UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CHAPECÓ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DÉBORA SERNAJOTTO

FUNÇÃO MODULAR QUADRÁTICA: UM ESTUDO A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

CHAPECÓ-SC

2025

DÉBORA SERNAJOTTO

FUNÇÃO MODULAR QUADRÁTICA: UM ESTUDO A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração: Matemática na Educação Básica, sob a orientação do Prof.ª Dr.ª Lucia Menoncini

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lucia Menoncini

CHAPECÓ-SC

2025

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Sernajotto, Débora
Função Modular Quadrática: um estudo a partir da Interpretação Global Figural / Débora Sernajotto. -- 2025.
71 f.:il.

Orientadora: Doutora Lucia Menoncini

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó,SC, 2025.

1. Função Modular Quadrática. 2. Raymond Duval. 3. Representação Semiótica. 4. Interpretação Global Figural. 5. GeoGebra. I. Menoncini, Lucia, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DÉBORA SERNAJOTTO

FUNÇÃO MODULAR QUADRÁTICA: UM ESTUDO A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO FIGURAL GLOBAL

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 26/02/2025

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
LUCIA MENONCINI
Data: 07/04/2025 13:52:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Lucia Menoncini – UFFS
Orientadora

gov.br Documento assinado digitalmente
MARINA GEREMIA
Data: 07/04/2025 11:20:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Marina Geremia – IFSC
Avaliadora externa

gov.br Documento assinado digitalmente
JANICE TERESINHA REICHERT
Data: 07/04/2025 09:39:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Janice Teresinha Reichert – UFFS
Avaliadora

Dedico este trabalho ao meu companheiro, Gustavo, e aos meus felinos, Banguela, Gauss, Agnes e Derivada.

Agradecimentos

Ao meu marido, Gustavo de Oliveira Rosa, pelo companheirismo, pelo incentivo constante, por sempre acreditar no meu potencial quando eu mesma não acreditava. Por ser meu porto seguro em todos os momentos.

À minha psicóloga, Carolina, por ter me acolhido da melhor maneira em uma dos momentos mais difíceis da minha vida. Por segurar minha mão no mais profundo mergulho introspectivo, por me ensinar a me reconhecer novamente e por acreditar em mim, mostrando o meu valor e da minha capacidade.

À minha psiquiatra, Regina, que com toda sua calma e tranquilidade me mostrou que ainda havia uma luz no fim do túnel quando tudo parecia desmoronar.

Aos meus irmãos, Weliton e Bárbara, e à minha enteada Louise, pela compreensão da minha ausência em muitos momentos, e pelos incentivos em concluir essa etapa.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM por tornar possível o mestrado por meio do PROFMAT, transformando um sonho acadêmico em realidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro por meio da bolsa de estudos, permitindo que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT e possibilitando essa formação.

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Lucia Menoncini, por sua paciência, dedicação e valiosas contribuições que possibilitaram a realização desse trabalho.

Aos professores de Matemática do PROFMAT da UFFS - Campus Chapecó, pela dedicação, ensinamentos e contribuições para a minha trajetória acadêmica.

Palavra não é coisa que se diga
quem toma a palavra
pela coisa
diz palavra com palavra
mas não diz coisa com coisa
a palavra pode ser pesada
a coisa, leve
e vice-versa não é coisa alguma
a palavra coisa
não é a coisa palavra
palavra e coisa
jamais serão a mesma coisa

Ricardo Silvestrin

Resumo

Esta dissertação apresenta o estudo da função modular quadrática que se apoia na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, mais especificamente na abordagem de Interpretação Global Figural. Tal abordagem permite explorar funções por meio de correlações entre as unidades significativas visuais e as unidades significativas algébricas. As correlações ocorrem a partir do desenvolvimento das operações semióticas de tratamento e de conversão, e neste sentido a dissertação destaca a relevância do entendimento conceitual destas operações, pois segundo Duval, é a partir delas, em especial das conversões entre os registros, que a aprendizagem matemática ocorre. Assim, o objetivo da dissertação consiste em uma investigação qualitativa sobre os esboços das curvas de funções modulares quadráticas, analisando as correspondências entre as representações semióticas no registro gráfico e suas representações algébricas, considerando para isso, a função quadrática tanto em sua forma completa, quanto em formas incompletas. A pesquisa utiliza o GeoGebra como recurso para a observação das transformações que ocorrem com as representações semióticas da função modular quadrática. Como resultado, a Interpretação Global Figural pode favorecer o ensino da função modular quadrática à medida que explora as operações de tratamento e conversão, permitindo uma visão mais ampla e qualitativa do esboço de curvas e sua correlação com a expressão algébrica.

Palavras-chave: Função Modular Quadrática. Raymond Duval. Representação Semiótica. Interpretação Global Figural. GeoGebra.

Abstract

This master's thesis presents a study on the quadratic modular function, based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, specifically the Global Figural Interpretation approach. This approach enables the exploration of functions through correlations between significant visual units and significant algebraic units. These correlations arise from the development of the semiotic operations of treatment and conversion. In this regard, the master's thesis highlights the importance of conceptual understanding of these operations, since, according to Duval, mathematical learning occurs primarily through them, especially through conversions between registers. Thus, the objective of the master's thesis is to conduct a qualitative investigation into the sketches of the quadratic modular function's curve, analyzing the correspondences between semiotic representations in the graphical register and their algebraic representations. This analysis considers the quadratic function in both its complete and incomplete forms. The research utilizes GeoGebra as a tool for observing the transformations that occur within the semiotic representations of the quadratic modular function. As a result, the Global Figural Interpretation may enhance the teaching of the quadratic modular function by exploring the operations of treatment and conversion, allowing for a broader and more qualitative perspective on curve sketching and its correlation with the algebraic expression.

Keywords: Quadratic Modular Function. Raymond Duval. Semiotic Representation. Global Figural Interpretation. GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representações gráfica de $|-3|$ e $|3|$ 23
Figura 2 – Intersecção entre $x < -a$ e $x > a$ 26
Figura 3 – Intersecção entre $x > -a$ e $x < a$ 27
Figura 4 – União entre $(-\infty, -a) \cap (-a, +\infty)$ e $(-a, +\infty) \cap (-\infty, a)$. 27
Figura 5 – Intersecção entre $x > -a$ e $x > a$. 28
Figura 6 – Intersecção entre $x < -a$ e $x < a$. 28
Figura 7 – União entre $(-\infty, -a) \cap (-\infty, a)$ e $(-\infty, -a) \cap (-\infty, a)$. 28
Figura 8 – Representação gráfica de $|x_Q - x_P|$ 29
Figura 9 – Representação gráfica da distância de dois pontos, P e Q 29
Figura 10 – Representação gráfica de $\frac{5}{3}$ e 2 30
Figura 11 – Intersecção entre $x \geq -2$ e $x \leq \frac{1}{2}$. 32
Figura 12 – União entre $x < 1$ e $x > 5$. 32
Figura 13 – Representação gráfica da função $f(x) = |x|$. 33
Figura 14 – Representação gráfica da função $f(x) = |x - 1|$. 34
Figura 15 – Representação gráfica da função $f(x) = |x - 1| + 2$. 34
Figura 16 – Representação gráfica da função $g(x) = |x^2 - 3x|$. 35
Figura 17 – Representação gráfica da função $h(x) = |ln(x)|$. 36
Figura 18 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$. 37
Figura 19 – Representação gráfica da função $g(x) = -x^2 + 2x + 1$. 38
Figura 20 – Representação gráfica da função $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$. 39
Figura 21 – Representação gráfica da função $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$. 39
Figura 22 – Representação gráfica da função $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, ponto (0,1) intersecção da parábola com o eixo y. 40
Figura 23 – Representação gráfica da função $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, ponto (0,1) intersecção da parábola com o eixo y. 41
Figura 24 – Representação gráfica da função $h(x) = -x^2 + 1$, ponto (0,1) intersecção da parábola com o eixo y. 41
Figura 25 – Representação gráfica da função $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ e o ponto (0,-2) de intersecção da parábola com o eixo y. 42
Figura 26 – Representação gráfica da função $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + 3$ e o ponto (0,3) de intersecção da parábola com o eixo y. 42
Figura 27 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. 44
Figura 28 – Representação gráfica da função $g(x) = x^2 - 2x + 1$. 45
Figura 29 – Representação gráfica da função $h(x) = x^2 - x + 1$. 45
Figura 30 – Construção do traçado da curva relativo à função $g(x) = |x^2 - 3|$ . . . 63

Figura 31 – Construção do traçado da curva relativo à função $h(x) - 1 = 2|(x-3)^2|$ 64
Figura 32 – Construção do traçado da curva relativo à função $p(x) = |(x^2 - 4x)|$ . . 65

Lista de tabelas

Tabela 1 – Trabalhos selecionados para a revisão 20
Tabela 2 – Classificação dos registros e das representações 49
Tabela 3 – Formas de representação da função modular $f(x) = |x^2 - 2|$ 50
Tabela 4 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica k 55
Tabela 5 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica a 56
Tabela 6 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica b 57
Tabela 7 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica d 58
Tabela 8 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica c para $f(x) = |x^2 - c|$ 60
Tabela 9 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica b para $f(x) = |x^2 - (bx)|$ 61

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC: Base Nacional Comum Curricular

CAPES: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

IFSC: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina

PROFMAT: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM: Sociedade Brasileira de Matemática

UFFS: Universidade Federal da Fronteira Sul

Sumário

1 Introdução . . . 15
2 Revisão sistemática de literatura . . . 18
2.1 Da seleção dos trabalhos . . . 18
2.2 Da análise dos trabalhos a partir das perguntas . . . 20
2.3 Considerações . . . 22
3 Função modular . . . 23
3.1 Módulo de um número real . . . 23
3.1.1 Propriedades . . . 23
3.1.2 Distância entre dois números reais na reta real . . . 29
3.2 Equação Modular . . . 29
3.3 Inequação Modular . . . 31
3.4 Função Modular . . . 33
4 Função Quadrática . . . 37
4.1 Definição . . . 37
4.2 Gráfico . . . 38
4.2.1 Coeficiente a . . . 38
4.2.2 Coeficiente b . . . 40
4.2.3 Coeficiente c . . . 41
4.3 Vértice e Forma Canônica . . . 42
4.4 Zeros ou raízes da função quadrática . . . 43
5 Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Interpretação Global Figural . . . 46
6 Metodologia . . . 53
7 Análise e resultados: Função Modular Quadrática . . . 54
7.1 Caso 1: Função modular quadrática completa . . . 54
7.1.1 Unidades visuais e unidade algébrica k . . . 55
7.1.2 Unidades visuais e unidade algébrica a . . . 55
7.1.3 Unidades visuais e unidade algébrica b . . . 56
7.1.4 Unidades visuais e unidade algébrica d . . . 58
7.2 Caso 2: Função modular quadrática incompleta . . . 59
7.2.1 Função modular quadrática incompleta da forma $f(x) = |x^2 - c|$ . . . 59
7.2.2 Função modular quadrática incompleta da forma $f(x) = |x^2 - (bx)|$ 60
7.3 Construção do esboço de curva da função modular quadrática . . . 62
8 Considerações finais . . . 67
Referências . . . 70

1 Introdução

O ensino da matemática funciona como uma grande espiral, os conteúdos se relacionam, cada um vai formando uma base para o outro, fazendo que a compreensão matemática se solidifique. Na Educação Básica, pode-se considerar que o estudo das funções, por exemplo, começa desde a introdução à álgebra, do plano cartesiano, no Ensino Fundamental, até o conteúdo de conjuntos, intervalos, tabelas, e por fim, esboço de curvas[1] no Ensino Médio.

As funções são objetos de estudo em diferentes áreas do conhecimento, como na Biologia, na Física, na Química, pois diversos fenômenos podem ser modelados e resolvidos a partir delas. Na própria Matemática, elas estão presentes em suas ramificações, desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Na Educação Básica, introduzem o conceito de função, o conceito de gráfico, e são estudados alguns tipos de funções elementares. Em Álgebra também há o estudo das operações e relações entre funções, assim como na Lógica o estudo de suas formas recursivas. Já no Ensino Superior, por exemplo, as funções são retomadas e exploradas mais profundamente no Cálculo, onde são estudadas com duas ou mais variáveis, as derivadas e integrais, de modo analítico, enquanto que os métodos numéricos e a análise de erros dão conta do estudo de funções com o foco numérico.

Considerando a variedade de tipos de funções e dependendo do ramo e do nível de ensino em que elas são abordadas, o seu estudo pode ser extenso e complexo. Por isso, o presente trabalho considera a Educação Básica como nível de ensino, mais especificamente o Ensino Médio, e direciona o olhar para as funções modulares quadráticas.

Analisando a Base Nacional Comum Curricular (2018) para o Ensino Médio, que é o documento normativo que rege a Educação Básica e que está dividida entre competências específicas e habilidades. O documento apresenta o conceito de funções de forma simples e geral, incluindo a noção de gráfico, contemplando o estudo de funções elementares, como as funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas. Observa-se que ela não contempla o conceito teórico de função modular, apenas menciona o estudo das funções definidas por partes, mas em um sentido de aplicabilidade, conforme a habilidade

> (EM13MAT405) Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento. Brasil (2018, p.531).

[1] Os termos esboço de curva e gráfico são sinônimos e ao longo do texto são utilizados de forma alternada para evitar repetições sucessivas.

O documento não indica o porquê de não contemplar o estudo das funções modulares, o que reforça a necessidade de trabalhos voltados a este tipo de função.

A BNCC também apresenta a competência específica 4 que corrobora com o tema central deste trabalho, pois envolve representações semióticas. Essa competência afirma que é necessário "compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas" (Brasil, 2018, p. 538). O documento chama a atenção para a utilização de diferentes registros de representações no ensino de matemática, e neste sentido, pode ser utilizado no ensino da função modular quadrática.

As funções modulares quadráticas, assim como qualquer objeto matemático, são entes abstratos, cujo acesso a eles depende de uma representação semiótica (Duval, 2011b). Desta forma, uma representação algébrica (lei de formação da função ou expressão algébrica), uma tabela com pares ordenados ou um esboço de curva (gráfico) podem representar um mesmo objeto matemático, que neste caso, é a função modular quadrática. Segundo Duval (2011b), explorar as diferentes representações e promover articulações entre elas são importantes para a aprendizagem matemática.

Olhando para o esboço de curvas de funções, é comum encontrar em livros didáticos a ideia de associar pares ordenados a pontos no plano cartesiano, conceituando o gráfico como o conjunto de todos estes pontos. Esta forma de esboçar curvas é conhecida como abordagem Ponto a Ponto e é importante na análise visual de pontos específicos da função, como pontos de máximo, mínimo, inflexões, raízes, etc. Contudo, pode não ser eficiente para um olhar mais amplo e qualitativo da curva.

Em oposição à abordagem Ponto a Ponto, está a abordagem de Interpretação Global Figural, definida por Duval (2011a). Com ela é possível identificar qualidades visuais da curva e qualidades algébricas da função modular quadrática. São exploradas conversões entre os registros gráfico e algébrico de modo que alterações realizadas na curva sejam associadas a alterações na representação algébrica e vice-versa. Consequentemente, as diferentes representações do mesmo objeto matemático são evidenciadas e correlacionadas. Neste sentido, a proposta deste trabalho é olhar para a função modular quadrática a partir da abordagem proposta por Duval, e portanto a pergunta que norteia este trabalho é: Como a interpretação do esboço das curvas e a expressão algébrica pode contribuir para o ensino da função modular quadrática? O objetivo consiste em uma investigação qualitativa sobre o esboço da curva deste tipo de função, analisando as correspondências entre as representações semióticas no registro gráfico e suas representações algébricas.

Quanto à metodologia, a pesquisa é qualitativa e por meio do uso do software GeoGebra são analisadas as correlações entre as unidades significativas visuais da curva e as unidades significativas algébricas da função modular quadrática.

Em relação à estrutura do trabalho, o Capítulo 1 apresenta a Introdução. O Capítulo 2 é dedicado à revisão sistemática da literatura. No Capítulo 3, desenvolve-se o estudo do módulo, enquanto o Capítulo 4 trata da função quadrática. O Capítulo 5 aborda a fundamentação teórica da Teoria dos Registros de Representações Semióticas e da Interpretação Global Figural. No Capítulo 6, descreve-se a metodologia do trabalho. O Capítulo 7 apresenta a investigação da função modular quadrática com base na Interpretação Global Figural. Por fim, o Capítulo 8 traz as considerações finais.

2 Revisão sistemática de literatura

Para obter uma compreensão mais aprofundada sobre o esboço de curvas de funções modulares quadráticas através da Teoria dos Registros de Representações Semióticas por Duval, tema principal deste estudo, foi realizada uma revisão sistemática integrativa de literatura. Nesse sentido, utilizamos como base para essa revisão as seis etapas propostas por Botelho, Cunha e Macedo (2011), as quais são:

1ª etapa: identificação do tema e seleção da questão de pesquisa;

2ª etapa: estabelecimento dos critérios de inclusão e exclusão;

3ª etapa: identificação dos estudos pré-selecionados e selecionados;

4ª etapa: categorização dos estudos selecionados;

5ª etapa: análise e interpretação dos resultados;

6ª etapa: apresentação da revisão/síntese do conhecimento.

Na primeira etapa, o tema já foi identificado e as perguntas foram elaboradas para guiar a revisão sistemática integrativa. Essas questões surgiram a partir da exploração de alguns conceitos que deveriam ser abordados nos trabalhos encontrados durante a pesquisa. As perguntas definidas foram:

1. Quais aspectos de função e de função modular foram discutidos no trabalho?
2. A Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval foi aplicada no estudo?
3. O software GeoGebra foi empregado como recurso para explorar a função modular?

2.1 Da seleção dos trabalhos

O principal objetivo dessa revisão sistemática integrativa é verificar se existem trabalhos já realizados sobre o esboço de curvas de funções modulares quadráticas, considerando tanto aqueles que utilizam a teoria de Duval quanto os que não a utilizam, além de analisar a utilização do GeoGebra. Com base nas perguntas definidas, foi feita a seleção dos trabalhos, de 2017 a 2024, no banco de dissertações disponível no site do PROFMAT, no catálogo de teses e dissertações no site da CAPES, e também no e-book, indicado pela professora orientadora, “Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval” organizado por Méricles Thadeu Moretti e Eduardo Sabel.

No campo de pesquisa das dissertações do PROFMAT, tem apenas como critério de busca o nome do aluno, o título da dissertação e o nome ou a sigla da instituição a

qual a dissertação foi defendida. Já o campo de pesquisa no catálogo da CAPES conta com uma variedade de filtros, que nesse caso foi utilizado o filtro do ano de publicação e a área do conhecimento matemática. Dessa forma, usamos no campo de busca o título da dissertação para realizar a pesquisa dos trabalhos e as seguintes palavras-chave:

1. Módulo;
2. Função modular;
3. Função modular quadrática;
4. Registros de Representações Semióticas;
5. Duval;
6. Registros de representação semiótica.

No site do PROFMAT, na primeira busca, obtivemos cinco (5) dissertações que apresentavam a palavra "módulo" no título, dois trabalhos com "função modular", nenhuma dissertação com "função modular quadrática". Já na pesquisa pelo termo "registros de representações semióticas" foram obtidas cinco dissertações. Não foram encontradas dissertações que tivessem "Duval" nos títulos. E por último, foram encontrados seis trabalhos com "registros de representação semiótica" no título. No total, foram consideradas 18 dissertações nesse primeiro momento.

Já no catálogo da CAPES, no site, com a mesma sequência de palavras-chave, na primeira busca por "módulo" obtivemos 104 trabalhos, um trabalho através da busca por "função modular", um trabalho com "função modular quadrática". A pesquisa com "registros de representações semióticas" resultou em 108 trabalhos. Na busca pelo nome "Duval" foram obtidos 13 trabalhos e a pesquisa sobre "Registros de Representação Semiótica" obtivemos 160 trabalhos, mas muitos desses são repetidos, já que o termo utilizado na pesquisa é muito parecido com "Registros de Representações Semióticas".

Na etapa a seguir, foram feitas exclusões dos trabalhos considerando os seguintes critérios:

1. Se não abordassem o conceito de módulo no sentido de valor absoluto;
2. Não tratassem de função modular ou função modular quadrática;

Após considerar os critérios de exclusão, a busca pelos trabalhos no site do PROFMAT restaram apenas 3 dissertações para serem analisados de forma completa. Já no site da CAPES não restaram trabalhos, pois a maioria tratava-se de função afim ou função quadrática, mas nenhum sobre função modular ou alguma menção ao conceito de módulo.

Já no e-book Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval, identificamos um artigo que tratava do tema.

A Tabela 1 contém os trabalhos que foram selecionados e estudados de forma mais detalhada e respondendo as perguntas norteadoras dessa pesquisa. Utilizamos as letras A, B e C para identificar os trabalhos.

Tabela 1 – Trabalhos selecionados para a revisão

Id	Ano	Autor	Título	Instituição	Tipo de trabalho
A	(2023)	Edinalva Feitosa Passos	O uso do GeoGebra no celular como meio facilitador para o ensino de função modular em turmas do 1º ano do ensino médio	Universidade Federal do Vale do São Francisco	Dissertação
B	(2022)	Walesca Autonamo da Silva	Função modular e tecnologia: uma proposta de inclusão do tema na BNCC do Ensino Médio	Colégio Pedro II	Dissertação
C	(2022)	Lucia Menoncini e Méricles Thadeu Moretti	O esboço de curvas de funções modulares lineares a partir da interpretação global figural	Universidade Federal de Santa Catarina	Artigo

Fonte: Elaborado pelas autoras.

2.2 Da análise dos trabalhos a partir das perguntas

Partindo das três perguntas definidas inicialmente realizamos o estudo dos trabalhos de forma mais aprofundada, como segue.

1. **Quais aspectos de função e de função modular foram discutidos no trabalho?**

   Na dissertação A, a autora apresenta uma fundamentação da importância do estudo da função modular e pontua como falha da BNCC o fato dela não contemplar o estudo deste tipo de função. Desse modo, a função modular não sendo estudada nas escolas, nem cobrado em alguns vestibulares, pode prejudicar a noção principalmente de suas variações no campo geométrico. Sobre conceitos de função modular linear a autora traz o módulo de um número real: como definição a distância entre dois pontos

em uma reta, valor absoluto, propriedades; função modular: definição, gráficos e manipulação dos gráficos.

Na dissertação B, o foco do trabalho direciona para a importância de trabalhar a função modular no ensino médio, que pode ser como uma retomada de funções já estudadas anteriormente, além de analisar os esboços de curvas e interpretar as transformações sofridas. Utiliza-se a BNCC para relacionar as habilidades de cada função estudada nos anos do ensino médio, separa as habilidades em tópicos relacionados a cada característica da função. Além disso, relaciona a introdução da função modular linear, quadrática e entre outras aplicações, o estudo do erro absoluto e erro relativo. Sobre outros conceitos aborda: distância e espaços métricos, distância de um ponto a um conjunto e distância entre dois conjuntos. Após traz também um resumo como proposta de ensino, apresenta conceitos módulo de um número real a definição e propriedades, função modular, equação modular, inequação modular. A maior parte dos gráficos apresentados são de função afim, tem apenas um de função quadrática. Ressalta também como trabalhar as transformações dos gráficos de função modular, como: translações, contrações, dilatações, reflexões. Ademais, outro ponto interessante que o trabalho apresenta uma aplicação como o método da bisseção.

No artigo C é explorado o esboço de curva da função modular linear. Os autores pontuam que o ensino de funções é introduzido pela expressão algébrica e depois pelo esboço da curva, dando a ideia de que o gráfico é uma consequência da expressão algébrica, e não algo que representa a mesma função, evidenciando que tanto os esboços de curvas quanto a expressão algébrica são representações de funções. Dessa forma, eles abordam primeiro os esboços de curva de funções modulares lineares, analisando a influência de cada parâmetro nos gráficos para depois fazer a correspondência com a expressão algébrica da função.

2. **A Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval foi aplicada no estudo?**

   Nos trabalhos A e B não constam a aplicação da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval.

   No aritgo C, os autores utilizam Raymond Duval e sua Teoria dos Registros de Representações Semióticas, mais especificamente, utilizando a abordagem da Interpretação Global Figural, mostrando que as alterações feitas no gráfico podem ser visualizadas e reconhecidas na expressão, assim como as alterações feitas na expressão podem ser visualizadas e reconhecidas no gráfico.

3. **O software GeoGebra foi empregado como recurso para explorar a função modular?**

Na dissertação A, a autora destaca a importância da tecnologia nas aulas considerando como embasamento a BNCC, que também consta como uma competência. Para isso, a autora utiliza o aplicativo do GeoGebra para o celular para trabalhar esboço de curvas das funções com os estudantes na sala de aula.

Na dissertação B, o GeoGebra é utilizado como recurso para expor e explorar os esboços das funções modulares, principalmente nas transformações, além de utilizar o programa para resolver problemas de inequação modular.

No artigo C, assim como na dissertação B, os autores exploram o gráfico e a expressão algébrica da função modular linear via GeoGebra, para estabelecer correspondências entre estas duas formas de representação.

2.3 Considerações

Analisando os trabalhos A, B e C, constatamos que não há trabalhos sobre o esboço de curvas de funções modulares quadráticas através da Teoria dos Registros de Representações Semióticas por Duval. O artigo C trata especificamente da função modular linear, enquanto que as dissertações A e B abordam função modular linear e quadrática, mas não a função modular quadrática de forma aprofundada. Esses trabalhos que trouxeram o tema como função modular, fazem uma abordagem dos conceitos de módulo de número real, algumas propriedades, equação e inequação modular e depois a função modular linear ou de forma mais geral.

O artigo C é o único trabalho que trata dos dois assuntos principais desta dissertação, a função modular e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, por mais que não aborde o estudo da função modular quadrática. O artigo traz muitos elementos interligando a função modular linear e a Interpretação Global Figural, evidenciando que a expressão e o esboço de gráficos são representações de um mesmo objeto, mas não é o objeto, pois o objeto matemático é abstrato. Os autores fazem um sequenciamento detalhado da análise dos gráficos, explorando as alterações dos parâmetros, mostrando tanto graficamente quanto algebricamente essas mudanças.

Os trabalhos A, B e C tratam a função modular com olhares diferentes, mas possibilitam uma impressão mais minuciosa das alterações dos gráficos e das expressões algébricas, o que pode contribuir para o ensino da função modular quadrática.

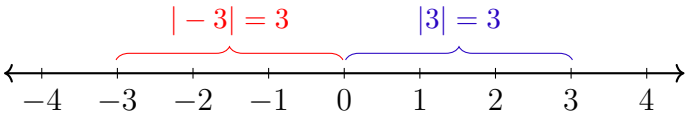
3 Função modular

Nesse capítulo retomamos os conceitos e algumas propriedades do módulo de um número real, da função modular e da função quadrática, já que o objeto de estudo são as funções modulares quadráticas.

3.1 Módulo de um número real

O módulo ou valor absoluto de um número real x, representado como $|x|$, tem como definição geométrica a distância do número real x até a origem, isto é, até o número zero, na reta real. Como trata-se de uma distância, consideramos sempre o módulo de um número real como um número não-negativo. A Figura 1 ilustra essa representação geométrica.

Figura 1 – Representações gráfica de $|-3|$ e $|3|$



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Podemos observar que:

(a) $|-3| = 3$, pois corresponde a distância do ponto -3 até a origem.

(b) $|3| = 3$, pois corresponde a distância do ponto 3 até a origem.

Dessa forma, podemos definir o módulo de um número real x algebricamente como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases},$$

isto é

(a) O módulo de um número real não-negativo é sempre igual ao próprio número.

(b) O módulo de um número real negativo é sempre igual ao oposto desse número.

3.1.1 Propriedades

Vamos analisar algumas propriedades decorrentes da definição de módulo.

P1 $|x| \geq 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$;

P2 $|x| = 0 \iff x = 0$;

P3 $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

P4 $|x|^2 = x^2, \forall\ x \in \mathbb{R}$;

P5 $x \leq |x|, \forall\ x \in \mathbb{R}$;

P6 $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

P7 $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

P8 $|x| < a$ e $a > 0 \iff -a < x < a$;

P9 $|x| > a$ e $a > 0 \iff x < -a$ ou $x > a$.

Na sequência são apresentadas as demonstrações das propriedades citadas acima.

Demonstração da propriedade P1:

Considerando os dois casos pela definição:

Se $x \geq 0$, pela definição temos que $|x| = x$, então $|x| = x \geq 0$.

Se $x < 0$, pela definição temos que $|x| = -x$, então $|x| = -x > 0$.

Portanto, $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração da propriedade P2:

Analisemos dois casos pela definição.

Se $x = 0$, então, pela definição de que $|x| = x$, temos que $|x| = x = 0$.

Reciprocamente, se $|x| = 0$, vamos supor, por absurdo, que exista $x \neq 0$ tal que $|x| = 0$. Como $x \neq 0$, há dois casos a considerar: $x > 0$ e $x < 0$.

Se $x > 0$, então $|x| = x > 0$, isto é, $|x| > 0$.

Se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$. Em ambos os casos chegamos a $|x| > 0$, o que é um absurdo, já que $|x| = 0$ por hipótese.

Logo, $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Demonstração da propriedade P3:

Sabendo que x e y são números reais, considerando os quatro casos:

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então temos que $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y \geq 0$.

Se $x < 0$ e $y < 0$, então temos que $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y > 0$.

Se $x \geq 0$ e $y < 0$, então temos que $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y \leq 0$.

Se $x < 0$ e $y \geq 0$, então temos que $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y \leq 0$.

Portanto, $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração da propriedade P4:

Sabendo que x é número real, pela definição, há dois casos.

Se $x \geq 0$, então $|x| = x$. Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade, temos

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Analogamente, temos

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

Portanto, podemos concluir que $|x|^2 = x^2$, para todo x real.

Demonstração da propriedade P5:

Seja x um número real, pela definição temos que

Se $x \geq 0$, então $x = |x|$, logo $x \leq |x|$.

Se $x < 0$, então $x < 0 < |x|$.

Logo, $x \leq |x|$ para todo x real.

Demonstração da propriedade P6:

Sejam x e y números reais, elevando ao quadrado $|x+y|$, pela **P4** e **P5** propriedade temos:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Disso, temos que $|x + y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x + y| \leq ||x| + |y||$.

De fato, como $|x| \geq 0$ e $|y| \geq 0$, isso implica que $|x| + |y| \geq 0$, logo $||x| + |y|| = |x| + |y|$.

Portanto, $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todo x e y reais.

Demonstração da propriedade P7:

Sejam x e y números reais, vamos elevar ao quadrado $|x + y|$, pelas propriedades **P4** e **P5** propriedade, temos:

$$|x - y|^2 = (x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \geq |x|^2 - 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2.$$

Disso, temos que $|x - y|^2 = (|x| - |y|)^2$ o que implica $|x - y| \geq ||x| - |y|| \geq |x| - |y|$.

Portanto, $|x-y| \geq |x| - |y|$, para todo x e y reais.

Demonstração da propriedade P8:

Sejam x um número real e a um número real positivo, pelas propriedades **P4** e **P5**, temos:

$$|x| < a \iff |x|^2 < a^2 \iff x^2 < a^2 \iff x^2 - a^2 < 0 \iff (x+a)(x-a) < 0.$$

Para que esse produto seja menor que zero, vamos ter dois casos para considerar, $(x+a) < 0$ e $(x-a) > 0$, ou $(x+a) > 0$ e $(x-a) < 0$.

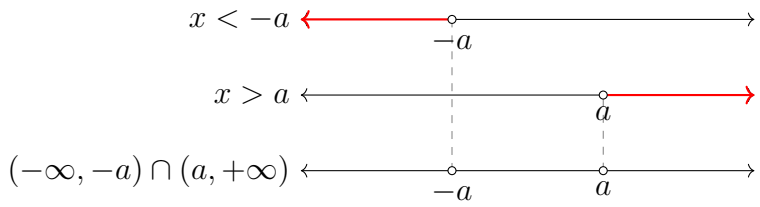
No primeiro caso $(x+a) < 0$ e $(x-a) > 0$, temos, conforme ilustra a Figura 2:

$$x + a < 0$$
$$x < -a$$

e

$$x - a > 0$$
$$x > 0.$$

Figura 2 – Intersecção entre $x < -a$ e $x > a$



Fonte: Elaborado pelas autoras.

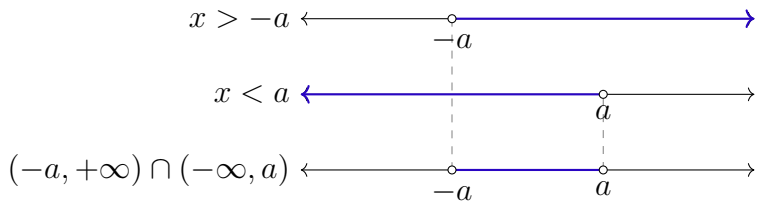
Ou, no segundo caso, $(x+a) > 0$ e $(x-a) < 0$, temos, confome ilustra a Figura 3:

$$x + a > 0$$
$$x > -a$$

e

$$x - a < 0$$
$$x < a.$$

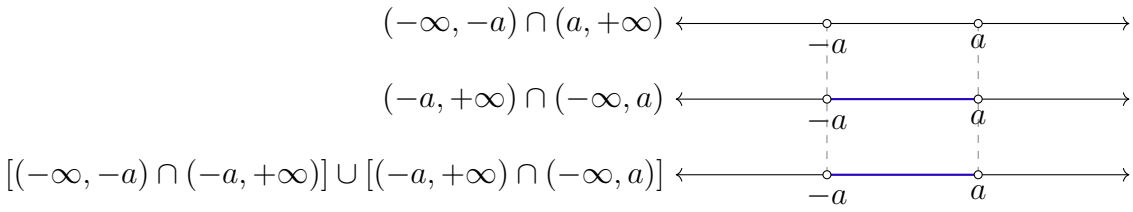
Figura 3 – Intersecção entre $x > -a$ e $x < a$



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Dessa forma, como são dois casos, vamos ter a união das duas intersecções, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4 – União entre $(-\infty, -a) \cap (-a, +\infty)$ e $(-a, +\infty) \cap (-\infty, a)$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Portanto, podemos concluir que $|x| < a$ e $a > 0$ se, e somente se, $-a < x < a$, para todo x real e para todo a real positivo.

Demonstração da propriedade P9:

Sejam x um número real e a um número real positivo, pelas propriedades $4^{\underline{a}}$ e $5^{\underline{a}}$, temos:

$$|x| > a \iff |x|^2 > a^2 \iff x^2 > a^2 \iff x^2 - a^2 > 0 \iff (x + a)(x - a) > 0.$$

Para que esse produto seja maior que zero, vamos ter dois casos para considerar: $(x + a) > 0$ e $(x - a) > 0$ ou $(x + a) < 0$ e $(x - a) < 0$. No primeiro caso, $(x + a) > 0$ e $(x - a) > 0$, conforme ilustra a Figura 5, temos:

$$x + a > 0$$

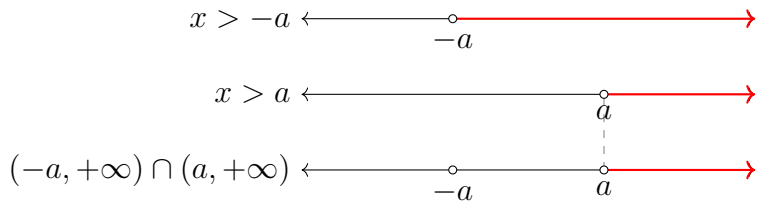
$$x > -a$$

e

$$x - a > 0$$

$$x > a$$

Figura 5 – Intersecção entre $x > -a$ e $x > a$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Ou, no segundo caso, $(x + a) < 0$ e $(x - a) < 0$, conforme ilustra a Figura 6, temos:

$$x + a < 0$$

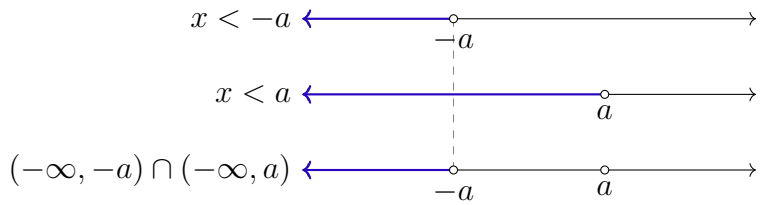
$$x < -a$$

e

$$x - a < 0$$

$$x < a$$

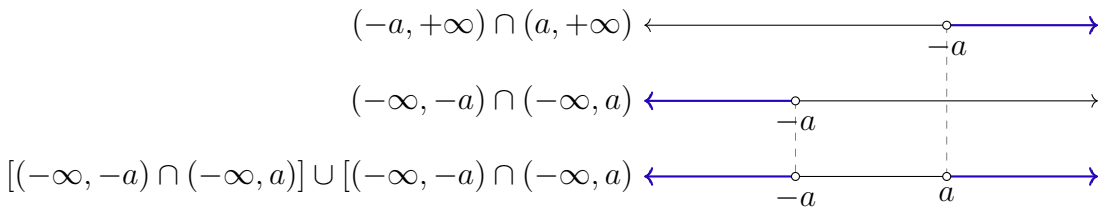
Figura 6 – Intersecção entre $x < -a$ e $x < a$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Dessa forma, como são dois casos, vamos ter a união das duas intersecções, conforme ilustra a Figura 7.

Figura 7 – União entre $(-\infty, -a) \cap (-\infty, a)$ e $(-\infty, -a) \cap (-\infty, a)$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

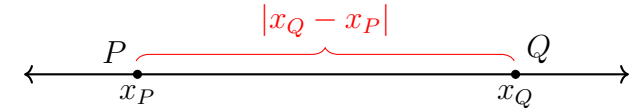
Portanto, podemos concluir que $|x| > a$ e $a > 0$ se, e somente se, $x < -a$ e $x > a$, para todo x real e para todo a real positivo.

3.1.2 Distância entre dois números reais na reta real

Pela definição geométrica, o módulo de um número real é a distância desse número até a origem na reta real. Agora passamos a definir a distância entre dois números reais na reta real.

Sejam P e Q dois pontos na reta real, com abscissas x_P e x_Q, respectivamente, a distância entre P e Q é dada por $|x_Q - x_P|$ ou por $|x_P - x_Q|$. Conforme a representação geométrica ilustrada na Figura 8.

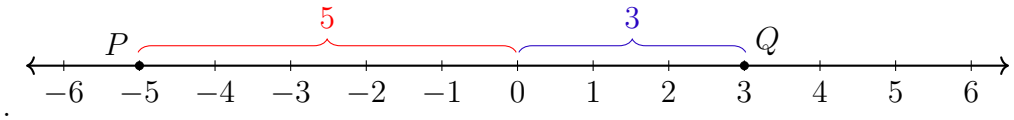
Figura 8 – Representação gráfica de $|x_Q - x_P|$



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Vejamos o exemplo da Figura 9:

Figura 9 – Representação gráfica da distância de dois pontos, P e Q



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Com base na Figura 9, a distância entre os pontos P e Q é dada por:

$$|3 - (-5)| = |3 + 5| = |8| = 8.$$

3.2 Equação Modular

Utilizando a definição do módulo de um número real como base, temos a seguinte propriedade para resolver as equações modulares

$$|x| = a \iff x = a \quad \text{ou} \quad x = -a.$$

Exemplos:

Exemplo 3.2.1: $|x - 7| = 13$

Nesse exemplo, temos que $x - 7 = 13$ ou $x - 7 = -13$. Resolvendo a equação do primeiro grau para obter os valores de x que satisfaçam a equação modular. No primeiro caso, $x = 20$, ou, no segundo caso, $x = -6$. No entanto, nas equações modulares há necessidade de fazer a prova real, isto é, testar os valores obtidos para x na equação modular inicial. Dessa forma, o conjunto solução para essa equação é, de fato, $S = \{-6, 20\}$.

Exemplo 3.2.2: $|9x - 5| = |6x + 10|$

Nesse exemplo, em que $9x - 5 = 6x + 10$ ou $9x - 5 = -(6x + 10)$. As soluções, respectivamente, são $x = 5$ e $x = -\frac{1}{3}$. Testando os valores obtidos para x, daí o conjunto solução dessa equação modular é $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$.

Exemplo 3.2.3: $|y^2 - 5y| = 6$

Nesse exemplo, temos que $y^2 - 5y = 6$ ou $y^2 - 5y = -6$. Vamos resolver a equação quadrática para obter os valores de x que satisfaçam a equação modular. No primeiro caso, igualando a zero a equação, temos que $y^2 - 5y - 6 = 0$. Pela soma e produto, temos que os valores de x são $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$. Já no segundo caso, igualando a zero a equação, temos que $y^2 - 5y + 6 = 0$. Pela soma e produto, temos que os valores de x são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Testando os valores obtidos para x na equação modular inicial, temos portanto que o conjunto solução dessa equação é $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

Exemplo 3.2.4: $|3x - 5| + |2 - x| = 5$

Nesse exemplo, vamos ter que analisar cada parte separada, isto é, vamos utilizar da definição para analisar $|3x - 5|$ e $|2 - x|$. Desse forma,

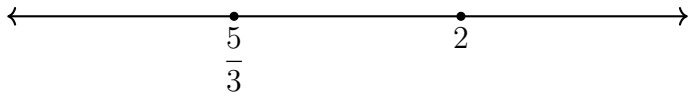
$$|3x - 5| = \begin{cases} 3x - 5, \text{ se } x \geq \frac{5}{3} \\ -3x + 5, \text{ se } x < \frac{5}{3} \end{cases}$$

e

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, \text{ se } x \leq 2 \\ x - 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Vamos fazer uma reta real para obter o intervalo para possíveis valores para x.

Figura 10 – Representação gráfica de $\frac{5}{3}$ e 2



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Vamos considerar três casos para obter os valores de x. Logo após, devemos verificar se o valor x obtido pertence ao intervalo considerado. No primeiro caso, quando $x < \frac{5}{3}$,

então vamos considerar $(-3x+5)$ e $(2-x)$. Logo,

$$\begin{aligned} -3x+5+2-x &= 5 \\ -4x &= -2 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Verificando $x = \frac{1}{2}$ para o intervalo $x < \frac{5}{3}$, pode-se perceber que esse valor pertence ao intervalo considerado.

No segundo caso, quando $\frac{5}{3} \leq x \leq 2$, então vamos considerar as expressões $(3x-5)$ e $(2-x)$. Logo,

$$\begin{aligned} 3x-5+2-x &= 5 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Verificando $x = 4$ para o intervalo $\frac{5}{3} \leq x \leq 2$, pode-se perceber que esse valor não pertence ao intervalo considerado.

No terceiro caso, quando $x > 2$, então vamos considerar as expressões $(3x-5)$ e $(x-2)$. Logo,

$$\begin{aligned} 3x-5+x-2 &= 5 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Verificando $x = 3$ para o intervalo $x > 2$, pode-se perceber que esse valor para pertence ao intervalo considerado.

Portanto, o conjunto solução para essa equação é $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

3.3 Inequação Modular

Para resolver as inequações modulares vamos utilizar as propriedades **P8** e **P9**, para $a > 0$:

P8: $|x| < a \iff -a < x < a$;

P9: $|x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$.

Alguns exemplos são a presentados a seguir.

Exemplo 3.3.1: $|4x+3| \leq 5$

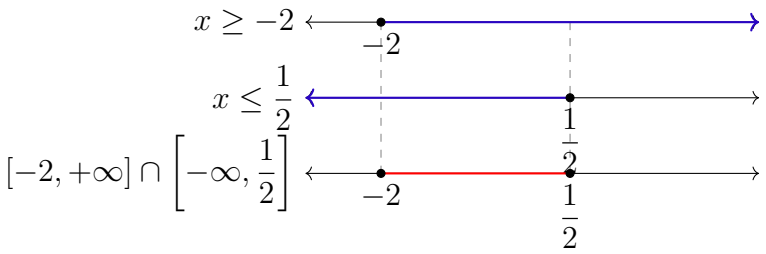
Pela propriedade **P8**, de fato

$$|4x+3| \leq 5 \iff -5 \leq 4x+3 \leq 5$$

Isto é, $4x + 3 \geq -5$ e $4x + 3 \leq 5$. Logo, $x \geq -2$ e $x \leq \frac{1}{2}$.

Representação geométrica da inequação, conforme a Figura 11:

Figura 11 – Intersecção entre $x \geq -2$ e $x \leq \frac{1}{2}$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Portanto, o conjunto solução dessa inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Exemplo 3.3.2: $|2x - 4| > x + 1$

Pela propriedade **P9**, temos que $a > 0$, então $x + 1 > 0$, logo $x > -1$. Daí,

$$|2x - 4| > x + 1 \iff 2x - 4 < -x - 1 \text{ ou } 2x - 4 > x + 1$$

Isto é, vamos ter uma união em relação aos intervalos encontrados, temos então:

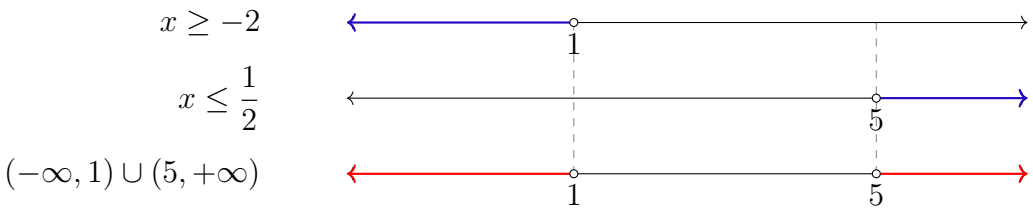
$$2x - 4 < -x - 1 \iff x < 1$$

e

$$2x - 4 > x + 1 \iff x > 5.$$

Representação geométrica da inequação, conforme a Figura 12:

Figura 12 – União entre $x < 1$ e $x > 5$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Portanto, o conjunto solução dessa inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 1 \text{ ou } x > 5\}$.

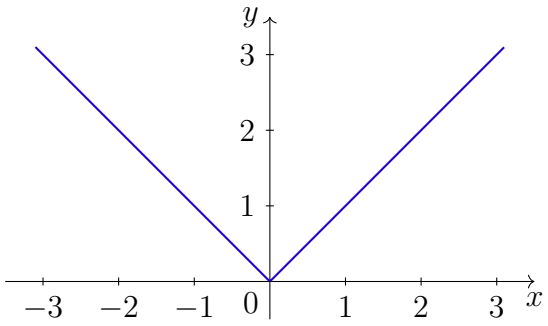
3.4 Função Modular

Seja uma função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x a seu único módulo, $|x|$, isto é, $f(x) = |x|$. Podemos representar da seguinte maneira pela definição de módulo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Pela representação gráfica, temos que o esboço da curva da função modular se comporta da seguinte maneira, conforme Figura 13.

Figura 13 – Representação gráfica da função $f(x) = |x|$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

É possível notar que a função f é decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$ e crescente no intervalo $]0, \infty[$. E a imagem da função modular assume somente valores reais não-negativos, isto é, $Im = \mathbb{R}_+$.

A seguir, são apresentados dois exemplos de esboço de curvas de funções modulares lineares, ou seja, do tipo $f(x) = k|ax - b| + d$, com $k, a, b, d \in \mathbb{R}$. O primeiro exemplo trata da função modular base $f(x) = |x|$.

O primeiro exemplo apresenta a função modular linear com coeficientes $k = a = 1$, $d = 0$ e $b = 1$.

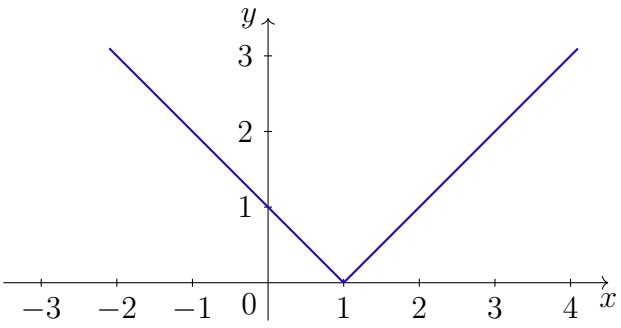
Exemplo 3.4.1: $f(x) = |x - 1|$

A representação algébrica da função $f(x) = |x - 1|$ é dada por:

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geq 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Já o esboço da curva da função f é representado na Figura 14:

Figura 14 – Representação gráfica da função $f(x) = |x - 1|$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nesta figura, a curva está deslocada uma unidade para a direita, sobre o eixo x em relação à função $f(x) = |x|$. Este deslocamento pode ser identificado na expressão algébrica por meio do número 1, observado na representação $f(x) = |x - (1)|$. Assim, correlaciona-se a unidade visual (deslocamento à direita de uma unidade) com a respectiva unidade algébrica (coeficiente $b = 1$).

O último exemplo retoma o exemplo anterior, porém acrescenta o valor 2 para o coeficiente d.

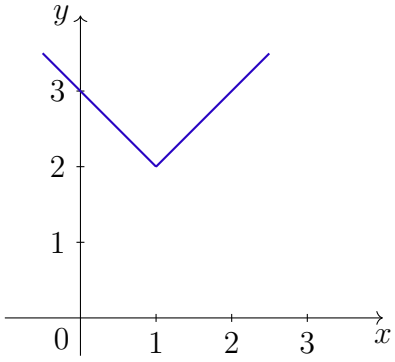
Exemplo 3.4.2: $f(x) = |x - 1| + 2$

A representação algébrica da função $f(x) = |x - 1| + 2$ é dada por:

$$f(x) = |x - 1| + 2 = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geq 1 \\ -x + 3, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Já o esboço da curva da função f é representado na Figura 15:

Figura 15 – Representação gráfica da função $f(x) = |x - 1| + 2$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Aqui, observa-se que a curva está deslocada uma unidade para a direita e duas unidades para cima em relação à função $f(x) = |x|$. Tais deslocamentos podem ser

identificados na expressão algébrica por meio do número 1 e número 2, respectivamente, observado na representação $f(x) = |x-(1)|+2$. Assim, as unidades visuais ficam atreladas às unidades algébricas.

Para uma análise mais completa do estudo de funções modulares lineares, recomendamos consultar o trabalho de Menoncini e Moretti (2022).

O próximo exemplo aborda a função modular quadrática.

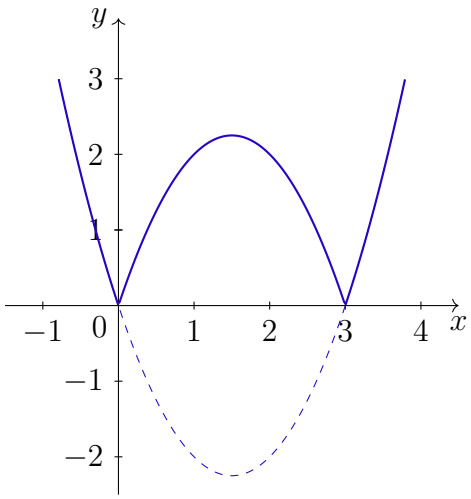
Exemplo 3.4.3: $g(x) = |x^2 - 3x|$

A representação algébrica da função $f(x) = |x^2 - 3x|$ é dada por:

$$g(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x, \text{ se } x^2 - 3x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, \text{ se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}$$

A representação gráfica da função g pode ser verificada na Figura 16:

Figura 16 – Representação gráfica da função $g(x) = |x^2 - 3x|$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nessa figura, tem-se um exemplo de função modular quadrática em azul e a função tracejada é a função quadrática, sem estar em módulo. O que se pode observar é que as duas funções têm algumas características em comum, as quais serão abordadas no Capítulo 7 sobre função modular quadrática.

Exemplo 3.4.4: $h(x) = |\ln x|$

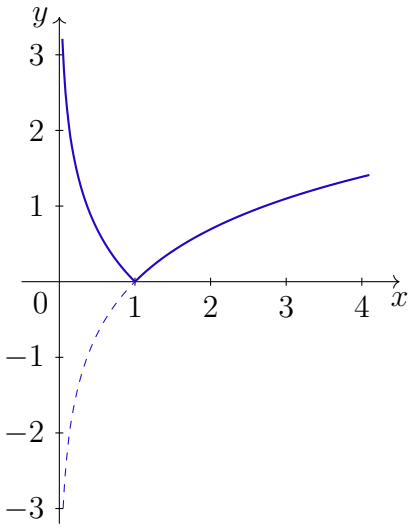
A representação algébrica da função $h(x) = h(x) = |\ln x|$ é dada por:

$$h(x) = |\ln x| = \begin{cases} \ln x, \text{ se } \ln x \geq 0 \\ -\ln x, \text{ se } \ln x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln x, \text{ se } x \geq 1 \\ -\ln x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

A representação gráfica da função h pode-se verificar na Figura 17:

Figura 17 – Representação gráfica da função $h(x) = |ln(x)|$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nessa figura, tem-se a função modular logarítmica natural de x em azul e a função logarítmica natural de x em azul tracejado. O que se pode observar em relação a essas duas funções, é que a função modular de ln tem a imagem negativa da função de ln refletida em relação ao eixo x.

4 Função Quadrática

Nesse capítulo apresentamos uma fundamentação teórica sobre a função quadrática, com objetivo de retomar conceitos e aprofundá-los.

4.1 Definição

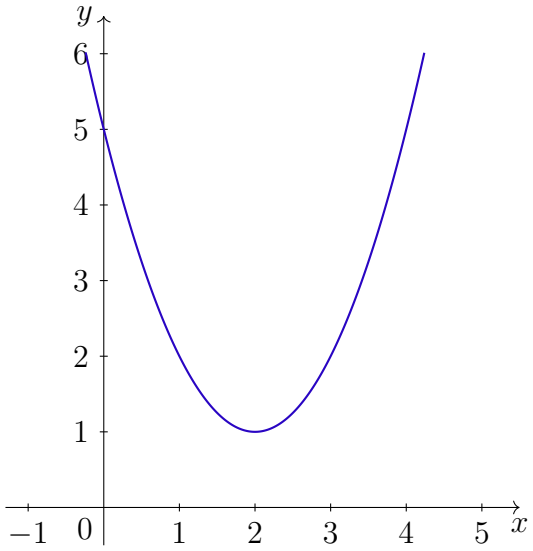
Seja uma função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b, c números reais, com $a \neq 0$, e para todo $x \in \mathbb{R}$.

A seguir, introduzimos exemplos de funções quadráticas e seus gráficos.

Exemplo 4.1.1: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

A Figura 18 mostra a representação gráfica da função $f(x)$:

Figura 18 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



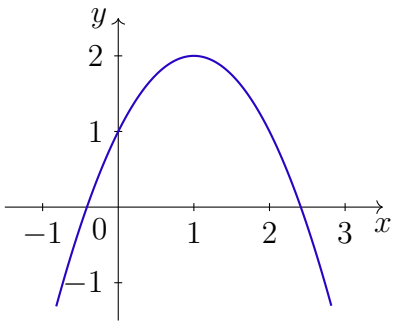
Fonte: Elaborado pelas autoras.

A função $f(x)$ possui os coeficientes com os seguintes valores: $a = 1$, $b = -4$ e $c = 5$.

Exemplo 4.1.2: $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

A representação gráfica da função $g(x)$ está contemplada na Figura 19:

Figura 19 – Representação gráfica da função $g(x) = -x^2 + 2x + 1$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

A função $g(x)$ possui os coeficientes com os seguintes valores: $a = -1$, $b = 2$ e $c = 1$.

Na próxima seção, realizamos um estudo do gráfico da função quadrática, considerando a influência de seus coeficientes.

4.2 Gráfico

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola e será analisada quanto aos seus coeficientes a, b e c.

4.2.1 Coeficiente a

O coeficiente a determina a concavidade da parábola, ou seja, se a concavidade vai ser voltada para cima ou voltada para baixo. Dessa forma, existem dois casos:

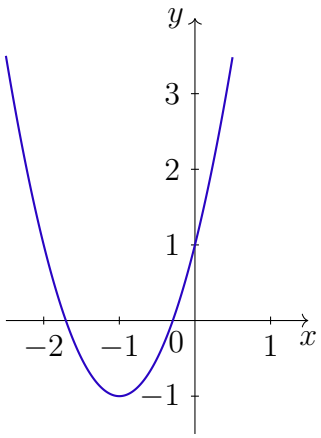
- Se $a > 0$, então a parábola têm a concavidade voltada para cima;
- Se $a < 0$, então a parábola têm a concavidade voltada para baixo.

Vejamos dois exemplos representando cada situação.

Exemplo 4.2.1: $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$

A Figura 20 mostra o gráfico dessa função.

Figura 20 – Representação gráfica da função $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$.



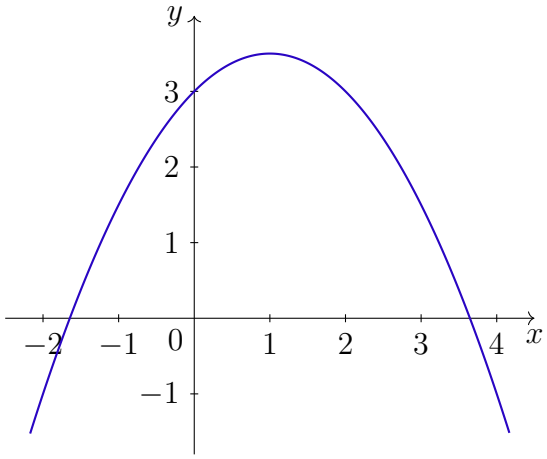
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nesse caso, sendo o coeficiente $a = 2$, a concavidade da parábola vai estar voltada para cima.

Exemplo 4.2.2: $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$

O gráfico de $g(x)$ é apresentado na Figura 21:

Figura 21 – Representação gráfica da função $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nesse caso, como o coeficiente é a é negativo, ou seja, $a = -1$, a concavidade da parábola vai estar voltada para baixo.

Outra característica que podemos notar do coeficiente a é que ele também exerce o papel quanto a abertura da concavidade. Diante disso, considerando o módulo do coeficiente a há dois casos para serem observados:

- Se $|a| > 0$, então a abertura da concavidade é mais estreita.

- Se $0 < |a| < 1$, então a abertura da concavidade é mais larga.

Esses dois casos podem ser verificados também na Figura 20 e Figura 21, respectivamente.

4.2.2 Coeficiente b

O coeficiente b determina a taxa de variação no ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, além de verificar o comportamento da parábola ao interseccionar o eixo das ordenadas se é crescente ou decrescente. Há três casos do coeficiente b para analisar:

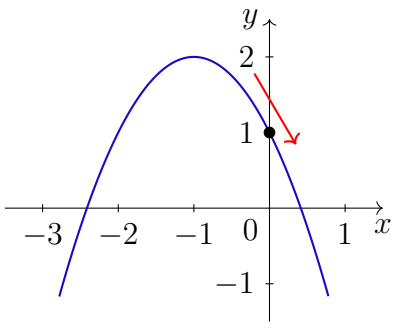
- Se $b < 0$, então a parábola é decrescente na intersecção com o eixo das ordenadas e a taxa de variação é negativa;
- Se $b > 0$, então a parábola cresce após interceptar o eixo das ordenadas e a taxa de variação é positiva;
- Se $b = 0$, então a parábola não cresce nem decresce e a taxa de variação é zero.

Vamos analisar esses casos graficamente nos exemplos abaixo:

Exemplo 4.2.3: $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

O gráfico que representa a função $f(x)$ está disponível na Figura 22.

Figura 22 – Representação gráfica da função $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, ponto (0,1) intersecção da parábola com o eixo y.



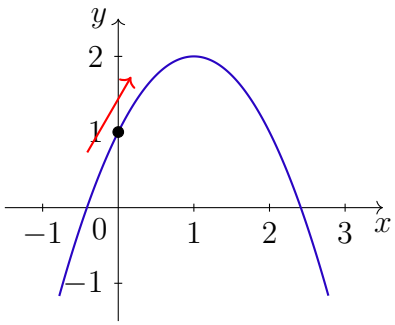
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Sabendo que o coeficiente b da função de $f(x)$ é igual a -2, a parábola será decrescente na intersecção com o eixo das ordenadas.

Exemplo 4.2.4: $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

O gráfico da função $g(x)$ está ilustrado na Figura 23:

Figura 23 – Representação gráfica da função $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, ponto (0,1) intersecção da parábola com o eixo y.



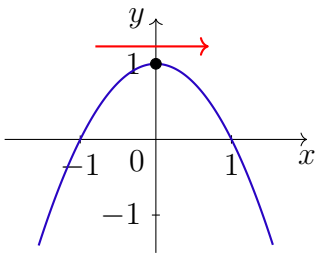
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Como a função $g(x)$ possui o coeficiente $b = 2$, então a parábola é crescente na intersecção com o eixo das ordenadas.

Exemplo 4.2.5: $h(x) = -x^2 + 1$

O gráfico de $h(x)$ pode ser observado na Figura 24:

Figura 24 – Representação gráfica da função $h(x) = -x^2 + 1$, ponto (0,1) intersecção da parábola com o eixo y.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Sendo $b = 0$, então a parábola não é crescente, nem decrescente e a taxa de variação no ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é zero.

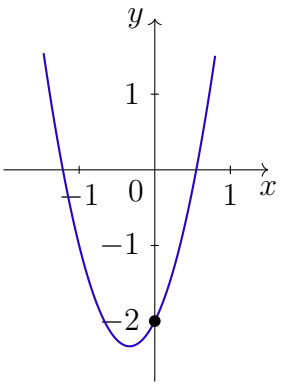
4.2.3 Coeficiente c

O coeficiente c indica em que ponto a parábola vai interceptar o eixo das ordenadas. Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $x = 0$, temos que $f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c$, logo $f(0) = c$. Portanto, o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas é o ponto $(0, c)$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.2.6: $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$

Nessa função o coeficiente $c = -2$, ou seja, a parábola vai intersectar o eixo das ordenadas no ponto $(0, -2)$, como na Figura 25:

Figura 25 – Representação gráfica da função $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ e o ponto (0,-2) de intersecção da parábola com o eixo y.

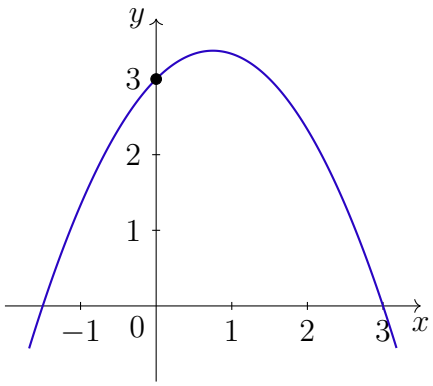


Fonte: Elaborado pelas autoras.

Exemplo 4.2.7: $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + 3$

A Figura 26 traz o gráfico de $g(x)$:

Figura 26 – Representação gráfica da função $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + 3$ e o ponto (0,3) de intersecção da parábola com o eixo y.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

O coeficiente $c = 3$ indica que a parábola vai intersectar o eixo das ordenadas no ponto $(0, 3)$.

4.3 Vértice e Forma Canônica

Assim como os coeficientes a, b e c, o vértice da parábola também é uma informação relevante para o esboço da curva. Ele é dado por:

$$V = (x_v, y_v)$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

em que a coordenada x do vértice é $x_v = -\frac{b}{2a}$ e a coordenada y do vértice é $y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

É possível transformar a função quadrática em sua forma canônica para que possamos analisá-la mais detalhadamente.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Podemos substituir $b^2 - 4ac$ por Δ, desse modo temos a forma canônica da função quadrática:

$$f(x) = a\left[\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

e, portanto,

$$f(x) = a(x - (x_v))^2 - y_v.$$

Essa última expressão algébrica mostra como as coordenadas do vértice da parábola podem ser identificadas na forma canônica da função quadrática.

Para exemplificar, dada a função $f(x) = (x+3)^2 - 1$, identificamos as coordenadas do vértice como sendo $x_v = -3$ e $y_v = -1$.

4.4 Zeros ou raízes da função quadrática

Os zeros da função quadrática é quando o x assume algum valor em que a função é nula, ou seja, é o valor de x tal que $f(x) = 0$.

Para determinar as raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ resolvemos a equação de 2^{o} grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Utiliza-se a forma canônica da função quadrática para resolver $f(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.
\end{aligned}
$$

A quantidade de raízes de uma função quadrática pode ser determinada pela análise do discriminante ou delta (Δ), sendo três possibilidades:

1º) Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e distintas;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º) Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais;

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3º) se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais, então a função não têm zero.

Seguem alguns exemplos para a análise da quantidade de raízes por meio do delta.

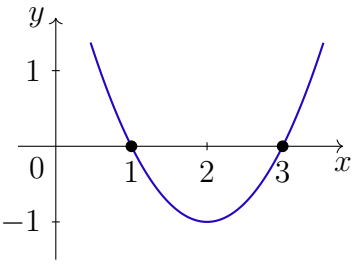
Exemplo 4.4.1: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Os coeficientes de $f(x)$ são $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$, calculando o valor de delta Δ:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
\Delta &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \\
\Delta &= 4,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\Delta > 0$, então a função f possui duas raízes reais, conforme a Figura 27:

Figura 27 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Observando a Figura 27 as raízes da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

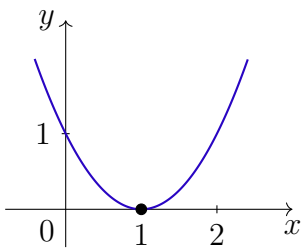
Exemplo 4.4.2: $g(x) = x^2 - 2x + 1$

Nesse exemplo, os coeficientes são $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$, disso calcula-se o delta Δ:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ \Delta &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, $\Delta = 0$, então a função $g(x)$ possui duas raízes reais e iguais (Figura 28).

Figura 28 – Representação gráfica da função $g(x) = x^2 - 2x + 1$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

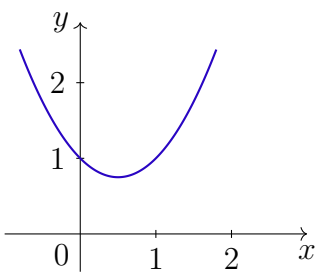
Aqui as raízes da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$ são iguais, isto é, $x_1 = x_2 = 1$.

Exemplo 4.4.3: $h(x) = x^2 - x + 1$

Os coeficientes de $h(x)$ são $a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$, e o delta Δ é negativo:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ \Delta &= -3.\end{aligned}$$

Figura 29 – Representação gráfica da função $h(x) = x^2 - x + 1$.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

A Figura 29 mostra que a função $h(x)$ não possui raízes reais, pois $\Delta < 0$.

5 Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Interpretação Global Figural

O presente trabalho tem como base a Teoria de Registro das Representações Semióticas proposta por Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês. Duval dedicou-se ao estudo na área da psicologia cognitiva, destacando principalmente a importância da semiótica para a compreensão dos conceitos matemáticos, contribuindo significativamente para a Educação Matemática.

Sabe-se que a Matemática é uma ciência abstrata, não é possível perceber pelos sentidos os conceitos matemáticos. Por exemplo, não se pode enxergar, tocar ou sentir um número, mas conseguimos representá-lo de diversas formas. O número não existe de maneira real, mas, sim, como uma ideia dele. Assim, os objetos matemáticos não são reais, no entanto temos conhecimento deles a partir de suas representações. Dessa forma, Duval argumenta que a aprendizagem matemática enfrenta problemas relacionados à compreensão, afirmando que:

> Precisamos primeiro nos interrogar sobre o que é o conhecimento matemático e sobre o que pode ter de diferente em relação aos outros tipos de conhecimento. [...] A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos. Essa questão do "como podemos ter acesso por nós mesmos" é evidentemente essencial para a formação e a aprendizagem em matemática. [...] Essa questão é na realidade a dos processos cognitivos que são mobilizados em qualquer ação do pensamento matemático (Duval, 2011b, p. 15).

Para Duval, o conhecimento matemático se dá através das operações semióticas, e não há compreensão da matemática sem antes ter acesso às representações dos objetos.

Antes de adentrarmos a Teoria de Registro das Representações Semióticas, vamos primeiro discutir alguns conceitos fundamentais, os quais Duval se baseou nas interpretações das principais referências da semiótica moderna: Peirce, Saussure e Frege[1].

Os primeiros conceitos para iniciar o estudo são as representações e os signos. As representações não devem ser confundidas com os objetos, no entanto são necessárias para

[1] Duval (2011b, p.28-39) menciona Peirce, Saussure e Frege como os pioneiros da semiótica moderna, uma vez que seus trabalhos constituem os três modelos de análise dos signos que fundamentaram a semiótica.

se ter acesso a eles, "pois, elas estão "no lugar dos" objetos ou os "evocam", quando esses não são imediatamente acessíveis" (Duval, 2011b, p.23).

Já os signos podem ser considerados como representações, pois também eram limitados apenas em ocupar o lugar dos objetos quando eles não eram acessíveis, porém, os signos assumem o papel de uma função cognitiva de tratamento. Nesse caso, não pensar o signo apenas como um significado de algo, mas como um processo para compreender a matemática.

Entretanto, as representações e os signos são diferentes quanto à natureza em relação ao objeto. Dessa forma, Duval faz uma separação entre as representações e os signos, denominando como *clivagem cognitiva*:

> Clivagem quase sempre pouco observada, ou cuja importância é negada. Com efeito, na atividade de conhecimento, eles cumprem uma função comum que é "se colocar no lugar de" o que eles representam ou designam e surgem da mesma exigência epistemológica fundamental que é de jamais se confundirem com os próprios objetos. [...] A relação entre os signos e os objetos não contém nenhuma interação, mas é apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado, a língua, um sistema de numeração etc. E isso muda tudo quanto às capacidades cognitivas de tratamento, a começar pela «informação». Mas a comparação dos diferentes modelos mostrou a dificuldade, ou a ambiguidade, das definições do que denominados um «signo», quase tudo podendo ser qualificado de signo ou quase nada. [...]Todas as representações semióticas apresentam duas características que não encontramos nas unidades elementares de sentido que denominamos «signos». Primeiramente, elas têm uma organização interna que varia de um tido de representação semiótica para outra. A organização de uma frase simples não é mesmo a de uma equação. A organização interna de uma representação gráfica não é a de uma figura geométrica ou de um esquema etc. Depois, e não importa qual representação semiótica, existem sempre várias maneiras de distinguir as unidades de sentido ou os níveis de organização (Duval, 2011b, p. 37-38).

Portanto, a relação do objeto com a representação é uma relação de causalidade, e a relação do objeto com o signo é uma relação de referência. Isto é, utiliza-se o signo para dar sentido ao objeto, já a representação é a interpretação do sentido dada ao signo. Podemos estabelecer, como exemplos, que as representações semióticas são as linguagens naturais, as equações, as figuras, os gráficos, já as palavras, as letras, os algarismos, os pontos, os traços são os signos.

Segundo Duval (2011b), um sistema semiótico é formado por um conjunto de signos organizados a partir de regras e relações específicas, permitindo identificar e representar um objeto, sendo sua principal função a de comunicar informações. Já para um sistema semiótico específico da Matemática, Duval denomina como registro de representação semiótica, tendo além de funções de comunicação, possui "as funções cognitivas de objetivação e tratamento por meio de transformações internas das representações semióticas" (Duval, 2011b, p. 71).

Para que um sistema semiótico seja um registro de representação semiótica, o autor caracteriza o registro como um sistema semiótico cognitivamente criador, ou seja, "é preciso identificar as operações de produção de representação que ele permite executar de maneira original e específica." (Duval, 2011b, p. 83). Dessa forma, segundo Duval (2012), para que um sistema semiótico seja considerado como um registro de representação semiótica é necessário que ele envolva três operações cognitivas: a formação de uma representação semiótica identificável, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação semiótica identificável determina-se como uma seleção de relações, características e/ou especificações de um conteúdo a ser representado. Essa formação se dá a partir de regras próprias do registro que devem ser respeitadas, pois essas regras determinam como identificar e de reconhecer as representações, além da possibilidade de utilizá-las para tratamentos.

O tratamento de uma representação trata-se da transformação da representação em seu registro semiótico de formação, ou seja, é uma transformação interna a um registro. No tratamento de uma representação há um conjunto de regras próprias e de funcionamento para cada registro, sendo que não são possíveis em outros registros.

A conversão caracteriza-se como a transformação da representação em uma representação em outro registro, podendo conservar totalmente ou parcialmente a representação inicial, isto é, trata-se de um mesmo objeto, porém não conserva as mesmas propriedades. Duval enfatiza que "A conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática." (Duval, 2011b, p. 100). O autor defende que a operação de conversão é a transformação mais importante do ponto de vista cognitivo, pois assim pode-se compreender os objetos em suas diferentes representações, possibilitando a compreensão matemática.

Para Duval (2011b), os registros são classificados em dois grandes grupos, chamados monofuncionais ou multifuncionais (plurifuncionais), e as representações em discursivas ou não discursivas, conforme a Tabela 2.

Os registros multifuncionais não são algoritmizáveis, incluem as línguas (designação de objetos, enunciação e raciocínio), com duas modalidades de produção a oral e a escrita, representações icônicas e configurações geométricas. Os registros monofuncionais são

algoritmizáveis, as escritas são simbólicas (numeração, álgebra, línguas formais), com uma modalidade de produção sendo a escrita, além de gráficos cartesianos e esquemas. As representações discursivas caracterizam-se pela linearidade na produção e organização das expressões. Incluem as línguas, oral e escrita, representações transitórias auxiliares para operações livres ou externas e escritas simbólicas, como sistemas de numeração, escrita algébrica e línguas formais. As representações não discursivas possuem uma organização bidimensional com uma apreensão simultânea. Possuem representações icônicas, configurações geométricas e gráficos cartesianos, além de junção de pontos, orientação com flechas, interpolação.

Tabela 2 – Classificação dos registros e das representações

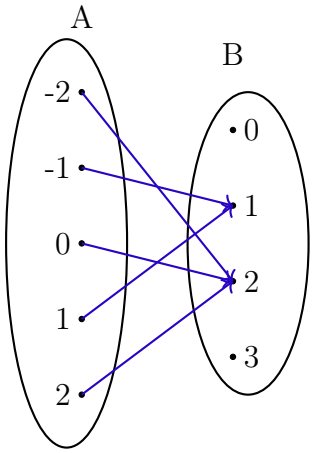
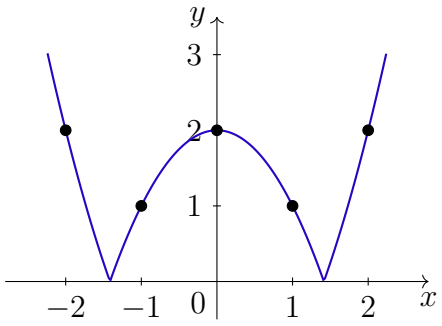
	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros plurifuncionais (tratamentos não algoritmizáveis)	- Língua natural: associações verbais (conceituais); descrição, definição, explicação; - Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças; - Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	- Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas nas dimensões 0, 1, 2, 3); - Apreensão operatória e não somente perceptiva; - Construção com instrumentos; Modelização de estruturas físicas.
Registros Monofuncionais (tratamentos principalmente algoritmizáveis)	- Sistema de escrita: numéricas (binária, decimal,...); algébricas; simbólicas (línguas formais); - Cálculo literal, algébrico, formal	- Gráficos cartesianos (visualização de variações) mudanças de sistema de coordenadas; - Interpolação, extrapolação.

Fonte: Adaptado de Duval (2004) apud Menoncini (2018).

Os registros multifuncionais (plurifuncionais) são utilizados em todas as áreas do conhecimento, mas na matemática, os registros que predominam são os monofuncionais. Isso se deve porque os registros monofuncionais seguem regras bem definidas, facilitando a generalização e a formalização dos processos matemáticos.

Para exemplificar os conceitos abordados tem-se a Tabela 3 que traz múltiplas representações semióticas da função modular quadrática, tanto discursivas, quanto não discursivas.

Tabela 3 – Formas de representação da função modular $f(x) = |x^2 - 2|$

<table>
<tr><td>Representação Discursiva</td><td>Representação Discursiva</td><td>Representação Não Discursiva (alguns valores de x)</td></tr>
<tr><td>Para valores reais de x no intervalo de –2 a 2 o valor de y é dado pelo módulo do quadrado de x menos 2.</td><td>$A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}$
$f : A \to B$
$f(x) = |x^2 - 2|$
$y = f(x)$</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Representação Não Discursiva (alguns pares ordenados)</td><td colspan="2">Representação Não Discursiva</td></tr>
<tr><td>$\{(-2,2),(-1,1),(0,2),(1,1),(2,2)\}$</td><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Na Tabela 3, o objeto matemático função modular quadrática é acessível por meio dos registros Plurifuncionais e Monofuncionais. No registro Multifuncional está a representação Discursiva em língua natural. Já no registro Monofuncional estão as representações Discursivas em língua formal, a saber as representações algébrica, simbólica e numérica, enquanto que os gráficos e os diagramas são exemplos de representações Não Discursivas.

Ademais, relacionando com os conceitos para ser um registro, pode-se dizer então que cada representação corresponde a um tipo de tratamento, e a transição de uma representação para outra pode-se dizer que é uma conversão, isto é, eles acontecem de forma concomitante.

O autor defende de que para se obter uma compreensão matemática precisa-se trabalhar diversos sistemas semióticos, pois o estudo em somente uma representação pode influenciar em confundir o objeto matemático com sua representação, e é isso que não se

deve fazer. Destaca também que a maior dificuldade da compreensão da matemática é por não ter capacidade de realizar tratamentos ou conversões com clareza. Ou seja, quando entendemos essa simultaneidade entre tratamento e a conversão de diferentes representações semióticas do mesmo objeto é que percebemos que desenvolvemos a capacidade cognitiva de compreensão dos objetos matemáticos.

Ao falar de cognição, Duval (2009) utiliza duas palavras para determinar a lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento, semiósis e noésis. Semiósis é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, já a noésis é a apreensão conceitual de um objeto. O autor caracteriza a lei fundamental como "Não há noésis sem semiósis, [...]" (Duval, 2009, p.18). Para cada representação semiótica estudada conseguimos acessar uma nova característica do objeto, dessa forma que ocorre a compreensão conceitual do objeto matemático em diferentes perspectivas. Dessa forma, obtemos conhecimento quando não atribuímos mais uma representação do objeto no lugar do próprio objeto.

A Teoria dos Registro de Representações Semióticas também contempla uma abordagem direcionada ao esboço de curvas de funções, chamada Interpretação Global Figural, que se diferencia da abordagem Ponto a Ponto.

No ensino de funções é comum introduzir a representação gráfica partindo da representação algébrica. Essa prática dá a entender que o gráfico só é obtido através de sua expressão algébrica. Contudo, é fundamental compreender que a expressão algébrica e o gráfico são representações diferentes de um mesmo objeto matemático, a função, reforçando que não devemos confundir a representação com o objeto de estudo.

Essa prática de primeiro utilizar a expressão algébrica para depois obter o gráfico da função, Duval (2011a) denomina como Ponto a Ponto. Ou seja, a partir da lei de formação da função, representada em sua forma algébrica, atribuímos valores para a variável independente, e por meio de cálculos, chegamos ao valor correspondente à variável dependente, obtendo-se os pares ordenados. Para, então, em um plano cartesiano, localizar esses pontos, ligá-los, e, assim, construir o gráfico da função.

Por ser uma prática intuitiva e simples, a abordagem Ponto a Ponto é muito utilizado no ensino, porém apresenta limitações entre as representações algébricas e gráficas que impactam negativamente a aprendizagem. Esse procedimento pode estabelecer apenas uma correspondência local e pontual entre o par ordenado e o ponto no gráfico. Isso faz com que haja perda de informações, não tendo uma compreensão das propriedades gerais da função, entendendo que são conceitos isolados ao invés de partes de um mesmo objeto.

Ainda sobre a prática Ponto a Ponto, Duval (2011a) defende que esse método favorece o estudo principalmente das funções de primeiro e segundo grau, para que seja feita uma interpretação dos pontos de interesse, como pontos de intersecção e pontos de máximos e mínimos.

Em contrapartida, Duval (2011a) propõe uma outra abordagem, a qual denomina de Interpretação Global Figural como uma alternativa à abordagem Ponto a Ponto, pois a abordagem Ponto a Ponto é insuficiente para a análise de alguns detalhes importantes na interpretação das funções. Dessa forma, a Interpretação Global Figural se dá pela necessidade de realizar um estudo articulado entre os registros gráficos e algébricos, permitindo uma forma mais integrada e qualitativa de compreender as funções, fazendo com que os registros gráficos e algébricos aconteçam concomitante.

Essa articulação entre os registros gráficos e algébricos refere-se como "O conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica." (Duval, 2011a, p.99). Ou seja, toda modificação realizada no gráfico pode ser visualizada e reconhecida na expressão algébrica correspondente, e vice-versa. Essas alterações podem e devem ser observadas em conjunto entre o gráfico e a expressão algébrica, nas representações algébricas como os coeficientes, também denominados parâmetros, e nas representações gráficas como a inclinação, angulação e intersecção com os eixos e a concavidade. Mas, claro, elas acontecem simultaneamente quando há modificação em alguma das representações.

Diante do exposto, a abordagem Interpretação Global Figural articula operações entre registros algébricos e gráficos. Essas operações, as quais podem ser as modificações algébricas ou modificações gráficas, quando desenvolvidas no mesmo registro são identificadas como tratamento e quando relacionadas concomitante tratam-se de conversões. As modificações realizadas em um registro devem ter correspondências claras e articuladas com o outro registro, favorecendo assim uma compreensão mais profunda do objeto matemático. É essa a abordagem que fundamentará as análises e discussões desenvolvidas ao longo deste trabalho.

6 Metodologia

A metodologia adotada neste trabalho baseia-se em uma pesquisa de natureza qualitativa, em que buscamos analisar as correlações entre as unidades significativas visuais da curva e as unidades significativas algébricas da função modular quadrática, com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.49) "A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto [sic] de estudo". Por meio dessa abordagem, busca-se explorar e compreender as relações entre a representação gráfica e a expressão algébrica da função, destacando os aspectos visuais e matemáticos.

A função modular quadrática pode assumir diferentes leis de formação, ou seja, diferentes representações algébricas. Optamos por explorar dois casos da função modular quadrática: as funções completas escritas da forma $f(x) - d = k|(ax - b)^2|$ e as funções incompletas dos tipos $f(x) = |x^2 - c|$ e $f(x) = |x^2 - (bx)|$. Definidos os casos passamos a analisar as representações gráficas e algébricas da função modular quadrática, com foco nas unidades significativas visuais da curva (como concavidade, deslocamentos e raízes) e suas correlações com as unidades significativas algébricas (como os coeficientes a, b, c, d e k). Utilizando o software GeoGebra, foram construídos os esboços da curva a partir da função base, $f(x) = |x^2|$, variando os parâmetros para observar as alterações nas curvas e suas correspondências com as expressões algébricas.

Em seguida, foram desenvolvidos três exemplos para mostrar a construção de esboços de curvas da função modular quadrática, partindo da função base, $f(x) = |x^2|$, englobando mais de um parâmetro para a construção e observação. Aqui, novamente o Geogebra foi utilizado, e permitiu a identificação de como as alterações nos parâmetros da função modular quadrática refletem nas propriedades visuais das curvas.

Um ponto a ser destacado neste trabalho é que todos os gráficos foram elaborados primeiro no GeoGebra, e posteriormente, escritos para a linguagem LaTeX, a qual esse trabalho foi escrito.

7 Análise e resultados: Função Modular Quadrática

Como já mencionado, o estudo das funções foi, e ainda é importante para a matemática, pois quanto mais se desenvolve e aprofunda, mais impulsiona o desenvolvimento de outras ciências. A escolha pela função modular quadrática, de modo geral, se dá pela relevância em estudar principalmente as relações da expressão algébrica com o esboço de curvas, pois tais relações podem permitir uma análise mais qualitativa e articulada de um problema a ser resolvido. Ademais, sua escolha justifica-se por existirem poucos estudos sobre este conteúdo matemático, tanto em livros didáticos quanto em outros materiais científicos, o que resulta em um assunto atrativo para ser explorado.

Dessa forma, neste capítulo vamos explorar a função modular quadrática a partir das correspondências entre as propriedades do esboço da curva e a expressão algébrica, utilizando a Interpretação Global Figural. Como referência para esse estudo utilizamos como base o trabalho de Menoncini e Moretti (2022), pois aborda uma análise completa sobre a relação do esboço de curva e a expressão algébrica da função modular linear. Para isso, são considerados dois casos da função modular quadrática: o primeiro trata das funções cuja representação algébrica é um quadrado perfeito da forma $f(x) - d = k|(ax - b)^2|$; o segundo caso aborda as funções quadráticas incompletas que apresentam as escritas $f(x) = |x^2 - c|$ e $f(x) = |x^2 - (bx)|$.

7.1 Caso 1: Função modular quadrática completa

Neste caso são consideradas as funções quadráticas que podem ser escritas como um quadrado perfeito, ou seja, funções modulares quadráticas do tipo

$$f(x) - d = k|(ax - b)^2|,$$

com $a \neq 0$ e $a, b, d, k \in \mathbb{R}$.

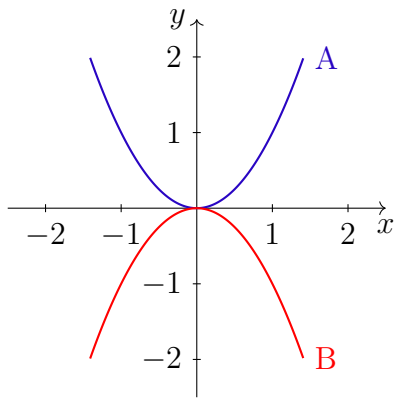
Posto isso, partindo da função modular quadrática base, $f(x) = |x^2|$, vamos investigar em casos como se relacionam as unidades significativas visuais com as unidades significativas algébricas. As unidades significativas[1] visuais podem ser definidas como as principais qualidades ou características da curva, enquanto que as unidades significativas algébricas são os parâmetros, ou seja, os coeficientes a, b, c, d e k.

[1] Ao longo do trabalho, como forma de reduzir a escrita, quando utilizado os termos unidade visual ou unidade algébrica, deve ser subentendido como unidade significativa visual e unidade significativa algébrica, respectivamente.

7.1.1 Unidades visuais e unidade algébrica k

Na Tabela 4 pode-se observar as mudanças das unidades visuais em relação à unidade algébrica k, quando $k > 0$ e quando $k < 0$.

Tabela 4 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica k

Representação gráfica	**Representação algébrica**
	A - $f(x) = \lvert x^2 \rvert = x^2$ B - $f(x) = -\lvert x^2 \rvert = -x^2$

Unidades visuais	**Valores das unidades visuais**	**Unidade algébrica** (k)
Sentido do traçado	A - O traçado está voltado para cima	A - Valor de $k > 0$
	B - O traçado está voltado para baixo	B - Valor de $k < 0$
Raízes reais e vértice	C - Uma raiz que coincide com o vértice	C - Raiz e vértice em $(0, 0)$

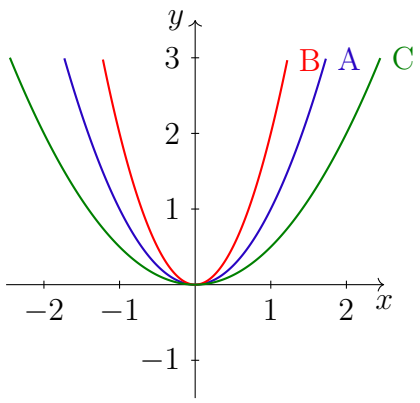
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nesse caso, a função $f(x) = |x^2|$, em que $k > 0$, apresenta o esboço da curva com a concavidade voltada para cima, e sua raiz e seu vértice coincidem com a origem $(0, 0)$. Já para $f(x) = -|x^2|$, ou seja, quando $k < 0$, temos o esboço da curva com a concavidade voltada para baixo, e sua raiz e seu vértice coincidem com a origem $(0, 0)$ também. Dessa forma, o coeficiente k indica se a concavidade do esboço da curva é voltada para cima ou se é voltada para baixo.

7.1.2 Unidades visuais e unidade algébrica a

Na Tabela 5 pode-se observar as mudanças das unidades visuais em relação à unidade algébrica a, quando $a = 1$, quando $a > 1$ e quando $0 < a < 1$.

Tabela 5 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica a

Representação gráfica	Representação algébrica
	A - $f(x) = \lvert x^2 \rvert = x^2$ B - $f(x) = \lvert 2x^2 \rvert = 2x^2$ C - $f(x) = \left\lvert \frac{1}{2}x^2 \right\rvert = \frac{1}{2}x^2$

Unidades visuais	**Valores das unidades visuais**	**Unidade algébrica** (a)
Abertura do traçado em relação aos eixos	A - Traçado apresenta abertura "simétrica" em relação aos eixos	A - Coeficiente $a = 1$
	B - Traçado mais fechado em relação ao eixo vertical	B - Coeficiente $a > 1$
	C - Traçado mais aberto em relação ao eixo vertical	C - Coeficiente $0 < a < 1$
Raízes reais e vértice	D - Uma raiz que coincide com o vértice	D - Raiz e vértice em $(0, 0)$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nesse caso, a função $f(x) = |x^2|$, ou seja, quando o coeficiente a é igual a 1, temos o esboço da curva simétrica em relação ao eixo vertical. Já para $f(x) = |2x^2|$, ou seja, quando o coeficiente a é maior que 1, temos o esboço da curva mais fechado em relação ao eixo vertical. Na função $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2\right|$, o coeficiente a é maior que zero e menor que um, tem-se o esboço da curva mais aberto em relação ao eixo vertical. Já as raízes das três funções coincidem com o vértice na origem $(0, 0)$.

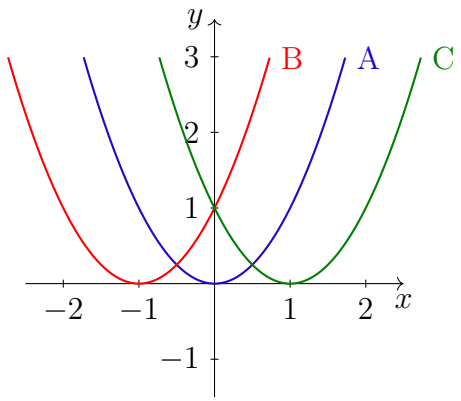
Dessa forma, o coeficiente a indica a abertura do esboço da curva em relação ao eixo vertical, se é uma abertura simétrica, se é uma abertura mais fechada ou se é uma abertura mais aberta.

7.1.3 Unidades visuais e unidade algébrica b

Já na Tabela 6 pode-se observar as mudanças das unidades visuais em relação à unidade algébrica b, quanto a sua ausência, ou quando acrescenta-se um valor negativo

para b ou quando acrescenta-se valor positivo para b.

Tabela 6 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica b

Representação gráfica	Representação algébrica
	A - $f(x) = \lvert x^2 \rvert = x^2$ B - $f(x) = \lvert (x-(-1))^2 \rvert = (x-(-1))^2$ C - $f(x) = \lvert (x-(1))^2 \rvert = (x-1)^2$

Unidades visuais	**Valores das unidades visuais**	**Unidade algébrica** (b)
Posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal	A - O traçado passa pela origem	A - Ausência da constante b
	B - O traçado se desloca à esquerda em relação à origem	B - Acrescenta-se a constante negativa b
	C - O traçado se desloca à direita em relação à origem	C - Acrescenta-se a constante positiva b
Raízes reais e vértice	D - A raiz que coincide com o vértice	D - Raiz e vértice em $(0, 0)$
	E - A raiz se desloca à esquerda	E - Raiz e vértice em $(b, 0)$
	F - A raiz se desloca à direita	F - Raiz e vértice em $(b, 0)$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

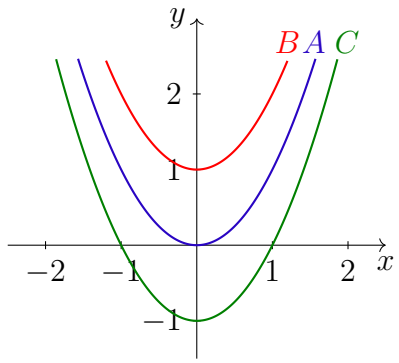
Nesse caso, a função $f(x) = |x^2|$, ou seja, quando constante b é ausente, igual a zero, temos o esboço da curva passa pela origem. Já para $f(x) = |(x-(-1))^2|$, ou seja, quando a constante b é negativa, tem-se que o esboço da curva se desloca à esquerda em relação à origem. Na função $f(x) = |(x-1)^2|$, a constante b é positiva, tem-se que o esboço da curva se desloca à direita em relação à origem. Já as raízes, no A coincide com o vértice e a origem $(0, 0)$; no B a raiz se desloca à esquerda e coincide com o vértice $(b, 0)$; no C a raiz se desloca à direita e coincide com o vértice $(b, 0)$.

Sendo assim, nota-se que o coeficiente b indica o deslocamento do esboço da curva em relação ao eixo horizontal, se b tem valor nulo, o traçado passa pela origem e coincide com o vértice; quando b é negativo o traçado desloca-se para a esquerda, tanto a raiz quanto o vértice coincidem em $(b, 0)$; quando b é positivo o traçado desloca-se para a direita, tanto a raiz quanto o vértice coincidem em $(b, 0)$.

7.1.4 Unidades visuais e unidade algébrica d

Já na Tabela 7 pode-se observar as mudanças das unidades visuais em relação a unidade algébrica d, quanto a sua ausência, ou quando acrescenta-se um valor positivo para d ou quando acrescenta-se valor negativo para d.

Tabela 7 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica d

Representação gráfica	Representação algébrica
	A - $f(x) - 0 = \lvert x^2 \rvert \Rightarrow f(x) = x^2$ B - $f(x) - (1) = \lvert x^2 \rvert \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$ C - $f(x) - (-1) = \lvert x^2 \rvert \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$

Unidades visuais	**Valores das unidades visuais**	**Unidade algébrica** (d)
Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical	A - O traçado passa pela origem	A - Ausência da constante d
	B - O traçado se desloca para cima	B - Acrescenta-se a constante positiva d
	C - O traçado se desloca para baixo	C - Acrescenta-se a constante negativa d
Raízes reais e vértice	D - A raiz que coincide com o vértice	D - Raiz e vértice em $(0, 0)$
	E - Não há raiz real; Vértice se desloca para cima	E - Não há raiz real; vértice em $(0, d)$
	F - Duas raízes reais; Vértice se desloca para baixo	F - Raízes em $(\pm\sqrt{-d}, 0)$ e vértice em $(0, d)$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Nesse caso, a função A possui a constante d igual a zero, assim o traçado passa pela origem e tem a raiz que coincide com o vértice em $(0, 0)$; já a função B tem a constante d positiva, assim o esboço da curva se desloca para cima, não tem raiz real, e possui vértice em $(0, d)$; já na função C a constante d é negativa, dessa forma o esboço da curva se desloca para baixo, possui duas raízes reais em $(\pm\sqrt{-d}, 0)$ e o vértice em $(0, d)$.

Desse modo, verifica-se que a constante d indica o deslocamento do esboço da curva em relação ao eixo vertical. Isso significa que quando d é igual a zero, não há deslocamento do traçado, a raiz e o vértice coincidem em (0.0); quando o coeficiente d é positivo tem-se que o esboço da curva se desloca para cima, não tem raiz real e tem o vértice em $(0, d)$; quando a constante d é negativa, o esboço da curva se desloca para baixo, possui duas raízes reais e tem vértice em $(0, d)$.

7.2 Caso 2: Função modular quadrática incompleta

7.2.1 Função modular quadrática incompleta da forma $f(x) = |x^2 - c|$

Funções modulares quadráticas incompletas que apresentam apenas o termo constante c possuem as curvas conforme a Tabela 8.

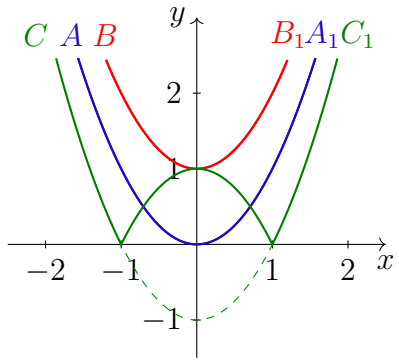
Na Tabela 8 pode-se observar as mudanças das unidades visuais em relação a unidade algébrica c, quanto a sua ausência, ou quando acrescenta-se um valor positivo para c ou quando acrescenta-se valor negativo para c. Além da função modular quadrática tem-se também a função quadrática para se ter como um parâmetro auxiliar.

Dessa forma, observa-se que quando a constante c está ausente, c igual a zero, tanto a função modular quadrática (A) quanto a função quadrática (A_1) se coincidem, possuindo a raiz e o vértice coincidindo na origem $(0, 0)$.

Quando a constante c tem valor negativo, o esboço da curva se desloca para cima, não possui raiz real e o vértice também se desloca para cima, em $(0, -c)$, isso vale tanto para a função modular quadrática B quanto para a função quadrática B_1.

Já quando a constante c tem valor positivo, o esboço da curva se desloca para baixo e entre as raízes o esboço é refletido em relação ao eixo x, as raízes são simétricas em relação à origem, em $(\pm\sqrt{c}, 0)$ e o vértice em $(0, c)$.

Tabela 8 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica c para $f(x) = |x^2 - c|$

Representação gráfica	Representação algébrica
	A - $f(x) = \lvert x^2 \rvert = x^2$ A_1 - $f(x) = x^2$ B - $f(x) = \lvert x^2 - (-1) \rvert = \lvert x^2 + 1 \rvert$ B_1 - $f(x) = x^2 + 1$ C - $f(x) = \lvert x^2 - (1) \rvert = \lvert x^2 - 1 \rvert$ C_1 - $f(x) = x^2 - 1$

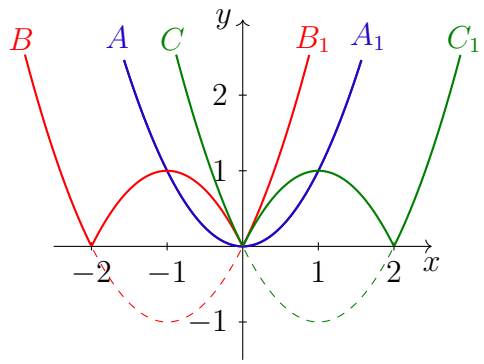
Unidades visuais	**Valores das unidades visuais**	**Unidade algébrica** (c)
Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical	A - O traçado passa pela origem B - O traçado se desloca para cima C - O traçado se desloca para baixo. Entre as raízes, o traçado é refletido em relação ao eixo x	A - Ausência da constante c B - Acrescenta-se a constante negativa c C - Acrescenta-se a constante positiva c
Raízes reais e vértice	D - A raiz coincide com o vértice E - Não há raiz real; Vértice se desloca para cima F - Duas raízes simétricas em relação à origem; Vértice refletido para cima	D - Raiz e vértice em $(0, 0)$ E - Não há raiz real; vértice em $(0, -c)$ F - Raízes em $(\pm\sqrt{c}, 0)$ e vértice em $(0, c)$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

7.2.2 Função modular quadrática incompleta da forma $f(x) = |x^2 - (bx)|$

As possíveis curvas de funções modulares quadrática incompletas deste tipo são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 – Correspondências entre unidades visuais e unidade algébrica b para $f(x) = |x^2 - (bx)|$

Representação gráfica	Representação algébrica
	A - $f(x) = \lvert x^2 \rvert = x^2$ A_1 - $f(x) = x^2$ B - $f(x) = \lvert x^2 - (-2x) \rvert$ B_1 - $f(x) = x^2 + 2x$ C - $f(x) = \lvert x^2 - (2x) \rvert$ C_1 - $f(x) = x^2 - 2x$

Unidades visuais	**Valores das unidades visuais**	**Unidade algébrica** (b)
Posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal	A - O traçado passa pela origem e o vértice coincide com a origem	A - Ausência da constante b
	B - O traçado se desloca à esquerda e abaixo. Entre as raízes, o traçado é refletido em relação ao eixo x	B - Acrescenta-se a constante negativa b
	C - O traçado se desloca à direita e abaixo. Entre as raízes, o traçado é refletido em relação ao eixo x	C - Acrescenta-se a constante positiva b
Raízes reais e vértice	D - A raiz coincide com o vértice	D - Raiz real em $(0, 0)$ e vértice em $(0, 0)$
	E - Duas raízes; Vértice deslocado à esquerda e refletido para cima	E - Raízes reais em $(0, 0)$ e $(b, 0)$; Vértice em $\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$
	F - Duas raízes; Vértice deslocado à direita e refletido para cima	F - Raízes reais em $(0, 0)$ e $(b, 0)$; Vértice em $\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Na Tabela 9 observa-se as mudanças das variáveis visuais em relação à unidade algébrica significativa b, quanto a sua ausência, ou quando acrescenta-se um valor positivo para b ou quando acrescenta-se valor negativo para b. Além da função modular quadrática tem-se também o esboço da função quadrática para se ter como um parâmetro auxiliar.

De modo geral, quando se trata deste tipo de função modular quadrática incompleta, concluímos que: se a constante b está ausente e o coeficiente c é igual a zero, tanto a função modular quadrática (A) quanto a função quadrática (A_1) se coincidem, possuindo a raiz e o vértice coincidindo com a origem $(0, 0)$; se a constante b tem valor negativo, o esboço da curva se desloca à esquerda e para baixo, entre as raízes o esboço da curva é refletido em relação ao eixo x, tem-se duas raízes reais e o vértice também se desloca à esquerda e é refletido em relação ao eixo x. Aqui, as curvas da função modular quadrática e da função quadrática não coincidem totalmente; se a constante b tem valor positivo, o esboço da curva se desloca à direita e para baixo, e entre as raízes o esboço é refletido em relação ao eixo x, possui duas raízes e o vértice também se desloca à direita e é refletido em relação ao eixo x. Novamente as curvas da função modular quadrática e da função quadrática não coincidem totalmente.

Em relação às raízes e ao vértice, tanto para b positivo, quanto para b negativo, têm-se as raízes com coordenadas em $(0, 0)$ e $(b, 0)$, e o vértice em $\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$.

Portanto, a função modular quadrática incompleta do tipo $f(x) = |x^2 - (bx)|$ tem o esboço do gráfico parecido com a função quadrática, porém, sempre, entre as raízes o traçado será refletido em relação ao eixo x.

7.3 Construção do esboço de curva da função modular quadrática

Com base no estudo desenvolvido anteriormente são esboçadas as curvas de $g(x) = |x^2 - 3|$, $h(x) - 1 = 2|(x - 3)^2|$ e $p(x) = |x^2 - 4x|$. Para isso, partindo da função modular quadrática base $f(x) = |x^2|$, que possui unidades algébrica $k = 1$, $a = 1$, $b = 0$, e $d = 0$, são alterados os valores destas unidades de modo a identificar as alterações no esboço de curvas.

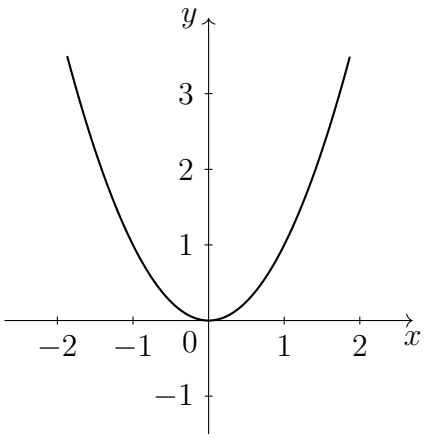
A função modular quadrática $g(x) = |x^2 - 3|$ é do tipo incompleta, pois apresenta função quadrática da forma $f(x) = x^2 - 3$. A representação da função $g(x)$ no registro gráfico é apresentada na Figura 30.

A construção do traçado da curva relativa à função $g(x) = |x^2 - 3|$ começa na Figura 30a, a partir da função modular quadrática base $f(x) = |x^2|$. Já na Figura 30b pode ser verificada a construção quando acrescentamos o valor 3 para a constante c. Nessa etapa já pode ser observado as mudanças no traçado, tem a forma do traçado da função modular quadrática do tipo $f(x) = |x^2 - c|$, ou seja, entre às raízes o esboço do gráfico é refletido em relação ao eixo das abscissas. Portanto, na Figura 30c obtém-se a construção final do esboço da curva da função $g(x) = |x^2 - 3|$.

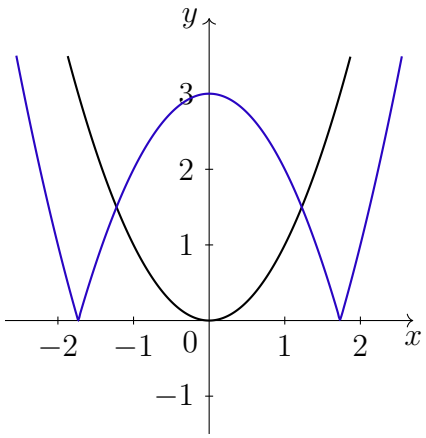
Considerando que a função $g(x)$ pode ser reescrita na seguinte maneira

$$g(x) = |x^2 - 3| = |(x - 0)^2 - 3|,$$

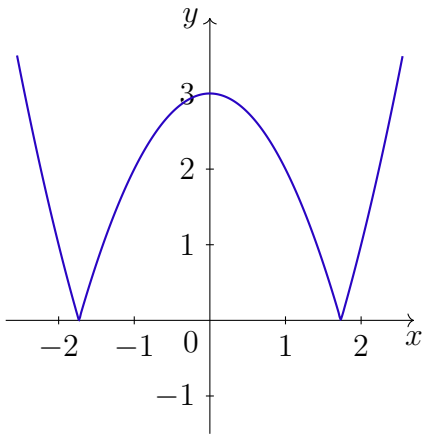
Figura 30 – Construção do traçado da curva relativo à função $g(x) = |x^2 - 3|$



(a) Função base $f(x) = |x^2|$



(b) Acréscimo da constante $c = 3$



(c) Função $g(x) = |x^2 - 3|$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

é possível identificar as coordenadas das raízes e do vértice. As raízes têm coordenadas em $(\pm\sqrt{c}, 0)$:

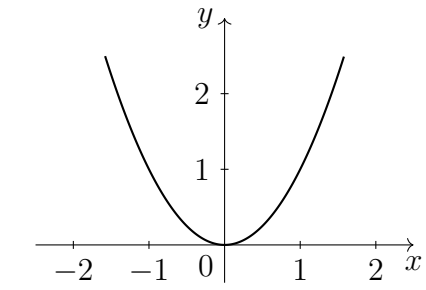
$$\begin{aligned}(\pm\sqrt{c}, 0) &= (\pm\sqrt{3}, 0)\\ x^2 - 3 &= 0\\ x &= \pm\sqrt{3}.\end{aligned}$$

O vértice possui as coordenadas em $(0, c)$, tem-se então que

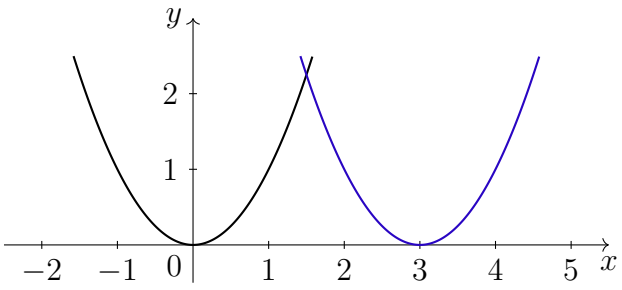
$$\begin{aligned}v = (x_v, y_v) &= (0, c) = (0, 3)\\ g(x) = |x^2 - 3| &= |(x - 0)^2 - 3|.\end{aligned}$$

Já a função $h(x) - 1 = 2|(x - 3)^2|$ é do tipo completa, pois a função quadrática $f(x) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ possui os coeficientes b e c não nulos. O esboço de curvas é apresentado na Figura 31.

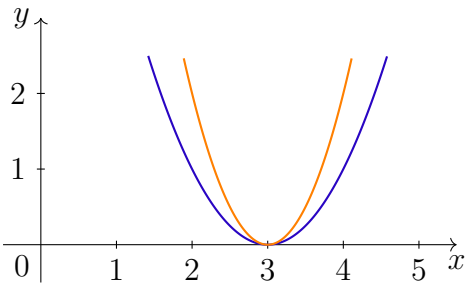
Figura 31 – Construção do traçado da curva relativo à função $h(x) - 1 = 2|(x-3)^2|$



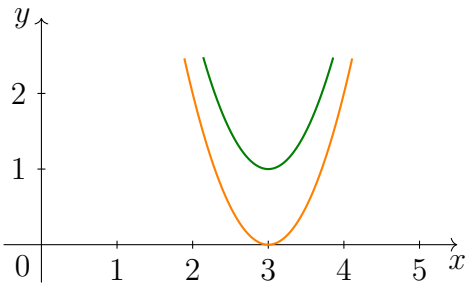
(a) Função base $f(x) = |x^2|$



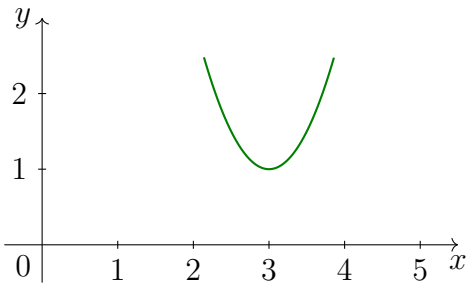
(b) Acréscimo da constante $b = 3$



(c) Acréscimo da constante $k = 2$



(d) Acréscimo da constante $d = 1$



(e) Função $h(x) - 1 = 2|(x-3)^2|$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A construção do traçado da curva relativa à função $h(x) - 1 = 2|(x-3)^2|$ inicia na Figura 31a, com a função modular quadrática base $f(x) = |x^2|$.

Na Figura 31b, o traçado se desloca três unidades para a direita, em relação à função base quando acrescentamos o valor 3 para a constante b. Além dessa observação, podem ser explorados a raiz e o vértice da função, os quais possuem as mesmas coordenadas em $(b, 0)$, ou seja, temos uma única raiz que coincide com o vértice em $(3, 0)$.

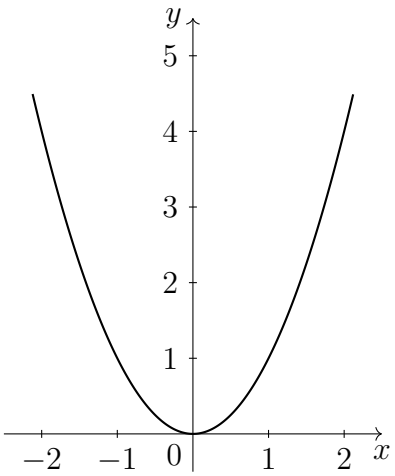
Na Figura 31c houve acréscimo da constante $k = 2$, o que se pode averiguar uma mudança no traçado. Como a constante k é maior que zero, tem-se que o traçado se torna mais fechado. As coordenadas da raiz e do vértice mantêm as mesmas.

Na Figura 31d foi acrescida a constante $d = 1$, o que também alterou o traçado. Como a constante d é maior que zero, tem-se que o traçado é deslocado uma unidade para cima.

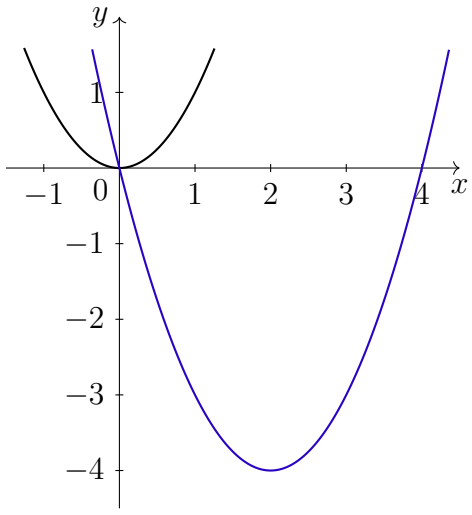
Por último, na Figura 31e tem-se a representação final da construção do esboço de curva da função $h(x) - 1 = 2|(x-3)^2|$. Nessa parte final, pode ser observado que não há raiz real e as coordenadas do vértice encontra-se em (b, d), ou seja, em $(3, 1)$.

A função modular quadrática $p(x) = |x^2 - 4x|$ é outro exemplo de função incompleta. A Figura 32 mostra a sua representação no registro gráfico.

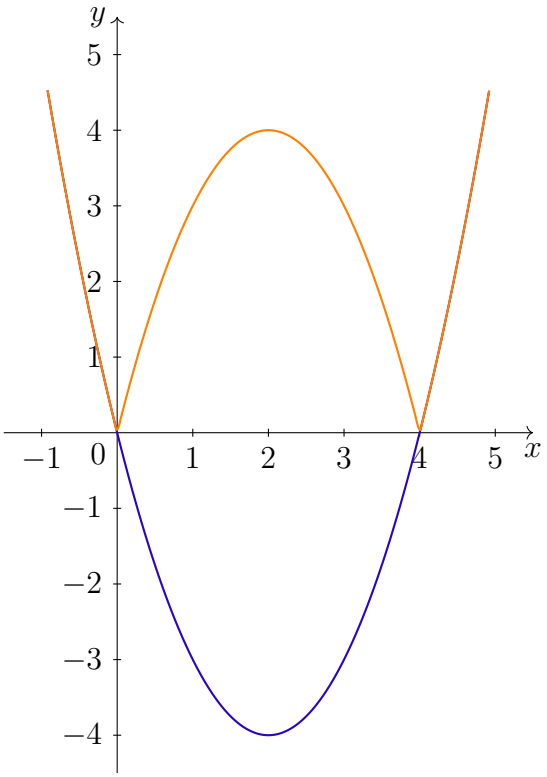
Figura 32 – Construção do traçado da curva relativo à função $p(x) = |(x^2 - 4x)|$



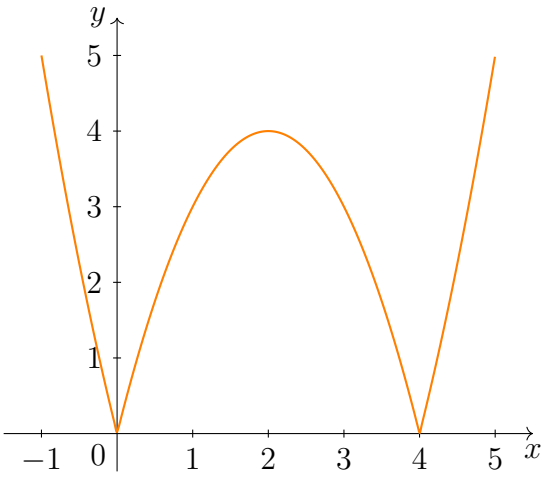
(a) Função base $f(x) = |x^2| = x^2$



(b) Acréscimo da constante $b = 4$ na função $f(x) = x^2$



(c) Acréscimo do módulo na função $f(x) = x^2 - 4x$



(d) Função $p(x) = |x^2 - 4x|$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Partindo da curva base $f(x) = |x^2| = x^2$, acrescentamos o valor do coeficiente $b = 4$ e o traçado se desloca 4 unidades para a direita e 4 unidades para baixo, conforme Figura 32b. Na Figura 32c, ao adicionarmos o módulo à função $f(x) = x^2 - 4x$, a curva é refletida sobre o eixo x, no intervalo entre as duas raízes. As raízes têm coordenadas $(0, 0)$ e $(b, 0)$, ou seja, uma raiz nula e a outra $(4, 0)$. O vértice também é rebatido em relação ao eixo x e tem coordenadas $\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$, ou seja, $V = \left(\frac{4}{2}, \frac{16}{4}\right) = (2, 4)$. Por fim, a curva da função $p(x) = |x^2 - 4x|$ é esboçada na Figura 32d.

Diante do exposto, pode ser observada uma característica entre a função modular quadrática e a função quadrática:

- Quando a função quadrática têm duas raízes reais e simétricas em relação ao eixo y (Figura 30) ou duas raízes reais (Figura 32), o traçado da função modular quadrática coincide com o traçado da função quadrática, exceto no intervalo entre as raízes, em que a curva é refletida em relação ao eixo x e consequentemente o vértice também é refletido. Isso pode ser verificado na Tabela 9 entre os traçado de B e B_1, e também entre C e C_1.

- Quando a função quadrática não possui raízes reais (Figura 31), ou possui uma única raiz na origem, o traçado da função modular quadrática coincide com o traçado da função quadrática. Isso pode ser observado na Tabela 8 nos traçados B e B_1 e em A e A_1.

8 Considerações finais

Diante do que foi constatado no presente trabalho, buscou-se investigar e explorar as relações semióticas da função modular quadrática. Ao longo da investigação, para responder a pergunta de pesquisa: Como a interpretação do esboço das curvas e a expressão algébrica pode contribuir para o ensino da função modular quadrática?, inicialmente, procuramos conhecer os trabalhos que envolvessem a temática. A primeira consideração a ser feita é sobre a revisão sistemática de literatura que demonstrou que apesar de existirem trabalhos sobre a função modular há uma falta específica quanto ao estudo aprofundado da função modular quadrática, e em particular sob a ótica da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. Os trabalhos analisados, como os realizados por Passos (2023), Silva (2022) e Menoncini e Moretti (2022), enfatizam a função modular linear e sua representação gráfica, no entanto nenhum deles aborda as transformações e características específicas da função modular quadrática.

Outra consideração a ser realizada está voltada para a Educação, mais especificamente para a BNCC do Ensino Médio. Esse documento traz, como já mencionado, a competência de utilizar diferentes registros de representação, pois destaca exatamente o papel das conversões das representações do objeto matemático e como isso é relevante para que o estudante passe a compreender conceitos matemáticos. No caso, da função modular de modo geral não é mencionada no documento, não traz o conceito teórico, apenas sinaliza para trabalhar com funções definidas por uma ou mais sentenças, entretanto no sentido da aplicabilidade, como imposto de renda, conta de luz ou água.

Estudar a Teoria de Duval, a abordagem de Interpretação Global Figural e entender os passos para que um sistema semiótico seja um registro de representação semiótica foi importante para a compreensão do ensino da matemática. Como professora de Matemática, essa teoria permitiu que refletisse e ampliasse meu entendimento sobre como ocorre o processo de esnino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Destacando, principalmente, a necessidade de promover tratamentos e conversões nas atividades matemáticas, que constituem operações cognitivas distintas, mas que podem e devem ser articuladas. Duval (2011b) destaca em sua obra que para se obter uma compreensão matemática precisa trabalhar diversos registros semióticos e que a dificuldade para essa compreensão constitui-se na falta da realização de tratamentos e, especialmente, de conversões de forma clara.

Outro ponto a ser ressaltado é a Interpretação Global Figural. No ensino das funções é comum usar a abordagem do Ponto a Ponto, a qual consiste em atribuir valores para a variável independente, calcular a variável dependente e assim obter os pares ordenados, e a

partir disso construir o gráfico. Essa abordagem Ponto a Ponto não é para ser descartada totalmente, pois ela é ainda é eficiente para estudo de alguns pontos específicos, porém ela pode ser limitada quando se pretende ter uma compreensão mais ampla da função.

Com a análise das funções modulares quadráticas sob a Interpretação Global Figural foi possível observar como as alterações nos parâmetros a, b, c, d e k refletem-se nas propriedades visuais das curvas, tais como concavidade, deslocamentos, raízes e vértices. Mais detalhadamente, na representação algébrica $f(x) - d = k|(ax - b)^2|$, o coeficiente k está relacionado com a concavidade da parábola; o coeficiente a, com a abertura da parábola; enquanto que os coeficientes b e d determinam, respectivamente, o deslocamento horizontal e o deslocamento vertical da curva. Já nas representações algébricas $f(x) = |x^2 - c|$ e $f(x) = |x^2 - (bx)|$ a constante c indica o deslocamento vertical e o coeficiente b indica o deslocamento horizontal. A representação gráfica de uma função modular quadrática do tipo incompleta, quando apresenta uma ou nenhuma raiz real, coincide com a representação gráfica da função quadrática. No caso de a função modular quadrática incompleta apresentar duas raízes reais, então entre as raízes a curva será refletida sobre o eixo x, o que difere do traçado da função quadrática. Isso vale também para as funções modulares completas desde que não haja deslocamento vertical, ou seja, o coeficiente d seja nulo. Caso este coeficiente seja não-nulo, então o traçado da curva entre as raízes será refletido sobre um eixo imaginário e paralelo ao eixo x, porém deslocado d unidades para cima ou para baixo.

Dessa forma, a aplicação da Interpretação Global Figural mostrou-se fundamental para promover uma compreensão mais integrada e qualitativa da função modular quadrática, evidenciando que as representações gráficas e algébricas são diferentes formas de representar o mesmo objeto matemático. É importante ressaltar que a compreensão do tratamento e das conversões entre diferentes representações semióticas de um mesmo objeto fortalece a capacidade cognitiva de entender os objetos matemáticos.

Além disso, a utilização do GeoGebra facilitou a visualização dinâmica das transformações nas curvas, permitindo uma análise mais clara e precisa das correlações entre as unidades visuais e as unidades algébricas. Essa ferramenta mostrou-se essencial para a exploração das propriedades das funções modulares quadráticas, contribuindo para uma compreensão mais significativa.

O esboço de curvas da função modular quadrática ganhou um olhar especial a partir da abordagem de Interpretação Global Figural, pois esta permite articular as operações entre os registros algébricos e os registros gráficos. Para Duval (2011), essa articulação entre os registros é que leva à aprendizagem conceitual do objeto matemático. Desta forma, este trabalho respondeu a pergunta de pesquisa, pois mostrou como se pode promover o ensino das funções modulares quadráticas a partir de uma abordagem dinâmica que integra características visuais e a expressão algébrica. Essa abordagem se mostrou eficiente para o

esboço de curvas e o uso do software GeoGebra, por ser gratuito e poder ser usado nas escolas e por estudantes, torna o estudo da função modular quadrática mais qualitativo, permitindo um entendimento mais amplo do comportamento da função.

Por fim, considerando a relevância deste estudo, sugere-se como elaborações futuras a realização de duas investigações complementares. A primeira seria uma análise dos livros didáticos, com o objetivo de verificar como a função modular quadrática é abordada, se há espaço para uma exploração mais aprofundada sob a ótica da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval e a realização de um porduto educacional como um sequenciamento de como poderia ser trabalhado a função modular quadrática no ensino. A segunda proposta seria a elaboração e aplicação de um minicurso voltado para a formação de professores, com o intuito de apresentar a teoria de Duval e sua aplicação no ensino da matemática. Essas propostas podem contribuir para ampliar a compreensão das representações semióticas e, consequentemente, para uma prática pedagógica mais eficaz na educação básica, principalmente no que se refere ao ensino de funções.

Referências

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Edição: António Branco Vasco. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994. Citado 1 vez na página 53.

BOTELHO, Louise Lira Roedel; CUNHA, Cristiano Castro de Almeida; MACEDO, Marcelo. O método da revisão integrativa nos estudos organizacionais. Versão portuguesa. *Gestão e Sociedade*, Belo Horizonte, v. 5, n. 11, p. 121–136, mai.–ago. 2011. Acesso em:09 mar. 2024. ISSN 1980-5756. Disponível em: https://ges.face.ufmg.br/index.php/gestaoesociedade/article/view/1220/906. Citado 1 vez na página 18.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 12 jul. 2024. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 6, n. 2, p. 96–112, 2011a. Acesso em: 18 dez. 2024. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96. Citado 5 vezes nas páginas 16, 51, 52.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento: Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Acesso em: 18 dez. 2024. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266. Citado 1 vez na página 48.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. Editora Livraria da Física, 2009. Citado 2 vezes na página 51.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano - Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução: Myrian Vega Restrepo. 2. ed. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática, 2004. Citado 0 vez na página 49.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. *São Paulo: PROEM*, v. 1, 2011b. Citado 12 vezes nas páginas 16, 46–48, 67.

MENONCINI, Lucia. *O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área*. 2018. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Florianópolis, Florianópolis. Citado 0 vez na página 49.

MENONCINI, Lucia; MORETTI, Méricles Thadeu. O esboço de curvas de funções modulares lineares a partir da interpretação global figural. In: MORETTI, Méricles Thadeu; SABEL, Eduardo (Ed.). *Gráficos e equações: abordagem global qualitativo segundo Raymond Duval*. UFSC, 2022. P. 92–114. Citado 3 vezes nas páginas 20, 35, 54, 67.

PASSOS, Edinalva Feitosa. *O uso do GeoGebra no celular como meio facilitador para o ensino de função modular em turmas do 1º ano do ensino médio*. 2023. Dissertação (Mestrado) – univasf. Acesso em: 13 jul. 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6941&id2=171055459. Citado 1 vez nas páginas 20, 67.

SILVA, Walesca Autonamo da. *Função modular e tecnologia: uma proposta de inclusão do tema na BNCC do Ensino Médio*. 2022. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II. Acesso em:13 jul. 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6750&id2=171055251. Citado 1 vez nas páginas 20, 67.