UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CHAPECÓ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GUSTAVO DE OLIVEIRA ROSA

SOLUÇÃO GERAL DE EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS

CHAPECÓ-SC

2025

GUSTAVO DE OLIVEIRA ROSA

SOLUÇÃO GERAL DE EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração: Matemática na Educação Básica, sob a orientação do Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing

CHAPECÓ-SC

2025

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Rosa, Gustavo de Oliveira
Solução geral de equações cúbicas e quárticas / Gustavo de Oliveira Rosa. -- 2025.
108 f.:il.

Orientador: Dr. Paulo Rafael Bösing

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó,SC, 2025.

1. Números complexos. 2. Polinômios. 3. Equações algébricas. 4. Equações cúbicas. 5. Equações quárticas. I. Bösing, Paulo Rafael, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

GUSTAVO DE OLIVEIRA ROSA

SOLUÇÃO GERAL DE EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração: Matemática na Educação Básica, sob a orientação do Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 26/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
PAULO RAFAEL BOSING
Data: 08/04/2025 09:11:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing – UFFS
Orientador

Documento assinado digitalmente
LUCIANE INES ASSMANN SCHUH
Data: 08/04/2025 09:19:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Luciane Inês Assmann Schuh – UFSC
Avaliadora externa

Documento assinado digitalmente
ROSANE ROSSATO BINOTTO
Data: 08/04/2025 09:30:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Rosane Rossato Binotto – UFFS
Avaliadora

Dedico este trabalho à minha filha, Louise, e à minha esposa, Débora.

Agradecimentos

- À minha esposa, Débora, pelo companheirismo nas horas de estudo e escrita, e por ser a maior incentivadora para o meu autoaperfeiçoamento.
- À minha filha, Louise, pela paciência e compreensão sobre a minha quase ausência durante o período do mestrado.
- À CAPES e à SBM por tornarem o PROFMAT possível, e à UFFS, Campus Chapecó, por tornar o PROFMAT real para mim e para meus colegas.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing, pelo esmero nas revisões do texto e pelas valiosas dicas tanto em relação à estrutura, quanto à escrita, quanto à Matemática em si.

A Matemática é uma sinfonia de números, é a poesia da lógica.

Star vs. As Forças do Mal

Resumo

Esta dissertação é um material didático e instrucional que apresenta as soluções de equações algébricas de terceiro e quarto graus. Para este fim, são desenvolvidas previamente as teorias envolvendo números complexos e polinômios, além de equações quadráticas. Questões do IME, ITA e AIME relacionadas aos tópicos também são apresentadas e desenvolvidas. Por fim, a presença desses tópicos na política educacional é discutida.

Palavras-chave: Números complexos. Polinômios. Equações algébricas. Equações cúbicas. Equações quárticas.

Abstract

This master thesis is an instructional and didactic material that presents solutions to cubic and quartic algebraic equations. In order to do so, the theories involving complex numbers and polynomials, as well as quadratic equations, are previously developed. Questions from IME, ITA and AIME including these topics are also presented and solved. Finally, the presence of these topics in educational policies is analyzed.

Keywords: Complex numbers. Polynomials. Algebraic equations. Cubic equations. Quartic equations.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

AIME: *American Invitational Mathematics Examination*

BNCC: Base Nacional Comum Curricular

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio

IME: Instituto Militar de Engenharia

ITA: Instituto Tecnológico de Aeronáutica

OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PROFMAT: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM: Sociedade Brasileira de Matemática

UFFS: Universidade Federal da Fronteira Sul

Sumário

1 Introdução

A estrutura do PROFMAT[1] (o Exame Nacional de Acesso, o Exame Nacional de Qualificação e as seis disciplinas obrigatórias) é voltada ao aprofundamento da matemática do Ensino Básico. Essa é a natureza do PROFMAT: ser um programa de mestrado que aprofunda de forma consistente os conhecimentos que os professores utilizam no exercício cotidiano de sua profissão. Sendo assim, ele possui um aspecto educacional à sua própria maneira.

O conhecimento profundo da teoria é condição necessária para a didática. Em outras palavras: pode haver conhecimento sem didática, mas não há didática sem conhecimento. Assim, por mais que o PROFMAT não contemple o estudo de teorias pedagógicas, ele beneficia a prática pedagógica dos professores de matemática.

Este trabalho, por ser uma dissertação do PROFMAT, está de acordo com a estrutura do programa, sendo um aprofundamento da matemática do Ensino Médio. Nele, é apresentado um estudo sobre as equações algébricas de terceiro e quarto graus, incluindo a teoria que é fundamento para tal estudo. Tal teoria é composta pelos números complexos e pelas funções polinomiais. Também são incluídos aspectos históricos, que possuem alguns episódios curiosos na história da matemática.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar um material didático e instrucional, de modo que possa ser usado como fonte de estudo por professores e estudantes que busquem aprofundamento em equações algébricas, seja na preparação para vestibulares avançados (como do Instituto Militar de Engenharia ou do Instituto Tecnológico de Aeronáutica), seja para olimpíadas de matemática (como a *American Invitational Mathematics Examination* e a *International Mathematical Olympiad*, abreviadas respectivamente por AIME e IMO), seja pelo simples desejo de conhecer o assunto.

Por ter sido elaborado como material didático e instrucional, ele foi enriquecido com exemplos, além dos conceitos e demonstrações mais relevantes para o desenvolvimento da teoria. Também, de modo a elucidar a aplicação da teoria desenvolvida, apresentamos resoluções de questões de importantes vestibulares e provas. Por sua natureza, esse material pode ser reproduzido total ou parcialmente, desde que citada a fonte.

Neste trabalho são tratadas equações algébricas de segundo, terceiro e quarto graus. As equações de segundo grau, chamadas de equações quadráticas, são estudadas no final do Ensino Fundamental, sendo que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta a habilidade "(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$"

[1] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

(BRASIL, 2018, p. 313) para o 8º ano. No 9º ano, ela traz como objeto do conhecimento "Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações" (BRASIL, 2018, p. 316), associado à habilidade "(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau." (BRASIL, 2018, p. 317).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que normatiza o currículo em todo o território nacional. Em tese, ela determina de que maneira os professores devem desenvolver sua prática em sala de aula. Em nenhum ponto ela fala sobre implementar a fórmula quadrática, mas sobre utilizar fatorações para resolver as equações. Há vantagens significativas em resolver equações através de um método em vez de meramente aplicar uma fórmula: o desenvolvimento do raciocínio lógico (que é um dos objetivos do ensino de Matemática) e a compreensão do processo de resolução.

Uma alternativa ao uso da fórmula que não é citada na BNCC é a troca de variáveis, como desenvolvido na Seção 4.2. Outra substituição possível é o método de Viète, como apresentado por Hennemann (2021, p. 40-41).

Também é possível ir além disso e concordar com Viana (2022), com argumento similar em Viana (2024), que defende uma abordagem através do raciocínio geométrico para se resolver equações quadráticas (completar o quadrado, literalmente). A ideia é transcrever o problema algébrico para uma linguagem geométrica, resolvê-lo geometricamente, por fim transcrever a solução geométrica novamente para a linguagem algébrica. Mesmo que essa forma de solução possa ser limitada aos números positivos, uma vantagem que ela apresenta é estabelecer uma conexão entre diferentes áreas da Matemática, o que potencializa o desenvolvimento do raciocínio e a compreensão dessa ciência como um todo. Na Subseção 4.2.1 são apresentadas as soluções de duas equações adotando tal abordagem.

Aplicar uma fórmula apresentada sem maiores justificativas é um processo cognitivamente simples. Trata-se de uma simples reprodução mecânica de passos previamente decorados, quando o mesmo estudo poderia ser usado para enriquecer a capacidade de abstração e a própria compreensão da Matemática.

Não se trata de abominar a fórmula ou escondê-la dos estudantes; sua obtenção deve ser o estágio ulterior do estudo. Quando a solução não mais apresentar um desafio, podem ser feitas generalizações com nível de dificuldade crescente, até se chegar à fórmula. Uma vez obtida a fórmula, ela pode ser utilizada sem embaraço.

Ela tem inclusive, algumas vantagens. Uma delas é computacional: ao aprender uma nova linguagem de programação, resolver uma equação quadrática com a fórmula quadrática é um bom exercício. Outra vantagem é o estudo do discriminante, que permite analisar a existência e a quantidade de raízes reais da equação sem ser necessário resolvê-la por completo (inclusive, isso é necessário para resolver equações quárticas, conforme desenvolvido na Seção 4.4). Além disso, no estudo da função quadrática, a fórmula de *Bhaskara* ajuda a visualizar a simetria dos zeros da função em relação à abscissa do vértice.

Ao desenvolver o estudo da equação quadrática, é necessário chegar à sua fórmula resolvente. O que defendemos aqui não é o abandono da fórmula, mas a parcimônia em seu uso.

Tendo em mente que nos parágrafos anteriores foi defendida uma maneira de se ensinar as equações quadráticas, e o motivo dessa maneira ser preferível, há de se levar em consideração que os professores ajustam o método de ensino à realidade concreta que possuem nas escolas. Existem professores, com o autor deste trabalho incluído entre eles, que desejariam desenvolver o estudo dessa maneira, mas que enfrentam dificuldades práticas a isso, como:

- o excesso de conteúdos em relação à carga horária disponível (problema que muitas vezes é acentuado por atividades escolares extracurriculares, como festa junina, comemoração de aniversário da escola e passeios);
- a falta de interesse em aprender por parte dos alunos (o que infelizmente é a realidade em muitas escolas, principalmente em escolas públicas e de modo ainda mais presente em escolas públicas de periferia);
- lacunas educacionais acumuladas pelos alunos em anos anteriores (consequência dos dois itens anteriores, além da eventual falta de professores de Matemática).

E mesmo quando essas dificuldades não se fazem presentes, há um empecilho alternativo. Ocorre do professor ensinar a resolver as equações quadráticas por fatoração (ou algum dos outros métodos defendidos), e na aula seguinte ouvir de algum estudante algo como "aprendi na internet um jeito mais fácil, é só aplicar essa fórmula". Isso não acontece somente com equações quadráticas, mas também no ensino de equações do primeiro grau e de operações com frações, por exemplo.

Equações de terceiro e quarto graus (chamadas de equações cúbicas e quárticas, respectivamente) não são estudadas de modo geral nas escolas. Elas não são contempladas na BNCC, mas por muito tempo foram parte do currículo do terceiro ano do Ensino Médio (dentro do estudo dos polinômios). Por esse motivo, ainda constam em vestibulares, especialmente nos que exigem um conhecimento de Matemática um pouco mais avançado.

Com relação aos números complexos, podemos fazer uma discussão similar. Eles são estudados na metade final do terceiro ano do Ensino Médio, sendo comum que só seja desenvolvido o estudo da forma algébrica. A forma polar por vezes é deixada de lado pelo receio por parte dos professores dos alunos apresentarem dificuldade com a trigonometria envolvida.

O problema dessa abordagem é que ela limita a compreensão dos números complexos. Quando só se conhece uma representação para um objeto, pode-se confundir a representação do objeto com o objeto em si. Por exemplo, podemos representar um número complexo na *forma algébrica* como $z = 2 + 2i$, ou na *forma polar* como $z = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i \cdot \operatorname{sen} 45°)$. Trata-se do mesmo número, representado de *formas* diferentes. Nenhuma delas é o próprio número complexo (o número é um ente abstrato, uma ideia), mas sim uma perspectiva diferente para estudá-lo.

É importante valorizar as diferentes notações para os números complexos, as transcrições entre elas e as vantagens de uma sobre a outra.

Já o estudo dos polinômios é feito depois dos números complexos. Porém, ocorre em muitas escolas de não haver tempo hábil para "vencer" o conteúdo programático, e eles acabam sendo deixados de lado. Isso é inclusive justificado pelo fato de não serem contemplados no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), o que representa uma falha no ensino, pois um conteúdo não deveria ser preterido por falta de tempo para ser desenvolvido.

Os polinômios estão entre os conteúdos que se espera que um estudante conheça ao término do Ensino Médio. Se no primeiro semestre da faculdade o aluno cursar uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, a falta do conhecimento sobre funções polinomiais será um grave problema. Isso abrange alunos que vão para várias áreas, como física, química, engenharias, estatística, agronomia ou ciências contábeis, por exemplo.

Quando o estudo dos polinômios é feito, é comum que seja dada ênfase às operações entre eles. Isso não é exatamente um problema, mas seria vantajoso se os aspectos gráficos e as equações polinomiais fossem mais exploradas. São áreas que podem render bons frutos em relação à compreensão do conteúdo em si (visualizar uma função polinomial graficamente ajuda a compreender seu comportamento), e à compreensão da Matemática como um todo.

Com o intuito de ser uma referência para professores e estudantes interessados em abordar os tópicos mencionados, de modo a ter uma fundamentação teórica sólida e acessível, desenvolvemos este material, o qual segue a seguinte estrutura. O Capítulo 2 trata de números complexos, desde sua história, passando pela forma algébrica, pela forma polar e suas operações.

O Capítulo 3 trata de polinômios e funções polinomiais, com ênfase na fatoração do polinômio em suas raízes, mas incluindo as operações entre polinômios e as relações entre os coeficientes e os zeros da função polinomial (relações de Girard).

Equações algébricas, com algumas considerações sobre equações quadráticas e uma vasta teoria sobre equações cúbicas e quárticas, são tratadas no Capítulo 4.

O Capítulo 5 traz a resolução de problemas selecionados dos vestibulares IME e ITA, e da prova do *American Invitational Mathematics Examination* (AIME) que envolvem a teoria desenvolvida ao longo do trabalho.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta considerações finais, com algumas ponderações sobre a forma que esses conteúdos são contemplados na Base Nacional Comum Curricular.

Uma observação, pertinente principalmente aos professores: este trabalho foi escrito em LaTeX, que é um sistema de escrita voltado principalmente à escrita de textos matemáticos. As figuras foram feitas no próprio LaTeX, com o ambiente TikZ. Ambos são muito úteis na elaboração de materiais didáticos, especialmente na área de exatas.

2 Números complexos

O corpo dos números complexos constitui um elemento fundamental para o estudo dos polinômios e das equações polinomiais. As fatorações das funções polinomiais, bem como as soluções para equações polinomiais de terceiro e quarto graus, passam irremediavelmente por tais números. É necessário estabelecermos uma sólida base teórica nesse assunto para que possamos construir com rigor e precisão os conceitos dos capítulos seguintes.

2.1 Uma breve história dos números complexos

A forma que os conteúdos são apresentados para os alunos nem sempre coincide com a forma que eles foram desenvolvidos ao longo da história. Um exemplo claro disso é o cálculo infinitesimal: primeiro surgiu a ideia de integral, depois de derivada e, por fim, de limite. Nos cursos de cálculo, a apresentação segue a ordem exatamente inversa: primeiro limites, depois derivadas, e por fim integrais.

Algo semelhante ocorre com os números complexos: é comum que eles sejam apresentados usando a solução de equações quadráticas. Isso parece natural, pois tais números são necessários para solucionarmos equações como $x^2 + 1 = 0$. Porém, eles foram estudados primeiramente por aparecerem em equações cúbicas. Mesmo que haja registros de problemas estudados pelos babilônios que teriam soluções não pertencentes aos números reais (como construir um retângulo de perímetro 20 e área 40), essas soluções não eram investigadas: o argumento era de que o problema não tinha solução.

Foi Gerônimo Cardano (1501-1576), um renomado matemático da Itália renascentista, o primeiro a tratar os números complexos. Ao resolver o problema de dividir um segmento de tamanho 10 de tal modo que o produto das duas partes seja 40, ele chegou às soluções

$$x = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad y = 5 - \sqrt{-15}$$

para as medidas das duas partes. Se considerarmos as operações com as propriedades que elas possuem nos números reais e convencionarmos $\left(\sqrt{-15}\right)^2 = -15$, concluímos que

$$x + y = 10 \quad \text{e} \quad x \cdot y = 40,$$

conforme o problema solicitava.

Cardano viveu no período do Renascimento cultural, e "os matemáticos da época, pela influência da tradição helenística predominante na área, relutavam em aceitar entidades matemáticas que não tivessem algum significado geométrico" (HEFEZ; VILLELA, 2022, p. 4). Daí a dificuldade para aceitar resultados negativos (Michael Stifel os chamava de "*numeri* *absurdi*"), bem como os números complexos. Assim, Cardano não deu importância aos números que envolvessem raízes quadradas de números negativos.

> Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como "sofísticas" e concluía que o resultado nesse caso era "tão sutil quanto inútil". Autores posteriores mostrariam que tais manipulações eram de fato sutis, mas nada inúteis. (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 202)

Em sua obra publicada em 1545, chamada *Artis Magnae*, ou *Ars Magna*, Cardano expõe a solução das equações polinomiais de terceiro e quarto graus (que serão discutidas em capítulos posteriores dessa dissertação). Particularmente, na solução da equação $x^3 = 15x + 4$, seu método levou ao resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Esse resultado parecia absurdo, porém experimentalmente é possível mostrar que $x = 4$ é solução. Além disso, ele sabia que essa equação só pode ter uma solução, pois, como ele mesmo observara, "quando todos os termos de um lado do sinal de igualdade são de grau maior que os do outro lado, a equação tem uma e uma só raiz positiva - uma antecipação da regra dos sinais de Descartes" (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 203). A conclusão era que $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, mesmo que Cardano não conseguisse compreender o significado de tal igualdade.

Quem primeiro tratou essas raízes como números de fato, em vez de meros artifícios de cálculo, foi Rafael Bombelli (1526 - 1572), outro matemático renascentista italiano. Em 1550 ele definiu algumas propriedades operatórias para $\sqrt{-1}$ e para os números na forma $a + b\sqrt{-1}$, que justificariam a igualdade que intrigava Cardano.

Mas como esses números eram vistos com desconfiança pelos matemáticos da época, sua história caminhou a passos lentos. O símbolo i para denotar $\sqrt{-1}$ foi usado pela primeira vez mais em 1777 pelo suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), mais de duzentos anos depois de Bombelli.

> A desconfiança dos matemáticos sobre esses números foi se desfazendo a partir do surgimento da sua representação geométrica e de suas operações, com os trabalhos de Caspar Wessel (Noruega, 1745-1818), em 1797 e de Jean Robert Argand (Suíça, 1768-1822), em 1806. Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777-1855), em 1831, batizou esses números de *números complexos* e contribuiu para a sua plena aceitação por meio dos seus trabalhos realizados entre 1828 e 1832, onde os utilizou para provar novos e profundos resultados em Teoria dos Números. (HEFEZ; VILLELA, 2022, p. 5)

Uma anedota muito famosa envolvendo Pitágoras (e o teorema que carrega seu nome) conta que um dos membros da irmandade pitagórica, chamado Hipasus de Metaponto (ou de Crotona), propôs o problema de determinar a diagonal de um quadrado unitário, isto é, cujo lado tem medida igual a 1. A crença da época era de que o mundo era regido pelos números naturais e as razões entre eles. Contudo, sabemos hoje que a diagonal do quadrado unitário tem medida igual a $\sqrt{2}$, e esse número não pode ser escrito nos termos que os pitagóricos acreditavam. Esse resultado abalou a fé pitagórica, pois eles não tinham a compreensão da natureza dos números irracionais. A história conta que Hipasus foi assassinado pelos antigos colegas, mas é possível que ele só tenha sido expulso da confraria.

Assim como Pitágoras não compreendia os números irracionais, os matemáticos renascentistas não compreendiam os números complexos. E assim como os números irracionais, os complexos se mostraram necessários para melhor descrever os fenômenos observados no mundo.

As aplicações dos complexos à própria matemática (como a simplificação de rotações em $\mathbb{R}^2$ e seu papel na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra) já são justificativa suficiente para sua existência. Além delas, os complexos têm aplicações à ciência natural, como no estudo da eletrodinâmica e da aerodinâmica. Então por mais que a natureza desse tipo de número possa intrigar as mentes de quem os estuda, eles possuem aplicações concretas, cotidianas. Se conseguimos utilizar aparelhos eletrônicos ou fazer aviões voarem, é porque conseguimos manipular os números complexos.

2.2 A forma algébrica

Assim como usamos $\mathbb{R}$ para representar o conjunto dos números reais, usamos $\mathbb{C}$ para representar o conjunto dos números complexos.

Definição 2.1 (Unidade imaginária). *Chamaremos de unidade imaginária, e representaremos por i, o número complexo tal que $i = \sqrt{-1}$. Equivalentemente, temos $i^2 = -1$.*

Isso facilita a notação para qualquer raiz quadrada de número negativo, conforme os exemplos:

a) $$\begin{aligned}\sqrt{-4} &= \sqrt{4 \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 2i\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{-9} &= \sqrt{9 \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 3i\end{aligned}$$

c) $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \cdot (-1)}$
$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$
$= \sqrt{5}i$

Todavia, em algumas situações é necessário ter cautela com a distributividade da radiciação em relação à multiplicação nos números complexos. Isso será discutido na Subseção 2.5.5.

Definição 2.2 (Número complexo)**.** *Dizemos que z é um número complexo se existem números reais a e b tais que $z = a + b \cdot i$, onde i é a unidade imaginária.*

Ao escrevermos z na forma $a + bi$, dizemos que z está na *forma algébrica.*

O número real a é chamado de *parte real de z* e pode ser denotado por $Re(z)$. Já o número real b é chamado de *parte imaginária de z* e pode ser denotado por $Im(z)$.

Por exemplo, dados os números complexos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5 - 3i$, $z_3 = i - 6$, $z_4 = -i$ e $z_5 = -2$, temos

- $Re(z_1) = 3$ e $Im(z_1) = 2$,
- $Re(z_2) = 5$ e $Im(z_2) = -3$,
- $Re(z_3) = -6$ e $Im(z_3) = 1$,
- $Re(z_4) = 0$ e $Im(z_4) = -1$ e
- $Re(z_5) = -2$ e $Im(z_5) = 0$.

Note que todo número real é, particularmente, um número complexo. Se $Im(z) = 0$, então z é número real. Por outro lado, nem todo complexo é real. Na simbologia dos conjuntos, temos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nesse ponto é importante chamar atenção para o cuidado com a linguagem. Ao observamos, por exemplo, a equação $x^2 + 4 = 0$, é comum ouvirmos que ela "possui soluções complexas". É fato que as soluções são complexas, mas o mesmo vale para a equação $x^2 - 4 = 0$, afinal 2 e -2 também são complexos. A respeito da primeira equação, podemos dizer que ela possui solução "fora dos números reais".

Outro subconjunto notável dos números complexos é o conjunto dos números *imaginários puros.* Se $Re(z) = 0$, então z é dito imaginário puro.

A definição a seguir é usada para demonstrar propriedades das operações em $\mathbb{C}$.

Definição 2.3 (Igualdade de complexos)**.** *Sejam $w = a + bi$ e $z = x + yi$ números complexos. Vale a igualdade $w = z$ se, e somente se, $a = x$ e $b = y$.*

Isto é, para que dois números complexos sejam iguais, eles devem ter a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

2.2.1 Plano complexo

Como mencionado na primeira Seção, um entrave à aceitação dos complexos pela comunidade matemática era a falta de uma representação geométrica. A primeira pessoa a descobrir uma forma de resolver esse problema foi o norueguês Caspar Wessel (1745 - 1818) no ano de 1797. Contudo, seu trabalho a respeito, publicado no ano seguinte na academia dinamarquesa, permaneceu pouco conhecido.

Outro trabalho nesse sentido foi publicado em 1806 por Jean Robert Argand (Suíça, 1768 - 1822). Inicialmente esse trabalho também não chamou muita atenção, mas em menos de duas décadas a maior parte dos matemáticos da Europa estava familiarizada com tal representação.

Em 1832, Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777 - 1855) publicou um importante trabalho no *Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, contendo sua representação geométrica para os complexos, além de "abrir caminho para a extensão da teoria dos números do corpo real para o complexo e mais além" (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 349).

O plano complexo como utilizamos hoje, tal qual apresentado na Figura 1, é um acumulado do que foi desenvolvido por esses três matemáticos. Ele consiste em um sistema de coordenadas retangulares, no qual o eixo das abscissas é chamado de eixo real e o eixo das ordenadas é chamado de eixo imaginário. Cada número complexo é representado por um ponto no plano, chamado de *afixo* do número.

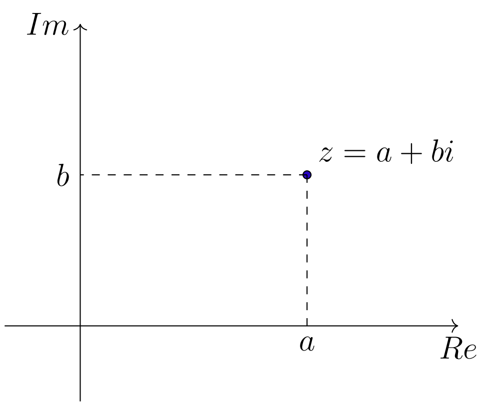


Figura 1 – Plano complexo

Existe uma bijeção entre os números complexos e os pontos no plano complexo, isto é, para cada complexo há um único afixo correspondente, e para cada afixo há um único complexo correspondente.

A reta real, que contém os números cuja parte imaginária é nula, corresponde ao eixo das abscissas. Essa é uma outra forma de compreender os números reais como uma parte, isto é, um subconjunto, dos complexos.

2.2.2 Conjugado e oposto

As duas definições dessa subseção serão úteis no contexto das operações com números complexos, que veremos a seguir.

Definição 2.4 (Conjugado)**.** *Dado um número complexo $z = a + bi$, chamaremos de* conjugado de z, *e representaremos por $\overline{z}$ (lê-se "zê barra"), o número complexo $\overline{z} = a - bi$.*

Exemplos de conjugação de complexos:

- $z = 2 + 6i \Rightarrow \overline{z} = 2 - 6i$
- $z = 8 - i \Rightarrow \overline{z} = 8 + i$
- $z = -5i \Rightarrow \overline{z} = 5i$
- $z = 3 \Rightarrow \overline{z} = 3$

Não é difícil ver que $\overline{z} = z$ se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$. Além disso, $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

No plano complexo, um número complexo e seu conjugado são simétricos em relação ao eixo real, conforme ilustra a Figura 2.

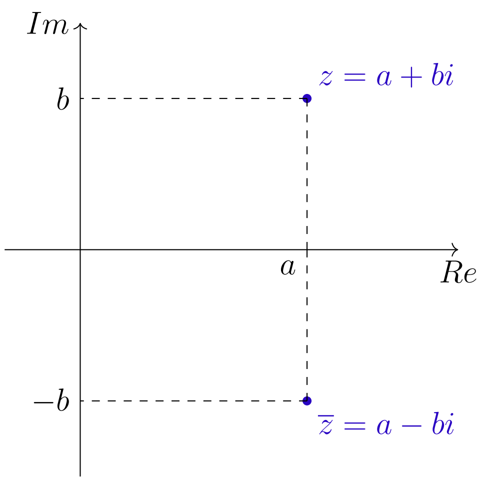


Figura 2 – Número complexo e seu conjugado

Definição 2.5 (Oposto)**.** *Dado um número complexo $z = a + bi$, chamaremos de* oposto de z, *e representaremos por $-z$, o número complexo $-z = -a - bi$.*

No plano complexo, um número complexo e seu oposto são simétricos em relação à origem, conforme ilustra a Figura 3.

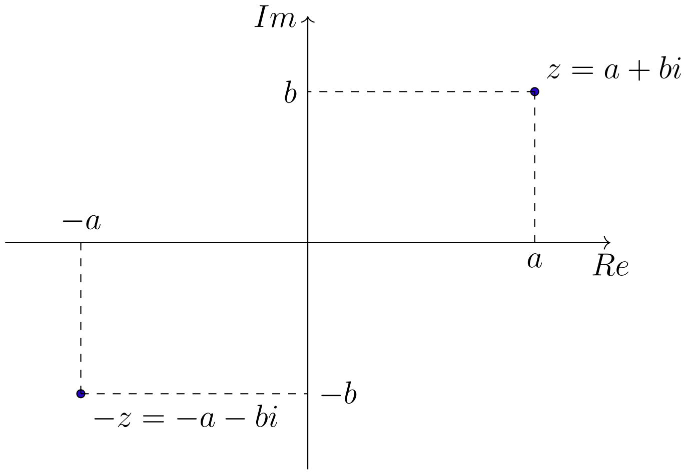


Figura 3 – Número complexo e seu oposto

2.3 Operações na forma algébrica

Como estamos definindo um novo tipo de número, precisamos definir também como ocorrem as operações com esses números.

Ao estudar novos entes matemáticos, há situações em que as operações são intuitivas (como a adição de vetores, por exemplo), e há situações em que elas não são (como a multiplicação de matrizes). As operações podem não funcionar como parecem, então é necessário seguir com cautela.

2.3.1 Adição

Como em grande parte das áreas da Matemática, a adição é a operação fundamental. Assim, ela deve ser o ponto de partida no estudo das operações.

Definição 2.6. *Sejam $x = a + bi$ e $y = c + di$ números complexos. Então a soma entre x e y é o número complexo $x + y = (a + c) + (b + d)i$.*

Note que

- $a \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + c) \in \mathbb{R}$ e
- $b \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R} \Rightarrow (b + d) \in \mathbb{R}$,

o que justifica o fato do resultado ser ainda um número complexo. Em outras palavras, a adição é fechada no conjunto dos números complexos.

Note que apesar de parecer ao aluno que trata-se apenas da adição de termos algébricos semelhantes, trata-se de uma operação definida para os números complexos. O resultado, apesar de intuitivo, não é óbvio.

A rigor, não definimos a operação de subtração de complexos. O que representamos por subtração é, na verdade, a soma com o oposto, isto é, $x - y = x + (-y)$.

Exemplos:

(i) $(-2+4i)+(8-i) = 6+3i$

(ii) $(-2+4i)-(8-i) = -10+5i$

2.3.2 Multiplicação

O produto entre os números complexos $x = a+bi$ e $y = c+di$ pode ser determinado pela propriedade distributiva, lembrando que $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a+bi)\cdot(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bd\cdot i^2 \\ &= ac + (ad+bc)i + bd\cdot(-1) \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \end{aligned}$$

Assim como a adição, a multiplicação é fechada em $\mathbb{C}$, isto é, o produto de dois números complexos sempre pode ser encontrado no próprio conjunto dos números complexos.

Como exemplo, determinemos o produto entre os complexos $2-3i$ e $4+5i$.

$$\begin{aligned} (2-3i)\cdot(4+5i) &= 8 + 10i - 12i - 15i^2 \\ &= 8 - 2i - 15\cdot(-1) \\ &= 8 - 2i + 15 \\ &= 23 - 2i \end{aligned}$$

2.3.3 Propriedades da adição e da multiplicação

As propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$ também são válidas para essas operações em $\mathbb{C}$. Inclusive, o fato delas serem válidas em $\mathbb{R}$ *implica* que elas sejam válidas em $\mathbb{C}$.

(i) (Comutativa) $x+y = y+x$ e $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$;

(ii) (Associativa) $(x+y)+z = x+(y+z)$ e $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$;

(iii) (Elemento neutro da adição) $\exists\ 0 = 0+0i\ \in \mathbb{C}$, tal que, $x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{C}$;

(iv) (Simétrico aditivo) Para cada $x \in \mathbb{C}$, $\exists!(-x) \in \mathbb{C}$, tal que, $x + (-x) = 0$;

(v) (Elemento neutro da multiplicação) $\exists\ 1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que, $x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{C}$;

(vi) (Simétrico multiplicativo) Para cada $x \in \mathbb{C}$, com $x \neq 0$, $\exists!\ x^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que, $x \cdot x^{-1} = 1$;

(vii) (Distributidade da multiplicação em relação à adição) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{C}$.

Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, toda propriedade que vale em $\mathbb{C}$ vale em $\mathbb{R}$. Entretanto, há algumas propriedades dessas operações que, apesar de também serem válidas em $\mathbb{R}$, seu estudo só faz sentido em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Para todo $x, y \in \mathbb{C}$ valem as propriedades:

(i) $x \cdot \overline{x} \in \mathbb{R}$;

(ii) $\overline{x \pm y} = \overline{x} \pm \overline{y}$;

(iii) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$;

(iv) $\overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1}$, desde que $x \neq 0$;

(v) $Re(x) = \dfrac{x + \overline{x}}{2}$;

(vi) $Im(x) = \dfrac{x - \overline{x}}{2i}$.

2.3.4 Divisão

Para todo $y \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$, existe um único $y^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $y \cdot y^{-1} = 1$. Esse inverso multiplicativo pode ser representado como $y^{-1} = \frac{1}{y}$.

Esse fato pode ser usado para justificar a existência do quociente entre complexos. Dado $y \neq 0$, para calcular o quociente entre x e y podemos multiplicar x pelo inverso de y, isto é, $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

Dados os complexos $x = a + bi$ e $y = c + di \neq 0$, determinar o número complexo $z = \frac{x}{y}$ significa determinar $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $z = m + ni$.

$$z = \frac{x}{y} = \frac{a + bi}{c + di} \tag{2.1}$$

Uma vez que $y \neq 0$ temos $\overline{y} \neq 0$, logo $\dfrac{\overline{y}}{\overline{y}} = 1$. Podemos então multiplicar a equação (2.1) por $\dfrac{\overline{y}}{\overline{y}}$ sem alterar o resultado, então

$$\begin{aligned} z &= \frac{a+bi}{c+di} \\ &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac+bd-adi+bci}{c^2+d^2} \\ &= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{m} + \underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{n} i, \end{aligned}$$

observando que o resultado só é definido pois $y \neq 0$ implica que $c^2 + d^2 \neq 0$.

Como exemplo, determinemos o quociente entre $\sqrt{5} + 2i$ e $3 - i$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}+2i}{3-i} &= \frac{\sqrt{5}+2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} \\ &= \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{5}i+6i+2i^2}{9-i^2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}-2+(\sqrt{5}+6)i}{10} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{5}-2}{10}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}+6}{10}\right) i \end{aligned}$$

2.3.5 Potenciação

As potências de complexos com expoentes naturais são calculadas de modo análogo às potências de base real: como o produto de fatores iguais. Um caso particular que merece atenção são as potências da unidade imaginária.

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	$i^8 = (i^4)^2 = 1$	$i^{12} = (i^4)^3 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$	$i^{13} = i^{12} \cdot i^1 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = -1$	$i^{14} = i^{12} \cdot i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = -i$	$i^{15} = i^{12} \cdot i^3 = -i$

Tabela 1 – Padrão das potências de i

Como sugerem as informações na Tabela 1, as potências de i com expoentes naturais se repetem de quatro em quatro. Isso ocorre devido a dois fatores: as propriedades da potenciação e o fato da potência de i^4 ser igual a 1. Se na divisão de p por 4 o resto é r, então existe algum n inteiro para o qual $p = 4n + r$, e assim

$$\begin{aligned} i^p &= i^{4n+r} \\ &= i^{4n} \cdot i^r \\ &= (i^4)^n \cdot i^r \\ &= 1^n \cdot i^r \\ &= 1 \cdot i^r \\ &= i^r. \end{aligned}$$

Na prática, para determinar uma potência de i, basta determinar o resto da divisão do expoente por 4. Por exemplo, para determinar o valor de i^{387}, basta observar que, $387 \equiv 3 \mod 4$, isto é, na divisão de 387 por 4 o resto é 3. Então $i^{387} = i^3 = -i$.

Curiosamente, no plano complexo as potências de i seguem um padrão de giros de 90° em torno da origem, como ilustra a Figura 4. Esse fato será explicado em maiores detalhes na Seção 2.5.1.

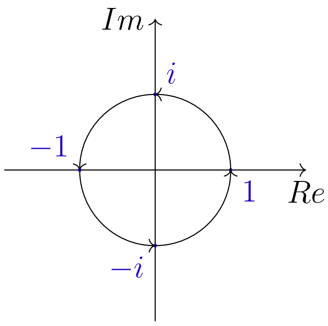


Figura 4 – As potências naturais de i seguem a sequência $1, i, -1, -i, \ldots$

Por outro lado, em geral não é fácil calcular potências de números complexos que não sejam reais ou imaginários puros, especialmente se o expoente é razoavelmente grande. Por exemplo, para calcular uma potência como $(3 - 2i)^{100}$ precisamos desenvolver um binômio de Newton, ou recorrer a outros artifícios de cálculo multiplicando o número complexo por ele mesmo até identificar um padrão. Para realizar esse tipo de cálculo, convém usar os complexos na forma polar em vez da forma algébrica. Esse tópico será estudado na Subseção 2.5.3.

Algo similar ocorre com a radiciação. Para realizar essa operação, é conveniente usar a forma polar dos complexos. Ainda assim, iremos estudar um caso particular (a raiz quadrada) na forma algébrica.

2.3.6 Raiz quadrada

Dado o complexo $x = a + bi$, desejamos determinar o número complexo $y = c + di$ tal que $y = \sqrt{x}$, isto é, $y^2 = x$. Se $b = 0$ temos a raiz quadrada de um número real, que já é conhecida. Vamos considerar $b \neq 0$ e analisar a igualdade $y = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ y^2 &= x \\ (c+di)^2 &= a+bi \\ c^2 + 2cdi + d^2i^2 &= a+bi \\ c^2 + 2cdi + d^2(-1) &= a+bi \\ c^2 - d^2 + 2cdi &= a+bi \end{aligned}$$

Dessa igualdade de números complexos decorre que $c^2 - d^2 = a$ e $2cd = b$. Daí

$$\begin{cases} a = c^2 - d^2 \\ b = 2cd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = c^4 - 2c^2d^2 + d^4 \\ b^2 = 4c^2d^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^4 + 2c^2d^2 + d^4$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$$

Temos, portanto[1] , $c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $c^2 - d^2 = a$. Adicionando e subtraindo as duas equações vêm os respectivos resultados

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2} \quad \text{e} \quad d^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}$$

de onde obtemos, finalmente,

$$|c| = \sqrt{\frac{\rho + a}{2}} \quad \text{e} \quad |d| = \sqrt{\frac{\rho - a}{2}} \quad \text{, onde } \rho = \sqrt{a^2+b^2}.^{2} \tag{2.2}$$

Há algumas observações importantes a serem feitas aqui. A primeira é que nas equações envolvendo a, b, c e d há somente números reais, então temos os resultados já conhecidos (como $\sqrt{c^2} = |c|$, por exemplo). A segunda é que $b \neq 0$ e $b = 2cd$, logo o produto cd tem o mesmo sinal de b. Isso implica que se $b > 0$ podemos ter $c > 0$ e $d > 0$ ou $c < 0$ e $d < 0$. Já se $b < 0$ podemos ter $c > 0$ e $d < 0$ ou $c < 0$ e $d > 0$.

Existem dois números complexos, y e $-y$, cujo quadrado é $x = a + bi$. Eles podem ser representados por $\sqrt{x}$ e $-\sqrt{x}$. Diferente do caso dos números reais, não há aqui uma escolha única para a raiz quadrada, uma vez que $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado. Nesse conjunto, a raiz quadrada possui dois resultados.

Por exemplo, vamos calcular $\sqrt{3 - 4i}$.

Desejamos determinar $y = c + di$, tal que $y^2 = 3 - 4i$. Pelas equações em (2.2) temos $a = 3$, $b = -4$ e $\rho = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Então $|c| = \sqrt{\frac{5+3}{2}} = 2$ e $|d| = \sqrt{\frac{5-3}{2}} = 1$. E

[1] Rigorosamente falando, se $k \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{k^2} = |k|$; note, porém, que $c^2 + d^2 \geq 0$, então $\sqrt{(c^2+d^2)^2} = |c^2 + d^2| = c^2 + d^2$.

[2] Note que $\rho \geq a$, o que implica que todos os radicandos são não negativos, logo $c, d \in \mathbb{R}$.

como $b < 0$ devemos ter $cd < 0$, isto é, $c = 2$ e $d = -1$ ou $c = -2$ e $d = 1$. Assim, as raízes quadradas são $\sqrt{3-4i} = 2 - i$ e $-\sqrt{3-4i} = -2 + i$.

Como exemplo final, calculemos $\sqrt{1+i}$.

Mais uma vez, pelas equações em (2.2) temos $a = b = 1$ e $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Daí $|c| = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ e $|d| = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. E como nesse caso temos $b > 0$, então $c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ e $d = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $c = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ e $d = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Portanto, $\sqrt{1+i} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$ e $-\sqrt{1+i} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$.

Recordemos o começo da teoria. O estudo do conjunto dos números complexos parte da definição da unidade imaginária como $i = \sqrt{-1}$. Ora, se nesse conjunto a raiz quadrada tem dois resultados, como podemos determinar qual deles é igual a i?

O fato é que a escolha é indiferente. Em $\mathbb{C}$, $\sqrt{-1}$ tem dois resultados: i e $-i$. Optamos por representar i acima da origem e $-i$ abaixo dela no plano complexo, mas caso fizéssemos o oposto a teoria matemática seria a mesma, mas com as representações refletidas.

Convenções não são incomuns na Matemática. Apesar de nos habituarmos a tratar naturalmente a reta numérica com os números negativos à esquerda e os números positivos à direita da origem, os lados poderiam ser o inverso sem que isso afetasse as relações matemáticas. O sentido positivo do círculo trigonométrico poderia ser o sentido horário, de modo similar.

2.4 A forma polar

Dado $z \in \mathbb{C}$, a forma algébrica $z = a + bi$ é uma representação simples e que apresenta vantagem para realizar operações de adição e subtração entre complexos. Já para operações um pouco mais avançadas, como multiplicação, potenciação e radiciação ela não é tão eficiente. Nesses casos, é mais prático se utilizar a forma polar, ou trigonométrica, dos complexos, à qual essa seção é dedicada.

2.4.1 Módulo

Revisemos inicialmente o caso dos números reais. Dado $x \in \mathbb{R}$, o módulo de x, representado por $|x|$, pode ser definido geometricamente ou algebricamente. Geometricamente, dizemos que $|x|$ é a distância entre o afixo de x e a origem (zero) na reta real. Algebricamente, definimos $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

O módulo dos números reais tem as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $|x| \geq 0$;

(ii) $|x| = 0 \iff x = 0$;

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

No caso de um número complexo, manteremos a definição geométrica, conforme a Definição 2.7.

Definição 2.7 (Módulo de um número complexo)**.** *Seja z um número complexo. Chamaremos de* módulo de z*, e representaremos por $|z|$ ou pela letra grega ρ (lê-se "rô"), o número real que corresponde à distância entre o afixo de z e a origem no plano complexo.*

Como ilustrado na Figura 5, o módulo é dado pelo teorema de Pitágoras, e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

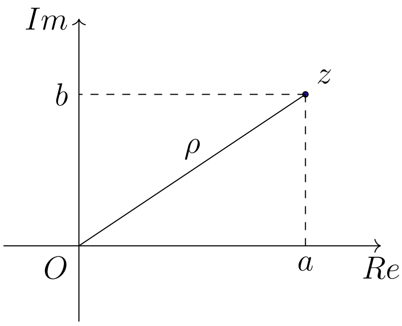


Figura 5 – Módulo do complexo $z = a + bi$

2.4.2 Argumento

O argumento principal do número complexo z é o menor ângulo positivo (isto é, medido no sentido anti-horário) entre o eixo real e o segmento de reta que indica o módulo de z. Na Figura 6, o argumento do complexo z é indicado pela letra grega θ (lê-se "téta").

Inicialmente interpretaremos o argumento em graus, mas há situações em que é preferível, se não necessário, usar radianos. Esse assunto será discutido logo adiante.

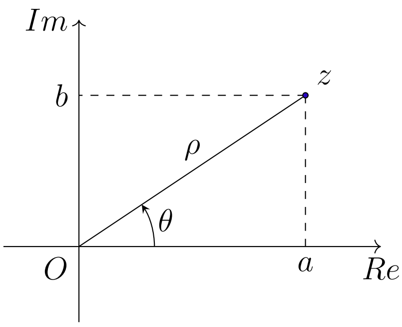


Figura 6 – Argumento do complexo $z = a + bi$

Do triângulo retângulo formado no plano complexo, vêm as relações

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \rho\cdot\cos\theta \\ b = \rho\cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases}. \tag{2.3}$$

Das fórmulas em (2.3) vamos obter, na próxima subseção, a forma polar dos números complexos.

2.4.3 Representação na forma polar

Um número complexo na forma algébrica é definido a partir de uma parte real e uma parte imaginária, sendo $z = a + bi$. Dos resultados obtidos nas equações em (2.3), podemos fazer as substituições $a = \rho\cdot\cos\theta$ e $b = \rho\cdot\operatorname{sen}\theta$, obtendo

$$\begin{aligned} z &= a + b\cdot i \\ &= \rho\cdot\cos\theta + \rho\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot i \\ &= \rho\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right), \end{aligned}$$

que corresponde à forma polar (ou forma trigonométrica) do número complexo z. Ao definir um número complexo dessa forma, ele é localizado a partir do seu módulo ρ e do ângulo θ que forma com o eixo real[3]. Daí o nome *forma polar*, pois essa é a estrutura usada no sistema de coordenadas polares.

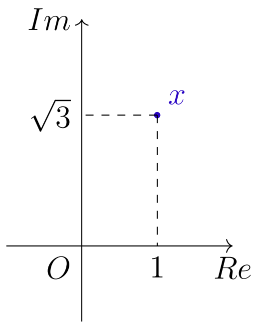
Por exemplo, determinemos a forma polar do número $x = 1 + \sqrt{3}i$. Para isso, primeiro precisamos dos valores do módulo e do argumento de x.

O módulo de x é dado por $\rho = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$. Já o argumento é o menor ângulo positivo θ tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Da trigonometria básica, temos $\theta = 60°$. Conhecidos $\rho = 2$ e $\theta = 60°$, temos $x = 2\left(\cos 60° + i\cdot\operatorname{sen}60°\right)$. E como $60° = \frac{\pi}{3}$ rad, podemos escrever $x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$.

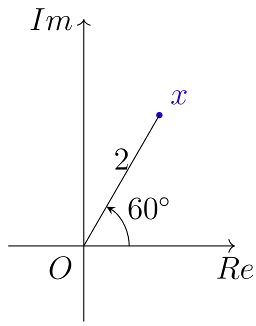
Observe que $x = 1 + \sqrt{3}i$ e $x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, isto é, trata-se de duas *representações* diferentes (ou duas formas diferentes) para o mesmo número complexo. O complexo x está representado na forma algébrica na Figura 7a e está representado na forma polar na Figura 7b. Em ambas ele é representado pelo mesmo ponto no plano, o que muda é a forma que esse ponto é localizado.

Determinemos agora a forma polar do número $y = -2 + 2i$. Para esse, temos $\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\theta = 135°$. Assim, $y = 2\sqrt{2}\left(\cos 135° + i\cdot\operatorname{sen}135°\right)$. A Figura 8 representa y a partir desses parâmetros. Mas $135° = \frac{5\pi}{4}$ rad, então $y = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$.

[3] O argumento θ pode, em princípio, ser dado tanto em graus quanto em radianos. Ele pode ser positivo (com orientação no sentido anti-horário) ou negativo (com orientação no sentido horário). Ele também pode ter valores que excedem uma volta completa, como será discutido na próxima seção, mas é de praxe reduzi-lo ao *argumento principal*, isto é, o menor argumento positivo.



(a) Forma algébrica



(b) Forma polar

Figura 7 – Representações de x no plano complexo

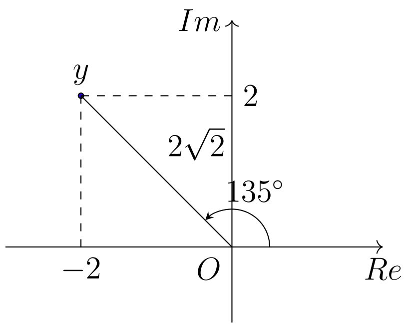


Figura 8 – Representação de $y = -2 + 2i$ no plano complexo

2.4.4 Igualdade

Definição 2.8. *Sejam $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $w = \lambda(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ dois números complexos na forma polar. Vale a igualdade $z = w$ se, e somente se, $\rho = \lambda$ e $\theta = \phi + k \cdot 2\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

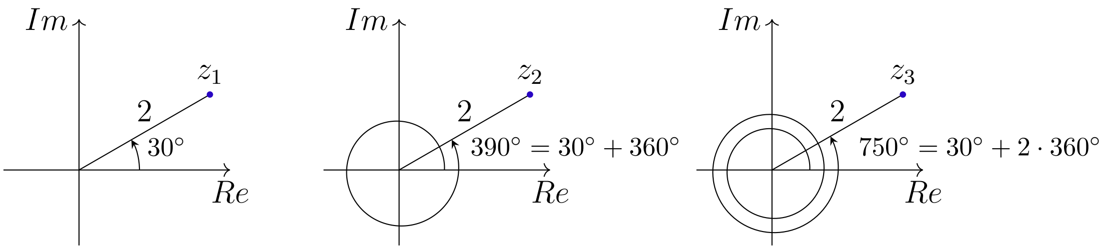
A proposição garante que para que dois complexos sejam iguais é necessário e suficiente que

(i) os módulos sejam iguais;

(ii) a diferença entre os argumentos deve ser um múltiplo de 2π rad $= 360°$ (uma volta completa).

Na Figura 9 estão representados os complexos $z_1 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, $z_2 = 2(\cos 390° + i \operatorname{sen} 390°)$ e $z_3 = 2(\cos 750° + i \operatorname{sen} 750°)$. Os módulos são todos os mesmos, e mesmo que não sejam os mesmos argumentos, as diferenças entre eles são voltas completas em torno da origem[4]. Dessa forma, o afixo é o mesmo, logo trata-se do mesmo número complexo.

[4] Os argumentos são diferentes, mas todos têm o mesmo argumento principal



(a) Com $\theta = 30°$ (b) Com $\theta = 390°$ (c) Com $\theta = 750°$

Figura 9 – Complexos iguais z_1, z_2 e z_3

2.4.5 Por que radianos

Uma forma razoável de medir ângulos é em graus. Assim, os ângulos mais importantes da geometria e da trigonometria (como os que aparecem no quadrado e no triângulo equilátero, por exemplo) têm medidas inteiras. Além disso, o uso das medidas em graus para ângulos é bastante difundido (a ideia de uma volta completa ser 360° é senso comum), daí seu uso é também muito intuitivo. Contudo, ao tratar de matemática em nível superior é imprescindível adotar o uso das medidas dos ângulos em radianos.

A justificativa para isso é o cálculo diferencial e integral. Nele estudamos um limite fundamental, que serve como referência para determinar algumas fórmulas, que é

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.^{5} \tag{2.4}$$

Se x estiver em radianos, e somente nesse caso, tal limite é igual a 1. Em qualquer outro sistema de medidas de ângulos esse limite converge para outro valor. A Tabela 2 ilustra esse fato.[6]

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, com x em radianos	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, com x em graus	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, com x em grados
0,1	0,998334166	0,0174532836	0,01570795681
0,01	0,999983333	0,0174532924	0,0157079632
0,001	0,999999833	0,0174532925	0,01570796327

Tabela 2 – Aproximações de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ com x tendendo a 0 pela direita em três sistemas de medidas diferentes

Do limite em (2.4) decorre, por exemplo, o fato da derivada da função $y = \operatorname{sen} x$ ser a função $y' = \cos x$, e da derivada da função $y = \cos x$ ser a função $y' = -\operatorname{sen} x$. Com essas

[5] Essa notação pode ser desconhecida para um aluno de Ensino Médio. Ela significa que quanto mais x se aproxima de 0, mais o quociente $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se aproxima de 1.

[6] Radianos, graus e grados são unidades de medida para ângulos e arcos. Radianos e graus serão discutidos adiante no texto. Os grados foram propostos juntamente com o metro, e têm uma filosofia semelhante no sentido de se basear na numeração decimal. Uma volta completa tem 400 grados, de modo que um ângulo reto tem 100 grados.

derivadas e a expansão em séries de Maclaurin vêm a relação entre a função exponencial $y = e^x$ e as trigonométricas, que implicam na fórmula de Euler, que será apresentada na Subseção 2.5.4. Em resumo: muitos resultados da matemática de nível superior dependem do limite (2.4), e sendo assim exigem o uso do radiano como sistema de medida de ângulos.

Não existe um sistema de medidas que seja universalmente melhor que os outros. Um sistema pode ser melhor ou pior em relação a outro dependendo do contexto. Os graus são melhores quando se trata de uso cotidiano, de geometria ou trigonometria básica. Já ao tratar de assuntos que tangenciem o cálculo, torna-se recomendável usar radianos.

Ao desenvolver o estudo sobre números complexos na forma trigonométrica durante o Ensino Médio, pode ser uma boa ideia usar as medidas inicialmente em graus, para que haja a compreensão do que está sendo discutido. Mas também é importante fazer a transição para radianos, por todos os motivos discutidos acima.

2.4.5.1 Relação entre radianos e graus

Este material é voltado a professores e alunos de Ensino Médio; sendo assim, é conveniente que se apresente a relação entre as medidas em graus e em radianos, e como transitar entre ambas.

Dois pontos sobre uma circunferência dividem-na em dois arcos. Se esses pontos são diametralmente opostos, cada arco é uma semicircunferência; caso contrário, eles dividem a circunferência em um *arco maior* e um *arco menor*. Se os extremos do arco são os pontos A e B e não houver dúvida em relação a qual dos arcos estamos nos referindo, dizemos simplesmente o arco $\overset{\frown}{AB}$. Por outro lado, se o arco não for óbvio, denotamos como arco $\overset{\frown}{APB}$, onde P é um ponto do arco (ver Figura 10).

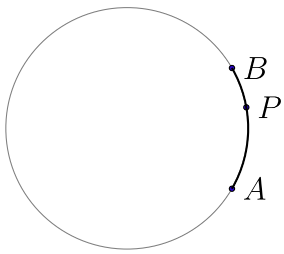


Figura 10 – Arco $\overset{\frown}{APB}$ ou $\overset{\frown}{AB}$

Um arco está relacionado a um ângulo central, e a medida do arco é a medida do ângulo. É importante observar que a *medida do arco* é diferente do *comprimento do arco*. A medida é o ângulo central a ele relacionado, e o comprimento é a fração da circunferência. Isso é exemplificado na Figura 11. Nela o arco $\overset{\frown}{AB}$ tem comprimento visivelmente menor que o arco $\overset{\frown}{CD}$ (esse fato é justificado pelo fato do raio do primeiro ser menor que o raio do segundo), mas ambos têm a mesma medida α.

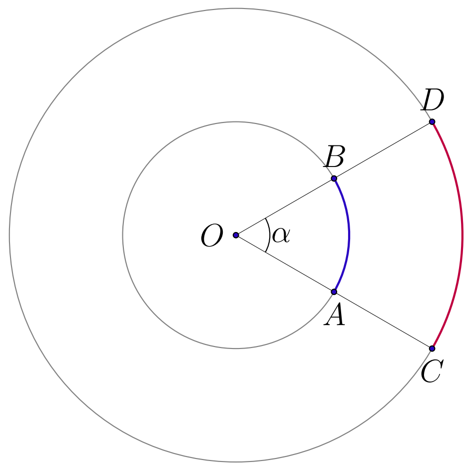


Figura 11 – Arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$

O grau é definido dividindo o círculo em 360 partes iguais. Cada parte é um grau, denotado por 1°. Sendo assim, uma volta completa corresponde a 360°. Definimos 1 radiano, denotado por 1 rad, como um arco de comprimento igual ao raio, conforme ilustrado na Figura 12.

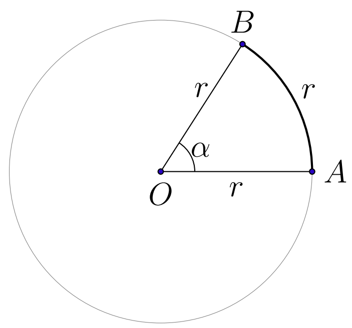


Figura 12 – Definição de $\alpha = 1$ rad

Em um círculo de raio r, um arco de comprimento igual a ℓ determina uma medida

$$\alpha = \frac{\ell}{r}. \tag{2.5}$$

A medida do arco em radianos é literalmente quantas vezes o seu comprimento é maior que o raio. Como exemplo temos a Figura 13, com um arco de medida $\alpha = \frac{2{,}5r}{r} = 2,5$ rad.

Dado um círculo de raio r, o comprimento de uma volta completa é de $2\pi r$. O arco assim determinado, aproveitando a definição em (2.5), tem medida $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad. Em graus, o arco de uma volta completa tem medida de 360°. Como trata-se do mesmo arco, podemos concluir que 2π rad $= 360°$.

Um caso de maior interesse sob uma perspectiva prática é a semicircunferência. Em graus, ela tem medida de 180°. Para a medida em radianos, observando que o comprimento é de πr, tem-se $\alpha = \frac{\pi r}{r} = \pi$ rad. Concluímos com a importante relação, que será usada

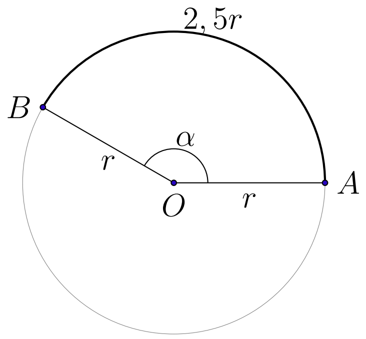


Figura 13 – Arco $\widehat{AB}= 2,5$ rad

para transformar medidas de radianos para graus e vice-versa:

$$\pi \text{ rad} = 180°.$$

Assim, para transformar uma medida em radianos para graus, basta substituir π rad por 180°. Por exemplo:

a) $\dfrac{\pi}{3} \text{ rad} = \dfrac{180°}{3} = 60°$;

b) $\dfrac{3\pi}{2} \text{ rad} = \dfrac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$.

Para a conversão inversa (isto é, de graus para radianos), podemos multiplicar o ângulo por π rad e dividir por 180°. Assim, estaremos multiplicando e dividindo por uma mesma medida não nula, de modo que o valor inicial não se altera (alteramos somente a unidade de medida). Depois disso, basta simplificar a fração (os graus usados como unidade de medida do numerador e do denominador se cancelam). Por exemplo:

a) $90° = \dfrac{90° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}$;

b) $120° = \dfrac{120° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$.

2.5 Operações na forma polar

Para justificar as fórmulas das operações entre complexos na forma trigonométrica precisaremos das fórmulas de adição e subtração de arcos.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{2.6}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha \tag{2.7}$$

2.5.1 Multiplicação

Consideremos dois números complexos, $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$. O produto entre eles é

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2) \\
&= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2 \cdot \cos\theta_1 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2) \\
&= \rho_1\rho_2 \cdot [\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2 + i(\mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2 \cdot \cos\theta_1)].
\end{aligned}$$

Mas pelas equações em (2.6) temos $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2$ e das equações em (2.7) temos $\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2 \cdot \cos\theta_1$, e ao substituir essas igualdades vem o resultado

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]. \tag{2.8}$$

O resultado obtido em (2.8) indica que ao multiplicar complexos na forma polar vamos multiplicar seus módulos e adicionar seus argumentos. Por exemplo, dados $z_1 = 2(\cos 25° + i\,\mathrm{sen}\,25°)$ e $z_2 = 3(\cos 15° + i\,\mathrm{sen}\,15°)$, temos $z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 40° + i\,\mathrm{sen}\,40°)$.

A interpretação desse resultado justifica uma observação anterior. Algumas seções atrás, notamos que as potências da unidade imaginária fazem rotações de 90° em torno da origem. De fato, ao multiplicar qualquer número complexo por i, que possui módulo igual a 1 e argumento igual a 90°, o resultado vai conservar o módulo (pois o módulo é multiplicado por 1) e ao argumento será adicionado 90°.

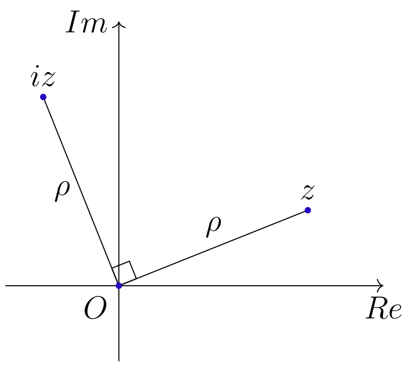


Figura 14 – Complexo z e o produto iz

A Figura 14 ilustra um complexo qualquer z e seu produto pela unidade imaginária i.

2.5.2 Divisão

Interpretaremos o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, como o produto $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$. Precisamos, portanto, determinar a forma polar do inverso de z_2.

Para simplificar a notação, usaremos inicialmente $a = \rho_2 \cdot \cos\theta_2$ e $b = \rho_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2$. Então $z_2 = \rho_2 \cdot \cos\theta_2 + \rho_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \cdot i = a + bi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z_2} &= \frac{1}{a+bi} \\
&= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \\
&= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\
&= \frac{\rho_2 \cdot \cos\theta_2 - \rho_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \cdot i}{(\rho_2)^2} \\
&= \frac{\rho_2(\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cdot i)}{(\rho_2)^2} \\
&= \frac{1}{\rho_2} \cdot (\cos\theta_2 - i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)
\end{aligned}
$$

O resultado obtido não está na forma polar. Para que esteja, é necessário que haja uma adição entre o cosseno e o seno, além dos arcos em ambos serem iguais. Mas como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, temos $\cos(\theta_2) = \cos(-\theta_2)$ e $-\operatorname{sen}(\theta_2) = \operatorname{sen}(-\theta_2)$, então podemos reescrever

$$
\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2}[\cos(-\theta_2) + i\operatorname{sen}(-\theta_2)]. \tag{2.9}
$$

Finalmente, podemos usar a fórmula do produto em (2.8) e o resultado em (2.9) para determinar o quociente entre z_1 e z_2, obtendo

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \\
&= [\rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1] \cdot \left[\frac{1}{\rho_2}(\cos(-\theta_2) + i\operatorname{sen}(-\theta_2))\right] \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Na subseção anterior concluímos que para multiplicar dois números complexos na forma polar devemos multiplicar seus módulos e adicionar seus argumentos. Naquele momento podíamos intuir que para dividir dois complexos, deveríamos dividir seus módulos e subtrair seus argumentos, pois estaríamos trocando as operações pelas suas inversas. O resultado em (2.10) corrobora com essa intuição.

2.5.3 Potenciação - primeira fórmula de De Moivre

Sejam $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $n \in \mathbb{Z}$, nosso objetivo é determinar a potência z^n. Investiguemos, primeiro, o caso com $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z^n &= [\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n \\ &= \underbrace{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot \ldots \cdot \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}_{n \text{ fatores}} \\ &= \rho^n[\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ parcelas}}) + i \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ parcelas}})] \\ &= \rho^n[\cos(n \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta)].^7 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mostremos agora que a mesma fórmula vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para $n = 0$ ela é válida, pois $z^0 = 1 = \rho^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)]$.

Seja agora $n < 0$ um inteiro. Então $-n \in \mathbb{N}$ e $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Aproveitando novamente o resultado em (2.9), teremos

$$\begin{aligned} z^n &= (z^{-1})^{-n} \\ &= \left\{\frac{1}{\rho}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]\right\}^{-n} \\ &= \left(\frac{1}{\rho}\right)^{-n} \{\cos[(-n) \cdot (-\theta)] + i \operatorname{sen}[(-n) \cdot (-\theta)]\} \\ &= \rho^n[\cos(n \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta)]. \end{aligned}$$

A expressão em (2.11) é conhecida como *primeira fórmula de De Moivre*, em homenagem ao francês Abraham De Moivre (1667 - 1754). Ela mostra que para determinar uma potência inteira de um complexo devemos elevar o módulo e multiplicar o argumento, ambos pelo expoente.

A partir dela podemos mostrar que a distributividade da potenciação em relação à multiplicação também vale em $\mathbb{C}$, isto é, para todo $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$ temos $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$.

Dados $z = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $w = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, temos

$$\begin{aligned} z^n \cdot w^n &= [\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)]^n \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)]^n \\ &= (\rho_1)^n[\cos(n\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta_1)] \cdot (\rho_2)^n[\cos(n\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta_2)] \\ &= (\rho_1\rho_2)^n[\cos(n\theta_1 + n\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta_1 + n\theta_2)] \\ &= (\rho_1\rho_2)^n[\cos(n(\theta_1 + \theta_2)) + i \cdot \operatorname{sen}(n(\theta_1 + \theta_2))] \\ &= (z \cdot w)^n. \end{aligned}$$

[7] Essa fórmula poderia ter sido demonstrada por indução matemática. Neste trabalho não optamos por esta abordagem, pois ele é voltado a professores e alunos de Ensino Médio, onde não se costuma usar indução de forma rigorosa.

Por outro lado, para expoentes não inteiros tal propriedade não vale. Como contraexemplo, note que $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$, mas $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$, isto é, $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} \neq \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$.

2.5.4 Um pequeno aprofundamento

Antes de prosseguirmos para o estudo da radiciação em $\mathbb{C}$ e à segunda fórmula de De Moivre, convém analisarmos os resultados já obtidos.

Consideremos dois complexos z_1 e z_2, ambos com módulo igual a 1. Para obter seu produto, devemos adicionar os argumentos. Para obter seu quociente, devemos subtrair seus argumentos. Já para obter uma potência inteira, devemos multiplicar o argumento pelo expoente.

A exponenciação goza de propriedades semelhantes. Ao multiplicar potências de mesma base devemos adicionar os expoentes, ao dividir potências de mesma base devemos subtrair os expoentes e para calcular uma potência de potência devemos multiplicar os expoentes.

Isso sugere a existência de uma relação entre os números complexos e a exponenciação. De fato, conforme Churchill (1975, p. 44), definimos a função exponencial complexa em termos de funções reais por

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y). \tag{2.12}$$

Tal definição apresenta algumas conveniências. Uma delas é que para o caso de $y = 0$, a definição se reduz à função exponencial real. Outra conveniência é que se mantém a propriedade do produto de potências de bases iguais, isto é, $e^w \cdot e^z = e^{w+z}$, para todo $w, z \in \mathbb{C}$.

Uma consequência de (2.12) é que $e^{yi} = \cos y + i \cdot \operatorname{sen} y$, o que é de se esperar, pois tomando as séries de Maclaurin para e^x, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ temos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \tag{2.13}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{2.14}$$

e

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{2.15}$$

Supondo que podemos tomar x como um imaginário puro em (2.13), para $x = i\theta$ obtemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\ &= \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)}_{\operatorname{sen}\theta} \\ &= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{2.16}$$

O resultado em (2.16), que está de acordo com a definição da exponencial complexa em (2.12), é a conhecida *fórmula de Euler*, batizada em homenagem ao já citado matemático suíço.

Assim, para $z_1 = \cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1 = e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2 = e^{i\theta_2}$ o produto $z_1 \cdot z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ pode ser obtido pela fórmula de Euler por

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \\ &= e^{i\theta_1 + i\theta_2} \\ &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \end{aligned}$$

onde a relação entre multiplicar complexos na forma polar (acrescentar os argumentos) e multiplicar exponenciais (acrescentar os expoentes) fica explícita.

Analogamente, podemos analisar a divisão entre complexos na forma polar usando a fórmula de Euler, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} \\ &= e^{i\theta_1 - i\theta_2} \\ &= e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para uma potência com expoente $n \in \mathbb{Z}$ teremos

$$\begin{aligned} z_1^n &= \left(e^{i\theta_1}\right)^n \\ &= e^{i\theta_1 n} \\ &= e^{i(\theta_1 \cdot n)}. \end{aligned}$$

Uma consequência da fórmula de Euler é uma famosa identidade obtida adotando $\theta = \pi$ rad.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow e^{i\pi} &= \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi \\ \Longleftrightarrow\ e^{i\pi} &= -1 + i \cdot 0 \\ \Longleftrightarrow\ e^{i\pi} + 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

A identidade matemática obtida em (2.17) é considerada por muitos como a mais bela da matemática. Ela relaciona cinco números que podem ser apontados como os mais importantes historicamente (o número 0, o número 1, o número π, a constante de Euler e e a unidade imaginária i) de forma surpreendentemente simples.

Os cálculos anteriores levavam em consideração complexos de módulo 1. Se $z \in \mathbb{C}$ tem módulo diferente de 1, podemos escrever

$$z = \rho(\underbrace{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}_{e^{i\theta}}) = \rho e^{i\theta}.$$

Dados $z_1 = \rho_1(\underbrace{\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1}_{e^{i\theta_1}}) = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2(\underbrace{\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2}_{e^{i\theta_2}}) = \rho_2 e^{i\theta_2}$, seu produto é dado por

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} \\ &= \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

que mantém o conceito discutido anteriormente: multiplicamos os módulos e adiciona os argumentos. Para o quociente temos um resultado similar:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \end{aligned}$$

onde novamente observamos o resultado anterior: dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.

Por fim, para $z = \rho e^{i\theta}$ e $n \in Z$, para a potência temos

$$\begin{aligned} z^n &= \left(\rho e^{i\theta}\right)^n \\ &= \rho^n e^{i(\theta n)}. \end{aligned}$$

2.5.5 Radiciação - segunda fórmula de De Moivre

Já discutimos o caso de potências de complexos com expoentes inteiros. O caso de expoentes racionais não inteiros é contemplado pelo estudo dos radicais, por uma propriedade que relaciona a potenciação e a radiciação: $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$.

O problema de determinar as raízes n-ésimas do complexo z é determinar quais são os complexos w tais que $w^n = z$, isto é,

$$\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n.$$

Se $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $w = \lambda(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ obtemos

$$\begin{aligned} z &= w^n \\ \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) &= [\lambda(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)]^n \\ \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) &= \lambda^n[\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Da igualdade de complexos em (2.18) vem $\rho = \lambda^n$, que implica em $\lambda = \sqrt[n]{\rho}$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \cos\theta = \cos(n\phi) \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(n\phi) &\Longrightarrow n\phi = \theta + k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \phi = \frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Então se $w\in\mathbb{C}$ é uma raiz n-ésima de z, então $w = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{n}\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. A cada valor de k corresponde uma única raiz w_k. Isso pode fazer parecer inicialmente que há infinitas raízes n-ésimas de z (pois há infinitos $k\in\mathbb{Z}$), mas isso não está correto. O complexo z tem exatamente n raízes n-ésimas, e mesmo que façamos k variar pelos números inteiros, os complexos obtidos serão iguais entre si.

Esse fato é mais facilmente compreendido a partir da interpretação geométrica das raízes n-ésimas de z, que será discutida adiante. Entretanto, ele também pode ser mostrado algebricamente. Dadas duas raízes n-ésimas de z, w_k e w_p, sendo $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{n}\right)\right)$ e $w_p = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+p\cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+p\cdot 2\pi}{n}\right)\right)$, então

$$\begin{aligned} w_k = w_p &\iff \frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n} = \frac{\theta + p\cdot 2\pi}{n} + 2\pi\cdot t, \text{ para algum } t\in\mathbb{Z} \\ &\iff \frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n} - \frac{\theta + p\cdot 2\pi}{n} = 2\pi\cdot t, \text{ para algum } t\in\mathbb{Z} \\ &\iff \frac{k\cdot 2\pi}{n} - \frac{p\cdot 2\pi}{n} = 2\pi\cdot t, \text{ para algum } t\in\mathbb{Z} \\ &\iff \frac{k}{n} - \frac{p}{n} = t, \text{ para algum } t\in\mathbb{Z} \\ &\iff k - p = tn, \text{ para algum } t\in\mathbb{Z} \\ &\iff k \equiv p \pmod{n}, \end{aligned}$$

onde a última linha significa que k e p deixam o mesmo resto na divisão por n. E como os restos possíveis na divisão por n são $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, para obter todas as raízes n-ésimas de $z\in\mathbb{C}$, basta fazer k variar nesse conjunto de valores. Obtemos então a segunda fórmula de De Moivre, que afirma que as raízes complexas de $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ são dadas por

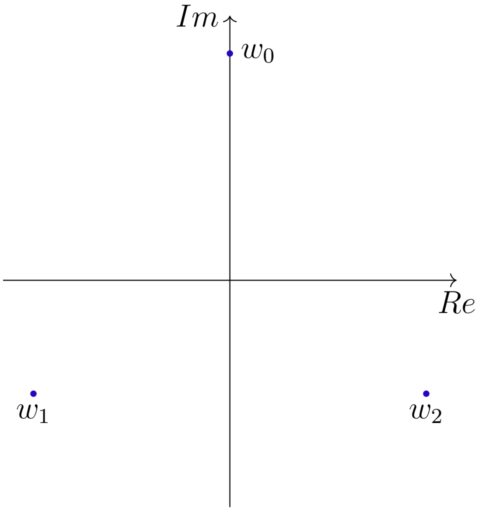
$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right), \text{ com } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.20}$$

Como exemplo, calculemos as raízes cúbicas de $z = -27i$. Precisamos escrever esse número na forma polar, como $z = 27\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$.

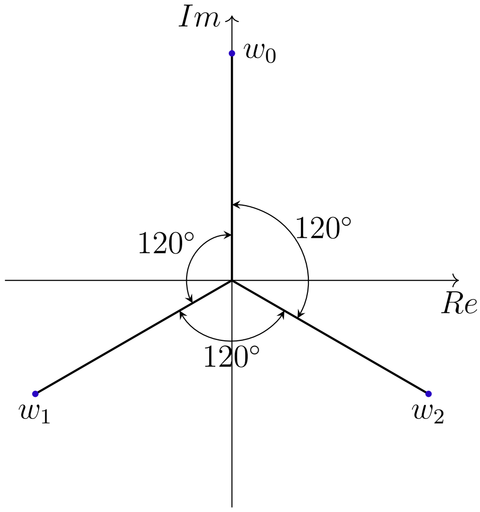
Temos $\rho = 27$, daí $\sqrt[3]{\rho} = 3$. Como as três raízes cúbicas têm o mesmo módulo, variando somente o argumento, podemos calcular os argumentos separadamente:

- $\theta_0 = \dfrac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\theta_1 = \dfrac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{6}$;
- $\theta_2 = \dfrac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \dfrac{11\pi}{6}$.

Então as raízes cúbicas de $-27i$ são os números complexos $w_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$, $w_1 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$ e $w_2 = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$. Na forma algébrica, temos $w_0 = 3i$, $w_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ e $w_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$. Essas raízes estão representadas na Figura 15a.



(a) Localizações das raízes no plano complexo



(b) Ângulos formados entre os módulos das raízes

Figura 15 – Raízes cúbicas de $z = -27i$

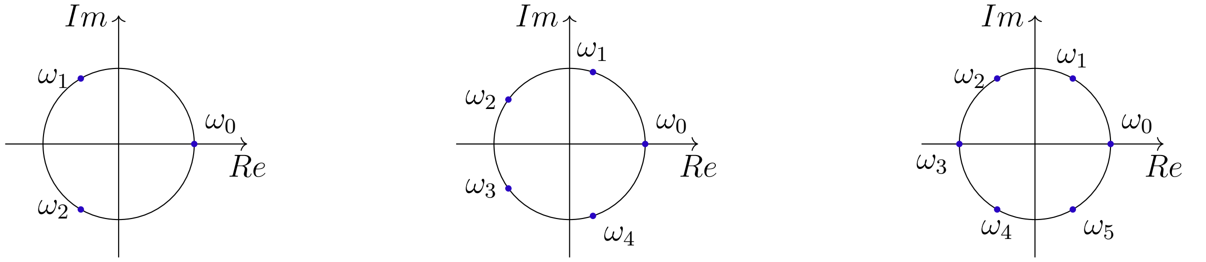
As raízes n-ésimas de z dividem em n partes iguais o círculo de centro na origem e raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$. No cálculo das três raízes cúbicas de $z = -27i$, dividimos o círculo em três partes de 120°. Se fizéssemos o índice k da segunda fórmula de De Moivre variar por outros valores além de 0, 1 e 2, continuaríamos rotacionando 120° em torno da origem e obtendo os mesmos complexos w_0, w_1 e w_2. Isso está representado na Figura 15b.

2.5.6 Raízes da unidade

As raízes complexas n-ésimas de 1 são chamadas de raízes n-ésimas da unidade. A única raiz 1-ésima da unidade é 1. Quando $n \geq 2$, como o argumento de 1 é zero e seu módulo é 1, segue de (2.20) que as raízes complexas n-ésimas da unidade são dadas por

$$z_k = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{k\cdot 2\pi}{n}, \text{ com } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

onde z_k representa cada raiz da unidade. Tais raízes dividem o círculo de centro na origem e raio unitário em n partes iguais, isto é, seus afixos são vértices de um polígono regular de n lados inscrito nesse círculo, sendo $z_0 = 1$ um desses vértices.



(a) Raízes cúbicas da unidade

(b) Raízes quintas da unidade

(c) Raízes sextas da unidade

Figura 16 – Exemplos de raízes da unidade

Como as raízes são equiangulares (ver Figura 16), podemos localizar todas elas a partir de uma. Particularmente, usaremos a letra grega ω (lê-se "ômega") para representar a raiz $z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$, que chamamos de *raiz primitiva da unidade*. De (2.11) segue que

$$z_k = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{k\cdot 2\pi}{n} = \omega^k, \text{ com } k = 0, 1, , \dots, n-1,$$

o que implica que todas as raízes da unidade são obtidas como potências de ω. Em outras palavras, o conjunto das n-ésimas raízes da unidade é $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$.

Observe que, usando (2.8), podemos reescrever a segunda fórmula de De Moivre, dada por (2.20), como

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right], \text{ com } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Usando $\omega^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ segue que

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]\omega^k, \text{ com } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Se $k = 0$ obtemos a raiz

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right],$$

assim as demais raízes são dadas por

$$w_k = w_0\,\omega^k, \text{ com } k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.21}$$

Ou seja, as demais raízes são o produto de uma raiz particular (w_0) pelas raízes n-ésimas da unidade.

A expressão (2.21) também pode ser escrita recursivamente como

$$w_k = w_{k-1}\omega,$$

com $k = 1, \ldots, n-1$. Dessa forma fica evidenciado que cada raiz w_k é o produto da raiz anterior pela raiz primitiva da unidade ω.

Como exemplo, para calcular as raízes cúbicas de 8 em $\mathbb{C}$, encontramos primeiro a raiz w_0, dada por

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{0}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{0}{3}\right) = 2,$$

e as demais raízes são $w_1 = w_0\omega = 2\omega$ e $w_2 = w_0\omega^2 = 2\omega^2$, em que $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$.

Como segundo exemplo, para calcular todos os resultados complexos para $\sqrt[5]{3}$ obtemos

$$w_0 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{0}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{0}{5}\right) = \sqrt[5]{3},$$

de onde seguem as demais raízes

- $w_1 = w_0\omega = \sqrt[5]{3}\omega$,
- $w_2 = w_0\omega^2 = \sqrt[5]{3}\omega^2$,
- $w_3 = w_0\omega^3 = \sqrt[5]{3}\omega^3$ e
- $w_4 = w_0\omega^4 = \sqrt[5]{3}\omega^4$,

em que $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$.

Observação 2.9. *A escolha da raiz particular w_0 não é importante (isto é, pode ser qualquer raiz), pois o produto de w_0 por uma raiz da unidade ω^k preserva o módulo de w_0 e adiciona ao argumento de w_0 o argumento de ω^k. Desse modo, quando k varia de 1 até $n-1$ obtemos as n raízes procuradas (considerando que w_0 já era conhecida). Por outro lado, é importante que ω seja a raiz primitiva da unidade, para que cada nova raiz da unidade na sequência $(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$ represente uma rotação em $\frac{2\pi}{n}$ rad no sentido anti-horário em torno da origem (as n posições realizam uma volta completa). Considerando que na sequência de raízes $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}) = (w_0, w_0\omega, w_0\omega^2, \ldots, w_0\omega^{n-1})$ o termo w_0 sucede o termo w_{n-1}, as raízes sempre estão na mesma ordem, variando somente pelo o primeiro termo a aparecer.*

Como exemplo, calculemos os valores complexos de $z = \sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}$. O complexo $-2-2\sqrt{3}i$ tem argumento principal 240° e módulo igual a 16. Assim, temos a raiz particular

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{240^\circ}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{240^\circ}{4}\right) \\ &= 2\left(\cos 60^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 60^\circ\right). \end{aligned}$$

Para determinar as outras raízes, precisamos das raízes quartas da unidade, que são o conjunto $\{1, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\}$, sendo a raiz quarta primitiva da unidade $\omega = i$. Conforme discutido na Subseção 2.5.1, multiplicar um complexo por $\omega = i$ implica geometricamente em rotacionar o afixo desse complexo 90° em torno da origem no sentido anti-horário, e assim obtemos as demais raízes

- $z_1 = z_0\omega = z_0 i = 2(\cos 150^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 150^\circ)$,
- $z_2 = z_0\omega^2 = z_1 i = 2(\cos 240^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 240^\circ)$ e
- $z_3 = z_0\omega^3 = z_2 i = 2(\cos 330^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 330^\circ)$.

Assim, temos as quatro raízes quartas de $-2-2\sqrt{3}i$, pois $(z_0)^4 = (z_1)^4 = (z_2)^4 = (z_3)^4 = -2-2\sqrt{3}i$.

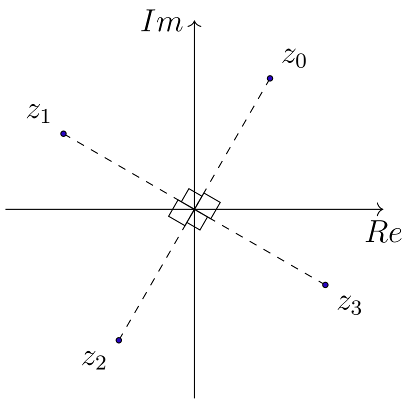


Figura 17 – Raízes quartas de $-2-2\sqrt{3}i$

Os complexos z_0, z_1, z_2 e z_3 estão representados na Figura 17. Note que a cada multiplicação por $\omega = i$ se obtém a próxima raiz a partir de uma rotação de 90°. Assim, a sequência obtida para as raízes foi (z_0, z_1, z_2, z_3).

Caso considerássemos a raiz particular como aquela que representamos inicialmente por z_1, a sequência obtida pelas rotações de 90° seria (z_1, z_2, z_3, z_0), mesmo que a notação fosse adaptada. Caso a raiz particular considerada fosse aquela que representamos por z_2, a sequência seria (z_2, z_3, z_0, z_1). Caso a raiz particular fosse z_3, a sequência obtida para as raízes seria (z_3, z_0, z_1, z_2).

Em outras palavras, na obtenção do conjunto de números complexos z tais que $z = \sqrt[4]{-2 - 2\sqrt{3}i}$, a escolha da raiz particular z_0 é indiferente. Por outro lado, é importante que ω seja a raiz primitiva da unidade, isto é, $\omega = i$. Caso considerássemos outras raízes quartas da unidade (especificamente $\omega_0 = 1$ ou $\omega_2 = -1$) não obteríamos os quatro valores complexos de z.

Usar as raízes da unidade para determinar todas as raízes complexas de um número será útil no Capítulo 4, para determinar todas as raízes de uma equação cúbica. Também será útil no Capítulo 5 na solução de alguns problemas.

3 Polinômios e funções polinomiais

No presente capítulo desenvolveremos de forma sucinta os principais conceitos a respeito de funções polinomiais e polinômios. O objetivo principal é fundamentar o estudo das equações algébricas no próximo capítulo.

3.1 Função polinomial complexa

Definição 3.1. *Uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa se existe um número finito de números complexos $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tais que*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$.

Cada número a_j é chamado de coeficiente e cada parcela a_jx^j é chamado de termo de grau j. O termo a_0 é chamado de termo constante, ou termo independente de x. Se $a_n \neq 0$, o termo a_nx^n é chamado de termo líder, ou termo dominante, e o polinômio tem grau n.

Como estamos tratando de uma função de valor complexo e de uma variável complexa, os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ podem também ser quaisquer números complexos. Entretanto, o caso de maior interesse é aquele em que as variáveis são complexas e os coeficientes são reais. Os problemas que resolvemos pelo uso de funções polinomiais costumam ter coeficientes reais, pois os números reais são mais comuns em situações concretas. Ocorre que no estudo de funções polinomiais, os números complexos aparecem como resultados intermediários. Ao levarmos tais números em consideração, com sua estrutura e sua álgebra, teremos uma teoria mais completa e mais elegante que aquela que teríamos caso eles fossem deixados de lado.

Um número complexo z para o qual $p(z) = 0$ é chamado de zero da função p. Há autores que usam as expressões *zero da função* e *raiz da função* como sinônimos, mas nesse trabalho damos preferência à nomenclatura definida anteriormente. Por exemplo, a função polinomial $p(x) = x^3 + 1$ tem três zeros complexos: $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, pois $p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = 0$. Os zeros de uma função, seja ela polinomial ou não, são tema de grande interesse na matemática. Ainda neste capítulo eles serão usados para demonstrar importantes resultados.

3.1.1 Polinômios e funções polinomiais

Há uma diferença sutil entre os conceitos de *polinômio* e de *função polinomial*. Conforme Lima (2013, p. 139), chamamos de polinômio uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

onde $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ é uma lista ordenada de elementos pertencentes a um anel A e X é um símbolo não pertencente a esse anel. Esse símbolo X é chamado de *indeterminada*. No caso dos polinômios complexos, A é o anel dos complexos, com as operações de adição e multiplicação definidas no capítulo anterior. Ainda falando em um polinômio, X^i é uma abreviatura para um produto de i fatores iguais a X, nas regras de produto definidos em A. Ainda, assumimos $X^1 = X$ e $X^0 = 1$, onde 1 é o elemento neutro multiplicativo de A.

> Note que o conceito de polinômio contempla apenas a lista de seus coeficientes e a forma pela qual os somamos e multiplicamos; quando nos referimos à função polinomial, passamos a estar interessados na correspondência entre números complexos estabelecida pelo valor que a função assume em cada ponto. (LIMA et al., 1998, p. 203)

Investigando o assunto um pouco mais profundamente, há uma relação entre os polinômios complexos e as funções polinomiais complexas. Por definição, dois polinômios são iguais quando possuem os mesmos coeficientes. Assim, a todo polinômio complexo

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

corresponde uma única função polinomial complexa $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Conforme estudaremos nesse capítulo, duas funções polinomiais são iguais se, e somente se, seus respectivos coeficientes são iguais. Assim, funções polinomiais complexas iguais se correspondem a um mesmo polinômio complexo, isto é, a cada função polinomial complexa se corresponde um único polinômio complexo.

Como a relação entre polinômios complexos e funções polinomiais complexas é biunívoca, não há necessidade de diferenciá-los. “Ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial”. (LIMA, 2013, p. 140)

A rigor, $p(x)$ não se refere ao polinômio em si, mas ao valor numérico assumido pelo polinômio para $x \in \mathbb{C}$. Entretanto, quando não há risco de confusão escrevemos “o polinômio $p(x)$” para nos referirmos ao polinômio p.

3.2 Operações com polinômios

Nesta seção desenvolveremos as regras operacionais entre polinômios complexos, bem como suas propriedades e seus casos particulares.

3.2.1 Adição e multiplicação

Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ são polinômios complexos de graus iguais, então a sua adição resulta no polinômio complexo $(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$, chamado de soma (HEFEZ; VILLELA, 2022, p. 58).

Se os polinômios têm graus diferentes, consideremos, sem perda de generalidade, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, com $m > n$. Nesse caso, podemos escrever $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} \cdots + a_mx^m$, desde que $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$. Então a soma entre $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, será o polinômio complexo $(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m$.

Os dois casos podem ser resumidos na definição a seguir.

Definição 3.2. *Dados dois polinômios complexos $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, a* soma *de p com q, denotada por $p + q$, é o polinômio complexo $(p + q) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ obtido pela adição dos respectivos termos de mesmo grau de p e q.*

É fácil verificar que se p e q têm graus iguais, então o grau de $p + q$ é menor que ou igual ao grau deles. E se p e q têm graus diferentes, então o grau de $p + q$ é igual ao maior dos graus entre p e q.

Se $k \in \mathbb{C}$ é uma constante, então $k \cdot p(x) = k \cdot a_0 + k \cdot a_1x + \cdots + k \cdot a_nx^n$. Tal constante pode ser interpretada como um polinômio $f(x) = k$, no qual $a_0 = k$ e todos os demais coeficientes são nulos.

Não definimos a operação de subtração de polinômios, mas definimos o polinômio diferença de p com q, denotado por $p - q$, como $p(x) - q(x) = p(x) + (-1) \cdot q(x)$. De um ponto de vista prático, podemos obter os termos da diferença $p - q$ subtraindo os respectivos termos de mesmo grau de p e q.

O que ocorre é que a diferença entre polinômios é um caso particular da adição, isto é, subtrair o polinômio q é o mesmo que adicionar seu inverso aditivo. Caso definíssemos uma operação de subtração, seria necessário analisar mais casos nas propriedades das operações (que serão discutidas ao final dessa subseção), pois isso demandaria definir cada propriedade para a adição e para a subtração.

Em resumo, definir somente a adição (em vez de adição e subtração) permite obtermos uma teoria mais concisa e com resultados mais simples de generalizar. Entretanto, trata-se somente de uma convenção. Não há problema lógico em definir tal operação, como é feito, por exemplo, por Iezzi (2013).

Definição 3.3. *O polinômio $p(x) = 0$, que possui todos os coeficientes iguais a zero, é chamado de polinômio identicamente nulo. Pela definição de grau do polinômio dada acima, não definimos o grau do polinômio nulo.*

Analisemos agora a igualdade de polinômios. Para que $p(x) = q(x)$ devemos ter $p(x) - q(x) = 0$, isto é, o polinômio diferença $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n$ deve ser o polinômio identicamente nulo. Daí, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero, isto é, $a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0$, logo $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$. Em termos mais diretos, dois polinômios são iguais se, e somente se, todos os seus respectivos coeficientes forem iguais.

Definição 3.4. *Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ polinômios complexos. Definimos a multiplicação entre os polinômios como $p(x) \cdot q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$, onde cada termo é dado por $c_j = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda \cdot b_\mu$, isto é,*

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\
c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\
c_3 &= a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_0 \\
&\vdots \\
c_j &= a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \cdots + a_j \cdot b_0 \\
&\vdots \\
c_{n+m} &= a_n \cdot b_m
\end{aligned}$$

O resultado da multiplicação é chamado de produto, e seu grau é igual à soma dos graus dos polinômios p e q. Esse resultado é facilmente justificável: o termo de maior grau do produto é $c_{n+m}x^{n+m}$, cujo grau é $n + m$. O grau do polinômio $p \cdot q$ será igual a $n + m$ desde que esse termo seja não nulo. Mas $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$ implica que $c_{n+m} = a_n \cdot b_m \neq 0$, logo vale o resultado.

A última frase merece uma justificativa. Um conjunto A munido de duas operações $(+)$ e $(\cdot)$, chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem as propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$, compõem uma estrutura algébrica chamada de *anel*. Um anel é chamado de *domínio de integridade* quando dados $a, b \in A$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a \cdot b \neq 0$. O conjunto dos números inteiros, por exemplo, é um domínio de integridade. Um domínio de integridade no qual todo elemento diferente de zero possui inverso multiplicativo é chamado de *corpo*. Todo corpo é um domínio de integridade. Por fim, o conjunto $\mathbb{C}$, dotado das operações usuais de adição e multiplicação, compõe um corpo. Assim, o produto de números complexos não nulos resulta em um número complexo não nulo. Mais detalhes podem ser encontrados em Hefez (2014) nas páginas 28, 30, 31, 185 e 186.

As operações entre polinômios complexos gozam das seguintes propriedades, para quaisquer $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$:

(i) (Comutativa da adição) $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$;

(ii) (Comutativa da multiplicação) $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$;

(iii) (Associativa da adição) $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$;

(iv) (Associativa da multiplicação) $[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$;

(v) (Distributiva da multiplicação em relação à adição) $p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$;

(vi) (Existência do elemento neutro aditivo) Existe um polinômio, o polinômio nulo 0, tal que $p(x) + 0 = p(x)$ para todo polinômio complexo p;

(vii) (Existência do elemento neutro multiplicativo) Existe um polinômio, o polinômio constante igual a 1, tal que $p(x) \cdot 1 = p(x)$ para todo polinômio complexo p.

(viii) (Existência do simétrico aditivo) Dado $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, seu simétrico é o polinômio $-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n$, pois $p(x) + (-p(x))$ é igual ao polinômio nulo.

3.2.2 Divisão

Conforme pode ser encontrado em Lima et al. (1998), se a função polinomial $p(x)$ pode ser expressa pelo produto $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, dizemos que $p(x)$ é divisível por $q(x)$ e $r(x)$. Reciprocamente, podemos afirmar que $q(x)$ e $r(x)$ dividem $p(x)$.

Note que todo polinômio divide o polinômio nulo, pois $0 = 0 \cdot p(x)$ para todo polinômio p.

Proposição 3.5. *A função polinomial $p(x) = x^n - z^n$ é divisível por $x - z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Basta notar que

$$x^n - z^n = (x - z) \cdot (x^{n-1} + zx^{n-2} + z^2x^{n-3} + \cdots + z^{n-3}x^2 + z^{n-2}x + z^{n-1}).$$

□

A proposição anterior é um caso particular do Teorema 3.7, que segue do lema a seguir.

Lema 3.6. *Sejam $p, q, r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinômios complexos. Se r divide ambos p e q, então r divide $p + q$.*

Demonstração. Se r divide p, então existe um polinômio $a(x)$ tal que $p(x) = a(x) \cdot r(x)$. Se r divide q, então existe um polinômio $b(x)$ tal que $q(x) = b(x) \cdot r(x)$. Daí $p + q = a \cdot r + b \cdot r = (a + b)r$. □

O teorema fundamental que segue leva o nome do matemático francês Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783).

Teorema 3.7 (d'Alembert)**.** *Sejam $p(x)$ um polinômio complexo e $z \in \mathbb{C}$. Tem-se que z é zero de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x - z$.*

Demonstração. Partindo da hipótese de z ser zero do polinômio p, temos

$$\begin{aligned} p(z) = 0 &\iff p(x) = p(x) - p(z) \\ &\iff p(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) \\ &\iff p(x) = a_1(x - z) + a_2(x^2 - z^2) + \cdots + a_n(x^n - z^n), \end{aligned}$$

onde na última linha temos o polinômio p como uma soma de parcelas divisíveis por $x - z$, como nos é garantido pela Proposição 3.5. □

Nas proposições a seguir, o grau do polinômio passa a ter um papel fundamental. Em virtude disso, convém adotarmos uma representação simplificada para ele. Usaremos $gr(p)$ para representar o grau da função polinomial p. Além disso, pela letra fria da definição, o polinômio identicamente nulo não tem grau. Porém, podemos convencionar $gr(0) = -\infty$ como forma de simplificar os argumentos, pois assim o polinômio nulo pode ser incluído no conjunto dos polinômios que têm grau menor que ou igual a n.

Lema 3.8. *Se o polinômio $g(x)$ divide o polinômio $f(x)$, então $gr(g) \leq gr(f)$.*

Demonstração. Se g divide f, então existe um polinômio q tal que $f(x) = g(x) \cdot q(x)$. Mas $gr(g \cdot q) = gr(g) + gr(q)$, então $gr(f) = gr(g) + gr(q)$, logo $gr(g) \leq gr(f)$. □

A divisão de polinômios é apresentada no importante teorema a seguir.

Teorema 3.9 (Divisão euclidiana)**.** *Sejam f e g polinômios complexos, com $g(x) \neq 0$. Existem polinômios complexos $q(x)$ e $r(x)$ unicamente determinados tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, onde $gr(r) < gr(g)$. O polinômio q é chamado de* quociente *da divisão, enquanto o polinômio r é chamado de* resto *da divisão.*

Demonstração. Primeiramente, provemos a existência de q e r.

Se $f(x) = 0$, então $q(x) = r(x) = 0$.

Supondo que f não seja o polinômio identicamente nulo, podemos escrever $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Note que $gr(f) = n$ e $a_n \neq 0$, logo a_n^{-1} existe e é único. Seja $g(x) = b_0 + b_1 + \cdots + b_mx^m$, onde $gr(g) = m$ e $b_m = a_n^{-1}$.

Se $n < m$, então basta tomar $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.

Se $n \geq m$, vamos usar indução em n.

Para o passo inicial, se $n = 0$, então $m = 0$ e podemos escrever $f(x) = a_0 \neq 0$ e $g(x) = b_0$. Então basta tomar $q(x) = b_0^{-1}a_0$ e $r(x) = 0$, e segue o resultado.

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \cdot b_0^{-1}a_0 + 0 \\ f(x) &= g(x) \cdot q(x) + r(x) \end{aligned}$$

Para o passo da indução, vamos supor que a proposição vale para todo polinômio com grau menor que $n = gr(f)$ e mostrar que vale para n. Para isso, vamos definir um polinômio p como

$$p(x) = f(x) - a_nb_m^{-1}g(x)x^{n-m}. \tag{3.1}$$

Note que $gr(p) < n$, então pela hipótese de indução existem $q_1(x)$ e $r_1(x)$ tais que

$$p(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x). \tag{3.2}$$

Equivalentemente a (3.1) temos $f(x) = p(x) + a_nb_m^{-1}g(x)x^{n-m}$. Vamos substituir o resultado obtido em (3.2) e reorganizar a expressão.

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + a_nb_m^{-1}g(x)x^{n-m} \\ &= (g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)) + a_nb_m^{-1}g(x)x^{n-m} \\ &= \left[q_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}\right] \cdot g(x) + r_1(x), \end{aligned}$$

onde entre colchetes temos o quociente $q(x)$ e o resto é $r(x) = r_1(x)$.

Agora procederemos a provar a unicidade.

Sejam q_1, r_1, q_2 e r_2 funções polinomiais, com $gr(r_1) < gr(g)$ e $gr(r_2) < gr(g)$, tais que $f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$ e $f(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$. Da igualdade

$$q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$$

obtemos

$$[q_1(x) - q_2(x)] \cdot g(x) = r_2(x) - r_1(x). \tag{3.3}$$

Em (3.3), se $q_1 = q_2$, então o lado esquerdo da igualdade resulta no polinômio nulo, o que implica que o lado direito também é o polinômio nulo e $r_1 = r_2$.

Vamos supor, por absurdo, $q_1 \neq q_2$. De (3.3) concluímos que g divide $r_2 - r_1$, logo $gr(g) \leq gr(r_2 - r_1)$. Mas pela definição, tanto r_2 quanto r_1 têm graus menores que $gr(g)$, logo $gr(r_2 - r_1) < gr(g)$. Assim, temos $gr(g) \leq gr(r_2 - r_1) < gr(g)$, um absurdo. $\square$

3.3 Fatoração de polinômios

Por simplicidade de notação, passaremos a omitir o símbolo de multiplicação entre polinômios. Assim, onde escrevermos $p(x)q(x)$ ou pq leia-se $p(x) \cdot q(x)$ ou $p \cdot q$, respectivamente.

O Teorema de d'Alembert garante que se um número complexo z_1 é raiz do polinômio $p(x)$, então existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - z_1)q(x)$. Caso $p(x)$ tenha outra raiz, por exemplo z_2, esse complexo z_2 é raiz de $q(x)$. Assim, teremos $p(x) = (x - z_1)(x - z_2)q_2(x)$.

Desenvolvendo esse raciocínio, concluímos que se o polinômio $p(x)$ de grau n tem raízes $z_1, z_2, \ldots, z_k$, então existe um polinômio $q(x)$ de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_k)q(x)$$

onde o polinômio q não possui raízes. Caso tivesse, essas raízes de q também seriam raízes de p e já estariam listadas.

Caso estivéssemos restritos a funções reais, o trabalho de fatorar o polinômio p estaria concluído. Mas em $\mathbb{C}$ temos um resultado um pouco mais geral.

Por exemplo, tomemos o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Como 2 é raiz de p, podemos fatorá-lo como $p(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$, resultado que pode ser facilmente obtido através de uma fatoração por agrupamento. Em $\mathbb{R}$ a fatoração estaria concluída, pois nesse conjunto o binômio $x^2 + 1$ não tem raízes. Entretanto, em $\mathbb{C}$ esse polinômio tem raízes i e $-i$, então $p(x) = (x - 2)(x - i)(x + i)$.

Nos conjunto dos números complexos, todo polinômio com grau maior que zero tem raízes, isto é, somente polinômios constantes não podem ser fatorados. Esse é o conteúdo do importante teorema que segue.

Teorema 3.10 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio complexo de grau maior que ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.*

"Embora fundamental para a Álgebra, o teorema acima é um teorema de Análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas" (LIMA et al., 1998, p. 219), e sendo assim tal demonstração foge ao escopo deste trabalho. A referência citada traz ideias gerais da demonstração, sem rigorosidade ou precisão de linguagem.[1]

[1] Essa falta de precisão não configura um desleixo por parte do autor, mas uma adequação ao público-alvo.

Com o Teorema Fundamental da Álgebra podemos completar a fatoração do polinômio nas suas raízes.

Teorema 3.11. *Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau n pode ser fatorado na forma $p(x) = c(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$, onde c é um número complexo e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são os zeros de $p(x)$, possivelmente repetidos. Além disso, essa fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. Primeiramente, já vimos que p pode ser fatorado em suas raízes como

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_k)q(x),$$

onde $q(x)$ não possui raízes. Mas pelo Teorema Fundamental da Álgebra, apenas polinômios constantes não têm raízes, então $q(x) = c$, com c sendo um número complexo, e

$$p(x) = c(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_k).$$

Por hipótese temos $gr(p) = n$, então pela propriedade multiplicativa do grau devemos ter n fatores de primeiro grau. Assim, $k = n$ e provamos que p se decompõe no produto de um número complexo e n fatores de primeiro grau, sendo n raízes.

Provemos agora a unicidade da decomposição.

Para isso, vamos supor que $p(x) = c(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$ e $p(x) = d(x - w_1)(x - w_2)\cdots(x - w_n)$.

Calculando o termo de maior grau resultante do produto, na primeira expressão temos cx^n e na segunda expressão temos dx^n. Da igualdade dos polinômios vem $c = d$.

Tomemos agora a igualdade

$$(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) = (x - w_1)(x - w_2)\cdots(x - w_n). \tag{3.4}$$

Tomando $x = z_1$, temos

$$0 = (z_1 - w_1)(z_1 - w_2)\cdots(z_1 - w_n),$$

e pelo menos um dos números $w_1, w_2, \ldots, w_n$ é igual a z_1. Sem perda de generalidade, vamos supor que $w_1 = z_1$. Fazendo essa substituição em (3.4), obtemos

$$(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) = (x - z_1)(x - w_2)\cdots(x - w_n).$$

Para $x \neq z_1$, podemos simplificar o fator $(x - z_1)$ nos dois lados da igualdade, obtendo

$$(x - z_2)\cdots(x - z_n) = (x - w_2)\cdots(x - w_n),$$

O conceito de continuidade de uma função se baseia no conceito de limite da função, o que inicialmente já é avançado. Tratando-se de uma função complexa, é mais avançado ainda.

onde podemos repetir o processo, isto é, tomar $x = z_2$, verificar que algum dos números $w_2, \dots, w_n$ é igual a z_2, voltar à igualdade original e simplificar.

A aplicação desse processo n vezes permite identificar, em cada repetição, um par de raízes iguais z_i e w_j. Note que as ordens que os termos se identificam não é relevante para o resultado final. □

Como um polinômio de grau n pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, costumamos dizer que ele tem n zeros. Porém, isso não significa que há exatamente n números complexos para os quais o polinômio se anula. Como mencionado, os zeros podem aparecer repetidamente.

Agrupando os fatores iguais, podemos fatorar o polinômio complexo como

$$p(x) = c(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2} \cdots (x - z_n)^{m_n}.$$

Nesse caso, diremos que cada raiz z_i tem multiplicidade m_i. Se uma raiz tem multiplicidade 1, dizemos que é uma raiz simples; se tem multiplicidade 2, dizemos que é uma raiz dupla.

Note que na decomposição $p(x) = c(x - z_1)^{m_1}q(x)$, dizemos que z_1 é raiz de multiplicidade m_1 de p se $(x - z_1)^{m_1}$ divide p e $x - z_1$ não divide q.

3.4 Relações de Girard

Uma utilidade da fatoração de polinômios é determinar as relações entre os coeficientes da função polinomial e suas raízes, conhecidas como relações de Girard, batizadas em homenagem ao matemático francês Albert Girard (1595 - 1632).

3.4.1 Polinômio do segundo grau

Consideremos a função polinomial complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$a_2 \neq 0$, e suponhamos que f tem dois zeros complexos, r_1 e r_2, possivelmente repetidos. Utilizando o Teorema 3.11 podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= a_2(x - r_1)(x - r_2) \\ &= a_2x^2 + a_2(-r_1 - r_2)x + a_2r_1r_2, \end{aligned}$$

e comparando esse resultado com a definição do polinômio obtemos o resultado para a soma das raízes

$$\begin{aligned} a_2(-r_1 - r_2) &= a_1 \\ r_1 + r_2 &= -\frac{a_1}{a_2}, \end{aligned}$$

bem como o resultado para o produto

$$\begin{aligned} a_2 r_1 r_2 &= a_0 \\ r_1 r_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Esses resultados são estudados no 9º ano do Ensino Fundamental com o nome de *soma e produto*, mas com uma abordagem diferente. Tal abordagem será apresentada na Subseção 4.2.3.

3.4.2 Polinômio do terceiro grau

Consideremos a função polinomial complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{3.5}$$

$a_3 \neq 0$, com zeros complexos r_1, r_2 e r_3, possivelmente repetidos. Novamente pelo teorema da fatoração do polinômio nas raízes (Teorema 3.11), temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= a_3 x^3 + a_3(-r_1 - r_2 - r_3)x^2 + a_3(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)x - a_3 r_1 r_2 r_3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vamos agora comparar a definição do polinômio em (3.5) com o resultado obtido em (3.6).

Comparando os termos quadráticos, obtemos a soma dos zeros do polinômio:

$$\begin{aligned} a_3(-r_1 - r_2 - r_3) &= a_2 \\ r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{a_2}{a_3}. \end{aligned}$$

Comparando os termos lineares, obtemos a soma dos produtos dos zeros tomados dois a dois:

$$\begin{aligned} a_3(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) &= a_1 \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= \frac{a_1}{a_3}. \end{aligned}$$

Comparando os termos independentes, obtemos o produto dos três zeros:

$$\begin{aligned} -a_3 r_1 r_2 r_3 &= a_0 \\ r_1 r_2 r_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

3.4.3 Polinômio do quarto grau

Antes de seguir para o caso de um polinômio qualquer, consideremos mais esse caso. Analisá-lo pode ser útil para a generalização que virá a seguir.

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio complexo dado por

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{3.7}$$

$a_4 \neq 0$, com zeros complexos r_1, r_2, r_3 e r_4. Mais uma vez pelo Teorema 3.11, podemos fatorar f como $f(x) = a_4(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$, e uma vez feitas as multiplicações chegamos a

$$\begin{aligned} f(x) = a_4x^4 + a_4(-r_1 - r_2 - r_3 - r_4)x^3 + a_4(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 \\ +a_4(-r_1r_2r_3 - r_1r_2r_4 - r_1r_3r_4 - r_2r_3r_4)x + a_4r_1r_2r_3r_4. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Comparando os termos cúbicos obtemos a soma dos zeros do polinômio:

$$\begin{aligned} a_4(-r_1 - r_2 - r_3 - r_4) &= a_3 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= -\frac{a_3}{a_4}. \end{aligned}$$

Comparando os termos quadráticos, obtemos a soma dos zeros multiplicados dois a dois:

$$\begin{aligned} a_4(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) &= a_2 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 &= \frac{a_2}{a_4}. \end{aligned}$$

Comparando os termos lineares, obtemos a soma dos zeros multiplicados três a três:

$$\begin{aligned} a_4(-r_1r_2r_3 - r_1r_2r_4 - r_1r_3r_4 - r_2r_3r_4) &= a_1 \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 &= -\frac{a_1}{a_0}. \end{aligned}$$

Comparando os termos independentes, obtemos o produto dos quatro zeros do polinômio.

$$\begin{aligned} a_4r_1r_2r_3r_4 &= a_0 \\ r_1r_2r_3r_4 &= \frac{a_0}{a_4}. \end{aligned}$$

Sigamos para o caso geral.

3.4.4 Polinômio qualquer

Esta subseção tem como referência o livro Polinômios e equações algébricas (2022) da coleção PROFMAT.

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função polinomial definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com zeros complexos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, possivelmente repetidos. Abreviaremos por $s_k(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ a soma dos zeros multiplicados entre si em grupos com k elementos, isto é,

$$\begin{aligned}
s_1(r_1, \ldots, r_n) &= \sum_{j} r_j = r_1 + r_2 + \cdots + r_n;\\
s_2(r_1, \ldots, r_n) &= \sum_{j_1<j_2} r_{j_1} r_{j_2} = r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_1r_n + r_2r_3 + r_2r_4 + \cdots + r_{n-1}r_n;\\
s_3(r_1, \ldots, r_n) &= \sum_{j_1<j_2<j_3} r_{j_1} r_{j_2} r_{j_3} = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n;\\
&\vdots\\
s_{n-1}(r_1, \ldots, r_n) &= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}} r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_{n-1}} = r_1r_2\cdots r_{n-1} + \cdots + r_2r_3\cdots r_n;\\
s_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) &= r_1r_2\cdots r_n.
\end{aligned}$$

Pela definição, não faria sentido tomarmos $s_0(r_1, \ldots, r_n)$ ou $s_{n+1}(r_1, \ldots, r_n)$. Entretanto, para a propriedade a seguir será necessário definirmos $s_0(r_1, \ldots, r_n) = 1$ e $s_{n+1}(r_1, \ldots, r_n) = 0$.

A demonstração da proposição será feita com indução. Para isso, será necessária a relação $s_{j+1}(r_1, \ldots, r_{n+1}) = s_{j+1}(r_1, \ldots, r_n) + r_{n+1}s_j(r_1, \ldots, r_n)$, isto é,

$$\begin{aligned}
s_1(r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_1(r_1, \ldots, r_n) + r_{n+1};\\
s_2(r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_2(r_1, \ldots, r_n) + s_1(r_1, \ldots, r_n)r_{n+1};\\
s_3(r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_3(r_1, \ldots, r_n) + s_2(r_1, \ldots, r_n)r_{n+1};\\
&\vdots\\
s_n(r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_n(r_1, \ldots, r_n) + s_{n-1}(r_1, \ldots, r_n)r_{n+1};\\
s_{n+1}(r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_n(r_1, \ldots, r_n)r_{n+1}.
\end{aligned}$$

Lema 3.12. *É válido que:*

$$\prod_{j=1}^{n}(x - r_j) = x^n - s_1(r_1, \ldots, r_n)x^{n-1} + s_2(r_1, \ldots, r_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n(r_1, \ldots, r_n).$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre $n \geq 2$.

Para $n = 2$ temos $s_1(r_1, r_2) = r_1 + r_2$ e $s_2(r_1, r_2) = r_1 r_2$. Então

$$\begin{aligned}(x - r_1)(x - r_2) &= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \\ &= x^2 - s_1(r_1, r_2)x + (-1)^2 s_2(r_1, r_2),\end{aligned}$$

logo vale a proposição.

Supondo que a proposição vale para n, vamos desenvolver o produto

$$\prod_{j=1}^{n+1}(x - r_j) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)(x - r_{n+1}).$$

Usando a hipótese da indução para os n primeiros fatores, temos

$$\prod_{j=1}^{n+1}(x - r_j) = [x^n - s_1(r_1, \ldots, r_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(r_1, \ldots, r_n)](x - r_{n+1})$$

que, após as devidas multiplicações, chega a

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n+1}(x - r_j) = x^{n+1} &- [s_1(r_1, \ldots, r_n) + r_{n+1}]x^n + [s_2(r_1, \ldots, r_n) + r_{n+1}s_1(r_1, \ldots, r_n)]x^{n-1} \\ &-[s_3(r_1, \ldots, r_n) + r_{n+1}s_2(r_1, \ldots, r_n)]x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1} r_{n+1} s_n(r_1, \ldots, r_n),\end{aligned}$$

onde podemos aplicar as relações discutidas anteriormente, chegando finalmente ao resultado

$$\prod_{j=1}^{n+1}(x - r_j) = x^{n+1} - s_1(r_1, \ldots, r_{n+1})x^n + \cdots + (-1)^{n+1} s_{n+1}(r_1, \ldots, r_{n+1}).$$

□

Teorema 3.13 (Relações de Girard)**.** *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio complexo definido por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com zeros $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Então*

$$s_j(r_1, \ldots, r_n) = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}, j = 1, \ldots, n.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.11 e pelo Lema 3.12 tem-se

$$\begin{aligned}f(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) \\ &= a_n x^n - a_n s_1(r_1, \ldots, r_n)x^{n-1} + a_n s_2(r_1, \ldots, r_n)x^{n-2} + \cdots + a_n(-1)^n s_n(r_1, \ldots, r_n),\end{aligned}$$

e comparando-se os termos de mesmo grau desse resultado com a definição do polinômio, aos mesmos moldes no que foi desenvolvido nas outras subseções, obtém-se o resultado. □

4 Equações algébricas

Uma equação algébrica, ou equação polinomial, na incógnita x é uma equação que que pode ser reduzida à forma $p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinômio. Dizemos que o grau da equação polinomial é o grau do polinômio p.

Por exemplo, a equação $(x-2)^2 + 3 = 2$ é uma equação polinomial do segundo grau na incógnita x, pois

$$(x-2)^2 + 3 = 2 \iff x^2 - 4x + 5 = 0, \tag{4.1}$$

e o polinômio obtido é do segundo grau. Já a equação $y^4 - 4y^3 + 6y^2 = (y-1)^4$ é uma equação polinomial do primeiro grau na incógnita y, pois

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 = (y-1)^4 \iff 4y - 1 = 0, \tag{4.2}$$

e o polinômio p na expressão $p(y) = 0$ é do primeiro grau.

Quando não há risco de confusão, não declaramos qual é a incógnita da equação. Não é difícil ver que em (4.1) a incógnita é x e em (4.2) a incógnita é y.

Chamamos de *raiz da equação* o valor da incógnita que verifica a igualdade. Por exemplo, a equação (4.1) tem raízes $x_1 = 2 + i$ e $x_2 = 2 - i$, e a equação (4.2) tem raiz $y = \frac{1}{4}$.

Em prol da simplicidade de linguagem, é comum omitirmos a palavra *polinomial*. Por exemplo, falamos "equação do primeiro grau" para nos referirmos a uma equação polinomial do primeiro grau.

A solução de uma equação do primeiro grau é conhecida desde a antiguidade, e consiste basicamente em realizar operações inversas. As soluções das equações do segundo grau eram conhecidas pelos babilônios há 4000 anos (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 45). Eles tratavam somente com coeficientes e resultados positivos (por seu sentido geométrico de comprimento e área) e sabiam os métodos para resolver todos os casos.

Já as equações do terceiro grau só foram completamente compreendidas 2000 anos depois. Essa história se desenvolveu em poucas décadas na Itália Renascentista, e está brevemente resumida na próxima seção. O leitor que se interessar por mais detalhes, como alguns personagens envolvidos que não serão citados aqui ou a notação matemática utilizada à época, pode encontrá-los em Viana (2022) e Viana (2024).

4.1 História das equações cúbicas

Por simplicidade de apresentação, adotaremos aqui a notação algébrica moderna, com p e q representando números positivos.

No começo do século XVI, Scipione Del Ferro (Itália, 1465 - 1526) encontrou a solução geral da equação $x^3 + px = q$, mas nunca publicou o resultado obtido. Ao morrer, legou-o a seu aluno Antonio Maria Del Fiore, que pretendia mantê-lo em segredo.

Aconteceu que outro italiano, Nicolo "Tartaglia" Fontana (1500 - 1557), chegou independentemente ao mesmo resultado. Surgiu, assim, uma rivalidade entre Tartaglia e Del Fiore. Tal rivalidade culminou em um duelo matemático (prática comum na época), marcado para 22 de fevereiro de 1535.

Tartaglia fora mais longe que Del Ferro na solução de equações cúbicas. Além de resolver equações do tipo $x^3 + px = q$ ele também encontrara a solução para equações do tipo $x^3 + px^2 = q$. Ele registrou em seu diário tal solução encontrada no dia 14 de fevereiro, uma semana antes do duelo.

Naturalmente, Tartaglia venceu a disputa, afinal ele sabia resolver mais casos que Del Fiore. A partir daí sua carreira profissional deslanchou. Já para Del Fiore, esse episódio marca o fim de sua carreira, com um baque em sua reputação e a perda de seu emprego.

Outro prodigioso matemático da época foi Gerônimo Cardano, já citado na Seção 2.1, que trata da história dos números complexos. Ele solicitou a Tartaglia que lhe revelasse o segredo da solução da equação cúbica. Tais pedidos tiveram respostas negativas.

Após muita insistência de Cardano, em 1539 Tartaglia viaja até Milão (onde Cardano morava), e concorda em lhe entregar a solução da equação cúbica em troca de uma carta de apresentação a um marquês local e da promessa de Cardano (jurada sobre a Bíblia) de nunca a publicar. Tartaglia então entregou, na forma de poema, a solução das equações $x^3 + px = q$ e $x^3 + q = px$.

Porém, chegou ao conhecimento de Cardano que a solução das equações cúbicas havia sido encontrada primeiro por Del Ferro, e transmitida por ele a Del Fiore. Cardano procurou Del Fiore, que lhe mostrou as anotações de seu professor. Assim, Cardano se sentiu isento da necessidade de guardar o segredo sobre tal solução. Afinal, Del Ferro encontrara a solução ainda antes de Tartaglia.

Em 1545, Cardano publicou em seu livro *Artis Magnae* a solução da equação $x^3 + px = q$, dando o crédito da descoberta a Scipione Del Ferro, e da equação quártica, dando o crédito a Ludovico Ferrari (que era seu pupilo).

Tartaglia se sentiu traído, pois Cardano havia jurado não publicar a solução da equação cúbica. Após uma série de troca de farpas, Tartaglia e Ferrari, díscipulo de Cardano, se enfrentaram em outro duelo matemático, em 10 de agosto de 1548 na cidade de Milão (onde Ferrari residia). Tartaglia viajou acompanhado somente por seu irmão, e Ferrari estava acompanhado por muitos simpatizantes. Os torcedores de Ferrari fizeram confusão, dificultando as falas de Tartaglia. Ao final da primeira noite do confronto, Tartaglia e seu irmão fugiram de volta para Bréscia, temendo por suas vidas. Ele foi declarado perdedor do duelo por desistência, e perdeu seu emprego como professor.

4.2 Equações quadráticas

Uma equação na incógnita x é dita quadrática quando existem números complexos a, b, c, com $a \neq 0$, tais que a equação é equivalente a $ax^2 + bx + c = 0$.

Quando $b = 0$ temos um caso particular com solução conhecida. Consideremos, por exemplo, a equação $3x^2 - 18 = 0$.

$$\begin{aligned}
3x^2 - 18 = 0 &\iff 3x^2 = 18 \\
&\iff x^2 = \frac{18}{3} \\
&\iff x^2 = 6 \\
&\iff x = \pm\sqrt{6} \\
&\iff x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Consideremos agora o exemplo $4y^2 + 9 = 0$. Sua solução será

$$\begin{aligned}
4y^2 + 9 = 0 &\iff y^2 = -\frac{9}{4} \\
&\iff y = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}} \\
&\iff y = \pm\frac{3}{2}i.
\end{aligned}$$

De modo mais geral, para uma equação do tipo $ax^2 + c = 0$, as soluções complexas são dadas por

$$\begin{aligned}
ax^2 + c = 0 &\iff x^2 = -\frac{c}{a} \\
&\iff x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.
\end{aligned}$$

Em equações completas, um método comumente utilizado é completar um trinômio quadrado perfeito. Neste trabalho, entretanto, adotaremos outras duas abordagens: a primeira é geométrica (e está relacionada ao completamento do trinômio quadrado), a segunda é uma troca de variáveis (que está mais próxima daquela que utilizaremos nas equações cúbicas).

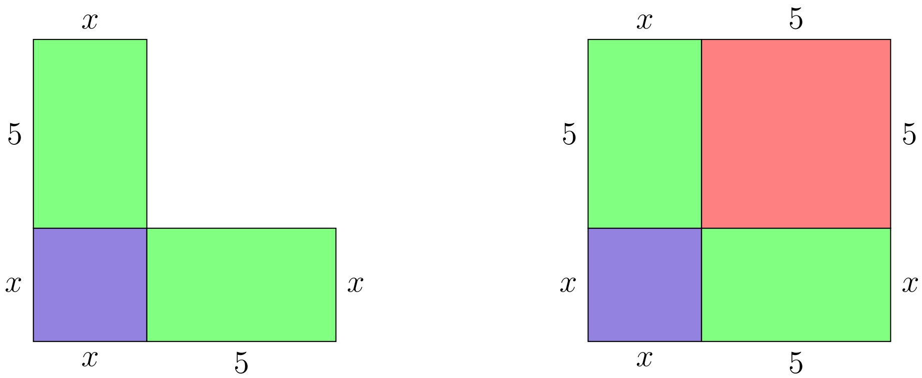
4.2.1 Solução geométrica

A abordagem defendida nesta subseção é apresentada (e também defendida) por Viana (2022), e pode ser encontrada de forma quase idêntica em Viana (2024). O método será ilustrado por dois exemplos.

O primeiro exemplo é a equação $x^2 + 10x = 39$. Geometricamente, x^2 representa a área de um quadrado de lado x, representado em azul na Figura 18a. Já a parcela $10x$ pode ser dividida em duas partes iguais (cada uma igual a $5x$), representadas em verde na Figura 18a como as áreas de retângulos de lados 5 e x. Pelo representado na Figura 18a, a soma das áreas azul e verde é igual a 39, pois a equação é $x^2 + 10x = 39$.

Podemos acrescentar um quadrado adjacente às duas áreas verdes. Esse quadrado terá lados com medidas iguais a 5, de modo que sua área terá medida 25. Ele se encontra representado em vermelho na Figura 18b.

Na Figura 18b temos um grande quadrado cujo lado tem medida $x + 5$. A área desse quadrado tem medida 64, pois começamos com as áreas azul e verde (que somam 39) e acrescentamos a elas a área vermelha (de medida 25). Como o quadrado tem área igual a 64, seu lado tem medida de $\sqrt{64} = 8$. E como o lado tem medida $x + 5$, temos $x + 5 = 8$, e concluímos que $x = 3$.



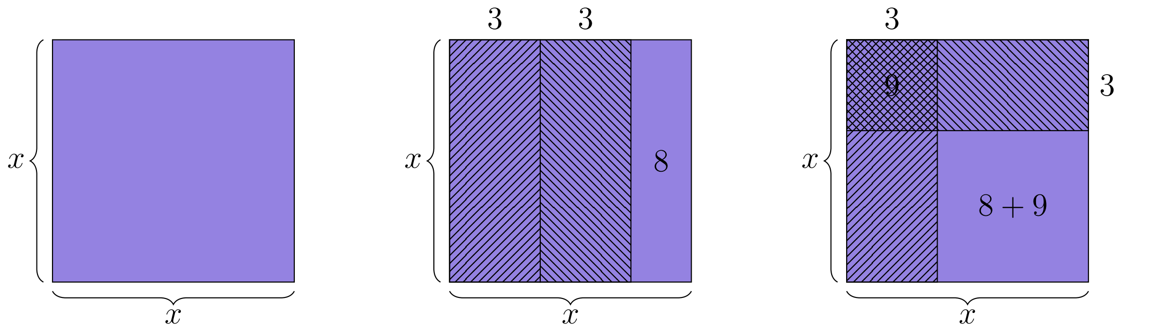
(a) Representação geométrica de $x^2 + 10x = 39$

(b) Representação geométrica de $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

Figura 18 – Solução geométrica do primeiro exemplo

O segundo exemplo, ligeiramente diferente do primeiro, é a equação $x^2 - 6x = 8$. De modo similar ao feito no exemplo anterior, x^2 é representado geometricamente pela área de um quadrado de lado x, em azul na Figura 19a, e $6x$ será dividido em dois retângulos com medidas 3 e x, hachurados na Figura 19b. A diferença desse exemplo para o anterior é que, nesse caso, a área desses dois retângulos deve ser subtraída da área do quadrado azul, e a área remanescente é igual a 8, conforme ilustra a Figura 19b.

Na Figura 19b, a área com medida igual a 8 tem o formato retangular; convém reorganizar a figura, para que ela passe a ser um quadrado. Para isso, podemos reorientar



(a) Representação geométrica de x^2

(b) Representação geométrica de $x^2 - 6x = 8$

(c) Representação geométrica de $x^2 - 6x + 9 = 8 + 9$

Figura 19 – Solução geométrica do segundo exemplo

o segundo retângulo de área $3x$ conforme a Figura 19c. É necessário observar que ao fazer isso surge uma área duplamente hachurada, pois está contida nas áreas dos dois retângulos. Essa área corresponde a um quadrado de lado 3, sendo igual a 9.

Da área do quadrado de lado x, subtraímos duas vezes a área $3x$; como o quadrado de área 9 foi subtraído duas vezes, a área restante aumentou em 9 unidades.

Assim, a área restante corresponde a um quadrado de área igual a 17, de modo que seu lado tem medida de $\sqrt{17}$. E essa área corresponde a um quadrado de lado $x - 3$, então $x - 3 = \sqrt{17}$, logo $x = 3 + \sqrt{17}$.

A solução geométrica de uma equação quadrática possui a enorme vantagem de dar sentido à solução: mesmo que o estudante decore os passos para os reproduzir, em cada etapa ele pode ver o resultado obtido e precisa refletir sobre ele. Outra vantagem é o estímulo à criatividade matemática para resolver problemas, pois cada caso precisa de uma abordagem própria.

Por outro lado, ela apresenta algumas desvantagens. Uma delas é estar restrita a soluções positivas. O primeiro exemplo tem uma solução igual a -13 e o segundo tem uma igual a $3 - \sqrt{17}$, que não podem ser obtidas geometricamente. E em equações que não tenham soluções reais, como $x^2 + 4x + 5 = 0$, não podemos determinar nenhuma das soluções. Outra desvantagem é a dificuldade de generalização do resultado. Os resultados podem ser generalizados em cada caso, mas geometricamente não é possível reunir todos em uma solução universal. Como exemplo disso, basta observar que na segunda equação resolvida foi feita a suposição tácita de $x > 6$ (ver Figura 19b). Caso tivéssemos $x \leq 6$, a figura construída e o raciocínio desenvolvido seriam diferentes.

Uma forma alternativa para resolver as equações quadráticas que supera essas desvantagens é apresentada na subseção a seguir.

4.2.2 Solução por troca de variáveis

Antes de proceder à solução geral, vamos desenvolver um exemplo: resolver a equação $x^2 - 2x - 2 = 0$. Para isso, faremos a substituição $x = y + \lambda$, em que λ é uma constante real. Devemos escolher λ de forma conveniente, com o objetivo de anular o termo linear, isto é, fazer o coeficiente b ser igual a zero.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 2 = 0 &\iff (y+\lambda)^2 - 2(y+\lambda) - 2 = 0 \\ &\iff y^2 + 2\lambda y + \lambda^2 - 2y - 2\lambda - 2 = 0 \\ &\iff y^2 + (2\lambda - 2)y + \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Na equação (4.3) desejamos ter $2\lambda - 2 = 0$, logo $\lambda = 1$. A substituição que convém fazer é $x = y + 1$. Ao realizar tal substituição na equação original, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 2 = 0 &\iff (y+1)^2 - 2(y+1) - 2 = 0 \\ &\iff y^2 + 2y + 1 - 2y - 2 - 2 = 0 \\ &\iff y^2 - 3 = 0 \\ &\iff y = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, recordemos que a equação a ser resolvida é $x^2 - 2x - 2 = 0$, isto é, desejamos determinar x para que valha a igualdade. Nesse processo fizemos a substituição $x = y + 1$ (equivalentemente temos $y = x - 1$) e concluímos que $y = \pm\sqrt{3}$. Assim, temos

$$\begin{array}{ccc} y = \sqrt{3} & \text{ou} & y = -\sqrt{3} \\ x - 1 = \sqrt{3} & \text{ou} & x - 1 = -\sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} & \text{ou} & x = 1 - \sqrt{3}\ . \end{array}$$

Concluído esse exemplo, investiguemos o caso geral. Seja uma equação quadrática na incógnita x dada por

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{4.4}$$

com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Uma primeira ideia é obter uma equação equivalente com termo dominante igual a 1, o que deve facilitar o trabalho. Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade em (4.4) por a, obtendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Por simplicidade de notação, sejam $p = \frac{b}{a}$ e $q = \frac{c}{a}$. Assim, a equação é reduzida a

$$x^2 + px + q = 0. \tag{4.5}$$

Façamos a substituição $x = y + \lambda$, de modo a anular o termo linear. Note que ao substituir no primeiro termo teremos $(y + \lambda)^2$, cujo termo linear é $2\lambda y$, e ao substituir no segundo termo teremos $p(y+\lambda)$, cujo termo linear é py. Para que $2\lambda y + py = 0$ devemos ter $\lambda = -\frac{p}{2}$. Voltemos a (4.5) e façamos a substituição $x = y - \frac{p}{2}$.

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 \\
\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(y - \frac{p}{2}\right) + q &= 0 \\
y^2 - py + \frac{p^2}{4} + py - \frac{p^2}{2} + q &= 0 \\
y^2 - \frac{p^2}{4} + q &= 0 \\
y^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\
y^2 &= \frac{p^2 - 4q}{4} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} \\
y &= \pm\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}
\end{aligned}$$

Voltando à incógnita original, de $x = y - \frac{p}{2}$ temos $y = x + \frac{p}{2}$. Então o resultado é

$$\begin{aligned}
x + \frac{p}{2} &= \pm\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\
x &= \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).
\end{aligned}$$

Por fim, lembre que começamos com a equação $ax^2 + bx + c = 0$, e que fizemos $p = \frac{b}{a}$ e $q = \frac{c}{a}$. Substituindo p e q, podemos concluir com

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}\right) \tag{4.6}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right) \tag{4.7}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4.8}$$

É importante observar um detalhe na passagem de (4.6) para (4.7). Ali foi adotado $\sqrt{a^2} = a$, o que não é preciso matematicamente. Se $a \in \mathbb{R}^*$, então $\sqrt{a^2} = |a|$, isto é, se $\sqrt{a^2} = a$ caso a seja um número positivo e $\sqrt{a} = -a$ se a é um número negativo. Ambos os casos chegam à mesma solução final (4.8), pela simetria entre as operações de adição e subtração em frente ao radical.

E se $a \notin \mathbb{R}$, a definição de módulo é um pouco mais trabalhosa de lidar, mas ainda tem-se $\sqrt{a^2} = a$ e $\sqrt{a^2} = -a$, sendo que o sinal é uma convenção. Assim, o resultado final se mantém.

O resultado em (4.8), utilizado para resolver equações quadráticas, é conhecido por *fórmula quadrática*. No Brasil é popularmente conhecido como *fórmula de Bhaskara*, em homenagem a um matemático hindu que a publicou em sua obra *Lilavati* no século XII.

É importante notar que na mesma expressão há, na verdade, duas igualdades. Poderíamos ter escrito que os valores complexos de x são dados por $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Note também que é possível resolver uma equação quadrática simplesmente seguindo o método, em vez de aplicar a fórmula. Adotar um método para resolver, em vez de aplicar uma fórmula pronta, não é algo extraordinário na matemática. É assim que resolvemos equações do primeiro grau, equações biquadradas, equações irracionais e equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, por exemplo. Para as equações quadráticas, podemos considerar a forma $x^2 + px + q = 0$ (caso o coeficiente de x^2 seja diferente de 1, basta dividir os dois lados da igualdade por tal número). Então

1. fazer a substituição $x = y - \frac{p}{2}$, de modo a anular o termo linear;
2. resolver a equação obtida;
3. fazer a substituição inversa à do primeiro item, $y = x + \frac{p}{2}$;
4. fazer as operações finais para obter os valores de x.

4.2.3 Soma e produto

A soma e o produto das raízes de uma equação quadrática constituem o caso inicial do estudo das relações de Girard. Elas já foram discutidas no capítulo anterior, porém com uma abordagem diferente. Aqui, elas serão desenvolvidas com um viés mais próximo àquele que é adotado no 9º ano do Ensino Fundamental.

Se $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, então a soma das raízes é

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

e o produto das raízes é

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Particularmente, se $a = 1$ a soma das raízes é o coeficiente b com o sinal trocado e o produto é igual ao coeficiente c, isto é, a equação pode ser escrita como $x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2) = 0$.

Esse fato é bastante explorado na Educação Básica de duas maneiras diferentes. A primeira maneira é determinar as raízes de uma equação. Por exemplo, dada a equação $x^2 - 9x + 14 = 0$, suas raízes são os números cuja soma é igual a 9 e o produto é igual a 14. Não há dificuldade em perceber que tais números são 2 e 7.

Outra maneira de usar a soma e o produto é para montar equações. Isso é bastante útil para professores. Ao montar uma equação quadrática com coeficientes inteiros escolhidos aleatoriamente, as raízes podem ser irracionais. Por exemplo, na equação $x^2 - 3x - 1 = 0$, as raízes são $x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$, o que não é um exemplo simples para os alunos resolverem. Como montar um exemplo mais simples, então? O professor primeiro escolhe as raízes, depois monta a equação a partir da sua soma e do seu produto. Por exemplo, se quiser uma equação com raízes 4 e 6, é necessário observar que sua soma é 10 e seu produto é 24. Assim, a equação quadrática será $x^2 - 10x + 24 = 0$.

Esse raciocínio é útil para a solução de equações cúbicas, como será mostrado na próxima seção.

4.3 Equações cúbicas

A principal referência para a essa seção é o livro Polinômios e equações algébricas (2022) da coleção PROFMAT.

Uma equação é cúbica quando existem $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tais que a equação é equivalente a

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Nesta seção será discutida a solução de tal tipo de equação. Primeiro analisaremos um caso particular, seguindo para o método em um caso geral, concluindo com a fórmula.

Em muitos contextos na matemática, antes de abordar um problema de modo geral começamos a estudar alguns casos particulares. É o que fazemos, por exemplo, no estudo das equações quadráticas no 9º ano do Ensino Fundamental: começamos pelos casos em que algum dos coeficientes b ou c é zero, para só então seguir para as equações completas. Outro exemplo é o estudo do teorema de Pitágoras (caso particular) que antecede o estudo da lei dos cossenos (caso geral).

A vantagem de abordar o problema a partir de casos particulares é que a solução do caso particular é mais simples, e nesse processo podemos desenvolver um pouco da teoria que posteriormente será útil para o caso geral. Resolver um caso particular não é um fim em si, mas um meio para um fim.

Antes de abordarmos as equações propriamente ditas, recordemos alguns pontos da teoria já desenvolvida neste trabalho. Na última seção do Capítulo 2 foi estudado o cálculo de raízes no conjunto dos números complexos. Foi mostrado que todas as raízes de um número complexo qualquer podem ser obtidas a partir do produto de uma raiz particular (w_0) pelas raízes n-ésimas da unidade (ω^k), vide Observação 2.9. Falando especificamente de raízes cúbicas, temos $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ como a raiz cúbica primitiva da unidade. Para obter $\sqrt[3]{-8}$, por exemplo, temos três valores: $w_0 = -2$ (raiz particular), $w_1 = w_0\omega = 1 - \sqrt{3}i$ e $w_2 = w_0\omega^2 = 1 + \sqrt{3}i$.

Além disso, conforme o Teorema Fundamental da Álgebra, discutido no Capítulo 3, uma equação cúbica deve ter exatamente 3 raízes complexas.

4.3.1 O caso particular

O primeiro caso a ser resolvido é a equação que não tem o termo do segundo grau. Antes de demonstrar a fórmula, tomemos como exemplo a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0, \tag{4.9}$$

resolvida por Cardano no século XVI. Para isso, faremos a substituição $x = u + v$, obtendo

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 &= 0 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15u - 15v - 4 &= 0 \\ u^3 + v^3 - 4 + 3uv(u+v) - 15(u+v) &= 0 \\ (u^3 + v^3 - 4) + (u+v)(3uv - 15) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos verificar a igualdade final fazendo $u^3 + v^3 = 4$ e $uv = 5$. Elevando os dois lados da segunda igualdade ao cubo, obtemos $u^3v^3 = 125$, e assim concluímos que cada solução (u, v) do sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3v^3 = 125 \end{cases} \tag{4.10}$$

nos fornece uma solução da equação original.

No sistema em (4.10) u^3 e v^3 são números tais que sua soma é 4 e seu produto é 125. Assim, esses números são raízes da equação quadrática $z^2 - 4z + 125 = 0$. Pela fórmula quadrática, essa equação tem raízes $z_1 = 2 + 11i$ e $z_2 = 2 - 11i$.

Como u e v são indistinguíveis no sistema (4.10), podemos adotar $u^3 = 2 + 11i$ e $v^3 = 2 - 11i$. Segue que $u = \sqrt[3]{z_1}$ e $v = \sqrt[3]{z_2}$. Conforme a Seção 2.5.5, $\sqrt[n]{z} = w$ equivale a $w^n = z$. Assim, por simplicidade, representaremos a raiz particular[1] u_1 de z_1 como $\sqrt[3]{z_1}$, isto é, $u_1 = \sqrt[3]{z_1}$. Para o que segue, não é necessário explicitar u_1 na forma algébrica (ou na forma polar). Como consequência (conforme Observação 2.9), as demais raízes cúbicas de z_1 são dadas por $u_2 = u_1\omega$ e $u_3 = u_1\omega^2$, em que $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ é a raiz cúbica primitiva da unidade (o que implica que $\omega^3 = 1$).

Pelo desenvolvido,

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{2 + 11i}, \\ u_2 &= \omega\sqrt[3]{2 + 11i} \text{ e} \\ u_3 &= \omega^2\sqrt[3]{2 + 11i}. \end{aligned}$$

Analogamente, as raízes cúbicas de z_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt[3]{2 - 11i}, \\ v_2 &= \omega^2\sqrt[3]{2 - 11i} \text{ e} \\ v_3 &= \omega\sqrt[3]{2 - 11i}. \end{aligned}$$

A escolha das combinações entre as raízes u e v multiplicadas pelas raízes da unidade é feita levando em consideração que devemos ter $uv = 5$ (ou, de modo equivalente, $u^3v^3 = 125$). Com isso, temos os pares de soluções (u_1, v_1), (u_2, v_2) e (u_3, v_3).

Por fim, como a solução da equação (4.9) é $x = u + v$, obtemos três soluções:

$$\begin{aligned} x_1 = &\quad u_1 + v_1 = &\quad \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \\ x_2 = &\quad u_2 + v_2 = &\quad \omega\sqrt[3]{2 + 11i} + \omega^2\sqrt[3]{2 - 11i} \text{ e} \\ x_3 = &\quad u_3 + v_3 = &\quad \omega^2\sqrt[3]{2 + 11i} + \omega\sqrt[3]{2 - 11i}. \end{aligned}$$

Com o método dado, podemos seguir para a dedução da fórmula de Cardano, para resolver a equação

$$x^3 + px + q = 0. \tag{4.11}$$

[1] No cálculo de n raízes complexas, adotamos a notação com os índices variando de 0 a $n - 1$; por outro lado, ao resolver equações polinomiais de grau n, costumamos adotar os índices de 1 a n.

Fazendo a substituição $x = u + v$, obtemos

$$\begin{aligned}(u+v)^3 + p(u+v) + q &= 0\\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q &= 0\\ u^3 + v^3 + q + 3uv(u+v) + p(u+v) &= 0\\ (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv + p) &= 0,\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade é verificada se $u^3 + v^3 = -q$ e $uv = -\frac{p}{3}$, que implica em $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Assim, as soluções (u, v) do sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \tag{4.12}$$

nos fornecem, em função de p e q, os valores de u e v que satisfazem a equação (4.11).

Pelas equações do sistema (4.12) vemos que u^3 e v^3 são números tais que sua soma é igual a $-q$ e seu produto é igual a $-\frac{p^3}{27}$. Assim, eles são raízes da equação quadrática

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Da já conhecida fórmula quadrática, as raízes dessa equação, e portanto valores de u^3 e v^3, são

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

E como u e v são indistinguíveis no sistema (4.12), sem perda de generalidade podemos tomar $u^3 = z_1$ e $v^3 = z_2$. Segue que $u = \sqrt[3]{z_1}$ e $v = \sqrt[3]{z_2}$, logo temos três valores complexos distintos para u e três valores complexos distintos para v. Lembrando que $uv = -\frac{p}{3}$, teremos os três pares de soluções

- $u_1 = \sqrt[3]{z_1}$ e $v_1 = \sqrt[3]{z_2}$, pois $u_1v_1 = \sqrt[3]{z_1z_2} = -\frac{p}{3}$;
- $u_2 = \omega\sqrt[3]{z_1}$ e $v_2 = \omega^2\sqrt[3]{z_2}$, pois $u_2v_2 = \omega^3\sqrt[3]{z_1z_2} = -\frac{p}{3}$;
- $u_3 = \omega^2\sqrt[3]{z_1}$ e $v_3 = \omega\sqrt[3]{z_2}$, pois $u_3v_3 = \omega^3\sqrt[3]{z_1z_2} = -\frac{p}{3}$.

Aqui, novamente $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ é a raiz cúbica primitiva da unidade, o que implica em $\omega^3 = 1$.

Com os valores de u e v obtemos as soluções da equação cúbica (4.11):

$$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{4.13}$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e}$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ao apresentar tais fórmulas, podem ser feitas as substituições $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, bem como explicitar u_1 e v_1 na sua forma algébrica. Como Cardano foi o primeiro a publicar a fórmula resolvente da equação cúbica, essas fórmulas levam seu nome.

Conhecida a solução do caso particular, podemos seguir para a solução de uma equação cúbica completa na próxima subseção.

4.3.2 O caso geral

Para resolver uma equação do tipo

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{4.14}$$

a abordagem adotada será reduzir esse problema ao caso já conhecido, isto é, anular o termo quadrático. Para isso, faremos a troca de variáveis $x = y + \lambda$, escolhendo λ de modo que seja conveniente. Fazendo a substituição, obtemos

$$a(y+\lambda)^3 + b(y+\lambda)^2 + c(y+\lambda) + d = 0.$$

Busquemos o termo quadrático na variável y. Do primeiro produto notável obtemos $3a\lambda y^2$, e do segundo obtemos by^2. Assim, para que na equação obtida possamos anular o termo quadrático, devemos ter $3a\lambda + b = 0$, logo $\lambda = -\frac{b}{3a}$.

Assim, para resolver uma equação completa basta fazer a substituição

$$x = y - \frac{b}{3a},$$

aplicar as fórmulas (ou o método) de Cardano na equação obtida, e finalmente fazer a substituição inversa para retornar à variável original.

Por exemplo, tomemos a equação $x^3 + 6x^2 - 3x - 12 = 0$. Ao fazer a substituição $x = y - 2$, chegamos à equação $y^3 - 15y + 10 = 0$, cujas raízes podem ser obtidas pelas fórmulas de Cardano:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-5+10i} + \sqrt[3]{-5-10i},\\
y_2 &= \omega\sqrt[3]{-5+10i} + \omega^2\sqrt[3]{-5-10i} \text{ e}\\
y_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-5+10i} + \omega\sqrt[3]{-5-10i}.
\end{aligned}$$

E como $x = y - 2$, as soluções para a incógnita x são

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-5+10i} + \sqrt[3]{-5-10i} - 2,\\
x_2 &= \omega\sqrt[3]{-5+10i} + \omega^2\sqrt[3]{-5-10i} - 2 \text{ e}\\
x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-5+10i} + \omega\sqrt[3]{-5-10i} - 2.
\end{aligned}$$

4.3.3 A fórmula completa

Obter uma fórmula para resolver a equação cúbica completa é mais uma questão de curiosidade matemática que praticidade. Em geral, costuma ser mais fácil aplicar o método descrito há pouco que a fórmula em si. Ainda assim, a curiosidade matemática é justificativa suficiente para desenvolver tal fórmula.

Consideremos novamente a equação cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

e façamos a troca de variáveis $x = y - \frac{b}{3a}$. Desenvolvendo todas as operações e dividindo a equação final por $a \neq 0$, obtemos

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0,$$

que pode ser resolvida pelas fórmulas de Cardano, tomando $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$. Substituindo essas expressões nas fórmulas, e lembrando que $x = -\frac{b}{3a} + y$, chegamos a

$$\begin{aligned}
x_1 = -\frac{b}{3a} &+ \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} + \sqrt{-\frac{b^2c^2}{108a^4} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{d^2}{4a^2}}}\\
&+ \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} - \sqrt{-\frac{b^2c^2}{108a^4} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{d^2}{4a^2}}},
\end{aligned}$$

e as outras raízes podem ser obtidas multiplicando os radicais por $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, sendo

$$\begin{aligned}
x_2 = -\frac{b}{3a} &+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} + \sqrt{-\frac{b^2c^2}{108a^4} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{d^2}{4a^2}}}\\
&+ \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} - \sqrt{-\frac{b^2c^2}{108a^4} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{d^2}{4a^2}}},
\end{aligned}$$

e finalmente

$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} + \sqrt{-\frac{b^2c^2}{108a^4} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{d^2}{4a^2}}}$$
$$+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} - \sqrt{-\frac{b^2c^2}{108a^4} + \frac{b^3d}{27a^4} - \frac{bcd}{6a^3} + \frac{c^3}{27a^3} + \frac{d^2}{4a^2}}}.$$

Na próxima subseção daremos um passo além, abordando as equações quárticas.

4.4 Equações quárticas

As principais referências para a escrita dessa seção foram Hefez e Villela (2022), Curti (2015) e Hennemann (2021).

Dizemos que uma equação é quártica, ou do quarto grau, quando existem $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ tais que a equação é equivalente a

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

onde $a \neq 0$ e e representa um número qualquer, não necessariamente a constante de Euler.

A partir da solução da equação cúbica, fornecida por Tartaglia, Cardano fez avanços além do que o primeiro havia feito. Entre esses avanços, está a solução da equação quártica, publicada por ele no *Artis Magnae* atribuindo os créditos a seu aluno, Ludovico Ferrari.

A solução de uma equação quártica no século XVI representa um avanço digno de nota. Já foi mencionado neste trabalho que os matemáticos renascentistas tratavam equações sob uma linguagem geométrica, influenciados pela tradição helenística. Resolviam equações quadráticas completando um quadrado, e equações cúbicas completando um cubo. Entretanto, que não há uma representação geométrica para uma equação quártica. Assim, a obra *Artis Magnae* (a "Arte Maior", em tradução livre) representa uma ruptura epistemológica na matemática por ser um tratado de álgebra em si, como uma área própria.

A ideia geral para resolver a equação quártica é completar dois trinômios quadrados perfeitos. Analisemos um quadrado da soma do tipo

$$(x^2 + b)^2 = x^4 + 2bx^2 + b^2. \tag{4.15}$$

Nele, temos a variável x no quarto grau, como desejamos. Porém não figura o termo de terceiro grau. O primeiro passo é, portanto, anular o termo do terceiro grau. Cardano já sabia fazer isso, então o procedimento era destinado a resolver a equação quártica incompleta.

Seja

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \tag{4.16}$$

uma equação quártica. Fazendo a substituição $x = y + \lambda$, a equação assume a forma

$$a(y+\lambda)^4 + b(y+\lambda)^3 + c(y+\lambda)^2 + d(y+\lambda) + e = 0,$$

onde temos interesse de anular o termo do terceiro grau na variável y. No desenvolvimento do primeiro binômio, tal termo será $4a\lambda y^3$. No desenvolvimento do segundo binômio, ele será by^3. Para anular o termo $(4a\lambda + b)y^3$, devemos adotar $\lambda = -\frac{b}{4a}$. Portanto, a substituição que convém fazer é

$$x = y - \frac{b}{4a}.$$

Antes de desenvolvermos o método de forma geral, façamos um exemplo para dar luz às ideias. Considere a equação

$$x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 16x + 26 = 0. \tag{4.17}$$

O primeiro passo é anular o termo cúbico, o que pode ser feito através da substituição

$$x = y + 2.$$

Desenvolvendo as operações, (4.17) se reduz a

$$y^4 - 9y^2 - 20y + 6 = 0, \tag{4.18}$$

onde buscaremos completar os dois trinômios quadrados perfeitos. Reorganizemos a igualdade em (4.18) em busca desse objetivo: do lado esquerdo da igualdade, um trinômio da mesma forma de (4.15) e no lado direito um trinômio usual. Teremos

$$y^4 - 9y^2 + 6 = 20y \tag{4.19}$$

$$y^4 + \alpha y^2 - 9y^2 + 6 + \beta = \alpha y^2 + 20y + \beta \tag{4.20}$$

$$y^4 + (\alpha - 9)y^2 + (6+\beta) = \alpha y^2 + 20y + \beta, \tag{4.21}$$

onde em (4.19) o termo $20y$ foi separado, pois não há termo linear no produto notável do tipo (4.15). Na passagem de (4.19) para (4.20) os termos αy^2 e β foram acrescentados para completar o trinômio no segundo membro da equação.

Desejamos determinar quais são os números α e β, ambos não nulos, para termos os trinômios. Feito isso, poderemos fatorar as expressões e calcular a raiz quadrada nos dois lados da igualdade.

As expressões nos dois lados da igualdade em (4.21) são trinômios na variável y. Para que esses trinômios sejam quadrados perfeitos, ambos os discriminantes devem ser iguais a zero. Na expressão do lado direito, temos

$$400 - 4\alpha\beta = 0$$

$$\beta = \frac{100}{\alpha}.$$

Susbtituindo esse resultado no cálculo do outro discriminante, teremos

$$\begin{aligned}(\alpha-9)^2-4(6+\beta)&=0\\(\alpha-9)^2-4\left(6+\frac{100}{\alpha}\right)&=0\\\alpha^2-18\alpha+81-24-\frac{400}{\alpha}&=0\\\alpha^3-18\alpha^2+57\alpha-400&=0,\end{aligned}$$

que é uma equação cúbica, já resolvida. Não é necessário determinar todas as raízes: basta um par de valores (α,β) para podermos fatorar as expressões em (4.21) como trinômios quadrados perfeitos.

Neste caso, uma solução será $\alpha=16$, que implica em $\beta=\frac{25}{4}$. Substituindo esses valores em (4.21) teremos

$$\begin{aligned}y^4+7y^2+\frac{49}{4}&=16y^2+20y+\frac{25}{4}\\\left(y^2+\frac{7}{2}\right)^2&=\left(4y+\frac{5}{2}\right)^2\\\sqrt{\left(y^2+\frac{7}{2}\right)^2}&=\sqrt{\left(4y+\frac{5}{2}\right)^2}\\\left|y^2+\frac{7}{2}\right|&=\left|4y+\frac{5}{2}\right|,\end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}y^2+\frac{7}{2}=4y+\frac{5}{2}&\quad\text{ou}\quad y^2+\frac{7}{2}=-4y-\frac{5}{2}\\y^2-4y+1=0&\quad\text{ou}\quad y^2+4y+6=0\\y=2\pm\sqrt{3}&\quad\text{ou}\quad y=-2\pm\sqrt{2}i.\end{aligned}$$

Por fim, precisamos retornar à variável original. Como $x=y+2$, temos as quatro raízes complexas: $x_1=4+\sqrt{3}$, $x_2=4-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{2}i$ e $x_4=-\sqrt{2}i$.

4.4.1 Solução geral - o método de Ferrari

Dada a equação quártica

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

fazendo a substituição $x=y-\frac{b}{4a}$ e desenvolvendo as operações, chegamos a

$$y^4+\left(\frac{3b^2}{8a^3}-\frac{3b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)y^2+\left(\frac{b^3}{8a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a}\right)y+\left(-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{e}{a}\right)=0.$$

Por simplicidade de notação, consideremos os coeficientes como p, q e r, de modo que a equação assuma a forma $y^4+py^2+qy+r=0$.

Reorganizando a equação para encontrarmos os dois trinômios quadrados perfeitos, teremos

$$\begin{aligned} y^4 + py^2 + qy + r &= 0 \\ y^4 + py^2 + r &= -qy \\ y^4 + \alpha y^2 + py^2 + r + \beta &= \alpha y^2 - qy + \beta \\ y^4 + (\alpha + p)y^2 + (r + \beta) &= \alpha y^2 - qy + \beta \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde os termos αy^2 e β foram adicionados para completar os trinômios.

Para que os trinômios obtidos sejam quadrados perfeitos, ambos os discriminantes devem ser iguais a zero. Assim,

$$\begin{aligned} (-q)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \beta &= 0 \\ q^2 - 4\alpha\beta &= 0 \\ \beta &= \frac{q^2}{4\alpha} \end{aligned}$$

que iremos substituir em

$$\begin{aligned} (\alpha + p)^2 - 4(r + \beta) &= 0 \\ (\alpha + p)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) &= 0 \\ \alpha^2 + 2p\alpha + p^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} &= 0 \\ \alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 &= 0, \end{aligned}$$

onde chegamos a uma equação cúbica, cuja solução é conhecida.

Uma vez determinado o valor de α, temos $\beta = \frac{q^2}{4\alpha}$, e a expressão em (4.22) possui dois trinômios quadrados perfeitos. A partir daí eles podem ser fatorados, e calculada a raiz quadrada nos dois lados da igualdade, chega-se aos valores de y. Por fim, basta voltar à incógnita original.

4.4.2 A fórmula resolvente da equação quártica

Assim como para a equação cúbica, a fórmula da equação quártica não representa uma simplicidade no cálculo. Determinar tal fórmula é, sobretudo, uma questão de curiosidade matemática.

Dada a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

definimos os parâmetros

- $p = \dfrac{3b^2}{8a^2} - \dfrac{3b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}$,

- $q = \dfrac{b^3}{8a^3} - \dfrac{bc}{2a^2} + \dfrac{d}{a}$,
- $r = -\dfrac{3b^4}{256a^4} + \dfrac{b^2c}{16a^3} - \dfrac{bd}{4a^2} + \dfrac{e}{a}$,
- $\xi = -\dfrac{8p^3}{27} + \dfrac{p^2 - 4r}{3} + \dfrac{q^2}{2}$,
- $\Delta = -\dfrac{p^2(p-4r)^2}{27} - \dfrac{8p^3q^2}{27} + \dfrac{pq^2(p-4r)}{3} + \dfrac{(p-4r)^3}{27} + \dfrac{q^4}{4}$,
- $\alpha = -\dfrac{2p}{3} + \sqrt[3]{\xi + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\xi - \sqrt{\Delta}}$ e
- $\beta = \dfrac{q^2}{4\alpha}$.

As raízes da equação são dadas por

$$x = -\frac{b}{4a} + \frac{-\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha - 4\sqrt{r+\beta}} \pm 4\sqrt{\beta}}}{2}, \tag{4.23}$$

sendo que as quatro raízes complexas são obtidas combinando-se os sinais de adição e subtração em (4.23).

5 Problemas

Este capítulo contém uma seleção de problemas envolvendo os conteúdos de números complexos, polinômios e equações algébricas, pertinentes ao que foi desenvolvido nos capítulos anteriores. Tais problemas podem ser aproveitados no terceiro ano do Ensino Médio em um itinerário formativo de aprofundamento em matemática, ou como preparação para provas olímpicas ou vestibulares.

Todas as questões foram selecionadas entre três provas: o concurso de admissão ao IME, o vestibular do ITA e o AIME.

O IME (Instituto Militar de Engenharia) e o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) são instituições de ensino superior brasileiras voltadas ao ensino de engenharia. Suas provas de admissão são conhecidas por exigirem um nível de conhecimento acima da média. Ambos são realizados em duas fases, sendo a primeira uma prova de múltipla escolha e a segunda uma prova discursiva.

As provas e soluções podem ser obtidas nos seguintes endereços eletrônicos:

- provas do IME: `https://www.ime.eb.mil.br/provas-anteriores-cfg.html`;
- provas do ITA: `https://vestibular.ita.br/provas.htm`;
- resoluções do IME: `https://poliedroresolve.sistemapoliedro.com.br/vestibulares/ime`;
- resoluções do ITA: `https://poliedroresolve.sistemapoliedro.com.br/vestibulares/ita`.

O AIME (*American Invitational Mathematics Examination*) é uma olimpíada de matemática realizada nos Estados Unidos, destinada aos estudantes com melhor desempenho na AMC (*American Mathematics Competitions*)[1]. Ela é uma prova composta por 15 questões em ordem crescente de dificuldade, abrangendo temas como álgebra, geometria, teoria dos números e análise combinatória. As respostas das questões são números inteiros de 1 a 999, respondidas com três dígitos. Por exemplo, se a resposta de uma questão é 8, ela deve ser registrada como 008. Anualmente ocorrem duas provas, nomeadas AIME I e AIME II. As questões e resoluções podem ser encontradas em `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AIME_Problems_and_Solutions`.

A escolha por essas três bancas tem dois motivos principais: essas provas abrangem os temas tratados neste trabalho (números complexos, polinômios e equações algébricas) e

[1] Comparando com o contexto brasileiro, é como se fosse a segunda fase da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas).

têm um nível de complexidade razoável. Foram escolhidas questões recentes, no triênio 2022 - 2024, sendo excluídas questões que fossem excessivamente sofisticadas ou trabalhosas. Além disso, foi dada preferência a questões dissertativas.

O desenvolvimento das soluções dessas questões ilustra algumas aplicações da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, como

- a importância da forma polar dos números complexos para resolver alguns problemas (como discutido na Seção 2.5, especialmente as fórmulas de De Moivre);
- a relevância da representação geométrica dos números complexos;
- o papel dos números complexos para que se tenha uma teoria completa sobre as funções e equações polinomiais;
- a relevância dos zeros de uma função polinomial;
- a importância das relações de Girard;
- o uso da segunda fórmula de De Moivre para encontrar as n-ésimas raízes complexas de um número dado;
- a importância das raízes n-ésimas da unidade;
- o desenvolvimento do método de Ferrari para calcular as raízes de uma equação quártica.

Cabe salientar que o objetivo da educação matemática não é simplesmente preparar o aluno para esse tipo de avaliação. Por outro lado, essas avaliações buscam avaliar importantes habilidades matemáticas.

5.1 IME 2023

Problema 1 (Desigualdades no plano complexo).

Considere os conjuntos de números complexos:

$$A = \{x + iy \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } |x| + |y| \leq r\} \text{ e}$$

$$B = \{x + iy \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } \max\{|x - a|, |y - b|\} \leq c\},$$

onde r, a, b e c são números reais positivos e $\max\{x_1, x_2\}$ é o maior valor entre os reais x_1 e x_2. O menor valor de r, em função de a, b e c, para que se tenha $B \subset A$ é

(A) $a + b + c$

(B) $(a + b)\sqrt{2} + c$

(C) $2(a+b)+c$

(D) $a+b+2c$

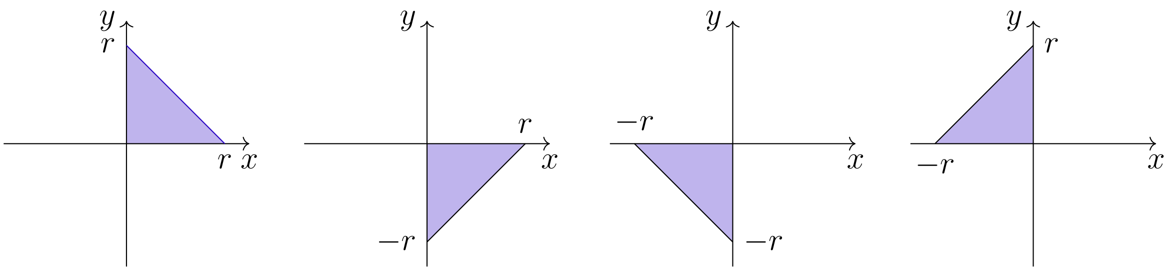
(E) $2(a+b+c)$

Solução. Comecemos analisando a desigualdade $|x|+|y| \leq r$.

Se $x \geq 0$, então $|x| = x$; se $x < 0$, então $|x| = -x$. Analogamente, $y \geq 0$ implica que $|y| = y$ e $y < 0$ implica que $|y| = -y$. Assim,

- se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $|x|+|y| = x+y$;
- se $x \geq 0$ e $y < 0$, então $|x|+|y| = x-y$;
- se $x < 0$ e $y \geq 0$, então $|x|+|y| = -x+y$;
- se $x < 0$ e $y < 0$, então $|x|+|y| = -x-y$.

Todos os casos de $|x|+|y| \leq r$, para $r > 0$, estão apresentados na Figura 20. Unindo todos eles, o conjunto A corresponde aos números complexos que, no plano complexo, pertencem uma região quadrada de centro na origem e vértices sobre os eixos, cuja diagonal tem medida $2r$ (ver Figura 21).



(a) $x > 0$ e $y > 0$ (b) $x > 0$ e $y < 0$ (c) $x < 0$ e $y < 0$ (d) $x < 0$ e $y > 0$

Figura 20 – Todos os casos para $|x|+|y| \leq r$

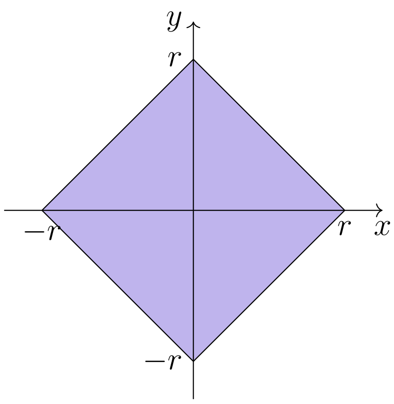


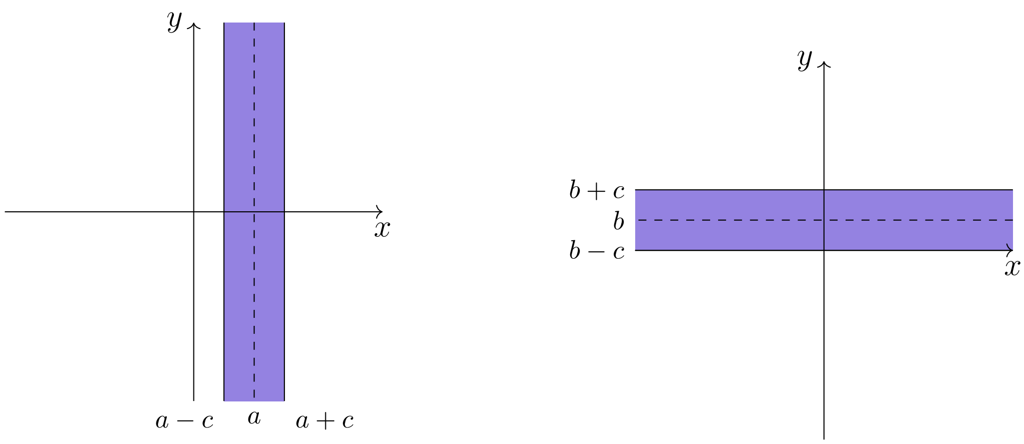
Figura 21 – Conjunto A

Analisemos agora o conjunto B. Se $\max\{|x-a|, |y-b|\} \leq c$, então $|x-a| \leq c$ e $|y-b| \leq c$.

Geometricamente, $|x-a|$ representa a distância do número x até o número a. Como temos $|x-a| \leq c$, temos o conjunto das abscissas cuja distância até a é menor que ou igual a c. Algebricamente, teremos uma definição equivalente:

$$\begin{aligned} |x-a| \leq c &\iff -c \leq x-a \leq c \\ &\iff a-c \leq x \leq a+c. \end{aligned}$$

No sistema cartesiano, isso corresponde à região representada na Figura 22a.



(a) Representação de $|x-a| \leq c$ (b) Representação de $|y-b| \leq c$

Figura 22 – Partes do conjunto B

De modo similar, $|y-b|$ representa a distância do número y até o número b. Assim, $|y-b| \leq c$ é o conjunto das ordenadas cuja distância até b é menor que ou igual a c. Algebricamente, temos

$$\begin{aligned} |y-b| \leq c &\iff -c \leq y-b \leq c \\ &\iff b-c \leq y \leq b+c. \end{aligned}$$

No sistema cartesiano, temos a representação na Figura 22b.

Assim, para que se tenha ambas as desigualdades valendo no conjunto B, devemos ter a intersecção entre as duas partes. Assim, a representação do conjunto B no plano complexo é um quadrado centrado em (a, b) e lado com medida $2c$, conforme ilustra a Figura 23.

Desejamos determinar o menor valor de r para que $B \subset A$. Note que para isso, o vértice do canto superior direito do quadrado, cujas coordenadas são $(a+c, b+c)$, deve pertencer à reta $x + y = r$. Ambos os conjuntos e o caso com o valor mínimo de r estão representados na Figura 24.

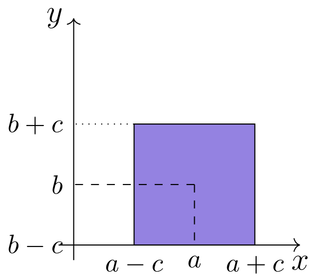


Figura 23 – Conjunto B

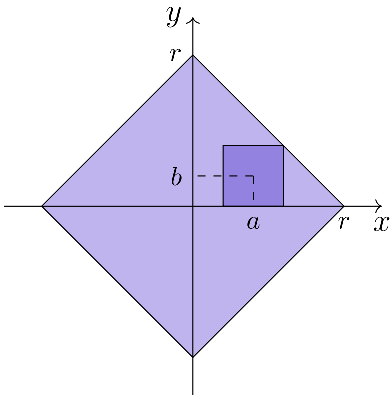


Figura 24 – Conjuntos A e B com r mínimo

Finalmente, se o ponto $(a + c, b + c)$ pertence à reta $x + y = r$, podemos substituir suas coordenadas na equação, obtendo $a + c + b + c = a + b + 2c = r$.

Como o menor valor possível para r será $a + b + 2c$, a resposta correta é a letra (D).

5.2 IME 2023

Problema 2 (Raízes de uma equação cúbica).

As raízes da equação $4x^3 - 40x^2 + 129x - 125 = 0$ são os comprimentos dos lados de um triângulo em metros.

Determine a área desse triângulo.

Solução.

Uma forma de calcular a medida da área de um triângulo é aplicar a *fórmula de Heron*, batizada em homenagem ao matemático grego Heron de Alexandria. Se um triângulo tem lados com medidas a, b e c, então sua área é dada por

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

É possível encontrar as raízes da equação a partir do método desenvolvido na Seção 4.3. Porém, os cálculos se tornam excessivamente trabalhosos. Na fórmula de Cardano, como desenvolvido em (4.13), teríamos [2]

$$\left(x-\frac{40}{3}\right)^3=-\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}},\text{ onde } m=-\frac{13}{12} \text{ e } n=\frac{34795}{108}.$$

Nesse caso, é mais prático usar as relações de Girard, conforme desenvolvidas na Subseção 3.4.2.

Sejam a, b e c as raízes da equação (e, consequentemente, os comprimentos dos lados do triângulo). Pelas relações de Girard, temos

$$\begin{aligned} a+b+c &= \frac{40}{4}=10,\\ ab+ac+bc &= \frac{129}{4} \text{ e}\\ abc &= \frac{125}{4}. \end{aligned}$$

Se $a+b+c=10$, então o semiperímetro é $p=5$. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo tem medida, em metros quadrados, igual a

$$A=\sqrt{5(5-a)(5-b)(5-c)}. \tag{5.1}$$

Vamos desenvolver o produto entre os parênteses.

$$\begin{aligned} (5-a)(5-b)(5-c) &= 125-25a-25b-25c+5ab+5ac+5bc-abc\\ &= 125-25(a+b+c)+5(ab+ac+bc)-abc\\ &= 125-25\cdot 10+5\cdot\frac{129}{4}-\frac{125}{4}\\ &= 5 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor em (5.1), e levando em consideração que os lados do triângulo são dados em metros, temos que a área do triângulo é dada por

$$A=\sqrt{5\cdot 5}=5\,\mathrm{m}^2.$$

5.3 IME 2024

Problema 3 (Raízes complexas no plano).

Seja i tal que $i^2=-1$. Determine a área do triângulo no plano complexo cujos vértices são as raízes da equação

$$\left(Z-\frac{3i}{2}\right)^3=-27i.$$

[2] Ao desenvolver a fórmula de Cardano usamos p e q para representar os coeficientes. Porém nesse problema, p está representando o semiperímetro do triângulo, então mudamos para m e n.

Solução. Temos que

$$\left(Z - \frac{3i}{2}\right)^3 = -27i \iff Z - \frac{3i}{2} = \sqrt[3]{-27i}$$
$$\iff Z - \frac{3i}{2} = \sqrt[3]{27 \cdot (-i)}$$
$$\iff Z - \frac{3i}{2} = 3\sqrt[3]{-i}, \tag{5.2}$$

logo devemos determinar as raízes cúbicas de $-i$. Sabemos da Seção 2.5.5 que tais raízes se localizam no plano complexo tendo módulos iguais a 1 e ângulos centrais de 120° entre elas, formando um triângulo equilátero. Além disso, o fato de $i^3 = -i$ implica que $i = \sqrt[3]{-i}$, isto é, uma das raízes cúbicas de $-i$ é igual a i. Assim, as raízes se localizam no plano de acordo com a Figura 25, onde estão indicadas como ω_0, ω_1 e ω_2, com $\omega_0 = i$.

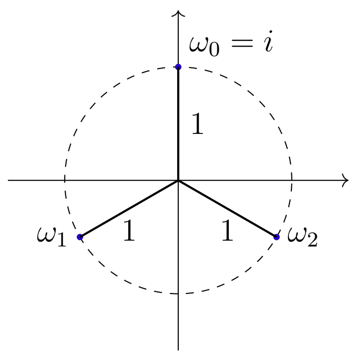


Figura 25 – Raízes cúbicas de $-i$

E como a igualdade em (5.2) possui $\sqrt[3]{-i}$ multiplicada por três, teremos como resultados parciais os números complexos w_1, w_2 e w_3, sendo[3] $w_i = 3\omega_{i-1}$, conforme representado na Figura 26.

Note que não é estritamente necessário determinar quais são os complexos w_2 e w_3, associados às outras raízes cúbicas, para determinar a área do triângulo. Tampouco é necessário determinar quais são as raízes Z_1, Z_2 e Z_3 da equação original, pois ao isolar a incógnita Z na igualdade, teremos

$$Z = \frac{3}{2}i + 3\sqrt[3]{-i},$$

onde a parcela $\frac{3}{2}i$ irá transladar as raízes w_1, w_2 e w_3 em $\frac{3}{2}$ no sentido vertical, sem alterar a área do triângulo (veja a Figura 27).

O problema se resume a determinar a área do triângulo inscrito no círculo de raio 3. Podemos fazer isso a partir das áreas dos três triângulos isósceles formados, sabendo que eles têm lados com medida igual a 3 e ângulos de 120° entre eles. A área de um triângulo

[3] Atenção: ω_0, ω_1 e ω_2 nesse contexto são as raízes cúbicas de $-i$. Já w_1, w_2 e w_3 representam os resultados complexos para $\sqrt[3]{-27i}$. São símbolos parecidos, mas diferentes: os três primeiros são representadas pela letra grega ω ("ômega"), os três últimos são representados pela letra latina w.

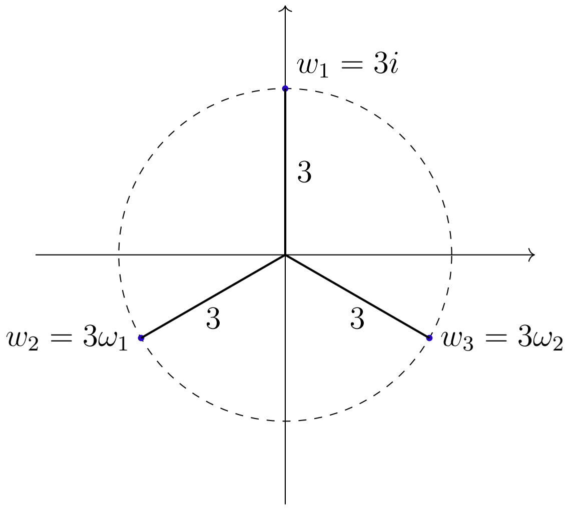


Figura 26 – Resultados para $3\sqrt[3]{-i}$

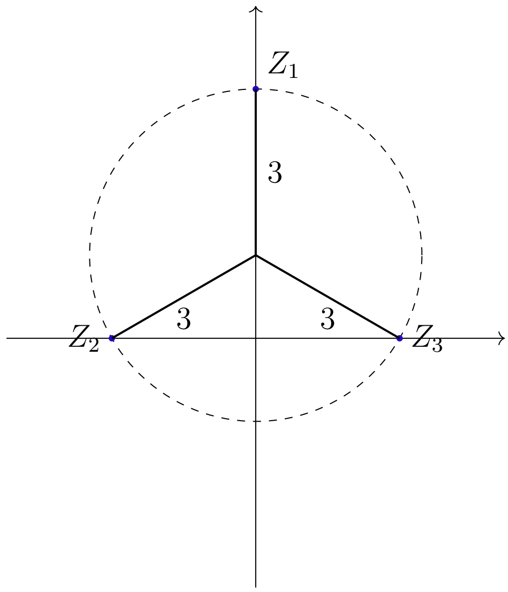


Figura 27 – Raízes Z_1, Z_2 e Z_3 da equação

com lados de medidas a e b e um ângulo θ entre eles é dada por

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \theta.$$

A área do triângulo equilátero é 3 vezes a área de cada triângulo isósceles nele contido. Assim, ela é dada por

$$A = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ$$
$$A = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

Por curiosidade, determinemos os valores das raízes Z_1, Z_2 e Z_3 da equação. Como $Z = \frac{3}{2}i + 3\sqrt[3]{-i}$, precisamos determinar as outras raízes cúbicas de $-i$.

Devemos tratar as raízes cúbicas na forma polar. Por simplicidade, consideremos os argumentos em graus. O argumento de $\omega_0 = i$ é de $90°$, então o argumento de ω_1 será de $90° + 120° = 210°$, assim

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \cos 210° + i \operatorname{sen} 210° \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

E o argumento de ω_2 será $210° + 120° = 330°$. Então

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \cos 330° + i \operatorname{sen} 330° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

E como $Z = \frac{3}{2}i + 3\sqrt[3]{-i}$, teremos as raízes

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{3}{2}i + 3 \cdot i = \frac{9}{2}i, \\ Z_2 &= \frac{3}{2}i + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ e} \\ Z_3 &= \frac{3}{2}i + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

É fácil verificar o cálculo da área obtido anteriormente com os vértices do triângulo (ver Figura 28). Uma possibilidade para isso é usar a conhecida fórmula da área do triângulo equilátero, sabendo que o lado tem medida $\overline{Z_2Z_3} = 3\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}A &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Também pode-se usar a fórmula da área de um triângulo qualquer, uma vez que são conhecidas as medidas da base $\overline{Z_2Z_3} = 3\sqrt{3}$ e da altura $\overline{OZ_1} = \frac{9}{2}$, onde O é a origem do sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned}A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2}}{2} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

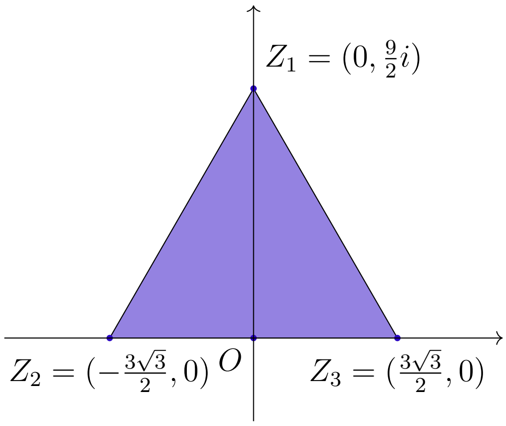


Figura 28 – Triângulo equilátero formado pelas raízes Z_1, Z_2 e Z_3 da equação

5.4 AIME II 2023

Problema 4 (Operações com números complexos na forma polar).

Seja $\omega = \cos\frac{2\pi}{7} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Encontre o valor do produto

$$\prod_{k=0}^{6}(\omega^{3k} + \omega^k + 1).$$

Solução. Note que os resultados na Subseção 2.5.6 garantem que o complexo ω é uma raiz sétima de 1, isto é,

$$\omega^7 = 1. \tag{5.3}$$

A igualdade em (5.3) implica que qualquer potência de ω com expoente múltiplo natural de 7 é igual a 1, isto é, $\omega^7 = \omega^{14} = \omega^{21} = \cdots = 1$.

Também a partir de (5.3) e levando em consideração que $\omega \neq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\omega^7 = 1 &\iff \omega^7 - 1 = 0 \\
&\iff (\omega - 1)(\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0 \\
&\iff \omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto do enunciado, obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{6}(\omega^{3k} + \omega^k + 1) = (\omega^0 + \omega^0 + 1)(\omega^3 + \omega + 1)(\omega^6 + \omega^2 + 1)(\omega^9 + \omega^3 + 1) \\
(\omega^{12} + \omega^4 + 1)(\omega^{15} + \omega^5 + 1)(\omega^{18} + \omega^6 + 1).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Como $\omega^0 = 1$, o primeiro fator, obtido a partir de $k = 0$, é

$$\omega^0 + \omega^0 + 1 = 3. \tag{5.6}$$

Para multiplicar os outros fatores, convém agrupá-los de forma que os expoentes de ω obtidos sejam múltiplos de 7, para aproveitar o resultado de (5.3). Primeiramente, multiplicaremos o segundo fator ($k = 1$) com o último ($k = 6$).

$$\begin{aligned}(\omega^3 + \omega + 1)(\omega^{18} + \omega^6 + 1) &= \omega^{21} + \omega^9 + \omega^3 + \omega^{19} + \omega^7 + \omega + \omega^{18} + \omega^6 + 1 \\ &= 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^5 + 1 + \omega + \omega^4 + \omega^6 + 1 \\ &= (\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) + 2 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Na última passagem foi utilizada a igualdade (5.4). Além disso, de (5.3) temos $\omega^{21} = \omega^{14} = \omega^7 = 1$, então

- $\omega^9 = \omega^7 \cdot \omega^2 = \omega^2$,
- $\omega^{19} = \omega^{14} \cdot \omega^5 = \omega^5$ e
- $\omega^{18} = \omega^{14} \cdot \omega^4 = \omega^4$.

Vamos agora multiplicar o terceiro fator do produtório ($k = 2$) pelo penúltimo ($k = 5$).

$$\begin{aligned}(\omega^6 + \omega^2 + 1)(\omega^{15} + \omega^5 + 1) &= \omega^{21} + \omega^{11} + \omega^6 + \omega^{17} + \omega^7 + \omega^2 + \omega^{15} + \omega^5 + 1 \\ &= 1 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^3 + 1 + \omega^2 + \omega + \omega^5 + 1 \\ &= (\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) + 2 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Novamente aproveitando as consequências de (5.3), usamos aqui

- $\omega^{11} = \omega^7 \cdot \omega^4 = \omega^4$,
- $\omega^{17} = \omega^{14} \cdot \omega^3 = \omega^3$ e
- $\omega^{15} = \omega^{14} \cdot \omega = \omega$,

além da igualdade (5.4) na passagem final.

Por fim, multipliquemos o quarto fator ($k = 3$) pelo quinto ($k = 4$).

$$\begin{aligned}(\omega^9 + \omega^3 + 1)(\omega^{12} + \omega^4 + 1) &= \omega^{21} + \omega^{13} + \omega^9 + \omega^{15} + \omega^7 + \omega^3 + \omega^{12} + \omega^4 + 1 \\ &= 1 + \omega^6 + \omega^2 + \omega + 1 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^4 + 1 \\ &= (\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) + 2 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

De modo similar aos casos anteriores, utilizamos aqui

- $\omega^{13} = \omega^7 \cdot \omega^6 = \omega^6$,
- $\omega^9 = \omega^7 \cdot \omega^2 = \omega^2$ e
- $\omega^{12} = \omega^7 \cdot \omega^5 = \omega^5$,

além, é claro, de (5.4).

Pelo desenvolvido em (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9), o produto dado no enunciado é igual a

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{6}(\omega^{3k} + \omega^k + 1) &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 24,\end{aligned}$$

isto é, a resposta final do problema é 024.

5.5 AIME I 2022

Problema 5 (Operações com números complexos na forma polar).

Sejam $w = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ e $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Encontre o número de pares ordenados (r, s) de inteiros positivos que não excedem 100 que satisfaçam a equação $i \cdot w^r = z^s$.

Solução. Escrevendo os números complexos dados na forma polar, conforme discutido na Seção 2.4, temos $i = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, $w = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ e $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$. Substituindo esses valores na equação e resolvendo as operações, vem

$$\begin{aligned}
i \cdot w^r &= z^s \\
\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^r &= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^s \\
\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi r}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi r}{6}\right) &= \left(\cos\frac{2\pi s}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi s}{3}\right) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi r}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi r}{6}\right) &= \left(\cos\frac{2\pi s}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi s}{3}\right) \\
\frac{\pi}{2} + \frac{\pi r}{6} &= \frac{2\pi s}{3} + 2\pi \cdot k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{6}r &= \frac{2}{3}s + 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\
3 + r &= 4s + 12k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\
3 + r &= 4(s + 3k), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}, \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

isto é, $4|(3 + r)$. Mas r é inteiro de 0 a 100, então $3 + r$ é algum inteiro divisível por 4 no intervalo de 3 a 103. Assim, $(3 + r) \in \{4, 8, 12, \ldots, 100\}$. Além disso, a igualdade (5.10) garante que para cada valor de $3 + r$ há um único valor de $s + 3k$, sendo $(s + 3k) \in \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Analisemos o resultado em casos.

Caso 1: $s + 3k \equiv 0 \mod 3$

Nesse caso temos $s + 3k \in \{3, 6, \ldots, 24\}$, portanto há 8 valores. Como $s + 3k$ e r possuem uma relação biunívoca, há 8 valores para r. Além disso, $s + 3k \equiv 0 \mod 3$ implica que $s \equiv 0 \mod 3$, e como s é um inteiro de 1 a 100, teremos $s \in \{3, 6, \ldots, 99\}$, logo há 33 valores possíveis para s.

São 8 possibilidades para r e 33 para s, perfazendo um total de $8 \cdot 33 = 264$ possibilidades nesse caso.

Caso 2: $s + 3k \equiv 1 \mod 3$

Nesse caso temos $s + 3k \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, havendo 9 valores possíveis para $s + 3k$, de modo que também há 9 valores possíveis para r. E como $s + 3k \equiv 1 \mod 3$ implica que $s \equiv 1 \mod 3$, temos $s \in \{1, 4, \ldots, 100\}$, totalizando 34 valores para s.

Nesse caso há 9 valores possíveis para r e 34 valores possíveis para s, que combinados resultam em $9 \cdot 34 = 306$ pares ordenados.

Caso 3: $s + 3k \equiv 2 \mod 3$

Nesse caso temos $s + 3k \in \{2, 5, \ldots, 23\}$, portanto há 8 valores valores para r. Além disso, $s + 3k \equiv 2 \mod 3$ implica que $s \equiv 2 \mod 3$, e dado o intervalo ao qual s pertence teremos $s \in \{2, 5, \ldots, 98\}$, logo há 33 valores possíveis para s.

São 8 possibilidades para r e 33 para s, gerando $8 \cdot 33 = 264$ pares ordenados nesse caso.

O total de possibilidades entre os três casos é de $264 + 306 + 264 = 834$ pares ordenados (r, s).

Solução (alternativa). Abordemos o problema geometricamente. O fato de todos os complexos do problema possuírem módulo igual a 1 será de grande ajuda. Para as representações dos complexos no plano, usaremos a notação em graus por simplicidade.

Como $w = \cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°$, cada potência de w fará uma rotação no sentido anti-horário de 30° em torno da origem em relação à anterior. Assim, há 12 posições possíveis para w^r. A Figura 29 ilustra essas posições, bem como as duas primeiras potências de w para cada uma.

Para $z = \cos 120° + i \cdot \operatorname{sen} 120°$, cada nova potência representará uma rotação em torno da origem de 120° em relação à anterior. Assim, há somente três posições possíveis para as potências de z, conforme ilustra a Figura 30.

O que desejamos é determinar os pares (r, s) tais que os afixos dos complexos $i \cdot w^r$ e z^s coincidam. Como z^s só pode se localizar em três pontos sobre o plano, nos ângulos de 120°, 240° e 360°, precisamos determinar em quais casos o afixo de $i \cdot w^r$ se localizará sobre esses mesmos pontos.

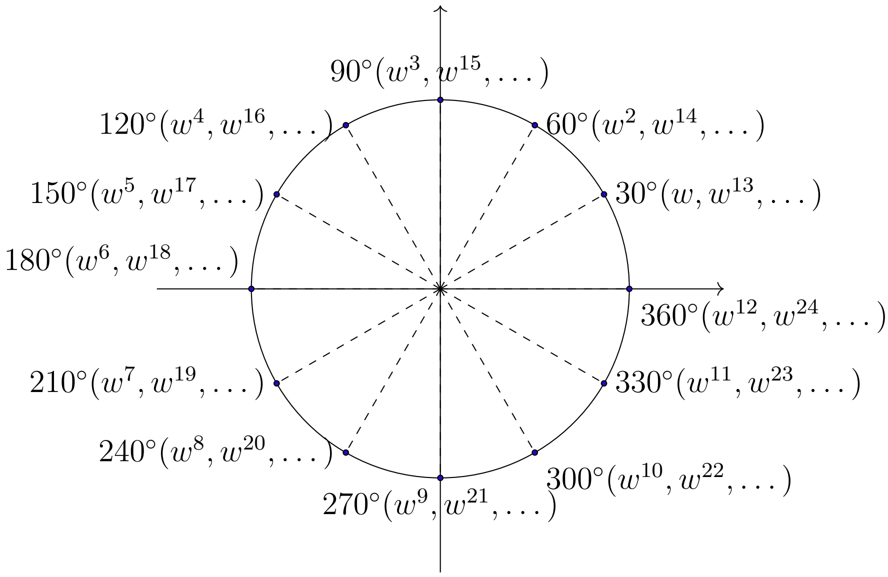


Figura 29 – Localizações possíveis para w^r no plano complexo

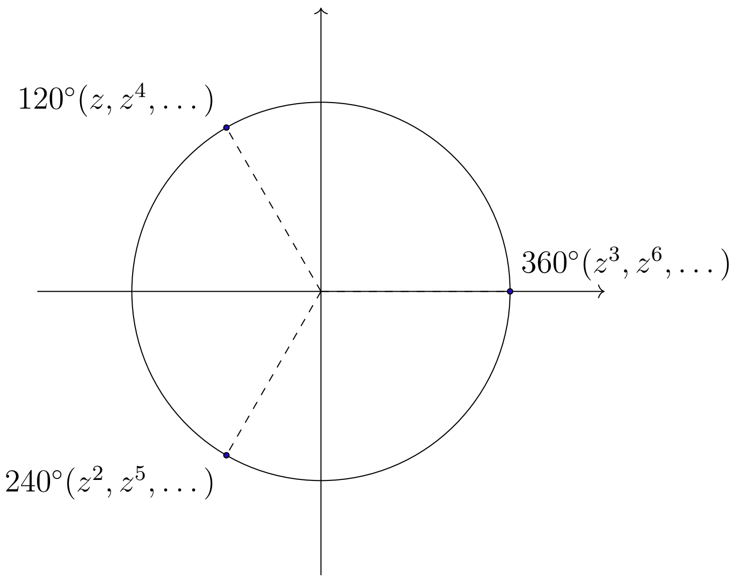


Figura 30 – Localizações possíveis para z^s no plano complexo

Da Seção 2.5.1, sabemos que multiplicar um complexo por i implica em rotacionar seu afixo em 90° em torno da origem no sentido anti-horário. Então para que os pontos coincidam sobre o ângulo de 120°, w^r deve estar sobre 30°. Para que os pontos coincidam sobre o ângulo de 240°, w^r deve estar sobre 150°. Para que os pontos coincidam sobre o ângulo de 360°, w^r deve estar sobre 270°. Analisemos esses três casos separadamente, levando em consideração que os expoentes r e s são inteiros de 1 a 100 e que as potências de z completam uma volta de três em três, ao passo que as potências de w completam uma volta de 12 em 12.

Caso 1: z^s sobre 120° e w^r sobre 30°

As potências de z cujos afixos residem nesse ponto serão $z, z^4, z^7, \ldots, z^{100}$, sendo

34 valores possíveis para s. Já as potências de w serão $w, w^{13}, w^{25}, \dots, w^{97}$, sendo 9 valores para r. Assim, há $34 \cdot 9 = 306$ pares ordenados (r, s).

Caso 2: z^s sobre $240°$ e w^r sobre $150°$

As potências de z serão $z^2, z^5, z^8, \dots, z^{98}$, sendo 33 valores para o expoente s. Em relação às potências de w, elas poderão ser $w^5, w^{17}, w^{29}, \dots, w^{89}$, sendo 8 valores possíveis para o expoente r. Dessa forma, há $33 \cdot 8 = 264$ valores possíveis de pares (r, s).

Caso 3: z^s sobre $360°$ e w^r sobre $270°$

As potências de z poderão ser $z^3, z^6, z^9, \dots, z^{99}$, sendo novamente 33 valores possíveis para s. As potências de w poderão ser $w^9, w^{21}, w^{33}, \dots, w^{93}$, sendo 8 os valores possíveis para o expoente r. Assim sendo, há também nesse caso $33 \cdot 8 = 264$ valores possíveis de pares (r, s).

Diante do exposto, a união entre os três casos resulta em um total de $306 + 264 + 264 = 834$ pares ordenados.

5.6 AIME I 2022

Problema 6 (Operações com polinômios).

Os polinômios quadráticos $P(x)$ e $Q(x)$ têm coeficientes líderes 2 e -2, respectivamente. Os gráficos de ambos os polinômios passam pelos dois pontos $(16, 54)$ e $(20, 53)$. Encontre $P(0) + Q(0)$.

Solução. Algumas operações aritméticas não serão realizadas imediatamente, em vista de simplificações futuras.

Sejam $P(x) = 2x^2 + ax + b$ e $Q(x) = -2x^2 + cx + d$. O objetivo é determinar $P(0) + Q(0) = b + d$.

De $P(16) = 54$ e $P(20) = 53$ vem o sistema

$$\begin{cases} 512 + 16a + b = 54 \\ 800 + 20a + b = 53 \end{cases},$$

sendo que ao subtrair a primeira equação da segunda chegamos a $4a = -289$, logo $16a = -1156$. Substituindo esse resultado na primeira equação do sistema, vem

$$512 - 1156 + b = 54. \tag{5.11}$$

De $Q(16) = 54$ e $Q(20) = 53$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} -512 + 16c + d = 54 \\ -800 + 20c + d = 53 \end{cases},$$

onde novamente subtraímos as equações, obtendo que $4c = 287$, logo $16c = 1148$. Substituindo esse resultado na primeira equação do sistema, temos

$$-512 + 1148 + d = 54. \tag{5.12}$$

Para determinar $b + d$ podemos adicionar os resultados em (5.11) e (5.12), de onde obtemos $-8 + b + d = 108$, logo podemos concluir que $P(0) + Q(0) = b + d = 116$.

Solução (alternativa). Considerando novamente $P(x) = 2x^2 + ax + b$ e $Q(x) = -2x^2 + cx + d$, vamos definir

$$\begin{aligned} y(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= (a + c)x + (b + d) \\ &= \alpha x + \beta, \end{aligned}$$

onde $\alpha = a + c$ e $\beta = b + d$ foram adotados por simplicidade de notação. Nosso objetivo é definir $P(0) + Q(0) = y(0) = \beta$.

Pela definição de y e pelos pontos dados, temos

- $y(16) = P(16) + Q(16) = 108$ e
- $y(20) = P(20) + Q(20) = 106$.

Sabemos que y é uma função afim, e conhecemos dois pontos pelos quais ela passa: $y(16) = 108$ e $y(20) = 106$. A taxa de variação de y é $\alpha = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$, logo temos $y = -\frac{1}{2}x + \beta$.

Sabendo que $y(20) = 106$, temos $106 = -\frac{1}{2} \cdot 20 + \beta$, de onde concluímos que $\beta = 116$, logo $P(0) + Q(0) = 116$.

5.7 ITA 2024

Problema 7 (Equação quártica).

Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 14$, sabendo que vale a relação $p(1 + x) = p(1 - x)$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

Solução. Vamos supor que existe $y \in \mathbb{C}$ tal que $1 + y$ seja raiz do polinômio p, isto é, $p(1 + y) = 0$. Há duas observações a serem feitas antes de seguirmos:

- a relação $p(1 + x) = p(1 - x)$ implica que se $1 + y$ é zero do polinômio, então $1 - y$ também é;
- a substituição $x = 1 + y$ é exatamente a substituição que deve ser feita para aplicar o método de Ferrari para resolver a equação, apresentada na Seção 4.4.

Seguindo adiante, se $1+y$ é raiz do polinômio p, então

$$\begin{aligned} p(1+y) &= 0 \\ (1+y)^4 - 4(1+y)^3 + 9(1+y)^2 - 10(1+y) - 14 &= 0 \\ y^4 + 3y^2 - 18 &= 0, \end{aligned}$$

que é uma equação biquadrada com raízes $y = \pm\sqrt{6}i$ e $y = \pm\sqrt{3}$. Assim, as quatro raízes complexas do polinômio são $x_1 = 1+\sqrt{6}i$, $x_2 = 1-\sqrt{6}i$, $x_3 = 1+\sqrt{3}$ e $x_4 = 1-\sqrt{3}$.

Observação: para cada raiz $1+y$ seria necessário encontrar sua simétrica $1-y$. Note, entretanto, que as raízes simétricas aparecem na mesma solução.

5.8 ITA 2023

Problema 8 (Divisão de polinômios e raízes complexas).

Considere o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $q(x) = x^{10} - 1$ por $p(x)$ e encontre todas as raízes complexas de $p(x)$.

Solução. Note que $p(x)$ representa a soma dos termos de uma progressão geométrica de cinco termos, sendo o primeiro termo igual a 1 e a razão igual a $-x$. Logo, pela fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \\ p(x) &= \frac{1\left((-x)^5 - 1\right)}{-x-1} \\ p(x) &= \frac{-x^5 - 1}{-x-1} \\ p(x) &= \frac{x^5+1}{x+1}, \end{aligned}$$

sendo necessário observar que tal igualdade só é válida para $x \neq -1$.

O polinômio q pode ser fatorado como $q(x) = (x^5+1)(x^5-1)$. Fazendo a divisão, teremos

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{p(x)} &= \frac{(x^5+1)(x^5-1)}{\frac{x^5+1}{x+1}} \\ &= (x^5-1)(x+1) \\ &= x^6 + x^5 - x - 1, \end{aligned}$$

e como a divisão é exata o resto é igual a zero, isto é, o resto é o polinômio nulo.

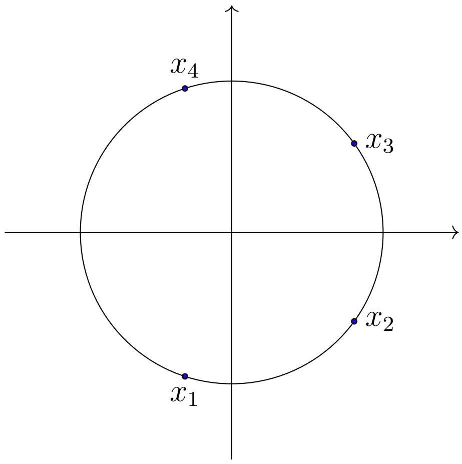


Figura 31 – Zeros do polinômio p

Determinemos agora as raízes do polinômio p. Dado que $p(-1) = 5$, sabemos que -1 não é raiz. Para $x \neq -1$, temos

$$\begin{aligned} p(x) = 0 &\iff \frac{x^5 + 1}{x + 1} = 0 \\ &\iff x^5 + 1 = 0 \\ &\iff x = \sqrt[5]{-1}, \end{aligned}$$

isto é, os zeros de p são as raízes quintas complexas de -1, exceto pelo próprio -1. Denotando os argumentos em graus, tais raízes, obtidas a partir da segunda fórmula de De Moivre (conforme Seção 2.5.5), são

- $x_1 = \cos 252° + i \cdot \operatorname{sen} 252°$,
- $x_2 = \cos 324° + i \cdot \operatorname{sen} 324°$,
- $x_3 = \cos 36° + i \cdot \operatorname{sen} 36°$ e
- $x_4 = \cos 108° + i \cdot \operatorname{sen} 108°$,

conforme ilustra a Figura 31.

6 Considerações finais

Na Introdução foi apresentada a maneira que os tópicos apresentados neste trabalho são contemplados na BNCC, bem como a maneira que muitas vezes eles são desenvolvidos nas escolas brasileiras, e de que maneira esse desenvolvimento poderia ser melhorado. Neste capítulo final, faremos uma análise um pouco mais aprofundada sobre como esses tópicos são tratados na política educacional.

Na BNCC, os conteúdos da Matemática são contemplados da seguinte forma: para a etapa dos Anos Finais do Ensino Fundamental, ela é dividida em cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística), sendo que cada unidade temática se subdivide em diferentes objetos do conhecimento, que por sua vez se subdividem em habilidades. Para a etapa do Ensino Médio, a divisão segue um princípio ligeiramente diferente, ainda que a estrutura lógica seja similar.

> Embora no Ensino Médio não haja essa divisão das habilidades em unidades temáticas, nas considerações sobre a organização dos currículos de matemática para o Ensino Médio, encontramos a sugestão de organizar esses currículos em unidades semelhantes às do Ensino Fundamental, sendo uma delas Números e Álgebra. (MASSARIOLI, 2022, p. 11)

Há cinco competências específicas, que se subdividem em habilidades. A própria base sugere que essas habilidades também sejam agrupadas de acordo com unidades temáticas análogas às do Ensino Fundamental - Anos Finais.

A BNCC representa avanços em algumas áreas, e retrocesso em outras. Em relação aos avanços, ela busca homogeneizar a educação no país e estabelece de forma clara as habilidades desejadas para os estudantes. Ela também valoriza o uso das tecnologias digitais, em consonância à época em está em vigor, e propõe que os alunos aprendam a elaborar problemas, além de simplesmente resolvê-los.

Em relação aos retrocessos, o primeiro a ser citado diz respeito à própria forma de construção do documento. Houve pouca (se houve) discussão com professores de “chão de escola”, e ela acabou se consolidando como um documento com normas quase impraticáveis na realidade. Por exemplo, ela traz para o 8º ano a habilidade de código EF08MA27, que exige um nível de maturidade intelectual e compreensão dos conceitos em nível muito elevado para alunos entre 13 e 14 anos de idade.

> (EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apro-

> priados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões. (BRASIL, 2018, p. 315)

A aplicação adequada de tal planejamento, execução da pesquisa e escrita de relatório certamente é trabalho para mais de um mês; há outras 26 habilidades previstas para a Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental. Isso ilustra outro problema da Base, que é o excesso de habilidades requeridas. Mesmo que a matemática tivesse 10 períodos por semana nas turmas, os alunos não teriam tempo suficiente para assimilar o que é proposto.

Outro problema grave da Matemática na BNCC, especialmente para o Ensino Médio, é a visão limitada sobre o papel da Matemática na Educação.

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 528)

A educação escolar, tem propósitos maiores que a mera aplicação a “vivências cotidianas dos estudantes”. O objetivo do ensino da Matemática não é simplesmente resolver problemas cotidianos, mas criar as condições para o aluno desenvolver um raciocínio lógico organizado, coerente e coeso. Esse raciocínio mais desenvolvido pode ser usado para resolver problemas de naturezas diversas, não somente no contexto da Matemática. Por mais paradoxal que possa parecer, resolver problemas abstratos desenvolve a capacidade de resolver problemas concretos (além, é claro, dos próprios problemas abstratos).

Soma-se a isso o fato da Matemática ser uma linguagem necessária para que se possa compreender com profundidade outras áreas do conhecimento. Por exemplo, um educador físico precisa entender de biomecânica, e isso requer a compreensão de vetores e de trigonometria. Um administrador precisa saber lidar com funções e estatística. Ambos os casos fogem ao “cotidiano dos estudantes do Ensino Médio”. Aprender a trabalhar com esse tipo de ferramenta matemática (os vetores, a trigonometria, as funções e a estatística) também é importante por ser uma base teórica para muitas profissões.

Esses problemas na “filosofia da BNCC” se refletem nas habilidades específicas dentro do componente curricular. Em relação às equações quadráticas a BNCC acerta em valorizar a compreensão do método sobre a aplicação da fórmula quadrática; por outro lado, ela peca em tentar ignorar a fórmula, como se ela fosse dispensável. A generalização de resultados é parte imprescindível da Matemática.

Em relação às funções polinomiais, na prática a BNCC as exclui. Há cinco habilidades do Ensino Médio que citam "polinômios" ou "funções polinomiais", mas todas elas dizem respeito a polinômios de 1º ou 2º graus. Dessa forma, não são tratadas como funções polinomiais de modo geral, mas como funções afins e funções quadráticas.

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

No tocante aos números complexos, estes nem são contemplados na BNCC. Isso é mais um exemplo do desalinhamento entre a política educacional (o que está no papel), a demanda do Ensino Superior (aquilo que se espera que os estudantes aprendam no Ensino Médio) e o que ocorre de fato nas escolas.

Os problemas apresentados não são insolúveis. Entretanto, eles não se resolvem espontaneamente: é necessário que haja um esforço de revisão do documento, em uma discussão com todas as partes envolvidas.

Vale destacar que, embora a BNCC não contemple alguns dos conteúdos abordados neste trabalho, e contemple outros de modo parcial, esses assuntos são de grande importância para os estudantes, uma vez que continuam sendo cobrados em provas de vestibulares tradicionais. Ademais, mesmo conteúdos mais avançados, como equações cúbicas, equações quárticas e raízes n-ésimas complexas, se fazem presentes em algumas provas, como apresentado no Capítulo 5. Além de serem necessários nessas provas, tais conteúdos também são pré-requisitos em vários cursos de nível superior. Assim, em especial aos estudantes interessados em seguir os estudos ao fim do Ensino Médio, ter o conhecimento sobre esses tópicos é um diferencial. É para atingir esse propósito que este material foi redigido.

Referências

ART OF PROBLEM SOLVING. *AIME Problems and Solutions*. 2025. Disponível em: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AIME_Problems_and_Solutions. Acesso em: 15 jan. 2025. Citado 0 vez na página 84.

BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. Editora Blucher, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 20, 23, 65.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 19 jan. 2025. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Citado 5 vezes nas páginas 15, 103.

CHURCHILL, Ruel Vance. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Tradução: Tadao Yoshioka. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975. Revisão técnica de Alfredo Alves de Farias. Citado 1 vez na página 42.

CURTI, Marcelo de Almeida. Soluções gerais de equações do terceiro e quarto graus e a relação entre números complexos e equações cúbicas. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015. Citado 1 vez na página 79.

EXÉRCITO BRASILEIRO. *Provas Anteriores do Curso de Formação e Graduação (CFG)*. 2025. Disponível em: https://www.ime.eb.mil.br/provas-anteriores-cfg.html. Acesso em: 15 jan. 2025. Citado 0 vez na página 84.

HEFEZ, Abramo. *Curso de álgebra, volume 1*. Impa, 2014. Citado 1 vez na página 55.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia T. *Polinômios e equações algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. Citado 6 vezes nas páginas 19, 20, 53, 63, 73, 79.

HENNEMANN, Vilson. *Equações polinomiais de até quarto grau: o limite das soluções gerais por radicais*. 2021. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria. Acesso em: 19 jan. 2025. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/23425. Citado 2 vezes nas páginas 15, 79.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações*. Atual, 2013. Citado 1 vez na página 54.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA. *Provas e Gabaritos do Vestibular ITA*. 2025. Disponível em: https://vestibular.ita.br/provas.htm. Acesso em: 15 jan. 2025. Citado 0 vez na página 84.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes na página 52.

LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do ensino médio: Volume 3*. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 52, 55, 58.

MASSARIOLI, Flávio Faria. *Um estudo sobre polinômios aplicado a reticulados e à resolução de problemas no Ensino Médio*. 2022. Dissertação (Mestrado) – Unesp. Acesso em: 19 jan. 2025. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/items/9eb26d14-6c84-44e8-bf9e-602e4c6fdb85. Citado 1 vez na página 102.

SISTEMA POLIEDRO. *Provas Resolvidas do IME*. 2025. Disponível em: https://poliedroresolve.sistemapoliedro.com.br/vestibulares/ime. Acesso em: 15 jan. 2025. Citado 0 vez na página 84.

SISTEMA POLIEDRO. *Provas Resolvidas do ITA*. 2025. Disponível em: https://poliedroresolve.sistemapoliedro.com.br/vestibulares/ita. Acesso em: 15 jan. 2025. Citado 0 vez na página 84.

VIANA, Marcelo. *As guerras da equação cúbica - Marcelo Viana*. 2022. Disponível em: YouTube. Acesso em: 22 dez. 2024. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CAKTb5lDCg0&t=2775s. Citado 3 vezes nas páginas 15, 65, 68.

VIANA, Marcelo. *As guerras da equação cúbica - Marcelo Viana*. 2024. Disponível em: YouTube. Acesso em: 22 dez. 2024. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=bP9jyCaKYcc&t=2007s. Citado 3 vezes nas páginas 15, 65, 68.