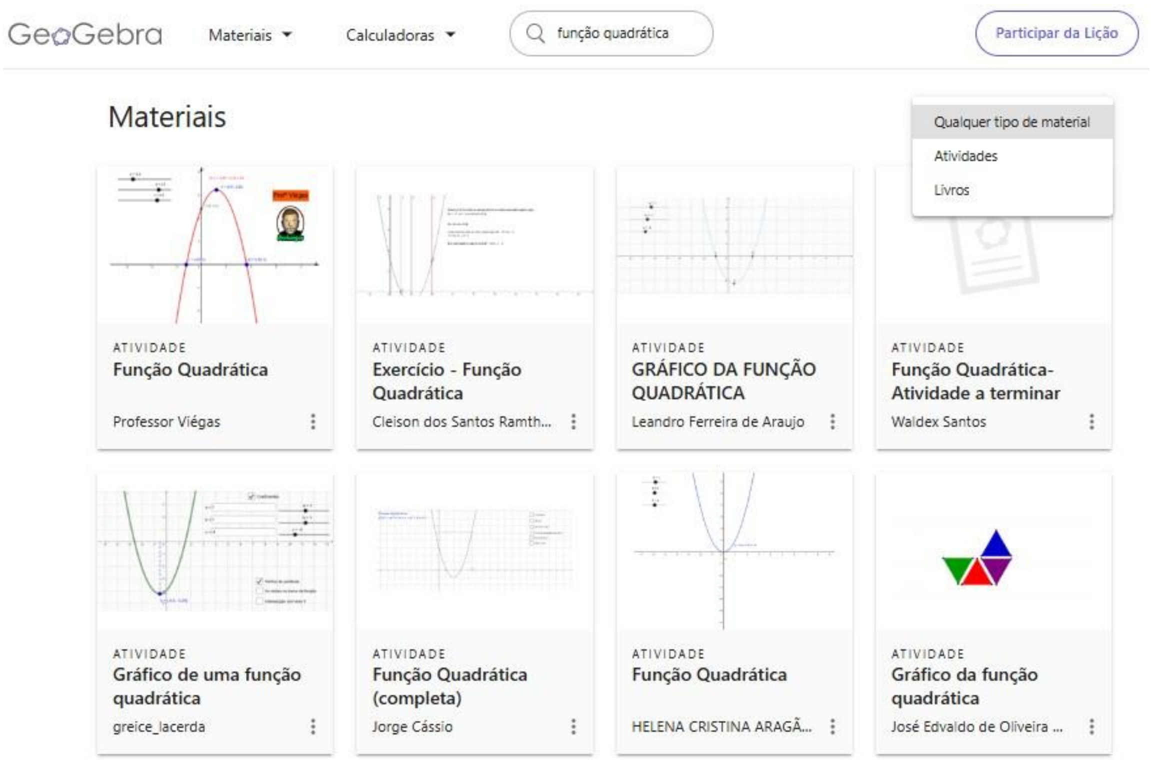
Na turma do PPGPE que ingressou em 2022.2, por ser um grupo heterogêneo proporcionou aos mestrandos, com intermediação dos professores, o enriquecimento na troca de experiências e conhecimento. Os relatos de prática em algumas situações divergem das regulamentações existentes para a área da Educação local, regional e nacional. Dentro dessa diversidade ocorreram os diálogos sobre as práticas docentes e aspectos legais da Educação, e assim surgiram as ideias para a produção de materiais, que estarão disponíveis a todos. Algumas publicações foram ocorrendo durante o percurso formativo em eventos da área de Educação, em livros organizados por professores do PPGPE, bem como artigos publicados e posteriormente nas dissertações e Produtos Educacionais, contemplando dúvidas, esclarecimentos e dados a respeito dos desafios da Educação.

Conforme Sartori e Pereira (2019, p. 27), no PPGPE:

> [...] buscamos despertar a curiosidade dos(as) mestrandos(as) em relação às características que conformam a pesquisa que estão iniciando. A partir disso, pensamos que cada um e cada uma possa avançar em sua formação como pesquisador(a) e se reconheçam, exatamente por sua condição de professores(as), como pesquisadores(as), ou seja, que não dicotomizem ensino e pesquisa.

Nesta proposta de unir ensino e pesquisa, a respeito do Produto Educacional (Proposta de Ensino), elaboramos um "livro" no *software* GeoGebra, que possui o título "Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS" com as atividades discutidas na dissertação e atividades construídas explorando aspectos da TRRS, relacionando o conteúdo de função quadrática e o GeoGebra. Os tipos de materiais disponibilizados no *site* podem ser buscados por atividades ou livros. As atividades são todas as postagens do *software* GeoGebra, inclusive as que constam nas compilações nominadas como livros. Ao acessar o *software* e escrever na caixa de busca o que desejamos o *site* retorna tudo que está cadastrado com o termo digitado.

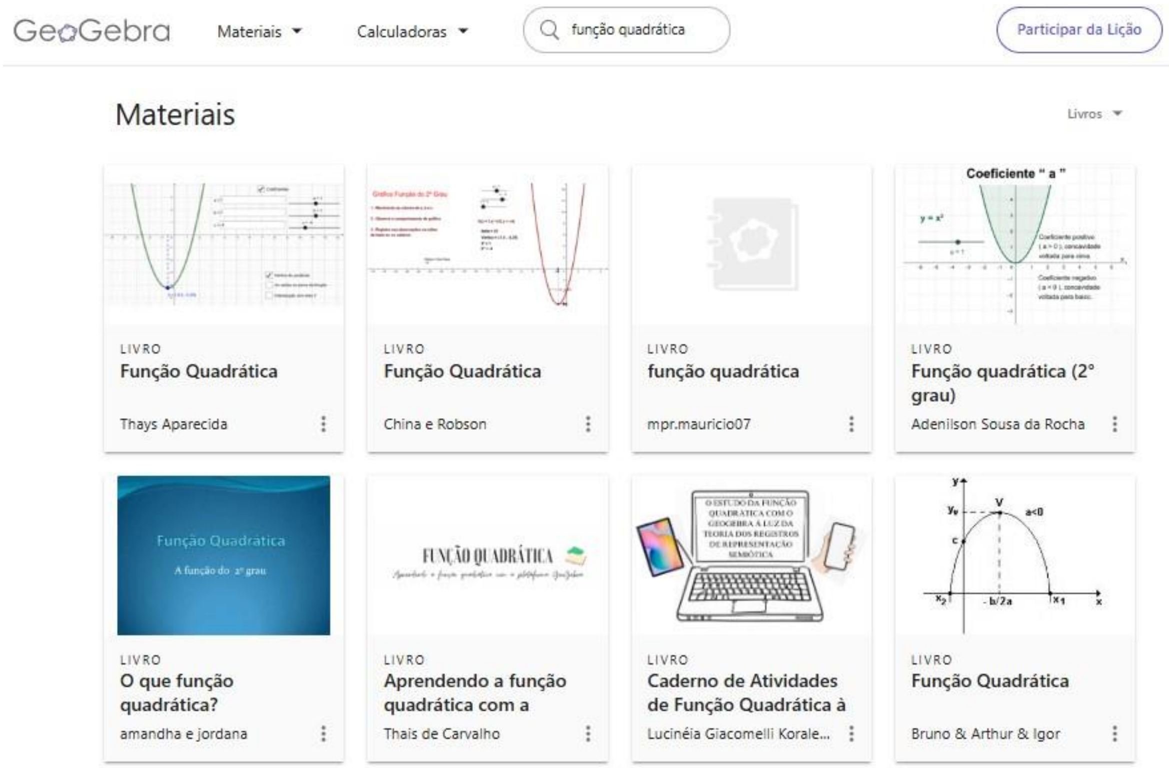
Figura 19 - *Interface* do GeoGebra para seleção de atividades



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 23 ago. 2024.

Quando selecionamos a direita da tela o tipo de material livro retornam atividades agrupadas que estão organizadas numa sequência, de autoria própria ou de outros autores, conforme critérios do autor que elaborou o livro.

Figura 20 - *Interface* do GeoGebra para seleção de livros



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 23 ago. 2024.

Existe a opção de atribuir a atividade aos estudantes e verificar as respostas, de forma bastante similar aos cadernos de atividades impressos mantendo as características de registrar e acompanhar o que o estudante desenvolveu dentro das atividades propostas pelo professor. A nomenclatura livro no GeoGebra e os cadernos de atividades assemelham-se em características que envolvem o ensino e a aprendizagem tendo em vista a mediação que é possível realizar.

Unindo as possibilidades que o *software* GeoGebra disponibiliza em formato de livro, o Produto Educacional dessa pesquisa reúne as atividades analisadas e outras elaboradas com embasamento da Teoria de Aprendizagem de Duval numa Proposta de Ensino com o título: "Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS". A atribuição das atividades aos estudantes por *e-mail*, *whatsapp* ou optando por realizar a atividade durante a aula e o acompanhamento por parte do professor intermediando o ensino e a aprendizagem evidenciam o termo "caderno" que usamos como título para o Produto Educacional.

As compreensões sobre inserção, aplicação, divulgação dos Produtos Educacionais têm avançado nos últimos anos na área de Ensino da CAPES. Um ponto importante é justamente a expectativa de que o Produto Educacional não pode ser reduzido a um elemento físico, conforme observado por Freitas (2021, p. 2). Avanços vem ocorrendo, no sentido de aprimorar critérios para a elaboração de propostas pedagógicas, que possam contribuir no ensino e na aprendizagem e estão em constante debate.

Aspectos da TRRS apresentados em uma Proposta de Ensino planejada podem ser um recurso eficiente para auxiliar nos objetivos do ensino e da aprendizagem, estimulando a autonomia dos estudantes e possibilitando à detecção pelos professores, sobre conhecimentos prévios. Proporcionar a construção do conhecimento e propor um ensino que favoreça a aprendizagem a partir de materiais e recursos metodológicos é um dos objetivos de um Produto Educacional.

A sistematização do Produto Educacional com as atividades e análises, além da postagem no GeoGebra, consta no Apêndice A – Proposta de Ensino: Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS.

6 FUNÇÃO QUADRÁTICA NO GEOGEBRA: DISCUSSÃO DE ATIVIDADES

Os aspectos relativos à TRRS perpassam a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, cuja premissa consiste na identificação de unidades significativas algébricas (ou simbólicas), relacionadas à expressão algébrica, e unidades significativas gráficas, relacionadas à representação gráfica, e, mais do que isso, na coordenação entre essas unidades significativas. A ideia de coordenação se baseia nas conversões entre representação gráfica e algébrica a partir de algum recurso que pode ser, por exemplo, os coeficientes a, b e c da representação algébrica $(y = ax^2 + bx + c)$. Outro recurso que permite a coordenação de unidades significativas e que pode ser usado no estudo da função quadrática, de acordo com Moretti (2003), é a translação[10].

Na revisão sistemática de literatura, o trabalho apresentado no item 4 do Quadro 1 – Artigos obtidos na revisão bibliográfica, com a seguinte questão de pesquisa: “De que maneira licenciandos em matemática se apropriam de artefatos simbólicos, como sistemas de representação semiótica, para solucionar atividades de funções definidas por partes, por meio de tratamentos e conversões no ensino remoto?”, foi observado, nas ações dos sujeitos enquanto realizavam as atividades propostas, a falta de relação entre as transformações cognitivas de registros de representação. Com essa constatação, os autores identificaram a relevância da TRRS em relação ao papel primordial da constituição de um sistema de representação que possibilite a construção dos saberes sobre um objeto matemático a ser estudado. Isso ratifica a teoria de Duval enquanto um importante instrumento de pesquisa em Educação Matemática e de possibilidade para o ensino, uma vez que, por intermédio dela, pode-se analisar e compreender a estrutura cognitiva do estudante que perpassa seu aprendizado.

A partir dessas ideias, levando em conta a TRRS e suas possibilidades na atividade matemática e a elaboração de uma Proposta de Ensino para o estudo da função quadrática no GeoGebra contemplando as atividades semiocognitivas de formação de representação, tratamento, e conversão, construímos o Quadro 3 - Protocolo com aspectos emergentes que serão analisados. Dos onze livros analisados, dez desenvolvem o conteúdo a partir da expressão $(y = ax^2 + bx + c)$, e somente o último apresenta atividades que abordam a translação.

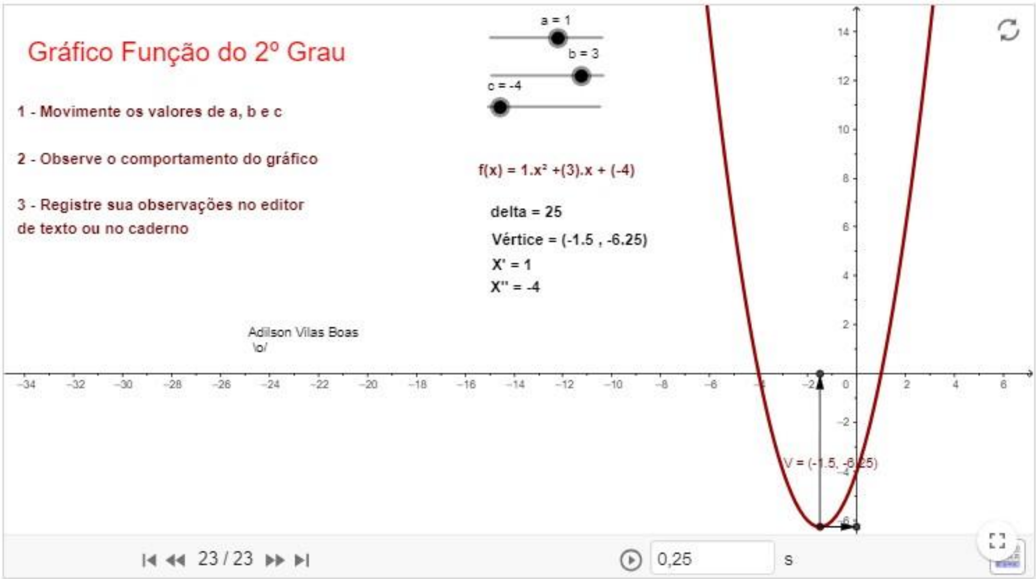
Para organização dos dados numeramos os livros no Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra e, para seguirmos com a análise, foram selecionadas

[10] Apresentada no Capítulo 3, subtítulo 3.4 - Abordagem de interpretação global de propriedades figurais para o estudo de funções.

atividades dos Livros 1, 5, 8 e 11, cujos títulos utilizamos conforme consta no *site*. As atividades apresentadas na sequência, selecionadas dos livros do *site* GeoGebra e conforme os critérios relacionados no Quadro 3 - Protocolo com aspectos emergentes que serão analisados, apresentam possibilidades de conversão e potencializam aspectos da TRRS essenciais para a aprendizagem como: i) a identificação de unidades significativas algébricas, relativas aos coeficientes a, b e c e unidades significativas gráficas, relativas à forma da parábola (abertura, concavidade, raízes, crescimento e decrescimento, etc) e ii) a transição entre as unidades significativas, ou melhor, a compreensão de como as unidades significativas algébricas influenciam na gráfica e vice-versa.

A seguir, apresentamos na Figura 21 - *Interface* da Atividade 1 do Livro 1 do GeoGebra, a atividade que consta no Livro 1. Dentre as 17 atividades que compõe o livro, foi extraída a atividade 1 que está nomeada no *site* do GeoGebra de "Função Quadrática".

Figura 21 - *Interface* da Atividade 1 do Livro 1 do GeoGebra



Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/VbXTYuPk#material/bvSvr3St>
Acesso em 26 abr. 2024.

Essa atividade permite compreensões de aspectos que identificam a função quadrática. Desenvolve os aspectos conceituais da função quadrática, sendo eles: a concavidade, onde intercepta o eixo y, onde intercepta o eixo x (zeros), abertura da parábola e vértice. Além da identificação, permite análise cognitiva envolvendo os coeficientes e os aspectos da TRRS, a seguir apresentada no Quadro 4.

Quadro 4 - Análise da atividade da Figura 21 postada no GeoGebra

Aspectos da TRRS	**Potencialidade**
Representação algébrica	Equação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Representação gráfica	Apresenta a figura geométrica e seu comportamento no plano cartesiano a depender dos coeficientes a, b e c.
Representação Tabular	Desenvolvidos pelo *software*, com o movimento dos controles deslizantes é possível visualizar os valores das raízes, do delta e o vértice alterando. O que indica a relação entre os valores de x e y.
Tratamentos	Os tratamentos podem ser trabalhados a partir da criação de questões/atividades como encontrar as raízes, o delta, o vértice e o estudo do sinal da função.
Conversões	Com os coeficientes a, b e c dispostos em controles deslizantes que possibilita o movimento é possível visualizar nas representações as alterações. As conversões estão na atividade como "automáticas", por isso é importante que, em desenvolvendo tal atividade em sala de aula, se evidencie elas.
Unidades significativas algébricas	Sinal e valor que acompanham os coeficientes a, b e c.
Unidades significativas gráficas	Concavidade da parábola, abertura da parábola, raízes, vértice e onde intercepta o eixo y, eixo de simetria à direita ou à esquerda do eixo y.
Recurso de interpretação global	São os coeficientes da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

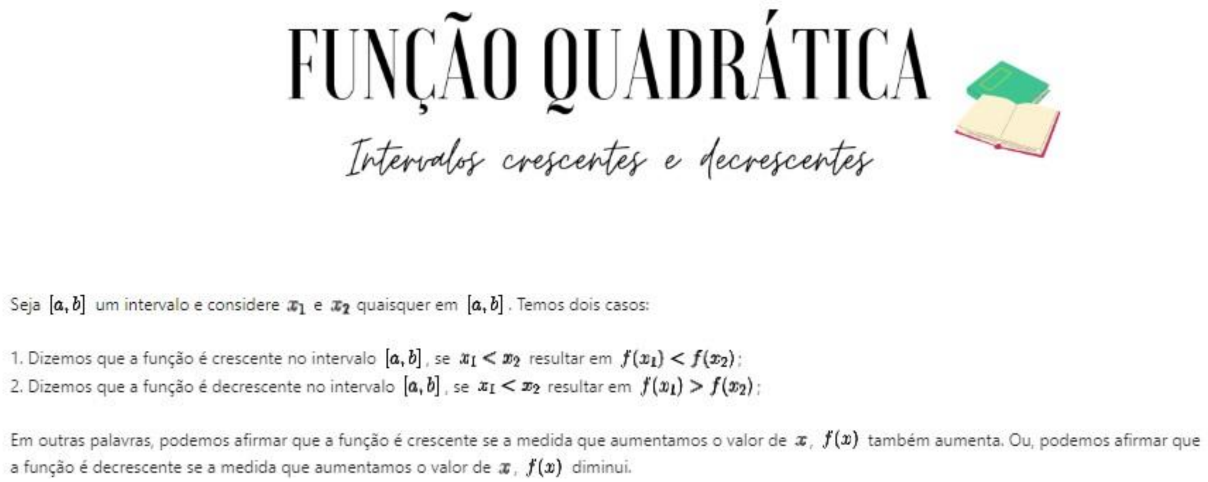
A atividade oportuniza movimentar o controle deslizante a, e com isso visualizar a parábola aumentando e diminuindo a abertura, voltada para cima quando o valor de a for positivo, voltada para baixo quando o valor de a for negativo ou uma reta, e assim, não sendo quadrática, quando $a = 0$. Ao mesmo tempo, a equação surge com os valores atualizados, o estudante relaciona com a utilização do *software* as duas representações sem obrigatoriamente usar a representação tabular.

Na representação algébrica $f(x) = ax^2 + bx + c$, é condição necessária que o coeficiente a seja diferente de zero e sendo os valores dos coeficientes b e c também diferentes de zero, a visualização simultânea favorece a conversão, ou seja, a identificação de unidades básicas gráficas e simbólicas e coordenação entre elas. Na Figura 21, analisada no Quadro 4, temos a equação com os coeficientes diferente de zero, o que proporciona o entendimento dos diferentes aspectos peculiares constantes no objeto e de tratamentos.

Ao propor a atividade no GeoGebra, visualizada na Figura 21 - *Interface* da Atividade 1 do Livro 1 do GeoGebra e utilizar as possibilidades elencadas no Quadro 4, o professor possibilita que o estudante acompanhe visualmente as características na representação gráfica e associe com a forma algébrica. A observação e compreensão destas informações sem a visualização acontece de forma trabalhosa, estática e, muitas vezes, sem sentido.

Outra atividade selecionada foi a de número 17, de um total de 23, do Livro 5, nomeada “Aprendendo a função quadrática com a plataforma GeoGebra”, constante no Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra, a qual apresentamos nas Figuras 22, 23 e 24. A atividade apresenta uma parábola e sua representação algébrica e também duas caixas de seleção: uma com coeficientes e outra com o vértice. Ou seja, ao selecionar “coeficientes”, aparece na tela os controles deslizantes de a, b e c e, ao selecionar “vértice” e clicar no “play” o vértice se movimenta, permitindo visualizar a nova parábola e a nova expressão algébrica.

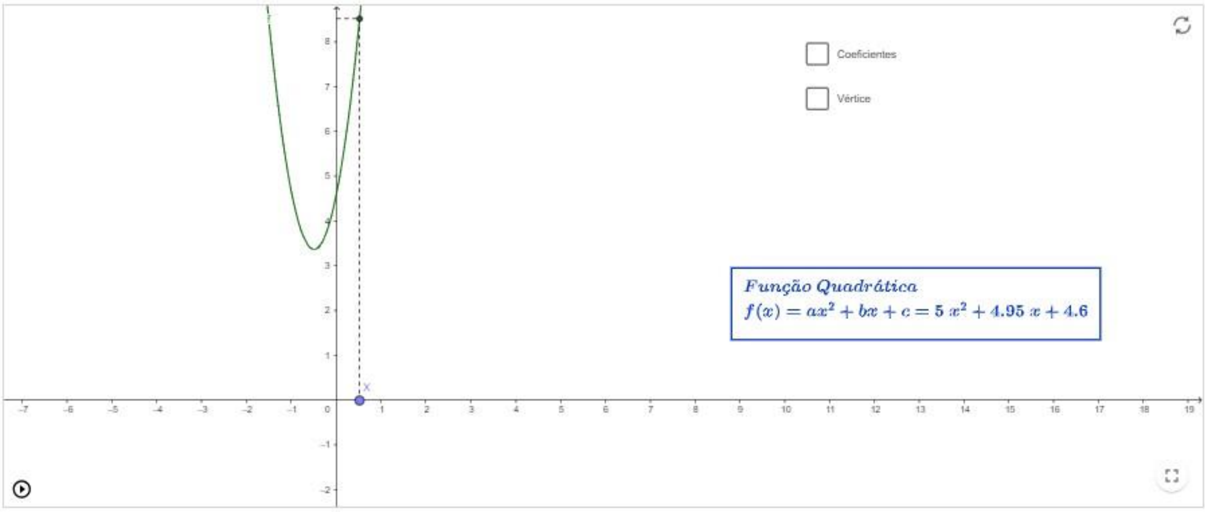
Figura 22 - *Interface* da definição do conteúdo da Atividade 17 do Livro 5 do GeoGebra



Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r#material/buzdks8c>
Acesso em 26 abr. 2024.

As atividades do Livro 5 apresentam textos com explicações sobre a função quadrática e questões que proporcionam a reflexão, interação e conversão entre os registros de representação considerando as unidades significativas.

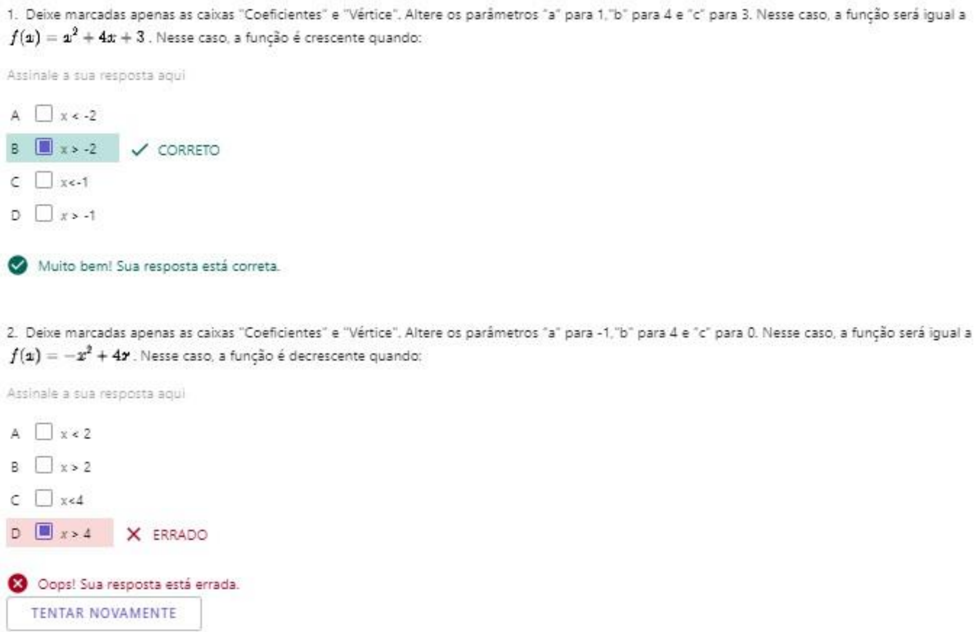
Figura 23 - *Interface* da Atividade 17 do Livro 5 do GeoGebra



Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r#material/buzdks8c> Acesso em 26 abr. 2024.

Na Figura 24, apresentamos as questões que orientam a atividade da Figura 23 relacionadas à variabilidade da função, intervalos de crescimento e decrescimento. Orienta para os movimentos dos controles deslizantes da Figura 23 e solicita a resposta considerando a unidade significativa no eixo das abcissas que informa, na representação gráfica, a partir de qual valor acontece o crescimento e decrescimento.

Figura 24 - *Interface* das questões da Atividade 17 do Livro 5 do GeoGebra



1. Deixe marcadas apenas as caixas "Coeficientes" e "Vértice". Altere os parâmetros "a" para 1,"b" para 4 e "c" para 3. Nesse caso, a função será igual a $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Nesse caso, a função é crescente quando:

Assinale a sua resposta aqui

A x < -2
B x > -2 ✓ CORRETO
C x<-1
D x > -1

Muito bem! Sua resposta está correta.

2. Deixe marcadas apenas as caixas "Coeficientes" e "Vértice". Altere os parâmetros "a" para -1,"b" para 4 e "c" para 0. Nesse caso, a função será igual a $f(x) = -x^2 + 4x$. Nesse caso, a função é decrescente quando:

Assinale a sua resposta aqui

A x < 2
B x > 2
C x<4
D x > 4 ✕ ERRADO

Oops! Sua resposta está errada.

TENTAR NOVAMENTE

Fonte: *Site* do GeoGebra < https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r#material/buzdks8c> Acesso em 26 abr. 2024.

Quadro 5 - Análise da atividade das figuras 22, 23 e 24

Aspectos da TRRS	**Potencialidade**
Representação algébrica	Equação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Representação gráfica	Apresenta a figura geométrica e seu comportamento no plano cartesiano a depender dos coeficientes a, b e c. Também é possível visualizar o vértice.
Representação Tabular	Desenvolvidos pelo *software* com o movimento dos controles deslizantes. O movimento do valor de x e a indicação que o vértice define o crescimento e decrescimento.
Tratamentos	Os tratamentos podem ser trabalhados para encontrar raízes e estudar o sinal da função para definir intervalos de crescimento e decrescimento.
Conversões	Por meio dos coeficientes dispostos em controles deslizantes com o movimento do valor de x é possível visualizar nas representações as alterações e a indicação que o vértice define o momento (o valor) em que o crescimento e o decrescimento acontecem para aquela disposição de valores. Também possibilita relacionar a expressão algébrica ao vértice da parábola, porém, esse recurso é mais trabalhoso e complexo por causa da não congruência[11] semântica.
Unidades significativas algébricas	Sinal e valor que acompanha os coeficientes a, b e c. Coeficiente c no caso de selecionar "vértice". Ao dar play, fixam-se os coeficientes a e b e movimenta-se apenas o c, o qual influencia no vértice da parábola.
Unidades significativas gráficas	Concavidade da parábola, abertura da parábola, crescimento e decrescimento, raízes, vértice e onde intercepta o eixo y, eixo de simetria à direita ou à esquerda do y.
Recurso de interpretação global	São os coeficientes da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

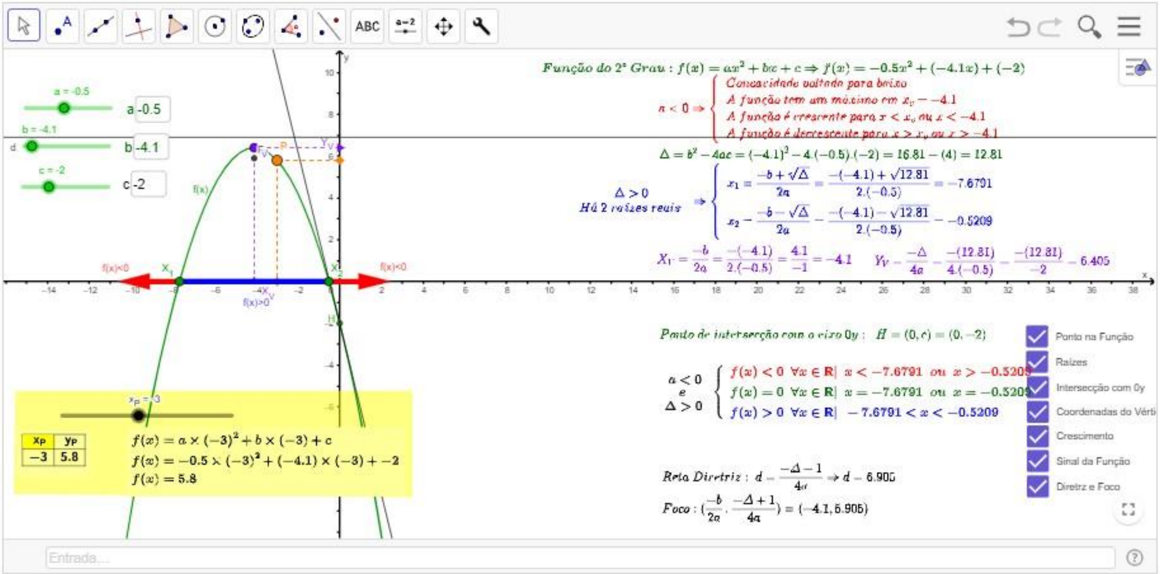
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Do Livro 5, a atividade 17 foi selecionada e consta nas figuras 22, 23 e 24 as características da função quadrática, coeficientes, vértice, plano cartesiano, figura geométrica parábola, com exemplos das unidades significativas do intervalo de crescimento e decrescimento observável na figura geométrica no plano cartesiano. A equação está escrita e acompanha a parábola, ao movimento dos controles deslizantes. O movimento do valor de x sobre o eixo das abcissas proporciona a visualização do momento em que há crescimento e decrescimento. Alguns tratamentos podem ser propostos e outras questões que associadas à representação gráfica e às unidades significativas oportunizam a conversão. Após a execução da atividade o estudante pode responder e validar sua resposta, caso responda "errado" pode retornar para a interação das representações, realizar nova interpretação e responder novamente.

Seguindo com a análise, na Figura 25 apresentamos a atividade 1 do Livro 8 do GeoGebra. Esse livro é composto por essa atividade e mais três que apresentam aplicação da função quadrática e possui o título "Função Quadrática".

[11] Quando não há correspondência direta entre os conteúdos que os tornam equivalentes

Figura 25 - *Interface* da Atividade 1 do Livro 8 do GeoGebra



Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/h2kJyZYu#material/xPFKwwuw>
Acesso em 26 abr. 2024.

A atividade do Livro 8 apresenta aspectos da função quadrática e as definições com cores diferentes que atraem para a visualização e ao serem marcadas nas caixas de seleção surgem juntamente com a representação gráfica sobre o plano cartesiano. A atividade apresenta e permite selecionar ponto na função, raízes, intersecção com o eixo y, que identifica o eixo vertical das ordenadas no plano cartesiano, coordenadas do vértice, crescimento, sinal da função, diretriz, foco e permite a entrada de mais comandos para interação com a atividade já elaborada. No Quadro 6 apresentamos as possibilidades na perspectiva deste trabalho.

Quadro 6 - Análise da atividade da figura 25

(continua)

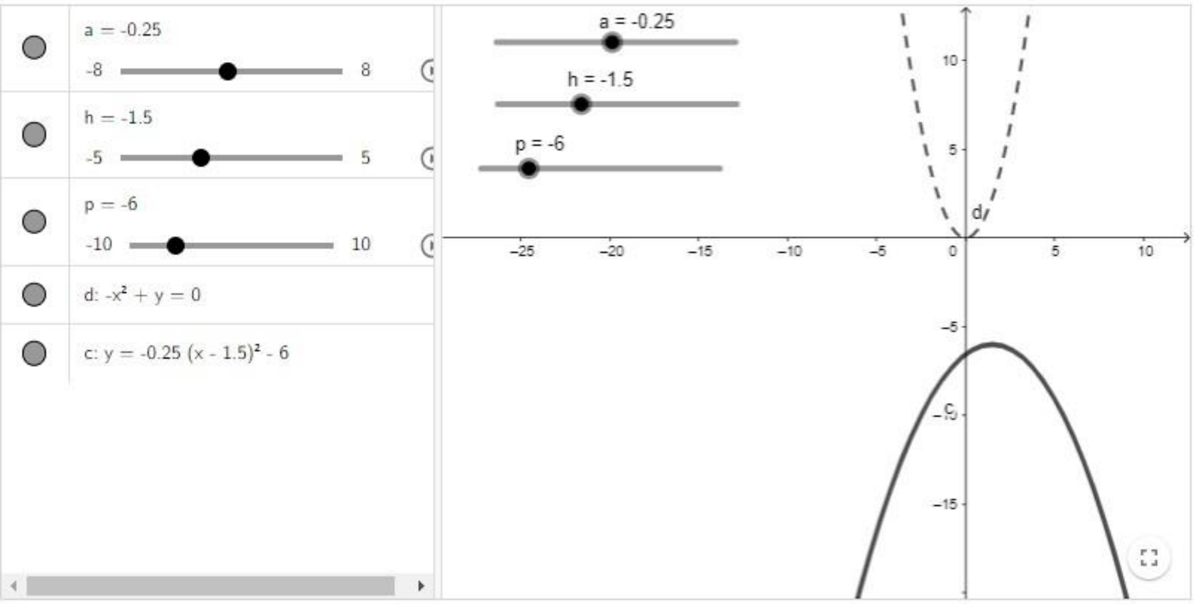
Aspectos da TRRS	**Potencialidade**
Representação algébrica	Coeficientes da equação $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Representação gráfica	Apresenta a figura geométrica e seu comportamento no plano cartesiano a depender dos coeficientes a, b e c.
Representação Tabular	Explícito na tela em um quadro que apresenta os valores com o movimento do x na representação gráfica e dos controles deslizantes.
Tratamentos	Os tratamentos surgem na tela ao serem acionadas as caixas de seleção: ponto na função, raízes, intersecção com o eixo y, coordenadas do vértice, crescimento, sinal da função, diretriz e foco.
Conversões	Por meio dos coeficientes da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ dispostos em controles deslizantes é possível explorar as conversões entre expressão algébrica e gráfico. Outra possibilidade de conversão ocorre com a parábola imóvel e movimentando apenas um ponto pertencente a ela, possibilitando a conversão entre representações do ponto, gráfica e

	algébrica. A possibilidade de selecionar "diretriz e foco" permite visualizar a relação entre os coeficientes da expressão a, b e c e essas características.
Unidades significativas algébricas	Sinal que acompanha os coeficientes a, b e c da expressão $(y = ax^2 + bx + c)$, par ordenado do vértice, sinal de $>$ (maior) e $<$ (menor) indicando intervalos, ∀ (tal que), ∈ (pertence) e conjunto dos IR (reais).
Unidades significativas gráficas	Concavidade da parábola, abertura da parábola, vértice, onde intercepta o eixo y, raízes, diretriz, foco e eixo de simetria à direita ou à esquerda do eixo y.
Recurso de interpretação global	São os coeficientes da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

As atividades dos Livros 1, 5 e 8 foram analisadas utilizando o protocolo do Quadro 3 (página 72) e evidenciando potencialidades cognitivas com embasamento da TRRS de Raymond Duval. Com a mesma intenção, selecionamos a atividade 4 do Livro 11 que possui o título "Transformações gráficas da função polinomial do 2º grau". Esse livro contém quatro atividades, uma sequência didática em um resumo sobre as transformações gráficas da função polinomial do 2º Grau ou função quadrática, demonstrando a translação da mesma. Na figura 26 apresentamos a *interface* inicial da atividade e no Quadro 7 consta a análise da mesma.

Figura 26 - *Interface* da Atividade 4 do Livro 11 do GeoGebra



Fonte: *Site* do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/etgmwu5x#material/bnbta4xv>
Acesso em 26 abr. 2024.

No *site* do GeoGebra é possível, conforme a Figura 26 - *Interface* da Atividade 4 do Livro 11 do GeoGebra, observar a atividade alternando valores para o coeficiente a, os parâmetros p e h, com o traçado do gráfico movimentando e indicando a translação vertical e horizontal, respectivamente. Essa atividade oportuniza a interação no *software* e com as respostas às atividades de investigação é observável possibilidades de reflexão sobre o comportamento da parábola e o que vai alterando na função simultaneamente. Questões sobre as transformações gráficas e sugestões de experimentações proporcionam o estudo e anotações no material compartilhado junto com o conteúdo.

Quadro 7 - Análise da atividade da figura 26 postada no GeoGebra

Aspectos da TRRS	**Potencialidade**
Representação algébrica	Equação do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + p$.
Representação gráfica	Apresenta a figura geométrica e seu comportamento no plano cartesiano a depender do coeficiente a e os parâmetros h e p, sendo o a relativo à concavidade, o h, o x do vértice e o p, o y do vértice.
Representação Tabular	Desenvolvidos pelo *software* com o movimento dos controles deslizantes do coeficiente a e os parâmetros h e p.
Tratamentos	Como normalmente a função quadrática é expressa algebricamente por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para se chegar à expressão algébrica $y = a(x-h)^2 + p$ serão necessários alguns tratamentos como complementação de quadrados.
Conversões	Para possibilitar a conversão a partir da representação algébrica $y = a(x-h)^2 + p$, é possível partir de uma função "base" $f(x) = ax^2$ e realizando os seguintes movimentos, por exemplo, utilizando a função base $y = x^2$: - Translação vertical de $f(x) = x^2$ para $f(x) = x^2 + 4$: o gráfico desloca-se 4 unidades na vertical para cima movimentando o p, sendo $a \neq 0$ e $h = 0$. - Translação horizontal de $f(x) = x^2$ para $f(x) = (x+4)^2$: o gráfico desloca-se 4 unidades à esquerda na horizontal movimentando o h, sendo $a \neq 0$ e $p = 0$. Assim, por meio do coeficiente a e os parâmetros h e p dispostos em controles deslizantes evidencia-se na parábola o coeficiente a agindo na expansão e contração da parábola, o coeficiente (parâmetro) h no deslocamento horizontal e o coeficiente (parâmetro) p no deslocamento vertical.
Unidades significativas algébricas	Sinal e valor que acompanham os coeficientes, mais especificamente o coeficiente h e o c, os quais são o vértice da parábola.
Unidades significativas gráficas	Vértice, concavidade da parábola, abertura da parábola, onde intercepta o eixo y.
Recurso de interpretação global	São os coeficientes de $y = a(x-h)^2 + p$ e os parâmetros h e p, sendo que o movimento do controle deslizante h interfere, na representação gráfica, na translação vertical enquanto o controle deslizante p interfere na translação horizontal.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Embora o Livro 11 do GeoGebra aborde a translação para a função quadrática, para Moretti (2003), se estivermos trabalhando uma translação no plano cartesiano, para facilitar o estudo, podemos considerar que uma parábola transladada representa a translação se a imagem de cada ponto expresso na equação pelas coordenadas x e y for um ponto que, na equação transladada, tiver suas coordenadas expressas por $x - x_v$ e $y - y_v$ ou, $x + x_v$ e $y + y_v$ que poderá ser representado de maneira única, conservando o sinal '$-$' e, segundo Moretti (2003), sendo semanticamente mais congruente se usarmos as representações $x - \pm x_v$ e $y\ - \pm y_v$. Assim, na representação algébrica, a equação $y = a(x - h)^2 + p$, após a realização de tratamento seria reescrita para $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$, portanto teríamos da equação $y = -2(x - 1)^2 - 6$ a seguinte equação reescrita $(y -\ -6) = -2(x -\ +1)^2$.

A conversão entre a representação gráfica e algébrica está evidenciada na Figura 27, permitindo visualizar o vértice nessa forma de equação $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$, com os controles deslizantes os valores do x_v e do y_v estariam evidentes com a visualização na equação $(y - 5) = 2(x - +5)^2$ e o par ordenado $(5, -5)$. Assim, a atividade apresentada na Figura 27, que pode ser acessada em <https://www.geogebra.org/m/bftaeuyk> apresenta uma possibilidade de desenvolver o estudo da função quadrática a partir do recurso para interpretação global translação. Dessa forma, é possível a coordenar a representação gráfica com a algébrica a partir do vértice perceptível no plano cartesiano com o par ordenado (x_v, y_v) e a equação reescrita com a realização de tratamento $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$.

As atividades analisadas apresentam e demandam conhecimentos prévios sobre a função quadrática. Considerando essa observação, apresentamos um exemplo de atividade elaborada pelas autoras e que pode ser desenvolvida entre as que foram apresentadas e analisadas, como forma de estudar a função quadrática e que visa explorar os coeficientes da função real quadrática do tipo $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$.

Figura 27 - Atividade desenvolvida pela autora

Fonte: Dados da pesquisa (2024), acesso em <https://www.geogebra.org/m/bftaeuyk>

Essa atividade consta no Produto Educacional e tem o objetivo de, a partir da representação gráfica, identificar o vértice com a equação reescrita a partir de tratamentos, $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$, além de possibilitar a identificação das raízes e a concavidade da função. Isso pode ser feito sem apoio de *software*, contudo, oportunizar que os estudantes visualizem os conceitos matemáticos utilizando o GeoGebra e relacionando com as questões que envolvem a exploração interativa, além de incentivar a aprendizagem a partir da descoberta por eles mesmos, proporciona a articulação entre as unidades básicas simbólicas (da expressão algébrica) e unidades básicas gráficas (visualizadas no gráfico), o que, para Duval (1988), é o que garante a aprendizagem da função. Esse transitar e explorar utilizando as possibilidades que o GeoGebra exibe e permite, contribui para a compreensão de conceitos matemáticos.

Uma atividade interessante a ser promovida é, a partir da equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, fazer o estudante compreender a influência dos coeficientes a, b e c no gráfico. As unidades significativas algébricas, nesse caso, são os coeficientes e as variáveis visuais são: a concavidade para cima ou para baixo, o eixo de simetria à esquerda ou à direita e o ponto onde a parábola intercepta o eixo y, respectivamente. O Quadro 8, é um exemplo de atividade que pode ser feita sem o GeoGebra e que trabalha principalmente a concavidade e as raízes. Essas ideias orientaram a elaboração de atividades iniciais do Produto Educacional, constante no Apêndice A com o título "Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS" nominadas "Resgate da Função Quadrática".

Quadro 8 - Exemplo de atividade de unidades significativas da função quadrática

Identifique os coeficientes, raízes e concavidade das funções:			
Função	Coeficientes	Raízes	Concavidade voltada para cima ou para baixo?
$f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$	a: b: c:		
$f(x) = -x^2 + 4x - 4$	a: b: c:		
$f(x) = x^2 + 6x + 5$	a: b: c:		
$f(x) = 3x^2 - 7x + 6$	a: b: c:		

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Na realização da atividade do Quadro 8, é possível desenvolver diversos tratamentos na expressão algébrica como o cálculo de raízes, dos vértices, o estudo do sinal, entre outros. Após identificação dos coeficientes pode-se encontrar o valor do discriminante da função, sendo representado pela letra delta (Δ), temos $\Delta = b^2 - 4ac$ e tem a finalidade de identificar quantas soluções tem a função. Dessa forma, para $\Delta = b^2 - 4ac$, tem-se que:

- $Se\ \Delta > 0$, a função terá duas raízes reais e distintas ($x' \neq x''$);
- $Se\ \Delta < 0$, a função não terá uma raiz real; e
- $Se\ \Delta = 0$, a função terá duas raízes reais e iguais ($x' = x''$).

O número de raízes está diretamente ligado ao número de intersecções da representação gráfica com o eixo x (abcissa), ou seja, quando há duas raízes reais e distintas, a representação gráfica, também nominada parábola, intercepta o eixo x nos pontos $(x', 0)$ e $(x'', 0)$; quando não há raiz real, a parábola não intercepta o eixo x; e quando há duas raízes reais e iguais, a parábola é tangente ao eixo x no ponto $(x', 0)$.

Além das possibilidades de solução, faz-se importante a determinação do vértice da parábola, pois ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como o seu valor máximo ou mínimo. Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é simétrica em relação a um eixo vertical, também nominado eixo y (ordenada). Determinando a posição desse eixo, encontraremos a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice obteremos a ordenada, que é função da abscissa.

O vértice da parábola tem coordenadas definidas por $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Para Duval (2003), se o estudante tem acesso a apenas um registro de representação, isso pode significar uma limitação na sua capacidade de reconhecimento dessas diferentes representações. Ele afirma que "Existe um 'enclausuramento' de registro que impede o estudante de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes" (Duval, 2003, p. 21). Portanto, não podemos negar a importância da pluralidade de registros de representação. Duval (2003, p. 31) ainda aponta que:

> Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. É enganosa a ideia de que todos os registros de representações de um objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros.

O tipo de atividade do Quadro 8 - Exemplo de atividade de unidades significativas da função quadrática perpassa a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, utilizando como recurso de articulação entre as unidades significativas, os coeficientes da função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

As atividades da Proposta de Ensino (Produto Educacional) têm foco na TRRS, na observação e exploração da função no GeoGebra. Sendo que o professor assume um papel importante de mediador dessas atividades, reformulando conjecturas, ajudando os estudantes a explicarem os seus raciocínios e estimulando a participação de todos e, principalmente, tornando as atividades semiocognitivas explícitas e valorizadas.

Elaboramos dentro do GeoGebra a Proposta de Ensino, no formato de caderno, nominado no *software* de "livro" com uma coletânea de atividades criadas e agrupadas sobre o objeto matemático, ampliando assim as observações e discussões em torno da função quadrática. O estudo de representações gráficas das funções quadráticas, bem como a variação dos coeficientes (a, b, c) no registro algébrico, bem como sua demonstração e percepção no registro gráfico, difíceis de fazer no ambiente papel e lápis e facilitado pelo *software*. Dessa forma, temos a análise propositiva onde a pesquisadora "não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica" (Fiorentini; Lorenzato, 2012, p. 69).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Das inquietações abrangendo a aprendizagem matemática, mais especificamente as dificuldades de aprendizagem, e do interesse sobre uma teoria semiocognitiva exclusiva da Matemática é que se formou a questão desta pesquisa: **Que possibilidades a Teoria dos Registros de Representações Semióticas oferece para o ensino da função quadrática no GeoGebra?**

A fim de respondê-la foi necessário muito estudo e um profundo mergulho na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que, a cada artigo lido ia trazendo mais sentido à questão de pesquisa. Delineamos como objetivo geral, com o propósito de responder à questão de pesquisa: **investigar aspectos cognitivos em atividades de função quadrática no GeoGebra na perspectiva da elaboração de uma Proposta de Ensino**. A partir da revisão bibliográfica sobre o tema de pesquisa, foi possível encontrar percepções sobre o ensino de conteúdos matemáticos e a utilização do *software* GeoGebra. As reflexões realizadas apontaram para a contribuição da valorização e utilização das TDIC para o ensino da função quadrática e motivaram a seleção das atividades para análise.

Dessa forma, paralelamente, e por meio da investigação e estudo de atividades compartilhadas no GeoGebra que abordam a função quadrática, fomos elencando subsídios para a seleção de atividades que fazem parte de livros postados no GeoGebra. O foco no estudo da TRRS, convergindo para a elaboração do Produto Educacional: “Caderno de Atividades de Função Quadrática à luz da TRRS”.

As atividades de livros sobre função quadrática no GeoGebra foram exploradas, das quais 11 foram selecionadas e analisadas no Quadro 2 - Descrição das atividades dos “livros” postados no GeoGebra do Capítulo 5, item 5.1.2. Constatamos nos livros a presença das características algébricas e gráficas evidenciando a possibilidade em utilizar as TDIC para auxiliar na visualização da função quadrática, no ensino e na aprendizagem.

As TDIC, quando mediadas pedagogicamente, podem potencializar a aprendizagem e contribuir para a aquisição de conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas, principalmente no que se refere ao estudo das suas representações semióticas. Justificamos a escolha do *software* GeoGebra por tratar-se de um *software* de Matemática dinâmica que combina geometria e álgebra com o mesmo grau de importância. Porém, precisamos observar que a compreensão do conceito de função vai além do seu entendimento gráfico, logo, sua utilização não deve se limitar apenas à construção dos gráficos. O ensino de funções requer, de acordo com a TRRS, a utilização de representações semióticas e, mais do que isso, das conversões entre representações semióticas, o que exige do professor amplo estudo e dedicação.

As atividades cognitivas apresentadas na TRRS envolvendo identificação de unidades significativas simbólicas (da expressão algébrica) e gráficas, associadas à exploração e mediação intencionada do professor, questionamentos que estimulem a escrita, e, principalmente que tornem as conversões explícitas podem colaborar com a aprendizagem matemática, mas para isso, é preciso que elas estejam presentes no trabalho pedagógico intencionalmente. Além disso, a utilização do GeoGebra possibilita que as conversões sejam visualizadas e, nesse sentido, Andrade, Brandão e Santos (2022) destacam o desafio ainda existente na compreensão do conceito de função e a importância do aspecto dinâmico do GeoGebra. Os autores afirmam que o *software* GeoGebra, quando utilizado adequadamente como instrumento de mediação, contribui para a aquisição de conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas, principalmente no que se refere ao estudo das suas representações gráficas.

O estudo da função quadrática na perspectiva deste trabalho diminui o foco em aplicação de fórmulas, permitindo investir em uma interpretação global, podendo tornar o ensino de função menos estático e mecânico, valorizando as características inerentes às funções como movimento e transformação. E assim, coincide com a hipótese fundamental de aprendizagem com base na estrutura da representação em função de conceitualização, Figura 3 (página 33), elaborada por Raymond Duval utilizando TDIC.

A pesquisa evidencia a utilização do *software* GeoGebra como importante aliado do professor na elaboração dos Planos de Aula para o ensino e a aprendizagem acontecerem ao encontro do que Duval propõe. Formar cidadãos que tenham compreensão de conteúdos, com possibilidades de refletir, encontrar significados nas ações, inicialmente em sala de aula e refletindo na convivência em sociedade faz parte de pesquisas como a apresentada na revisão bibliográfica pelos autores Santana, Gualandi e Soares (2019). Os autores relatam a não utilização de *software*s e a dificuldade dos estudantes com a parte gráfica da função quadrática, explicitando dessa forma espaço para pesquisas e o desenvolvimento de Produtos Educacionais como o elaborado em nossa pesquisa, para acesso compartilhado de forma gratuita que poderá, com intermediação dos professores colaborar com a aprendizagem da parte gráfica e atividades cognitivas de função quadrática.

Apresentamos análises das atividades que colaboram com os apontamentos de Silva e Moretti (2018), favoráveis à utilização do GeoGebra pelo fato de auxiliar na aprendizagem com aspectos cognitivos da TRRS e o diferencial da forma dinâmica e participativa que os estudantes têm acesso no *software*. No mesmo sentido, os pesquisadores Moran e Franco (2015) e as pesquisadoras Paixão, Moran e Rezende (2020) ressaltaram que a conversão do registro figural para o simbólico numérico teve destaque com a utilização do GeoGebra e foi primordial o embasamento da TRRS em atividades com professores.

As atividades cognitivas do registro (formação, tratamento e conversão) embasam a aprendizagem matemática, segundo Raymond Duval. Entendemos que podem estar mais presentes em sala de aula, e essa atribuição é do professor, pois sendo ele quem busca, organiza materiais, realiza a intermediação, perpassando os conteúdos, utilizando TDIC, livros didáticos ou materiais pré-determinados, enfim, diante das possibilidades que estão a seu alcance, ele pode decidir, como apresentar aos estudantes opções para estudar. Tornar explícitas as atividades semiocognitivas requeridas para a aprendizagem, nos lembra Raymond Duval (2003) que não é fácil, porém necessário.

Durante a pesquisa foi possível encontrar atividades no GeoGebra que oportunizam a conversão e o ensino da função quadrática, analisadas e compartilhadas no Produto Educacional. O Produto Educacional elaborado, nomeado por nós de Proposta de Ensino, é a contribuição dessa pesquisa para que professores de Matemática utilizem a TRRS e o GeoGebra em suas aulas e relacionem o conhecimento matemático de forma integrada ao cotidiano. Ademais, outras pesquisas embasadas pela teoria e em TDIC poderão ser realizadas envolvendo objetos matemáticos ou outras áreas do conhecimento e em todos os níveis de ensino, pois as reflexões sobre aspectos do ensino e da aprendizagem apresentados por Raymond Duval, favorecem o olhar amplo e interdisciplinar envolvendo os aspectos registrados nessa pesquisa e outros constantes na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Destacamos o Produto Educacional (Proposta de Ensino), intitulado: “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS” resultante desta pesquisa como uma ideia que tem potencial para fomentar outras pesquisas, baseadas em vivências e inquietações como as da pesquisadora, envolvendo o estudo da função quadrática ou outros objetos matemáticos e/ou outras perspectivas. O Produto Educacional (Proposta de Ensino) da pesquisa é flexível, editável e possui acesso gratuito no GeoGebra e no repositório da UFFS. O professor pode utilizá-lo juntamente com outros recursos para a elaboração de planos de aula envolvendo atividades cognitivas para o ensino e a aprendizagem da função quadrática.

8 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. S. **Elaboração de projeto, TCC, dissertação e tese**: uma abordagem simples, prática e objetiva. 2.ed. São Paulo: Atlas, 2014.

ANDRADE, M. A.; BRANDÃO, J. C.; SANTOS, M. J. C. **O sociointeracionismo de Vygotsky na aprendizagem das funções quadráticas: um estudo com a mediação do *software* GeoGebra.** Revista Tangram, MS, v. 05, n. 01, 2595-0967, jan/mar 2022.

ARROYO, M. G. **Ofício de Mestre**: imagens e auto-imagens. 3.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Almedina, 2016.

BEHRENS, M. A. Projetos de Aprendizagem Colaborativa num Paradigma Emergente In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19.ed. São Paulo: Papirus, 2011.

BORBA, M. C. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento/Marcelo de Carvalho Borba, Ricardo Scucuglia R. da Silva, George Gadanidis. 1.ed.; 1.reimp. Belo Horizonte: Autentica, 2015 – (Tendências em Educação Matemática)

BORBA, M. C. **Vídeos na Educação Matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais/Marcelo de Carvalho Borba, Daise Lago Pereira Souto, Neil da Rocha Canedo Junior. Belo Horizonte: Autentica, 2022. (Tendências em Educação Matemática)

BORTOLOSSI, H. J.; REZENDE, W. M.; PESCO, D. U. **GeoGebra**: Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em: 08 fev. 2023.

BORTOLOSSI, H. J. **O uso do *software* gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Estatística e Probabilidade**. Vidya, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 429 - 440, jul./dez. 2016.

BRANDT, C. F.; BÚRIGO, R. O ensino das funções a partir de uma análise semiocognitiva. In: MORETTI, M. T.; SABEL, E. (org.). **Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval.** Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2022.

BRASIL. Casa Civil. 90% dos lares brasileiros já tem acesso à internet no Brasil, aponta pesquisa. Disponível em: < https://www.gov.br/casacivil/pt-br/assuntos/noticias/2022/setembro/90-dos-lares-brasileiros-ja-tem-acesso-a-internet-no-brasil-aponta-pesquisa> Publicado em 19 set. 2022. Acesso em: 05 jul. 2024.

CONTE, E.; MARTINI, R. M. F. **As Tecnologias na Educação**: uma questão somente técnica? Educação & Realidade, *[S. l.]*, v. 40, n. 4, 2015. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/educacaoerealidade/article/view/46599>. Acesso em: 05 jul. 2024.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução: Magda França Lopes. – 3 ed. – Porto Alegre: ARTMED, 2010.

CRESWELL, J. W. **Pesquisa de métodos mistos** [recurso eletrônico] / CRESWELL J.W.; CLARK V. L. P. Tradução: Magda França Lopes; Revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2013

DUVAL, R. **Gráficos e equações**: a articulação de dois registros, 1988. Trad. Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT, eISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**, 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível em: DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

DUVAL, R. Escritos simbólicos e operações heterogêneas de substituição de expressões: as condições de compreensão em álgebra elementar. Trad. Méricles Thadeu Moretti. In.: **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval** [Recurso Eletrônico] / MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. (orgs) – Florianópolis : Ed. REVEMAT/UFSC. 485 p., 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLICK, U. **Introdução à Pesquisa Qualitativa.** 3. ed. São Paulo: Armazém Digital Editoração Eletrônica, 2009.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa** qualitativa (recurso eletrônico) / tradução Roberto Cataldo Costa; consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição Dirceu da Silva. – Dados eletrônico. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FREITAS, R. Artigo Produtos Educacionais na Área de Ensino da CAPES: o que há além da forma? Educação Profissional e Tecnológica em Revista, v. 5, n° 2, 2021 – Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/ept/issue/view/65> Acesso em 05 set. 2023.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/u/adilsonvb> Autor: Adilson A. Vilas Boas. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/V66M2MgB> Autor: Alexandre Trocado. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/j2jxswcq> Autores: André Luiz Souza Silva, Simona Riva. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cBNjycJP> Autor: Jorge Cássio. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/etgmwu5x> Autora: Lúcia Maria Santos. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xPFKwwuw> Autor: Luiz Geraldo da Silva. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r#material/buzdks8c> Autora: Thais de Carvalho. Acesso em: 21 jun. 2024.

GIL, A. C. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 1. ed. – Barueri [SP], Atlas, 2021.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 7. ed. – Barueri [SP], Atlas, 2022.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A. Mídias digitais na educação matemática. In.: GRAVINA, M. A. et Al. (Orgs.). **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

IBGE, **Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2019**. Disponível em: <https://educa.ibge.gov.br/jovens/materias-especiais/20787-uso-de-internet-televisao-e-celular-no-brasil.html>. Acesso em 24 nov. 2023.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

LIBÂNEO, J. C. **Políticas educacionais no Brasil**: desfiguramento da escola e do conhecimento escolar. Cadernos de Pesquisa v. 46, n. 159, p.38-62 jan./mar. PUC/Goiás, 2016.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. Metodologia científica. Atualização João Bosco Medeiros. 8. ed. – Barueri [SP]: Atlas, 2022.

MASETTO, M. T. Mediação Pedagógica e o uso da tecnologia In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19. ed. São Paulo: Papirus, 2011.

MENONCINI, L. **O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área.** Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de

Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2018.

MENONCINI, L.; MORETTI, M. T. **A equivalência de áreas no estudo da integral definida**: um olhar das representações semióticas. Educação Matemática em Revista – RS. Ano 21, n. 21, v.2, p. 114, 2020.

MORAN, J. M. Ensino e Aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19. ed. São Paulo: Papirus, 2011.

MORAN, M.; FRANCO, V. S. **Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v. 10, n. 02, p. 61 - 75, 2015.

MORAN, M.; RODRIGUES, C. L. H. **Apreensões operatórias em registros figurais: um estudo com alunos de Licenciatura em Matemática.** EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - PE – v. 08, n. 01 – 2017.

MORETTI, M. T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de Matemática.** Revista Contrapontos, Itajaí, SC, ano 2, n. 3, p. 343-362, set./dez. 2002. Disponível em: <https://siaiap32.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180>. Acesso em 16 ago. 2023.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de Interpretação Global no esboço de curvas no Ensino Universitário. In.: BRANDT, C. F.; *et.al* (Orgs.). **As contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

MORETTI, M. T. **A compreensão de texto segundo Raymond Duval.** Revista Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática, v. 4, n. 2, p. 92 - 112, 26 jan. 2023.

MORETTI, M. T. Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2024.

MUNIZ, M.; GITIRANA, V.; LUCENA, R. **Aprendizagem de funções à luz da teoria dos registros de representação semiótica: uma revisão sistemática da literatura.** Educação Matemática em Revista Brasília, v. 27, n. 77, p. 58 - 69, out/dez 2022.

NÓBRIGA, J. C. C.; SIPLER, I. Z. **Livros Dinâmicos de Matemática.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020 - ISSN 2237-9657. Disponível no *site* GeoGebra. Acesso em 05 mai. 2023.

OLIVEIRA, E. R.; CUNHA, D. S. **O uso da tecnologia no ensino da Matemática**: contribuições do *software* GeoGebra no ensino da função do 1º grau. *Revista Educação*

Pública, v. 21, nº 36, 28 de setembro de 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribuicoes-do-isoftwarei-geogebra-no-ensino-da-funcao-do-1-grau>

OLIVEIRA, E. G.; BRANDT, C. F. **O uso das tecnologias digitais no ensino remoto da matemática e aprendizagem da função afim, segundo Raymond Duval:** Revisão sistemática da literatura. Revista Brasileira de Pós-Graduação (RBPG), Brasília, v. 18, n. 39, p. 1-22, jan./jun., 2022.

OLIVEIRA, T. S. P.; SILVA, C. S.; LIMA, A. C. S. O *software* GeoGebra no ensino da função quadrática. Número Especial – I Encontro Cearense de Educação Matemática – v. 08, n. 23, p. 861 – 876, 2021

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Trad. Franciso Pereira. 16.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

PASA, B. C. Tese doutorado **A Noção de infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio**: por uma abordagem de interpretação global das propriedades figurais. Orientador Méricles Thadeu Moretti. Biblioteca Universitária da UFSC, 2017.

PASA, B. C.; MORETTI, M. T.; BINOTTO, D. Caminho alternativo para esboçar curvas: possibilidade a partir da taxa de variação da função e da noção de infinitésimo. In: MORETTI, M. T.; SABEL, E. (org.). **Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval.** Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2022.

PINHEIRO, R. **Como será a educação pós-pandemia?** Direcional Escolas: A revista do gestor escolar. 23 jun. 2020. Disponível em: <https://direcionalescolas.com.br/como-sera-a-educacao-pos-pandemia/>

PAIXÃO, F. C.; MORAN, M.; REZENDE, V. **Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica**. Boletim online de Educação Matemática, Florianópolis, v. 08, n. 15, p. 109 - 127, out/2020.

REZENDE, W. M. **Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico.** Anais do IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2007.

RIBEIRO, C.; KORALESKI, L. G.; ROMAN, M. A. P. Professores autores de sua profissão: desafios e perspectivas no ofício de mestre. In.: BAGNARA, I. C.; ODY L. C. (orgs) **Formação e Trabalho docente**: Ensaios reflexivos. Curitiba: CRV, 2023.

SANTANA, L. T.; GUALANDI, J. H.; SOARES M. R. **Registros de representação semiótica: experiência no ensino de funções quadráticas com alunos do Ensino Médio Integrado.** Educação Matemática Debate, Montes Claros, Brasil v. 03, n. 07, p. 08 - 30, jan/abr 2019.

SARTORI, J.; PEREIRA, T. I. **A construção do conhecimento no mestrado profissional em educação.** Porto Alegre: Cirkula, 2019.

SCHEFFER, N. F. **Tecnologias digitais e representação matemática de movimentos corporais**. Curitiba: Appris, 2017.

SCHEFFER, N. F.; COMACHIO, E.; CENCI, D.; HEINECK, A. E. Uma interação com objetos virtuais de aprendizagem na discussão de conceitos geométricos. In.: SCHEFFER, N. F.; COMACHIO, E.; CENCI, D. (orgs) **Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018.

SILVA, M. O. Dissertação: **Esboço de curvas**: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. UFSC. Florianópolis. 2008.

SILVA, F. S.; MORETTI, M. T. **A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 20, n. 02, p. 283 - 308, 2018.

SILVA, I. B.; PRANDO, G.; GUALANDI, J. H. **Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a análise do capítulo de funções de um livro didático.** Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), Brasil v. 04, e202006, p. 1 - 16, 2020.

SOUZA, J. **Matemática**: Funções e suas aplicações. Multiversos. São Paulo: Editora FTD, 2020.

SOUZA, M. T. A.; FONTENELE, F. C. F. **O uso do GeoGebra nas aulas remotas: uma abordagem do conteúdo de função quadrática.** Número Especial – I Encontro Cearense de Educação Matemática – v. 08, n. 23, p. 752 – 767, 2021.

TAMASHIRO, C. B. O. **Desenvolvimento de aulas práticas no ensino remoto e híbrido**: práticas pedagógicas e ferramentas digitais para a aprendizagem a distância / Camila Baleiro Okado Tamashiro, Geraldo José Sant´Anna. – São Paulo, SP: Expressa, 2021.

VASCONCELLOS, C. S. **Construção do conhecimento em sala de aula**. 16.ed. São Paulo; Libertad, 2005. – (Cadernos Pedagógicos do Libertad; v. 2).

APÊNDICE A – Proposta de Ensino no GeoGebra

Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS ERECHIM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO (PPGPE)

CADERNO DE ATIVIDADES DE FUNÇÃO QUADRÁTICA À LUZ DA TRRS

LUCINÉIA GIACOMELLI KORALESKI
PROFA. DRA. BÁRBARA CRISTINA PASA
PROFA. DRA. NILCE FÁTIMA SCHEFFER

ERECHIM - RS
2024

CADERNO DE ATIVIDADES DE

FUNÇÃO QUADRÁTICA

À LUZ DA TRRS

PPGPE
Mestrado Profissional em Educação
UFFS CAMPUS Erechim

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
UFFS
GPTMEM
GRUPO DE PESQUISA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS ERECHIM

Mestrado Profissional em Educação

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS ERECHIM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO (PPGPE)

PRODUTO EDUCACIONAL

EXPEDIENTE

Diretor da UFFS *Campus* Erechim-RS
Prof. Dr. Luís Fernando Santos Corrêa da Silva

Coordenadora Acadêmica da UFFS *Campus* Erechim-RS
Profa. Dra. Cherlei Marcia Coan

Coordenador do Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação (PPGPE)
Prof. Dr. Almir Paulo dos Santos

Professoras Orientadoras da Pesquisa
Profa. Dra. Bárbara Cristina Pasa
Profa. Dra. Nilce Fátima Scheffer

Pesquisadora Principal
Lucinéia Giacomelli Koraleski

ERECHIM - RS
2024

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Apresentamos o Produto Educacional (PE) resultante da pesquisa para obtenção do título de Mestra em Educação sobre **O estudo da função quadrática com o GeoGebra à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** Este PE pode ser entendido como uma Proposta de Ensino para as funções quadráticas, nomeado de **Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).**

O PE é um livro no GeoGebra constituído por atividades analisadas e algumas construídas para o estudo da função quadrática com discussões embasadas na TRRS. Optamos, entretanto, por construir esse arquivo, que será disponibilizado no repositório da UFFS, para nortear o trabalho do professor que fará uso do Caderno no GeoGebra.

Acessando o Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS no GeoGebra, formato de "livro", pelo *link* <https://www.geogebra.org/m/qktubcya>, é possível encontrar uma breve descrição do PE e dos aspectos utilizados para a análise e construção das atividades; os capítulos com as atividades sobre conceitos da função quadrática, crescimento e decrescimento, vértice, translação, com considerações relacionadas à teoria de aprendizagem matemática.

Apresentamos aqui o roteiro do livro do GeoGebra com os *links* para acesso. Também exibimos prints das atividades com comentários a fim de complementar o que está postado no *software*.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/cvzwwfez>

2.1 CADERNO DE ATIVIDADES DE FUNÇÃO QUADRÁTICA À LUZ DA TRRS

A intensificação do uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) nos ambientes educacionais, ocorreu de forma acelerada durante a pandemia da covid-19, originada pelo vírus SARS-CoV-2, e desde então tem sido vivenciada por toda a sociedade. Desde o surgimento da epidemia na China em dezembro de 2019, especialmente após sua declaração como pandemia em março de 2020, houve a necessidade de evitar o contato físico, o que impulsionou a adoção acelerada de soluções tecnológicas para a continuidade das práticas educacionais.

Neste cenário, para que fosse possível a continuidade do processo educacional, governantes, famílias, professores e toda sociedade mobilizaram-se em torno da adaptação para que as aulas acontecessem de forma remota, numa tentativa de minimizar os impactos no ensino e na aprendizagem dos estudantes. "Isso porque, a nosso ver, o vírus SARS-CoV-2, um ator não humano, transformou abruptamente as relações de uso das tecnologias digitais em todos os setores da sociedade, particularmente nos processos de ensino e de aprendizagem na Educação Matemática." (Borba, 2022, p. 09).

Esse contexto evidenciou não apenas uma adaptação emergencial às novas condições de aprendizagem mediadas pelas TDIC, mas, também, uma mudança na forma como o conhecimento é acessado e produzido, refletindo um momento de significativa transição educacional global. Diante dessa transição, o presente PE, construído paralelamente à dissertação intitulada **O estudo da função quadrática com o GeoGebra à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**, constitui-se numa possibilidade de refletir sobre a utilização do *software* GeoGebra no estudo da função quadrática, ancorada em uma teoria de aprendizagem matemática – TRRS, de Raymond Duval, a qual explora como diferentes formas de registro de representação semiótica influenciam a aprendizagem dos objetos matemáticos.

Esse PE é uma construção no *software* Geogebra no formato de "livro", nominado de Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS. As atividades presentes no caderno propõem o ensino dos conceitos da função quadrática embasado na TRRS de Raymond

Duval, utilizando o *software* GeoGebra. Algumas peculiaridades e aplicações sobre a função quadrática estão contempladas de forma a oportunizar o aprendizado e conhecimento envolvendo a TRRS, a função e Matemática com a utilização de TDIC.

3 ASPECTOS TEÓRICOS ENVOLVENDO AS ATIVIDADES

3.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DUVAL

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/rfgqxmyc>

3.1.1 Conhecendo a TRRS

Neste Caderno constam atividades para o ensino dos conceitos da função quadrática embasadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval utilizando o *software* GeoGebra. Inicialmente, abordamos aspectos e definições da TRRS sobre as atividades cognitivas relevantes para o ensino e a aprendizagem matemática:

Objeto - O "objeto" é o conteúdo a ser estudado, na nossa pesquisa e no “livro” no GeoGebra é a função quadrática.

Registro de Representação - Cada representação apresenta um conteúdo sobre o objeto, podendo ser registro de representação gráfico, algébrico, aritmético, discursivo, entre outros possíveis para que a aprendizagem ocorra.

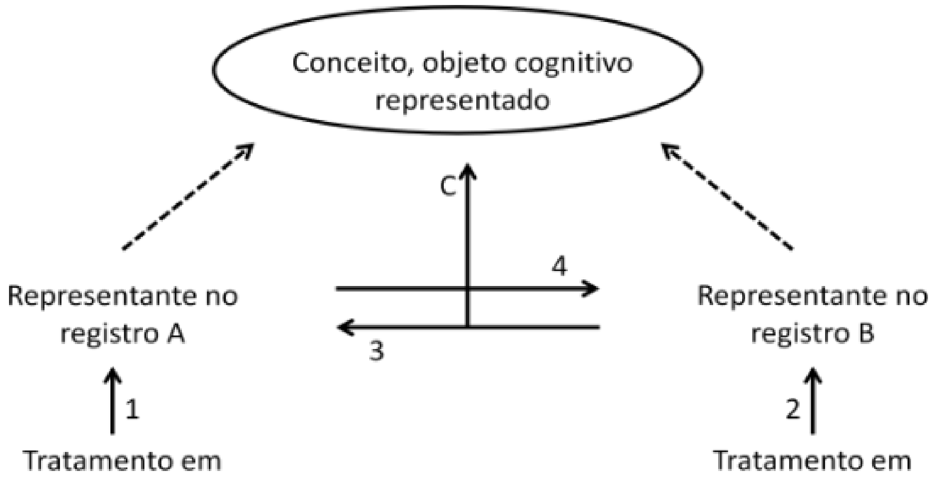
Tratamento - São transformações dentro de um mesmo registro de representação. Por exemplo: aplicar a fórmula para encontrar as raízes da função quadrática.

Unidades significativas - Estão presentes em mais de um registro de representação. As raízes encontradas com a fórmula na representação algébrica são visualizadas na representação gráfica, nos pontos de intercessão com o eixo x, isso quando há raízes reais para a função. No exemplo da expressão algébrica $y = ax^2 + bx + c$, em que as unidades significativas da expressão algébrica são a, b e c e as unidades significativas gráficas, também chamadas de variáveis visuais, são a concavidade, o eixo de simetria à esquerda ou à direita e onde corta o eixo y.

Conversão - Atividade cognitiva essencial para a aprendizagem, é a coordenação entre registros de representação semiótica diferentes. Essa coordenação pode ocorrer a partir de unidades significativas dos registros de representação com a compreensão e associação das unidades significativas de, ao menos, dois registros de representação.

No esquema a seguir, Duval (2012) apresenta sua hipótese para que ocorra a aprendizagem matemática a partir das conversões entre registros de representação.

Figura 1 - Hipótese fundamental de aprendizagem



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Assim, para que ocorra a aprendizagem e a apreensão integral (seta C) do objeto matemático, além de conhecer ao mínimo dois registros de representação do mesmo objeto e os tratamentos nesses registros, setas 1 e 2, é essencial a coordenação desses registros (setas 3 e 4). Diante disso, é necessário que no ensino no caso de funções, essas ideias sejam valorizadas e evidenciadas.

A seguir, apresentamos as atividades que constam no caderno com algumas considerações sobre como se pode conduzir o ensino na perspectiva deste trabalho.

4 RESGATE DA FUNÇÃO QUADRÁTICA – ATIVIDADE 1

Nesse capítulo, acessível pelo *link* <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#chapter/1080902> são encontradas quatro atividades de resgate/conhecimento da função quadrática que visam explorar conceitos da função quadrática e constam no GeoGebra como subcapítulos: Visualizando a Função Quadrática; Existem Raízes?; Identificando Coeficientes; e Figura Geométrica (parábola). A seguir explicitamos algumas potencialidades das atividades e sugestões:

- Representação algébrica do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- As conversões ocorrem a partir dos coeficientes a, b e c, ou seja, o recurso para conversão são os coeficientes da expressão algébrica (unidades significativas da expressão algébrica).
- As variáveis visuais (unidades significativas gráficas) da figura geométrica (parábola) e seu comportamento no plano cartesiano são: a concavidade, eixo de simetria à esquerda ou à direita e onde corta eixo y.
- Nas atividades e no retorno das respostas podem ser trabalhados alguns tratamentos e a criação de outras questões/atividades envolvendo as raízes, o delta, o vértice e o estudo do sinal.
- Unidades significativas algébricas (coeficientes a, b e c) e gráficas (a concavidade, eixo de simetria à esquerda ou à direita e onde corta eixo y).

Ao utilizar os *links* <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/upy9twwc> das atividades deste PE, acontece o direcionamento para o "Caderno de atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS".

4.1 VISUALIZANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA

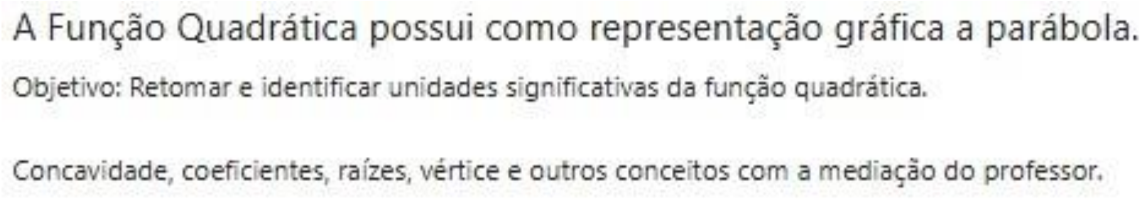
A Figura 2 é um print da *interface* da atividade onde constam os objetivos e o que pode ser trabalhado. O GeoGebra permite a visualização simultânea da janela algébrica e gráfica, como na Figura 3, possibilitando que aspectos da TRRS venham à tona no ensino contribuindo com a aprendizagem matemática.

O gráfico e as questões sugeridas da atividade oportunizam, com a medicação do professor, retomar ou apresentar a função quadrática no plano cartesiano identificando as raízes, intercessão com o eixo y, a relação entre o coeficiente a e a concavidade e ponto de mínimo.

Nas atividades, os objetivos e possibilidades de conteúdos, estão apresentados com as imagens do que está postado no GeoGebra e sugestões para o ensino da função quadrática com base em aspectos da TRRS e o *software* GeoGebra. Iniciamos com a atividade de visualização da função quadrática pela sua representação gráfica:

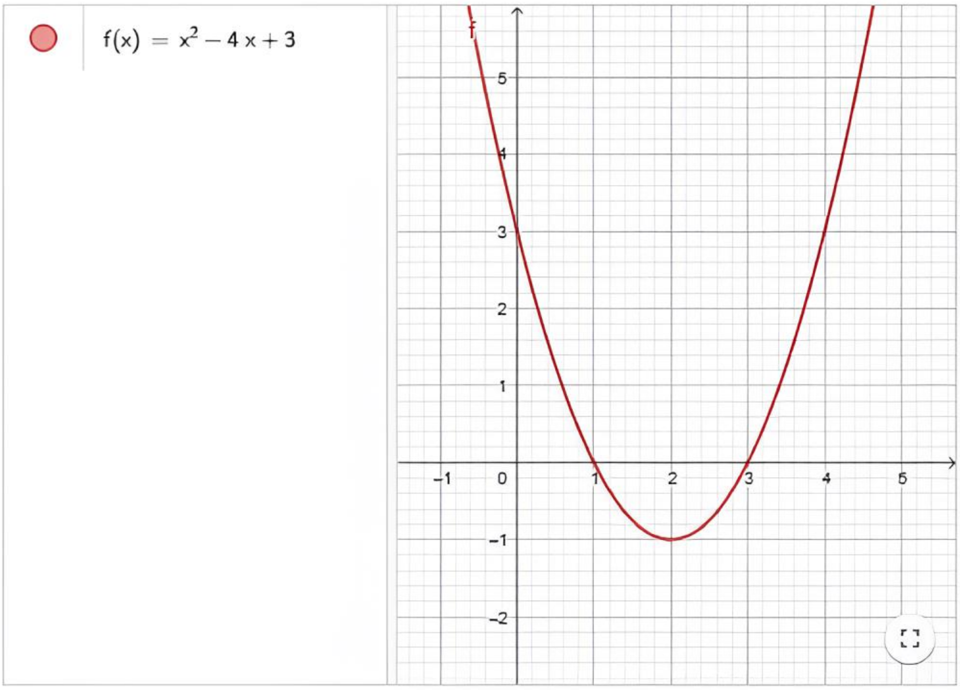
Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/upy9twwc>

Figura 2 - *Interface* no GeoGebra da Atividade Visualizando a função quadrática



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 jul. 2024.

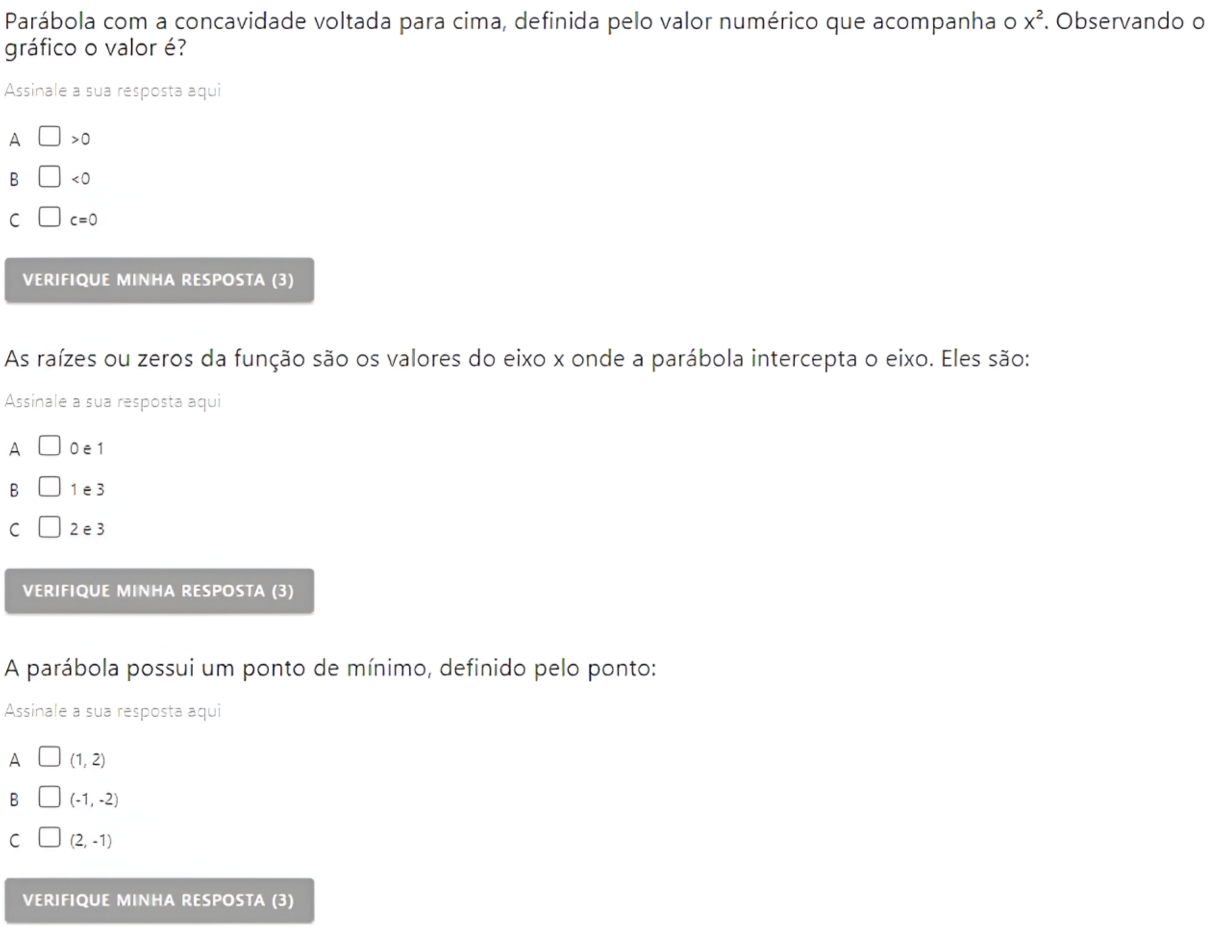
Figura 3 - *Interface* no GeoGebra do Gráfico da Atividade Visualizando a função quadrática



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

Com a visualização da parábola no *software* apresentamos algumas questões para o resgate do conteúdo <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/upy9twwc>. Outras questões e abordagens podem ser realizadas pelo professor conforme o plano de aula, sendo importante a apresentação e intermediação pelo professor para que o estudante utilize as possibilidades do GeoGebra e o raciocínio para coordenar as características da função quadrática cognitivamente.

Figura 4 - *Interface* no GeoGebra das questões da Atividade Visualizando a função quadrática



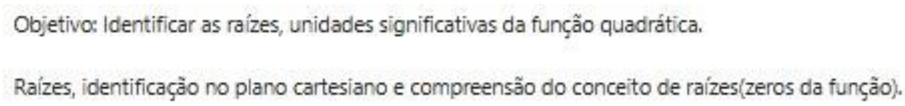
Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

4.2 EXISTEM RAÍZES?

Com a parábola traçada no plano cartesiano, o estudante pode identificar as raízes e responder à pergunta "Existem raízes?". A atividade pode ser utilizada como retomada do conteúdo ou juntamente com uma explicação do professor como introdução para o estudo das raízes da função quadrática. Pode ser solicitado aos estudantes para explicarem com as próprias palavras o significado de encontrar raízes ou zeros da função quadrática enquanto visualizam as parábolas no plano cartesiano.

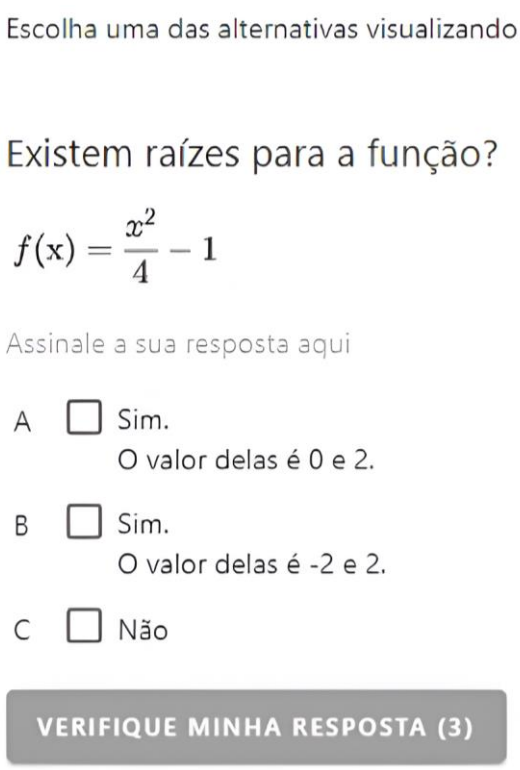
Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/mdpkrnfz>

Figura 5 - *Interface* no GeoGebra da Atividade Existem raízes?



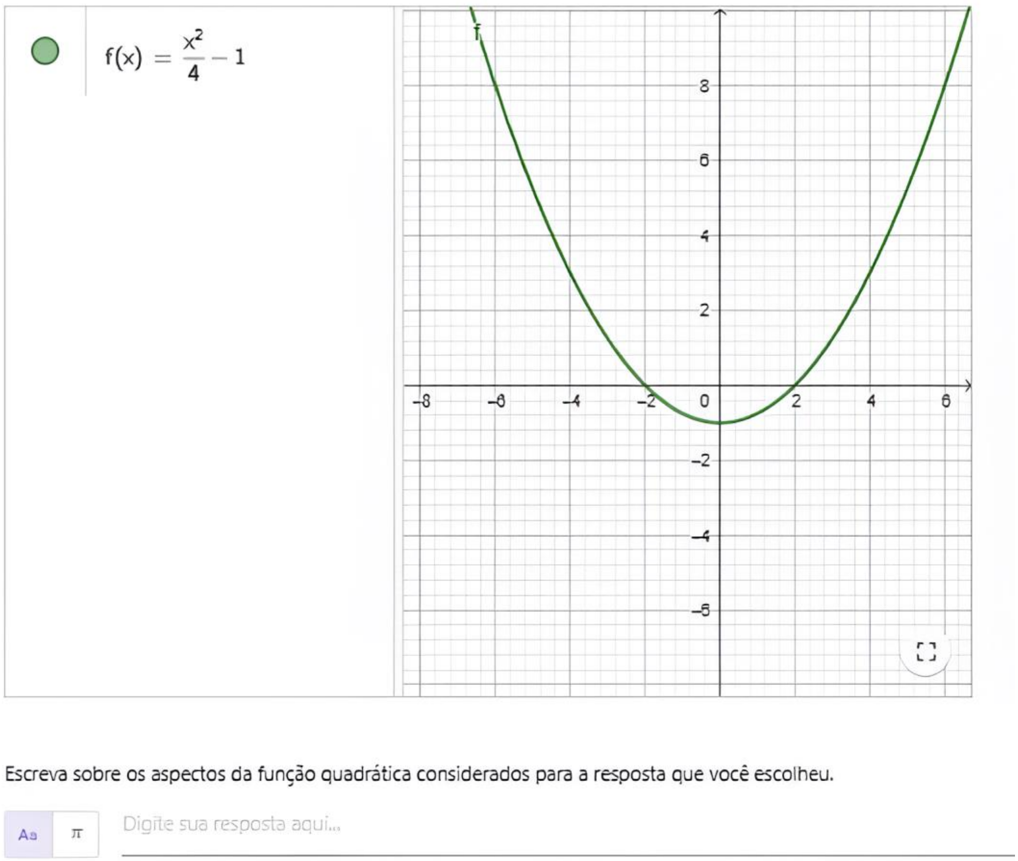
Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

Figura 6 - *Interface* no GeoGebra das questões da Atividade Existem raízes?



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

Figura 7 - *Interface* no GeoGebra da parábola no plano cartesiano da Atividade Existem raízes?



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

4.3 IDENTIFICANDO COEFICIENTES

Entre a representação gráfica e algébrica, a identificação dos coeficientes a, b e c na representação algébrica $y = ax^2 + bx + c$ e o cálculo do delta (Δ) possibilita interpretações sobre a função quadrática necessárias para a conversão que será abordada nas atividades seguintes. Dessa forma, trazemos um exemplo de atividade para a identificação dos coeficientes:

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/qrp28cek>

Figura 8 - *Interface* no GeoGebra da Atividade Identificando coeficientes

Objetivo: Retomar, determinar e interpretar unidades significativas da função quadrática.

Coeficientes, raízes e características da função quadrática.

Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

Figura 9 - *Interface* no GeoGebra das questões da Atividade Identificando coeficientes

Na Função Quadrática f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ temos que valor de *a* é o valor que está **multiplicando (coeficiente)** x^2. *b* é o valor que **multiplica** o *x* e o *c* é definido pela variável independente.

Identifique os valores de a, b e c:

$f(x)= \frac{x^2}{4} - 1$

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ $a= \frac{1}{4}$
b= 0
c= -1

B ☐ $a= \frac{1}{4}$
b= 1
c= 1

C ☐ $a= \frac{1}{4}$
b= 1
c= 0

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Na Função Quadrática f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ temos que valor de *a* é o valor que está **multiplicando (coeficiente)** x^2. *b* é o valor que **multiplica** o *x* e o *c* é definido pela variável independente.

Identifique os valores de a, b e c:

$f(x)= \frac{x^2}{4} - 1$

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ $a= \frac{1}{4}$
b= 0
c= -1

B ☐ $a= \frac{1}{4}$
b= 1
c= 1

C ☐ $a= \frac{1}{4}$
b= 1
c= 0

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

Figura 10 - *Interface* no GeoGebra da descrição do delta (Δ)

Após a identificação dos coeficientes pode-se encontrar o valor do discriminante da função, sendo representado pela letra delta (Δ), temos Δ = b^2-4ac e tem a finalidade de identificar quantas soluções tem a função. Dessa forma, para Δ = b^2-4ac, tem-se que:

Se Δ > 0 a função terá duas raízes reais e distintas;
Se Δ < 0 a função não terá uma raiz real; e
Se Δ = 0 a função terá duas raízes reais e iguais.

O número de raízes está diretamente ligado ao número de intersecções da representação gráfica com o eixo x (abcissa), ou seja, quando há duas raízes reais e distintas, a representação gráfica, também
nominada parábola, intercepta o eixo x nos pontos (x_1, 0) e (x_2, 0); quando não há raiz real, a parábola não intercepta o eixo x; e quando há duas raízes reais e iguais, a parábola é tangente ao eixo no ponto (x, 0).

Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 17 mai. 2024.

4.4 FIGURA GEOMÉTRICA (PARÁBOLA)

Essa atividade original está postada no GeoGebra[12] e permite inúmeras compreensões de aspectos que identificam a função quadrática. Oportuniza movimentar o controle deslizante a, com isso, visualizar a parábola aumentando e diminuindo sua abertura, voltada para cima quando o valor de a for positivo, voltada para baixo quando o valor de a for negativo ou uma reta, e assim não sendo quadrática, quando $a = 0$. Ao mesmo tempo, a equação surge com os valores atualizados, o estudante relaciona com a utilização do *software* as duas representações sem obrigatoriamente usar a representação tabular.

Na representação algébrica $f(x) = ax^2 + bx + c$, é condição necessária que o coeficiente a seja diferente de zero e sendo os valores dos coeficientes b e c também diferentes de zero, a visualização simultânea favorece a conversão, ou seja, a identificação de unidades básicas gráficas e simbólicas e, mais do que isso, a coordenação entre elas.

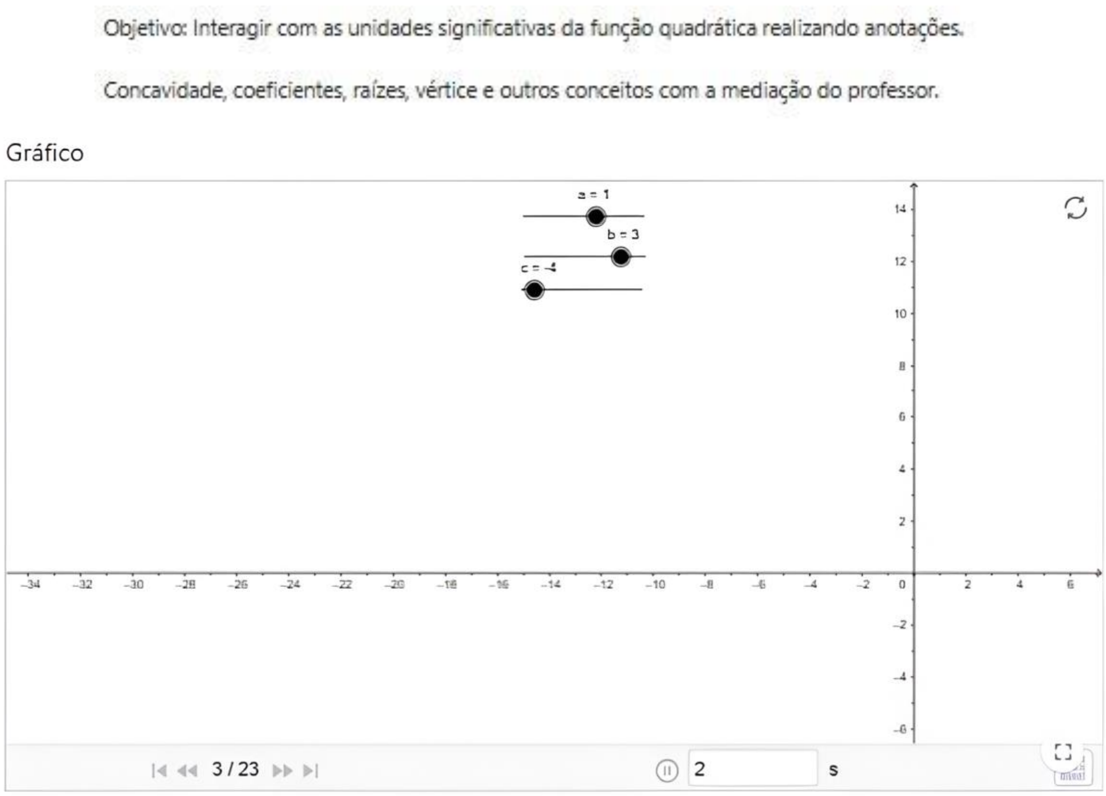
A atividade original foi, inicialmente, utilizada nas análises da pesquisa, apresentada na dissertação, copiada dentro do *software* GeoGebra para compor a elaboração do PE (Proposta de Ensino), sendo esse um recurso possível no GeoGebra, para que o professor possa editar e atribuir ao estudante as tarefas com acompanhamento das mesmas. Nas Figuras 11, 12 e 13 estão expostos prints das *interfaces* da atividade em seus diferentes momentos, ao todo são 23 momentos e acessando o *link* é possível interagir online:

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/ekrvrrgr>

---

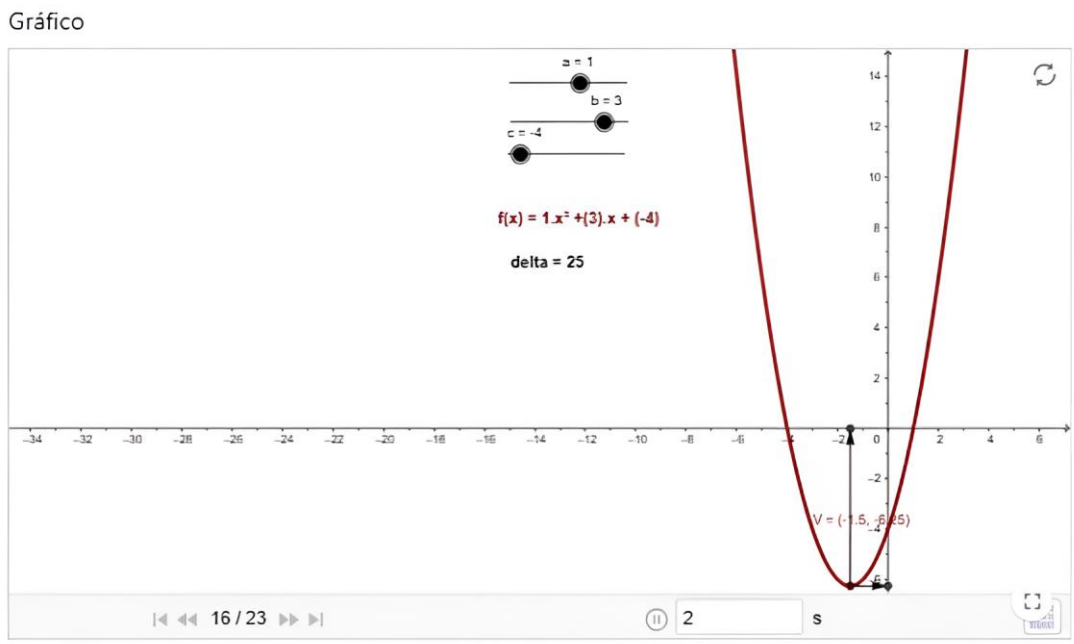
12 *Link* da atividade original <https://www.geogebra.org/m/VbXTYuPk>

Figura 11 - *Interface* no GeoGebra da Atividade Figura geométrica (parábola) no momento 3/23



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

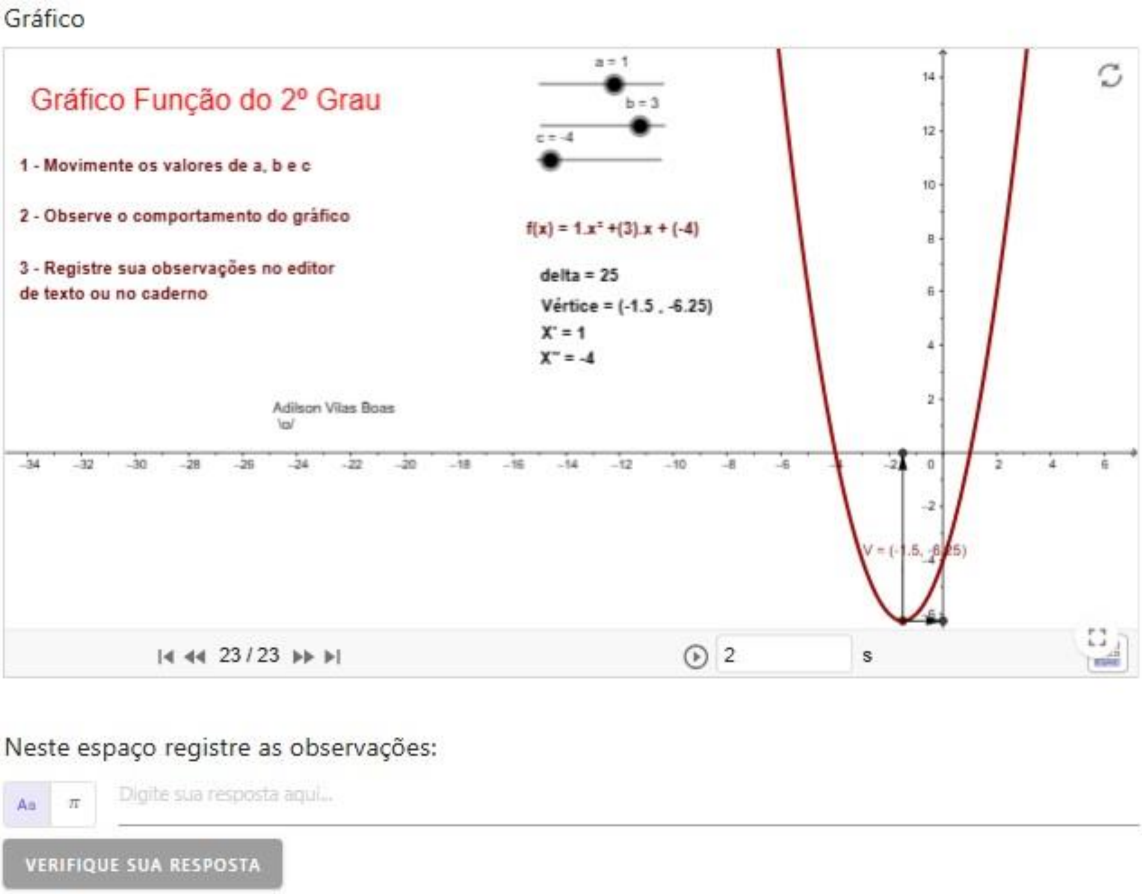
Figura 12 - *Interface* no GeoGebra da Atividade Figura geométrica (parábola) no momento 16/23



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

A atividade apresenta orientações e solicita registro das observações, conforme a Figura 13. Com a intenção de estimular a reflexão e resgate da função quadrática, algumas perguntas podem ser feitas, por exemplo: O que acontece quando for atribuído ao controle deslizante a o valor -1? O que acontece quando for atribuído ao controle deslizante a o valor -2? Da mesma forma para o controle deslizante c.

Figura 13 - *Interface* no GeoGebra da atividade Figura geométrica (parábola) completa



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

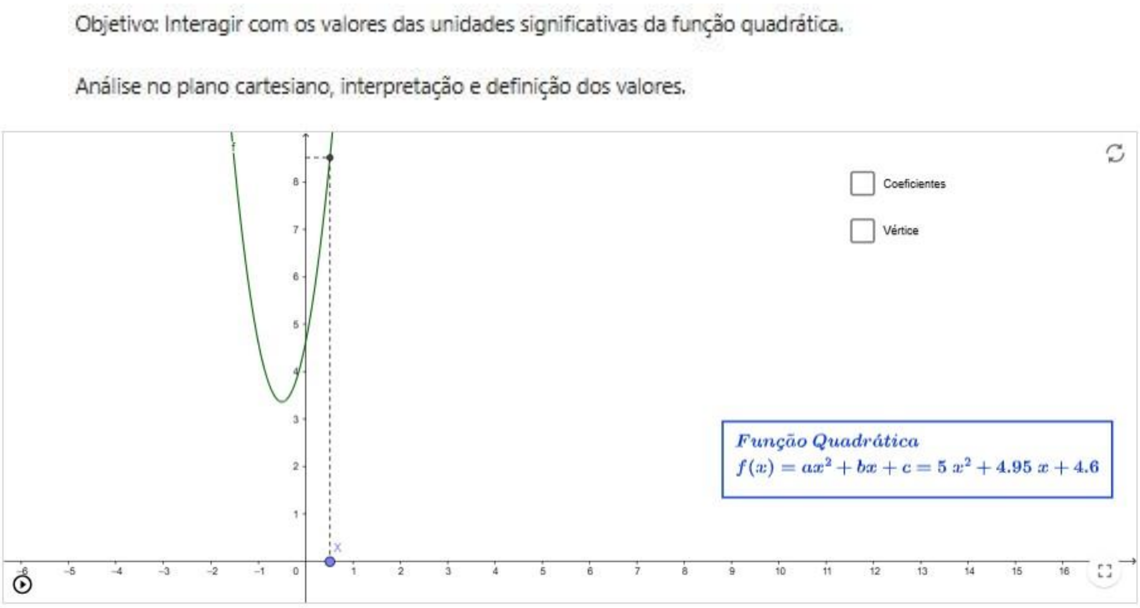
5 CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA – ATIVIDADE 2

Neste tópico do produto apresentamos outra atividade postada no GeoGebra[13] selecionada para análise e para compor o PE. Ela contém textos com explicações sobre a função quadrática e questões que proporcionam a reflexão, interação e a conversão entre os registros de representação, considerando as unidades significativas. Esta atividade orienta para os movimentos dos controles deslizantes e solicita a resposta, tendo em vista a unidade significativa no eixo das abcissas que informa, na representação gráfica, a partir de qual valor acontece o crescimento e decrescimento.

As figuras 14, 15, 16 e 17 expõem *interfaces* da atividade e do que pode ser trabalhado a partir dela. Esta atividade está acessível pelo *link*:

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/vknkswf8>

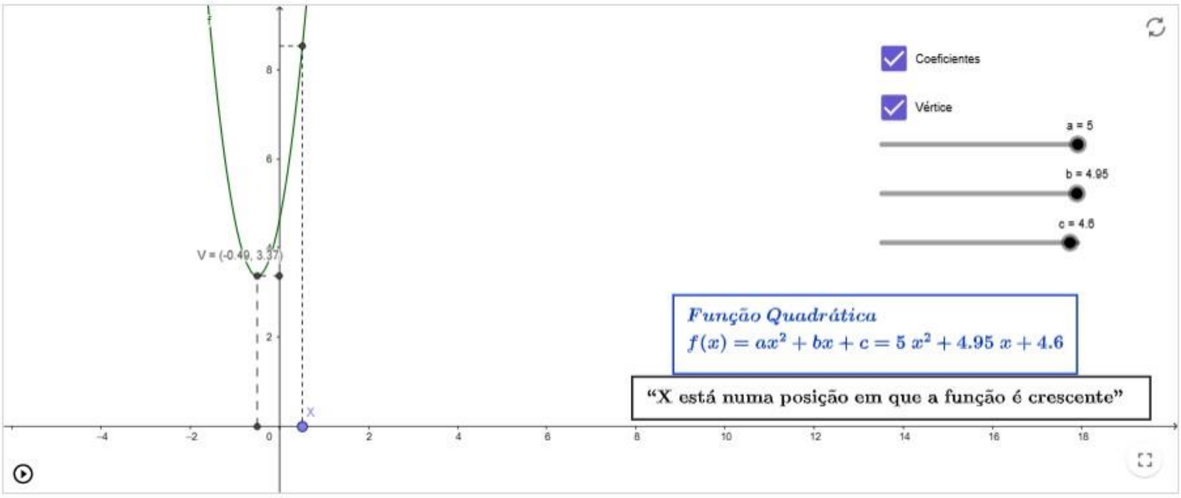
Figura 14 - *Interface* inicial no GeoGebra da atividade Crescimento e decrescimento



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

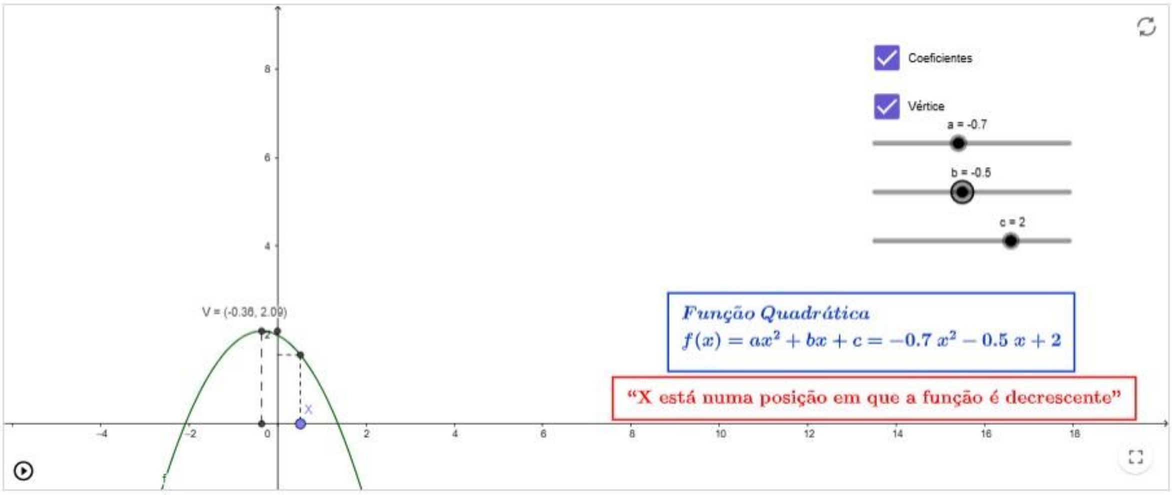
13 *Link* da atividade original <https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r#material/buzdks8c>

Figura 15 - *Interface* no GeoGebra numa posição crescente



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

Figura 16 - *Interface* no GeoGebra numa posição decrescente



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024

Figura 17 - *Interface* no GeoGebra de questões da Atividade Crescimento e decrescimento

Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 jul. 2024.

6 VÉRTICE – ATIVIDADE 3

Esta atividade foi analisada do GeoGebra[14] e apresenta vários aspectos importantes sobre a função quadrática com as definições em cores diferentes que atraem para a visualização.

Os tratamentos surgem na tela ao serem acionadas as caixas de seleção. As conversões são possibilitadas pelos coeficientes a, b e c da função $y = ax^2 + bx + c$ e pelas unidades significativas gráficas: concavidade da parábola, abertura da parábola, vértice, onde corta eixo y, raízes, diretriz, foco e eixo de simetria à direita ou à esquerda do eixo y.

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como o seu valor máximo ou mínimo. Por conseguinte, uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é simétrica em relação a um eixo vertical, também nominado eixo y (ordenada). Determinando a posição desse eixo, encontraremos a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice obteremos a ordenada, que é função da abscissa.

Embora seja possível abordar vários conteúdos da função quadrática com a atividade, trazemos como sugestão o trabalho com o vértice da parábola por estar presente no cotidiano em atividades industriais, agronômicas, esportivas e outras.

Perguntas feitas pelo professor podem complementar as atividades, por exemplo, em relação ao ponto de máximo ou mínimo, solicitando observação da atividade e perguntado para quais valores existem ponto de máximo ou mínimo.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/sxbmhnty>

Figura 18 - *Interface* inicial no GeoGebra da Atividade Vértice

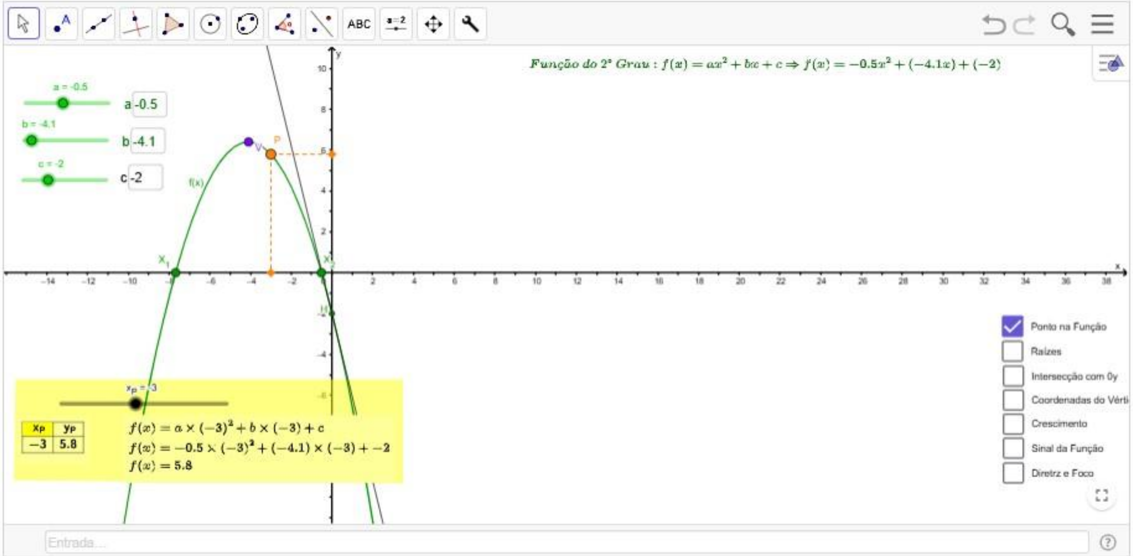
Objetivo: Interagir com os valores das unidades significativas da função quadrática utilizando as caixas de seleção.

Análise no plano cartesiano, interpretação e definição dos valores.

Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 jul. 2024.

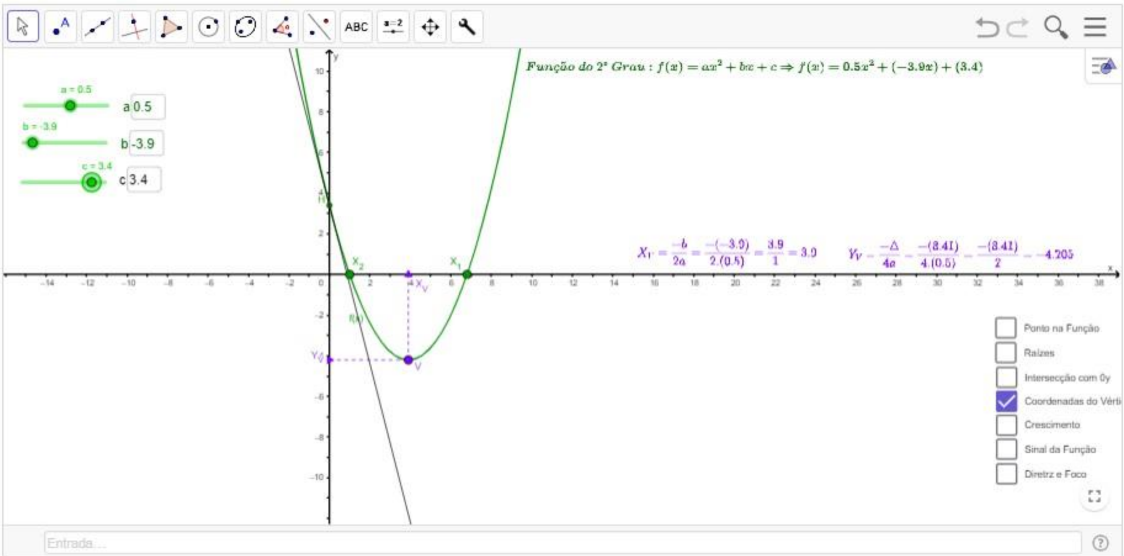
[14] *Link* da atividade original <https://www.geogebra.org/m/xPFKwwuw>

Figura 19 - *Interface* no GeoGebra com a caixa de seleção Ponto na Função acionada



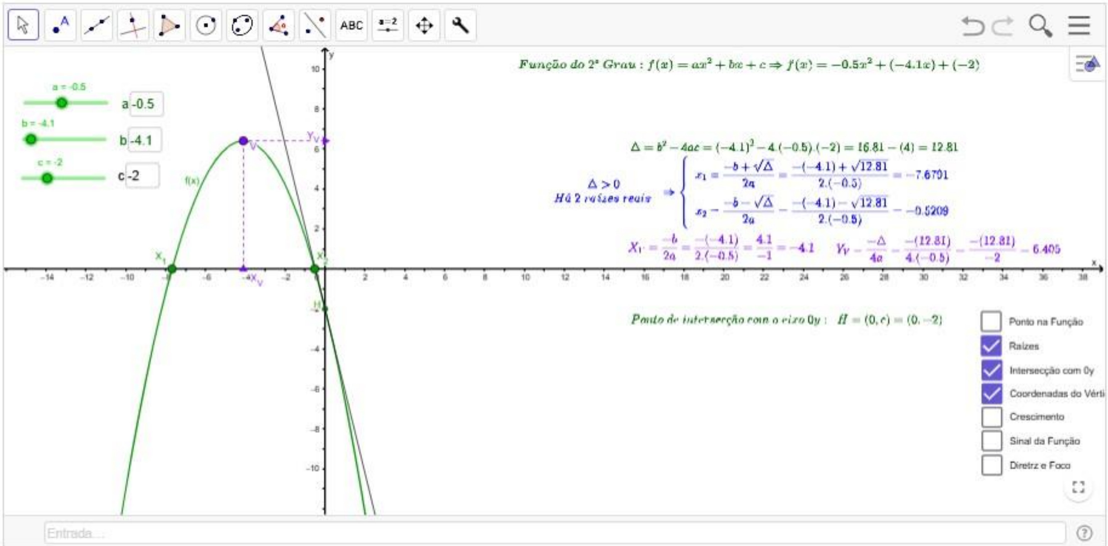
Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

Figura 20 - *Interface* no GeoGebra com a caixa de seleção coordenadas do vértice acionada



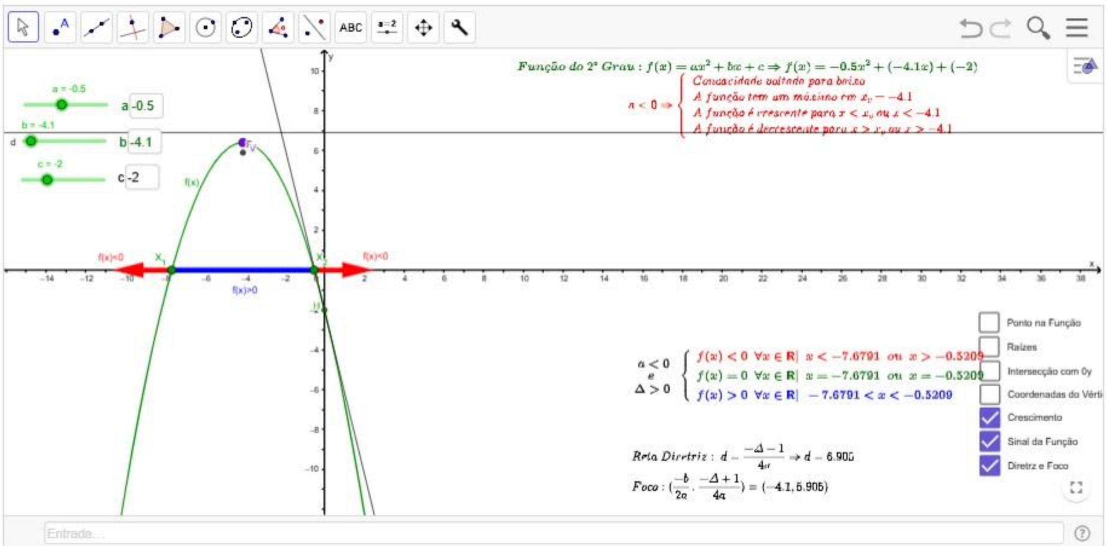
Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

Figura 21 - *Interface* no GeoGebra com algumas caixas de seleção acionadas da Atividade Vértice



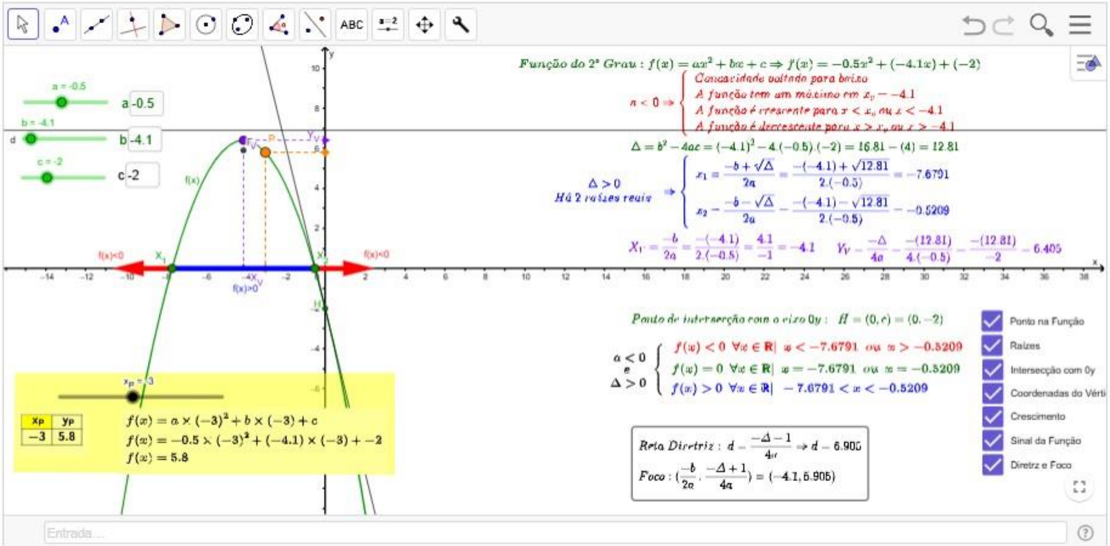
Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

Figura 22 - *Interface* no GeoGebra com algumas caixas de seleção acionadas da Atividade Vértice



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

Figura 23 - *Interface* no GeoGebra com todas as caixas de seleção acionadas da Atividade Vértice



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

7 O RECURSO DA TRANSLAÇÃO EM ATIVIDADE POSTADA NO GEOGEBRA – ATIVIDADE 4

Nas atividades anteriores, a conversão entre representações semióticas foi propiciada pelos coeficientes da expressão algébrica $y = ax^2 + bx + c$, influenciando a concavidade, o eixo de simetria e a intersecção com o eixo y. Esta atividade trabalha a translação da parábola enquanto recurso para o esboço gráfico e foi postada no GeoGebra[15] por licenciandos em Matemática do IFFluminense.

A atividade sobre transformações gráficas da função polinomial do 2º grau (quadrática), possibilita a conversão a partir da representação algébrica $y = a(x - h)^2 + p$, onde é possível partir de uma função "base" $f(x) = ax^2$ e acompanhar, por exemplo:

- Translação vertical de $f(x) = x^2$ para $f(x) = x^2 + 4$: o gráfico desloca-se 4 unidades na vertical para cima movimentando o p, sendo $a \neq 0$ e $h = 0$.

- Translação horizontal de $f(x) = x^2$ para $f(x) = (x + 4)^2$: o gráfico desloca-se 4 unidades à esquerda na horizontal movimentando o h, sendo $a \neq 0$ e $p = 0$.

A translação enquanto recurso para conversões é apresentada por Moretti (2003, 2024), porém, no ensino de funções, poucas vezes é trabalhado.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/yw2cwxen>

7.1 APRESENTAÇÃO DA TRANSLAÇÃO

A translação e as questões sobre as transformações no plano cartesiano dependem dos coeficientes a, h e p. São realizados tratamentos para escrever a expressão algébrica: $y = a(x - h)^2 + p$, translação vertical e translação horizontal.

Recurso de interpretação global[16]: São os coeficientes e os parâmetros h e p, sendo que o movimento do controle deslizante h interfere, na representação gráfica, na translação vertical enquanto o controle deslizante p interfere na translação horizontal.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/yw2cwxen>

[15] *Link* da atividade original <https://www.geogebra.org/m/etgmwu5x#material/gqqypgts>

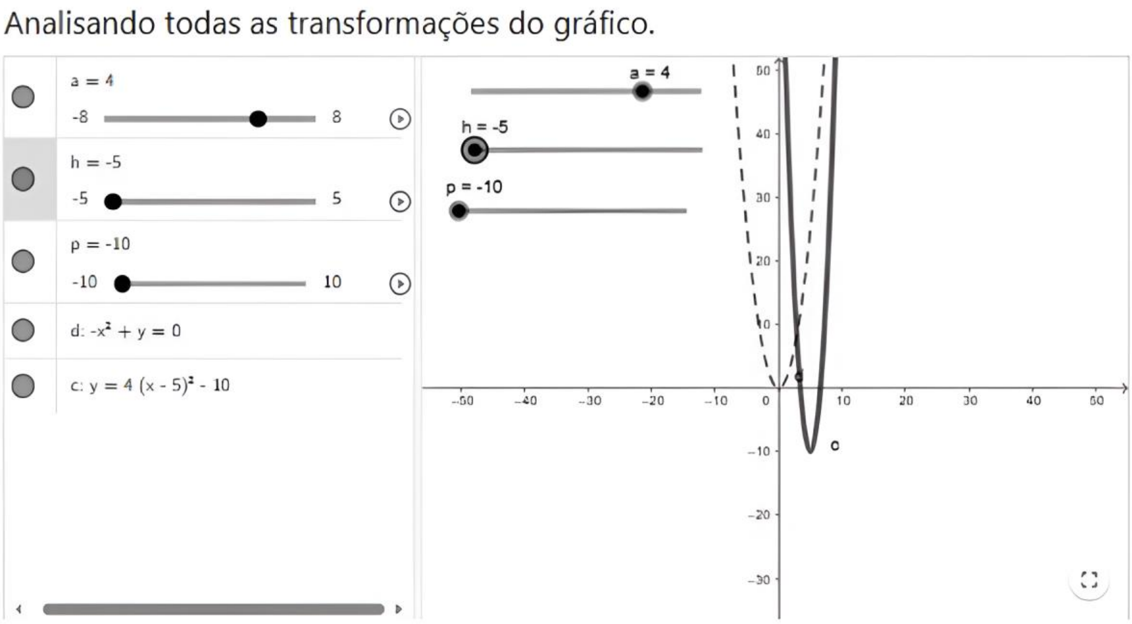
[16] Duval (2011) considera a imagem formada pelo conjunto traçado/eixos como a representação de uma expressão algébrica. Qualquer modificação na imagem que altere a expressão algébrica correspondente é considerada uma variável visual relevante para a interpretação gráfica. Capítulo 3, item 3.4 da Dissertação.

7.2 ANALISANDO AS TRANSFORMAÇÕES DO GRÁFICO

Essa atividade foi compartilhada e desenvolvida no GeoGebra por estudantes e professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, possui arquivos para *download* que permitem interação do conteúdo com a atividade postada no GeoGebra, conforme os itens 7.3 e 7.4. A interação pode ocorrer como sugestão do professor em suas aulas ou de forma autônoma pelo próprio estudante acessando o *site* e utilizando os tutoriais da atividade.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/qjnxvj35>

Figura 24 - *Interface* no GeoGebra da Atividade de Translação (transformações)



Fonte: *Site* do GeoGebra. Acesso em 21 jul. 2024.

7.3 APOSTILA 1 - DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE – INVESTIGAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES

A sequência didática presente nesta atividade possui uma apostila introdutória em que o aluno é levado a investigar as transformações que ocorrem no gráfico de funções polinomiais do 2º grau em relação à função. Os *applets* utilizados na investigação, elaborados pelos licenciandos, para cada tipo de transformação gráfica (expansão e contração vertical, translação horizontal e vertical) podem ser manipulados pelo aluno por meio de *tablets*, computador ou celular.

Apostila 1 Translação.pdf

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/smhpshh4>

7.4 RESUMO DAS TRANSFORMAÇÕES

Complementa o livro outra apostila em formato pdf com um resumo sobre o conteúdo de transformações gráficas da função quadrática.

Apostila 2 Translaçao.pdf

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/xdarmrsj>

8 O RECURSO DA TRANSLAÇÃO EM ATIVIDADE ELABORADA À LUZ DA TRRS – ATIVIDADE 5

Esta atividade foi desenvolvida a partir de aspectos da TRRS e de dados discutidos na dissertação à luz da TRRS.

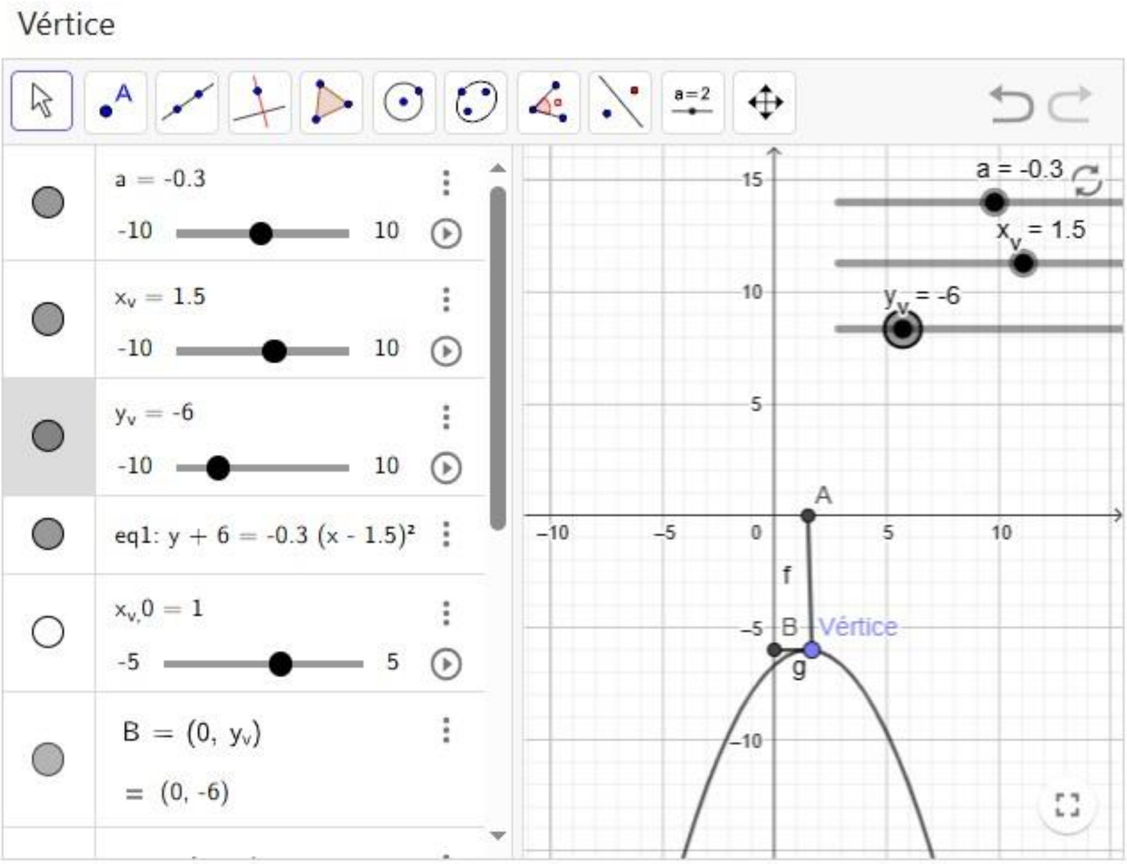
Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/m7quhmag>

8.1 TRANSLAÇÃO E A TRRS

Utilizar o recurso da translação para conversões significa reescrever a expressão algébrica $y = ax^2 + bx + c$, a qual possui como unidades significativas simbólicas os coeficiente a, b e c, e expressar a função algebricamente de modo que o vértice se torne explícito e possibilite a identificação de unidades simbólicas gráficas (ou variáveis visuais). Moretti (2003) propõe o estudo da função quadrática nessa perspectiva e considera que uma parábola representa a translação se a imagem de cada ponto expresso na equação pelas coordenadas x e y for um ponto que, na equação transladada, tiver suas coordenadas expressas por $x - x_v$ e $y - y_v$ ou, $x + x_v$ e $y + y_v$, que poderá ser representado de maneira única, conservando o sinal '$-$' e, desta forma, sendo semanticamente mais congruente se usarmos as representações $x - \pm x_v$ e $y - \pm y_v$. Assim, na representação algébrica, a equação $y = ax^2 + bx + c$, após a realização de tratamento seria reescrita para $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/bftaeuyk>

Figura 25 - *Interface* 1 no GeoGebra da Atividade Translação e a TRRS

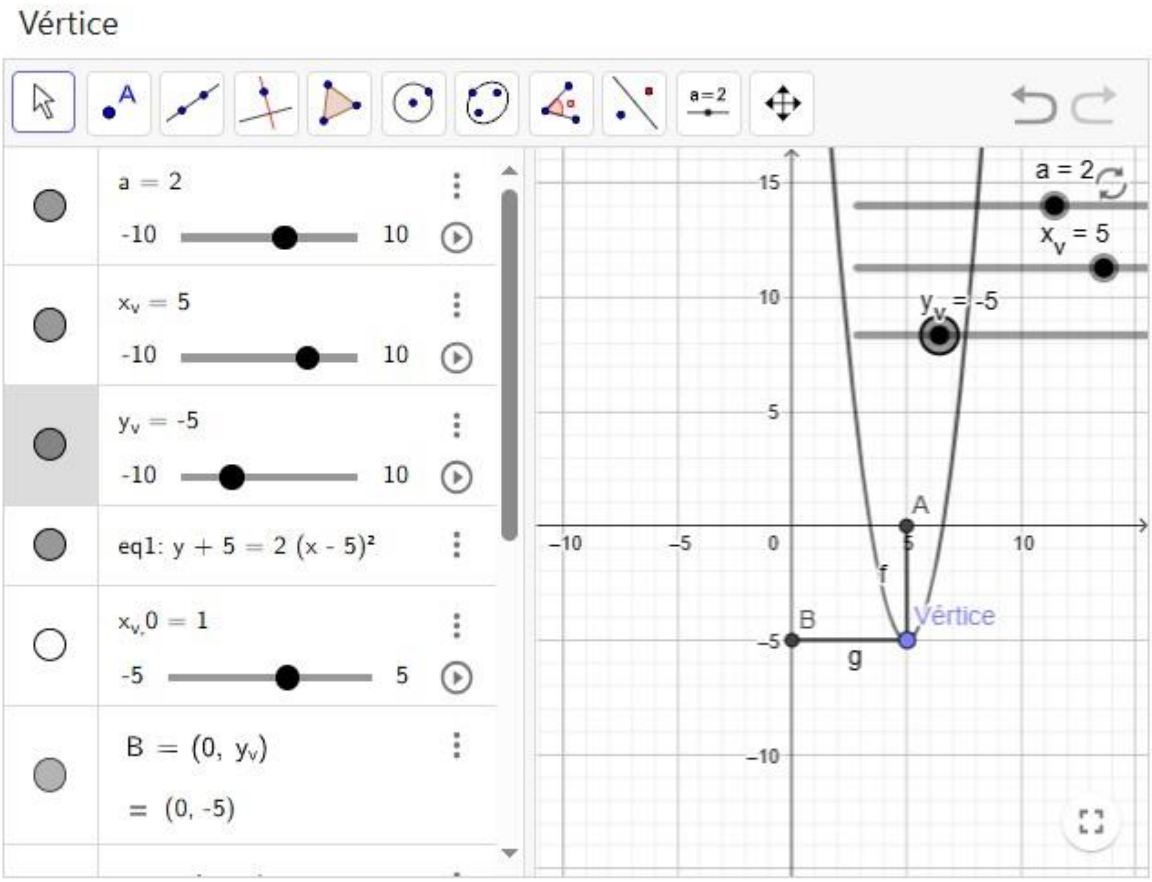


Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 jul. 2024.

A conversão entre a representação gráfica e algébrica é possibilitada pelo vértice nessa forma de equação $(y - \pm y_v) = a(x - \pm x_v)^2$. Os controles deslizantes são os valores do x_v e do y_v. Por exemplo, a expressão algébrica $(y + 5) = 2(x - 5)^2$ é a translação de $y = 2x^2$, cujo vértice é (0, 0), em 5 unidades para baixo (eixo y) e 5 unidades à direita (eixo x) e podemos escrever $(y - -5) = 2(x - +5)^2$ sendo o par ordenado (5, -5), o novo vértice da parábola, apresentado na figura 25.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/bftaeuyk>

Figura 26 - *Interface* 2 no GeoGebra da Atividade Translação e a TRRS



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 jul. 2024.

8.2 VÉRTICE À LUZ DA TRRS – MORETTI (2003)

Uma das características da função quadrática que oportuniza a conversão é o vértice, pois com a definição do vértice é possível interpretar e relacionar com atividades do cotidiano sobre valores máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, custo e lucro, entre outros. Assim, o objetivo desta atividade é identificar o vértice. Para isso, serão necessários tratamentos na representação algébrica.

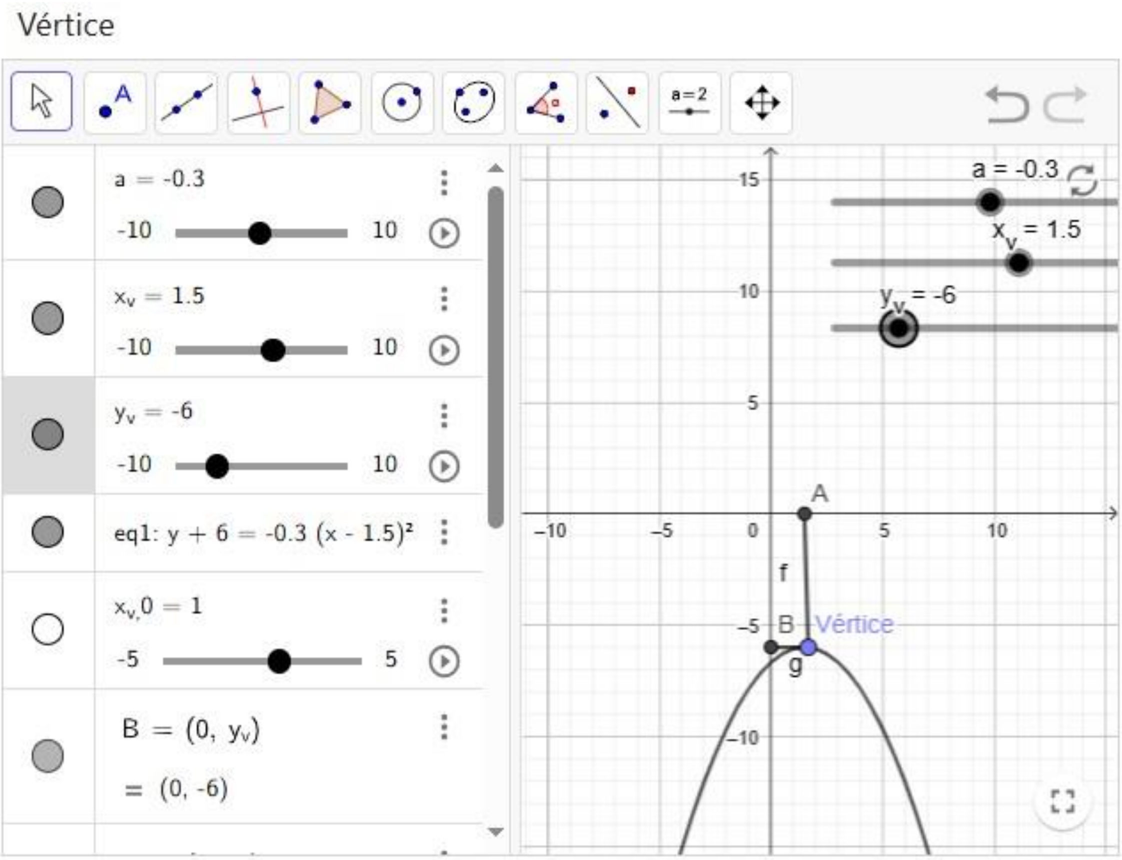
Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qktubcya#material/bftaeuyk>

Como possibilidade para visualização do vértice, Moretti (2003), traz que a representação algébrica da equação $y = ax^2 + bx + c$, após a realização de tratamento seria reescrita para $(y - yv) = a(x - xv)^2$, portanto teríamos, por exemplo, de uma equação

$y = -0{,}3(x - 1{,}5)^2 - 6$ a seguinte equação reescrita $(y - 6) = -0{,}3\ (x - 1{,}5)^2$ e o par ordenado do vértice estaria evidente $(-6;\ 1{,}5)$.

Essa correspondência entre as representações gráfica e algébrica oportuniza a compreensão do objeto matemático por meio da **conversão**.

Figura 27 - *Interface* 3 no GeoGebra da Atividade Translação e a TRRS



Fonte: Dados da Pesquisa - produzido no GeoGebra em 15 jul. 2024.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a Proposta de Ensino: “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS”, a possibilidade de compartilhamento e a aplicação em sala de aula por professores, esperamos subsidiar aulas de Matemática embasadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A expectativa é possibilitar aos estudantes uma melhor capacidade para ler e interpretar gráficos com maior facilidade, além de reconhecer e extrair das representações gráficas informações importantes, quanto à natureza da função quadrática e como ela é representada.

Ao usar o GeoGebra, o professor pode encontrar alternativas para buscar novas metodologias de ensino e aprendizagem. Pesquisar e criar atividades baseadas em TDIC é uma oportunidade que pode desenvolver novas competências relacionadas ao ensino da Matemática.

Este PE propõe atividades de função quadrática que podem promover e utilizar o desenvolvimento do raciocínio coordenando às representações semióticas e a conversão para a aprendizagem global deste objeto matemático.

Assim, esse “Caderno de Atividades de Função Quadrática à Luz da TRRS” oportuniza que os estudantes visualizem os conceitos matemáticos, utilizando o GeoGebra e relacionando com as questões que envolvem a exploração interativa, de modo que ocorra a aprendizagem a partir da descoberta por eles mesmos. Além disso, proporciona a articulação entre as unidades básicas simbólicas (da expressão algébrica) e unidades básicas gráficas (visualizadas no gráfico), o que, para Duval (1988), é o que garante a aprendizagem da função. Esse transitar e explorar utilizando as possibilidades que o GeoGebra exibe e permite, contribui para a compreensão de conceitos matemáticos.

10 REFERÊNCIAS

BORBA, M. C. **Vídeos na Educação Matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais/Marcelo de Carvalho Borba, Daise Lago Pereira Souto, Neil da Rocha Canedo Junior. Belo Horizonte: Autentica, 2022. (Tendências em Educação Matemática)

DUVAL, R. **Gráficos e equações**: a articulação de dois registros, 1988. Trad. Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT, eISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**, 1993. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível em: DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/u/adilsonvb> Autor: Adilson A. Vilas Boas. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/V66M2MgB> Autor: Alexandre Trocado. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/j2jxswcq> Autores: André Luiz Souza Silva, Simona Riva. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cBNjycJP> Autor: Jorge Cássio. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/etgmwu5x> Autora: Lúcia Maria Santos. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xPFKwwuw> Autor: Luiz Geraldo da Silva. Acesso em: 21 jun. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r#material/buzdks8c> Autora: Thais de Carvalho. Acesso em: 21 jun. 2024.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MORETTI, M. T. **Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.** Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2024.