

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS REALEZA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

REIDINER ROBERTO REINA

ESTUDO CLÁSSICO DA DINÂMICA DE UM PLASMA:
DEDUÇÕES

REALEZA
2025

REIDINER ROBERTO REINA

**ESTUDO CLÁSSICO DA DINÂMICA DE UM PLASMA:
DEDUÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Almeida

**REALEZA
2025**

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Reina, Reidiner Roberto

ESTUDO CLÁSSICO DA DINÂMICA DE UM PLASMA: DEDUÇÕES /
Reidiner Roberto Reina. -- 2025.
126 f.:il.

Orientador: Doutor Eduardo de Almeida

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Licenciatura em Física, Realeza, PR, 2025.

1. Plasma. 2. Movimento de partículas carregadas. 3.
Campo magnético. 4. Vento solar. 5. Física clássica. I.
Almeida, Eduardo de, orient. II. Universidade Federal da
Fronteira Sul. III. Título.

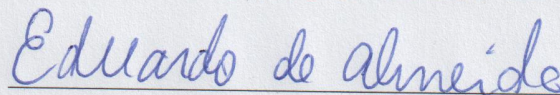
REIDINER ROBERTO REINA

ESTUDO CLÁSSICO DA DINÂMICA DE UM PLASMA:
DEDUÇÕES

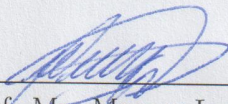
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 27/06/2025.

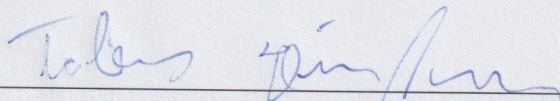
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Eduardo de Almeida
Orientador



Prof. Ms. Marcos Leandro Ohse – UFFS
Avaliador



Prof. Dr. Tobias Heimfarth – UFFS
Avaliador

*Este estudo não pretende ser o campo completo, mas uma contribuição local,
uma região de interesse onde o conhecimento possa ganhar densidade.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não teria sido possível sem a presença do criador, além do esforço e o apoio de pessoas que, de diferentes formas, deixaram marcas profundas em minha trajetória.

Agradeço, primeiramente, à minha família, que sempre foi a base sólida sobre a qual construí minha jornada.

Ao meu pai, por cada carga de paletes descarregada, cada quilômetro percorrido na estrada, seja de dia ou de noite. Por cada botijão de gás erguido com esforço e por cada ensinamento transmitido com simplicidade e firmeza. Dedico este trabalho a todo o sacrifício que me permitiu não apenas entrar na universidade, mas permanecer nela com dignidade.

À minha mãe, por cada conselho carregado de sabedoria, cada gesto de cuidado — um doce enrolado, um pastel fechado, um “bom dia” cheio de ternura. Por cada hora de descanso renunciada e por cada risada que me lembrava do valor da leveza no meio da luta. Tudo o que você representa me trouxe até aqui.

Ao meu irmão, que, mesmo tão jovem, dividiu comigo a responsabilidade do cotidiano. Por além de estudar, trabalhava com nossos pais, assim me ajudando, ainda que indiretamente, a continuar seguindo.

À minha namorada, Nathália, por ser luz constante. Por me fazer crescer como pessoa e me motivar apenas por ser quem é: uma mulher extraordinária, cuja presença serena e encorajadora tornou muitos dos meus dias mais possíveis.

Aos professores e professoras que me acompanharam nessa caminhada, minha mais profunda admiração.

À Professora Aline, pelo exemplo de resiliência e pela coragem de lutar por mudanças mesmo diante de estruturas rígidas. Seu vasto conhecimento e postura ética foram fonte constante de inspiração.

Ao Professor Clóvis Caetano, por seu compromisso rigoroso, sua assertividade e pela clareza com que sempre expôs o conteúdo. Sua firmeza foi fundamental para meu amadurecimento.

À Professora Márcia, por mostrar que o valor de um recurso didático não está em sua sofisticação, mas na criatividade com que é utilizado. Sua didática simples e eficiente, aliada a um vasto conhecimento, fez toda a diferença.

Ao Professor Tobias, por mostrar que o aprendizado pode (e deve) ser lúdico e instigante. Sua capacidade de integrar conteúdo técnico com criatividade tornou suas aulas únicas.

Ao Professor Cecatto, por seu domínio impressionante e por uma fala rápida, intensa e extremamente precisa. Suas avaliações desafiadoras me fortaleceram e moldaram meu pensamento analítico. Um professor exigente e generoso.

Ao Professor Ohse, por sua clareza conceitual e disponibilidade inabalável. Nunca, na minha frente, deixou um estudante com dúvidas e demonstrou, em cada aula, o que é comprometimento com o ensino.

Ao Professor Dennis, por ter sido uma verdadeira inspiração. Lembro com nitidez da primeira aula — sem slides, sem livro, apenas um guarda-chuva, uma caixa de giz e uma garrafinha de água. Ainda assim, ensinou e ensina com tanta maestria que redefiniu meu entendimento sobre o que é ministrar aula. Seu domínio de conteúdo, sua postura crítica e sua capacidade de apontar e corrigir falhas foram decisivos para minha formação. É o tipo de profissional que almejo ser.

Ao Professor Eduardo, meu orientador, por sua orientação cuidadosa, exigente e profundamente formadora. Seu olhar atento ao detalhe, sua busca por rigor conceitual e seu vastíssimo conhecimento foram pilares fundamentais deste trabalho. Sua seriedade, aliada à generosidade com que compartilhou seu tempo e saber, fazem dele uma das maiores referências que levarei desta graduação.

À Professora Viviane, por unir conhecimento acadêmico sólido com sensibilidade humana rara. Sua paixão pelo ensino e seu olhar atento às complexidades da sociedade são um exemplo vivo de educadora completa. Ensinar com profundidade e ao mesmo tempo cuidar — essa é sua marca, e ela não passou despercebida.

A todas essas pessoas — familiares, colegas, professores e amigos, que em especial me ensinaram que há sempre espaço para o erro, mas, também para o aprendizado — deixo minha mais sincera gratidão. Cada gesto, palavra, exemplo e apoio ajudaram a construir o caminho que me trouxe até aqui.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)”*

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo realizar um estudo teórico da dinâmica de um plasma, com ênfase nas deduções físicas e matemáticas que descrevem o movimento de partículas carregadas submetidas a diferentes configurações de campos elétricos e magnéticos. A metodologia adotada foi a pesquisa bibliográfica, de caráter qualitativo e quantitativo, baseada em fontes como livros, artigos e materiais audiovisuais, publicados entre 1960 e 2025. Inicialmente, foram apresentados os conceitos fundamentais da física de plasmas como temperatura, sua definição, critérios de classificação do plasma e parâmetros característicos de um plasma. Posteriormente, analisou-se classicamente o comportamento de partículas carregadas em campos eletromagnéticos uniformes e não uniformes. Por fim, estudou-se a interação entre o plasma do vento solar e o campo magnético terrestre, com destaque para os mecanismos de confinamento magnético que ocorrem nos cinturões de Van Allen. Constatou-se que as partículas carregadas provenientes do sol ao serem ser aprisionadas pelo campo geomagnético, realizam movimentos ciclotrônicos, de espelhamento magnético e de deriva. Esses movimentos resultaram em trajetórias fechadas, responsáveis por fenômenos como a corrente de anel. O trabalho procurou contribuir para a compreensão da física envolvida nesses processos e oferecer uma abordagem acessível ao estudo do plasma em nível de graduação.

Palavras-chave: plasma; movimento de partículas carregadas; campo magnético; vento solar.

ABSTRACT

This work aimed to carry out a theoretical study of plasma dynamics, with emphasis on the physical and mathematical derivations that describe the motion of charged particles subjected to different configurations of electric and magnetic fields. The methodology adopted was bibliographic research, with both qualitative and quantitative approaches, based on sources such as books, articles, and audiovisual materials published between 1960 and 2025. Initially, the fundamental concepts of plasma physics were presented, including temperature, plasma definition, classification criteria, and characteristic parameters. Subsequently, the classical behavior of charged particles in uniform and non-uniform electromagnetic fields was analyzed. Finally, the interaction between the solar wind plasma and Earth's magnetic field was studied, with emphasis on the magnetic confinement mechanisms that occur in the Van Allen belts. It was found that charged particles originating from the Sun, when trapped by the geomagnetic field, performed cyclotron motion, magnetic mirroring, and drift. These combined motions resulted in closed trajectories, responsible for phenomena such as the ring current. The study sought to contribute to the understanding of the physics underlying these processes and to offer an accessible approach to plasma studies at the undergraduate level.

Keywords: plasma; movement of charged particles; magnetic field; solar wind.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Distribuições do módulo das velocidades de um gás em equilíbrio térmico regida pela equação de distribuição de Maxwell-Boltzmann (A.44), para diferentes temperaturas.	14
2.2	Vapor por cima de lago congelado superficialmente, em Guarapuava-PR. .	16
2.3	Representação das distribuições de partículas na fase sólida.	19
2.4	Representação das distribuições de partículas na fase líquida.	20
2.5	Representação das distribuições de partículas na fase gasosa.	21
2.6	Representação das distribuições de partículas no estado de plasma. . . .	22
2.7	Fração de ionização n_i/n_n prevista pela equação de Saha (equação 2.5) em função da temperatura, para o nitrogênio.	24
2.8	Curva de aquecimento da água.	24
2.9	Escudo de Debye	26
2.10	Aurora Boreal.	31
2.11	Representação artística de uma tempestade solar atingindo Marte e removendo íons da atmosfera superior do planeta.	33
2.12	Representação artística do Tokamak ITER (<i>International Thermonuclear Experimental Reactor</i>).	35
3.1	Construção geométrica envolvendo as velocidades v_{x0} , v_{y0} e $v_{\perp}$	46
3.2	Círculo cartesiano para demonstração do movimento da partícula carregada, tanto com carga positiva $q>0$, quando para carga negativa $q<0$, submetida a um campo magnético saindo da tela.	49
3.3	Representação do movimento de uma partícula, carregada positivamente, no plano xy com o acréscimo do movimento no eixo z	51
3.4	Representação do movimento ciclotrônico e de deriva, de íons e elétrons, causado pelo campo elétrico $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$ em conjunção ao campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$	57
3.5	Representação do movimento ciclotrônico e de deriva, de íons e elétrons, causado pelo campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$ em conjunção ao campo gravitacional $\mathbf{g}$	59
4.1	Representação de um sistema de coordenadas, de uma partícula carregada positivamente, se movimentando juntamente ao centro guia no plano xy , inserido em um sistema de campo magnético não uniforme.	68
4.2	Representação dos eixos de coordenadas do movimento para uma partícula carregada positivamente e negativamente.	69
4.3	Representação dos eixos, em coordenadas cartesianas, para a obtenção de seus respectivos ângulos.	71
4.4	Representação da trajetória de um íon e um elétron inseridos em um campo magnético com deriva de gradiente.	73
4.5	Representação da trajetória de um íon inserido em um campo magnético não uniforme com gradiente na direção de z	77
4.6	Representação da trajetória de um íon, inserido em um campo magnético não uniforme, juntamente com o traçado de seu centro guia.	78
4.7	Pequeno descolamento dS sofrido pelo centro guia da partícula já representada na figura 4.6.	79
4.8	Representação da força centrífuga que aparece no movimento de uma partícula positiva submetida a um campo magnético não uniforme.	81

5.1	Perfil do interior da Terra, mostrando a variação da temperatura (geotermia) e a curva de ponto de fusão dos materiais “solidus”.	85
5.2	Ilustração esquemática das linhas de campo magnético geradas pela Terra, representadas como um campo magnético de um dipolo.	86
5.3	Esquema geral da magnetosfera da Terra, onde se ilustra as principais regiões.	89
5.4	Representação do campo $\mathbf{B}$ da equação 5.1.	90
5.5	Representação do movimento de partículas carregadas aprisionadas pelas regiões de campo magnético terrestre.	93
5.6	Representação do movimento das partículas carregadas aprisionadas nas regiões de campo magnético terrestre, considerando os termos de gradiente e curvatura.	95
A.1	Sistema anterior a colisão de uma partícula de massa m com velocidade inicial total $\mathbf{v}_i$ e componente de velocidade inicial $\mathbf{v}_{x_i}$, confinada em um cubo de lado L .	102
A.2	Sistema posterior a colisão de uma partícula de massa m e velocidade final total $\mathbf{v}_f$ e componente de velocidade final $\mathbf{v}_{x_f}$ confinada em um cubo de lado L .	103
A.3	Sistema em duas dimensões da partícula saindo de zero em x e voltando ao mesma coordenada em x .	105
A.4	Elemento de volume infinitesimal dW do espaço de velocidades.	109
A.5	Comportamento de uma função $\arctan(x)$ e $\arctan(y)$.	116
A.6	Representação gráfica, gerada a partir da equação A.40, da distribuição de velocidades de partículas de um gás ideal monoatômico em equilíbrio térmico, com temperatura constante $T = 300\text{ K}$ e massa molecular equivalente à do gás nitrogênio.	120
A.7	Figura da esquerda representa um elemento de volume infinitesimal dW em um espaço de velocidades e a figura da direita representa o mesmo espaço mas com as coordenadas esféricas.	122

LISTA DE SÍMBOLOS

Operadores Matemáticos

Σ	Somatório.
Δ	Varição ou diferença finita.
$\int$	Integral.
$\frac{d}{dt}$	Derivada total em relação ao tempo.
∂	Derivada parcial.
∇	Operador vetorial Nabla.
$\nabla \cdot$	Operador Divergente.
$\nabla \times$	Operador Rotacional.
$\cdot$	Produto escalar ou multiplicação.
$\times$	Produto vetorial.
$\langle \rangle$	Valor médio de uma grandeza.
∞	Infinito.

Constantes Físicas

k_B	Constante de Boltzmann.
N_A	Número de Avogadro.
R	Constante dos gases ideais.
e	Carga elementar.
ε_0	Permissividade elétrica do vácuo.
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo.
c	Velocidade da luz no vácuo.
π	Constante Pi.

Variáveis Físicas (Vetores)

$\mathbf{B}$	Campo Magnético.
$\mathbf{E}$	Campo Elétrico.
$\mathbf{F}$	Força.
$\mathbf{g}$	Campo Gravitacional.
$\mathbf{J}$	Densidade de Corrente Elétrica.
$\mathbf{p}, \mathbf{p}$	Momentum linear.
$\mathbf{r}$	Posição.
$\mathbf{v}$	Velocidade.
$\mathbf{v}_c$	Velocidade ciclotrônica.
$\mathbf{v}_d$	Velocidade de deriva (<i>drift</i>).

Variáveis Físicas (Escalaes)

L^2	Área.
eV	Elétron-volt.
$f(v)$	Função de distribuição de velocidades.
K	Energia Cinética.
L	Comprimento.
m	Massa.
N_D	Número de Debye.
n	Densidade de partículas ou mols.
P	Pressão.
Q	Fator de ganho de energia.
q	Carga elétrica.
r_L	Raio de Larmor.
T	Temperatura.
t	Tempo.
U_i	Energia de ionização.
V	Volume.
v_{rms}	Velocidade quadrática média.

Letras Gregas

α	Grau de ionização.
δ	Ângulo de fase.
θ, ϕ	Coordenadas angulares.
λ_D	Comprimento de Debye.
μ	Momento de dipolo magnético.
ρ	Densidade de carga.
τ	Tempo médio entre colisões.
Φ_m	Fluxo magnético.
$\Phi(v)$	Distribuição de Maxwell-Boltzmann.
ω_c	Frequência angular ciclotrônica.
ω_{pe}	Frequência de plasma.

SUMÁRIO

1	Introdução	11
2	Definição de plasma	13
2.1	Discussões sobre a distribuição de Maxwell-Boltzmann	13
2.2	Temperatura e seu uso no plasma	17
2.3	Parâmetros de um plasma	18
2.3.1	Equação de Saha	22
2.3.2	Comportamento coletivo	25
2.3.3	Escudo de Debye	26
2.3.4	<i>Quasi-neutrality</i>	28
2.3.5	Diferentes temperaturas em um plasma	28
2.3.6	Os três critérios que definem um plasma	30
2.4	Onde se pode encontrar plasma	30
3	Movimento de uma partícula carregada em campos elétricos e magnéticos uniformes	36
3.1	Força de Lorentz	36
3.2	Equações de Maxwell	38
3.3	Campo B uniforme e E nulo	40
3.4	Campos B e E uniformes	51
3.5	Movimento sob campo gravitacional	58
4	Movimento de uma partícula carregada em um campo magnético não uniforme	61
4.1	Considerações sobre o campo magnético	62
4.2	Equações de movimento	64
4.3	Força paralela e perpendicular ao campo magnético	67
4.4	Interação em um campo com gradiente	70
4.4.1	A deriva do gradiente	72
4.5	Invariante do <i>momentum</i> magnético	73
4.6	Invariante do fluxo magnético	75
4.7	Interação em um campo com divergência e convergência	75
4.8	Termo de curvatura do campo	78
4.9	Velocidade de deriva total	82
5	O campo magnético terrestre e suas interações com as partículas carregadas advindas do espaço	84
5.1	A origem do campo magnético terrestre	84
5.2	Regiões de campo magnético terrestre	88
5.3	Campo magnético de um dipolo	89
5.4	Interação - vento solar e campo magnético terrestre	92
6	Conclusão	96
7	Referências	98
A	Distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann	101

1 INTRODUÇÃO

A Física de Plasmas é uma área da ciência que investiga o comportamento de gases ionizados, conhecidos como plasmas, e suas interações com campos elétricos e magnéticos. Esse estado de gás ionizado é predominante no universo e está presente em inúmeros fenômenos astrofísicos, como as emissões solares, o interior das estrelas e o comportamento do vento solar. No contexto terrestre, destaca-se a interação entre o vento solar e o campo magnético da Terra, que resulta em efeitos como as auroras boreais e a formação dos cinturões de radiação de Van Allen (Chen, 2016).

Apesar de sua relevância científica, a Física de Plasmas permanece relativamente ausente das disciplinas fundamentais da graduação em Física. Essa lacuna motiva a escolha deste tema, que se mostra relevante tanto para a compreensão de fenômenos naturais quanto para a formação de futuros pesquisadores. O estudo da dinâmica de partículas carregadas em campos eletromagnéticos oferece subsídios para entender desde processos astrofísicos até aplicações em dispositivos de fusão nuclear.

Dessa forma, o presente trabalho procura responder à seguinte questão: como se comportam partículas carregadas, especialmente aquelas provenientes do vento solar, ao interagirem com regiões de campo magnético terrestre? Esse campo magnético pode ser aproximado como um campo gerado a partir de um dipolo magnético. Para isso, adota-se uma abordagem teórica que se fundamenta na análise clássica do movimento de partículas carregadas submetidas a diferentes configurações de campos elétricos e magnéticos, com especial atenção ao confinamento que ocorre na região dos cinturões de Van Allen.

O objetivo geral deste trabalho é realizar um estudo teórico clássico da dinâmica de um plasma, com ênfase nas deduções físicas que descrevem o comportamento de partículas carregadas ao serem submetidas a campos elétricos e magnéticos diversos. Entre os objetivos específicos estão: compreender e apresentar o conceito de temperatura; definir o plasma, suas principais características e critérios de classificação; estudar o movimento de partículas em campos elétricos nulos e magnéticos uniformes; analisar os efeitos da presença simultânea de campos elétricos, magnéticos e gravitacionais; compreender o movimento de partículas em campos magnéticos não uniformes com gradiente, curvatura e divergência; introduzir a estrutura do campo magnético terrestre; verificar se o vento solar pode ser considerado um plasma; e, por fim, descrever a trajetória das partículas carregadas ao serem confinadas nos cinturões de Van Allen.

Para alcançar tais objetivos, empregou-se uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa e quantitativa, conforme classificação de Appolinário (2011), caracterizada como descritiva, com coleta de dados em fontes secundárias não-humanas. Os materiais consultados incluem livros, artigos científicos, dissertações, teses e videoaulas, disponíveis em bibliotecas físicas e em plataformas como Google Acadêmico, Scielo e o portal de Periódicos da CAPES, abrangendo publicações entre 1960 e 2025. Os termos utilizados nas buscas bibliográficas foram: “física de plasmas”, “confinamento do plasma”, “introdução ao plasma” e “plasma no universo”. As informações obtidas foram organizadas por temática e sistematizadas com o objetivo de fundamentar as análises desenvolvidas ao longo deste trabalho.

Com isso, pretende-se não apenas contribuir para o entendimento teórico dos fenômenos que envolvem o plasma, mas também oferecer uma abordagem acessível e didática para estudantes de graduação, incentivando a curiosidade científica e promovendo o interesse por uma área essencial à compreensão do universo e de diversos fenômenos que ocorrem em nosso planeta.

2 DEFINIÇÃO DE PLASMA

2.1 DISCUSSÕES SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DE MAXWELL-BOLTZMANN

Neste capítulo, inicia-se o estudo para a compreensão do que define o plasma, “o estado da matéria” que compõe 99% do universo visível Piel (2010). Contudo, antes de se aprofundar nas propriedades de um plasma, é fundamental revisitar um dos conceitos mais essenciais da física, a temperatura. Em vez de a tratar apenas como uma medida macroscópica, busca-se aqui a compreender a partir do comportamento microscópico de um vasto conjunto de partículas. O ferramental que permite fazer essa análise se dá pela equação de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

Um gás rarefeito e monoatômico constituído de partículas neutras possui diferentes velocidades para cada uma destas partículas. O que governa seus movimentos são suas colisões. A função que melhor descreve essa distribuição de velocidades é a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann, dada pela equação 2.1/A.44.

$$\Phi(v) = 4\pi f(v)v^2 = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \right)^3 v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}}, \quad (2.1)$$

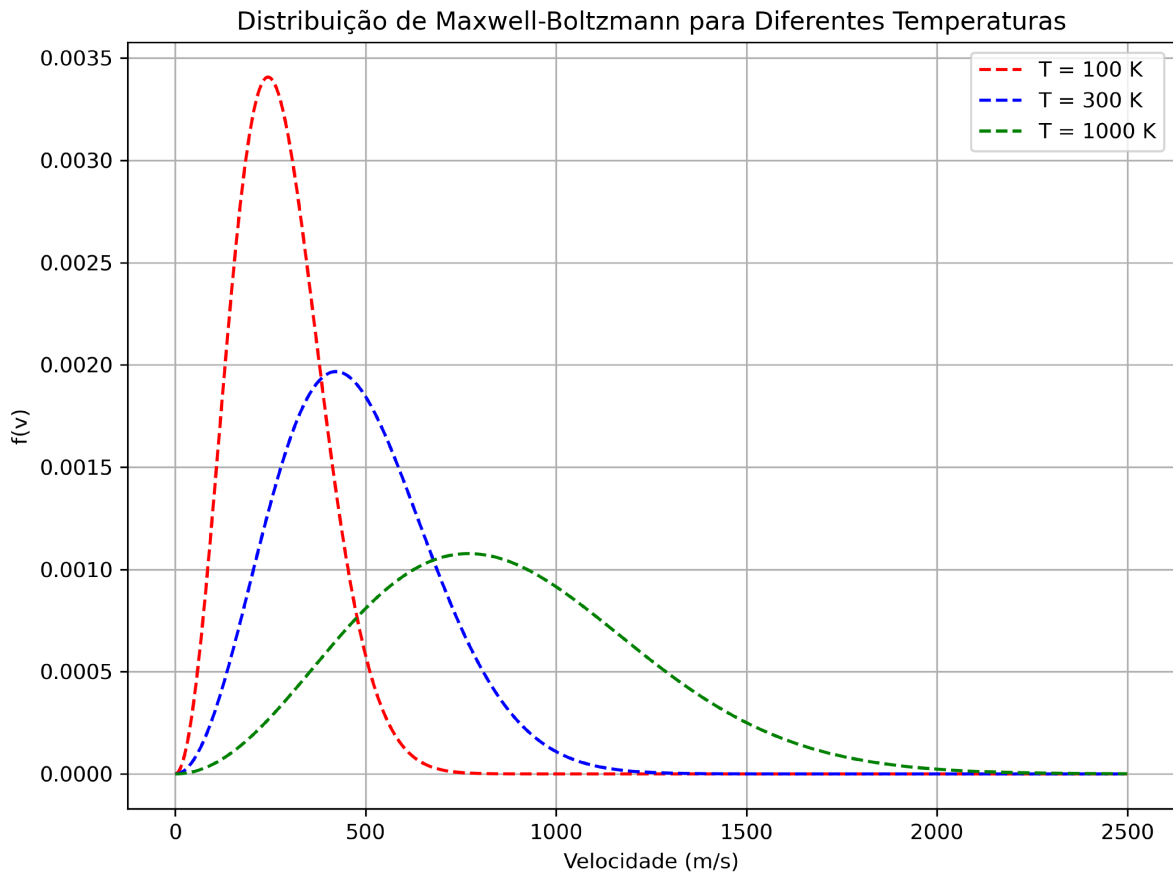
onde v é o módulo da velocidade da partícula, m é a massa da partícula, T é a temperatura absoluta do gás e $k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ é a constante de Boltzmann. A equação 2.1 está demonstrada no Apêndice A e é definida como equação de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann representada por $\Phi(v)$, onde expressa a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula com velocidade v , em um gás em equilíbrio térmico macroscópico. Tal equação traz aspectos valiosos para discussão acerca do que se busca analisar, o comportamento do gás. Para se observar estes atributos que a equação traz, gera-se o gráfico (2.1).

A figura 2.1 foi gerada a partir da equação de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann (A.44). Seu eixo vertical representa os valores que a função $f(x)$ pode assumir, em sm^{-1} , ou seja, valores de suas densidade de probabilidade de se encontrar partículas com velocidade v , e o eixo horizontal as possíveis velocidades, em ms^{-1} que as partículas do gás podem apresentar. As curvas em vermelho, azul e verde, representam, respectivamente, a distribuição de velocidades, referentes a um equilíbrio térmico de 100 K, 300 K e 1000 K de temperatura do sistema.

Visualizando mutuamente a equação A.44 e o gráfico da figura 2.1, diferentemente

da figura A.6, gerada a partir da equação de distribuição de velocidades de Maxwell (A.40), que decresce exponencialmente a partir do zero, por uma gaussiana, esta inicia seu movimento todo a partir do zero, com o termo v^2 dominando e após atingir o valor mais provável de velocidade, decresce exponencialmente, com o termo $e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}}$ assumindo a caracterização da função.

Figura 2.1: Distribuições do módulo das velocidades de um gás em equilíbrio térmico regida pela equação de distribuição de Maxwell-Boltzmann (A.44), para diferentes temperaturas.



Fonte: Autor (2024).

O aumento da temperatura de um gás provoca dois efeitos principais sobre a distribuição das velocidades das partículas: o aumento da velocidade média e o aumento da dispersão das velocidades. Como ilustrado na figura 2.1, percebe-se que, à medida que a temperatura sobe, o pico da curva de distribuição se desloca para a direita, indicando maiores velocidades. Por exemplo, na curva em vermelho ($T = 100 \text{ K}$), o pico da distribuição está entre 0 e 500 ms^{-1} , enquanto na curva em verde ($T = 1000 \text{ K}$), o pico se encontra entre 500 e 1000 ms^{-1} , evidenciando a relação direta entre temperatura

e velocidade das partículas. Além disso, o aumento da temperatura também provoca o alargamento da curva, ou seja, um aumento na dispersão das velocidades. Isso significa que, com temperaturas mais altas, há maior probabilidade de encontrar partículas com velocidades, logo energias cinéticas, altas, e menor probabilidade de se encontrar partículas com energia cinética baixa, implicando que haja um aumento na diferença entre as velocidades extremas e a velocidade média.

Alguns fenômenos naturais podem ser explicados a partir da distribuição de Maxwell-Boltzmann. Analisando a figura 2.1 se observa que a velocidade de maior probabilidade que as partículas podem assumir está centrada no pico da curva de distribuição, contudo, por se tratar de um sistema caótico de colisões, uma fração das partículas podem se encontrar com velocidades muito superiores (e também inferiores) desse pico. Como, por exemplo, na curva em verde, a velocidade mais provável de se encontrar uma partícula nesse sistema está entre 500 e 1000 $m.s^{-1}$, mas como se observa, pode-se encontrar partículas, em menor quantidade, com velocidade acima de 1500 $m.s^{-1}$. Essa característica permite explicar a rarefação da atmosfera terrestre, a “fumaça” que se encontra pela manhã acima de um lago com águas frias e até mesmo o a sensação gélida de sair da piscina (Penna, 2021).

Essa mesma lógica pode ser aplicada para parte da explicação da ausência de certos gases, como o hidrogênio, na atmosfera terrestre. Por exemplo, segundo Tipler e Mosca (2016, p. 591), sabe-se que a rapidez média quadrática (ou rapidez rms) das moléculas de hidrogênio, em temperatura ambiente, é de aproximadamente 1,93 km/s. Comparando com a velocidade de escape da Terra, que é de cerca de 11,2 km/s, essa rapidez corresponde a aproximadamente 17% da velocidade de escape. Embora possa parecer uma fração pequena, a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann indica que existe uma parcela significativa de moléculas com velocidades superiores à média. Quando a rapidez rms de um gás atinge entre 15 a 20% da velocidade de escape, uma quantidade apreciável de partículas adquire energia suficiente para escapar da gravidade terrestre ao longo do tempo. Esse é o caso do hidrogênio, cujas moléculas mais rápidas, com o passar dos milhões de anos, escaparam para o espaço, o que justifica a virtual ausência de hidrogênio livre na atmosfera atual. Por outro lado, moléculas mais pesadas, como o oxigênio, possuem rapidez rms bem inferior, cerca de um quarto da do hidrogênio, o que corresponde a apenas 4% da velocidade de escape da Terra. Isso explica, em

partes, porque a perda de oxigênio atmosférico é praticamente desprezível, mantendo sua concentração estável nas camadas inferiores da atmosfera terrestre.

Figura 2.2: Vapor por cima de lago congelado superficialmente, em Guarapuava-PR.



Fonte: Globo, 2021.

Outro fenômeno interessante que pode ser explicado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann é a famosa “fumaça na água do lago gelado”. A imagem da figura 2.2 mostra uma espécie de fumaça na parte superior de um lago de um parque em Guarapuava-PR, em 2021, onde as temperaturas atingiram $-5,4^{\circ}\text{C}$ ($267,75\text{ K}$). A explicação aqui é que nesta temperatura há partículas que podem adquirir velocidades tão grandes que chegam desfazer sua estrutura líquida original (por exemplo da água) adquirindo uma estrutura gasosa e formando essa camada de “fumaça superficial” (Penna, 2021).

Como último exemplo se pode citar a sensação de frio que se tem ao sair de uma piscina, mesmo em uma dia quente. A água, da piscina, que está normalmente a temperatura ambiente gruda superficialmente na pele se dividindo em pequenas gotículas. À temperatura ambiente, algumas partículas dessa gotícula possuem velocidade suficiente para evaporarem, deixando a média da temperatura, da gotícula, menor, fazendo com que o corpo humano necessite ceder seu calor para que entre em equilíbrio térmico com as gotículas (Penna, 2021).

2.2 TEMPERATURA E SEU USO NO PLASMA

Pela secção anterior se pode observar um comportamento de proporção entre a temperatura T e a velocidade v das partículas, esta explicitada pela equação de distribuição de Maxweel-Boltzmann. Contudo, para que se possa observar essa relação de forma mais explícita se manipula algumas equações. Utilizando a equação A.32 e a moldando se pode obter uma relação direta entre a temperatura e velocidade. Assim,

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m},$$

multiplicando-se os termos por $\frac{1}{2}m$, tem-se

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

onde a parte esquerda da equação se caracteriza como a energia cinética média relacionada a componente x das velocidades. Logo,

$$\langle K(v_x) \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (2.2)$$

Expandindo para as três dimensões espaciais ($v_x^2 = \frac{1}{3}v^2$), se obtém que:

$$\frac{1}{2}m\frac{1}{3}\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

logo,

$$\langle K(v) \rangle = \frac{3}{2}k_B T, \quad (2.3)$$

onde $\langle K(v) \rangle$ é a energia cinética média.

As equações (2.2) e (2.3) estabelecem a relação fundamental entre a temperatura T e a energia cinética média das partículas. Nesse contexto, cada direção independente de movimento (x , y e z) é tratada como um grau de liberdade de translação. O Teorema da Equipartição da Energia estabelece que, para um sistema em equilíbrio térmico, a cada um desses graus de liberdade está associada uma energia média de $\frac{1}{2}k_B T$. Portanto, como a partícula de um gás ideal monoatômico possui três graus de liberdade de translação, sua energia cinética média total é a soma das contribuições de cada eixo, resultando em

$\langle K \rangle = \frac{3}{2}k_B T$, o que confirma o resultado da equação (2.3).

A relação entre a temperatura de um sistema e sua energia interna é fundamental. Em um gás ideal, essa energia se manifesta predominantemente como a energia de movimento de suas partículas. Desta forma, um aumento na temperatura T implica diretamente um aumento na energia cinética média de translação das moléculas. Essa conexão direta permite que a temperatura seja interpretada, do ponto de vista microscópico, como uma “[...] medida da energia cinética média de translação das moléculas de um gás ideal” (Nussenzveig, 2002).

Estabelecida a relação da temperatura com a energia, por convenção, na física, se pode adotar a temperatura em unidades de energia. As motivações para tal escolha se dão a partir de que o plasma, que irá ser trabalhado nos capítulos posteriores, por ser plasma sempre possuirá temperaturas extremas assim necessitando de uma unidade de medida que não leve muitos dígitos e também para fins subsecutivamente de simplificações de unidades. A unidade de medida para a temperatura que irá ser adotada será o eV (elétron-volt), onde $1\ eV = 1,602 \times 10^{-19}\ J$ é a quantidade de energia ganha por um elétron acelerado por uma diferença de potencial (DDP) de $1\ V$.

Para evitar confusões não será utilizada a energia cinética média $K(v)$, mas sim $K_B T$ para denotar a temperatura. Para que $1\ K_B T$ corresponda a $1\ eV$ é preciso de uma temperatura que a equivalha. Portanto,

$$k_B T = 1\ eV,$$

$$T = \frac{1\ eV}{k_B} = \frac{1,602 \times 10^{-19}\ J}{1,381 \times 10^{-23}\ \frac{J}{K}} = 11600\ K,$$

denotando assim que:

$$1\ eV \approx 11600\ K \tag{2.4}$$

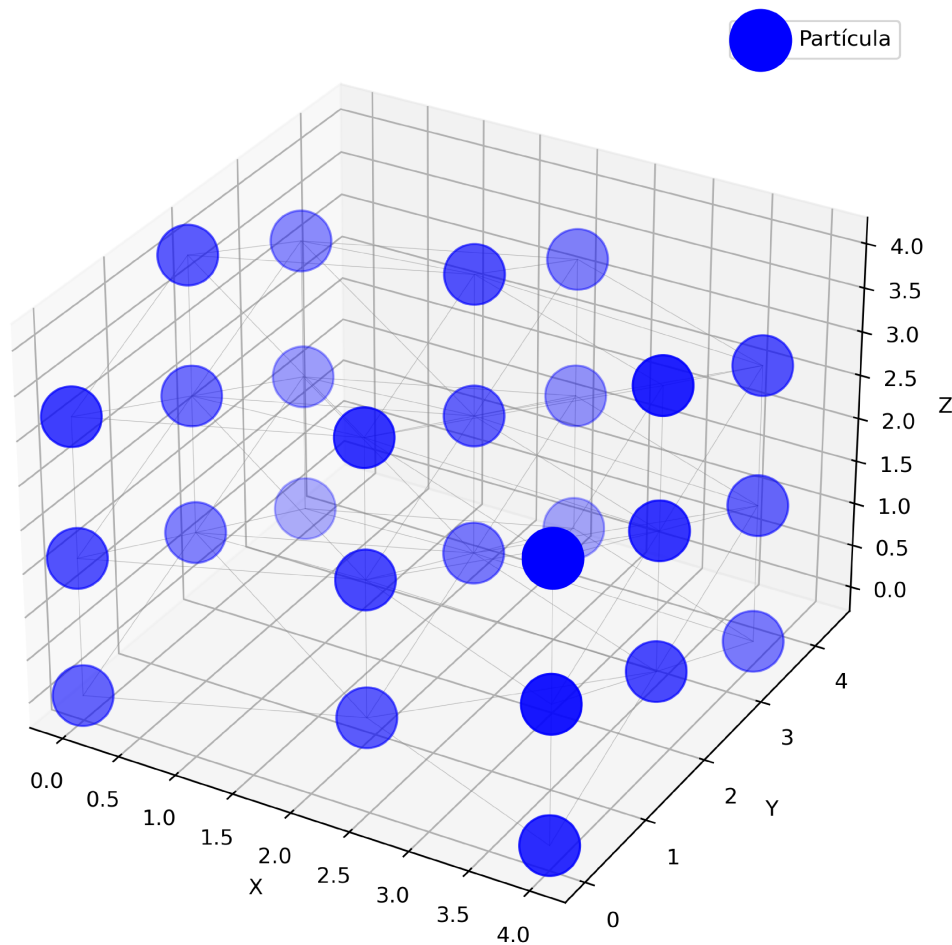
2.3 PARÂMETROS DE UM PLASMA

Para se definir o plasma é necessário entender que ele é algo como um estado da matéria (não se limitando somente a essa definição), portanto quando se for comentar acerca do mesmo se estará trabalhando com íons e elétrons em determinadas condições de pressão e principalmente temperatura.

Em baixas temperaturas, a matéria se encontra tipicamente no estado sólido.

Nesse estado, como ilustrado na figura 2.3, os átomos ou moléculas estão organizados em uma estrutura rígida e ordenada, como uma rede cristalina. Como se pode visualizar na figura 2.3 em que as partículas (esferas azuis) estão dispostas em um arranjo ordenado, com posições próximas e fixas, conectadas por meio de ligações intermoleculares (retas em cinza), retendo sua própria forma e volume, caracterizando assim um sólido.

Figura 2.3: Representação das distribuições de partículas na fase sólida.

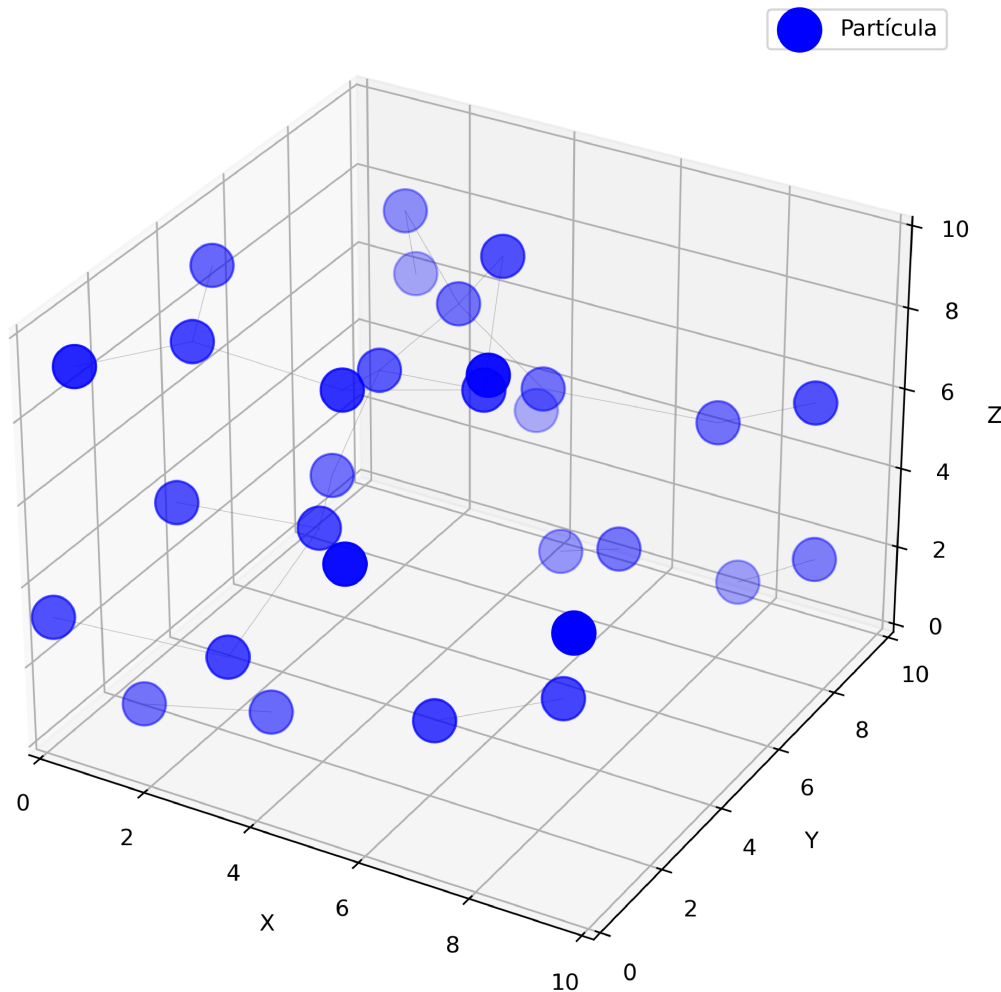


Fonte: Autor (2024).

Ao se fornecer energia (calor) ao sólido, sua temperatura aumenta, e a amplitude das vibrações das partículas se intensifica. Como se pode observar pela figura 2.4, com o aumento da temperatura, uma parte das partículas (esferas azuis) ficam desassociadas de suas ligações intermoleculares (retas em cinza), o que resulta em um espaçamento um pouco maior entre as mesmas, podendo ser observado pela escala entre as imagens ter aumentado de 4 para 10 entre as figuras 2.3 e 2.4. Esse processo continua até que o sistema atinja o ponto de fusão. Nesse ponto, ocorre a primeira transição de fase: mesmo que mais energia seja adicionada, a temperatura do sistema permanece constante.

A energia fornecida, conhecida como calor latente de fusão, é utilizada para quebrar a estrutura ordenada do sólido. Uma vez que as ligações são rompidas, as partículas ganham liberdade para deslizar umas sobre as outras, caracterizando o estado líquido (figura 2.4). Essa passagem de um estado para outro, que ocorre a uma temperatura fixa, é uma transição descontínua.

Figura 2.4: Representação das distribuições de partículas na fase líquida.

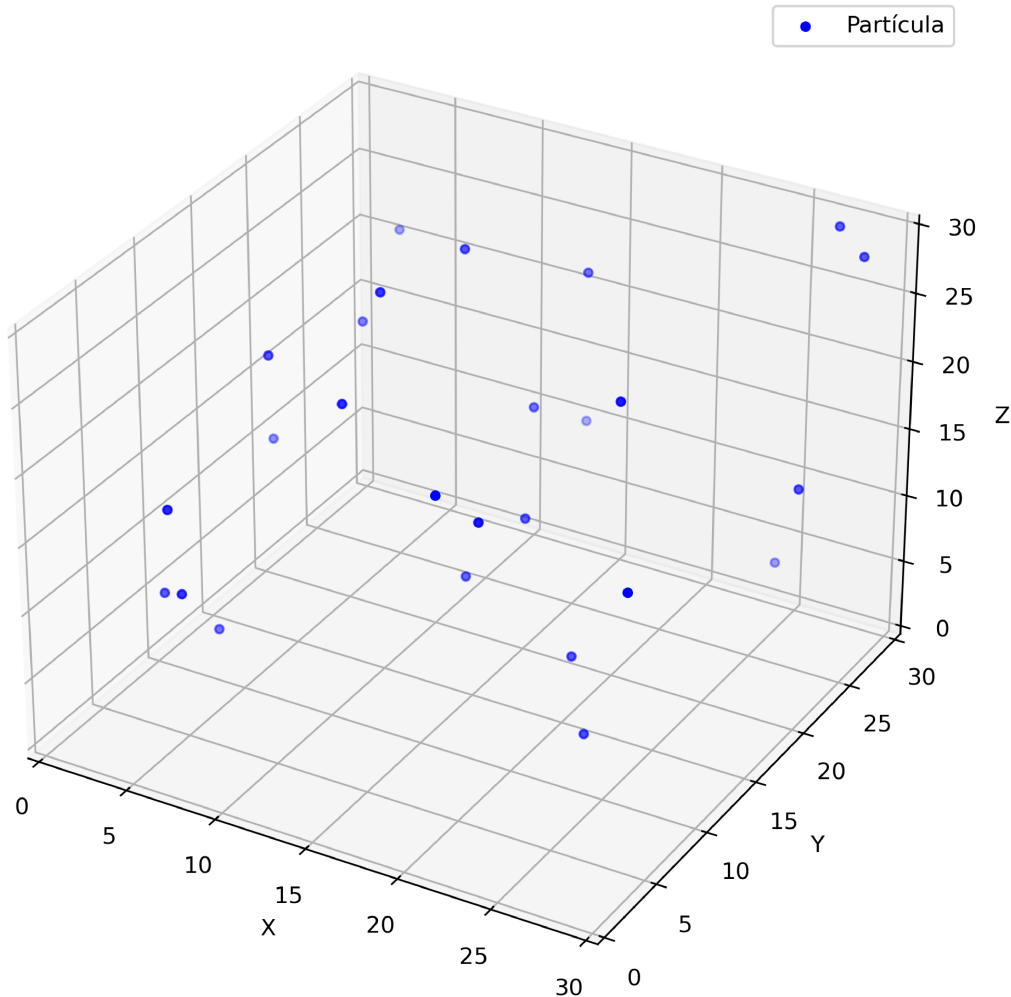


Fonte: Autor (2024).

Com o contínuo fornecimento de energia, a temperatura do líquido aumenta até atingir o ponto de ebulição, onde ocorre uma nova transição de fase descontínua. Novamente, a temperatura se estabiliza, e a energia adicional, chamada de calor latente de vaporização, é usada para vencer completamente as forças intermoleculares restantes. Isso permite que as partículas se afastem significativamente umas das outras e se movam de forma livre e desordenada, ocupando todo o volume do recipiente, o que caracteriza o estado gasoso (figura 2.5). Em tal representação se pode perceber este aumento médio

em relação ao estado líquido (figura 2.4) do espaçamento das partículas (esferas azuis) que resultam em espaços vazios.

Figura 2.5: Representação das distribuições de partículas na fase gasosa.



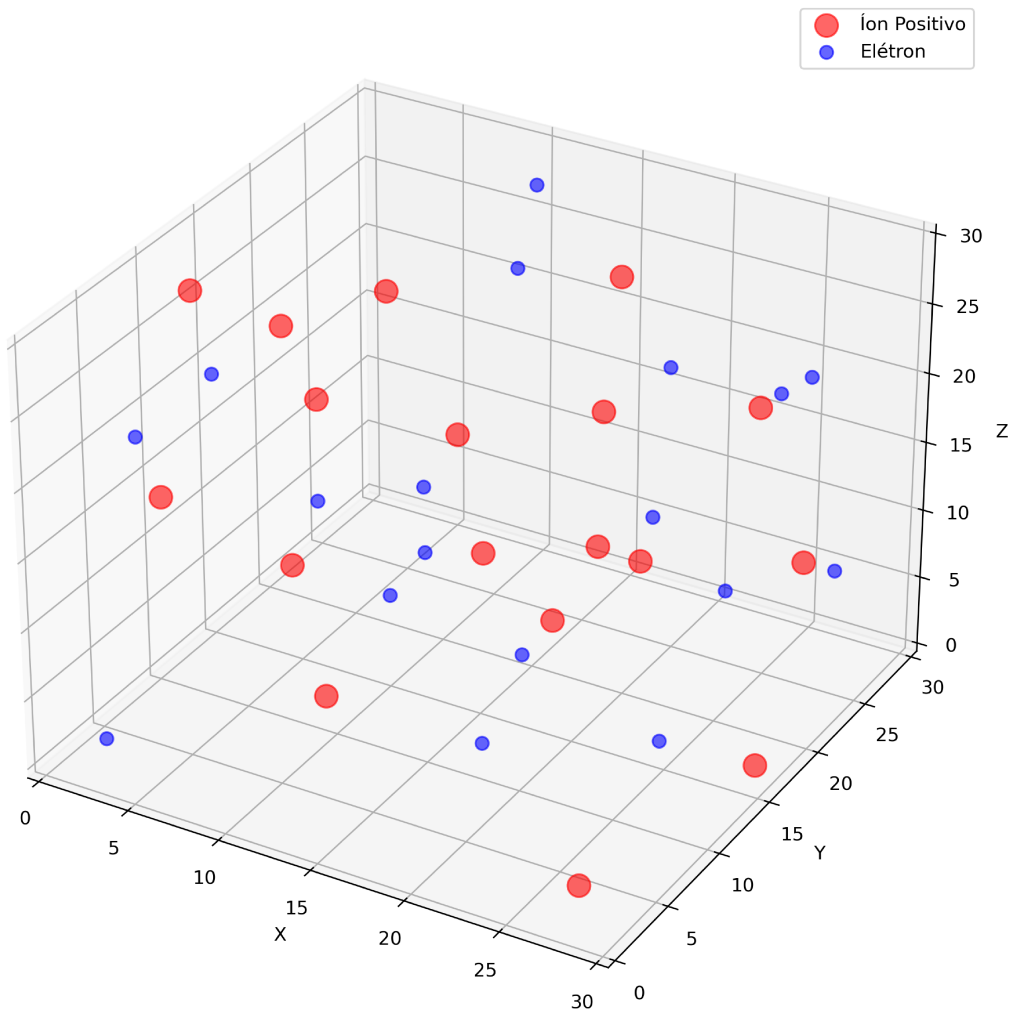
Fonte: Autor (2024).

Portanto, as transições entre os três estados clássicos da matéria sólido, líquido e gasoso, são eventos descontínuos e bem definidos. Elas ocorrem em temperaturas específicas e envolvem a absorção de calor latente para reorganizar a estrutura e as ligações entre as partículas. Contudo, quando se fornece energia/temperatura o suficiente para esse sistema que já se encontra em estado gasoso é possível ter suas partículas ionizadas, podendo-se chegar a um tipo de “quarto estado da matéria” denominado plasma. Este “estado” está representado na figura 2.6, onde os elétrons (esferas azuis) ganharam energia o suficiente para se desprenderem de suas ligações eletrônicas com o núcleo (esferas vermelhas).

Porém, todo o gás, em certo nível, possui algum grau de ionização, logo uma

definição mais útil para um plasma seria de que “*A plasma is a quasineutral gas of charged and neutral particles which exhibits collective behavior*” (Chen, 2016), que em tradução literal significaria que um plasma é um gás como se fosse neutro de partículas carregadas e neutras que exibe comportamento coletivo. Agora é plausível trazer a compreensão ao que se refere ao grau de ionização, ao comportamento coletivo e a *quasi-neutrality*, para isso se introduz a secção denominada "Equação de Saha", que irá tratar do grau de ionização de um gás.

Figura 2.6: Representação das distribuições de partículas no estado de plasma.



Fonte: Autor (2024).

2.3.1 EQUAÇÃO DE SAHA

A equação de Saha descreve o grau de ionização de um gás em equilíbrio térmico total como função da temperatura e da densidade de partículas (Chen, 2016). Essa

equação mostra como o aumento da temperatura favorece a ionização, mesmo quando esta ocorre em escalas bem inferiores à energia de ionização do átomo isolado. A forma geral da equação é dada por:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-U_i/k_B T}, \quad (2.5)$$

onde n_i e n_n são, respectivamente, o número de partículas por unidade de volume (m^{-3}) de átomos ionizados e neutros, T é a temperatura do gás em kelvins, k_B é a constante de Boltzmann e U_i é a energia de ionização do átomo que constitui o gás, expressa em joules. Seja α o grau de ionização do gás como sendo igual a razão entre o número de íons pelo número total de partículas, obtém-se a seguinte equação:

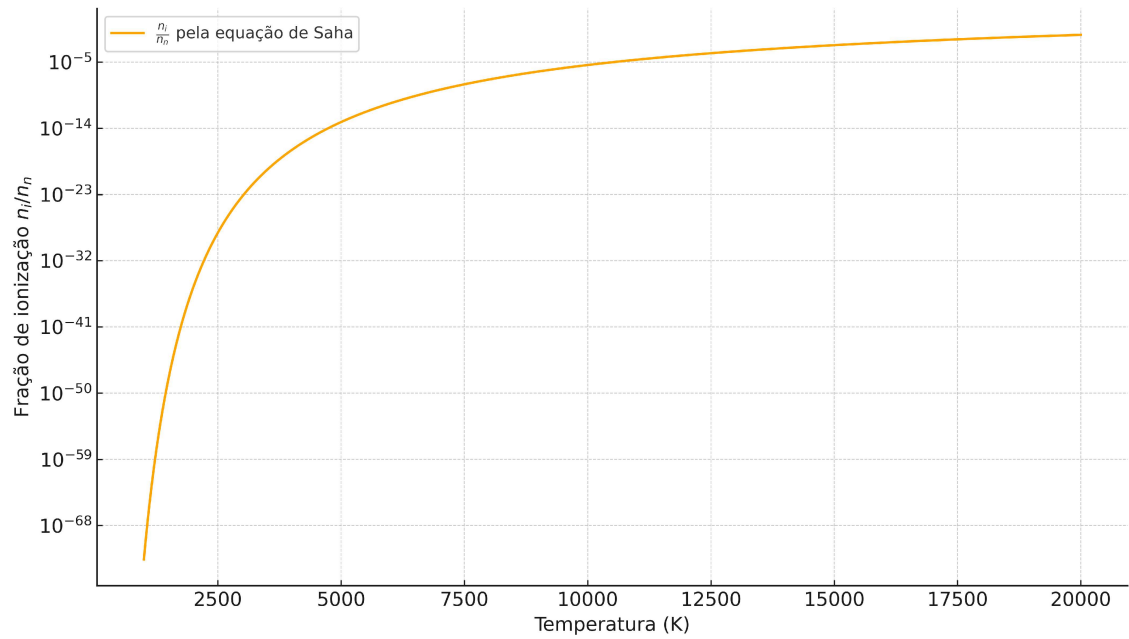
$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_n} = \frac{n_i}{n_n} \left(1 + \frac{n_i}{n_n}\right)^{-1}, \quad (2.6)$$

onde α (equação 2.6) é definido como o grau de ionização do gás que pode ser obtido a partir do resultado da equação de Saha, de modo que quando todo o gás for ionizado, o número de partículas neutras n_n vai para zero e o α vai para 1 e quando todas as partículas do sistema forem neutras o grau de ionização α vai para zero, tornando o sistema neutro.

A partir do gráfico da fração de ionização n_i/n_n como função da temperatura (figura 2.7), observa-se que mesmo para temperaturas bem abaixo da energia de ionização expressa em kelvins (por exemplo, $U_i \approx 14,5 \text{ eV} \approx 1,7 \times 10^5 \text{ K}$ para o nitrogênio), já ocorre um aumento gradual da ionização, com a fração n_i/n_n saindo de valores extremamente baixos e crescendo exponencialmente (Chen, 2016) até o valor máximo para o eixo vertical $\frac{n_i}{n_n} = 1$. Essa transição suave indica que a passagem do gás neutro ao plasma ocorre de forma contínua, sem uma ruptura abrupta como se observa nas transições de fase clássicas (como, por exemplo, do líquido para o gasoso). Assim, embora o plasma apresente propriedades distintas, a ausência de uma descontinuidade na evolução da fração de ionização justifica o argumento de que o plasma não constitui um “quarto estado” da matéria nos mesmos moldes em que se define os três estados clássicos.

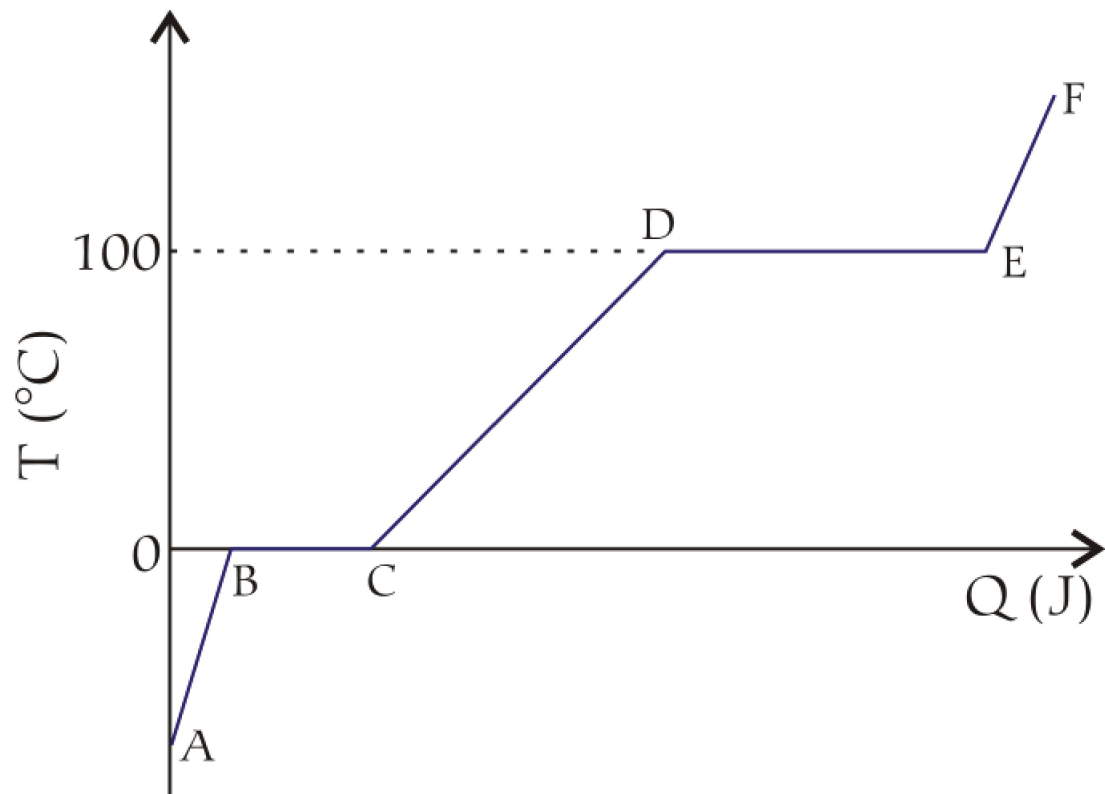
Ao se comparar o gráfico da fração de ionização previsto pela equação de Saha (figura 2.7) com a tradicional curva de aquecimento da água (figura 2.8), observa-se uma diferença fundamental. No caso da água, as mudanças de estado são eventos descontínuos, marcados por patamares de temperatura nos quais a energia fornecida (calor latente) é

Figura 2.7: Fração de ionização n_i/n_n prevista pela equação de Saha (equação 2.5) em função da temperatura, para o nitrogênio.



Fonte: Autor (2024).

Figura 2.8: Curva de aquecimento da água.



Fonte: Silveira (2016).

usada para quebrar ligações intermoleculares, definindo claramente as fases sólida, líquida e gasosa. Em contrapartida, a transição de um gás para um plasma, descrita pela equação de Saha, é um processo suave e contínuo. Não há um ponto de transição ou uma temperatura fixa onde o gás “vira” plasma, em vez disso, a fração de partículas ionizadas aumenta progressivamente com a temperatura.

Esse comportamento contínuo justifica o entendimento moderno de que o plasma não é, de fato, um “quarto estado da matéria” no sentido tradicional, mas sim um regime de ionização progressiva de um gás. A razão física para essa transição gradual está na distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann (equação A.44). Mesmo que a temperatura média do gás seja inferior à energia de ionização U_i , a distribuição garante que sempre existirá uma “cauda” de partículas com energia cinética suficientemente alta para, através de colisões, ionizar os átomos. É a existência dessa pequena fração de partículas superenergéticas que inicia e sustenta o processo de ionização de forma gradual, conforme previsto pela equação de Saha.

2.3.2 COMPORTAMENTO COLETIVO

Para explicar o comportamento coletivo se pode fazer um experimento mental. Imagina-se um ambiente composto por ar comum. Como a molécula é neutra, há um equilíbrio entre as cargas, assim, a força de Coulomb não atua a distância nestas partículas. Além disso, considera-se desprezível a força gravitacional. O que gerencia o movimento destas moléculas são apenas suas “colisões”, como visto nas secções anteriores desse capítulo, não de uma maneira com que os núcleos se toquem, mas, se repelindo à medida que se aproximam por conta da força eletromagnética. Um exemplo é que quando estas partículas neutras recebem energia na forma de som elas propagam a mesma através das ditas “colisões”. Contudo, isso não acontece em um gás no estado de plasma, onde há partículas carregadas (Chen, 2016).

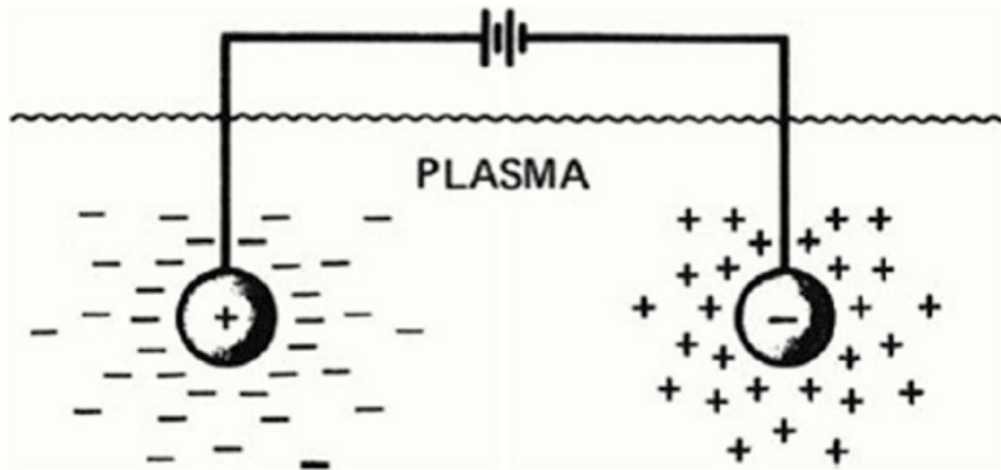
Neste tipo de ambiente de plasma podem ocorrer concentrações de partículas de mesmo sinal em determinadas regiões, e como estas partículas estão em um alto grau de agitação térmica, logo em movimento, produzem campos elétricos que se somam e geram movimentos das cargas de sinais opostos. O movimento destas cargas é denominado corrente elétrica e se há corrente elétrica, pela Lei de Ampère, há a geração subsequente de campos magnéticos que por consequência afetam o movimento de outras cargas distantes,

isso explica o comportamento coletivo.

2.3.3 ESCUDO DE DEBYE

O escudo de Debye é um fenômeno fundamental da física de plasmas que descreve a maneira como as cargas elétricas se organizam coletivamente para reduzir a influência de campos eletrostáticos introduzidos localmente. Quando uma carga elétrica é inserida em um plasma, os elétrons muito mais leves e móveis que os íons se redistribuem ao redor dessa carga, formando uma nuvem que tende a neutralizar o campo gerado, como se pode observar na figura 2.9.

Figura 2.9: Escudo de Debye



Fonte: Chen (2016).

A escala de distância sobre a qual essa blindagem ocorre é chamada de comprimento de Debye, denotado por λ_D , e é definida como:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \quad (2.7)$$

em que, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo, k_B é a constante de Boltzmann, T_e é a temperatura dos elétrons, n_e é a densidade de elétrons, e e é a carga elementar.

A existência do escudo de Debye impõe três critérios mínimos para que um sistema ionizado seja considerado um plasma. O primeiro critério é que o tamanho característico L do sistema seja muito maior que o comprimento de Debye ($L \gg \lambda_D$). Isso garante que o plasma tenha volume suficiente para que os efeitos de blindagem possam se manifestar adequadamente (Chen, 2016).

O segundo critério diz respeito ao número de partículas dentro de uma esfera de raio λ_D , chamada esfera de Debye. Para as partículas negativamente carregadas (elétrons) o número destas nessa esfera de Debye é igual ao produto do volume pela densidade de elétrons ($N_D = V_D n_e$), de modo que:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n_e \lambda_D^3 \quad (2.8)$$

Para que a blindagem tenha validade estatística, é necessário que $N_D \gg 1$, ou seja, muitos elétrons devem estar presentes dentro da esfera de Debye.

Por fim, o terceiro critério para a existência de um plasma está relacionado à frequência das colisões. Para que o gás exiba um comportamento coletivo, as oscilações eletrostáticas características do plasma devem ocorrer em uma escala de tempo muito mais rápida que o tempo médio entre as colisões que dissipam a energia do sistema.

O parâmetro que descreve essa oscilação coletiva é a frequência de plasma dos elétrons, ω_{pe} . Fisicamente, ela representa a frequência natural com a qual o conjunto de elétrons de um plasma oscila se for ligeiramente deslocado de sua posição de equilíbrio em relação aos íons positivos. A força de restauração eletrostática atua para corrigir esse deslocamento, mas a inércia dos elétrons os faz oscilar em torno da posição de neutralidade. A expressão para esta frequência é dada por:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad (2.9)$$

A ligação entre esta frequência, ω_{pe} , e o tempo médio entre colisões, τ , define se o comportamento do gás será coletivo ou individual. O período característico de uma oscilação de plasma é proporcional a $1/\omega_{pe}$. Para que a oscilação coletiva se estabeleça e seja uma característica dominante, os elétrons precisam completar muitos ciclos de oscilação antes que uma colisão com outra partícula (neutra) interrompa seu movimento organizado. Isso impõe a condição de que o tempo entre colisões deve ser muito maior que o período da oscilação, ou seja, $\tau \gg 1/\omega_{pe}$. Reorganizando esta inequação, chega-se à condição formal para o comportamento coletivo:

$$\omega_{pe} \tau \gg 1$$

Esta relação garante que os elétrons tenham tempo suficiente para responder de forma coletiva às perturbações, definindo o gás ionizado como um plasma, em vez de se comportarem como partículas individuais cujos movimentos são dominados por colisões aleatórias.

2.3.4 QUASI-NEUTRALITY

A *quasi-neutrality*, ou no português algo do tipo “como se fosse neutro”, é uma propriedade fundamental dos plasmas, que consiste na aproximação de que as densidades de carga positiva (íons) e negativa (elétrons) são aproximadamente iguais em regiões do plasma cujas dimensões são grandes em comparação ao comprimento de Debye. Isso significa que, em escalas espaciais muito maiores que λ_D , a carga líquida local é desprezível e o plasma pode ser tratado como se fosse eletricamente neutro. Em escalas menores, como nas camadas de carga junto a superfícies, pode haver significativas separações de carga. A *quasi-neutrality* decorre naturalmente da blindagem de Debye de modo que qualquer perturbação na neutralidade é rapidamente neutralizada por rearranjos das partículas carregadas (Chen, 2016).

A *quasi-neutrality* é uma condição útil tanto conceitualmente quanto matematicamente, pois permite simplificações significativas nas análises de estabilidade em plasmas. Por exemplo, considerando-se um plasma de laboratório com densidade de elétrons $n_e = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ e temperatura dos elétrons $T_e = 1 \text{ eV}$. O comprimento de Debye, dado pela equação 2.7, é:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \approx 7,43 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Supondo-se que o tamanho típico do sistema seja $L = 0,1 \text{ m} \gg \lambda_D$, como nos aceleradores de Plasma. Neste caso, a condição $L \gg \lambda_D$ está satisfeita, e portanto o sistema pode ser considerado como se fosse neutro. Isso implica que, mesmo havendo flutuações locais de potencial, a densidade de cargas positivas e negativas se iguala rapidamente, mantendo o plasma globalmente neutro em escala macroscópica.

2.3.5 DIFERENTES TEMPERATURAS EM UM PLASMA

Em um plasma, é comum que elétrons e íons apresentem temperaturas distintas. Isso ocorre porque os elétrons, sendo muito mais leves, respondem com maior rapidez às forças elétricas externas e, portanto, absorvem energia mais rapidamente que os íons.

Posteriormente, essa energia pode ser transferida dos elétrons para os íons através de colisões, promovendo o equilíbrio térmico total em escalas de tempo mais longas, porém, não localmente.

Como se verá nos próximos capítulos, quando partículas carregadas são submetidas a campos elétricos e magnéticos, pode-se analisar classicamente a partir da Força de Lorentz (equação 3.3). Considerando a interação de íons e elétrons com um campo elétrico $\mathbf{E}$ constante, homogêneo e que suas velocidades (íons e elétrons) em $t = 0$ $\mathbf{v}(0) = 0$, a força elétrica igualada à Segunda Lei de Newton pode ser escrita como:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -q\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_e = -\frac{q\mathbf{E}}{m_e}t,$$

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = +q\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_i = \frac{q\mathbf{E}}{m_i}t,$$

onde $\mathbf{v}_e$ é a velocidade do elétron e m_e a sua massa, $\mathbf{v}_i$ a velocidade do íon e m_i a sua massa, q é a carga da partícula e $\mathbf{E}$ é o campo elétrico que a partícula está submetida.

Assumindo a relação entre temperatura e energia cinética média 2.3 e substituindo nela as equações acima, tem-se:

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle,$$

$$\frac{3}{2}k_B T_e = \frac{1}{2}m_e \left(\frac{q\mathbf{E}}{m_e}t \right)^2,$$

$$\frac{3}{2}k_B T_i = \frac{1}{2}m_i \left(\frac{q\mathbf{E}}{m_i}t \right)^2$$

De modo que:

$$T_i \propto \frac{1}{m_i},$$

$$T_e \propto \frac{1}{m_e}$$

Dado que $m_e \ll m_i$, segue-se diretamente que $T_e \gg T_i$, portanto, pode-se inferir que os elétrons recebem muito mais rapidamente energia do ambiente externo, do que os íons, e depois podem transferir para os íons por meio de colisões. Além disso, em plasmas magnetizados, o campo magnético impõe uma anisotropia nas trajetórias das partículas. Isso faz com que elas possuam movimentos diferenciados nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético. Como consequência, pode-se observar tempera-

turas distintas em diferentes direções, isto é, $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$, característica típica de plasmas fortemente magnetizados.

2.3.6 OS TRÊS CRITÉRIOS QUE DEFINEM UM PLASMA

Realizada a explicação dos parâmetros de um plasma nas subseções anteriores, agora se resume o que um gás ionizado necessita para que seja classificado como um plasma. Para isso acontecer é necessário que ele satisfaça as três condições fundamentais mostradas nas seções anteriores. As duas primeiras dizem respeito à neutralidade e ao comportamento coletivo do sistema. A terceira está relacionada à frequência das colisões com átomos neutros.

Assim, segundo Chen (2016), as três condições que um gás ionizado deve satisfazer para ser considerado um plasma são:

1. $\lambda_D \ll L$: o comprimento de Debye deve ser muito menor que o tamanho do sistema, para que a blindagem eletrostática ocorra de forma efetiva;
2. $N_D \gg 1$: o número de partículas dentro de uma esfera de Debye deve ser muito grande, garantindo validade estatística às descrições coletivas;
3. $\omega_{pe}\tau \gg 1$: as oscilações de plasma devem gerar poucas colisões entre elétrons e partículas neutra, a fim de manter o comportamento coletivo.

Por exemplo, o gás fracamente ionizado expelido por motores a jato não pode ser considerado um plasma. Isso se deve ao fato de que, nesse meio, as partículas carregadas colidem com tanta frequência com os átomos neutros que seu movimento é governado por forças hidrodinâmicas ordinárias, e não por forças eletromagnéticas, que são características do comportamento plasmático (Chen, 2016).

2.4 ONDE SE PODE ENCONTRAR PLASMA

O Sol é uma estrela ativa cuja estrutura e dinâmica são profundamente influenciadas por processos plasmáticos. De acordo com Piel (2010), diversos fenômenos solares como as proeminências, as manchas solares e as ejeções de massa coronal são manifestações de plasmas altamente energéticos confinados por intensos campos magnéticos. As proeminências solares são arcos de plasma sustentados por estruturas magnéticas, podendo

durar vários dias. Já as manchas solares indicam regiões de intensa atividade magnética, com campos da ordem de 0,3 T (teslas). O plasma presente nas proeminências possui densidade de íons entre 10^{16} e 10^{17} m^{-3} e temperaturas entre 5 000 e 10 000 K, enquanto a coroa solar, com densidades menores de $1,7 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$, pode atingir temperaturas até $2 \times 10^6 \text{ K}$.

Os plasmas ocorrem amplamente na natureza e também podem ser produzidos artificialmente em diversas aplicações tecnológicas. Na natureza, eles se manifestam em uma variedade de contextos astrofísicos e atmosféricos. Conforme discutido por Piel (2010) e Chen (2016), o plasma está presente nas estrelas, como o Sol, onde as temperaturas chegam a dezenas de milhões de kelvin, possibilitando reações de fusão nuclear. A atmosfera solar, por exemplo, abriga plasma com temperatura de alguns milhões de kelvin e com grau de ionização quase completo, o que contribui para fenômenos como emissão de luz e atividade eletromagnética intensa. Em escalas planetárias, plasmas também são encontrados nas atmosferas de gigantes gasosos como Júpiter e Saturno, e em estruturas associadas, como anéis e magnetosferas.

Figura 2.10: Aurora Boreal.



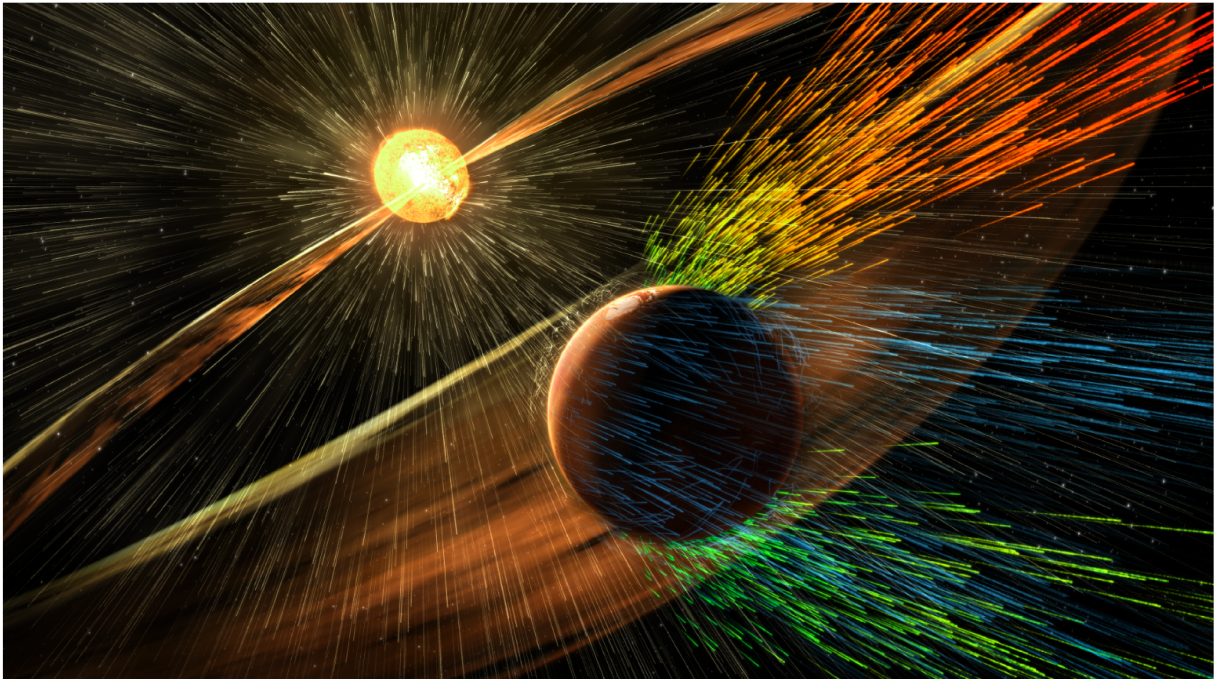
Fonte: Eielson (2013).

Na Terra, um dos exemplos mais representativos de plasma natural são as auroras boreais e austrais como visualizado na figura 2.10. As auroras são fenômenos gerados por íons e elétrons que precipitam em altitudes próximas a 100 km. Essas partículas colidem com os átomos e moléculas da alta atmosfera, principalmente oxigênio e nitrogênio, excitando-os e promovendo a emissão de luz. O oxigênio, ao retornar ao estado fundamental, emite luz tipicamente verde ou marrom, enquanto o nitrogênio produz emissões nas faixas azul e violeta Chen (2006). De acordo com Piel (2010), nessas regiões a temperatura do plasma pode atingir milhares de kelvin, favorecendo essa ionização parcial das partículas atmosféricas. Chen (2016) destaca que o grau de ionização nestes fenômenos é dependente da energia das partículas solares e da eficiência dos mecanismos de colisão com os constituintes da alta atmosfera. Fenômenos semelhantes são observados em regiões como os cinturões de Van Allen, onde campos magnéticos intensos aceleram partículas e geram plasmas em larga escala.

O vento solar é outra manifestação contínua do plasma solar. Como Piel (2010) introduz, o vento solar é constituído por partículas carregadas emitidas radialmente da coroa solar, que, ao chegar nos planetas, interage com os seus respectivos campos magnéticos. A NASA disponibilizou uma representação artística de uma tempestade solar atingindo o planeta Marte, onde se destaca a remoção de íons da camada superior da atmosfera, como ilustrado pela figura 2.11. A velocidade típica desse fluxo atinge cerca de 400 km/s. A magnetohidrodinâmica, introduzida por Hannes Alfvén, explica o congelamento das linhas de campo magnético ao fluxo de massa do vento solar. Esse plasma em movimento é responsável por uma variedade de fenômenos na magnetosfera terrestre, como, por exemplo, as tempestades geomagnéticas que podem representar risco à integridade de satélites e à segurança de astronautas. Com relativa frequência, são observadas grandes ejeções de massa coronal, como a de 27 de fevereiro de 2000 pelo satélite SOHO, e como o evento de 30 de outubro de 2003 que expandiu a zona auroral até a latitude de 47°. Estes eventos reforçam a importância do estudo dos plasmas solares para a compreensão dos efeitos espaciais sobre o ambiente terrestre, ao qual se dará maior enfoque (vento solar) nos capítulos finais do presente trabalho.

Além dos ambientes naturais, o plasma pode ser gerado artificialmente por diferentes métodos de ionização. Um dos mais comuns é a descarga elétrica em gases de baixa pressão, utilizada em lâmpadas de descarga, tubos de gás e reatores de plasma.

Figura 2.11: Representação artística de uma tempestade solar atingindo Marte e removendo íons da atmosfera superior do planeta.



Fonte: NASA/GSFC (2015).

Piel (2010) aponta que, nesses dispositivos, a temperatura do plasma pode atingir entre 10^3 e 10^4 K, com grau de ionização variando entre 10^{-6} e 10^{-2} , dependendo da energia fornecida. A ionização também pode ser induzida por lasers de alta potência, capazes de gerar plasmas com temperaturas superiores a dezenas de milhões de kelvin e densidades eletrônicas acima de 10^{25} m^{-3} , como é o caso da fusão inercial. Chen (2016) complementa que, em ambientes laboratoriais e industriais, a aplicação de campos magnéticos e correntes elétricas intensas permite o confinamento e controle de plasmas em dispositivos como os Tokamaks, usados em pesquisas de fusão termonuclear.

Nas últimas décadas, a pesquisa em fusão termonuclear controlada com base no confinamento magnético tipo Tokamak tem apresentado avanços notáveis, especialmente em parâmetros críticos para a viabilidade de reatores de fusão. De acordo com Kikuchi *et al.* (2012), melhorias significativas foram alcançadas nas propriedades de transporte, densidade operacional e estabilidade dos plasmas confinados em Tokamaks. Nesta área existem dois parâmetros para se analisar a eficiência do sistema, o chamado fator de ganho de energia Q e o produto triplo da fusão $nT\tau_E$.

O fator de ganho de energia Q é definido como a razão entre a potência gerada

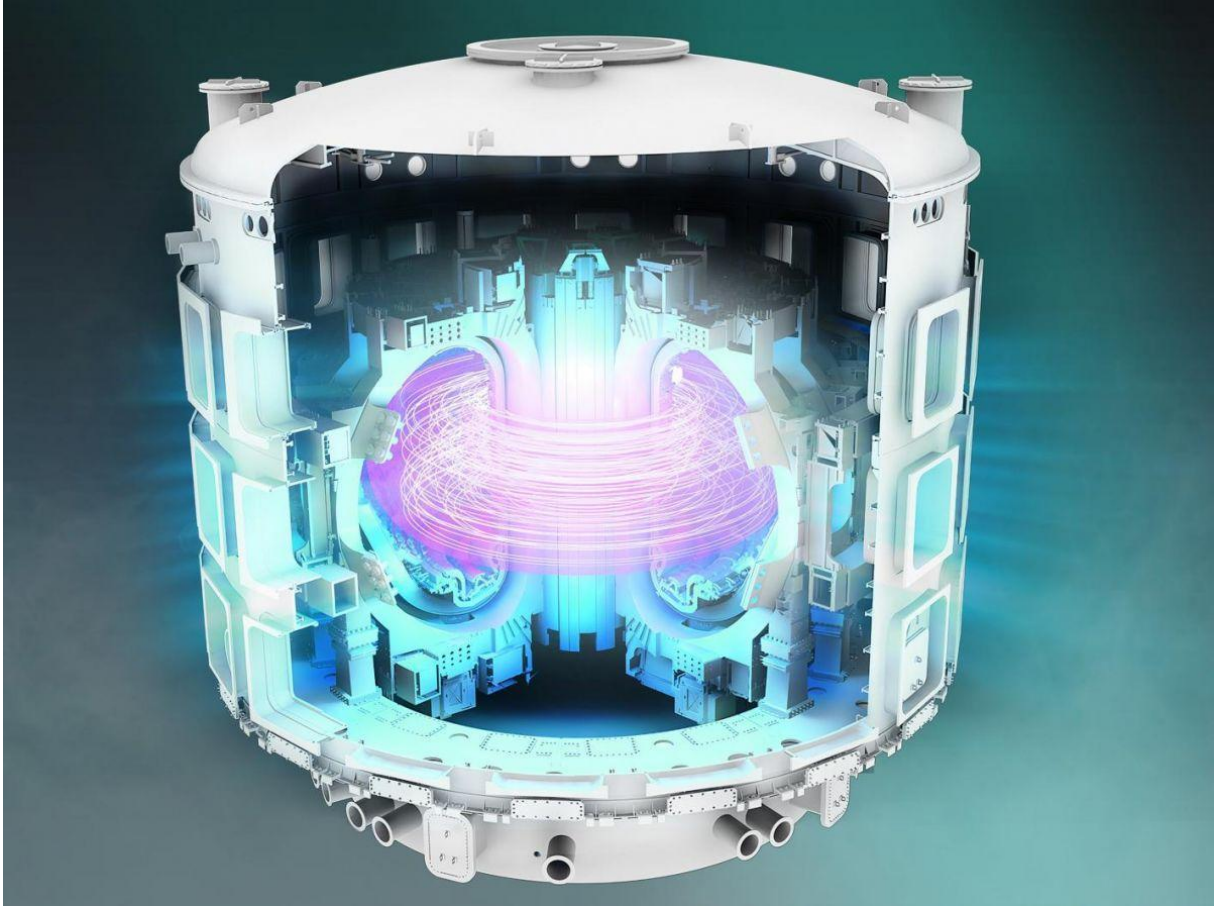
pelas reações de fusão e a potência fornecida externamente para aquecer o plasma, isto é, $Q = \frac{P_{\text{fusão}}}{P_{\text{aux}}}$, onde $P_{\text{fusão}}$ representa a potência total resultante da fusão e P_{aux} corresponde à potência auxiliar fornecida ao sistema. Valores de $Q < 1$ indicam que o reator consome mais energia do que produz, $Q = 1$ significa que a energia gerada é igual à energia fornecida, $Q > 1$ demonstra uma eficiência crescente do processo de fusão, sendo que a ignição ocorre teoricamente no limite $Q \rightarrow \infty$, quando o plasma se sustenta energeticamente sem necessidade de aquecimento externo adicional. O produto triplo da fusão, representado por $nT\tau_E$ resulta da multiplicação entre a densidade de partículas n (em m^{-3}), a temperatura do plasma T (em keV) e o tempo de confinamento de energia τ_E (em segundos). Essa quantidade expressa simultaneamente a quantidade de combustível disponível, a energia média por partícula e a duração com que essa energia é retida no sistema. Para que a fusão por confinamento magnético seja viável, esse produto deve ultrapassar um valor crítico, conhecido como critério de Lawson. No caso da reação deutério-trítio, esse valor mínimo é da ordem de $3 \times 10^{21} \text{ keV} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$, sendo necessário para atingir o ponto de ignição ou, ao menos, garantir valores altos do fator de ganho energético Q .

Desde o início das experiências com Tokamaks na década de 1960, o progresso no valor do produto triplo foi superior a três ordens de magnitude. Esses avanços consolidam o Tokamak como o sistema toroidal mais avançado para confinamento de plasma, justificando a construção do ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*), que é um projeto internacional sediado em Cadarache, sul da França, com participação da União Europeia, China, Índia, Japão, Coreia do Sul, Rússia e Estados Unidos. O ITER visa demonstrar a viabilidade científica e técnica da fusão, planejando operar com $Q = 10$, embora não dependa do estado de ignição para ser eficiente. Com uma eficiência global de cerca de 35% na conversão de energia, valores de Q entre 20 e 40 seriam suficientes para a viabilidade energética de futuros reatores de fusão (Kikuchi *et al.*, 2012).

Segundo Letcher (2025), o ambiente interno do ITER operará em vácuo quase perfeito, com pressões da ordem de 10^{-6} Pa , podendo ser elevadas até cerca de 100 Pa após reintrodução de gases selecionados. Tal vácuo é fundamental para evitar impurezas que dissipariam a energia de aquecimento do plasma. O campo magnético principal do ITER atinge valores de até $11,8 \text{ T}$, cerca de 260 mil vezes o campo da Terra, sendo de $5,6 \text{ T}$ no centro do reator. Esses campos, embora fisicamente intensos, não são perceptíveis aos sentidos humanos nem representam riscos diretos a dispositivos médicos inativos, como

placas de titânio ou marca-passos desligados.

Figura 2.12: Representação artística do Tokamak ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*).



Fonte: Letcher (2025).

Durante a ignição do plasma, fenômenos eletromagnéticos intensos são observados. O plasma emite radiação em um amplo espectro, incluindo luz visível, ultravioleta e raios gama, estes últimos perceptíveis apenas por câmeras especializadas. O som, embora tecnicamente produzido, não é audível, dada a ausência de meio material que permita a propagação de ondas acústicas. Em termos de dinâmica de partículas, os íons mais massivos atingem velocidades de 100 a 2000 km/s, enquanto elétrons, muito mais leves, podem se mover entre 10 000 e 100 000 km/s, chegando a um terço da velocidade da luz. Essa alta velocidade implica em efeitos relativísticos, sendo necessário considerar o desvio Doppler relativístico em diagnósticos ópticos. No presente trabalho somente serão considerados efeitos não relativísticos na dinâmica do plasma.

3 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA CARREGADA EM CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS UNIFORMES

É particularmente interessante se trabalhar com o estado de plasma pelo simples fato de que o mesmo apresenta um comportamento completamente esquizofrênico, já que como definido no capítulo 2 tal arranjo de partículas podem tanto apresentar um comportamento de fluido, como as vezes podem se comportar como uma coleção de partículas individuais. Para se trabalhar com determinado material é particularmente interessante obter seu confinamento, assim, para se obter o confinamento de um fluido é, em comparação, simples, já que o mesmo ocupa o volume ao qual foi inserido, porém, para confinar o plasma que se comporta também neste movimento individual (supracitado) é necessário que se compreenda a sua trajetória e os parâmetro físicos associados a ela. Como se fosse caçar borboleta, você analisa seu comportamento para que possa assim a capturar. Nisso, busca-se trabalhar com um sistema de baixas velocidades. Osório *et al.* (2014) comenta em seu artigo “Mecânica Relativística”, que ao buscar um sistema de altas velocidades, deve-se optar pelo formalismo e teoria da mecânica relativística, porém, quando se trata de baixas velocidades o formalismo clássico, logo, também, a Segunda Lei de Newton, vem a calhar e resolve muito bem os problemas.

Um ambiente de partículas carregadas, ao desprezar a interação gravitacional, obedecem e tem seus movimento regidos pelos campos elétricos e magnéticos devido às interações fundamentais. Essa relação é descrita pelas leis de Maxwell, do eletromagnetismo, em especial a força de Lorentz, que determina como uma partícula carregada se move em presença de campos elétricos ($\mathbf{E}$) e magnéticos ($\mathbf{B}$). Esta análise da partícula submetida nos campos pode variar temporalmente e espacialmente, o que torna a mesma muito complexa. Diante disto, para se iniciar a análise de movimento de maneira mais simples, porém completa, submete-se uma única partícula a estes campos e se analisa seu comportamento.

3.1 FORÇA DE LORENTZ

Como citado, o que governa o movimento de uma partícula eletricamente carregada submetida a campos elétricos e magnéticos é a força de Lorentz. A partir dela se pode realizar algumas aferições a respeito dos efeitos destes campos na energia cinética de

partículas carregadas. Essa força de Lorentz é obtida através da soma de outras duas forças, a gerada por um campo elétrico ($\mathbf{E}$) e a ocasionada pelo campo magnético ($\mathbf{B}$).

Por definição o campo elétrico $\mathbf{E}$ exerce uma força sobre uma partícula carregada com carga q . Assim a força elétrica $\mathbf{F}_e$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad (3.1)$$

Já, a força ($\mathbf{F}_m$) gerada pelo campo magnético $\mathbf{B}$ atua, por sua vez sobre a partícula apenas se ela estiver em movimento com velocidade $\mathbf{v}$, podendo ser escrita como:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2)$$

E como a força de Lorentz ($\mathbf{F}_{em}$) é a soma de ambas equações 3.1 e 3.2, pode-se a escrever como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{em} &= \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{F}_{em} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Levando em conta a força eletromagnética como a força resultante que atua sobre a partícula, pode-se igualar a força de Lorentz com a Segunda Lei de Newton:

$$\mathbf{F}_{em} = m\mathbf{a}$$

Considerando-se a Segunda Lei de Newton e fazendo o produto escalar com a velocidade, se obtém:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v},$$

que pode ser reescrito como:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{dK}{dt},$$

onde K é a energia cinética. Igualando o resultado da equação acima com a equação inicial se obtém:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dK}{dt} \quad (3.4)$$

Agora, fazendo o produto escalar da velocidade $\mathbf{v}$ com a equação 3.3 e se igualando à equação 3.4, obtém-se:

$$\mathbf{F}_{em} \cdot \mathbf{v} = \frac{dK}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v},$$

realizando a distributiva:

$$\frac{dK}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

Para a equação acima o termo $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ é sempre zero, pois o produto escalar entre um vetor e um produto vetorial envolvendo ele mesmo resulta em zero, pois, o produto vetorial entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ irá gerar um vetor perpendicular a ambos (ou perpendicular ao plano vB). Logo:

$$\frac{dK}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.5)$$

assim, pela equação 3.5 se conclui que o campo magnético $\mathbf{B}$ não altera sua energia cinética total. Ele pode modificar apenas a direção do movimento da partícula, mas não sua velocidade escalar total, deixando esse papel para o campo elétrico $\mathbf{E}$.

3.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell constituem o conjunto fundamental que descreve o comportamento dos campos elétrico e magnético, bem como sua relação com cargas e correntes. Na forma vetorial, elas são apresentadas a seguir, com as definições de cada constante envolvida. A primeira dessas equações é a Lei de Gauss para o campo elétrico, apresentada aqui em sua forma diferencial. Ela estabelece que a divergência do campo elétrico $\mathbf{E}$ em qualquer ponto do espaço é diretamente proporcional à densidade volumétrica de carga elétrica ρ naquele mesmo ponto. Em termos físicos, esta lei afirma que as cargas elétricas são as fontes e os sumidouros do campo elétrico: o campo “diverge” a partir de cargas positivas e “converge” para cargas negativas. A relação é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.6)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{E}$ representa a divergência do campo elétrico, ρ é a densidade volumétrica de carga elétrica e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo, cujo valor é aproximadamente

$$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2).$$

A Lei de Gauss para o magnetismo, em sua forma diferencial, estabelece que a divergência do campo magnético $\mathbf{B}$ é sempre nula em qualquer ponto do espaço. Esta é uma das leis mais fundamentais do eletromagnetismo e tem uma consequência física profunda: a inexistência de monopolos magnéticos. Diferentemente do campo elétrico, que pode divergir de cargas pontuais (as fontes), as linhas de campo magnético nunca se originam ou terminam em um ponto; elas sempre formam laços contínuos. A equação a seguir é a expressão matemática dessa lei:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.7)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{B}$ é a divergência do campo magnético.

A terceira equação é a Lei de Faraday da indução, que descreve como um campo elétrico $\mathbf{E}$ é gerado pela variação temporal do campo magnético $\mathbf{B}$. Essa relação é expressa como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

onde $\nabla \times \mathbf{E}$ representa o rotacional do campo elétrico e $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ é a derivada temporal do campo magnético.

Finalmente, a Lei de Ampère-Maxwell relaciona o rotacional do campo magnético $\mathbf{B}$ à densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}$ e à variação temporal do campo elétrico $\mathbf{E}$. Essa equação é dada por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

onde $\nabla \times \mathbf{B}$ é o rotacional do campo magnético, $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente elétrica, μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, com valor aproximado de $4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$, e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Vale destacar que $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, onde c é a velocidade da luz no vácuo, com valor aproximado de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Assim, as equações de Maxwell descrevem de forma completa os fundamentos do eletromagnetismo clássico, permitindo compreender como campos elétricos e magnéticos são gerados e como interagem com cargas e correntes.

A partir de uma distribuição de cargas e correntes, pode-se determinar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ diante as equações de Maxwell e os aplicando na equação da força de Lorentz (3.3)

se obtém a equação do movimento. Este é chamado de modelo de primeiros princípios, no qual é possível obter uma solução exata.

3.3 CAMPO B UNIFORME E E NULO

Como citado no início deste capítulo, para se compreender o plasma é necessário descrever o tipo de movimento que suas partículas constituintes efetuam quando submetidas a campos elétricos e magnéticos. A trajetória de uma partícula em ambientes realistas, como os encontrados em plasmas astrofísicos ou de laboratório, é frequentemente complexa. Contudo, essa trajetória pode ser entendida como uma superposição de movimentos mais simples e fundamentais.

Por essa razão, a abordagem mais didática e fundamental é construir o conhecimento de forma progressiva. Inicia-se, portanto, com a análise do movimento de uma única partícula nos cenários mais simples, como campos uniformes, para então avançar a configurações mais realistas, que incluem gradientes e curvaturas. Ao se compreender os movimentos elementares que surgem em cada um desses casos, o movimento ciclotrônico, as derivas e o espelhamento magnético, adquire-se a base necessária para interpretar as trajetórias complexas observadas na natureza (tema capítulo 5).

Considere a situação que o campo $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{E} = 0$, ou seja, respectivamente um cenário de campo magnético uniforme na direção de z com módulo inicial B_0 e sem a atuação do campo elétrico. Nesta situação, por meio da equação 3.3, tem-se que:

$$\mathbf{F}_{em} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{F}_{em} = q \mathbf{v} \times B_0 \hat{\mathbf{k}}$$

Como a partícula tem movimento tridimensional, pode-se substituir o vetor velocidade nas suas três componentes cartesianas, assim:

$$\mathbf{F}_{em} = q (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}) \times B_0 \hat{\mathbf{k}}$$

Para resolver o produto vetorial, aplica-se a propriedade distributiva, separando

cada componente da velocidade:

$$\mathbf{F}_{em} = q \left[(v_x B_0)(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) + (v_y B_0)(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}) + (v_z B_0)(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}) \right]$$

Utilizando as propriedades conhecidas do produto vetorial para os vetores unitários cartesianos, onde $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$, a equação se simplifica para:

$$\mathbf{F}_{em} = q \left[v_x B_0(-\hat{\mathbf{j}}) + v_y B_0(\hat{\mathbf{i}}) + v_z B_0(0) \right]$$

Reorganizando os termos, obtém-se a expressão final para a força:

$$\mathbf{F}_{em} = qB_0 (v_y \hat{\mathbf{i}} - v_x \hat{\mathbf{j}}) \quad (3.10)$$

Agora, aplicando a Segunda Lei de Newton e assim reescrevendo a força em termos de sua derivada:

$$\mathbf{F}_{em} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\ddot{x} \hat{\mathbf{i}} + m\ddot{y} \hat{\mathbf{j}} + m\ddot{z} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.11)$$

onde,

$$m\ddot{x} \hat{\mathbf{i}} + m\ddot{y} \hat{\mathbf{j}} + m\ddot{z} \hat{\mathbf{k}} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{\mathbf{i}} + m \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{\mathbf{j}} + m \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{\mathbf{k}}$$

Substituindo a equação 3.11 na equação 3.10, obtém-se que:

$$m\ddot{x} \hat{\mathbf{i}} + m\ddot{y} \hat{\mathbf{j}} + m\ddot{z} \hat{\mathbf{k}} = -qB_0 v_x \hat{\mathbf{j}} + qB_0 v_y \hat{\mathbf{i}} \quad (3.12)$$

Analisando a equação acima por componentes, pode-se obter três equações escalares:

$$m\ddot{x} = qB_0 v_y,$$

$$m\ddot{y} = -qB_0 v_x,$$

$$m\ddot{z} = 0$$

Observa-se que, neste caso, há apenas componente de aceleração nos eixos x e y , deixando o eixo z com componente de aceleração nulo, portanto a componente de velocidade do eixo z , v_z também se manterá constante. Pela configuração das equações acima (dos eixos x e y) é necessário realizar o desacoplamento das mesmas, já que ambas

as componente de velocidade (v_x e v_y) estão em função de sua componente perpendicular, na forma em que:

$$m\dot{v}_x = qB_0v_y,$$

e,

$$m\dot{v}_y = -qB_0v_x$$

Portanto, para desacoplar as equações de x e y , reescreve-se as mesmas como:

$$\dot{v}_x = \frac{qB_0}{m}v_y, \quad (3.13)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{qB_0}{m}v_x \quad (3.14)$$

Derivando-as temporalmente:

$$\ddot{v}_x = \frac{qB_0}{m}\dot{v}_y,$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB_0}{m}\dot{v}_x$$

Define-se $\frac{|q|B_0}{m}$ como:

$$\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}, \quad (3.15)$$

logo,

$$\ddot{v}_x = \pm\omega_c\dot{v}_y, \quad (3.16)$$

$$\ddot{v}_y = \mp\omega_c\dot{v}_x, \quad (3.17)$$

onde o sinal de $\mp$ e $\pm$ surgem em relação ao módulo da carga elétrica $|q|$, em que, na equação 3.17 o sinal superior se refere a uma carga positiva e o inferior a uma carga negativa.

Substituindo as equações 3.13 e 3.14 respectivamente nas equações 3.16 e 3.17, obtém-se que:

$$\ddot{v}_x = \pm\omega_c(\mp\omega_c v_x),$$

$$\ddot{v}_y = \mp\omega_c(\pm\omega_c v_y),$$

portanto,

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x,$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y,$$

e assim,

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0, \quad (3.18)$$

$$\ddot{v}_y + \omega_c^2 v_y = 0 \quad (3.19)$$

Ambas as equações culminaram em um tipo de equação muito utilizada na física clássica, a do tipo que rege o movimento de oscilações harmônicas simples. As mesmas podem ser resolvidas através do método de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.) de segunda ordem, homogênea, podendo-se começar com a forma geral:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0, \quad (3.20)$$

onde q é a função desconhecida, e ω é uma constante que caracteriza o sistema. Para encontrar a solução, utiliza-se o método da equação auxiliar. Substituímos a solução geral assumindo que $q(t) = e^{\lambda t}$, onde λ é um parâmetro a ser determinado. A ideia por trás dessa escolha se deve à propriedade fundamental das exponenciais, em que sua derivada mantém a mesma forma, tornando o problema matematicamente mais tratável. Além disso, essa abordagem permite encontrar rapidamente as soluções em termos de funções trigonométricas quando a equação descreve um sistema oscilatório, como o oscilador harmônico simples. Substitui-se essa forma de solução na E.D.O. (eq. 3.20), obtém-se:

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

Como as derivadas de $e^{\lambda t}$ são proporcionais à função $e^{\lambda t}$ em si, tem-se:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

Divide-se ambos os lados da equação por $e^{\lambda t}$, assim se obtém a equação auxiliar:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (3.21)$$

Resolvendo a equação 3.21 para λ , obtém-se que:

$$\lambda = \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega,$$

onde i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$). A solução geral para $q(t)$ é, então, uma combinação linear de exponenciais complexas associadas a esses valores de λ :

$$q(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad (3.22)$$

onde C_1 e C_2 são constantes que determinam as condições iniciais do problema.

Usando fórmula de Euler, $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$, onde $\theta = \omega t$, pode-se reescrever a solução 3.22 como:

$$q(t) = C_1 \cos(\omega t) + iC_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) - iC_2 \sin(\omega t),$$

onde, reagrupando, fica:

$$q(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t)$$

Redefinindo as constantes $C_1 + C_2$ e $i(C_1 - C_2)$, respectivamente como C_{III} e C_{IV} , obtém-se:

$$q(t) = C_{III} \cos(\omega t) + C_{IV} \sin(\omega t), \quad (3.23)$$

lembrando-se que C_{IV} é um número imaginário.

Encontrada a equação 3.23, aplica-se a mesma para a resolução das equações 3.18 e 3.19. Como ambas possuem estrutura idêntica, também tem mesma resolução, portanto resolvendo uma se resolve automaticamente a outra. Resolvendo para 3.18, tem-se:

$$v_x(t) = C_{III} \cos(\omega_c t) + C_{IV} \sin(\omega_c t)$$

Considerando a condição inicial, que em $t = 0$ a velocidade $v_x(t) = v_x(0) = v_{x0}$, obtém-se:

$$v_x(0) = C_{III} \cos(\omega_c 0) + C_{IV} \sin(\omega_c 0) = C_{III} 1 + C_{IV} 0,$$

logo,

$$v_x(0) = C_{III} = v_{x_0}$$

que resulta em:

$$v_x(t) = v_{x_0} \cos(\omega_c t) + C_{IV} \sin(\omega_c t) \quad (3.24)$$

Derivando-se 3.24, em relação a t , tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{d}{dt} (v_{x_0} \cos(\omega_c t) + C_{IV} \sin(\omega_c t)) = v_{x_0} \frac{d}{dt} \cos(\omega_c t) + C_{IV} \frac{d}{dt} \sin(\omega_c t), \\ \dot{v}_x &= -v_{x_0} \omega_c \sin(\omega_c t) + C_{IV} \omega_c \cos(\omega_c t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora, trabalhando apenas com uma partícula positiva (carga $+q$), reescreve-se a equação 3.13 como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{qB_0}{m} v_y = \omega_c v_y, \\ v_y &= \frac{\dot{v}_x}{\omega_c}, \end{aligned}$$

Agora, substituindo-se em $\dot{v}_x$ a equação 3.25, adquire-se:

$$v_y = \frac{-v_{x_0} \omega_c \sin(\omega_c t) + C_{IV} \omega_c \cos(\omega_c t)}{\omega_c},$$

que resulta em:

$$v_y = -v_{x_0} \sin(\omega_c t) + C_{IV} \cos(\omega_c t) \quad (3.26)$$

Onde novamente utilizando a condição inicial, que em $t = 0$ a velocidade $v_y(t) = v_y(0) = v_{y_0}$, adquire-se:

$$v_y(0) = -v_{x_0} \sin(\omega_c 0) + C_{IV} \cos(\omega_c 0) = -v_{x_0} 0 + C_{IV} 1,$$

e portanto,

$$v_y(0) = C_{IV} = v_{y_0}$$

Reescrevendo agora 3.24 com o parâmetro C_{IV} definido, tem-se:

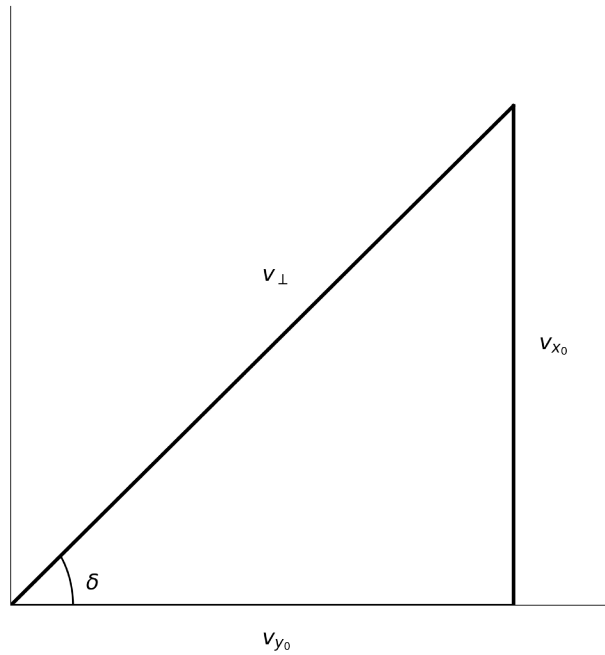
$$v_x(t) = v_{x_0} \cos(\omega_c t) + v_{y_0} \sin(\omega_c t), \quad (3.27)$$

$$v_y(t) = -v_{x_0} \sin(\omega_c t) + v_{y_0} \cos(\omega_c t) \quad (3.28)$$

As constantes v_{x_0} e v_{y_0} representam respectivamente as componentes x e y da velocidade inicial no plano xy . A partícula ainda pode ter uma componente z de velocidade inicial v_{z_0} . Pode-se chamar a componente da velocidade no plano xy como velocidade ortogonal $v_{\perp}$. Como o campo magnético não altera a energia cinética (demonstração dada na secção 3.1) e a velocidade v_z é constante, a velocidade ortogonal será constante e pode ser calculada como sendo a velocidade resultante dada por:

$$v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 = v_{xy}^2 = v_{\perp}^2,$$

Figura 3.1: Construção geométrica envolvendo as velocidades v_{x_0} , v_{y_0} e $v_{\perp}$.



Fonte: Autor (2024).

A figura 3.1 representa uma construção geométrica na forma de um triângulo retângulo envolvendo as velocidade v_{x_0} , v_{y_0} e $v_{\perp}$. A partir desta construção, pode-se extrair as seguintes relações:

$$\cos \delta = \frac{v_{y_0}}{v_{\perp}},$$

$$\sin \delta = \frac{v_{x_0}}{v_{\perp}},$$

que resultam, a partir de 3.27 e 3.28, respectivamente em:

$$v_x(t) = v_{\perp} \sin \delta \cos(\omega_c t) + v_{\perp} \cos \delta \sin(\omega_c t),$$

$$v_y(t) = -v_{\perp} \sin \delta \sin(\omega_c t) + v_{\perp} \cos \delta \cos(\omega_c t),$$

em que δ é um ângulo de fase que dá informação sobre a configuração inicial das velocidades $v_x(t)$ e $v_y(t)$.

Pelas propriedades trigonométricas $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$ e $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$, pode-se reescrever v_x e v_y como:

$$v_x(t) = v_{\perp} \sin(\omega_c t + \delta), \quad (3.29)$$

$$v_y(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \delta) \quad (3.30)$$

As equações 3.29 e 3.30 descrevem as velocidades no plano xy para uma partícula com carga positiva ($q > 0$).

Analisando casos específicos, tem-se que, se $\delta = 0^\circ$:

$$v_x(t) = v_{\perp} \sin(\omega_c t),$$

$$v_y(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

Nesse caso, a partícula inicia o movimento com $v_y(0) = v_{\perp}$ e $v_x(0) = 0$, ou seja, a velocidade inicial está completamente na direção y .

Se $\delta = 90^\circ$:

$$v_x(t) = v_{\perp} \sin(\omega_c t + 90^\circ) = v_{\perp} \cos(\omega_c t),$$

$$v_y(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t + 90^\circ) = -v_{\perp} \sin(\omega_c t)$$

Aqui, a velocidade inicial muda para $v_x(0) = v_{\perp}$ e $v_y(0) = 0$, ou seja, a partícula começa seu movimento com velocidade totalmente na direção x .

Agora, para encontrar x e y , integram-se as equações 3.29 e 3.30. Portanto, para v_x ,

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_{\perp} \sin(\omega_c t + \delta),$$

$$\int_{x_0}^x dx = v_{\perp} \int_0^t \sin(\omega_c t + \delta) dt$$

Chamando $\omega_c t + \delta$ de u , sendo este uma variável qualquer, $du = \omega_c dt$. Substituindo na equação acima:

$$[x]_{x_0}^x = v_{\perp} \int \sin(u) \frac{du}{\omega_c} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} [-\cos(u)] = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} [-\cos(\omega_c t + \delta)]_0^t,$$

$$x - x_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} [-\cos(\omega_c t + \delta) + \cos(\omega_c 0 + \delta)],$$

$$x = -\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \delta) + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\delta) + x_0$$

Considerando $\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\delta) + x_0 = X_0$, reescreve-se a equação acima como:

$$x - X_0 = -\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \delta) \quad (3.31)$$

onde X_0 maiúsculo será o centro do movimento circular, mas isso será explicado mais a frente. A posição inicial é x_0 minúsculo.

Fazendo o mesmo para em v_y , tem-se:

$$y - Y_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \delta) \quad (3.32)$$

onde Y_0 maiúsculo será o centro do movimento circular, mas isso será explicado mais a frente. A posição inicial é y_0 minúsculo.

Elevando-se ao quadrado as equações 3.31 e 3.32 e após, somando-se-as, obtém-se:

$$\begin{aligned} (x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 &= \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \delta) \right)^2 + \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \delta) \right)^2, \\ (x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 &= \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \right)^2 [\cos^2(\omega_c t + \delta) + \sin^2(\omega_c t + \delta)] = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \right)^2 (1), \\ (x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 &= \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \right)^2 = (r_L)^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Assim, obtém-se a equação de uma circunferência no plano xy com raio $r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$, denominado raio de Larmor. X_0 e Y_0 são as coordenadas do centro da circunferência. O centro da circunferência é chamado de centro guia e em algumas situações a análise detalhadas do movimento pode ser muito complexa, assim, olhar para o movimento do

centro guia é uma alternativa para simplificar a análise do movimento da partícula. Tal partícula efetua um curso denominado de movimento ciclotrônico e ω_c é a frequência angular deste movimento.

Sabendo-se que a partícula está submetida a um movimento circular, basta agora determinar o sentido deste movimento. As equações que regem a velocidade do movimento para uma partícula carregada positivamente são as equações 3.29 e 3.30.

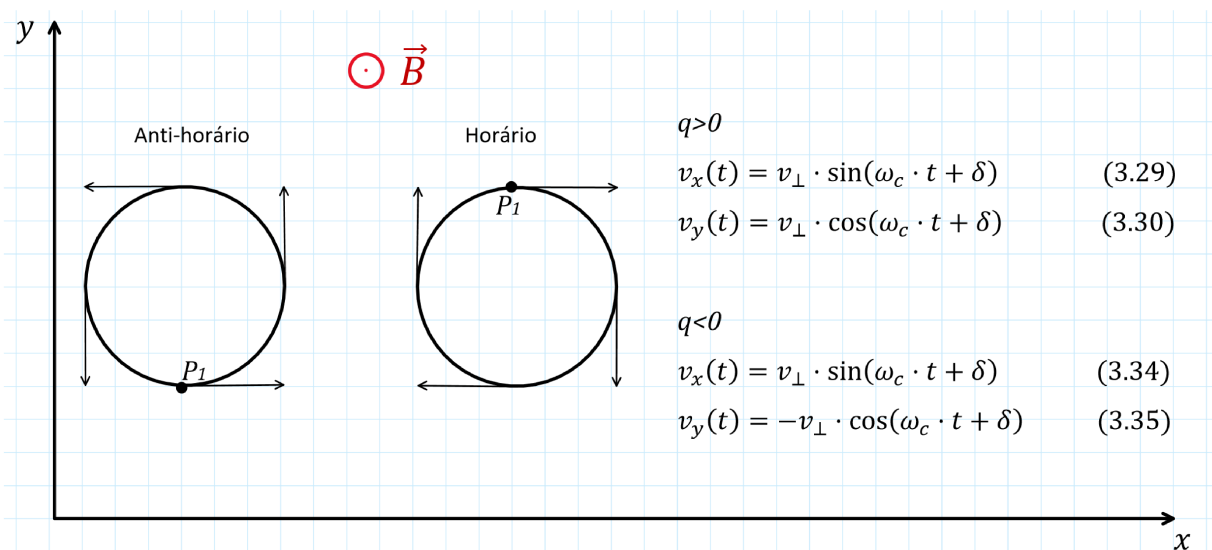
Sem muitas dificuldades, fazendo o mesmo processo realizado para se chegar aos resultados das velocidades para uma partícula de carga positiva (equações 3.29 e 3.30), pode-se chegar as equações de movimento para uma partícula de carga negativa, que são:

$$v_x(t) = v_{\perp} \sin(\omega_c t + \delta) \quad (3.34)$$

$$v_y(t) = -v_{\perp} \cos(\omega_c t + \delta) \quad (3.35)$$

A partir destes resultados adquiridos para as velocidades da partícula carregada positivamente (equações 3.29 e 3.30) e negativamente (equações 3.34 e 3.35), pode-se adquirir o sentido do movimento para cada carga. Visto que se trata de um movimento de rotação realizado no plano xy (equação 3.33), com frequência angular ω_c (frequência ciclotrônica), analisa-se as supracitadas equações em conjunção a figura 3.2.

Figura 3.2: Círculo cartesiano para demonstração do movimento da partícula carregada, tanto com carga positiva $q > 0$, quando para carga negativa $q < 0$, submetida a um campo magnético saindo da tela.



Na figura 3.2, a flecha indica o vetor velocidade ($v_{\perp}$) resultante no plano xy . Analisando, inicialmente, as equações para a partícula de carga positiva (3.29 e 3.30), quando $\omega_c t + \delta = \frac{\pi}{2}$ rad, $v_x(t) = v_{\perp}$ e $v_y(t) = 0$, portanto, v_x é positivo e v_y é nulo. No gráfico acima, tem-se duas opções onde esta situação pode ocorrer, as quais estão sinalizadas por P_1 . A trajetória com P_1 em baixo corresponde a situação do movimento no sentido anti-horário e aquela com P_1 em cima, a situação do movimento no sentido horário. Tendo ocorrido a situação $\omega_c t + \delta = \frac{\pi}{2}$ rad para um determinado valor de tempo t , agora, se analisa qual será, para um pequeno instante de tempo depois, o sinal das velocidades v_x e v_y . Observadas as equações 3.29 e 3.30 se visualiza que, para um pequeno instante de tempo posterior, tem-se $v_x > 0$ e $v_y < 0$, portanto o movimento que corresponde nesta situação é o movimento no sentido horário.

Agora investigando as equações para a carga negativa (3.34 e 3.35), também para $\omega_c t + \delta = \frac{\pi}{2}$ rad, da mesma forma que anteriormente, também se observa que $v_x = v_{\perp}$ e $v_y = 0$. Esta situação pode corresponder a qualquer dos dois pontos em destaque na figura sinalizado com o símbolo P_1 , contudo, para um pequeno instante de tempo posterior, observa-se que $v_x > 0$ e $v_y > 0$ e portanto esta situação corresponde ao movimento no sentido anti-horário.

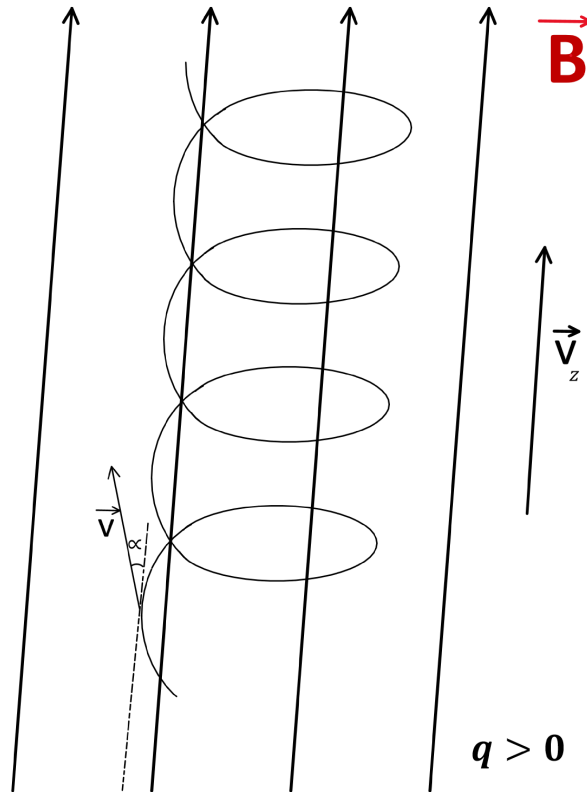
Portanto para uma carga positiva o movimento é no sentido horário e para uma carga negativa o movimento é no sentido anti-horário.

Quando se junta o movimento gerado no plano xy (figura 3.2) com a componente z de velocidade v_z do movimento (sendo esta constante), discutido no início da secção, se obtém o movimento relativo a figura 3.3.

Dessa forma, a dinâmica de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme revela um movimento helicoidal, composto por uma rotação no plano xy e um deslocamento uniforme ao longo do eixo z . No plano perpendicular ao campo $\mathbf{B}$, a partícula realiza um movimento circular, girando ao redor do seu centro guia (relativo ao centro do movimento circular de raio r_L) com a frequência ciclotrônica $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$, a qual depende unicamente da carga q e da massa m da partícula, bem como da intensidade B_0 do campo magnético. O raio dessa órbita, definido como raio de Larmor, é dado por $r_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B_0}$, determinando a escala espacial dessa rotação. Já no eixo z , paralelo a $\mathbf{B}$, a partícula mantém uma velocidade constante v_z , sem sofrer influência do campo magnético, uma vez

que este não exerce força sobre componentes de velocidade paralelos à sua direção. Assim, a combinação desses dois movimentos, a rotação ciclotrônica no plano xy e a translação uniforme em z resulta em uma trajetória helicoidal. Essa configuração de movimento é fundamental para diversas aplicações na física de plasmas, como o confinamento de partículas em Tokamaks e a descrição do comportamento de partículas carregadas no meio interplanetário.

Figura 3.3: Representação do movimento de uma partícula, carregada positivamente, no plano xy com o acréscimo do movimento no eixo z .



Fonte: Autor (2024).

3.4 CAMPOS $\mathbf{B}$ E $\mathbf{E}$ UNIFORMES

Incrementando o problema, agora com campos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ uniformes, mantém-se o campo magnético na mesma direção $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$, mas, acrescenta-se o campo elétrico $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$.

Como de costume, pretende-se chegar nas equações de velocidade e trajetória da

partícula. Portanto, começa-se escrevendo a equação de força de Lorentz (3.3).

$$\mathbf{F}_{em} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

aplicando a Segunda Lei de Newton,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.36)$$

Utilizando o mesmo procedimento para $\mathbf{B}$ obtido em 3.12, a equação acima se desdobra em:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} - qB_0v_x\hat{\mathbf{j}} + qB_0v_y\hat{\mathbf{i}},$$

onde substituindo $\mathbf{E}$ em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = qE_x\hat{\mathbf{i}} + qE_y\hat{\mathbf{j}} + qE_z\hat{\mathbf{k}} - qB_0v_x\hat{\mathbf{j}} + qB_0v_y\hat{\mathbf{i}},$$

$$m\dot{v}_x\hat{\mathbf{i}} + m\dot{v}_y\hat{\mathbf{j}} + m\dot{v}_z\hat{\mathbf{k}} = q(E_x + B_0v_y)\hat{\mathbf{i}} + q(E_y - B_0v_x)\hat{\mathbf{j}} + qE_z\hat{\mathbf{k}},$$

onde as reescrevendo com base em suas respectivas direções, pode-se separar em 3 equações escalar, sendo elas:

$$m\dot{v}_x = q(E_x + B_0v_y), \quad (3.37)$$

$$m\dot{v}_y = q(E_y - B_0v_x), \quad (3.38)$$

$$m\dot{v}_z = qE_z \quad (3.39)$$

Iniciando a análise pela equação 3.39, observa-se que ela descreve um movimento sob a ação de uma força constante. Isso indica que o movimento segue a equação do movimento retilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A). Assim, a posição ao longo do eixo z pode ser expressa por:

$$z = z_0 + v_{z_0}t + \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2 \quad (3.40)$$

em que a formulação 3.40 evidencia a influência da aceleração constante $\frac{qE_z}{m}$ no movimento da partícula.

Agora, busca-se uma solução assumindo que a trajetória da partícula corresponde

ao comportamento de uma carga positiva. Isso significa que a deflexão causada pelos campos elétrico e magnético seguirá a orientação prevista para cargas positivas. Essa escolha implica em uma facilidade analítica de resolução das posteriores equações diferenciais e caso se queira analisar o movimento de uma carga negativa, bastaria inverter o sinal de q , o que refletiria diretamente na direção das forças e na solução das equações de movimento, sem comprometer a validade da formulação matemática. Assim, derivando-se em relação a t a equação 3.37, obtém-se:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \dot{v}_x &= q \frac{d}{dt} (E_x + B_0 v_y), \\ m \ddot{v}_x &= q \left(\frac{d}{dt} (E_x) + \frac{d}{dt} (B_0 v_y) \right) = q (0 + B_0 \dot{v}_y), \\ \ddot{v}_x &= \frac{q B_0}{m} \dot{v}_y = \omega_c \dot{v}_y, \end{aligned}$$

em que,

$$\omega_c = \frac{q B_0}{m} \quad (3.41)$$

com ω_c sendo a frequência angular, neste caso, para uma carga positiva. Assim, segue-se que, a partir daqui o desenvolvimento se dará em análise de uma carga positiva.

Colocando-se $\dot{v}_y$ em evidência, obtém-se:

$$\dot{v}_y = \frac{\ddot{v}_x}{\omega_c}$$

Substituindo a equação acima na equação 3.38, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= \frac{q}{m} (E_y - B_0 v_x) = \frac{\ddot{v}_x}{\omega_c}, \\ \frac{\ddot{v}_x}{\omega_c} &= \frac{q E_y}{m} - \frac{q B_0}{m} v_x, \end{aligned}$$

em que, multiplicando-se e se dividindo o primeiro termo na direita por B_0 , resulta em:

$$\frac{\ddot{v}_x}{\omega_c} = \frac{q B_0}{m} \frac{E_y}{B_0} - \frac{q B_0}{m} v_x,$$

logo,

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{v}_x}{\omega_c} &= \frac{qB_0}{m} \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right) = \omega_c \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right), \\ \ddot{v}_x &= \omega_c^2 \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right), \\ \frac{d^2}{dt^2}(v_x) &= \omega_c^2 \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right),\end{aligned}$$

que pode ser reescrito acrescentando um termo constante no lado esquerdo, como $-\frac{E_y}{B_0}$, já que ao ser derivada o termo desaparecerá. Assim, a equação acima fica:

$$\frac{d^2}{dt^2}(v_x) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right) = \omega_c^2 \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right)$$

Portanto, definindo-se $v'_x = \left(\frac{E_y}{B_0} - v_x \right)$, pode-se reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned}-\frac{d^2}{dt^2}(v'_x) &= \omega_c^2(v'_x), \\ \ddot{v}'_x + \omega_c^2 v'_x &= 0\end{aligned}\tag{3.42}$$

que é a mesma equação diferencial 3.18.

Encontrada a equação para se obter v_x agora se faz o mesmo processo para v_y . Portanto, derivando a equação 3.38 com as respectivas substituições de 3.41, tem-se:

$$\ddot{v}_y = -\omega_c \dot{v}_x\tag{3.43}$$

Agora, isolando-se $\dot{v}_x$ na equação 3.37, adquire-se:

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m}(E_x + B_0 v_y),$$

multiplicando-se por $-\omega_c$,

$$-\omega_c \dot{v}_x = -\omega_c \frac{q}{m} E_x - \omega_c \frac{q}{m} B_0 v_y,$$

multiplicando-se o primeiro termo do lado direito da igualdade por $\frac{B_0}{B_0}$,

$$-\omega_c \dot{v}_x = -\frac{1}{B_0} \omega_c \frac{qB_0}{m} E_x - \omega_c \frac{qB_0}{m} v_y,$$

$$-\omega_c \dot{v}_x = -\frac{E_x}{B_0} \omega_c^2 - \omega_c^2 v_y,$$

$$-\omega_c \dot{v}_x = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B_0} + v_y \right),$$

e substituindo-se o fator do lado esquerdo da igualdade pela equação 3.43, tem-se:

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B_0} + v_y \right),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(v_y) = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B_0} + v_y \right),$$

que pode ser reescrito acrescentando um termo constante, como $\frac{E_x}{B_0}$, já que ao ser derivada o termo desaparecerá. Assim, a equação acima fica:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{E_x}{B_0} + v_y \right) = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B_0} + v_y \right)$$

Portanto, chamando $\left(\frac{E_x}{B_0} + v_y \right)$ de v_y' , pode-se reescrever a equação acima como:

$$\frac{d^2}{dt^2}(v_y') = -\omega_c^2(v_y')$$

ou,

$$\ddot{v}_y' + \omega_c^2 v_y' = 0 \quad (3.44)$$

que é a mesma equação diferencial 3.19.

Como agora se tem duas equações diferenciais de segunda ordem, homogêneas e de solução conhecida para a velocidade, de v_x' e v_y' , respectivamente,

$$\ddot{v}_x' = -\omega_c^2 v_x',$$

$$\ddot{v}_y' = -\omega_c^2 v_y',$$

resolve-se-as da maneira a qual se foram solucionadas as equações diferenciais dos problemas anteriores, sendo estas v_x (3.18) e v_y (3.19), com a única diferença de que o vetor de velocidade perpendicular que antes era $v_\perp^2 = v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2$, agora se torna $v_\perp'^2 =$

$v_{x_0}'^2 + v_{y_0}'^2 = \left(\frac{E_y}{B_0} - v_{x_0}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{B_0} + v_{y_0}\right)^2$, resultando assim, para v_x' :

$$v_x' = \frac{E_y}{B_0} - v_x = v_{\perp}' \sin(\omega_c t + \delta)$$

$$v_x = -v_{\perp}' \sin(\omega_c t + \delta) + \frac{E_y}{B_0} \quad (3.45)$$

e para v_y' ,

$$v_y' = v_y + \frac{E_x}{B_0} = v_{\perp}' \cos(\omega_c t + \delta),$$

$$v_y = v_{\perp}' \cos(\omega_c t + \delta) - \frac{E_x}{B_0} \quad (3.46)$$

Com base nas equações acima se pode tirar certas conclusões. Ao se introduzir o campo elétrico $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$, observa-se que a partícula carregada positivamente, como visto pela equação 3.39, possui uma aceleração constante na direção z , logo estará submetida a um movimento retilíneo uniformemente acelerado nesta direção. Porém, nas direções x e y há, além da trajetória de rotação prevista pelo campo $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$, um acréscimo constante na velocidade, sendo $\frac{E_y}{B_0}$ em v_x e $-\frac{E_x}{B_0}$ em v_y . Estes acréscimos adicionam uma velocidade constante nas direções x e y , que são chamadas de velocidade de deriva ou *drift*, sendo elas:

$$\mathbf{v}_{d_x} = \frac{E_y}{B_0} \hat{\mathbf{i}} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{v}_{d_y} = -\frac{E_x}{B_0} \hat{\mathbf{j}} \quad (3.48)$$

Para se encontrar a fórmula vetorial desta velocidade, segue-se os seguintes passos. Primeiramente se verifica o valor de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = (E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}) \times B_0 \hat{\mathbf{k}} = -E_x B_0 \hat{\mathbf{j}} + E_y B_0 \hat{\mathbf{i}}$$

logo,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = E_y B_0 \hat{\mathbf{i}} - E_x B_0 \hat{\mathbf{j}} \quad (3.49)$$

Agora, escrevendo as equações da velocidade de deriva, regidas por 3.47 e 3.48, como a componente total da velocidade de deriva, se obtém:

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{d_x} + \mathbf{v}_{d_y} = \frac{E_y}{B_0} \hat{\mathbf{i}} - \frac{E_x}{B_0} \hat{\mathbf{j}},$$

no qual, multiplicando-se e se dividindo por B_0 , tem-se:

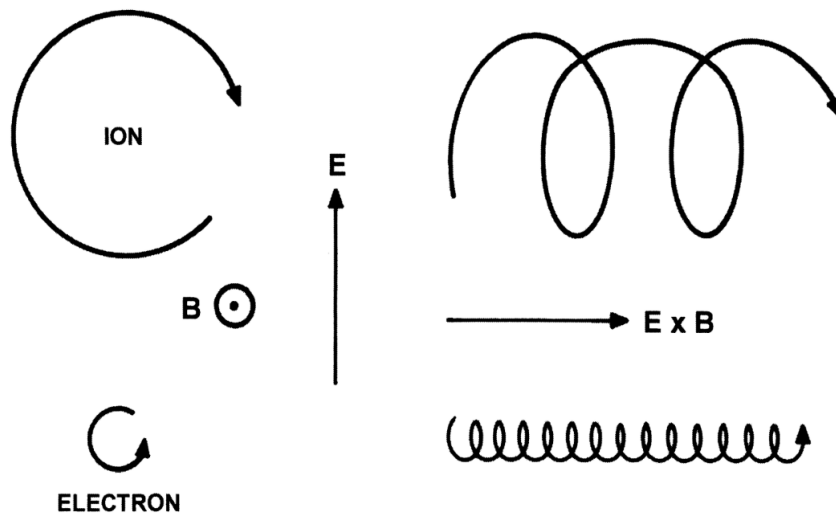
$$\mathbf{v}_d = \frac{E_y B_0}{B_0^2} \hat{\mathbf{i}} - \frac{E_x B_0}{B_0^2} \hat{\mathbf{j}} = \frac{E_y B_0 \hat{\mathbf{i}} - E_x B_0 \hat{\mathbf{j}}}{B_0^2},$$

em que a parte superior da equação acima é exatamente a definição de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, dada pela equação 3.49. Assim, substituindo 3.49, na equação acima, obtém-se:

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B_0^2} = \frac{\mathbf{F}_e \times \mathbf{B}}{q B_0^2} \quad (3.50)$$

onde, na última passagem, multiplicou-se e se dividiu por q para obter a força que é definida como a velocidade de deriva gerada a partir do campo elétrico, sendo ela perpendicular ao plano formado pelos vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Esse resultado de velocidade de deriva foi deduzido a partir de uma partícula positiva, contudo, fazendo a manipulação para uma partícula negativa, chega-se no mesmo resultado para a velocidade de deriva (Bittencourt, 2004). Os movimentos das partículas carregadas estão ilustrados na figura 3.4.

Figura 3.4: Representação do movimento ciclotrônico e de deriva, de íons e elétrons, causado pelo campo elétrico $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$ em conjunção ao campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$.



Fonte: Bittencourt (2004).

Em base, a figura 3.4 representa o campo magnético $\mathbf{B}$ entrando e o campo elétrico $\mathbf{E}$ na direção vertical, além de um íon e um elétron, com o íon possuindo um raio de Larmor maior em relação ao do elétron, ambos apresentando um movimento ciclotrônico

em direções opostas ao plano normal da direção de $\mathbf{B}$ e ambos apresentando a mesma direção de propagação $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, ou seja, indo em uma direção mutuamente perpendicular ao campo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Para além, neste movimento da partícula inserida em campos elétricos e magnéticos uniformes, sua velocidade resultante pode ser escrita diante a soma das componentes de velocidade (3.45), (3.46) e derivada da equação (3.40), resultando assim em:

$$\mathbf{v} = -v_{\perp}' \sin(\omega_c t + \delta) \hat{\mathbf{i}} + \frac{E_y}{B_0} \hat{\mathbf{i}} + v_{\perp}' \cos(\omega_c t + \delta) \hat{\mathbf{j}} - \frac{E_x}{B_0} \hat{\mathbf{j}} + v_{z0} \hat{\mathbf{k}} + \frac{qE_z}{m} t \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.51)$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_{\parallel} \quad (3.52)$$

em que,

$$\mathbf{v}_c = -v_{\perp}' \sin(\omega_c t + \delta) \hat{\mathbf{i}} + v_{\perp}' \cos(\omega_c t + \delta) \hat{\mathbf{j}}, \quad (3.53)$$

sendo $\mathbf{v}_c$ denominada velocidade ciclotrônica.

$$\mathbf{v}_{\parallel} = v_{z0} \hat{\mathbf{k}} + \frac{qE_z}{m} t \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.54)$$

e $\mathbf{v}_{\parallel}$ é a velocidade na direção do campo magnético $\mathbf{B}$.

3.5 MOVIMENTO SOB CAMPO GRAVITACIONAL

Agora, analisa-se o movimento desta partícula inserida em um campo gravitacional $\mathbf{F}_g$. Portanto, sua equação de distribuição de forças pode ser escrita, a partir da soma de 3.3, com uma componente da força gravitacional, ficando assim:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_g \quad (3.55)$$

Para simplificar, reescreve-se $q\mathbf{E} + \mathbf{F}_g$ como uma força resultante qualquer $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g$, de modo que:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_R \quad (3.56)$$

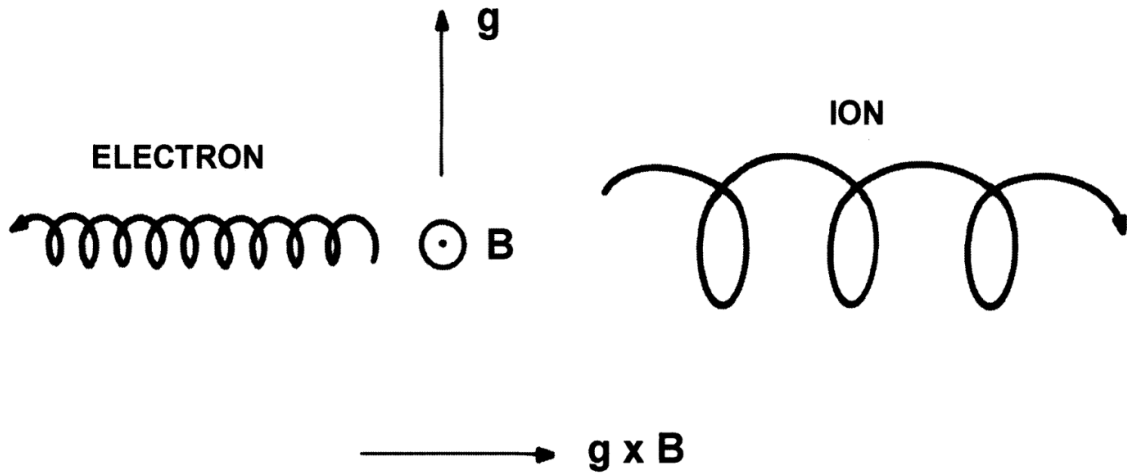
e portanto, a velocidade de deriva, utilizando as mesmas proposições do secção anterior,

resultará em:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_d &= \frac{\mathbf{F}_R \times \mathbf{B}}{qB_0^2} = \frac{\mathbf{F}_e \times \mathbf{B}}{qB_0^2} + \frac{\mathbf{F}_g \times \mathbf{B}}{qB_0^2} \\ \mathbf{v}_d &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B_0^2} + \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B_0^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Percebe-se que, pela equação 3.57 e como exemplificado na secção anterior, a velocidade de deriva causada pelo campo $\mathbf{E}$ não depende da carga e portanto íons e elétrons vagam na mesma direção, como se pode visualizar pela figura 3.4. Já, a velocidade de deriva causada pelo campo gravitacional depende da massa e da carga da partícula, assim, íons apresentarão velocidade de deriva na direção $\mathbf{g} \times \mathbf{B}$ e elétrons apresentarão velocidade de deriva na direção $-(\mathbf{g} \times \mathbf{B})$, como se pode visualizar na figura 3.5. ou seja, partículas de sinais opostos indo em direções opostas, em um mesmo sistema, gerarão corrente elétrica.

Figura 3.5: Representação do movimento ciclotrônico e de deriva, de íons e elétrons, causado pelo campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$ em conjunção ao campo gravitacional $\mathbf{g}$.



Fonte: Bittencourt (2004).

Em base, a figura 3.5 representa o campo magnético $\mathbf{B}$ entrando no plano (indicado pela notação convencional de círculo com ponto central) e o campo gravitacional $\mathbf{g}$ apontando na direção vertical para cima. Observa-se ainda um íon e um elétron, ambos apresentando um movimento ciclotrônico em direções opostas ao plano normal da direção de $\mathbf{B}$, com sentidos de rotação distintos devido às suas diferentes cargas elétricas. Além disso, ambos apresentam uma deriva de propagação na direção do produto veto-

rial $\mathbf{g} \times \mathbf{B}$: o íon move-se na direção positiva de $\mathbf{g} \times \mathbf{B}$ enquanto o elétron se desloca na direção oposta, negativa. Essa diferença de comportamento também pode ser atribuída à grande diferença de massa entre os dois: o íon, sendo muito mais massivo, descreve uma trajetória helicoidal com raio ciclotrônico maior e frequência de rotação (frequência ciclotrônica) menor, enquanto o elétron, por ter massa muito menor, apresenta um raio de giro significativamente reduzido e uma frequência muito maior. Esse tipo de análise é fundamental em áreas como física de plasmas e astrofísica, onde a interação entre campos elétricos, magnéticos e gravitacionais determina a dinâmica de partículas carregadas.

4 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA CARREGADA EM UM CAMPO MAGNÉTICO NÃO UNIFORME

Na natureza, os campos eletromagnéticos raramente se comportam de maneira linear ou permanecem invariantes no tempo (caracterizando uma não uniformidade), o que dificulta a obtenção, por métodos analíticos, de uma equação geral de movimento para partículas carregadas que interagem com esses campos. Segundo Bittencourt (2004), há, contudo, um caso de particular relevância no qual é possível obter uma solução aproximada, e suficientemente geral, sem recorrer à integração numérica, desde que os detalhes finos do movimento da partícula não sejam essenciais. Essa abordagem é válida quando o campo magnético é intenso e varia lentamente tanto no espaço quanto no tempo, enquanto o campo elétrico pode ser considerado fraco. Em muitas situações de interesse prático, os campos podem ser aproximados como constantes e uniformes nas escalas de tempo e espaço correspondentes à rotação da partícula ao redor das linhas de campo magnético, ou seja, durante o tempo necessário para completar uma órbita de Larmor. Esse regime ocorre com frequência em diversos plasmas de laboratório, especialmente em estudos sobre reações termonucleares controladas, e também em numerosos contextos astrofísicos.

Neste capítulo, se analisará o movimento de uma partícula carregada sob a influência de um campo magnético estático que apresenta uma leve não uniformidade espacial e com campo elétrico nulo. O termo “leve”, neste contexto, indica que a variação do campo magnético dentro da órbita da partícula é pequena quando comparada com a magnitude do próprio campo $\mathbf{B}$. Em outras palavras, considerar-se-á apenas campos magnetostáticos cuja variação espacial, ao longo de uma distância comparável ao raio da órbita da partícula, seja relativamente desprezível.

Nesse regime, o movimento da partícula pode ser decomposto em duas componentes distintas. A primeira é o movimento ciclotrônico, que ocorre no plano perpendicular ao campo magnético (plano xy , ortogonal a $\mathbf{B}$). Trata-se de um movimento muito rápido, descrito por uma rotação helicoidal ao redor das linhas de campo, limitado espacialmente pelo raio de Larmor. A segunda componente, de maior interesse neste capítulo, é o movimento do centro guia (*guiding center*), que ocorre em escalas maiores e descreve o deslocamento efetivo da partícula ao longo do tempo. Esse movimento é lento e sensível às variações suaves do campo magnético, sendo fundamental para a descrição do transporte

de partículas em plasmas.

4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAMPO MAGNÉTICO

Nessa secção, busca-se estudar a interação de partículas carregadas em campos magnéticos que apresentam variações espaciais do tipo gradiente, divergência e convergência ao longo do eixo z e curvatura. No capítulo seguinte irá se estudar o caso da interação de partículas carregadas com um campo magnético de um dipolo magnético que apresenta estas três contribuições.

Para o presente caso, a equação de movimento, advinda da equação de Lorentz (3.3) e se igualando à Segunda Lei de Newton, transforma-se em uma equação particular já obtida quando se considerou $\mathbf{E} = 0$:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Neste contexto, considera-se um campo magnético cuja componente principal está orientada ao longo do eixo z , sendo essa significativamente mais intensa e aproximadamente constante nessa direção. As componentes no plano transversal xy são assumidas como desprezíveis ou suficientemente pequenas, de modo que o campo pode ser tratado, localmente, como predominantemente paralelo ao eixo z .

Dessa forma, a análise será restrita à vizinhança da trajetória descrita pela partícula em torno de uma linha de campo, numa escala espacial limitada ao raio de Larmor r_L . Dentro dessa escala, a variação relativa do campo magnético satisfaz $\delta \mathbf{B} \ll \mathbf{B}$, o que permite tratá-lo como aproximadamente constante ao longo da órbita. Com isso, pode-se aplicar o que se denomina teoria da órbita de primeira ordem, na qual o campo $\mathbf{B}$ é expandido em série de Taylor e os termos de segunda ordem (e superiores) são desprezados. Tal simplificação é válida, pois as variações espaciais do campo magnético ao longo do raio de Larmor são pequenas o suficiente para garantir a consistência da aproximação.

Como o campo possui 3 componentes,

$$\mathbf{B} = B_x(x, y, z) \hat{\mathbf{i}} + B_y(x, y, z) \hat{\mathbf{j}} + B_z(x, y, z) \hat{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

A dependência de cada componente das coordenadas (x, y, z) indica que se trata de

um campo magnético não uniforme no espaço. Resolver a equação de movimento para um campo genérico dessa natureza é uma tarefa complexa. Para tornar o problema tratável, analisa-se o movimento da partícula em uma pequena região em torno de um ponto de referência, como a origem do sistema de coordenadas, que pode coincidir com o centro guia da partícula. Nessa vizinhança, o campo pode ser bem aproximado se utilizando uma expansão em série de Taylor para cada uma de suas componentes.

Portanto, fazendo-se a expansão em série de Taylor para B_x em torno da origem onde também coincide com o centro guia, resulta-se em:

$$B_x(x, y, z) = B_x(0, y, z) + x \frac{\partial}{\partial x} B_x(0, y, z) + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_x(0, y, z) + \dots$$

Desprezando os termos de 2ª ordem, tem-se que B_x se reduz a:

$$B_x(x, y, z) = B_x(0, y, z) + x \frac{\partial}{\partial x} B_x(0, y, z), \quad (4.2)$$

por isso do nome de "teoria de órbita de primeira ordem", pois, considera-se a aproximação do campo magnético até a primeira ordem.

Para a variável y , também se aplica uma expansão em série de Taylor. Aplicando-se a expansão para cada termo da equação 4.2, obtém-se:

$$B_x(x, y, z) = [B_x(0, y, z)] + x \frac{\partial}{\partial x} [B_x(0, y, z)],$$

$$B_x(x, y, z) = \left[B_x(0, 0, z) + y \frac{\partial}{\partial y} B_x(0, 0, z) \right] + x \frac{\partial}{\partial x} \left[B_x(0, 0, z) + y \frac{\partial}{\partial y} B_x(0, 0, z) \right],$$

e como o termo $x \frac{\partial}{\partial x} \left[y \frac{\partial}{\partial y} B_x(0, 0, z) \right]$ é de segunda ordem, será desprezado. Assim a equação se reduz a:

$$B_x(x, y, z) = B_x(0, 0, z) + y \frac{\partial}{\partial y} B_x(0, 0, z) + x \frac{\partial}{\partial x} B_x(0, 0, z) \quad (4.3)$$

E agora expandido para a variável z e considerando $B_x(0, 0, 0) = 0$, tem-se:

$$B_x(x, y, z) = z \frac{\partial}{\partial z} B_x(0, 0, 0) + y \frac{\partial}{\partial y} B_x(0, 0, 0) + x \frac{\partial}{\partial x} B_x(0, 0, 0) \quad (4.4)$$

De maneira análoga, pode-se obter expressões tanto para B_y , quanto para B_z , com única diferença que a componente $B_z(0, 0, 0) = B_0$.

Para a componente y ,

$$B_y(x, y, z) = z \frac{\partial}{\partial z} B_y(0, 0, 0) + y \frac{\partial}{\partial y} B_y(0, 0, 0) + x \frac{\partial}{\partial x} B_y(0, 0, 0) \quad (4.5)$$

E para a componente z ,

$$B_z(x, y, z) = B_0 + z \frac{\partial}{\partial z} B_z(0, 0, 0) + y \frac{\partial}{\partial y} B_z(0, 0, 0) + x \frac{\partial}{\partial x} B_z(0, 0, 0) \quad (4.6)$$

Agora, substituindo as equações 4.4, 4.5 e 4.6, em 4.1, tem-se:

$$\mathbf{B} = z \frac{\partial}{\partial z} B_x(0, 0, 0) \hat{\mathbf{i}} + y \frac{\partial}{\partial y} B_x(0, 0, 0) \hat{\mathbf{i}} + x \frac{\partial}{\partial x} B_x(0, 0, 0) \hat{\mathbf{i}} + z \frac{\partial}{\partial z} B_y(0, 0, 0) \hat{\mathbf{j}} + y \frac{\partial}{\partial y} B_y(0, 0, 0) \hat{\mathbf{j}} + x \frac{\partial}{\partial x} B_y(0, 0, 0) \hat{\mathbf{j}} + B_0 \hat{\mathbf{k}} + z \frac{\partial}{\partial z} B_z(0, 0, 0) \hat{\mathbf{k}} + y \frac{\partial}{\partial y} B_z(0, 0, 0) \hat{\mathbf{k}} + x \frac{\partial}{\partial x} B_z(0, 0, 0) \hat{\mathbf{k}}$$

onde reescrevendo os termos e os reagrupando, obtém-se:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}),$$

que gera,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (4.7)$$

que é definida como a equação para um campo magnético não uniforme para a teoria de órbita de primeira ordem, onde $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{B}$ (no lado direito da equação) é tomado na origem após ser derivado.

4.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Feitas as devidas considerações sobre o campo magnético não uniforme, agora, será analisado como uma partícula carregada, inserida neste campo, comporta-se. Assim, analisa-se a equação do movimento.

Inserindo-se a equação 4.7 na equação de Lorentz e a igualando a segunda Lei de Newton, adquire-se:

$$m \dot{\mathbf{v}} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \{ \mathbf{v} \times [\mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \},$$

$$m \dot{\mathbf{v}} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) + q [\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \quad (4.8)$$

Dado que a variação do campo magnético é muito pequena no período de um raio de Larmor, deve-se esperar que o movimento predominante seja o encontrado no capítulo anterior, ou seja, o movimento ciclotrônico que é constituído pelo movimento circular no plano ortogonal a $\mathbf{B}$ e por um movimento uniforme na direção do campo. Supondo-se que a velocidade possa ser escrita como (Bittencourt, 2004, p. 68):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{v}_0$ é a velocidade resultante da interação da partícula com um campo magnético uniforme ($m\dot{\mathbf{v}}_0 = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0$) e $\mathbf{v}_1$ é uma perturbação no movimento resultado do gradiente do campo magnético.

Substituindo a velocidade na equação 4.8, tem-se:

$$m\dot{\mathbf{v}}_0 + m\dot{\mathbf{v}}_1 = q(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0) + q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + q[\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}] + q[\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}],$$

substituindo a equação gerada a partir de $\dot{\mathbf{v}}_0$ ($m\dot{\mathbf{v}}_0 = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0$) na equação acima, zera-se os termos e se obtém:

$$m\dot{\mathbf{v}}_1 = q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + q[\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}] + q[\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}]$$

Também, pode-se supor que $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{v}_1$, por conta de que, como a variação do campo é pequena, a velocidade que essa variação proporcionará a partícula será muito pequena e assim se pode desprezar o último termo à direita da equação acima. Logo:

$$m\dot{\mathbf{v}}_1 = q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + q[\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \quad (4.10)$$

Onde, novamente se chega em uma expressão (4.10) que contém uma força a mais associada ao movimento, com:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0], \quad (4.11)$$

podendo ser reescrita (equação 4.10) assim:

$$m\dot{\mathbf{v}}_1 = q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F} \quad (4.12)$$

Observa-se que no capítulo anterior foi obtida a mesma equação (equação 3.56) com uma componente de produto vetorial entre velocidade e campo magnético e outra componente de força, com a única diferença que anteriormente essa componente era constante e agora é variável.

A força $\mathbf{F}$ depende da velocidade ciclotrônica, da posição da partícula e das derivadas do campo magnético $\mathbf{B}$. Portanto, $\mathbf{F}$ não apresenta uma dependência explícita do tempo. No entanto, como tanto a velocidade quanto a posição variam temporalmente, a força $\mathbf{F}$ possui uma dependência implícita com o tempo.

Considerando que a velocidade ciclotrônica está associada a um movimento de alta frequência, a força $\mathbf{F}$ também apresentará variações de alta frequência. Devido à complexidade envolvida na obtenção de uma solução analítica exata para o problema geral, é comum adotar-se uma abordagem aproximada que considera a força média ao longo de um período da oscilação ciclotrônica. Com isso, deixa-se de estudar o movimento rápido associado à rotação da partícula em torno das linhas de campo e se passa a considerar o movimento médio resultante, o qual está relacionado ao deslocamento do centro guia. Portanto, nesta etapa, toma-se o valor médio, em relação ao movimento de um raio de Larmor, das componentes da expressão 4.12, que resulta em:

$$\langle m\dot{\mathbf{v}}_1 \rangle = \langle q(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \rangle + \langle \mathbf{F} \rangle$$

Por $\mathbf{F}$ ser uma força que varia muito rapidamente com o tempo, pode-se considerar seu valor médio como sendo sua própria função. Além disso, reescrevendo $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ como $\mathbf{u}$:

$$m\dot{\mathbf{u}} = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F} \quad (4.13)$$

Observa-se que esta já é uma expressão com método de solução conhecida diante aos capítulos passados, portanto, pode-se considerar a forma como se resolveu as expressões 3.37 e 3.55 para se calcular 4.13.

Os termos tanto de velocidade quanto de força possuem caráter paralelo e perpendicular ao campo magnético, assim $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$. Agora, abrindo a expressão acima, tem-se:

$$m\dot{\mathbf{u}}_{\parallel} + m\dot{\mathbf{u}}_{\perp} = q(\mathbf{u}_{\parallel} \times \mathbf{B}_0) + q(\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

$$m\dot{\mathbf{u}}_{\parallel} + m\dot{\mathbf{u}}_{\perp} = q(u_{\parallel} B_0 \sin 0^\circ) + q(\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

$$m\dot{\mathbf{u}}_{\parallel} + m\dot{\mathbf{u}}_{\perp} = q(\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$$

Portanto, as componente paralelas e perpendiculares são, respectivamente:

$$m\dot{\mathbf{u}}_{\parallel} = \mathbf{F}_{\parallel}, \quad (4.14)$$

$$m\dot{\mathbf{u}}_{\perp} = q(\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F}_{\perp} \quad (4.15)$$

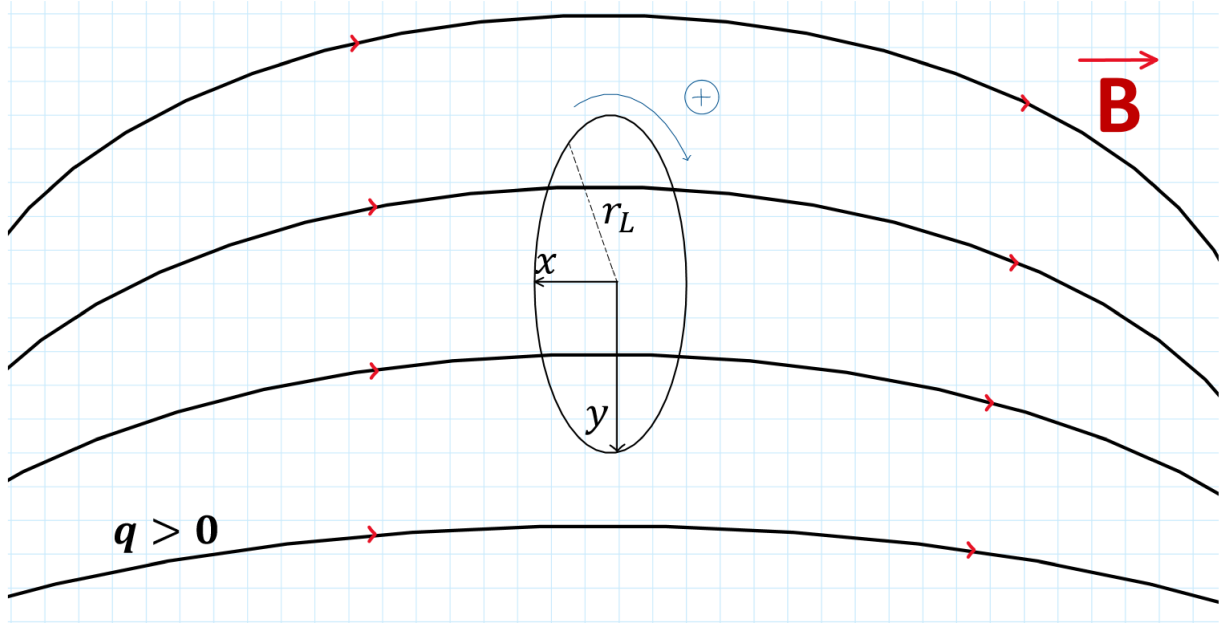
A componente paralela da força (4.14) irá produzir uma aceleração na direção paralela ao campo $\mathbf{B}$. Já, a componente da força ortogonal (4.15) irá produzir uma velocidade de deriva, pois, como já deduzido anteriormente, ao acrescentar uma força qualquer na equação de movimento isso gerará uma velocidade de deriva, como visto pela equação 3.36 que gerou o movimento de deriva 3.50. Assim, de uma mesma forma da equação 3.50, pode-se escrever a velocidade de deriva, neste caso, como:

$$\mathbf{v}_{d\perp} = \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2} \quad (4.16)$$

4.3 FORÇA PARALELA E PERPENDICULAR AO CAMPO MAGNÉTICO

Na secção, encontrou-se as expressões vetoriais das forças atuando em uma partícula de carregada que se encontra sob a ação de um campo magnético não uniforme (equações 4.14 e 4.15). Agora, busca-se calcular essas expressões em razão de seus módulos. Assim, considera-se um sistema de coordenadas no plano xy que se move, com distância de um raio de Larmor, junto com o centro guia, com velocidade $u_{\parallel}$, na direção da curvatura do campo, como se pode observar na figura 4.1.

Figura 4.1: Representação de um sistema de coordenadas, de uma partícula carregada positivamente, se movimentando juntamente ao centro guia no plano xy , inserido em um sistema de campo magnético não uniforme.



Fonte: Autor (2024).

Deve-se considerar que, este sistema de coordenadas, movendo-se com o centro guia, fique com $\mathbf{r}$ limitado ao plano (x, y) . Assim, reescrevendo-se os termos do campo magnético em coordenadas cilíndricas, obtém-se:

$$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$$

Pela expressão geral da força (4.8), tem-se:

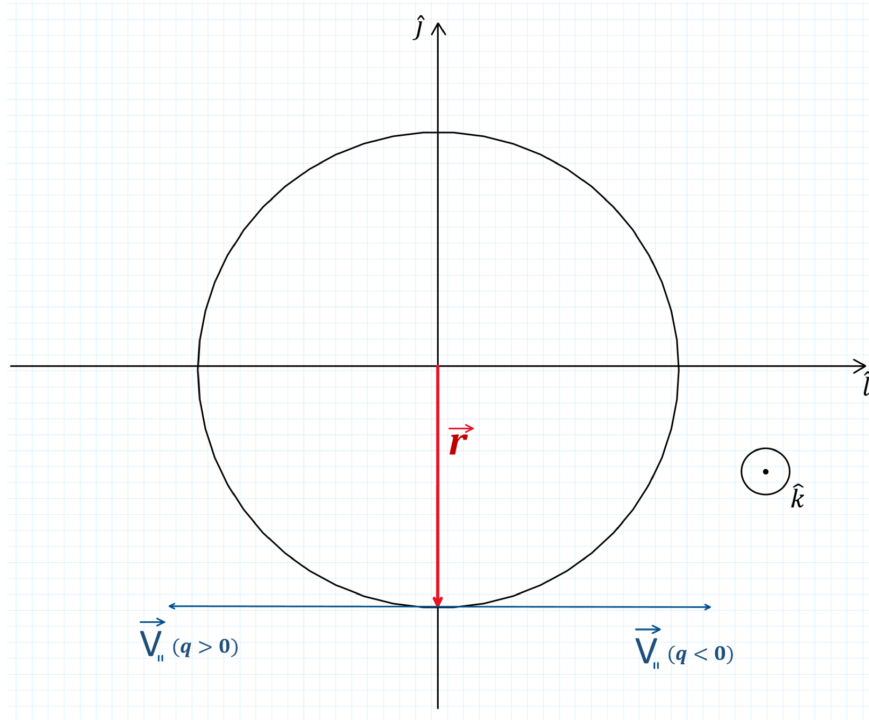
$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}] = q \left[\mathbf{v}_0 \times r \frac{\partial}{\partial r} (B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + B_z \hat{\mathbf{k}}) \right]$$

Como $B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ tem direção igual a do vetor velocidade ($\mathbf{v}_0$), o produto vetorial é nulo, deixando a equação da força:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \left(\mathbf{v}_0 \times r \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{r}} \right) + q \left(\mathbf{v}_0 \times r \frac{\partial}{\partial r} B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) + q \left(\mathbf{v}_0 \times r \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{k}} \right), \\ \mathbf{F} &= q \left(\mathbf{v}_0 \times r \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{r}} \right) + q \left(\mathbf{v}_0 \times r \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

A figura 4.2 representa os vetores associados a equação 4.17 e a analisando, afere-se que, para $q > 0$, $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r}$ tem sua componente na direção $+\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{v}_0 \times \hat{\mathbf{k}}$ na direção em $-\hat{\mathbf{r}}$, o que, para $q < 0$, torna-se o oposto, sendo $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r}$ tem sua direção em $-\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{v}_0 \times \hat{\mathbf{k}}$ tem sua direção em $+\hat{\mathbf{r}}$. Isso implica que, ao combinar essas direções e as alocar na equação 4.17, a força resultante será a mesma, tanto para uma carga positiva, quanto para uma carga negativa, pois, ao mudar o sinal da carga, o produto vetorial também muda de sinal e isso compensa a mudança de sinal gerado pela carga, não alterando o sentido da força. Portanto, reescrevendo-se a equação 4.17, já com suas respectivas direções, tem-se que:

Figura 4.2: Representação dos eixos de coordenadas do movimento para uma partícula carregada positivamente e negativamente.



Fonte: Autor (2024).

$$\mathbf{F} = |q|v_0r \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{k}} - |q|v_0r \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.18)$$

em que,

$$\mathbf{F}_{\parallel} = |q|v_0r \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.19)$$

e

$$\mathbf{F}_{\perp} = -|q|v_0r \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{r}} \quad (4.20)$$

Pela definição, o raio de Larmor é $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ e a frequência ciclotrônica é $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$,

onde, inserindo uma na outra se obtém $r_L = \frac{mv_0}{|q|B_0}$. Substituindo em 4.19 e 4.20 o r_L pelo r , tem-se:

$$\mathbf{F}_{\parallel} = |q|v_0 \left(\frac{mv_0}{|q|B_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{k}} = \frac{v_0^2 m}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{k}},$$

e

$$\mathbf{F}_{\perp} = -|q|v_0 \left(\frac{mv_0}{|q|B_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v_0^2 m}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{r}}$$

Percebe-se que em ambas as componentes das forças aparece a expressão $\frac{v_0^2 m}{B_0}$, que é, por definição, o dobro da componente do *momentum* magnético. Assim, definindo-se $|\mu| = \frac{v_{\parallel} v_0^2 m}{2B_0}$ e substituindo nas expressões das forças acima, tem-se que:

$$\mathbf{F}_{\parallel} = 2|\mu| \frac{\partial}{\partial r} B_r \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.21)$$

e

$$\mathbf{F}_{\perp} = -2|\mu| \frac{\partial}{\partial r} B_z \hat{\mathbf{r}} \quad (4.22)$$

4.4 INTERAÇÃO EM UM CAMPO COM GRADIENTE

Um campo magnético com gradiente no plano xy conterá derivadas de B_z com relação a x e a y diferentes de zero, e portanto, a força ortogonal (equação 4.22) produzirá uma contribuição para o movimento da partícula em interação com este campo magnético.

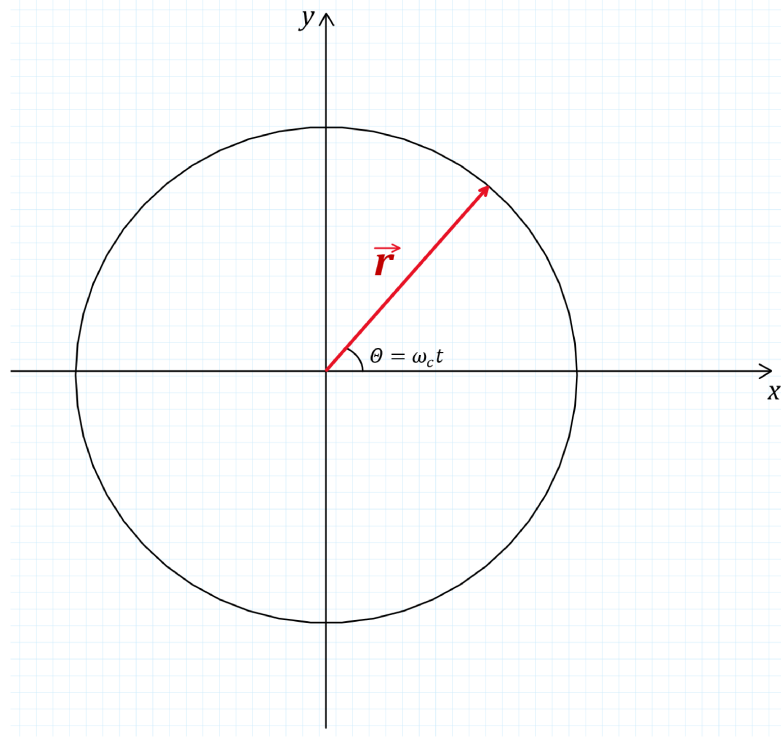
Trabalhando-se agora com a força perpendicular, pretende-se calcular seu valor médio. Assim, visualizando-se a figura 4.3 se pode inferir que $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ e $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{dx}{dr} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dr} \frac{\partial}{\partial y} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y}$$

Para analisar os componentes da força, expressa-se o vetor posição no plano xy , $\mathbf{r}$, em termos de suas coordenadas. Em coordenadas cartesianas, o vetor é dado por $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$. Utilizando a transformação para coordenadas polares, onde $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, o mesmo vetor pode ser escrito como $\mathbf{r} = r \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + r \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$. A partir disso, o vetor unitário na direção radial, $\hat{\mathbf{r}}$, é definido como $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$. Com as expressões para o operador $\frac{\partial}{\partial r}$ e o vetor $\hat{\mathbf{r}}$, a substituição na equação 4.22 resulta em:

$$\mathbf{F}_{\perp} = -2|\mu| \left(\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} \right) B_z \left(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}} \right),$$

Figura 4.3: Representação dos eixos, em coordenadas cartesianas, para a obtenção de seus respectivos ângulos.



Fonte: Autor (2024).

e, realocando os termos:

$$\mathbf{F}_{\perp} = -2|\mu| \left[\cos^2(\theta) \frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{i}} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{i}} \right) + \sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{j}} \right]$$

Busca-se agora calcular o valor médio para a força ortogonal. Considerando-se que a variação de B_z ao longo de um período, de um raio de Larmor, é muito pequena, e, portanto, este termo não é relevante para realizar o cálculo do valor médio, tem-se então:

$$\langle \mathbf{F}_{\perp} \rangle = -2|\mu| \left[\langle \cos^2(\theta) \rangle \frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{i}} + 2 \langle \cos(\theta) \sin(\theta) \rangle \left(\frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{i}} \right) + \langle \sin^2(\theta) \rangle \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{j}} \right]$$

O valor médio de $\langle \cos^2(\theta) \rangle$ é o mesmo que o valor médio de $\langle \sin^2(\theta) \rangle$, que obtido através de integração se adquire:

$$\langle \cos^2(\theta) \rangle = \langle \sin^2(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2},$$

e

$$\langle \cos(\theta) \sin(\theta) \rangle = 0,$$

assim,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}_\perp \rangle &= -2|\mu| \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{i}} + 2(0) \left(\frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{i}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{j}} \right], \\ \langle \mathbf{F}_\perp \rangle &= -|\mu| \left[\frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} B_z \hat{\mathbf{j}} \right]\end{aligned}\quad (4.23)$$

Pelo campo magnético possuir uma componente z muito grande quando se comparado com as componentes no plano xy , pode-se aproximar $\frac{\partial}{\partial x} B_z \simeq \frac{\partial}{\partial x} B$ e $\frac{\partial}{\partial y} B_z \simeq \frac{\partial}{\partial y} B$, e, assim, reescreve-se as expressões finais para o valor médio da força perpendicular como sendo:

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = -|\mu| \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right] B, \quad (4.24)$$

ou,

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = -|\mu| \nabla_\perp B, \quad (4.25)$$

com esta (4.25) sendo a expressão final para a força ortogonal, onde $\nabla_\perp$ se restringe as derivadas no plano ortogonal a $\mathbf{B}$.

4.4.1 A DERIVA DO GRADIENTE

A força ortogonal, calculada anteriormente (4.25) gera um movimento de deriva regido de mesma maneira que a equação da velocidade de deriva calculada ao fim do capítulo anterior (3.55). De modo que:

$$\mathbf{v}_{\nabla_\perp \mathbf{B}} = \frac{\langle \mathbf{F}_\perp \rangle \times \mathbf{B}}{qB^2},$$

ou, como o movimento aqui analisado gerou apenas velocidade de deriva na direção perpendicular ao campo (equação 4.16), pode-se escrever a equação da velocidade de deriva como sendo:

$$\mathbf{v}_{\nabla \mathbf{B}} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}}{qB^2},$$

Como a somatória das forças obtidas anteriormente, paralela sendo 4.29 e perpendicular sendo 4.25, isso resulta em:

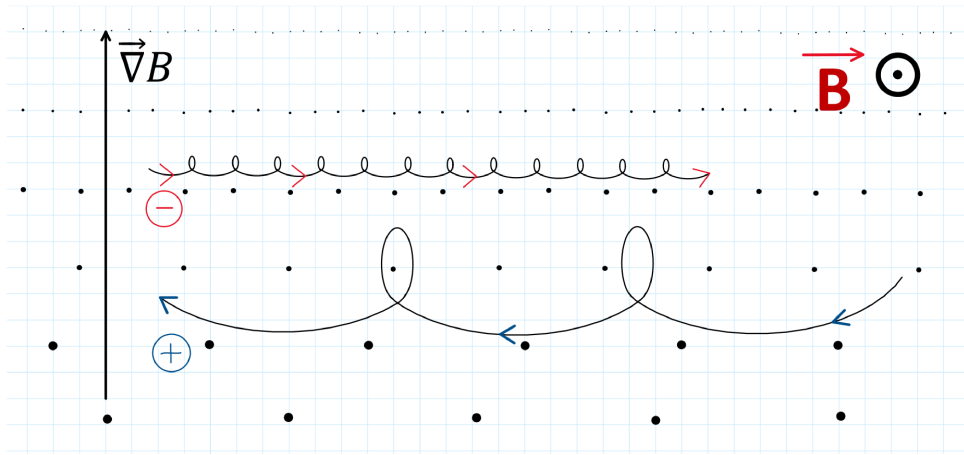
$$\langle \mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}_\parallel \rangle + \langle \mathbf{F}_\perp \rangle = -|\mu| \nabla_\parallel B - |\mu| \nabla_\perp B = -|\mu| \nabla B,$$

pode-se substituir na equação da velocidade para se obter:

$$\mathbf{v}_{\nabla \mathbf{B}} = -\frac{|\mu| \nabla B \times \mathbf{B}}{qB^2} = \mathbf{v}_{\mathbf{G}}, \quad (4.26)$$

que é a velocidade de deriva devido a presença de um gradiente de campo magnético, denotada por $\mathbf{v}_{\nabla \mathbf{B}}$. Como a mesma surgiu a partir da análise do de um campo magnético com gradiente, a mesma pode ser definida também como $\mathbf{v}_{\mathbf{G}}$. A representação de tal movimento está no plano da figura 4.4.

Figura 4.4: Representação da trajetória de um íon e um elétron inseridos em um campo magnético com deriva de gradiente.



Fonte: Autor (2024).

A figura 4.4 demonstra o movimento de deriva, relacionado a equação 4.26, de duas partículas, uma de carga positiva e outra de carga negativa. Como a trajetória depende da carga, as partículas de cargas diferentes submetidas a um campo de gradiente, as mesmas irão apresentar sentidos contrários de movimento.

4.5 INVARIANTE DO *MOMENTUM* MAGNÉTICO

Retomando a equação paralela de movimento (4.21):

$$m \frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} = -|\mu| \frac{\partial}{\partial z} B \hat{\mathbf{k}},$$

como $\mathbf{u}_{\parallel}$ é a velocidade média na direção do eixo z e como o tempo para que a partícula complete um ciclo é muito pequeno, pode-se considerar a velocidade média como sendo

velocidade instantânea $u_{\parallel} = \frac{dz}{dt}$. Assim, multiplicado a equação paralela de movimento por $u_{\parallel}$, tem-se:

$$mu_{\parallel} \frac{du_{\parallel}}{dt} = -|\mu| \frac{\partial}{\partial z} B u_{\parallel},$$

$$m \frac{d(u_{\parallel}^2)}{dt} = -|\mu| \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Como $|\mu| = \frac{u_{\perp}^2 m}{2B} = \frac{K_{\perp}}{B_0}$, substituindo acima, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u_{\parallel}^2 \right) = -\frac{K_{\perp}}{B} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} K_{\parallel} = -\frac{K_{\perp}}{B_0} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Ao se analisar o lado direito da equação se encontra o termo $\frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ que é o mesmo ao considerar a derivada total $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt}$, assim:

$$\frac{d}{dt} K_{\parallel} = -\frac{K_{\perp}}{B_0} \frac{dB}{dt} \quad (4.27)$$

Levando-se em conta que o campo magnético não realiza trabalho e portanto não altera a energia cinética total, tem-se:

$$K_{\perp} + K_{\parallel} = cte,$$

logo,

$$\frac{d}{dt} K_{\perp} + \frac{d}{dt} K_{\parallel} = 0,$$

e assim,

$$-\frac{d}{dt} K_{\perp} = \frac{d}{dt} K_{\parallel}$$

Substituindo $K_{\parallel}$ na equação 4.27:

$$2 \frac{d}{dt} K_{\perp} = \frac{K_{\perp}}{B_0} \frac{dB}{dt}$$

Diante algumas manipulações se pode adquirir a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dt} K_{\perp} = \frac{d}{dt} \left(\frac{K_{\perp}}{B_0} B \right),$$

realizando a derivada do produto se obtém:

$$\frac{d}{dt}K_{\perp} = \left(\frac{d}{dt} \frac{K_{\perp}}{B_0} \right) B + \frac{dB}{dt} \frac{K_{\perp}}{B_0},$$

Comparando-se a equação acima com a equação 4.27 se pode verificar que:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{K_{\perp}}{B_0} \right) B = 0,$$

e assim $\frac{K_{\perp}}{B_0} = |\mu| = cte$.

O *momentum* magnético orbital é uma constante de movimento, porém, esta afirmação pode não ser verdadeira para intervalos de tempo muito grandes. Por ser válida em uma escala temporal pequena, esta propriedade é chamada de 1ª invariante adiabática.

4.6 INVARIANTE DO FLUXO MAGNÉTICO

O fluxo magnético encerrado por um ciclo orbital pode ser escrito como:

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = B \int dA, \quad (4.28)$$

sendo $\int dA$ a área encerrada pela órbita da partícula, ou seja,

$$\Phi_m = BA = B\pi r_L^2 = B\pi \left(\frac{v^2 m^2}{|q|^2 B^2} \right),$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{|q|^2} \frac{2}{2} \frac{m^2 v^2}{B} = \frac{2\pi m}{|q|^2} \frac{K_{\perp}}{B},$$

$$\Phi_m = \frac{2\pi m}{|q|^2} |\mu|,$$

o que caracteriza o fluxo como constante e também um invariante adiabático.

4.7 INTERAÇÃO EM UM CAMPO COM DIVERGÊNCIA E CONVERGÊNCIA

Agora se visa trabalhar campos magnéticos com convergência e divergência ao longo do eixo z , a figura 4.5 mostra um exemplo deste campo. A força paralela, equação

4.21, possui contribuições quando o campo magnético possui essa natureza, portanto se analisará esta componente da força.

Resolvendo-se 4.21, ou seja, a média para a força paralela $\mathbf{F}_{\parallel}$. Considerando-se o divergente do campo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} B_{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} B_{\theta} - \frac{\partial}{\partial z} B_z,$$

onde, derivando a expressão do lado esquerdo (pela derivada do produto), obtém-se:

$$\frac{B_r}{r} + \frac{\partial}{\partial r} B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} B_{\theta} - \frac{\partial}{\partial z} B_z$$

Para simplificar a expressão acima, analisa-se o comportamento do campo na vizinhança do centro guia da partícula, que se assume coincidir com o eixo z (ou seja, $r = 0$). Devido à simetria axial em torno desse eixo, a componente radial do campo magnético deve ser nula sobre o próprio eixo, portanto, $B_r(r = 0) = 0$. Para pequenos raios r , pode-se então aproximar a componente B_r por uma expansão de Taylor de primeira ordem em torno de $r = 0$, o que significa que B_r varia linearmente com o raio:

$$B_r(r) \approx r \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} \right)_{r=0}$$

A partir desta aproximação linear, válida para a pequena órbita da partícula, os dois termos do lado esquerdo da equação do divergente se tornam aproximadamente iguais:

$$\frac{B_r}{r} \approx \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} \right)_{r=0} \approx \frac{\partial B_r}{\partial r}$$

Com esta justificativa, a equação pode ser simplificada para:

$$2 \frac{\partial B_r}{\partial r} \approx -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} B_{\theta} - \frac{\partial}{\partial z} B_z$$

Considerando o termo azimutal nulo para o valor médio, como será visto a seguir, chega-se a:

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Como B_z varia muito lentamente em uma órbita de Larmor, pode-se considerar $\frac{\partial}{\partial z}B_z$ constante neste período, de modo que $\langle \frac{\partial}{\partial z}B_z \rangle = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}B_z$, fazendo com que a expressão para a força paralela seja:

$$\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle = 2|\mu|\frac{\partial}{\partial r}B_r\hat{\mathbf{k}} = 2|\mu|\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}B_z\right)\hat{\mathbf{k}},$$

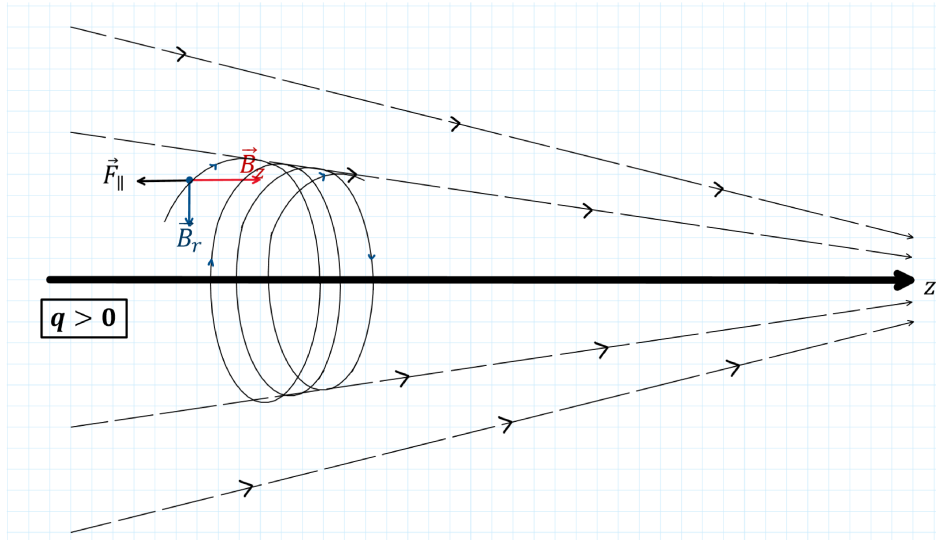
em que, considerando-se a mesma proposição anterior $\frac{\partial}{\partial z}B_z \simeq \frac{\partial}{\partial z}B$, a expressão para a força paralela se deleita em equidade para com a força perpendicular, tendo como resultado:

$$\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle = -|\mu|\nabla_{\parallel}B \quad (4.29)$$

Para além, o resultado produzido pela força 4.29 em conjunção com a equação de movimento da Segunda Lei de Newton gera:

$$\begin{aligned} m\frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} &= \langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle, \\ m\frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} &= -|\mu|\nabla_{\parallel}B, \\ m\frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} &= -|\mu|\frac{\partial}{\partial z}B_z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Figura 4.5: Representação da trajetória de um íon inserido em um campo magnético não uniforme com gradiente na direção de z .



A configuração $\frac{\partial}{\partial z} B_z$ pode ser reescrita como:

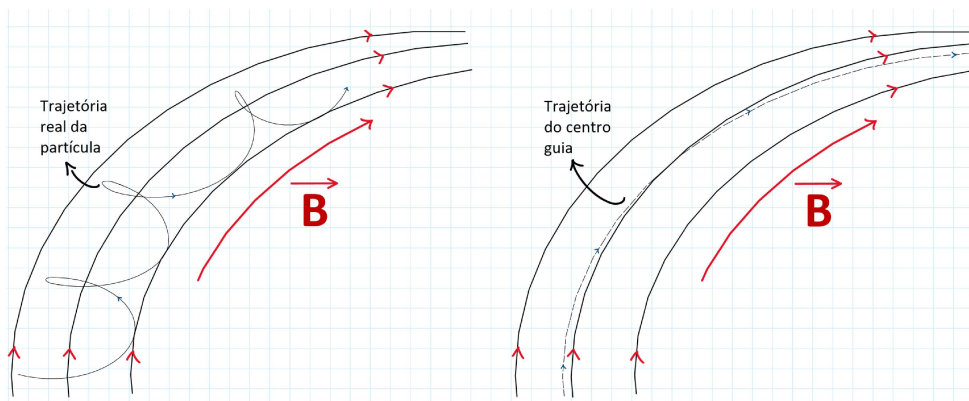
$$\frac{\partial}{\partial z} B_z = \frac{B_{z_f} - B_{z_i}}{z_f - z_i}$$

A figura 4.5 representa a trajetória de um íon inserido em um campo magnético não uniforme com gradiente na direção de z . A partícula possui três forças associadas a mesma, $\mathbf{B}_z$, que é gerada a partir do campo magnético e leva a partícula em direção ao gradiente do campo magnético. Também se tem a força $\mathbf{B}_r$ responsável pelo movimento de rotação no plano xy . Em função da análise da figura 4.5 e da equação 4.30, se percebe que conforme a partícula se movimenta na direção positiva de z o campo magnético também aumenta e portanto a trajetória da mesma vai se afinilando até que a força prevista na equação posteriormente deduzida ($m \frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} = \mathbf{F}_{\parallel}$) aumenta, chegando a um ponto em que a mesma muda o sentido da trajetória, voltando. Esta mudança de trajetória é denominada de espelho magnético, que acontece em regiões de alta intensidade de campo magnético.

4.8 TERMO DE CURVATURA DO CAMPO

Considerou-se até aqui a contribuição dada pelo gradiente do campo, onde se foi desprezada a curvatura do campo, porém para fins de maior aproximação com a realidade se deve considerar esta curvatura. Neste sentido, considera-se um sistema de coordenadas que se move junto com o centro guia com velocidade v_0 , portanto, trata-se de um referencial não inercial.

Figura 4.6: Representação da trajetória de um íon, inserido em um campo magnético não uniforme, juntamente com o traçado de seu centro guia.

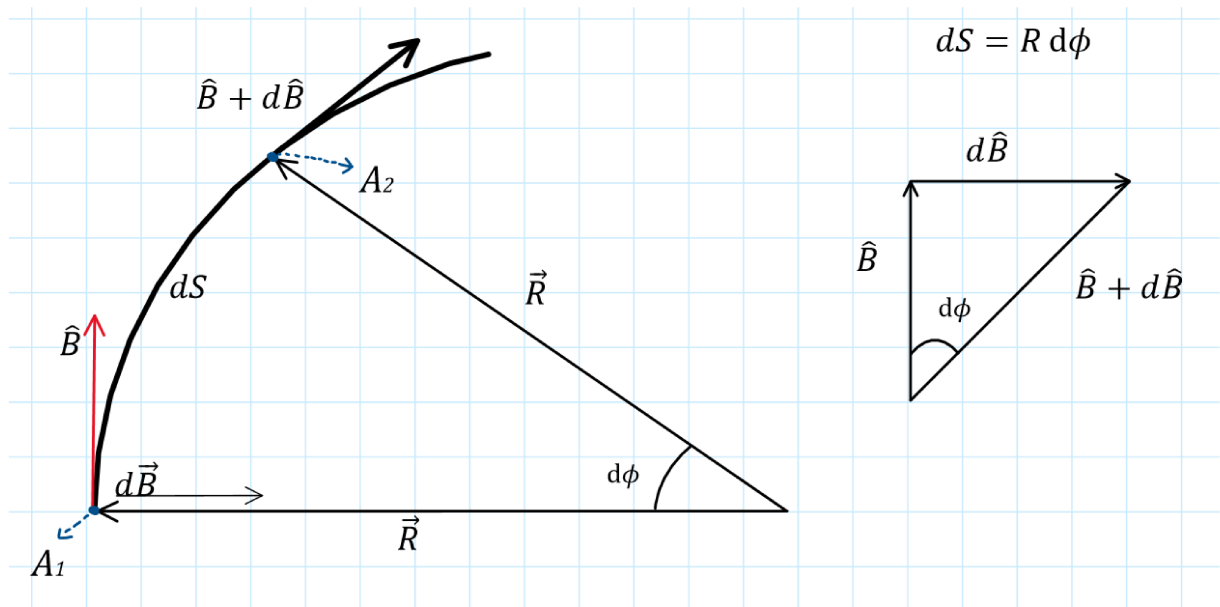


Fonte: Autor (2024).

A figura 4.6 está dividida em duas, a da esquerda representando a trajetória real da partícula positiva $q > 0$ ao longo das linhas de campo que trafegam na direção de $\mathbf{B}$ e a da direita representando o centro guia do movimento real ao longo das linhas de campo magnético. Para exemplificar melhor, lembre-se que a partícula se movimenta, no plano perpendicular a direção do campo magnético, de maneira circular com um centro de referência.

Como se observa na figura 4.6, o centro guia descreve uma trajetória inserida em uma curva suave. Neste sentido, para um pequeno deslocamento dS , pode-se considerar o mesmo como sendo um arco de circunferência com raio R , sendo R muito maior que o raio ciclotrônico, como se observa na figura 4.7.

Figura 4.7: Pequeno descolamento dS sofrido pelo centro guia da partícula já representada na figura 4.6.



Fonte: Autor (2024).

A figura 4.7, como já mencionado no parágrafo anterior, representa um deslocamento dS do centro guia no sentido do campo magnético $\mathbf{B}$ que acompanha a sua curvatura. Esse movimento pode ser aproximado por um arco de circunferência com raio R e deslocamento angular $d\phi$. Pode-se descrever o raio como sendo um vetor $\mathbf{R}$ que aponta para fora do centro de circunferência. No ponto A_1 o campo magnético tem uma direção dada pelo seu versor $\hat{\mathbf{B}}$ e no ponto A_2 a orientação do versor campo magnético sofre uma pequena variação $d\hat{\mathbf{B}}$ passando a ser $\hat{\mathbf{B}} + d\hat{\mathbf{B}}$. O versor $d\hat{\mathbf{B}}$ representa uma

pequena variação sofrida pelos versores do campo magnético entre os pontos A_1 e A_2 .

Ainda pela figura 4.7, para uma variação de $d\phi$ muito pequena, pode-se aproximar o sentido de $d\mathbf{B}$ como sendo o contrário do vetor $\mathbf{R}$. Para além, pode-se aproximar $d\hat{\mathbf{B}}$ como sendo um arco de circunferência, portanto:

$$|d\hat{\mathbf{B}}| = |\hat{\mathbf{B}}|d\phi = (1)d\phi,$$

já que o módulo de um versor é sempre 1. Assim,

$$d\hat{\mathbf{B}} = d\phi \left(-\frac{\mathbf{R}}{R} \right),$$

em que, dividindo por dS ,

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{dS} = \frac{d\phi}{dS} \left(-\frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

Como, pela figura 4.7 $\frac{d\phi}{dS} = \frac{1}{R}$, então:

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{dS} = -\frac{1}{R^2}\mathbf{R},$$

onde $\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{dS}$ é uma derivada ao longo da linha S . A direção de $\mathbf{S}$ é a mesma que $\mathbf{B}$, portanto esta derivada pode ser reescrita como:

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{dS} = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}},$$

onde, juntando com a equação acima, obtém-se:

$$-\frac{1}{R^2}\mathbf{R} = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}},$$

onde,

$$-\frac{1}{R^2}\mathbf{R} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{B} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{B^2} \quad (4.31)$$

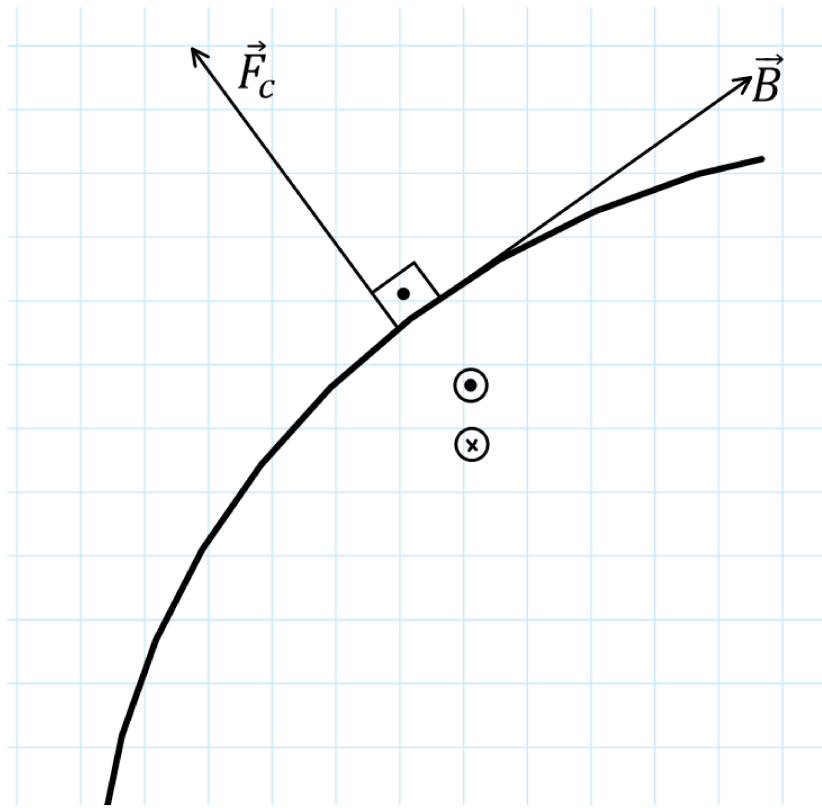
Como o sistema de coordenadas do centro guia se move em uma trajetória curva, o mesmo se encontra em um referencial não inercial e que portanto está sujeito a uma força não inercial, o que neste caso se caracteriza como força centrífuga $\mathbf{F}_c$, que terá a

mesma direção de $\mathbf{R}$, da figura 4.8. Assim, pela equação da força centrífuga:

$$F_{cen} = m \frac{v_0^2}{R},$$

$$\mathbf{F}_{cen} = m \frac{v_0^2}{R} \frac{\mathbf{R}}{R} = m \frac{v_0^2}{R^2} \mathbf{R}$$

Figura 4.8: Representação da força centrífuga que aparece no movimento de uma partícula positiva submetida a um campo magnético não uniforme.



Fonte: Autor (2024).

Substituindo a equação 4.31 na equação acima, tem-se que:

$$\mathbf{F}_{cen} = -mv_0^2 \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{B^2},$$

$$\mathbf{F}_{cen} = -\frac{2K_{\parallel}}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

que resulta em uma velocidade de deriva:

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{F}_{cen} \times \mathbf{B}}{qB^2} = -\frac{2K_{\parallel}}{qB^4} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \quad (4.32)$$

A equação (4.32) representa a velocidade de deriva associada à força centrífuga sentida por uma partícula que se move ao longo de uma linha de campo magnético curvo. Esse tipo de deriva é conhecida como deriva de curvatura, pois está relacionada à curvatura das linhas de campo magnético e ao movimento da partícula na direção paralela a elas. A força centrífuga efetiva $\mathbf{F}_{\text{cen}}$, associada ao movimento longitudinal da partícula, atua como uma força externa no sistema e, por isso, produz uma deriva transversal $\mathbf{v}_d$ perpendicular tanto à direção do campo magnético quanto à curvatura da trajetória.

Observa-se que a direção da deriva depende explicitamente do sinal da carga q . Portanto, partículas com cargas de sinais opostos, como elétrons e íons positivos, irão derivar em direções opostas sob a ação dessa força.

4.9 VELOCIDADE DE DERIVA TOTAL

Agora, para se obter uma expressão geral, somam-se as equações 4.26 e 4.32. Assim,

$$\mathbf{v}_{Gd} = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_d = -\frac{|\mu| \nabla B \times \mathbf{B}}{qB^2} - \frac{2K_{\parallel}}{qB^4} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \times \mathbf{B},$$

onde, reescrevendo-a em termos das componentes da velocidade da partícula:

$$\mathbf{v}_{Gd} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3}(\nabla B \times \mathbf{B}) - \frac{mv_0^2}{qB^4} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \times \mathbf{B},$$

ou, colocando os fatores comuns em evidência:

$$\mathbf{v}_{Gd} = -\frac{m}{qB^4} \left[\frac{1}{2}v_{\perp}^2 B(\nabla B \times \mathbf{B}) + v_0^2 [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \times \mathbf{B} \right],$$

e, utilizando a identidade vetorial

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \nabla \left(\frac{1}{2}B^2 \right) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}),$$

pode-se reagrupar os termos da equação anterior da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{Gd} = -\frac{m}{qB^4} \left[\frac{1}{2}v_{\perp}^2 B(\nabla B \times \mathbf{B}) + v_0^2 \left(\nabla \left(\frac{1}{2}B^2 \right) \times \mathbf{B} - [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \right) \right],$$

No presente caso, percebe-se que, como já deduzido na equação 3.55, a corrente

pode surgir pela influência do campo gravitacional. Porém, para casos onde não há densidade de corrente e não há campos elétricos, a Lei de Ampère-Maxwell (equação 3.9) reduz-se a:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

substituindo esse resultado em $\mathbf{v}_{\mathbf{Gd}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathbf{Gd}} &= -\frac{m}{qB^4} \left[B \frac{1}{2} v_{\perp}^2 (\nabla B \times \mathbf{B}) + v_0^2 \left((0) \times \mathbf{B} + \nabla \left(\frac{1}{2} B^2 \right) \times \mathbf{B} \right) \right], \\ \mathbf{v}_{\mathbf{Gd}} &= -\frac{m}{qB^4} \left[B \frac{1}{2} v_{\perp}^2 (\nabla B \times \mathbf{B}) + v_0^2 \nabla \left(\frac{1}{2} B^2 \right) \times \mathbf{B} \right], \\ \mathbf{v}_{\mathbf{Gd}} &= -\frac{m}{qB^4} \left[\left(\frac{1}{2} v_{\perp}^2 B + v_0^2 \right) (\nabla B \times \mathbf{B}) \right], \\ \mathbf{v}_{\mathbf{Gd}} &= -\frac{m}{qB^3} \left(\frac{1}{2} v_{\perp}^2 + v_0^2 \right) (\nabla B \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com o resultado 4.33 da soma da velocidade de deriva gerada pelo gradiente ($\mathbf{v}_{\mathbf{G}}$) com a velocidade de deriva gerada a partir da curvatura do campo ($\mathbf{v}_{\mathbf{d}}$), pode-se aferir explicações minimamente interessantes a respeito do movimento das partículas carregadas inseridas em campos magnéticos uniformes, não uniformes e com termos de curvatura, aferições essas que farão parte do próximo capítulo.

5 O CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE E SUAS INTERAÇÕES COM AS PARTÍCULAS CARREGADAS ADVINDAS DO ESPAÇO

Neste capítulo, será apresentado um estudo introdutório a respeito do campo magnético terrestre e de suas interações com partículas carregadas provenientes do espaço, em especial do vento solar. O objetivo será compreender como o campo magnético da Terra, originado por processos físicos no interior do planeta, atua como um escudo natural contra essas partículas, influenciando sua trajetória e confinamento.

Inicialmente, será discutida a origem do campo magnético terrestre a partir da movimentação de metais líquidos no núcleo externo da Terra, caracterizando o planeta como um grande dínamo natural. Em seguida, serão descritas as regiões principais da magnetosfera, com ênfase nos cinturões de radiação de Van Allen, estruturas fundamentais para o entendimento do confinamento de partículas carregadas.

Posteriormente, será desenvolvida uma modelagem do campo magnético terrestre assumindo um campo dipolar. Essa aproximação permitirá o estudo dos principais movimentos realizados pelas partículas ao interagirem com esse campo: o movimento ciclotrônico, a deriva magnética e o espelhamento nos polos. Esses mecanismos serão analisados com base nas leis do eletromagnetismo clássico, fornecendo uma compreensão física das trajetórias observadas.

Assim, este capítulo servirá como fundamentação teórica para as análises posteriores, evidenciando os aspectos fundamentais do campo magnético da Terra e suas consequências sobre a dinâmica de partículas carregadas no espaço próximo ao planeta.

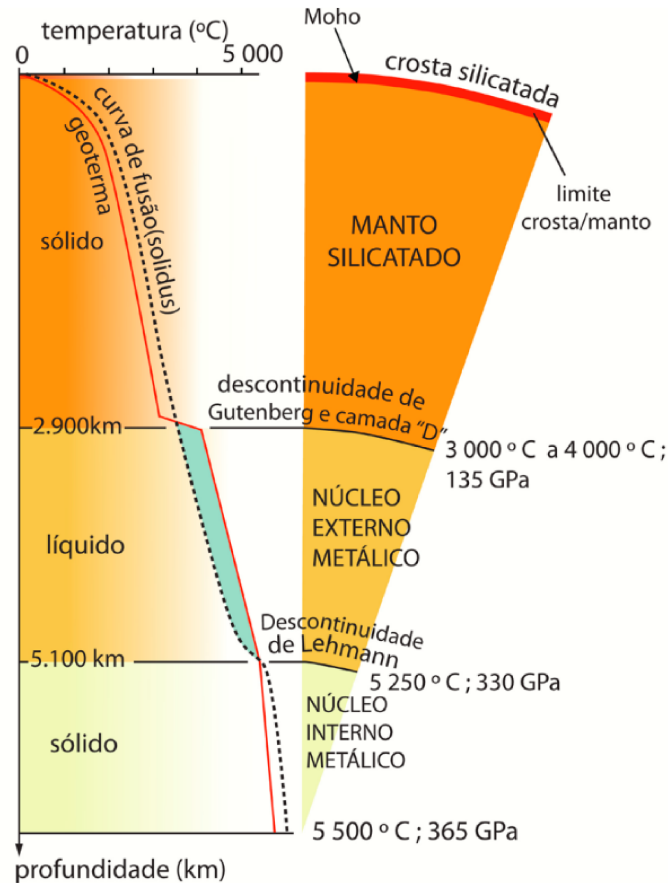
5.1 A ORIGEM DO CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE

Segundo Toledo (2025), O planeta Terra pode ser aproximado por uma esfera de diferentes camadas. Como pode ser observado na figura 5.1, as camadas mais internas (núcleo externo metálico e núcleo interno metálico) possuem uma alta temperatura em relação as camadas mais externas (crosta silicatada e manto silicatado) e além disso os materiais mais densos, como Fe (ferro), Ni (Níquel) e um pouco de S (enxofre) se deslocam essencialmente para os núcleos.

Na profundidade de aproximadamente 5100 km, ao adentrar o núcleo interno, a pressão atinge níveis tão elevados que a temperatura deixa de ser suficiente para manter

o material no estado líquido, resultando em sua solidificação.

Figura 5.1: Perfil do interior da Terra, mostrando a variação da temperatura (geoterma) e a curva de ponto de fusão dos materiais “solidus”.

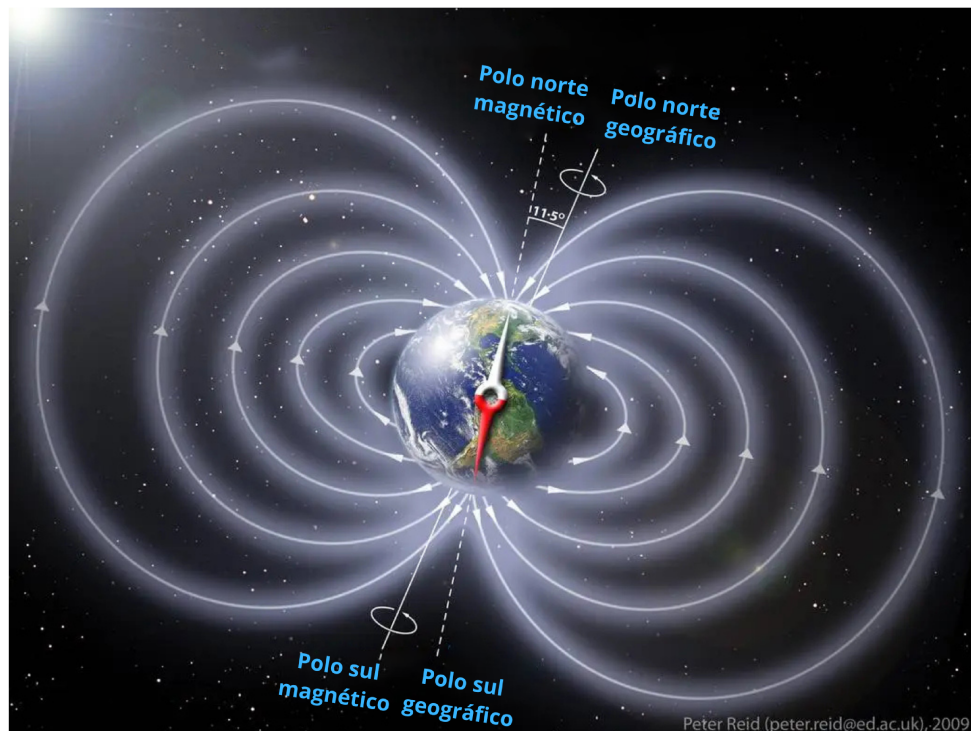


Fonte: Toledo (2025).

É fundamental destacar que as condições naturais do planeta evoluem ao longo do tempo. Como a Terra continua a perder calor, o núcleo externo, atualmente líquido, gradualmente se solidifica em contato com o núcleo interno. Em um futuro distante, milhões de anos à frente, todo o núcleo poderá se tornar sólido, consequência do crescimento progressivo do núcleo interno devido ao resfriamento contínuo do núcleo externo.

Enquanto esse processo ainda não se completa, o núcleo externo, composto por metal líquido, permanece em movimento convectivo. A rotação da Terra impõe a esse fluido movimentos helicoidais complexos, que induzem correntes elétricas no interior do núcleo. Esse fluxo de cargas, logo correntes elétricas, é responsável por gerar o campo magnético terrestre (figura 5.2), como prevê a equação de Ampère-Maxwell (3.9), caracterizando o núcleo externo como um imenso dínamo natural responsável pela manutenção do campo magnético terrestre.

Figura 5.2: Ilustração esquemática das linhas de campo magnético geradas pela Terra, representadas como um campo magnético de um dipolo.



Fonte: Adaptado de Reid (2009).

A 5.2 ilustra o uma região de campo magnético terrestre definida como magnetosfera. A magnetosfera de um planeta é a região espacial onde o campo magnético planetário domina a dinâmica do plasma, interagindo com o vento solar. No caso da Terra, a magnetosfera protege o planeta da radiação cósmica e das partículas carregadas do vento solar.

O vento solar consiste em um fluxo contínuo de partículas carregadas que se propagam para fora do Sol, atravessando o meio interplanetário e interagindo com a magnetosfera terrestre. Historicamente, sua existência foi proposta por Kristian Birkeland em 1908 e mais tarde descrita de forma consistente por Biermann (1951), Parker (1958) e confirmada experimentalmente por missões como *Luna 1 e 2* e *ULYSSES*, como apresentado por Piel (2010).

Do ponto de vista físico, a caracterização do vento solar como um plasma baseia-se no comportamento coletivo das partículas que o compõem. Segundo Chen (2016), para que um gás ionizado seja considerado um plasma, ele deve satisfazer três critérios fundamentais, já apresentados no capítulo 2.

Aplicando tais critérios ao vento solar, conforme Piel (2010, p. 8), a densidade típica dos prótons advindos do vento solar gira em torno de $n_p = 2,47 \times 10^6$ partículas por metro cúbico e sua temperatura em torno de $1,86 \times 10^5$ K (kelvin). Aplicando esses valores a equação adaptada ao comprimento de Debye (2.7), agora para os prótons, tem-se que:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_p}{n_p q^2}} = \sqrt{\frac{(8,85 \times 10^{-12})(1,38 \times 10^{-23})(1,86 \times 10^5)}{(2,47 \times 10^6)(1,6 \times 10^{-19})^2}} \approx 3,60 \times 10^2 \text{ m},$$

ou seja, $\lambda_D \approx 360$ m. Este resultado mostra que o comprimento de Debye no vento solar é da ordem de centenas de metros. Considerando que as escalas do sistema solar (como o raio da órbita terrestre) são da ordem de 10^9 m, verifica-se claramente que $\lambda_D \ll L$, atendendo ao primeiro critério estabelecido por Chen (2016) para que o vento solar seja classificado como plasma.

Agora, utilizando a equação 2.8 para verificar o segundo critério, se tem, para os prótons advindos do vento solar, que:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n_p \lambda_D^3 = \frac{4}{3}\pi (2,47 \times 10^6)(360)^3 \approx 2 \times 10^{16},$$

ou seja, como $N_D \approx 2 \times 10^{16} \gg 1$, isso garante a validade estatística.

O comprimento de Debye (λ_D), obtido com base na densidade e temperatura (de até 10^6 K no vento rápido), permanece muito menor que as escalas características do sistema solar, como o raio da órbita terrestre, satisfazendo a condição $\lambda_D \ll L$.

O terceiro critério, o produto $\omega\tau$, que envolve a frequência de plasma ω_p e o tempo médio entre colisões τ , é amplamente maior que 1 no vento solar, segundo Piel (2010), dado que as colisões são raras e o comportamento coletivo (como ondas de Langmuir e oscilações eletrostáticas) se manifesta livremente.

Esses três critérios demonstram que o vento solar não apenas é composto por íons e elétrons, mas também exibe propriedades coletivas típicas de plasmas, concluído-se que o vento solar pode, de maneira inequívoca, ser tratado como um plasma segundo os critérios formais de Chen (2016) e as observações experimentais de Piel (2010).

O vento solar, além de serem composto por partículas carregadas, também possui radiação eletromagnética, como raios X e ultravioleta extremo. Essas partículas car-

regadas, ao interagirem com o campo magnético terrestre, podem induzir tempestades geomagnéticas, afetando satélites e redes elétricas. Sem a proteção da magnetosfera e da atmosfera terrestre, a intensa radiação dos ventos solares causaria sérios danos biológicos, incluindo mutações genéticas e aumento do risco de câncer devido à ionização das células. Estudos como o de Atri e Melott (2014) detalham os impactos supracitados das tempestades solares na infraestrutura terrestre e seus potenciais riscos à vida.

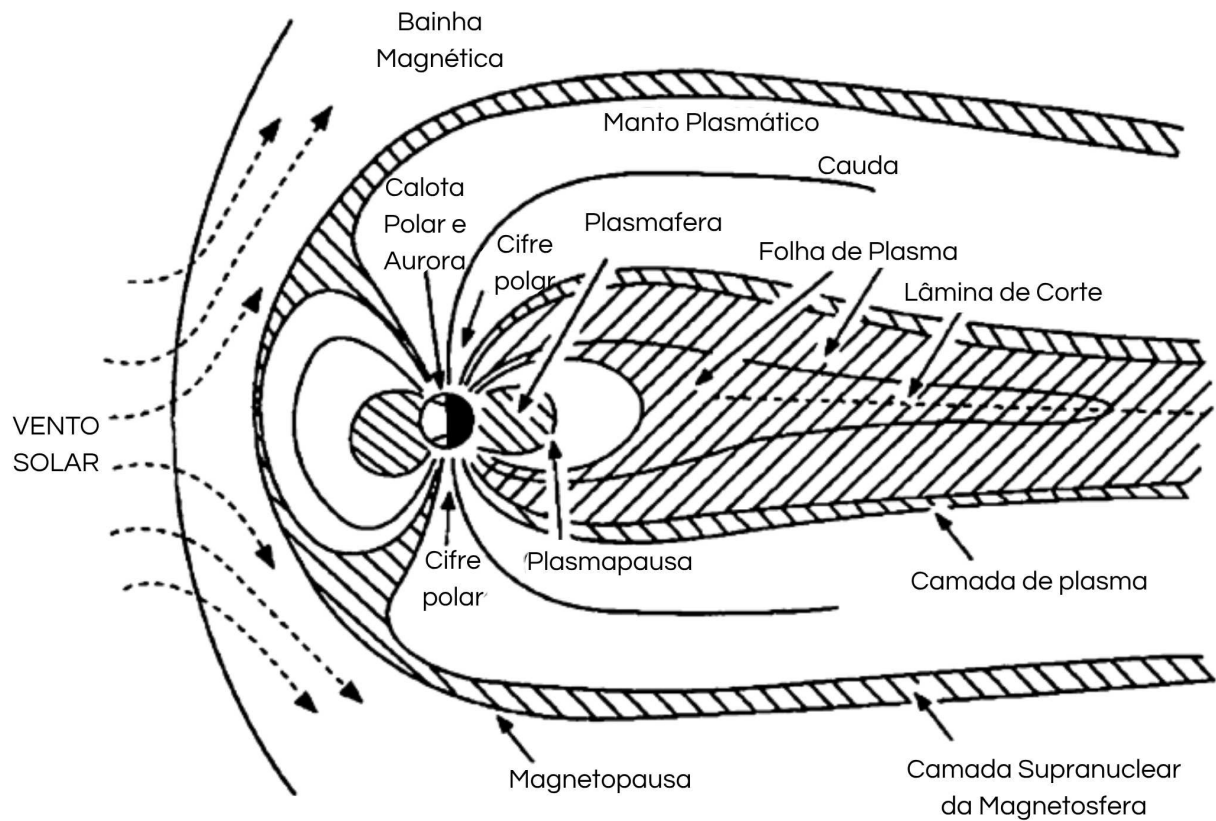
5.2 REGIÕES DE CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE

O vento solar, um fluxo de plasma originado da coroa solar, move-se a velocidades de aproximadamente 400 km/s. Devido à alta condutividade do plasma, o campo magnético interplanetário (IMF) está “congelado” no vento solar. Quando esse fluxo encontra a Magnetosfera terrestre, forma-se uma onda de choque à frente da magnetopausa, desacelerando e desviando o plasma incidente, como se pode visualizar pela figura 5.3. A Magnetosfera terrestre é composta por algumas regiões principais. A Magnetobainha ou Bainha Magnética é a região turbulenta entre a onda de choque e a magnetopausa, onde o plasma é aquecido e desacelerado. A Magnetopausa é a fronteira entre o plasma do vento solar e o plasma planetário, sustentada pelo equilíbrio entre a pressão magnética terrestre e a pressão dinâmica do vento solar. A Magnetocauda ou Cauda é a região alongada na direção oposta ao Sol, onde o campo magnético é distorcido formando dois lóbulos (Norte e Sul) separados por uma lâmina de plasma. Nesta região, ocorrem eventos de reconexão que liberam grandes quantidades de energia. A região de Corrente Anelar que é formada por íons aprisionados que derivam ao redor do planeta, intensificando-se durante tempestades magnéticas. A Plasmasfera, localizada na parte interna da magnetosfera, contém plasma frio e denso de origem ionosférica. Por fim o Cinturões de Van Allen, que são Toróides de partículas carregadas aprisionadas pelo campo magnético, compostos principalmente por elétrons e íons energéticos, onde os mesmo se encontram entre a camada terrestre até a Plasmapausa (Perratt, 2015).

No presente trabalho se visa focar nos Cinturões de Van Allen, a fim de explicar algumas interações que o plasma solar interatua com essas regiões de campo magnético. O motivo ao qual se visa trabalhar apenas com estes locais de campo magnético possui semelhanças com o campo magnético de um dipolo magnético, o qual possui forma bem

conhecida. Além disso, o plasma nessa região não sofre efeitos relativísticos.

Figura 5.3: Esquema geral da magnetosfera da Terra, onde se ilustra as principais regiões.



Fonte: Adaptado de Peratt (2015).

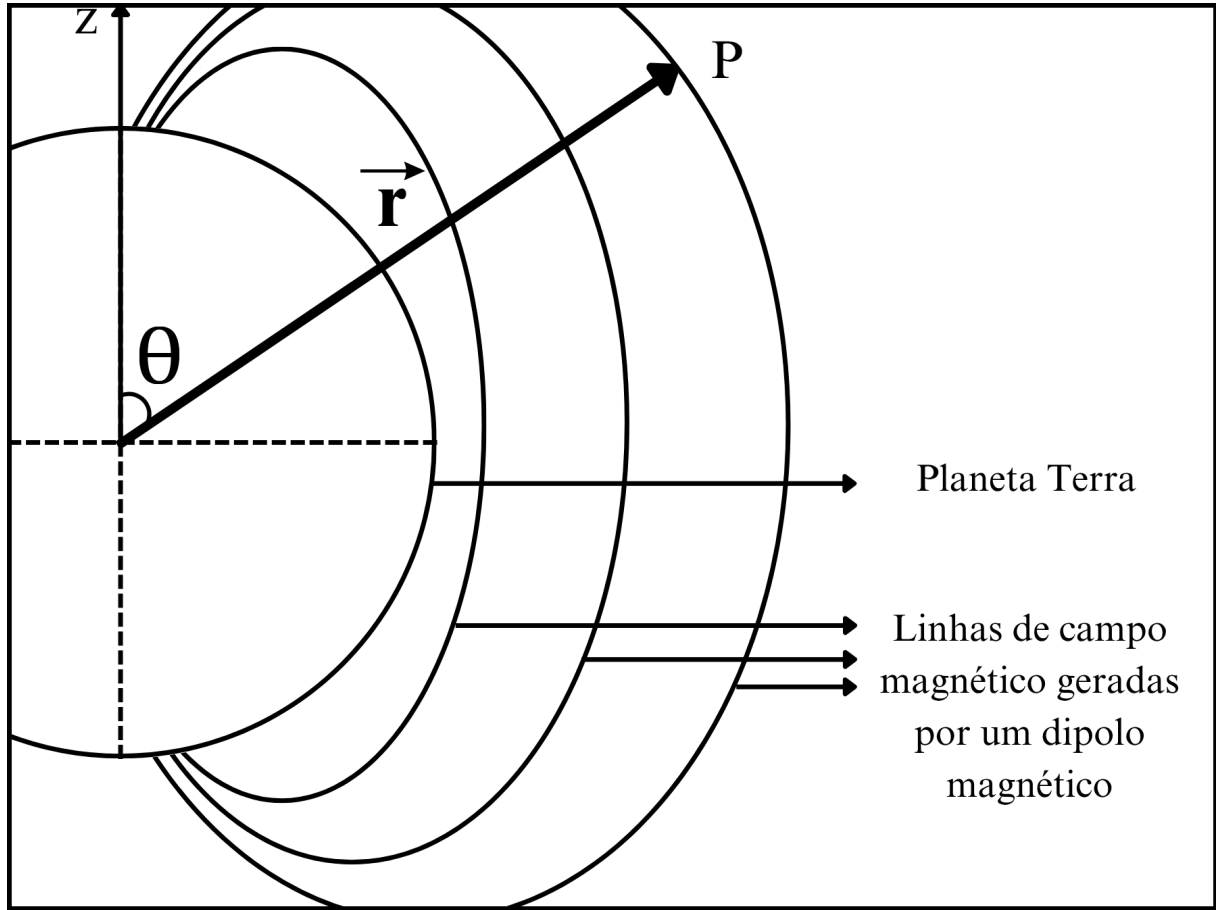
5.3 CAMPO MAGNÉTICO DE UM DIPOLO

Um dipolo magnético é um sistema que gera um campo magnético semelhante ao de um pequeno ímã em barra, caracterizado por um *momentum* magnético μ , que aponta do polo sul para o polo norte magnético.

Para analisar o campo magnético gerado por um dipolo, é útil representá-lo no sistema de coordenadas esféricas. Neste sistema, como observado na figura 5.4, $\mathbf{r}$ é o vetor radial, com módulo r indo do centro do dipolo até o ponto P onde se quer calcular o campo magnético; θ é o ângulo polar medido a partir do eixo z do dipolo; e ϕ é o ângulo azimutal, que representa a rotação ao redor do eixo z). No caso do campo de um dipolo

ideal, assume-se simetria axial em torno do eixo do momento magnético, o que implica que o campo independe de ϕ .

Figura 5.4: Representação do campo $\mathbf{B}$ da equação 5.1.



Fonte: Autor (2025).

Apesar de o campo magnético terrestre real apresentar assimetrias e variações temporais, sua estrutura externa, especialmente em regiões distantes da superfície, pode ser aproximadamente modelada como um campo dipolar. Essa aproximação é útil para fins didáticos e para a compreensão básica de fenômenos magnéticos no entorno da Terra, conforme sugerido por Halliday, Resnick e Walker (2016, p. 771). A equação para o campo magnético de um dipolo (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1960), alterada para coordenadas esféricas, é dada por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right] \quad (5.1)$$

onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ é a permeabilidade do vácuo, μ é o momento de dipolo

magnético, θ é o ângulo polar, e r é a distância a partir do centro do dipolo. O termo $\hat{\mathbf{e}}_r$ representa a direção radial, e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ a direção polar.

Considerando o raio da Terra como R , e um ponto de observação a uma altura h da superfície, tem-se que $r = R + h$. Substituindo essa relação em (5.1), obtém-se: onde, multiplicando e dividindo por R^3 , tem-se:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{R^3} \left[2 \left(\frac{R}{R+h} \right)^3 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{R}{R+h} \right)^3 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \right],$$

no qual se pode definir $B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{R^3}$, e assim a equação se transforma em:

$$\mathbf{B} = B_0 \left[2 \left(\frac{R}{R+h} \right)^3 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{R}{R+h} \right)^3 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \right] \quad (5.2)$$

Por meio da imagem 5.4 e da equação 5.2, pode-se determinar alguns comportamentos para a equação do campo magnético terrestre. Por exemplo, ao se analisar o campo magnético no polo norte em θ iniciando em 0° , tem-se $\cos 0^\circ = 1$ e $\sin 0^\circ = 0$. Com $h = 0$, ou seja, próximo a superfície da Terra, a equação 5.2 se reduz a:

$$\mathbf{B} = B_0 \left[2 \left(\frac{R}{R+0} \right)^3 \hat{\mathbf{e}}_r \right] = 2B_0 \left(\frac{R}{R} \right)^3 \hat{\mathbf{e}}_r$$

que pode ser reescrito como:

$$B_r = 2B_0 = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{R^3} \quad (5.3)$$

Para o equador, ou seja em $\theta = 90^\circ$, o $\cos 90^\circ = 0$ e o $\sin 90^\circ = 1$. Novamente em $h = 0$, ou seja, próximo a superfície da Terra, a equação 5.2 se reduz a:

$$\mathbf{B} = B_0 \left[\left(\frac{R}{R+0} \right)^3 \hat{\mathbf{e}}_\theta \right] = B_0 \left(\frac{R}{R} \right)^3 \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

que pode ser reescrito como:

$$B_\theta = B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{R^3} \quad (5.4)$$

Esses valores de campo magnético obtidos nas equações 5.3 e 5.4, demonstram que a intensidade do campo magnético aproximado por um dipolo (o campo magnético terrestre, por exemplo) possui intensidade duas vezes maior nos polos do que no equador.

5.4 INTERAÇÃO - VENTO SOLAR E CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE

Os Cinturões de Radiação de Van Allen, descobertos em 1958 pelos instrumentos a bordo do *Explorer 1*, constituem uma das primeiras grandes descobertas da Era Espacial. Conforme descrito por Li e Hudson (2019), esses cinturões são compostos por populações de partículas carregadas, como elétrons e prótons relativísticos e não relativísticos, aprisionadas pelo campo magnético terrestre. Observações iniciais revelaram duas zonas principais: uma zona interna, predominantemente composta por prótons de baixa altitude, e uma zona externa, caracterizada por elétrons de alta altitude. A compreensão desses cinturões é essencial para a física espacial, uma vez que as partículas energéticas que os compõem podem interagir com sistemas tecnológicos orbitais como sistemas de GPS.

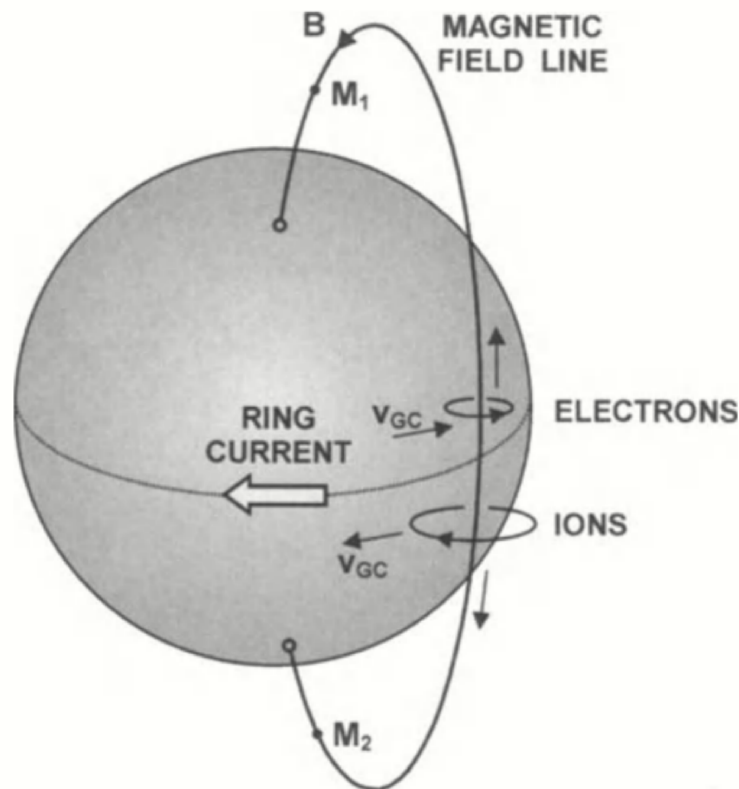
A dinâmica dessas partículas é governada por três tipos principais de movimento. Iniciando pelos íons, observa-se inicialmente o movimento ciclotrônico, no qual os prótons giram no plano normal das linhas do campo magnético. Como discutido no Capítulo 3, pela imagem 3.2, esse giro ocorre em sentido horário ao longo das linhas de campo, de acordo com a convenção da força de Lorentz para partículas de carga positiva. O raio associado a esse movimento é diretamente proporcional a massa e a componente perpendicular da velocidade, e inversamente proporcional à intensidade do campo magnético, como pode-se observar pela equação 3.33. Sendo assim, os prótons, devido à sua maior massa, possuem raios de Larmor consideravelmente maiores do que os elétrons como se pode visualizar a figura 5.5.

Esse movimento ciclotrônico ocorre em função da componente de velocidade perpendicular ao campo magnético ($v_{\perp}$) intrínseca a partícula. Além disso, quando a partícula vem do espaço, possuirá uma componente de velocidade paralela ao campo magnético ($v_{\parallel}$). Se a partícula encontrar as linhas de campo magnético e sua componente paralela de velocidade estiver, por exemplo, em direção ao polo norte magnético, a partícula avançará ao longo das linhas de campo em direção à região onde a intensidade do campo magnético aumenta.

As equações (5.3) e (5.4) mostram que, nos polos, o campo magnético radial B_r é duas vezes mais intenso do que a componente θ no equador, para uma mesma altitude h .

Essa diferença de intensidade de campo explica a formação de regiões de espelhamento magnético, que atuam como barreiras naturais para partículas carregadas.

Figura 5.5: Representação do movimento de partículas carregadas aprisionadas pelas regiões de campo magnético terrestre.



Fonte: Bittencourt (2004).

Esse fenômeno ocorre porque, devido à conservação do momento magnético (seção 4.6) adiabático, a velocidade perpendicular da partícula aumenta conforme B cresce, o que implica na diminuição da componente paralela até que esta se anule, fazendo com que a partícula reverta sua direção. Assim, a partícula passa a se mover de volta em direção ao outro hemisfério, até encontrar uma nova região de maior campo magnético, repetindo o processo. Esse movimento oscilatório forma o que se denomina movimento de espelhamento, característico de partículas aprisionadas no campo magnético terrestre, sendo esse o segundo tipo de movimento.

O campo magnético apresenta uma estrutura que se curva em direção aos polos, portanto se pode considerar o termo de curvatura do campo, discutido na seção 4.7. O termo de curvatura, juntamente ao termo de gradiente do campo geram a equação de

velocidade de deriva 4.33. Relembrando-se,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{Gd}} = \mathbf{v}_{\mathbf{GC}} = -\frac{m}{qB^3} \left(\frac{1}{2}v_{\perp}^2 + v_0^2 \right) (\nabla B \times \mathbf{B}),$$

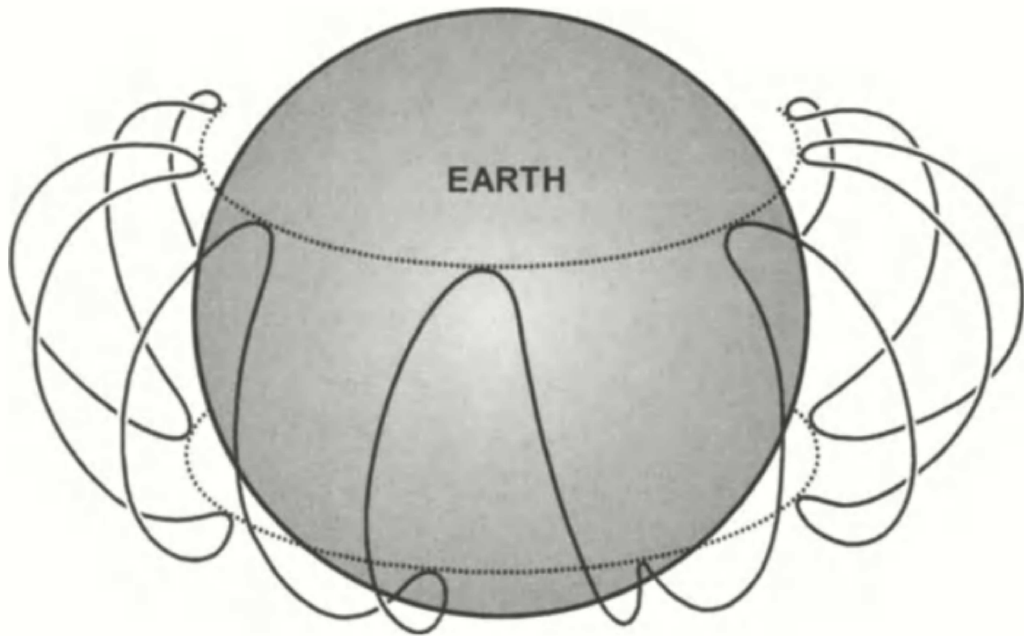
na qual $\mathbf{v}_{\mathbf{Gd}}$ ou $\mathbf{v}_{\mathbf{GC}}$ é a velocidade de deriva devido ao gradiente e à curvatura do campo magnético, m e q representam, respectivamente, a massa e a carga da partícula, $v_{\perp}$ é a componente da velocidade perpendicular ao campo magnético e v_0 é a componente paralela. Essa equação indica que, ao se moverem em regiões onde o campo magnético varia espacialmente, as partículas sofrem de uma força resultante que gera nelas uma deriva ortogonal ao vetor campo magnético $\mathbf{B}$ e ao gradiente desse campo. A direção dessa deriva depende do sinal da carga: para partículas positivas (como íons), a deriva ocorre em um sentido; para partículas negativas (como elétrons), no sentido oposto, este sendo o terceiro tipo de movimento como ilustrado na figura 5.5 pelas setas $\mathbf{v}_{\mathbf{GC}}$.

No contexto do campo magnético terrestre, cuja geometria se assemelha a um dipolo inclinado, essa deriva faz com que os íons descrevam trajetórias na direção oeste e os elétrons na direção leste. Apesar de seguirem sentidos opostos, ambos os tipos de partículas circulam ao redor do planeta, criando uma corrente líquida efetiva na mesma direção, conhecida como *ring current* (corrente de anel). Essa corrente se estabelece predominantemente no plano equatorial magnético e é responsável por gerar um campo magnético secundário que se opõe ao campo geomagnético da Terra, contribuindo para sua diminuição temporária durante tempestades geomagnéticas (Gonzalez *et al.* 1994, p. 9). Os três movimentos, juntos, geram algo semelhante a trajetória ilustrada pela figura 5.6.

Portanto, em resumo se tem que os íons e elétrons advindo dos Sol são confinados, respectivamente pelo campo magnético terrestre (nas regiões dos Cinturões de Van Allen) externo e interno. Ambas as partículas efetuam a mesma trajetória, observada na figura 5.6, em sentidos opostos, ao serem aprisionados pelo campo magnético, ou seja, ao serem confinadas são transportadas cíclicamente até um dos polos, ao mesmo tempo que derivam no plano equatorial. Chegando em um dos polos, pela alta intensidade de campo magnético as partículas sofrem o efeito do espelho magnético e são refletidas para uma região de campo menos intenso, ao mesmo tempo que tem seu movimento direcionado ao outro polo magnético, ficando, assim, em um ciclo infinito de idas e vindas entre os polos,

claramente até que não interajam com outras partículas.

Figura 5.6: Representação do movimento das partículas carregadas aprisionadas nas regiões de campo magnético terrestre, considerando os termos de gradiente e curvatura.



Fonte: Bittencourt (2004).

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho foi motivado pela relevância da Física de Plasmas para a compreensão do universo e pela oportunidade de oferecer um material didático e acessível sobre o tema, frequentemente ausente na formação inicial em Física. O objetivo geral, portanto, foi realizar um estudo teórico da dinâmica clássica de um plasma, com ênfase nas deduções que descrevem o movimento de partículas carregadas em campos elétricos e magnéticos de diferentes naturezas. Ao final da jornada, pode-se afirmar que os objetivos propostos foram alcançados de forma sistemática.

Inicialmente, o trabalho cumpriu o objetivo de revisar o conceito de temperatura, estabelecendo, por meio da dedução da distribuição de Maxwell-Boltzmann, sua fundamental relação com a energia cinética média das partículas. Com essa base, foi possível definir formalmente um plasma não como um simples “quarto estado da matéria”, mas como um gás ionizado que satisfaz três critérios rigorosos, envolvendo o comprimento de Debye, o comportamento coletivo e a frequência de colisões. A análise da equação de Saha demonstrou que a transição para o estado de plasma é um processo contínuo, justificado pela existência de partículas de alta energia na cauda da distribuição de Maxwell-Boltzmann.

O cerne do trabalho consistiu na análise progressiva do movimento de uma única partícula carregada, cumprindo os objetivos de estudar sua dinâmica em cenários de complexidade crescente. Foram deduzidas as trajetórias para campos magnéticos uniformes, o que levou à descrição do movimento ciclotrônico, para a sobreposição de campos elétricos, magnéticos e gravitacionais, resultando nos movimentos de deriva, e, finalmente, para campos magnéticos não uniformes, onde os efeitos de gradiente e curvatura geram novas derivas e o fundamental fenômeno do espelhamento magnético.

A aplicação desses resultados permitiu responder à questão central deste TCC: como se comportam as partículas do vento solar ao interagirem com o campo magnético terrestre? Verificou-se que o vento solar pode ser tratado como um plasma e que, ao ser capturado pela magnetosfera, sua trajetória é uma superposição dos movimentos elementares deduzidos. A combinação do giro ciclotrônico, do movimento de espelhamento entre os polos e das derivas de gradiente e curvatura explica o confinamento das partículas nos Cinturões de Van Allen e a consequente formação da corrente de anel.

Conclui-se, portanto, que a complexa dinâmica de um plasma de baixa densidade confinado pode ser compreendida a partir de princípios fundamentais da mecânica clássica e do eletromagnetismo. Este trabalho logrou êxito em seu propósito didático de desmistificar um tema avançado, apresentando uma construção lógica e passo a passo desde os conceitos básicos até uma aplicação astrofísica relevante. Como sugestão para trabalhos futuros, diante ao avanço tecnológico, seria de grande utilidade realizar um aperfeiçoamento do documento em sí, criando imagens interativas para que o autor modifique seus parâmetros e visualize seus resultados. Também, poderia-se incluir efeitos relativísticos, mencionados como não abordados, ou transitar da abordagem de partícula única para modelos de fluido, como a magnetohidrodinâmica.

7 REFERÊNCIAS

- APPOLINÁRIO, F. **Metodologia da Ciência: filosofia e prática da pesquisa** / Fabio Appolinário. – São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- ATRI, Dimitra; MELOTT, Adrian L. Cosmic rays and terrestrial life: a brief review. **Astroparticle Physics**, [S.L.], v. 53, p. 186-190, jan. 2014. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.astropartphys.2013.03.001>.
- BAGNATO, V. S. **Física Moderna Aula 8: Distribuição de Maxwell Boltzmann**, 2016. Disponível em: . Acessado em: 01 de julho de 2021.
- BITTENCOURT, J.A. **Fundamentals of Plasma Physics**. 3. ed. São José dos Campos: Springer, 2004.
- CHEN, Francis F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion**. 3. ed. Los Angeles: Springer, 2016.
- DAMIÃO, G. J.; RODRIGUES, C. G.. A Função de Distribuição de Velocidades de Maxwell-Boltzmann em Detalhes. **Physicae Organum**, Brasília, v. 7, n. 2, p. 134-149, jul. 2021.
- EIELSON. **The Aurora Borealis or Northern Lights shines above Bear Lake at Eielson Air Force Base**. 2013. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Aurora_Borealis_or_Northern_Lights_shines_above_Bear_Lake_at_Eielson_Air_Force_Base,_Alaska,_on_18_Jan_050118-F-MS415-003.jpg. Acesso em: 02 jun. 2024.
- GLOBO. **Frio congela lago de parque em Guarapuava**. 2021. Disponível em: <https://globoplay.globo.com/v/9698835/>. Acesso em: 20 abr. 2024.
- GONZALEZ, W. D.; JOSLYN, J. A.; KAMIDE, Y.; KROEHL, H. W.; RÖLKE, G.; TSURUTANI, B. T.; VASYLIUNAS, V. M. What is a geomagnetic storm? **Journal of Geophysical Research**, v. 99, n. a4, p. 5771-5792, 1994.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física - Eletromagnetismo**, Vol. 2, 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 2016.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**, vol. 2, 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- KIKUCHI, Mitsuru *et al.* **Fusion Physics**. Vienna: Sales Unit, 2012. By: International Atomic Energy Agency.
- LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Maria de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- LETCHER, Piers. **Have you ever wondered what it's like inside an operating tokamak?** 2025. Disponível em: <https://www.iter.org/node/20687/>

have-you-ever-wondered-what-its-inside-operating-tokamak. Acesso em: 02 mar. 2025.

LI, W.; HUDSON, M. K. Earth's Van Allen Radiation Belts: From Discovery to the Van Allen Probes Era. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, v. 124, n. 12, p. 8321-8344, 2019. DOI: 10.1029/2018JA025940.

NASA/GSFC. **NASA Mission Reveals Speed of Solar Wind Stripping Martian Atmosphere**. 2015. Disponível em: <https://www.nasa.gov/news-release/nasa-mission-reveals-speed-of-solar-wind-stripping-martian-atmosphere/>. Acesso em: 20 abr. 2024.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**, vol. 2, 4ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

OLIVEIRA, Mario José de. **Termodinâmica**. São Paulo: Livraria da Física, 2005.

OSÓRIO, Francisco A. P. *et al.* **Mecânica Relativística**. **Estudos**, Goiânia, v. 41, n. 1, p. 8-18, mar. 2014. Disponível em: <https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://seer.pucgoias.edu.br/index.php/estudos/article/download/3361/1948/9774&ved=2ahUKEwiBvsz4k5uMAxV1iJUCHRsWC-kQFnoECBUQAQ&usg=A0vVaw2dlzkbJauq-s7lYEoZIItKR>. Acesso em: 21 mar. 2024.

PENNA, T. 8. **Distribuição de velocidades de Maxwell**. Roteiro. 2021. Son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HotpFMGWxww>. Acesso em: 01 jun. 2024.

PERATT, Anthony L. **Physics of the Plasma Universe**. 2. ed. Los Alamos: Springer, 2015.

PIEL, Alexander. **Plasma Physics: an introduction to laboratory, space, and fusion plasmas**. Kiel: Springer, 2010.

REID, Peter. **Representation of Earth's Invisible Magnetic Field**. 2009. Disponível em: <https://www.nasa.gov/image-article/representation-of-earths-invisible-magnetic-field/>. Acesso em: 04 maio 2025.

REIF, F. **Fundamentals of Statistical And Thermal Physics**. Berkeley: McGraw-Hill, 1965.

REITZ, John R.; MILFORD, Frederick J.; CHRISTY, Robert W. **Fundamento da Teoria Eletromagnética**. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1960. Tradução: Renê Balduino Sander, Carlos Duarte.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de Física: Movimento Ondulatório e Termodinâmica**. Rio de Janeiro: LTC, 2004. v. 6.

SILVEIRA, Fernando Lang da. Um tema negligenciado em textos de Física Geral: a vaporização da água. 2016. Disponível em: <https://www.researchgate.net/>

publication/311722331_Um_tema_negligenciado_em_textos_de_Fisica_Geral_a_vaporizacao_da_agua. Acesso em: 04 ago. 2024.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica**. 6. ed. Porto Alegre: LTC, 2016. 1 v. Tradução e Revisão Técnica Paulo Machado Mors.

TOLEDO, Maria Cristina Motta de. **Estrutura Interna da Terra**. Licenciatura em Ciências - USP. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc0011/impressos/plc0011_03.pdf. Acesso em: 16 mar. 2025.

A DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES DE MAXWELL-BOLTZMANN

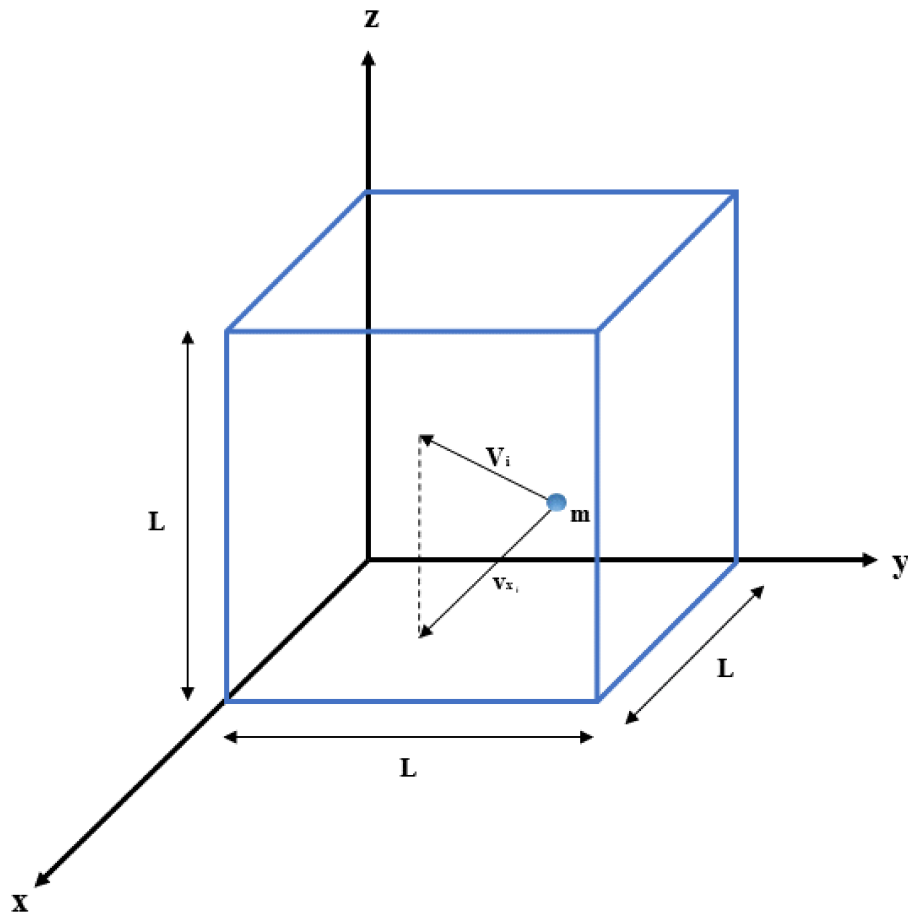
Para se conseguir avançar naquilo que se define como física de Plasmas, é prudente revisar e até mesmo expandir as noções físicas de “temperatura”. A ferramenta para essa expansão conceitual é a dedução da equação de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann, cujo formalismo matemático conecta a temperatura, uma grandeza macroscópica, à energia cinética média das partículas em um sistema microscópico. A importância desta dedução para a física de plasmas, foco deste trabalho, é fundamental: a distribuição demonstra que, mesmo em um gás a uma dada temperatura, sempre existirá uma fração de partículas com energias muito acima ou abaixo da média. São essas partículas de alta energia na “cauda” (discussão que será feita no início do capítulo 2) da distribuição que, ao colidirem, possuem a capacidade de superar a energia de ionização dos átomos, dando origem à transição do gás para o estado de plasma. Assim, a equação não apenas redefine a temperatura, mas também justifica o mecanismo de formação do plasma que será estudado adiante.

Para melhor compreender o conceito de temperatura se introduz o mesmo em um sistema. Imagina-se um gás rarefeito, em equilíbrio térmico, contido em um recipiente cúbico. O mesmo possui certos parâmetros físicos associados, sendo eles a temperatura (T), a pressão (P) e o volume (V). A pressão, por definição, é a força exercida em uma certa área ($P = \frac{F}{A}$), portanto as paredes internas do recipiente que contém o gás estão sendo pressionadas pelas colisões das partículas. Para fins de simplificação, assume-se que as colisões das partículas com as paredes do recipiente são perfeitamente elásticas. Por definição, em uma colisão elástica, a energia cinética do sistema é conservada. Adicionalmente, ao se considerar que as paredes são imóveis e possuem massa infinitamente maior que a das partículas, a parede não absorve energia cinética durante o impacto e como consequência direta, a energia cinética da partícula e, portanto, sua rapidez (o módulo de sua velocidade) permanecem inalteradas após a colisão. Embora o vetor momento linear da partícula mude de direção, seu módulo se mantém constante ($|p_{\text{inicial}}| = |p_{\text{final}}|$), o que garante que não haja perda de energia no processo. Este gás é rarefeito, portanto a interação entre as partículas se torna praticamente desprezível já que a distância entre as mesmas é muito grande em relação ao seu próprio tamanho. Assim, em um primeiro momento, como se pode desprezar a interação entre as partículas, busca-se analisar o caso

do movimento de apenas uma partícula, como no caso da partícula presente na figura A.1, e posteriormente se expandir a análise para o gás como um todo (Oliveira, 2005).

Como ilustrado pela figura A.1, uma partícula de massa m e velocidade $\mathbf{v}$ está confinada em um cubo de lado L . Nesta representação, o corpúsculo se move inicialmente para o sentido positivo do eixo x em direção a parede.

Figura A.1: Sistema anterior a colisão de uma partícula de massa m com velocidade inicial total $\mathbf{v}_i$ e componente de velocidade inicial $\mathbf{v}_{x_i}$, confinada em um cubo de lado L .



Fonte: Autor (2024).

Agora, na figura A.2, a mesma partícula da figura A.1, posteriormente a colisão perfeitamente elástica sofrida contra a parede, muda seu sentido de propagação em x , como ilustrado pelos vetores presentes na imagem abaixo. Essa partícula, por estar em movimento possui um *momentum* $\mathbf{p}$ associado a si, igual a:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(v_x, v_y, v_z) = m\mathbf{v}, \quad (\text{A.1})$$

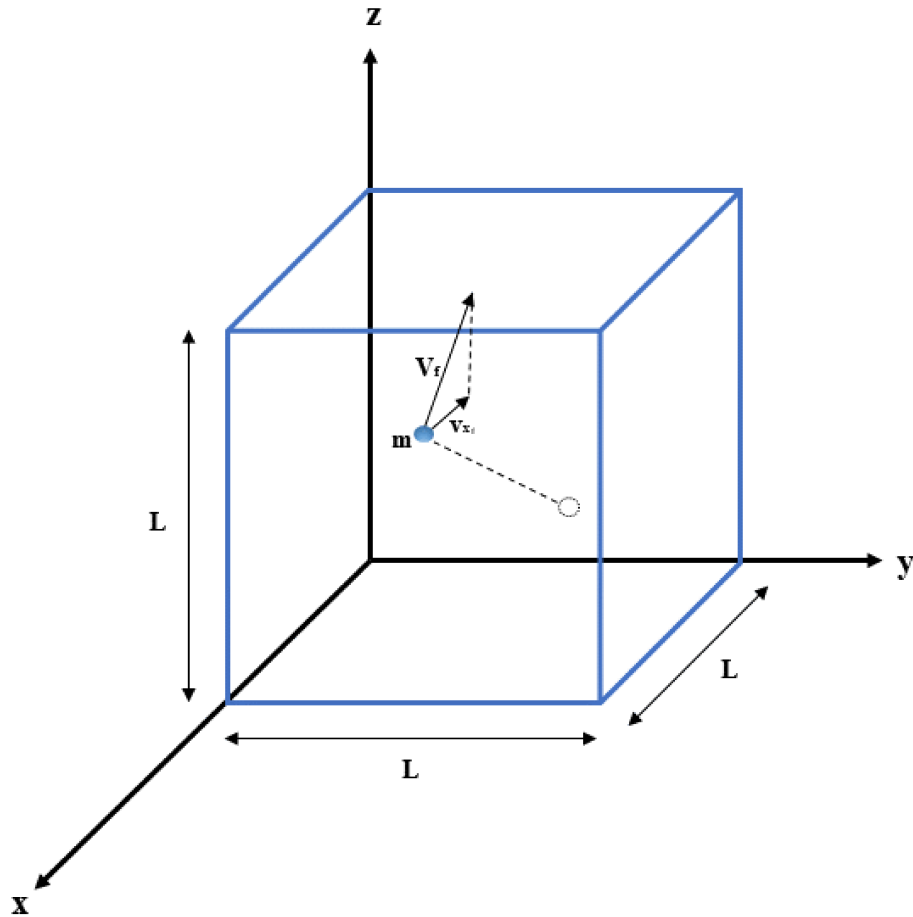
sendo $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$ e portanto $|\mathbf{v}|^2 = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Ao se analisar o movimento dessa partícula em x , percebe-se que os *momenta* inicial (p_{x_i}) e final (p_{x_f}) são, a partir da equação (A.1), respectivamente:

$$p_{x_i} = mv_{x_i},$$

$$p_{x_f} = mv_{x_f}$$

Figura A.2: Sistema posterior a colisão de uma partícula de massa m e velocidade final total $\mathbf{v}_f$ e componente de velocidade final $\mathbf{v}_{x_f}$ confinada em um cubo de lado L .



Fonte: Autor (2024).

Logo após o impacto da partícula com a parede ocorre uma mudança de direção e sentido, como ilustrado pela figura A.2. Pela colisão ocorrer em uma parede fixa e assim poder ser considerada perfeitamente elástica o módulo do *momentum* se mantém

($|p_{\text{inicial}}| = |p_{\text{final}}|$), e, assim, os módulos iniciais e finais da velocidade também permanecem iguais, mudando apenas o sentido ($v_{x_i} = -v_{x_f}$) (Serway e Jewett, 2004). Logo, pela variação do *momentum* linear, tem-se:

$$\Delta p_x = p_{x_f} - p_{x_i} = mv_{x_f} - mv_{x_i} = mv_{x_f} - m(-v_{x_f}),$$

$$\Delta p_x = 2mv_{x_f},$$

onde, para fins de simplificação, considera-se, na equação acima, $v_{x_f} = v_x$, logo,

$$\Delta p_x = 2mv_x \tag{A.2}$$

A variação do *momentum* p em relação a variação temporal é igual a força média resultante atuando sobre a partícula, consistindo na definição da Segunda Lei de Newton escrita em termos do *momentum* linear. Portanto, em x , essa força média pode ser escrita como:

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}, \tag{A.3}$$

Agora, busca-se avaliar qual é o intervalo de tempo entre duas colisões entre a mesma parede, ou seja, o tempo em que a partícula leva para sair de uma parede e voltar a colidir com a mesma. A figura A.3, traz, para uma melhor visualização, o movimento da partícula que está sendo analisada, contida nas figuras A.1 e A.2, agora em duas dimensões. Ao se analisar o movimento do corpo, o mesmo sai de $x = 0$, recocheteia em $x = L$ e volta a quase colidir em $x = 0$. Neste caso, a distância percorrida ΔS , apenas em x , é de $2L$, portanto sua velocidade média é dada por:

$$v_x = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2L}{\Delta t},$$

onde, isolando a variação temporal se tem que:

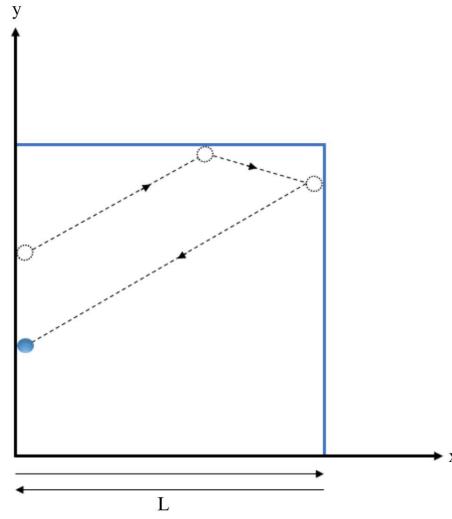
$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} \tag{A.4}$$

$$\Delta p_x = F_x \Delta t \tag{A.5}$$

Substituindo a equação A.4 em A.5:

$$\Delta p_x = F_x \frac{2L}{v_x}$$

Figura A.3: Sistema em duas dimensões da partícula saindo de zero em x e voltando ao mesma coordenada em x .



Fonte: Autor (2024).

Agora, igualando a equação acima com A.2:

$$F_x \frac{2L}{v_x} = 2mv_x,$$

$$F_x = \frac{mv_x^2}{L} \quad (\text{A.6})$$

A força F_x da equação A.6 é, pela definição inicial, a força média que a parede exerce na partícula, que por sua vez, pela Terceira Lei de Newton, é a força exercida pela partícula, de massa m com componente de velocidade v_x , na parede de um cubo situada em $x = L$, como ilustrada pela figura A.3.

A equação A.6 se refere apenas a força que um corpo exerce na parede de lado L . Como já explicitado, até o momento se fez uma análise simplificada do movimento do gás, utilizando apenas uma partícula, portanto, agora se deve expandir a análise para a aquisição de um resultado mais realista para o gás a ser analisado. Assim, como em um gás rarefeito há um conjunto de N partículas, cada uma exerce uma força associada a sua

própria colisão na parede em $x = L$, logo, a força resultante sofrida pela parede é uma somatória da força associada a cada colisão de cada partícula (Damião; Rodrigues, 2021). Considerando que todas as partículas irão realizar uma colisão na parede localizada em $x = L$, a cada intervalo de tempo Δt , a força média F_{total_x} que todas as partículas exercem (na direção x) na parede é dada por::

$$F_{total_x} = \sum_{i=1}^N F_{x_i}, \quad (\text{A.7})$$

Toda força, ao ser aplicada em uma área, gera uma pressão $P = \frac{F}{A}$. No caso do presente estudo, a área (L^2) é a da parede do cubo de lado L em que a partícula toca. Portanto, substituindo A.6 em A.7 e dividindo ambos os lados da equação pela área L^2 , tem-se:

$$\frac{1}{L^2} F_{total_x} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{x_i}^2}{L} \frac{1}{L^2},$$

$$P_x = \sum_{i=1}^N \frac{m}{L^3} v_{x_i}^2, \quad (\text{A.8})$$

onde P_x é a pressão que todas as partículas exercem (na direção x) na parede de lado L . Importante ressaltar, para fins de notação, que o p minúsculo sempre representará o *momentum* associado a partícula e o P maiúsculo, a pressão.

Sendo N o número total das partículas em um sistema fechado, multiplicando-se e se dividindo A.8, e realizando algumas operações, obtém-se:

$$P_x = \frac{N}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m}{L^3} v_{x_i}^2,$$

$$P_x = \frac{mN}{L^3} \sum_{i=1}^N \frac{v_{x_i}^2}{N},$$

$$P_x = \frac{mN}{V} \langle v_x^2 \rangle \quad (\text{A.9})$$

onde $V = L^3$ é o volume do recipiente cúbico e $\langle v_x^2 \rangle$ é a média das velocidades ao quadrado das partículas que compõem o gás.

Novamente, para analisar um caráter mais realista do sistema em questão, amplia-

se o mesmo para as três dimensões espaciais.

Pelo princípio da isotropia, em um sistema caótico não há direção preferencial de movimento, portanto, a análise de movimento independe do referencial adotado (Bagnato, 2016). Assim, há uma igualdade no que se diz respeito a velocidade média de cada componente (x , y e z), portanto:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle,$$

logo,

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle,$$

portanto,

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \quad (\text{A.10})$$

Substituindo A.10 em A.9:

$$P_x = \frac{mN}{V} \frac{\langle v^2 \rangle}{3},$$

e, para fins de simplificação, pelo princípio da isotropia também para a pressão, igualando $P_x = P_y = P_z = P$, e, assim, tem-se que:

$$PV = \frac{mN}{3} \langle v^2 \rangle \quad (\text{A.11})$$

Pela lei dos gases ideais $PV = nRT$, onde P é a pressão do gás, V é o volume que o gás ocupa, n o número de mols do gás, $R = 8,31446262 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ a constante universal dos gases ideais e T a temperatura da massa gasosa (Halliday; Resnick; Walker, 2012).

Igualando A.11 com a lei dos gases ideias, tem-se:

$$\frac{mN}{3} \langle v^2 \rangle = nRT$$

Introduzindo a Lei de Avogadro, $N = nN_A$, onde $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

(N_A = Número de Avogadro) e substituindo N na equação acima:

$$\frac{mnN_A}{3}\langle v^2 \rangle = nRT,$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{mN_A},$$

onde, tirando a raiz quadrada da equação acima se obtém a expressão da definição de velocidade quadrática média (v_{rms}), do inglês, *root mean square*. Portanto,

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}},$$

ou,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \quad (\text{A.12})$$

onde $\frac{R}{N_A} = k_B = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ que é uma constante fundamental da física denominada Constante de Boltzmann.

Como a v_{rms} é um parâmetro estatístico então é possível que exista uma distribuição de prováveis velocidades, ou seja, uma função densidade de probabilidade que descreve os intervalos de velocidade a serem assumidos pelo gás adotado. Esse parâmetro é de importância extrema quando se diz respeito a análise do comportamento de muitos corpos, já que em um gás real as velocidades das partículas variam de forma contínua devido a interações constantes, logo se torna inviável determinar a velocidade discreta de cada partícula.

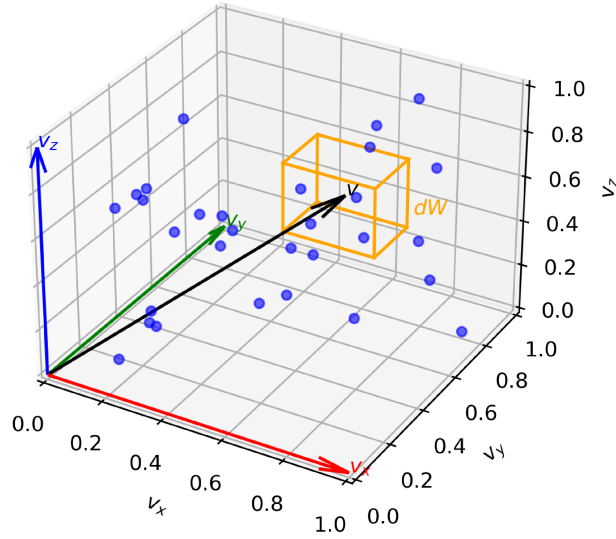
Assim, para manifestar os parâmetros estatísticos, considera-se, inicialmente, a probabilidade de encontrar, no gás citado, partículas que possuam velocidades entre v_x e $v_x + dv_x$, v_y e $v_y + dv_y$ e v_z e $v_z + dv_z$ (Nussenzveig, 2002). Logo, seleciona-se um elemento de volume da amostra, como na figura A.4.

A figura A.4 ilustra um certo elemento de volume dW associado aos valores de velocidades presentes dentro do espaço de velocidades v_x , v_y e v_z .

Por se tratar de um espaço de velocidades o elemento de volume dW está associado aos três referenciais de velocidade, portanto:

$$dW = dv_x dv_y dv_z \quad (\text{A.13})$$

Figura A.4: Elemento de volume infinitesimal dW do espaço de velocidades.



Fonte: Autor (2024).

Conforme comentado, busca-se a probabilidade de encontrar no gás partículas com um vetor velocidade cujas componentes estejam entre (v_x, v_y, v_z) e $(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$. Supondo que a probabilidade da componente v_x estar no intervalo dv_x seja $f(v_x)dv_x$, o argumento de Maxwell baseia-se em três princípios físicos. Primeiramente, como a dinâmica ao longo das três dimensões é independente, a probabilidade total é o produto das probabilidades individuais. Em segundo lugar, pela isotropia do espaço (não há direção preferencial), a função f deve ser a mesma para cada componente de velocidade. Por fim, devido à invariância rotacional do sistema, a probabilidade pode depender apenas do módulo da velocidade (a rapidez), $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, e não da direção do vetor velocidade (Reif, 1965).

Combinando esses princípios, a função de distribuição de probabilidade para o vetor velocidade, que aqui se denota por $f(v_x, v_y, v_z)$, deve ser igual ao produto das funções de suas componentes e, ao mesmo tempo, depender apenas de v . Essa condição lógica é o ponto de partida para deduzir a forma matemática da função, que pode ser expressa como:

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) \quad (\text{A.14})$$

Tomando agora a derivada parcial em relação a v_x de A.14, tem-se:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v_x} = \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} f(v_y) f(v_z)$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} f(v_y) f(v_z)$$

Pela definição de v ,

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right) = \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} f(v_y) f(v_z)$$

Tomando a derivada $\frac{\partial}{\partial v_x} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right)$,

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} \frac{1}{2} \frac{1}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\frac{1}{2}}} (2v_x) = \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} f(v_y) f(v_z)$$

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} f(v_y) f(v_z)$$

Denotando $\frac{\partial f(v)}{\partial v}$ como $f'(v)$, $\frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x}$ como $f'(v_x)$ e $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ como v , a equação acima pode ser reescrita como:

$$f'(v) \frac{v_x}{v} = f'(v_x) f(v_y) f(v_z) \quad (\text{A.15})$$

Dividindo A.15 pela definição de $f(v)$ (A.14), tem-se:

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{v_x}{v} = \frac{f'(v_x) f(v_y) f(v_z)}{f(v)}$$

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{v_x}{v} = \frac{f'(v_x) f(v_y) f(v_z)}{f(v_x) f(v_y) f(v_z)}$$

Realocando os termos,

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{1}{v} = \frac{f'(v_x)}{f(v_x)} \frac{1}{v_x} \quad (\text{A.16})$$

Observa-se que o resultado da equação A.16 tem valor teórico proveitoso, pois, o lado esquerdo da igualdade conta com um molde equacional praticamente idêntico ao da direita, apenas alterando a variável ao qual a equação está submetida. A única maneira desta relação existir é se o resultado for uma constante. Sendo efetiva a afirmação, logo há uma relação de proporcionalidade entre $f(v)$ e $f(v_x)$, e, consequentemente, com as

demais componentes (v_y e v_z), determinando que:

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{1}{v} = \frac{f'(v_x)}{f(v_x)} \frac{1}{v_x} = \frac{f'(v_y)}{f(v_y)} \frac{1}{v_y} = \frac{f'(v_z)}{f(v_z)} \frac{1}{v_z} = cte \quad (\text{A.17})$$

Portanto, pela equação A.17, ao se determinar um resultado para $f(v_x)$, poderá-se implementar o mesmo para as demais componente. Assim, segue-se na busca pela $f(v_x)$.

Para que se possa dar prosseguimento na determinação da função, adapta-se a cte para ser igual a -2α , essa escolha é uma conveniência matemática estratégica que simplifica as etapas subsequentes da dedução. A decisão por cada parte do termo pode ser justificada da seguinte forma: o sinal negativo é selecionado com base na expectativa física de que a função de probabilidade deve ser normalizável, ou seja, deve tender a zero para velocidades muito grandes, o que não ocorreria com um expoente positivo. O fator 2 é introduzido para cancelar o fator $\frac{1}{2}$ que surge da integração de $v_x dv_x$, resultando em um expoente limpo e direto, $-\alpha v_x^2$. Por fim, α é simplesmente uma nova constante de proporcionalidade, cujo valor físico será determinado posteriormente em função da massa e da temperatura do sistema (Damião; Rodrigues, 2021). Logo, de A.17, para a componente v_x :

$$\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} \frac{1}{v_x} = -2\alpha, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{df(v_x)}{dv_x} \frac{1}{f(v_x) v_x} = -2\alpha,$$

$$\frac{df(v_x)}{f(v_x)} = -2\alpha v_x dv_x \quad (\text{A.19})$$

Aplicando integral a equação A.19,

$$\int \frac{df(v_x)}{f(v_x)} = -2\alpha \int v_x dv_x, \quad (\text{A.20})$$

$$\ln[f(v_x)] + C_I = -2\alpha \frac{1}{2} v_x^2 + C_{II},$$

$$\ln[f(v_x)] = -\alpha v_x^2 + C, \quad (\text{A.21})$$

onde $C = C_{II} - C_I$.

A partir da definição de logaritmo natural, tem-se a seguinte relação:

$$\ln(x) = \log_e x = a, \quad (\text{A.22})$$

que é, por sua vez, equivalente à sua forma exponencial:

$$x = e^a, \quad (\text{A.23})$$

Logo, para a equação (A.21), utilizando as definições acima, faz-se a correspondência onde $x = f(v_x)$ e $a = -\alpha v_x^2 + C$. Deste modo,

$$f(v_x) = e^{-\alpha v_x^2 + C}, \quad (\text{A.24})$$

$$f(v_x) = e^{-\alpha v_x^2} e^C,$$

definindo $e^C = A$, tem-se:

$$f(v_x) = A e^{-\alpha v_x^2} \quad (\text{A.25})$$

Na sequência, para determinar a função de distribuição de velocidades agora se busca determinar o valor da constante A . Portanto, integrando-se a função de distribuição de velocidades que acaba de ser deduzida (A.25), tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = 1, \quad (\text{A.26})$$

portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 1,$$

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 1$$

A partir daqui ocorrerá a resolução detalhada de integrais e ademais operações, portanto ocorrerão repetições de notações arbitrárias como a , u , w e assim por diante. Isso significa que esses termos serão diferentes em cada operação realizada e não terão caráter

de definição pura, ou seja, não serão caracteres universais, só valerão para a resolução em específico.

Seguindo-se, para a equação acima se pode definir $u = \sqrt{\alpha}v_x$ e em consequência $du = \sqrt{\alpha} dv_x$, logo, $dv_x = \frac{du}{\sqrt{\alpha}}$. Portanto, substituindo-se os termos se tem:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}} = 1,$$

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 1, \quad (\text{A.27})$$

que é uma integral gaussiana.

Para resolver a equação A.27 se observa que a mesma é uma função par, ou seja, assume os mesmos valores para u e $-u$, portanto é simétrica e assim pode ser escrita da seguinte forma:

$$2 \left[\frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right] = 1 \quad (\text{A.28})$$

Agora, mudando-se a variável, pode-se escrever a equação A.28 como:

$$2 \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-a^2} da = 1$$

Elevando a equação acima ao quadrado se obtém:

$$\left(2 \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \left(2 \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-a^2} da \right) = 1$$

Uma vez que as variáveis de integração u e a são independentes, o produto das duas integrais definidas pode ser reescrito como uma única integral dupla sobre a área do primeiro quadrante no plano ua . Utilizando a propriedade do produto de exponenciais ($e^x e^y = e^{x+y}$), a equação se torna:

$$1 = 4 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u^2} e^{-a^2} du da = 4 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+a^2)} du da$$

Definindo-se $a = us$ e se escolhendo arbitrariamente a dependendo de s , tem-se que $da = u ds$, portanto:

$$1 = 4 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+u^2s^2)} u \, du \, ds = 4 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2(1+s^2)} u \, du \, ds$$

Novamente, definindo-se $w = u^2$ se tem que $dw = 2u \, du$, logo, $du = \frac{dw}{2u}$ e desta maneira:

$$1 = 4 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-w(1+s^2)} u \frac{dw}{2u} \, ds = 2 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-w(1+s^2)} dw \, ds$$

Olhando para a variável w , tem-se uma maneira efetiva e rápida para resolver sua integral. Procura-se uma função $f(w)$ que quando derivada, em relação a w , forneça $e^{-w(1+s^2)}$, essa será $-\frac{1}{(1+s^2)}e^{-w(1+s^2)}$. Portanto,

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \left[\int_0^\infty \left(-\frac{1}{1+s^2} e^{-w(1+s^2)} \right) ds \right] \Big|_0^\infty \quad (\text{A.29})$$

aplicando os limites,

$$1 = -2 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)} \left[\lim_{w \rightarrow \infty} e^{-w(1+s^2)} - \lim_{w \rightarrow 0} e^{-w(1+s^2)} \right] ds,$$

$$1 = -2 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)} \left[\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{w(1+s^2)}} - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{e^{w(1+s^2)}} \right] ds,$$

dividindo algo por um número muito grande se obtém um número muito pequeno, logo:

$$1 = -2 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)} [0 - 1] ds,$$

e assim,

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)} ds \quad (\text{A.30})$$

A integral presente na equação (A.30) é uma integral notável, resolvida classicamente pelo método de substituição trigonométrica. A escolha da transformação é motivada pela presença do termo $1+s^2$ no denominador, que sugere o uso da identidade trigonométrica fundamental $1+\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$. Assim, realiza-se a seguinte mudança de variável:

$$s = \tan(\theta),$$

logo, tomando a derivada:

$$ds = \sec^2(\theta) d\theta$$

Com esta substituição, o denominador da integral se simplifica para $1 + s^2 = 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$. É necessário também transformar os limites de integração em função da nova variável θ : quando $s = 0$, tem-se $\theta = \arctan(0) = 0$; quando $s \rightarrow \infty$, tem-se $\theta \rightarrow \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$. Ao substituir todos os termos na integral, a expressão se simplifica drasticamente:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sec^2(\theta)} \sec^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta$$

e como, pelas propriedades trigonométrica, $\cos^2(m) + \sin^2(m) = 1$, $ds = \frac{1}{\cos^2(m)} dm$, logo, substituindo s e ds em A.30 se obtém:

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \int_{m(0)}^{m(\infty)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin^2(m)}{\cos^2(m)}\right) \cos^2(m)} dm,$$

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \int_{m(0)}^{m(\infty)} \frac{1}{\frac{\cos^2(m) + \sin^2(m)}{\cos^2(m)} \cos^2(m)} dm,$$

o que se reduz a:

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \int_{m(0)}^{m(\infty)} dm,$$

que ao ser integrado se molda a:

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} m \Big|_{m(0)}^{m(\infty)}$$

Relembrando-se que como $s = \tan(m)$, $m = \arctan(s)$, logo,

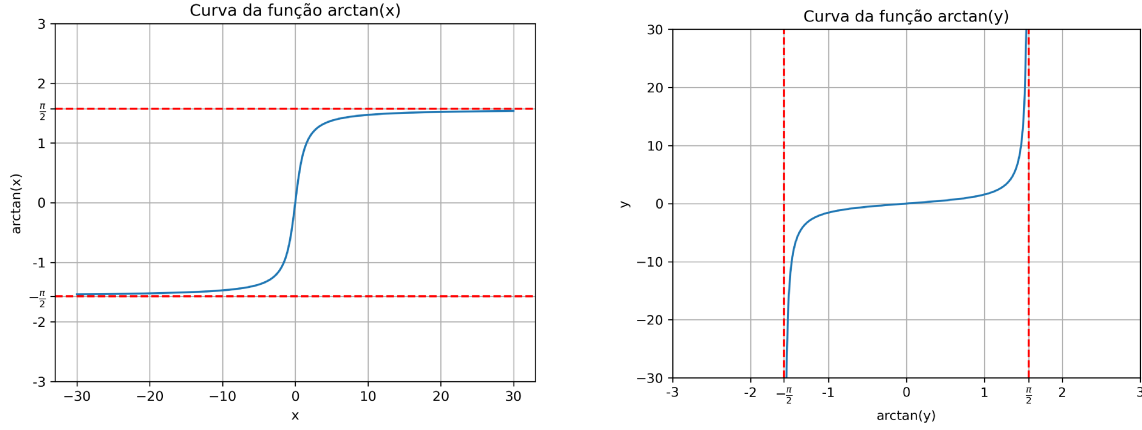
$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \arctan(s) \Big|_0^\infty$$

Aplicando os limite, se tem que:

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \arctan(s) \right]$$

Para $\arctan$, qualquer que seja o eixo (x , y , z , s , dentre outros), se delinear valores que tendem ao infinito sempre o mesmo tenderá a $\frac{\pi}{2}$, como demonstrado nas figuras abaixo, que tanto para a curva $\arctan(x)$ quanto para $\arctan(y)$ os valores, no infinito são os mesmos:

Figura A.5: Comportamento de uma função $\arctan(x)$ e $\arctan(y)$.



Fonte: Autor (2024).

Portanto,

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \arctan(s) \right] = 2 \frac{A^2}{\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right],$$

logo,

$$1 = 2 \frac{A^2}{\alpha} \frac{\pi}{2},$$

$$1 = \frac{A^2}{\alpha} \pi$$

Antes de isolar o A vale a ressalva de que como a integral como um todo foi elevada ao quadrado no início de sua resolução, se o resultado fosse dado apenas para uma integral pura ($\int_0^\infty e^{-u^2} du$), ou seja, sem demais constantes, o resultado seria apenas $\sqrt{\pi}$.

Prosseguindo, tirando a raiz quadrada e isolando o A se obtém:

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \quad (\text{A.31})$$

Obtida a constante A agora basta determinar α . Para isso se utilizará o princípio

da determinação do quadrado da velocidade média. Para determinar a mesma, pega-se a já anteriormente determinada velocidade quadrática média (v_{rms}) para a componente v de velocidades, datada na equação A.12, e a eleva ao quadrado para retomar a expressão do quadrado da velocidade média.

$$(v_{rms})^2 = \left(\sqrt{\frac{3.k_B.T}{m}} \right)^2,$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3.k_B.T}{m}$$

Como também já demonstrado $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$, portanto:

$$3\langle v_x^2 \rangle = \frac{3.k_B.T}{m},$$

e assim,

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B.T}{m} \quad (\text{A.32})$$

O valor médio ou esperado de uma variável contínua X com fdp (probability density function ou função de densidade de probabilidade) $f(x)$ é:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{A.33})$$

onde, transpondo para $f(v_x)$, tem-se que:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x \quad (\text{A.34})$$

Trazendo a definição encontrada de $f(x)$ (A.25), reescreve-se a equação A.34 como

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 A e^{-\alpha v_x^2} dv_x \quad (\text{A.35})$$

Considerando $u = \sqrt{\alpha} v_x$, por consequência $du = \sqrt{\alpha} dv_x$ e também $u^2 = \alpha v_x^2$. Assim, substituindo-se, em A.35, estas variáveis arbitrárias e a definição encontrada de A (equação A.31), tem-se:

$$\langle v_x^2 \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{\alpha} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du$$

Reescrevendo,

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} u u e^{-u^2} du \quad (\text{A.36})$$

Aplicando a integral por partes ($\int w ds = w.s - \int s dw$) se define $w = u$ e portanto $dw = du$, e também $ds = u e^{-u^2} du$. Assim, resolvendo ds ,

$$\int ds = \int u e^{-u^2} du$$

Realizando a integral por substituição, $n = -u^2$ e assim $dn = -2.u du$ que ao se reescrever fica $udu = -\frac{dn}{2}$, assim substituindo:

$$s = \int e^n . u . \frac{-dn}{2} = -\frac{1}{2} \int e^n dn = -\frac{1}{2} e^n,$$

$$s = -\frac{1}{2} e^{-u^2}$$

Tendo todas as variáveis calculadas, aplica-se-à na integral por partes.

$$\begin{aligned} w.s|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} s dw &= u \left(-\frac{1}{2} e^{-u^2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-u^2} \right) du, \\ &= -\frac{ue^{-u^2}}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

Como se pode observar, a integral acima já foi resolvida para que se pudesse encontrar a constante A , e seu resultado, como já comentado, é $\sqrt{\pi}$, logo,

$$-\frac{ue^{-u^2}}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Aplicando os limites na parte esquerda da soma acima se obtém:

$$\left[-\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{ue^{-u^2}}{2} + \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{ue^{-u^2}}{2} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = [0 - 0] + \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

o limite tende a zero pois a exponencial tende ao infinito mais rapidamente que o u que se encontra na parte do numerador. Portanto, realocando os termos para a equação de origem (A.36) se obtém:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} uue^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \left[\int w ds \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \left[w.s - \int s dw \right],$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \left(0 + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2\alpha} \quad (\text{A.37})$$

Igualando os resultados A.32 com A.37, obtém-se:

$$\frac{k_B T}{m} = \frac{1}{2\alpha},$$

onde α é igual a:

$$\alpha = \frac{m}{2k_B}. \quad (\text{A.38})$$

Agora substituindo A.38 em A (A.37) e em sequência incluindo os resultados na função de distribuição de prováveis velocidades $f(x)$ (A.25), tem-se a equação da distribuição das velocidades:

$$f(v_x) = Ae^{-\alpha v_x^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2},$$

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_x^2}{k_B T}}, \quad (\text{A.39})$$

que é a equação de distribuição de velocidades de Maxwell para o eixo x .

É interessante ressaltar que o resultado adquirido no eixo x , para a distribuição de velocidade de Maxwell, seria o mesmo para y e z , caso fossem tomados como referência. Assim, se pode generalizar a função A.39 para todas as dimensões se utilizando da equação A.14, pois, como:

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z),$$

logo, se tem que,

$$f(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_x^2}{k_B T}} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_y^2}{k_B T}} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_z^2}{k_B T}},$$

$$f(v) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \right)^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{k_B T}},$$

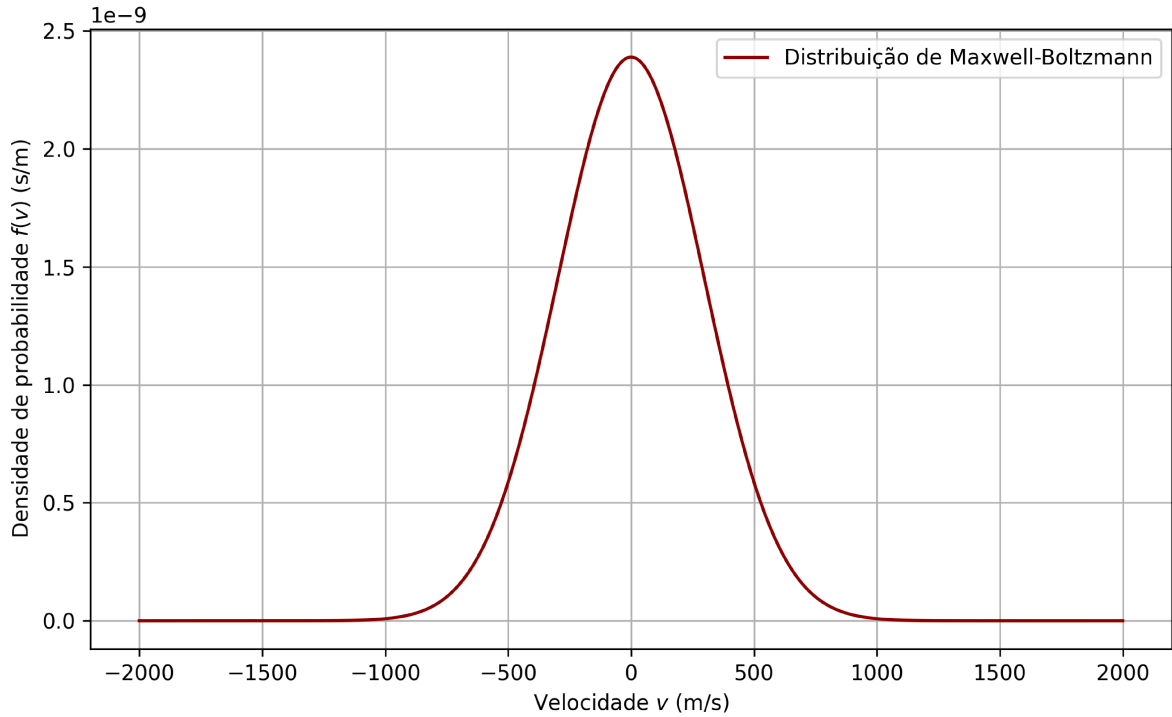
e, portanto,

$$f(v) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \right)^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}}, \quad (\text{A.40})$$

que é a equação geral de Maxwell que demonstra a densidade de probabilidade de encontrar, em uma certa direção, uma velocidade de módulo v .

Realizando a geração de um gráfico, a partir da equação de distribuição de velocidades de Maxwell (A.40) se obtém a figura A.6.

Figura A.6: Representação gráfica, gerada a partir da equação A.40, da distribuição de velocidades de partículas de um gás ideal monoatômico em equilíbrio térmico, com temperatura constante $T = 300 \text{ K}$ e massa molecular equivalente à do gás nitrogênio.



Fonte: Autor (2024).

O gráfico da figura A.6 representa a distribuição de Maxwell para uma única componente da velocidade, como, por exemplo, v_x . Essa distribuição segue uma forma

gaussiana, também conhecida como distribuição normal, com um pico central em $v_x = 0$. Fisicamente, isso indica que a velocidade mais provável para uma partícula em uma única direção é nula, e que a probabilidade de se mover no sentido positivo ($+v_x$) é exatamente a mesma que no sentido oposto ($-v_x$). Essa simetria é uma consequência direta do termo de velocidade ao quadrado (v_x^2) no expoente da função de distribuição unidimensional (equação A.40), que torna a função par.

É fundamental não confundir a distribuição para uma componente da velocidade, mostrada na figura, com a distribuição de rapidez (o módulo da velocidade, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$). Para se obter uma determinada rapidez v , existem muitas combinações possíveis das componentes v_x, v_y e v_z . A distribuição de rapidez, denotada por $\Phi(v)$, que leva em conta todas essas possibilidades e, como resultado, sua forma é diferente, iniciando-se em zero, atingindo um pico em uma velocidade provável positiva e então decaindo. A análise completa desta distribuição de rapidez será o foco de agora.

A densidade de probabilidade é igual a probabilidade dividida pela velocidade volumétrica (dW) definida em A.13. Assim, para obter a probabilidade se deve realizar a seguinte operação (a partir de A.40 e A.13):

$$f(v)dW = f(v)dv_x dv_y dv_z, \quad (\text{A.41})$$

Para facilitar o processo se faz a transformação de coordenadas cartesianas para esféricas. Assim, lembremo-nos da figura A.4, que apresenta este elemento de volume dW .

Na figura A.7, a imagem à esquerda representa os mesmos elementos da figura A.4, ou seja, um elemento de volume (paralelepípedo) infinitesimal dW em um espaço de velocidades, e a figura da direita é apenas a mesma representação, agora em elementos de coordenadas esféricas.

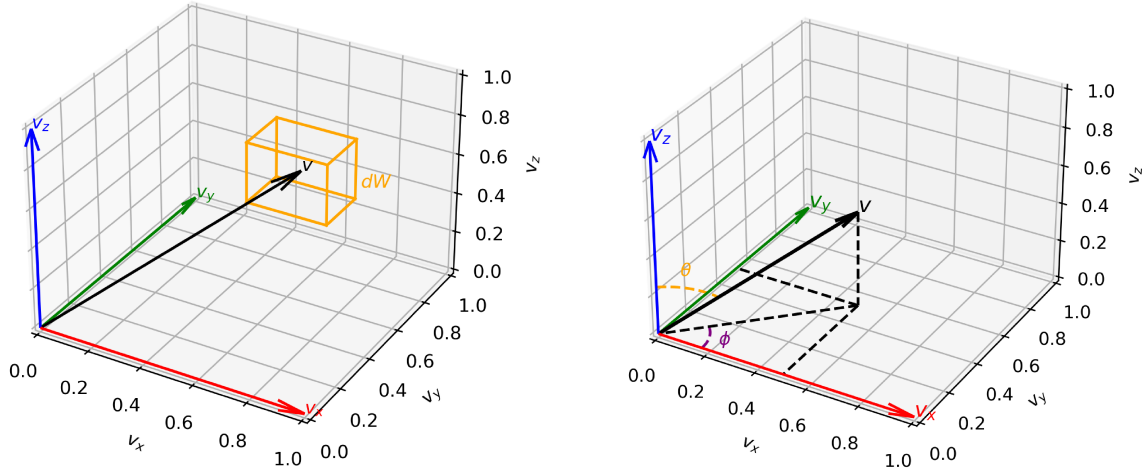
Sabe-se que, pela figura A.7:

$$x = v \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$y = v \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$z = v \cos(\theta),$$

Figura A.7: Figura da esquerda representa um elemento de volume infinitesimal dW em um espaço de velocidades e a figura da direita representa o mesmo espaço mas com as coordenadas esféricas.



Fonte: Autor (2024).

onde, derivando-se cada uma em relação a r, θ e ϕ , tem-se:

$$dx = \sin(\theta) \cos(\phi) dv + v \cos(\theta) \cos(\phi) d\theta - v \sin(\theta) \sin(\phi) d\phi,$$

$$dy = \sin(\theta) \sin(\phi) dv + v \cos(\theta) \sin(\phi) d\theta + v \sin(\theta) \cos(\phi) d\phi,$$

$$dz = \cos(\theta) dv - v \sin(\theta) d\theta,$$

em que, derivando novamente em relação a r, θ e ϕ , obtém-se:

$$dv_x = -v \sin(\theta) \cos(\phi) d\theta^2 - v \sin(\theta) \cos(\phi) d\phi^2,$$

$$dv_y = -v \sin(\theta) \sin(\phi) d\theta^2 - v \sin(\theta) \sin(\phi) d\phi^2,$$

$$dv_z = -v \cos(\theta) d\theta^2$$

Alocando as derivadas segundas na equação A.41, cancelando termos e utilizando algumas propriedades trigonométricas se obtém que:

$$f(v)dW = f(v)dv_x dv_y dv_z = f(v)v^2 \sin(\theta) dv d\theta d\phi \quad (\text{A.42})$$

Integrando A.42 em relação aos ângulos, com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, tem-se que:

$$f(v) v^2 dv \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = f(v) v^2 dv [-\cos(\theta)]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi}$$

$$f(v) v^2 dv [-\cos(\pi) - (-\cos(0))] [2\pi - 0] = f(v) v^2 dv (-(-1) + 1) (2\pi),$$

$$4\pi f(v) v^2 dv = \Phi(v) dv, \quad (\text{A.43})$$

onde, se define que:

$$\Phi(v) = 4\pi f(v) v^2 = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \right)^3 v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}}, \quad (\text{A.44})$$

que é a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann, a qual expressa a probabilidade de se encontrar, no gás, uma partícula com rapidez (módulo da velocidade) no intervalo entre v e $v + dv$.