UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

JAQUELINE DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA

CHAPECÓ
2025

JAQUELINE DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Janice Teresinha Reichert

CHAPECÓ

2025

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Santos, Jaqueline dos
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA / Jaqueline dos Santos, Janice Teresinha Reichert. -- 2025.
67 f.

Orientadora: Dra Janice Teresinha Reichert

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó,SC, 2025.

1. Método de Resolução de Problemas de Polya. 2. George Polya. 3. Resolução de Problemas em olimpíadas. I. Reichert, Janice Teresinha II. Reichert, Janice Teresinha, orient. III. Universidade Federal da Fronteira Sul. IV. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JAQUELINE DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
JANICE TERESINHA REICHERT
Data: 31/07/2025 14:19:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Janice Teresinha Reichert - UFFS

Orientadora

Documento assinado digitalmente
DIVANE MARCON
Data: 01/08/2025 11:00:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Divane Marcon

Avaliadora

Documento assinado digitalmente
LUCIA MENONCINI
Data: 30/07/2025 19:28:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Drª Lucia Menoncini

Avaliadora

Dedico este trabalho a minha família, amigos e professores, que não pouparam esforços para que eu pudesse concluir meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, pelo amor, zelo e constante apoio ao longo de toda a minha trajetória. Ao meu esposo, pela presença incansável e por estar ao meu lado em cada desafio, oferecendo força e encorajamento para que eu superasse cada etapa deste processo. Aos amigos que conquistei durante a graduação, que foram verdadeiros pilares de apoio e parceria nos estudos, contribuindo imensamente para que eu chegasse até aqui. E, com carinho especial, agradeço aos meus professores, que sempre acreditaram no meu potencial, incentivaram meu crescimento e foram fundamentais em minha formação.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar como o método de Polya pode contribuir para a resolução de problemas matemáticos em olimpíadas, só no Ensino Fundamental II. A pesquisa se baseia em uma revisão sistemática da literatura, além da aplicação prática do método em questões selecionadas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e da OMOC (Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense). Através da resolução das questões pelo método de Polya, foi possível perceber que a aplicação desse método não só facilita a compreensão dos problemas, como também pode oferecer aos alunos ferramentas para estruturar e validar as soluções de forma lógica e organizada.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Método de Polya. Olimpíadas de Matemática. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This study aims to analyze how Polya's method can contribute to solving mathematical problems in olympiads, especially in the final years of lower secondary education. The research is based on a systematic literature review, as well as the practical application of the method to selected problems from OBMEP (Brazilian Public School Math Olympiad) and OMOC (Western Santa Catarina Math Olympiad). By solving the problems using Polya's method, it was possible to observe that its application not only facilitates the understanding of the problems but also provides students with tools to structure and validate their solutions in a logical and organized manner.

Keywords: Problem solving. Polya’s method. Math Olympiads. Mathematics Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul
OMOC	Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
RP	Resolução de Problemas
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, a justificativa da escolha do tema é apresentada, contextualizando-se no âmbito da pesquisa e ressaltando a sua importância acadêmica e prática. É apresentado o problema da pesquisa e, com base nele, é determinado o objetivo geral e os objetivos específicos do estudo.

1.1. JUSTIFICATIVA

A resolução de problemas é uma habilidade central na matemática e nas competições de olimpíadas, e a metodologia proposta por George Polya é amplamente reconhecida por sua eficácia nesse contexto. Polya definiu quatro etapas para a resolução de problemas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e revisão da solução. Essa abordagem sistemática proporciona uma estrutura clara para abordar problemas complexos, tornando-a especialmente valiosa para estudantes de olimpíadas de matemática.

O método proposto por George Polya é centrado na autonomia do aluno e no desenvolvimento do pensamento crítico, incentivando uma abordagem investigativa. Cada etapa permite que o aluno analise o problema, desenvolva uma estratégia, aplique-a e revise a solução, promovendo independência e capacidade analítica — habilidades fundamentais em olimpíadas de matemática, onde os problemas são complexos e desafiadores (Polya, 1995).

Lourdes de La Rosa Onuchic, por outro lado, propõe três fases para resolução de problemas: Identificação do Problema, Solução Estruturada e Discussão/Generalização. Essa abordagem é mais guiada e depende de uma orientação contínua do professor, ideal para ambientes escolares (Onuchic, 1999).

As metodologias de Polya e Onuchic diferem, pois com Polya o aluno já estudou o conteúdo abordado, já com Onuchic ela usa o método para introduzir o conteúdo. Polya foca na revisão independente da solução, valorizando a autorreflexão e a busca por métodos alternativos, enquanto Onuchic constrói o conhecimento a partir do método de resolução de exercícios.

A escolha pelo método de Polya para este trabalho é fundamentada na sua aplicabilidade para o contexto de olimpíadas de matemática, onde os problemas são complexos e demandam habilidades investigativas, autonomia e pensamento crítico. A estrutura em quatro etapas — compreender o problema, elaborar um plano, executar e revisar a solução — oferece um caminho claro e flexível que permite aos alunos explorar diferentes abordagens, adaptando e ajustando suas estratégias conforme necessário.

Assim, o método de Polya foi escolhido por sua capacidade de fomentar a independência e as habilidades analíticas dos alunos, alinhando-se diretamente aos objetivos deste trabalho.

De acordo com as considerações anteriores, este trabalho busca responder à seguinte questão: como as etapas do método de Polya podem contribuir na resolução de problemas olímpicos de matemática? Além disso, busca-se compreender quais são os limites e as possibilidades desse método quando aplicado a esse contexto específico. Assim, o objetivo geral desta pesquisa é analisar as possíveis contribuições da utilização do método de Polya na resolução de problemas de olimpíadas de matemática, especialmente anos finais do Ensino Fundamental II. Para alcançar esse objetivo, são traçados os seguintes objetivos específicos: compreender as etapas do método de Polya, analisar sua aplicabilidade em questões das olimpíadas de matemática, identificar suas potencialidades no desenvolvimento do raciocínio lógico e na autonomia dos alunos, bem como reconhecer as limitações encontradas durante sua aplicação em problemas com diferentes níveis de complexidade.

Para alcançar os objetivos propostos, este trabalho está organizado da seguinte forma: no **Capítulo 1**, apresenta-se a introdução ao tema, incluindo a justificativa da escolha, o problema de pesquisa e os objetivos geral e específicos. O **Capítulo 2** é dedicado à revisão sistemática da literatura, com a descrição da metodologia utilizada, os critérios de seleção dos trabalhos, as questões norteadoras e a análise dos estudos encontrados. O **Capítulo 3** traz o referencial teórico, abordando a importância da resolução de problemas no ensino de matemática, o método de Polya e a contextualização das olimpíadas de matemática no Brasil. O **Capítulo 4** descreve a metodologia adotada na pesquisa. No **Capítulo 5**, são apresentadas e resolvidas questões de olimpíadas por meio das etapas do método de Polya, com análises detalhadas. Por fim, o **Capítulo 6** reúne as considerações finais, destacando as contribuições e limitações do estudo, bem como sugestões para futuras pesquisas.

2 REVISÃO SISTEMÁTICA LITERATURA

A revisão sistemática busca analisar a literatura existente sobre a utilização do método de Polya em olimpíadas de matemática, identificando os resultados mais promissores e os desafios em sua aplicação. Compreender como essa metodologia é empregada em diferentes contextos permitirá uma visão abrangente sobre sua efetividade no desenvolvimento de habilidades matemáticas

2.1. METODOLOGIA DA REVISÃO SISTEMÁTICA

De acordo com Botelho, Cunha e Macedo (2011) a revisão bibliográfica sistemática pode ser subdividida em quatro métodos: Meta análise, revisão sistemática, revisão qualitativa e revisão integrativa. Tomando como base os objetivos desta pesquisa, optou por desenvolver uma revisão sistemática de literatura.

O processo de realização de uma revisão sistemática deve seguir algumas etapas de acordo com Botelho, Cunha e Macedo (2011):

- 1ª etapa: Identificação do tema e seleção da questão de pesquisa;
- 2ª etapa: Estabelecer critérios de inclusão e exclusão;
- 3ª etapa: Identificação dos estudos pré-selecionados e selecionados;
- 4ª etapa: Categorização dos estudos selecionados;
- 5ª etapa: Análise e interpretação dos resultados;
- 6ª etapa: Apresentação da revisão/síntese do conhecimento.

O desenvolvimento desta revisão sistemática foi dividido em três fases principais:

1ª fase: Identificação da necessidade da pesquisa e elaboração de um protocolo para execução. Nessa etapa, foram definidos:

- A formulação do problema;
- As questões que orientarão a revisão sistemática;
- As bases de dados utilizadas para a busca;
- Os critérios de inclusão e exclusão dos estudos encontrados.

2ª fase: Avaliação dos estudos coletados. Nesta etapa, será realizada uma análise geral dos trabalhos obtidos nas bases de dados, com o objetivo de responder às questões de pesquisa previamente estabelecidas.

3ª fase: Resultados da pesquisa. Esta fase é dedicada à sistematização e análise criteriosa dos estudos encontrados, conforme as questões e critérios definidos, com a apresentação de um panorama dos resultados da revisão sistemática realizada.

Para fazer essa revisão sistemática de literatura, inicialmente foram definidos os critérios de inclusão e exclusão de trabalhos.

Critérios de inclusão:

1. Trabalhos que tenham utilizado o método de Polya na resolução de problemas de olimpíadas;
2. Apenas trabalhos que utilizem problemas da Educação Básica;
3. Trabalhos que envolvam a análise de problemas específicos;
4. Somente artigos, dissertações de mestrado;

Critério de exclusão:

1. Trabalhos aplicados no Ensino Superior;
2. Trabalhos que envolvam apenas a parte conceitual;
3. Trabalhos publicados em outras línguas que não seja a língua portuguesa.

2.2. QUESTÕES NORTEADORAS

Para a realização de buscas relacionadas a esta revisão sistemática, foram utilizadas as palavras-chave: "resolução de problemas + olimpíadas + Polya". A busca primária de trabalhos permitiu a análise dos estudos já realizados sobre o tema, além de identificar as possíveis contribuições para a aplicação do método de Polya na resolução de problemas matemáticos em competições, como as olimpíadas. Esse processo foi fundamental para determinar o problema central e os objetivos que orientaram esta pesquisa.

Algumas questões de pesquisa norteadoras foram elaboradas para contribuir na análise dos trabalhos incluídos nesta revisão:

- Quais problemas foram analisados nos trabalhos?
- Existe uma determinação de conteúdo nos problemas analisados?
- Como ocorreu a análise dos problemas nesses trabalhos?
- Existem evidências da aplicação direta do método em sala de aula?

Para a realização da revisão sistemática, foram consultadas diferentes bases de dados acadêmicos, incluindo o banco de teses da CAPES e o Google Acadêmico. A pesquisa teve como foco publicações no período de outubro de 2020 a outubro de 2024 que abordaram a aplicação do método de Polya na resolução de problemas em competições matemáticas, especialmente olimpíadas.

2.3. ANÁLISE DE DOS TRABALHOS ENCONTRADOS

Na busca inicial, foram identificados diversos estudos relevantes que abordam a aplicação do método de Polya em diferentes contextos. Após a aplicação dos critérios de inclusão e exclusão, foram selecionados os trabalhos que atendiam aos objetivos da pesquisa. O quadro a seguir apresenta os dados dos estudos selecionados.

Quadro 1 - Trabalhos selecionados relacionados na revisão bibliográfica

Nomenclatura	Ano de publicação	Autor (es)	Título	Categoria do trabalho
A	2021	Alessandra dos Santos Fernandes	Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya	Dissertação
B	2021	Vanúbya Batista da Silva; Glêndara Aparecida de Sousa Martins; Paulo Cléber M. Teixeira e Warley Gramacho da Silva	A importância das olimpíadas de matemática para o ensino médio no contexto da compreensão de conteúdos.	Artigo
C	2022	Alessandro Shneider	Polya e a teoria da resolução de problemas aplicados à educação matemática nos ensinos fundamentais e médios.	Dissertação

D	2022	Mauricio Pedro de Oliveira Junior; Henrique Maia Pinheiro e Wagner Davy Lucas Barreto	Um estudo de caso sobre a aplicação das técnicas de resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática para a melhoria do ensino da disciplina	Artigo
E	2024	André Borges Carlos	Resoluções de Problemas da Olimpíada Regional Mirim de Matemática utilizando o Método de Polya	Dissertação.

Fonte: Elaborado pelos autores

Abordagem de cada trabalho:

Trabalho A – Fernandes (2021): Este trabalho propõe a aplicação do método de Polya como ferramenta para a resolução de problemas olímpicos, com ênfase nos temas de Análise Combinatória e Probabilidade. A autora estrutura a análise a partir da metodologia de resolução de problemas, organizando as etapas conforme Polya, e utiliza questões reais de olimpíadas como base para discussão. A abordagem adotada é prática e didática, evidenciando como o método pode ser empregado para desenvolver competências matemáticas em situações desafiadoras, comuns em competições.

Trabalho B – Silva et al. (2021): Silva e colaboradores abordam as olimpíadas de matemática como um recurso para dinamizar o ensino e motivar os estudantes. O foco do trabalho está na análise de como a participação em olimpíadas pode impactar o desempenho escolar e ampliar o interesse dos alunos pela disciplina. Embora não explore diretamente o método de Polya, a abordagem ressalta o papel das competições matemáticas na formação de estudantes mais engajados e confiantes em suas habilidades cognitivas.

Trabalho C – Schneider (2022): Este estudo discute a relação entre os conteúdos cobrados nas olimpíadas e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), analisando como as provas podem ser utilizadas como ferramenta pedagógica complementar ao currículo oficial. A abordagem destaca a importância de selecionar problemas que estejam alinhados ao nível de ensino dos alunos, promovendo desafios adequados e contextualizados. O trabalho não adota uma metodologia específica de resolução, mas valoriza a integração das olimpíadas ao ensino regular.

Trabalho D – Oliveira Junior et al. (2022): Borges investiga como a utilização de problemas olímpicos pode contribuir para a melhoria do ensino de matemática, propondo um uso mais amplo das técnicas olímpicas na prática docente. A autora trabalha com diversos tipos de problemas — lógicos, geométricos, aritméticos e combinatórios —, com diferentes níveis de complexidade. A abordagem sugere que essas questões podem ser adaptadas ao cotidiano da sala de aula, indo além da preparação para competições, como instrumento para desenvolver o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes.

Trabalho E – Borges (2024): Este trabalho concentra-se na aplicação direta do método de Polya em problemas olímpicos, enfatizando a importância de seguir as quatro etapas propostas para organizar o raciocínio e estruturar soluções completas. A abordagem é voltada à prática, com resoluções comentadas de questões das olimpíadas, evidenciando como o método contribui para tornar o processo de resolução mais sistemático e acessível. O estudo reafirma o valor didático da metodologia de Polya no contexto competitivo e educativo.

Na sequência apresentamos análise das questões norteadoras definidas na revisão sistemática.

Questão 1: Quais problemas foram analisados nos trabalhos?

Trabalho A: No seu trabalho, a autora analisa problemas específicos relacionados à Análise Combinatória e Probabilidade em contextos olímpicos, aplicando o método de Polya para resolvê-los.

Trabalho B: Este grupo de autores foca em mostrar como as olimpíadas de matemática podem contribuir significativamente para a compreensão de conteúdos matemáticos no ensino médio, mas o trabalho deles não especifica um tipo particular de problema matemático.

Trabalho C: O autor aplica o método de Polya em problemas de matemática ensinados no Ensino Fundamental e Médio, mas não se restringe a um tipo específico de problema, abordando diversos temas no contexto escolar.

Trabalho D: Os autores deste trabalho focam na aplicação de técnicas olímpicas como recurso para potencializar o ensino da matemática na educação básica. Embora valorizem os desafios típicos de olimpíadas, sua abordagem não se restringe a um único tipo de problema. Pelo contrário, eles exploram uma diversidade de categorias, como problemas de lógica, combinatória, aritmética e geometria, variando entre questões de múltipla escolha e questões abertas, com diferentes graus de complexidade. Essa variedade tem como objetivo desenvolver competências cognitivas diversas, como o raciocínio dedutivo, a criatividade na formulação de estratégias e a argumentação matemática. Ao adotar esse conjunto de problemas, os autores buscam mostrar que o uso de questões desafiadoras pode ser adaptado ao cotidiano escolar, promovendo não só a preparação para competições, mas também uma aprendizagem mais ativa e significativa.

Trabalho E: Analisa problemas específicos da Olimpíada Regional Mirim de Matemática, mostrando a aplicabilidade do método de Polya em questões propostas nessa competição.

Questão 2: Existe uma determinação de conteúdo nos problemas analisados?

Trabalho A: Sim, o trabalho da autora está direcionado para problemas de Análise Combinatória e Probabilidade, definindo claramente o conteúdo matemático dos problemas abordados.

Trabalho B: Não foi possível identificar um conteúdo específico. O foco está mais na importância das olimpíadas para o ensino de matemática, sem aprofundamento em tipos específicos de problemas.

Trabalho C: Há determinação de conteúdos matemáticos abordados no ensino fundamental e médio, como por exemplo: contagem, estatística, análise de padrões, múltiplos e divisores. O autor utiliza o método de Polya para aplicar uma diversidade de problemas relevantes a esse nível de ensino.

Trabalho D: O trabalho dos autores visa melhorar o ensino de matemática através da aplicação de técnicas olímpicas, mas sem a determinação de um conteúdo específico.

Trabalho E: São abordados conteúdos das áreas de números, álgebra, geometría, grandezas e medidas, probabilidade e estatística, o autor se concentra em problemas específicos da Olimpíada Regional Mirim de Matemática.

Questão 3: Como ocorreu a análise dos problemas nesses trabalhos?

Trabalho A: O método de Polya foi aplicado diretamente para a resolução de problemas de Análise Combinatória e Probabilidade. A autora fez uma análise detalhada das quatro fases do método de Polya (compreensão, plano, execução, revisão) em problemas de Análise Combinatória e Probabilidade.

Trabalho B: A análise dos problemas no trabalho destes autores está mais ligada ao impacto das olimpíadas de matemática no Ensino Médio, com uma abordagem ampla e sem foco em problemas específicos.

Trabalho C: O autor aplicou o método de Polya em sala de aula para analisar diversos problemas matemáticos do Ensino Fundamental e Médio. O autor aborda a utilização e aplica todas as fases do método de Polya, focando no contexto educacional do Ensino Fundamental e Médio.

Trabalho D: Estes autores usaram técnicas olímpicas para avaliar como esses métodos podem melhorar o ensino da matemática. A análise foca mais na prática e no impacto educacional do que nos problemas em si. Embora o foco seja em técnicas olímpicas, não há uma análise detalhada das fases do método de Polya.

Trabalho E: O trabalho do autor enfatiza a aplicação meticulosa das quatro fases do método de Polya em problemas da Olimpíada Regional Mirim de Matemática, ilustrando cada etapa de maneira detalhada, demonstrando como cada etapa contribui para a resolução dos problemas.

Questão 4: Existem evidências da aplicação direta do método em sala de aula?

Trabalho A: Não há menção explícita de aplicação direta em sala de aula. O foco é mais voltado para competições matemáticas, como as olimpíadas, porém não ocorre a aplicação com estudantes.

Trabalho B: O trabalho sugere que as olimpíadas têm um impacto positivo no Ensino Médio, mas não há evidências claras da aplicação direta do método de Polya em sala de aula.

Trabalho C: Sim, o autor apresenta a descrição da aplicação do método de Polya em sala de aula, no contexto do Ensino Fundamental e Médio.

Trabalho D: O estudo menciona a aplicação de técnicas olímpicas no contexto educacional, mas não há foco específico no método de Polya ou em sua aplicação direta em sala de aula.

Trabalho E: Se concentra na aplicação do método de Polya em problemas de competição, sem evidências diretas de aplicação em sala de aula.

2.5. CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A REVISÃO SISTEMÁTICA

A análise dos trabalhos selecionados evidenciou que a aplicação desse método pode ser bastante variada. Por exemplo, o trabalho A focou sua pesquisa em problemas específicos relacionados à Análise Combinatória e Probabilidade, demonstrando como o método de Polya pode ser utilizado com sucesso para resolver questões complexas desse campo. De maneira semelhante, trabalho E apresentou uma aplicação detalhada do método nas Olimpíadas Regionais Mirins de Matemática, enfatizando a importância de seguir cada uma das etapas para atingir soluções eficazes. Esses estudos mostram que o método de Polya não só facilita a resolução de problemas complexos, mas também desenvolve uma mentalidade investigativa nos alunos, essencial para o sucesso nas olimpíadas de matemática.

Por outro lado, o trabalho B e trabalho D, adotaram uma abordagem mais ampla, destacando o impacto das olimpíadas de matemática na educação como um todo, sem se concentrar tanto na análise detalhada de problemas específicos através do método de Polya. Esses autores mostraram como as competições matemáticas podem contribuir para o ensino médio, promovendo uma maior compreensão dos conteúdos e engajamento dos alunos. Embora esses estudos não ofereçam uma análise profunda do uso do método de resolução de problemas no desenvolvimento de habilidades relacionadas a resolução de questões de olimpíadas de matemática.

A presente revisão sistemática trouxe uma perspectiva diferenciada ao aplicar diretamente o método de Polya em sala de aula, no contexto do ensino fundamental e médio. Ele apresentou exemplos práticos de como o método pode ser utilizado não apenas em competições, mas também no ambiente educacional diário, fortalecendo as habilidades de resolução de problemas dos alunos em diferentes tópicos matemáticos. Essa aplicação direta em sala de aula demonstra a flexibilidade e a utilidade do método de Polya, tanto para competições quanto para o ensino regular de matemática.

A revisão sistemática permitiu identificar tanto convergências quanto divergências entre os estudos analisados e a pesquisa aqui desenvolvida. Trabalhos como o de Fernandes (2021) e Borges (2024), por exemplo, apresentam abordagens semelhantes ao enfatizarem a aplicação prática do método de Polya em problemas matemáticos específicos, evidenciando a eficácia das quatro etapas propostas pelo autor na resolução de questões desafiadoras, especialmente no contexto das Olimpíadas de Matemática. De forma semelhante a pesquisa que aqui será apresentada, esses estudos também reconhecem o potencial do método para desenvolver habilidades investigativas e analíticas nos estudantes, características essenciais para o sucesso em competições matemáticas.

Por outro lado, o presente trabalho se diferencia ao propor uma reflexão mais direta sobre como o método de Polya pode ser integrado ao contexto pedagógico do Ensino Fundamental II. Embora este estudo não tenha realizado uma aplicação prática em sala de aula, ele apresenta resoluções de problemas com base nas etapas do método, adaptadas a conteúdos previstos na BNCC. Essa abordagem amplia a discussão sobre a aplicabilidade do método de Polya também no ensino regular, reforçando seu potencial para desenvolver competências como autonomia, raciocínio lógico e pensamento crítico em tópicos variados da matemática escolar.

Diferentemente dos trabalhos B e D, que exploram mais amplamente o impacto educacional das Olimpíadas de Matemática sem se aprofundar na aplicação detalhada do método de Polya, essa pesquisa oferece uma análise focada e sistemática das etapas do método, demonstrando sua viabilidade em contextos educacionais diversos, este trabalho vai segue a linha do trabalho D, mas com resolução de problemas olímpicos.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, será abordada a resolução de problemas como metodologia de ensino através da resolução de problemas. Na sequência, será abordada a história das olimpíadas de matemática no Brasil e a proposta de George Polya sobre resolver problemas aplicando as quatro fases (Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto).

3. 1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ensino de matemática com foco na resolução de problemas ganhou relevância nas últimas décadas, especialmente a partir de 1980. Nesse período, as teorias predominantes de aprendizagem incluíam o Construtivismo, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural de Vygotsky. Segundo Onuchic e Allevato et al. (2014, p. 36-37), “a principal meta desse movimento foi um retorno à aprendizagem por descoberta, onde o conhecimento é construído por meio da resolução de problemas”.

A abordagem por resolução de problemas também está profundamente alinhada com as teorias de aprendizagem como o Construtivismo de Piaget, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural de Vygotsky, que valorizam o aprendizado ativo e a construção do conhecimento através da interação com o ambiente e com outros indivíduos. Essa metodologia promove a autonomia e o protagonismo dos alunos, permitindo que descubram o valor da matemática por meio de suas próprias experiências e observações.

A importância da resolução de problemas no ensino de matemática está em sua capacidade de tornar o aprendizado mais dinâmico, significativo e próximo da realidade dos estudantes. Ao invés de memorizar fórmulas e procedimentos, os alunos são incentivados a explorar, refletir e aplicar conceitos matemáticos em situações práticas. Esse enfoque desenvolve habilidades importantes como o raciocínio lógico, a capacidade de análise, a tomada de decisões e a criatividade na resolução de desafios, todos essenciais tanto para o desenvolvimento acadêmico quanto para a vida cotidiana.

Além disso, a resolução de problemas contribui para desenvolver a capacidade de questionamento crítico dos alunos. Ao se depararem com problemas que desafiam sua compreensão, os estudantes são encorajados a pensar sobre a finalidade dos conceitos matemáticos, encontrando respostas para perguntas comuns como: "Por que estudar isso?" ou "Como isso se aplica ao mundo real?" Essa abordagem também contribui para tornar a matemática mais inclusiva, pois permite que alunos com diferentes estilos de aprendizagem encontrem maneiras de se envolver com o conteúdo. A resolução de problemas ajuda a consolidar o papel do professor como facilitador do conhecimento, alguém que orienta, desafia e oferece apoio aos alunos em vez de apenas transmitir informações.

Além do método de Polya, outro referencial importante na área da resolução de problemas é a proposta de Lourdes de la Rosa Onuchic (Onuchic, 1999). Embora ambos os autores defendam o uso de problemas como ferramenta central no ensino de matemática, há diferenças marcantes entre suas abordagens. O método de Polya é estruturado em quatro etapas — compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e revisar a solução — e enfatiza a autonomia do aluno, buscando desenvolver o pensamento crítico por meio de uma postura investigativa individual (POLYA, 1995).

Já Onuchic (1999), ao propor três fases — identificação do problema, solução estruturada e discussão/generalização —, destaca o papel do professor como mediador ativo do processo, valorizando a troca de ideias e o trabalho em grupo como elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático. Enquanto Polya prioriza a análise individual e a autorreflexão, o método de Onuchic se alinha a uma perspectiva mais dialógica e colaborativa, o que o torna especialmente eficaz em contextos escolares guiados pela mediação docente contínua.

A resolução de problemas pode ser utilizada como uma ferramenta importante para dar significado à matemática, estimular o ensino e a aprendizagem dos estudantes e principalmente dar sentido à matemática.

Quando o professor ensina a matemática somente com cálculos, fórmulas prontas e repetições de exercícios , sem desenvolver os estímulos dos estudantes, isso não permitirá aos estudantes desenvolverem seu pensamento crítico, criatividade, raciocínio lógico, apagando o interesse dos estudantes e prejudicando o desenvolvimento intelectual desses.

Sobretudo, se o professor trabalhar os métodos de resolução de problemas com conhecimentos prévios já adquiridos anteriormente, irá despertar a curiosidade, desenvolverá a capacidade de interpretação e a capacidade de argumentação, gerando o gosto para desafios matemáticos e principalmente proporcionando-lhes novos conhecimentos, confiança em si mesmos e o prazer da descoberta, conforme nos assegura Onuchic Allevato, et al (2014).

Ensinar o estudante a resolver problemas é algo muito mais detalhado do que apenas apresentar o conteúdo trabalhado e uma pergunta a ser respondida. Resolver problemas, segundo (Carlos, 2024), envolve identificar um caminho ainda desconhecido que permita contornar obstáculos para alcançar um objetivo de maneira adequada.

3.2. O MÉTODO DE POLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao longo dos anos, diversos autores vêm pensando na importância da resolução de problemas como uma habilidade essencial para o aprendizado matemático. Segundo Schoenfeld (1985) , o ato de resolver problemas envolve não apenas o conhecimento técnico, mas também a aplicação de estratégias cognitivas, tornando-se uma ferramenta poderosa para desenvolver o pensamento crítico e a capacidade de raciocínio lógico dos alunos. Isso é especialmente evidente em competições como as olimpíadas de matemática, onde a capacidade de formular, testar e revisar soluções é fundamental.

Nessas competições, os estudantes são desafiados a aplicar conceitos matemáticos de forma criativa e analítica, evidenciando habilidades que vão além da simples memorização de fórmulas e procedimentos. O método de Polya é considerado um dos pilares dessa abordagem, sendo proposto pelo matemático George Polya, que se destaca com uma abordagem pedagógica eficaz e amplamente utilizada para orientar os estudantes na solução de problemas complexos.

George Polya, matemático húngaro-americano (1887-1985), é amplamente reconhecido por suas contribuições ao ensino da matemática e, sobretudo, por seu trabalho inovador no campo da resolução de problemas. Sua obra "How to Solve It" (1945) — traduzida como "A Arte de Resolver Problemas" — transformou o ensino da matemática ao introduzir uma metodologia sistemática e abrangente, aplicável não apenas à matemática, mas a qualquer campo que envolva resolução de problemas complexos. Polya defendia que o processo de resolver problemas é central para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, sendo uma habilidade essencial para a aplicação prática e para o entendimento profundo dos conceitos matemáticos (POLYA, 2006).

Em sua obra Polya (1945) detalha um processo metódico para a solução de problemas, que pode ser aplicado em desafios matemáticos. De acordo com Kilpatrick (1985), esse método fornece uma estrutura prática e facilmente compreensível que incentiva os alunos a desenvolverem uma mentalidade investigativa, essencial para o sucesso nas competições matemáticas.

Além disso, pesquisas realizadas por Silver (1987) apontam que o uso do método de Polya não só melhora o desempenho acadêmico, mas também promove uma maior autonomia dos estudantes na resolução de problemas. Isso é particularmente relevante no contexto das olimpíadas de matemática, onde os participantes são frequentemente confrontados com problemas solicitados que exigem uma abordagem criativa e estratégica.

O método de Polya está estruturado em quatro fases: (1) Compreender o problema , (2) Elaborar um plano , (3) Executar o plano e (4) Revisar a solução. Essas etapas permitiram uma estrutura lógica e sequencial, facilitando a organização do pensamento matemático e promovendo a autonomia do aluno no processo de resolução de problemas.

Estudos mais recentes também ressaltam a eficácia dessa metodologia em competições matemáticas. Segundo Zhu e Simon (1987), estudantes que são incentivados a utilizar o método de Polya demonstram uma maior capacidade de decompor problemas complexos em partes menores e gerenciáveis, facilitando a busca por soluções inovadoras. Além disso, o método tem sido amplamente utilizado em ambientes educacionais para promover a aprendizagem ativa e o engajamento dos alunos, conforme argumentado por Santos e Silva (2019), que analisaram o impacto desse método nas olimpíadas nacionais.

3.2.1. ETAPAS DO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

Nessa seção serão detalhadas as quatro fases do método proposto por Polya.

Compreender o Problema: O primeiro passo é interpretar o enunciado e identificar o que o problema requer. Isso envolve analisar as condições e as informações disponíveis e determinar a pergunta central do problema. Polya (1945) sugere perguntas orientadoras, como “Qual é o objetivo do problema?” e “Quais são os dados relevantes?” para ajudar a esclarecer as condições e os objetivos. Essa etapa é crucial, pois permite que o estudante ganhe uma visão completa do desafio, garantindo que todos os elementos do problema sejam levados em consideração antes de buscar uma solução.

Elaborar um Plano: Com o problema compreendido, é necessário definir uma estratégia para solucioná-lo. Segundo Polya, a escolha de uma estratégia eficaz depende do conhecimento prévio e da experiência em lidar com problemas similares. Nessa fase, o estudante pode formular hipóteses, dividir o problema em subproblemas, identificar padrões, construir diagramas ou modelos visuais e explorar analogias. Em problemas de olimpíadas, a elaboração de um plano muitas vezes exige um pensamento criativo e adaptativo, já que os problemas tendem a ser inéditos e desafiadores.

Executar o Plano: Na terceira fase, o aluno coloca em prática a estratégia selecionada, implementando os passos definidos. Esse estágio exige precisão e atenção, pois o sucesso depende de uma execução fiel do plano. Se surgirem dificuldades, Polya recomenda revisar e adaptar o plano conforme necessário, superando obstáculos e realizando ajustes. Nesse ponto, o foco está na persistência e na adaptação, qualidades fundamentais para enfrentar problemas complexos, como os de competições de matemática.

Revisar a Solução: Na fase final, o aluno avalia o resultado obtido, refletindo sobre o processo para verificar a validade da solução. Polya sugere que a revisão envolva uma confirmação detalhada de cada passo realizado, buscando identificar erros e consolidar o aprendizado. Em problemas de olimpíadas, a revisão é fundamental, uma vez que a precisão e a robustez da resposta são essenciais. Métodos complementares, como refazer os cálculos ou utilizar estratégias alternativas para verificar a solução, fortalecem a certeza do resultado obtido. Ferramentas visuais, como diagramas, tabelas e árvores de possibilidades, podem enriquecer a revisão e oferecer novas perspectivas sobre o problema (POLYA, 2006).

Além de sua aplicabilidade em contextos educacionais, o método de Polya é um recurso valioso para o desenvolvimento do pensamento crítico. No entanto, Polya observa que o sucesso do método também depende de uma orientação cuidadosa por parte do professor. O professor deve criar um ambiente de apoio que estimule a autonomia e a confiança do aluno, equilibrando a ajuda para que o aluno se sinta desafiado, mas também amparado. Segundo Polya (2006, p.16), "se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isso deve auxiliá-lo discretamente". Essa abordagem fomenta habilidades autônomas e investigativas, fundamentais para a formação de futuros matemáticos e cientistas.

Fernandes (2021, p. 45) afirma:

> O método de Polya se aplica especialmente aos problemas de determinação, onde o objetivo central é descobrir uma incógnita a partir de dados e condições preestabelecidas. Em contraste, os problemas de demonstração exigem uma prova lógica de uma afirmação. Em ambos os casos, os princípios de Polya se mostram eficazes, mas exigem adaptações conforme a natureza do problema.

Essa citação destaca uma distinção importante no campo da resolução de problemas matemáticos: a diferença entre os chamados problemas de determinação, que envolvem a busca de um valor ou elemento desconhecido a partir de dados explícitos, e os problemas de demonstração, que requerem a construção de argumentos lógicos para validar uma afirmação. A contribuição de Fernandes (2021) mostra que, embora o método de Polya seja tradicionalmente mais associado a problemas do primeiro tipo, sua estrutura flexível permite adaptações para diferentes formatos, inclusive aqueles que exigem maior rigor formal e argumentativo, como as demonstrações. Isso evidencia a versatilidade do método, que pode ser utilizado tanto em situações mais práticas quanto em abordagens mais teóricas da matemática, desde que o professor ou o estudante saiba reinterpretar suas etapas de acordo com a natureza do problema proposto.

George Polya é lembrado não apenas como um matemático de renome, com contribuições importantes para a teoria das probabilidades, análise complexa e combinatória, mas também como um educador cuja metodologia segue influenciando gerações de professores e alunos. Sua abordagem pedagógica transforma a matemática de uma disciplina restrita a fórmulas e operações para uma ciência exploratória, rica em possibilidades de descoberta e desenvolvimento intelectual.

3.3. A HISTÓRIA DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

As Olimpíadas de Matemática no Brasil surgiram com o objetivo de estimular o raciocínio lógico, a criatividade e a importância da Matemática. A primeira grande iniciativa nacional foi a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), criada em 1979 pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e, atualmente, organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). A OBM é voltada a estudantes do ensino fundamental, médio e superior, de escolas públicas e privadas, e serve como porta de entrada para competições internacionais.

No Brasil em 2005 foi criada uma nova olimpíada: a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Inicialmente voltada apenas a estudantes de escolas públicas, a OBMEP passou a aceitar também escolas privadas a partir de 2017. Organizada pelo IMPA, pelo MEC (Ministério da Educação) pelo MCTI (Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação) e pelo Governo Federal e com apoio do CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e do CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), essa competição rapidamente se tornou a maior olimpíada de matemática do mundo, com a participação de milhões de estudantes em todo o país.

Além dessas duas principais competições, o Brasil também conta com diversas olimpíadas regionais e estaduais, como a OMM (Olimpíada de Matemática de Minas Gerais) e a OMAP (Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo), além de versões temáticas que abordam áreas específicas da Matemática.

Em 2017 na Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) - *campus Chapecó* - foi criada a Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense (OMOC), pelos professores Milton Kist e Janice Teresinha Reichert da Universidade Federal da Fronteira Sul. Esta olimpíada tem uma iniciativa regional, com o objetivo de estimular o estudo da matemática entre estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio do Oeste de Santa Catarina. Embora tenha um alcance mais limitado em comparação com olimpíadas nacionais, a OMOC se destaca pelo impacto direto na comunidade local, envolvendo escolas públicas e privadas e incentivando o protagonismo acadêmico de alunos de escolas da região.

A OMOC é um programa de extensão da UFFS - *Campus Chapecó* - que através da Universidade consegue bolsas de extensão e estágio não-obrigatório para alunos graduandos do curso de Matemática - Licenciatura do *Campus Chapecó*. A autora Jaqueline dos Santos, foi bolsista da OMOC nos anos de 2021 e 2022, e estagiária de 2022 a 2024. Outros colegas como Alessandra Carla Soave, Luana Theisen e Milena Speroto do curso de Licenciatura - Matemática do *campus Chapecó*, foram colegas de estágio da Jaqueline e bolsistas nesses anos.

Em comparação com a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), a OMOC possui uma estrutura semelhante no que diz respeito ao formato das provas — divididas em duas fases, sendo a primeira objetiva e a segunda dissertativa. No entanto, a OBMEP tem um alcance nacional massivo, envolvendo milhões de estudantes por ano e promovendo inclusão social através de programas de iniciação científica e bolsas para alunos premiados. A OMOC, por sua vez, tem foco regional, o que permite um acompanhamento mais próximo dos participantes e uma valorização direta dos talentos locais.

Já em relação à OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), a OMOC se diferencia principalmente no nível de dificuldade e nos objetivos. A OBM é uma competição altamente seletiva, voltada a estudantes com desempenho matemático elevado, de escolas públicas e privadas, incluindo até o ensino superior. Ela serve como porta de entrada para competições internacionais, como a IMO (Olimpíada Internacional de Matemática). A OMOC, por outro lado, não tem essa finalidade de seleção internacional, mas tem um papel fundamental de base, promovendo o interesse pela matemática desde os primeiros anos do ensino fundamental e servindo como porta de entrada para o universo olímpico.

Portanto, embora a OMOC não tenha o alcance ou a repercussão nacional da OBM e da OBMEP, ela desempenha um papel essencial no cenário educacional catarinense, promovendo o ensino da matemática de forma acessível, motivadora e de qualidade. Com provas bem elaboradas, organização comprometida e crescente participação de alunos e escolas, a OMOC contribui significativamente para a formação de novos talentos matemáticos e para o fortalecimento da cultura científica na região.

Graças a essas olimpíadas, o Brasil passou a descobrir e formar jovens talentos que hoje representam o país em competições internacionais, como a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e a Olimpíada Ibero-Americana de Matemática. O país tem obtido bons resultados, conquistando medalhas de ouro, prata e bronze ao longo dos anos.

O impacto educacional dessas competições é profundo. Elas contribuem para a melhoria do ensino de Matemática nas escolas, valorizam o trabalho dos professores e oferecem oportunidades para estudantes de todas as regiões do país, especialmente por meio de programas como o PIC (Programa de Iniciação Científica Júnior), promovido pela OBMEP, que concede bolsas e acompanhamento para alunos premiados.

Além de promover o desenvolvimento de habilidades matemáticas e do raciocínio lógico, as Olimpíadas de Matemática também exercem um papel importante na construção da autoestima dos alunos. Participar desses eventos permite que os estudantes se sintam valorizados por seu desempenho intelectual, reconhecendo suas capacidades para enfrentar desafios e resolver problemas complexos. Esse reconhecimento, muitas vezes externo (por meio de medalhas, certificados ou menções honrosas), contribui significativamente para que o aluno passe a acreditar mais em seu potencial e desenvolva maior confiança em sua trajetória escolar. Em especial para alunos de escolas públicas ou de contextos socialmente vulneráveis, as olimpíadas podem representar uma oportunidade concreta de superação de barreiras e valorização pessoal, promovendo um sentimento de pertencimento e estimulando a permanência e o interesse na área científica.

4 METODOLOGIA

O presente trabalho configura-se como uma pesquisa exploratória, que, segundo Gil (2002, p. 41) “Tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir situações. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.”

Nesse sentido, a pesquisa tem como objetivo explorar a aplicação das etapas do método de resolução de problemas proposto por Polya em problemas de olimpíadas de matemática, buscando identificar suas contribuições para o desenvolvimento de habilidades analíticas e investigativas.

A abordagem utilizada foi qualitativa, analisando de forma detalhada como o método de Polya pode ser empregado na resolução de problemas específicos. Essa análise permitiu compreender as relações entre as etapas do método e as dificuldades e vantagens enfrentadas pelos estudantes no contexto de competições matemáticas.

Este trabalho propõe a utilização de cinco questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e duas da Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense (OMOC), como instrumento para o estudo e a resolução de problemas matemáticos.

A seleção das questões será orientada pelos conteúdos definidos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para os anos finais do Ensino Fundamental, com foco especial no 8º e 9º anos, Nível II das olimpíadas. Assim, garante-se que os temas abordados estejam em conformidade com os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento estabelecidos para essa etapa da educação básica. O trabalho irá mostrar soluções sem o método e aplicando o método.

Os conteúdos matemáticos explorados ao longo do trabalho são os previstos pela BNCC para esses anos escolares, abrangendo áreas como Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, além de Probabilidade e Estatística.

A abordagem metodológica adotada terá como base o método de Polya, uma estratégia consagrada para a resolução de problemas matemáticos. A aplicação desse processo visa promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de organização do pensamento e da autoconfiança dos estudantes diante de desafios matemáticos.

A análise das questões permitiu identificar padrões e estratégias eficazes para a aplicação do método de Polya em contextos de resolução de problemas olímpicos, contribuindo para a consolidação de suas vantagens e limitações.

5 APLICANDO O MÉTODO DE POLYA NOS PROBLEMAS

Neste capítulo, será realizada a resolução de algumas olimpíadas de escolas públicas através do método de Resolução de Exercícios de Polya.

5.1. ESCOLHA DAS QUESTÕES

As questões foram selecionadas considerando pelo menos uma questão de Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, além de Probabilidade e Estatística. Iniciamos com 5 questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

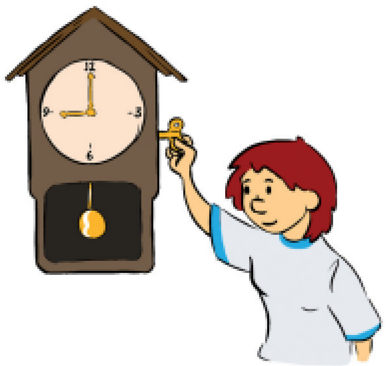
5.1.1. ANÁLISE DAS QUESTÕES DA OBMEP

ÁREA: GRANDEZAS E MEDIDAS

Figura 1: Questão 14 - OBMEP - Nível II - 2014:

14. Rosane percebeu que seu antigo relógio de parede tinha parado às 9 horas. Ela deu corda no relógio, colocando-o para funcionar sem acertar o horário, e foi imediatamente ao mercado. Chegou ao mercado às 10 horas e 10 minutos. Fez suas compras em 1 hora e voltou para casa. Entrando em casa, notou que o relógio de parede marcava 10 horas e 40 minutos. Se Rosane realizou os percursos de ida e volta ao mercado em tempos iguais, a que horas ela entrou em casa?

A) 10 horas e 50 minutos
B) 11 horas e 10 minutos
C) 11 horas e 30 minutos
D) 11 horas e 40 minutos
E) 11 horas e 50 minutos



Fonte: Prova OBMEP 2014 nível II[1]

Aplicando o método de Polya na resolução do problema:

<u>Primeira etapa: Entender o problema:</u>

Rosane percebeu que seu relógio de parede parou às 9 horas. Ela deu corda no relógio, sem acertar o horário, e foi ao mercado. O relógio de parede parou às 9h. Ela deu corda no

[1] Disponível em: pf1n2-2014.pdf Acesso em: 29 jun. 2025.

relógio (mas não acertou o horário). Chegou ao mercado às 10h10. Fez compras por 1 hora. Ao entrar em casa, o relógio de parede marcava 10h40. Os percursos de ida e volta ao mercado foram feitos em tempos iguais. Precisamos descobrir que horas Rosane entrou em casa.

Segunda Etapa: Elaboração de um plano:

Vamos determinar o tempo total que Rosane ficou fora de casa. Para isso, precisaremos descobrir a hora real em que ela saiu de casa. Podemos usar a informação do relógio de parede e a hora de chegada ao mercado para descobrir o tempo de viagem de ida. Com o tempo de viagem de ida, podemos inferir a hora de saída de casa. O tempo total fora de casa será a (duração da viagem de ida) + (tempo de compras) + (tempo de viagem de volta).

O relógio de parede marcou de 9h (quando ela deu corda) até 10h40 (quando ela entrou em casa). Isso significa que se passaram 1 hora e 40 minutos no relógio de parede. No entanto, o tempo real passado é diferente porque o relógio não estava com a hora certa. Se o tempo de ida e volta são iguais, e Rosane ficou 1 hora fazendo compras, podemos relacionar o tempo total que ela esteve fora de casa com a leitura do relógio de parede. A partir da hora de chegada ao mercado e do tempo de compras, podemos determinar a hora de saída do mercado. Com o tempo de volta, podemos finalmente determinar a hora de entrada em casa.

Terceira etapa: Executar o plano:

Vamos usar as variáveis para organizar as informações:

Hora em que o relógio parou e Rosane deu corda: $H_{parou} = 9h$ (no relógio de parede);

Hora em que Rosane chegou ao mercado: $H_{mercado\ chegada} = 10h10$ (hora real);

Tempo de compras: $T_{compras} = 1$ hora;

Hora em que o relógio de parede marcava ao entrar em casa: $H_{relógio\ casa} = 10h40$ (no relógio de parede);

Tempo de ida ao mercado: T_{ida}; Tempo de volta do mercado: T_{volta}; Sabemos que $T_{ida} = T_{volta}$.

Passo 1: Entender o tempo marcado pelo relógio de parede. O relógio de parede marcou das 9h até às 10h40. Tempo decorrido no relógio de parede: $10h40 \ - \ 9h00 = 1h\, e\, 40min = 100min.$

Este tempo de 100 minutos corresponde ao tempo total em que Rosane esteve fora de casa, pois o relógio só começou a contar a partir do momento em que ela deu corda. Portanto, o tempo total que Rosane ficou fora de casa é de 100 minutos.

Passo 2: Distribuir o tempo total fora de casa. O tempo total que Rosane ficou fora de casa é composto por: $T_{fora} = T_{ida} + T_{compras} + T_{volta}$.

Sabemos $T_{fora} = 100min$ e $T_{compas} = 1h = 60min.$ Também sabemos $T_{ida} = T_{volta}.$

Então, $100min \ = \ T_{ida} + 60min \ + \ T_{ida}$

$$100min \ = \ 2T_{ida} \ + 60min$$

$$100min - 60min = 2T_{ida}$$

$$40min = 2T_{ida}$$

$$\frac{40min}{2} = T_{ida}$$

$$20min = T_{ida}$$

Como $T_{volta} = T_{ida} = 20min.$

Passo 3: Calcular a hora em que Rosane entrou em casa (hora real). Rosane chegou ao mercado às 10:10. Ela ficou 1 hora fazendo compras. Hora de saída do mercado: $10h10 \ + \ 1hora = 11h10.$

O tempo de volta foi de 20 minutos. Hora de entrada em casa: $11h10 + 20\, min = 11h30.$

<u>Etapa quarta: Revisar a Solução:</u>

A pergunta foi respondida? Sim, Rosane entrou em casa às 11h e 30min.

Os dados foram usados corretamente? O relógio parou às 9h, deu corda e foi ao mercado. Chegou ao mercado às 10h10. Comprou por 1 hora. Ao entrar em casa, o relógio marcava 10h40. Percursos de ida e volta em tempos iguais.

Tempo decorrido no relógio de parede (tempo total fora de casa): $10:40 - 9:00 = 1h40min = 100min$. Tempo de compras: 1h = 60min. Tempo de ida + tempo de volta = $100min - 60min = 40min$. Como ida e volta são iguais, tempo de ida = tempo de volta = 20 minutos. Rosane chegou ao mercado às 10h10. Saiu do mercado às 10h10 + 1h = 11h10. Chegou em casa às 11h10 + 20 minutos (tempo de volta) = 11h30. Os cálculos são consistentes com as informações fornecidas. Desta forma a resposta final será: Rosane entrou em casa às 11 horas e 30 minutos.

Análise da resolução de acordo com o método: O método de Polya mostrou-se eficaz na resolução desta questão. Ao iniciar com o "Entendimento do Problema", foi possível diferenciar claramente entre as horas reais e as marcações do relógio com defeito, além de identificar todos os dados relevantes e o objetivo final. Em seguida, a etapa de "Criação de um Plano" permitiu desmembrar o desafio em passos lógicos e sequenciais, como calcular o tempo total fora de casa (dado pelo relógio de parede), distribuir os tempos de percurso de ida e volta, e por fim, determinar a hora real de chegada. A "Execução do Plano" seguiu essa estrutura metodicamente, utilizando os dados fornecidos para cada cálculo, como a dedução do tempo de ida e volta de 20 minutos cada, a partir do tempo total em que o relógio estava funcionando e o tempo de compras. Finalmente, a "Revisão e Verificação" confirmou a consistência dos cálculos e a adequação da resposta à pergunta original, solidificando a confiança na solução de 11h30.

ÁREA: ÁLGEBRA

Figura 2: Questão 15 - OBMEP - Nível II - 2014:

15. Télio comprou laranjas, maçãs e uvas no mercado. O preço por quilograma de cada fruta está na tabela abaixo. Metade do peso total da compra era de maçãs e o peso das uvas era o dobro do peso das laranjas. Se Télio gastou R$ 38,00, quantos quilogramas de frutas ele comprou?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

Preços (R$) por quilograma	
Maçã	3,00
Uva	4,00
Laranja	2,00

Fonte: Prova OBMEP 2014[2]

<u>Primeira etapa: Entender o problema:</u>

Télio comprou: Laranjas, maçãs e uvas. Os preços por quilograma:

Maçã: R$3,00 kg; Uva: R$4,00 kg; Laranja: R$2,00 kg.

Metade do peso total da compra era de maçãs. O peso das uvas era o dobro do peso das laranjas. O gasto total de Télio foi de $R\$\,38,00$. Precisamos descobrir quantos quilogramas de frutas Télio comprou no total.

<u>Segunda etapa: Elaboração de um plano:</u>

Vamos usar variáveis para representar os pesos e montar equações: Definir as variáveis para os pesos de cada fruta: M para maçãs, U para uvas, L para laranjas. Expressar as relações de peso em equações. Expressar o gasto total em uma equação usando os pesos e os preços. Resolver o sistema de equações para encontrar os valores de M, U e L. Calcular o peso total: $M + U + L$.

<u>Terceira etapa: Executar o Plano:</u>

Passo 1: Expressar as relações de peso em equações.

T = total de frutas = $M + U + L$. Metade do peso total da compra era de maçãs: $M = \frac{T}{2}$;

[2] Disponível em: pf1n2-2014.pdf Acesso em: 29 jun. 2025.

Substituindo:

$$M = \frac{M+U+L}{2}$$

$$2M = M + U + L$$

$$2M - M = U + L$$

$M = U + L$ (***equação 1***)

O peso das uvas era o dobro do peso das laranjas: $U = 2L$ (***Equação 2***);

Passo 2: Expressar o gasto total em uma equação.

$Gasto\ total = (Preço\ Maçã \times Peso\ Maçã) + Preço\ Uva \times Peso\ Uva) +$

$(Preço\ Laranja \times Peso\ Laranja) = 38 = 3M + 4U + 2L$ (***Equação 3***).

Passo 3: Resolver o sistema de equações.

Temos um sistema de três equações com três variáveis:

$$M = U + L$$

$$U = 2L$$

$$3M + 4U + 2L = 38$$

Vamos substituir a Equação 2 na Equação 1:

$$M = (2L) + L$$

$M = 3L$ (***Equação 4***)

Agora, substituímos a Equação 2 ($U = 2L$) e a Equação 4 ($M = 2L$) na Equação 3:

$$3(3L) + 4(2L) + 2L = 38$$

$$9L + 8L + 2L = 38$$

$$19L = 38$$

$$L = \frac{38}{19}$$

$$L = 2 \text{ kg}$$

Agora que temos L, podemos encontrar U e M. Usando a ***Equação 2***:

$$U = 2L$$

$$U = 2 \times 2$$

$$U = 4 \text{ kg}$$

Usando a ***Equação 4***:

$$M = 3L$$

$$M = 3 \times 2$$

$$M = 6 \text{ kg}$$

Passo 4: Calcular o peso total.

$$T = M + U + L$$

$$T = 6 + 4 + 2$$

$$T = 12 \text{ kg}$$

<u>Etapa quarta: Revisar a Solução:</u>

Pesos calculados são: Maçã (M) = 6 kg; Uva (U) = 4 kg; Laranja (L) = 2 kg

Verificando as relações de peso: Metade do peso total da compra era de maçãs: Peso total = 12 kg. Metade = 6 kg. Peso de maçãs = 6 kg. (Confere: $M = \frac{T}{2}$). O peso das uvas era o dobro do peso das laranjas: Peso de uvas = 4 kg. Peso de laranjas = 2 kg, $4 = 2 \times 2$. (Confere: $U = 2L$).

Verificando o gasto total:

Custo Maçã: $6kg \ \times 3,00\ kg = R\$\ 18,00$;

Custo Uva: $4kg \times 4,00\ kg = R\$\ 16,00$;

Custo Laranja:$2kg \times 2,00\ kg = R\$\ 4,00$

Gasto Total: $R\$\ 18,00 + R\$16,00 + R\$\ 4,00 = R\$38,00$ (Confere com o valor dado no problema).

Todos os dados e condições foram satisfeitos. A pergunta foi respondida. Sendo a resposta final: Télio comprou 12 quilogramas de frutas.

Análise da resolução de acordo com o método: Evidenciou-se a eficiência do método de Polya nessa questão. Iniciando pela fase de "Entendimento do Problema", foi possível desvendar as relações complexas entre os pesos das frutas e seus respectivos custos, traduzindo as condições em variáveis e constantes essenciais. A "Criação de um Plano" seguiu, estruturando o problema para ser resolvido através de um sistema de equações, onde cada relação de peso e o gasto total foram transformados em expressões algébricas. A "Execução do Plano" procedeu de forma lógica e sequencial, substituindo as variáveis para isolar e calcular o peso de cada tipo de fruta (laranja, uva e maçã), e por fim, o peso total da compra. Finalmente, a etapa de "Revisão e Verificação" validou cada passo e o resultado final (12 kg de frutas), confirmando que todas as condições do problema foram satisfeitas, desde as proporções de peso até o gasto total, atestando a robustez e a clareza da solução obtida através do método.

ÁREA: NÚMEROS

Figura 3: Questão 3 - OBMEP - Nível II - 2024:

3. Na adição a seguir, as letras A, B, C e D representam algarismos diferentes de zero. Qual é o valor de A + B + C + D?

(A) 21
(B) 26
(C) 16
(D) 31
(E) 11

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ B\,C\,D \\ +\quad C\,D\,A \\ D\,A\,B \\ \hline 2\,3\,3\,1 \end{array}$$

Fonte: Prova OBMEP 2024[3]

Primeira etapa: Entender o problema:

Temos um problema de adição em que A, B, C e D representam dígitos diferentes de zero. A soma dos quatro números de três dígitos (ABC, BCD, CDA, DAB) é 2331. Precisamos encontrar o valor de A + B + C + D. "Dígitos diferentes não nulos" significa que A, B, C, D são distintos e pertencem ao conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Segunda etapa: Elaboração de um plano:

Podemos representar o problema da adição algebricamente expandindo cada número em termos de seu valor posicional.

$$ABC = 100A + 10B + C$$

$$BCD = 100B + 10C + D$$

$$CDA = 100C + 10D + A$$

$$DAB = 100D + 10A + B$$

Somando estas expressões:

$$(100A + 10B + C = 100B + 10C + D + 100C + 10D + A + 100D + 10A + B = 2331$$

Agrupando os termos por A, B, C e D:

Termos A:

$$100A + A + 10A = 111A$$

Termos B:

$$10B + 100B + B = 111B$$

Termos C:

$$C + 10 + 100C = 111C$$

[3] Disponível em: pf1n2-2024-1.pdf acesso em: 29 de jun. de 2025

Termos D:

$$D + 10D + 100D = 111D$$

Então, a soma é:

$$111A + 111B + 111C + 111D = 2331$$

Podemos fatorar 111:

$$111(A + B + C + D) = 2331$$

Agora, para encontrar $A + B + C + D$, podemos dividir 2331 por 111.

<u>Terceira etapa: Executar o Plano:</u>

1. Descrevendo a equação a equação:

$$111\ (A + B + C + D) = 2331$$

2. Dividindo ambos os lados por 111:

$$A + B + C + D = \frac{2331}{111}$$

3. Efetuando a divisão:

$$2331 \div 111 = 21$$

Então, A + B + C + D = 21.

<u>Quarta etapa: Revisar a solução:</u>

Para revisar a solução fazemos perguntas como: a solução faz sentido? A, B, C e D são dígitos únicos diferentes de zero. A soma deles sendo 21 é plausível (por exemplo, $1 + 2 + 9 + 9$, mas lembre-se de que devem ser dígitos *diferentes* . Por exemplo, $3 + 4 + 7 + 7$ é 21, ainda não distinto. No entanto, $1 + 5 + 7 + 8 = 21$ é um conjunto válido de dígitos distintos diferentes de zero). Vamos verificar o cálculo: $111 \times 21 = 2331$. Isso confirma que a divisão está correta.

A lógica se mantém: ao expandir os números e somá-los, identificamos corretamente que cada dígito (A, B, C, D) aparece em cada valor posicional (centenas, dezenas, unidades) exatamente uma vez nos quatro números. Isso nos leva ao fator de 111.

Desta forma podemos concluir que o valor de A + B + C + D é 21.

Análise da resolução de acordo com o método: A questão, exigia a determinação da soma de quatro algarismos distintos e não-zero a partir de uma operação de adição complexa. A aplicação do método de Polya revelou-se eficaz. A fase de **compreensão** permitiu identificar as características dos algarismos. O **planejamento** direcionou a estratégia para a expansão dos números por valor posicional e a subsequente simplificação algébrica. A **execução** foi um processo direto de isolamento da incógnita, e a **verificação** confirmou a correção do resultado.

ÁREA: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Figura 4: Questão 16 - OBMEP - Nível II - 2019:

16. Uma mesa circular tem seis lugares com cadeiras de cores diferentes. De quantos modos três casais de namorados podem ocupar esses seis lugares de forma que os três rapazes fiquem juntos e as três moças também, mas nenhum rapaz fique junto de sua namorada?

A) 36
B) 54
C) 72
D) 108
E) 144

Fonte: Prova nível II OBMEP 2019[4]

<u>Primeira Etapa: Entender o problema</u>

Temos 6 cadeiras coloridas, então cada cadeira é diferente da outra. Temos 3 rapazes (vamos chamar de R_1, R_2, R_3 e 3 moças M_1, M_2, M_3. R_1 é namorado de M_1, R_2 de M_2, R_3 de M_3. Rapazes juntos significa que eles formam um grupo de 3 pessoas, tipo RRR. Moças juntas significa que elas formam outro grupo de 3 pessoas, tipo MMM. "Nenhum cara do lado da namorada" significa que, por exemplo, se R_1 está na ponta do grupo dos rapazes, M_1 não pode

[4] Disponível em: pf1n2-2019.pdf Acesso em: 29 de jun. de 2025

estar na ponta do grupo das moças que está bem ao lado dele.

Segunda etapa: Elaboração de um plano;

Dividindo o problema formulando as seguintes perguntas:

Parte 1: Onde ficam os grupos? (Pensar nos 2 grupos de 3 pessoas)

Parte 2: Como os rapazes se misturam dentro do grupo deles? (Pensar só nos 3 rapazes)

Parte 3: Como as moças se misturam dentro do grupo delas, mas sem sentar perto do namorado?

Etapa três: Executar o Plano:

Parte 1: Onde ficam os grupos dos rapazes e das moças? Imagine as 6 cadeiras como caixinhas numeradas: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Como as cadeiras têm cores diferentes, elas são especiais. Se os rapazes sentam nas cadeiras 1, 2, 3 é diferente de eles sentarem nas 2, 3, 4.

Os rapazes podem ocupar as cadeiras (1, 2, 3). Se eles fazem isso, as moças ficam nas (4, 5, 6). Ou os rapazes podem ocupar (2, 3, 4). Aí as moças ficam nas (5, 6, 1).

Podemos escolher a primeira cadeira para o primeiro rapaz do grupo dos rapazes de 6 maneiras diferentes (cadeira 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6). Uma vez que a primeira cadeira é escolhida, as outras duas para o grupo dos meninos são as próximas, e as 3 para as meninas são as que sobram. Então, existem **6 maneiras** de posicionar os grupos de rapazes e moças ao redor da mesa.

Parte 2: Como os rapazes se misturam dentro do grupo deles? Temos 3 rapazes (R_1, R_2, R_3) para sentar em 3 cadeiras que já foram escolhidas para eles. Na primeira cadeira do grupo, pode sentar R_1, $R_2\ ou\ R_3$ (3 opções). Na segunda cadeira, sobram 2 rapazes (2 opções). Na terceira cadeira, sobra 1 rapaz (1 opção). Então, os rapazes podem sentar de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.

Parte 3: Como as moças se misturam dentro do grupo delas, mas sem sentar perto do namorado? Vamos pegar um exemplo de como os rapazes sentaram, tipo (R_1, R_2, R_3) nas cadeiras do grupo deles. As moças (M_1, M_2, M_3) vão sentar nas cadeiras do grupo delas.

Analisando a regra "nenhum cara ao lado da namorada" temos que:

O rapaz que está na *última cadeira do grupo dos rapazes* (neste exemplo, R_3) não pode ter a sua namorada (M_3) sentada na *primeira cadeira do grupo das moças*. O rapaz que está na *primeira cadeira do grupo dos rapazes* (neste exemplo, R_1) não pode ter a sua namorada (M_1) sentada na *última cadeira do grupo das moças*. Vamos pensar em todas as maneiras que as moças podem sentar ($3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras no total) e depois tirar as maneiras "ruins": Desta forma, as 6 maneiras das moças sentarem são:

1. M_1, M_2, M_3
2. M_1, M_3, M_2
3. M_2, M_1, M_3
4. M_2, M_3, M_1
5. M_3, M_1, M_2
6. M_3, M_2, M_1

Agora, quais destas opções não são boas para o arranjo (R_1, R_2, R_3):

- **Ruim 1:** Se M_3 (namorada de R_3) senta na primeira posição do grupo das moças. As combinações seriam: M_3, M_1, M_2 e M_3, M_2, M_1. **(2 maneiras ruins)**
- **Ruim 2:** Se M_1 (namorada de R_1) senta na última posição do grupo das moças. As combinações seriam: M_2, M_3, M_1 e M_3, M_2, M_1 . **(2 maneiras ruins)**

A combinação M_3, M_2, M_1 apareceu como ruim nas duas situações. Não podemos contar ela duas vezes. Então, as maneiras "ruins" são: M_3, M_1, M_2; M_3, M_2, M_1; M_2, M_3, M_1 . Total de maneiras "ruins" = **3 maneiras**. Se o total de maneiras que as moças podem sentar é

6, e 3 delas são "ruins", então as maneiras "boas" (que seguem a regra) são: 6 (total) - 3 (ruins) = **3 maneiras**. Então, para cada forma que os rapazes sentam, as moças têm 3 maneiras "boas" de sentar.

Para encontrar o total de maneiras, multiplicamos as possibilidades de cada parte:

Total = (Maneiras de posicionar os grupos) × (Maneiras de arrumar os meninos) × (Maneiras de arrumar as moças gostosas)

Total $= 6 \times 6 \times 3 = 108$ maneiras.

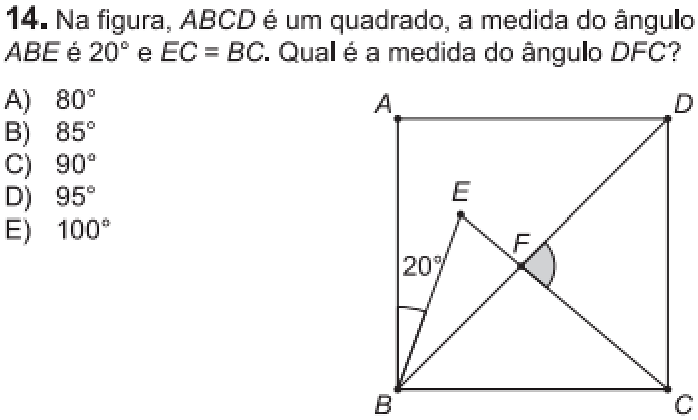
Quarta etapa: Revisar a Solução

Contamos que as cadeiras são diferentes? Sim, usamos o 6 na primeira parte. Os rapazes ficaram juntos e as moças juntas? Sim, pensamos neles como grupos. A parte de "nenhum rapaz ao lado da namorada" foi a mais complicada, mas dividimos ela e tiramos as situações proibidas. O resultado de 108 é um número grande, mas é possível para tantas escolhas.

Análise da resolução de acordo com o método: A questão, envolvia um desafio de combinatória com arranjos em uma mesa circular e várias restrições, o uso do método de Polya foi essencial. Primeiramente, na etapa de compreensão, foi fundamental entender que as cadeiras eram distintas e que existiam regras específicas, como o agrupamento de pessoas e a proibição de que casais sentassem juntos. No planejamento, o problema foi dividido em etapas menores: definir o posicionamento dos grupos, organizar os rapazes dentro dos grupos e, por fim, organizar as moças, utilizando o Princípio da Inclusão-Exclusão para lidar com a restrição dos casais. Na execução, seguimos cuidadosamente esse plano, aplicando os conceitos e cálculos necessários, e na verificação, conferimos se todas as condições foram corretamente atendidas.

ÁREA: GEOMETRIA

Figura 5: Questão 14 - OBMEP - Nível II - 2019:



14. Na figura, *ABCD* é um quadrado, a medida do ângulo *ABE* é 20° e *EC* = *BC*. Qual é a medida do ângulo *DFC*?

A) 80°
B) 85°
C) 90°
D) 95°
E) 100°

Fonte: Prova Nível II OBMEP 2019[5]

<u>Primeira etapa: Entender o problema:</u>

ABCD é um quadrado. Isso implica que todos os lados são iguais: $AB = BC = CD = DA$ e todos os ângulos internos medem 90°. A medida do ângulo $\widehat{ABE} = 20°$. $EC = BC$. Como BC é um lado do quadrado, EC tem o mesmo comprimento de um lado do quadrado. F é o ponto de interseção da diagonal BD e o segmento CE. Precisamos encontrar a medida do ângulo $\widehat{DFC}$.

<u>Segunda etapa: Elaboração de um plano:</u>

Para encontrar a medida do ângulo $\widehat{DFC}$, precisamos primeiro determinar o ângulo $\widehat{EBC}$. Depois precisamos utilizar a informação EC = BC para encontrar os ângulos do triângulo. Vamos também utilizar as propriedades da diagonal de um quadrado. E por fim, com os ângulos conhecidos, calcular os ângulos do triângulo DFC.

<u>Terceira etapa: Executar o plano:</u>

Passo 1: Encontrar $\widehat{EBC}$**:** Como $ABCD$ é um quadrado, sabemos que $\widehat{ABC} = 90°$. É dado que $\widehat{ABE} = 20°$. Assim, o ângulo $\widehat{EBC}$ é a diferença entre $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ABE}$:

$$\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 90° - 20° = 70°$$

---

[5] Disponível em: pf1n2-2019.pdf Acesso em: 29 de jun. de 2025

Passo 2: Encontrar os ângulos do triângulo BCE**:** É dado que $EC = BC$. Isso significa que o triângulo BCE é isósceles de base BE. Em um triângulo isósceles, os ânguloda gase são congruentes. Portanto, o ângulos $B\widehat{E}C$ e $E\widehat{B}C$ são congruentes. Então, $B\widehat{E}C = E\widehat{B}C = 70°$. A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Assim, podemos encontrar $B\widehat{C}E$:

$$B\widehat{C}E = 180° - (E\widehat{B}C + B\widehat{E}C) = 180° - (70° + 70°) = 180° - 140° = 40°$$

Passo 3: Utilizar as propriedades da diagonal BD: No quadrado ABCD, a diagonal BD bissecta o ângulo $A\widehat{B}C$. Portanto, $D\widehat{B}C = \frac{A\widehat{B}C}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$. Como o ponto F está na diagonal BD, o ângulo $F\widehat{B}C$ é o mesmo que $D\widehat{B}C$. Então, $F\widehat{B}C = 45°$.

Passo 4: Encontrar $D\widehat{F}C$ (usando o triângulo BFC): Consideremos o triângulo BFC.

$$F\widehat{B}C = 45°$$

$$B\widehat{D}F = B\widehat{C}E = 40°$$

A soma dos ângulos internos do triângulo BFC é $180°$:

$$B\widehat{F}C = 180° - (F\widehat{B}C + B\widehat{C}F) = 180° - (45° + 40°) = 180° - 85° = 95°$$

Finalmente, como B, F e D são colineares, temos que o ângulo $D\widehat{F}C$ e o ângulo $B\widehat{F}C$ são ângulos adjacentes e suplementares, pois eles formam um ângulo raso na linha BD. Assim, $D\widehat{F}C$ e $B\widehat{F}C$ são suplementares: $D\widehat{F}C + B\widehat{F}C = 180°$ e $D\widehat{F}C = 180° - B\widehat{F}C = 180° - 95° = 85°$.

<u>Etapa quatro: Revisar a Solução</u>

Para verificar a solução, podemos também calcular os ângulos do triângulo DFC:

$F\widehat{D}C = B\widehat{D}C$. Como BD é uma diagonal do quadrado ABCD, $B\widehat{D}C = 45°$. Então, $F\widehat{D}C = 45°$. Temos que $F\widehat{C}D = B\widehat{C}D - B\widehat{C}E = 90° - 40° = 45°$. A soma dos ângulos internos do triângulo DFC deve ser $180°$. Logo,

$$\widehat{DFC} = 180° - (\widehat{FDC} + \widehat{FCD}) = 180° - (45° + 50°) = 180° - 95° = 85°.$$

Ambos os métodos levam ao mesmo resultado, o que aumenta a confiança na solução. A resposta de 85° é um ângulo agudo, consistente com a representação na figura. Portanto a medida do ângulo $\widehat{DFC} = 85°$.

Análise da resolução de acordo com o método: A aplicação do Método de Polya foi útil para a resolução deste problema geométrico, transformando uma questão potencialmente complexa em uma sequência lógica e gerenciável de passos. Ao iniciar com a fase de "Entender o Problema", foi possível desmembrar o enunciado em dados explícitos e o objetivo a ser alcançado, solidificando a compreensão das propriedades do quadrado e das relações de igualdade de lados. A etapa de "Elaborar um Plano" foi crucial para a organização do raciocínio, permitindo a pré-visualização das conexões entre os ângulos e as figuras (triângulos isósceles, diagonais do quadrado), e direcionando a escolha das operações matemáticas subsequentes, inclusive com a capacidade de auto conferência de interpretações iniciais. A "Execução do Plano" seguiu a trilha delineada, garantindo a aplicação sistemática das leis da geometria, enquanto a fase final de "Revisar e Verificar" proporcionou uma validação robusta da solução, empregando uma abordagem alternativa para confirmar a consistência dos resultados e reforçar a confiança na exatidão da resposta obtida.

5.1.2. ANÁLISE DAS QUESTÕES DA OMOC

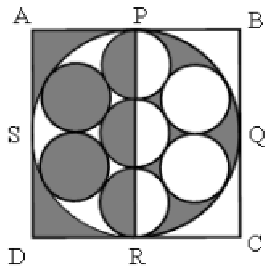
Nesta seção, serão apresentadas e analisadas duas questões selecionadas da Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense (OMOC). As questões escolhidas pertencem às áreas de **Geometria** e **Probabilidade**, e foram selecionadas com base na sua relevância para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade analítica dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

ÁREA GEOMETRIA

Figura 6: Questão 5 - Nível II - Segunda Fase - IV OMOC 2022

QUESTÃO 5:

Na figura ABCD é um quadrado de lado 12cm. No interior da circunferência maior, há 7 circunferências menores de raio 2 cm, tangentes entre si. Os pontos P, Q, R e S são os pontos de tangência do quadrado ABCD com a circunferência, e também são os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA, respectivamente.



OBS: Área do círculo: $\pi \times r^2$, r é o raio e π pode ser usado como $\pi = 3,14$.

a) Qual a área da região sombreada?

b) Determine a área da circunferência de raio 6 cm e de uma circunferência de raio 2 cm.

c) Determine a área da região sombreada interior ao quadrado e exterior à circunferência de raio 6 cm.

d) Determine a área da região sombreada interior à circunferência de raio 6 cm e exterior às circunferências de raio 2 cm.

Fonte: Prova OMOC segunda fase, nível II ano 2022[6]

<u>Primeira etapa: Entender o problema:</u>

Nesta etapa, as informações essenciais são coletadas: um quadrado ABCD de 12 cm de lado, uma circunferência maior inscrita com raio de 6 cm (confirmado pelos pontos de tangência P, Q, R, S nos pontos médios dos lados), e a presença de sete circunferências menores de 2 cm de raio dispostas dentro da maior. A fórmula para a área de um círculo (πr^2)

[6] Disponível em prova_nivel_ii_prova (1).pdf acesso em 01 de jul. de 2025

é fornecida. O problema solicita, especificamente, as áreas de uma circunferência de 6 cm e de uma de 2 cm (parte b), a área sombreada dentro do quadrado e fora da circunferência de 6 cm (parte c), e a área sombreada dentro da circunferência de 6 cm e fora das sete circunferências de 2 cm (parte d). Uma suposição chave, baseada na simetria visual da figura, é a de que as áreas sombreadas correspondem à metade da área da região total onde se inserem.

<u>Segunda etapa: Elaboração de um Plano:</u>

a) Precisamos calcular a área total do quadrado, dividir a área do quadrado por 2, assumindo a suposição de que a área sombreada é a metade da área total.
b) Calcular diretamente a área de uma circunferência de 6 cm e de uma de 2 cm usando a fórmula πr^2 e os valores dados.
c) **Área sombreada (dentro do quadrado, fora do círculo maior):** Calcular a área do quadrado e a área da circunferência maior. A área sombreada será a metade da diferença entre a área do quadrado e a área da circunferência maior, devido à simetria.
d) **Área sombreada (dentro do círculo maior, fora dos 7 círculos menores):** Calcular a área da circunferência maior e a área total das sete circunferências menores. A área sombreada será a metade da diferença entre a área da circunferência maior e a área total das sete circunferências menores, também pela simetria da disposição.

<u>Terceira etapa: Executar o plano:</u>

a) Calcular a Área do Quadrado. O lado do quadrado é 12 cm. Vamos chamar a área do quadrado de A_Q:

$$A_Q = 12cm \times 12cm = 144cm^2.$$

Calcular a Área da Região Sombreada.

De acordo com a simetria apresentada na nova solução, a área da região sombreada é a metade da área do quadrado. Vamos chamar a Área Sombreada de A_{somb}:

$$A_{somb} = \frac{A_Q}{2} = \frac{144}{2} = 72cm^2.$$

b) Calculando a área da circunferência de raio 6 cm, raio = 2 cm, vamos chamar de A_{C1}, R o raio da circunferência 1

$$Área\ (A_{C1})\ =\ \pi R^2\ =\ 3,14\ \times 6^2\ =\ 3,14364\ =\ 133,04cm^2.$$

Calcular a área da circunferência de raio 2 cm, vamos chamar de A_{C2}

$$Área(A_{C2})\ =\ \pi r^2\ =\ 3,14\ \times\ 2^2\ =\ 3,14\ \times\ 4\ =\ 12,56cm^2.$$

c) Área do quadrado (A_Q)= $144cm^2$

Área do círculo grande: A_{C1}, $raio\ \ =\ 6cm$

$$A_{C1}\ =\ \pi r^2\ =\ 3,14\ \times\ 6^2\ =\ 36\pi$$

Fazendo a diferença entre a área do quadrado e a área do círculo grande:

$$A_{diferença} = A_Q - A_{C1}\ =\ 144\ -\ 36\pi cm^2$$

Dividindo essa diferença por 2:

A declaração do problema, apoiada pela imagem, implica que a região *dentro* do quadrado, mas *fora* do círculo, é dividida em quatro partes simétricas (os cantos). A parte sombreada dessa região "externa" parece ser metade dela.

Região sombreada (fora do círculo, dentro do quadrado) = $\frac{A_q - A_{C1}}{2}\ =\ \frac{144-36\pi}{2}$

Substituindo $\pi\ =\ 3,14$

$$\frac{144-36\times3,14}{2} = \frac{144-113,04}{2} = \frac{30,96}{2}\ =\ 15,48cm^2$$

d) Área do círculo grande (A_{C1})= $36\pi cm^2$

Área de um pequeno círculo (A_{C2}): Raio = 2 cm

$$A_{C2}\ =\ \pi r^2\ =\ \pi 2^2\ =\ 4\pi cm^2$$

Área total dos sete círculos pequenos (A_{7C2}): Há 7 círculos desse tipo.

$$A_{7C2} = 7 \times 4\pi cm^2 = 28\pi cm^2$$

Fazendo a diferença entre a área do círculo grande e a área total dos sete círculos pequenos:

$$A_{diferença} = A_{C1} - A_{7C2} = 36\pi - 28\pi = 8\pi cm^2$$

Dividindo essa diferença por 2: A declaração do problema, apoiada pela imagem (do contexto anterior), sugere que a região sombreada dentro do círculo grande e fora dos círculos pequenos é metade dessa diferença total devido à simetria.

Determinando a região sombreada (dentro de C1, fora de 7C2) = $A_{diferença} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi cm^2$

Substituindo o valor de $\pi = 3,14$

$$4\pi = 4 \times 3,14 = 12,56 cm^2$$

<u>Etapa quatro: Revisar a Solução:</u>

a) **Validade da suposição:** A afirmação "cada parte branca da figura apresenta uma parte cinza da mesma área". Logo, a região sombreada é a metade da área do quadrado". Geometricamente, se a disposição dos elementos (círculos menores, áreas brancas e sombreadas) é tal que existe uma simetria perfeita que troca a área sombreada pela área não sombreada através de um eixo (como PR ou QS), então a conclusão de que a área sombreada é metade da área total é válida. A figura parece suportar essa ideia para os círculos menores e as áreas adjacentes.
b) Os raios (6 cm e 2 cm) e o valor de π (3,14) foram aplicados corretamente na fórmula da área. Logo, a área da circunferência de raio 6 cm é $113,04 cm^2$. A área da circunferência de raio 2 cm é $12,56 cm^2$.
c) A resposta faz sentido? A área total do quadrado é $144 cm^2$. A área do círculo inscrito é de aproximadamente $113 cm^2$. A diferença é de cerca de $31 cm^2$. Estamos procurando a metade dessa diferença, que é cerca de $15,5 cm^2$. Nossa resposta de

$15,48cm^2$ é consistente com isso. Respondemos a pergunta completamente? Sim, determinamos a área da região sombreada interna ao quadrado e externa à circunferência de raio 6 cm. Portanto, a área da região sombreada interna ao quadrado e externa à circunferência de raio 6 cm é $15,48cm^2$.

d) A área do círculo maior é de aproximadamente $113cm^2$. A área total dos 7 círculos menores é de aproximadamente $88cm^2$. A diferença é de aproximadamente $25cm^2$. Estamos procurando a metade dessa diferença, que é de aproximadamente $12,5cm^2$.

Análise da resolução de acordo com o método: A questão selecionada da OMOC, pertencente à área de Geometria, aborda propriedades de figuras planas, especificamente do quadrado, exigindo do estudante a aplicação de conceitos como ângulos internos, simetria, congruência de triângulos e relações métricas. A partir da leitura atenta do enunciado e da observação da figura fornecida, o aluno é levado a identificar quais informações são relevantes e quais propriedades geométricas podem ser utilizadas para chegar à solução. O planejamento da resolução envolveu reconhecer elementos-chave da figura, como diagonais, ângulos opostos pelo vértice ou ângulos suplementares, e estabelecer estratégias baseadas nas características geométricas do quadrado. A execução do plano consiste na aplicação ordenada desses conhecimentos, por meio de deduções lógicas e eventualmente construções auxiliares, como traçados adicionais ou identificação de triângulos notáveis. Por fim, a revisão da solução permite verificar a coerência dos passos dados, o uso correto das propriedades e a consistência do resultado final. A resolução da questão utilizando o método de Polya evidencia sua efetividade ao organizar o raciocínio do aluno de maneira sistemática, favorecendo o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia, competências essenciais tanto para o contexto olímpico quanto para o ensino regular de matemática.

Figura 7: Questão 3 - Nível II - Segunda Fase - IV OMOC 2022

QUESTÃO 3:

Três prisioneiros (com excelentes habilidades em lógica Matemática) têm a chance de sair da prisão. Um deles enxerga bem com os dois olhos, o outro enxerga somente com um olho e o terceiro é cego.

O carcereiro falou aos prisioneiros que entre três chapéus marrons e dois rosa, pegaria três e colocaria sobre as cabeças deles, mas não permitiria que ninguém olhasse a cor do chapéu sobre a própria cabeça, apenas os dos outros presos. O carcereiro reuniu os três prisioneiros com os chapéus na cabeça e ofereceu-lhes a liberdade, desde que algum deles soubesse a cor do chapéu na própria cabeça. O primeiro prisioneiro a falar foi o que enxergava com os dois olhos.

a) Qual seria a situação que poderia garantir ao primeiro prisioneiro acertar o chapéu que ele usava?

b) O primeiro prisioneiro negou saber a resposta. Assim, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho. Quais as cores que ele precisaria ver nos chapéus dos outros presos que permitiria que ele acertasse a cor do seu próprio chapéu? Nesse caso, qual deveria ser essa cor do seu próprio chapéu?

c) Levando em consideração que o primeiro e o segundo prisioneiros não souberam responder, o carcereiro nem se preocupou em fazer a pergunta ao prisioneiro cego, mas este afirmou que sabia a cor do chapéu na própria cabeça. Qual era essa cor?

Fonte: Prova OMOC segunda fase nível II 2022[7]

Primeira etapa: Entender o problema:

a) Chamando de P1, P2 e P3 os prisioneiros e M os chapéus marrons e R os chapéus rosas. O problema pede uma configuração específica dos chapéus nas cabeças dos prisioneiros que permitiria ao primeiro prisioneiro (P1), que enxerga os outros dois, deduzir com 100% de certeza a cor do seu próprio chapéu. P1 deve ser capaz de fazer essa dedução sem qualquer informação adicional de P2 ou P3, ou seja, apenas observando os chapéus deles e sabendo as regras do jogo e o número total de chapéus

[7] Disponível em prova_nivel_ii_prova (1).pdf acesso em 01 de jul. de 2025

de cada cor. A chave está nas cores limitadas (apenas 2 rosas).

b) A informação crucial aqui é que P1 negou saber a resposta. Isso significa que a situação que daria certeza a P1 (ver (R, R) em P2 e P3) **não ocorreu**. P2, sendo lógico, sabe disso. P2 vê P1 e P3, e deve usar essa nova informação (o silêncio de P1) para deduzir sua própria cor. Pede-se a configuração que garantiria P2 acertar e qual seria sua cor.
c) Agora, P3 (o cego) tem a informação de que P1 negou e P2 negou. P3 não vê nada, então sua dedução depende exclusivamente da lógica e das informações comunicadas (os silêncios). Pede-se a cor do chapéu de P3.

<u>Segunda etapa: Elaboração de um plano:</u>

a) Para P1 ter certeza absoluta, ele deve ver uma configuração nos chapéus de P2 e P3 que elimine qualquer ambiguidade sobre seu próprio chapéu. Vamos considerar todas as combinações possíveis de 3 chapéus selecionados (3M, 2R) e analisar o que P1 veria em cada caso para determinar se ele conseguiria deduzir a cor do seu próprio chapéu. P1 consegue deduzir se apenas uma cor for logicamente possível para o seu chapéu, dadas as cores que ele vê nos outros e o número total de chapéus de cada cor.
b) Vamos reanalisar as combinações de chapéus, descartando aquelas que teriam feito P1 falar. Em seguida, simulamos o raciocínio de P2, considerando o que ele vê e o fato de P1 ter negado. P2 só saberá se a cor do seu chapéu for a única logicamente possível após considerar o que P1 sabe e não fez.
c) Vamos listar as combinações possíveis de chapéus e, em cada etapa, eliminar as que seriam inconsistentes com as não-respostas de P1 e P2. Se restar apenas uma possibilidade para o chapéu de P3, ele poderá deduzir a cor.

<u>Terceira etapa: Executar do plano:</u>

a) **Caso 1: (M, M, M)** (3 chapéus marrons)

Se P1 vê (M, M) em P2 e P3: P1 não pode ter certeza. Seu chapéu pode ser M (se a combinação for M, M, M) ou R (se a combinação fosse M, M, R - mas essa não existe com 3 Marrons). P1 sabe que há 3 chapéus marrons disponíveis. Se ele vê M, M, seu chapéu pode ser M.

Caso 2: (M, M, R) (2 chapéus marrons e 1 rosa, em qualquer ordem)

Se P1 vê (M, R) em P2 e P3 (ou (R, M)): P1 não pode ter certeza. Seu chapéu pode ser M (se a combinação for M,M,R) ou R (se a combinação fosse R,M,R - mas essa exigiria 2 chapéus rosas para ele e para P3, o que deixaria 0 chapéus rosas para P2). P1 pensa: "Se meu chapéu é M, a combinação é M,M,R. Se meu chapéu é R, a combinação é R,M,R (impossível, pois só há 2 Rosas e eu vejo R em P3)." P1 conclui que seu chapéu é Marrom se ele vir (M, R) e raciocinar que se ele fosse R, P3 e ele seriam R, R, o que não seria visto por P2 como uma possibilidade que faria P2 deduzir o próprio chapéu. Esse raciocínio é mais complexo e envolve a não-resposta de P2.

Situação de Certeza para P1: A única situação que garante P1 saber é se ele vê uma combinação nos outros que exaure todas as opções de uma cor limitada. Como há apenas 2 chapéus Rosa no total:

Se P1 vê **(R, R)** em P2 e P3: P1 sabe que P2 e P3 estão com os dois chapéus rosas disponíveis. Portanto, o chapéu de P1 **obrigatoriamente deve ser Marrom (M)** , pois não há mais chapéus rosas. Essa é a única situação que garante a P1 acertar imediatamente.

b) **Dedução pela Negação de P1:** P1 não falou. Isso significa que P1 **NÃO viu (R, R)** em P2 e P3. Portanto, as cabeças de P2 e P3 não podem estar ambas com chapéus rosas. Isso descarta a configuração **(M, R, R)** para (P1, P2, P3), onde P1 veria (R, R) e falaria Marrom.

As combinações restantes após P1 não falar são:

(M, M, M); (M, M, R); (M, R, M); (R, M, M); (D, M, D); (R, R, M).

P2 analisa o que vê (em P1 e P3) e a negação de P1: Se P2 vê (M, M) em P1 e P3: P2 pensa: "Se eu fosse R, a combinação seria (M, R, M). P1 veria (R, M) e não falaria. Se eu fosse M, a combinação seria (M, M, M). P1 veria (M, M) e não falaria. Como P1 não falou em ambos os casos, não consigo ter certeza."

Se P2 vê (M, R) em P1 e P3 (ou R, M): P2 pensa: "Eu vejo um M e um R. Se meu chapéu fosse R, a combinação seria (M, R, R) ou (R, M, R). Mas P1 não falou, o que significa que ele não viu (R, R) em P2 e P3. Se eu fosse R, e P1 e P3 estivessem com (M, R), então P1 veria (R, R) e teria falado que é Marrom."

Momento chave para P2: Se P2 vê **(R em P1, R em P3)**:

P2 pensa: "Eu vejo os dois chapéus Rosa em P1 e P3. Eu sei que só existem 2 chapéus Rosa. Portanto, meu chapéu **precisa ser Marrom (M)**."

P2 então verificaria: "Se meu chapéu é M, a configuração é (R, M, R). P1 viu (M, R) e não falou, o que é consistente. Sim, essa é a única maneira."

Porém, há um detalhe sutil: a negação de P1 já diz que P2 e P3 não são ambos R. Se P2 vê (R em P1, R em P3), então a configuração é (R, *, R). Mas, se P2 e P3 fossem (R, R), P1 já teria falado (se P1 fosse M).

Corrigindo: A negação de P1 significa que P1 **não viu (R,R)** nos outros (P2 e P3). Assim, P2 e P3 não podem ser (R,R).

Para P2 acertar: P2 precisa ver uma combinação que o force a uma única cor.

Se P2 vê **(R em P1, R em P3)** (ou seja, P1 e P3 têm os dois chapéus rosas), P2 sabe imediatamente que o seu chapéu é **Marrom (M)** . Isso porque há apenas 2 chapéus rosas disponíveis.

Essa situação **não é contraditória** com P1 não ter falado. Se a configuração é (R, M, R), P1 vê (M, R) e não tem certeza, então não fala. P2, ao ver (R, R) em P1 e P3, deduz que é M.

Essa é a situação que garantiria P2 acertar.

c) Lista das 7 permutações possíveis de chapéus (P1, P2, P3):

(M, M, M); (M, M, R);(M, R, M); (R, M, M); (M, D, D); (D, M, D); (R, R, M).

P1 não falou: P1 só falaria se visse (R, R) em P2 e P3, o que o faria saber que seu chapéu é M. Isso significa que a combinação **(M, R, R)** é eliminada, pois se P1 estivesse com M e visse R,R, ele teria falado. Restam: (M,M,M), (M,M,R), (M,R,M), (R,M,M), (R,M,R), (R,R,M).

P2 não falou: P2 sabe que P1 não falou. P2 só falaria se visse (R, R) em P1 e P3, o que o faria saber que seu chapéu é M. Isso elimina a combinação **(R, M, R)** (P1:R, P2:M, P3:R). Pois nesta P2 veria (R, R) em P1 e P3, e ele teria falado que seu chapéu é M. Isso elimina a combinação **(R, R, M)** (P1:R, P2:R, P3:M). Pois nesta P2 veria (R, M) em P1 e P3.

Se P2 fosse M, seria (R,M,M). Se P2 fosse R, seria (R,R,M).

Refinando: P2 não fala. Isso significa que, se P2 visse (R,R) em P1 e P3, ele teria falado. P2 não falou. A configuração (R,M,R) seria aquela em que P2 veria (R,R) e falaria. Então, (R,M,R) é eliminada.

A configuração (R,R,M) não seria eliminada por P2, pois P2 veria (R,M) e não saberia.

A chave é: Se P2 estivesse em (R,R,M), ele veria (R,M). Se o seu chapéu fosse M, seria (R,M,M). P1 teria visto (M,M) e não falaria. Se o seu chapéu fosse R, seria (R,R,M). P1 teria visto (R,M) e não falaria. P2 não consegue deduzir. Portanto, o silêncio de P2 é consistente com (R,R,M).

Vamos reavaliar as eliminações com base em silêncios:

P1 não falou: (P1 não viu (R,R) em P2 e P3)

Elimina: **(M, R, R)** (P1 é M, P2 é R, P3 é R).

Permitir: (M,M,M), (M,M,R), (M,R,M), (R,M,M), (R,M,R), (R,R,M).

P2 não falou: (P2 sabe que P1 não falou, e P2 não viu (R,R) em P1 e P3)

P2 sabe que a situação (M,R,R) foi descartada.

P2 só falaria se ele visse (R,R) (em P1 e P3). A única configuração restante onde P2 vê (R,R) é (R,M,R).

Portanto, **(R,M,R)** é eliminada porque P2 teria falado se estivesse nela.

Restam para P3 considerar: (M,M,M), (M,M,R), (M,R,M), (R,M,M), (R,R,M).

P3 (o cego) deduz: P3 sabe que uma dessas 5 combinações restantes é a verdadeira. P3 não vê nada.

P3 pensa: "Se meu chapéu fosse Marrom (M):"

As combinações restantes onde P3 tem chapéu Marrom são:

(M, M, M); (M, R, M); (R, M, M); (R, R, M).

Se P3 tivesse um chapéu Marrom, ele não teria como saber qual dessas 4 é a correta apenas pelo silêncio de P1 e P2. P1 e P2 não falariam em nenhuma dessas situações.

P3 pensa: "Se meu chapéu fosse Rosa (R):"

A única combinação restante onde P3 tem chapéu Rosa é: **(M, M, R)**

Como P3 sabe que ele conseguiu deduzir (ele afirmou que sabia), e a única forma de ele deduzir é se a sua cor fosse a única "possibilidade sobrevivente", ele conclui que seu chapéu deve ser Rosa.

Quarta etapa: Revisar a Solução:

a) Se P1 vê (R, R) em P2 e P3, a lógica é irrefutável: como só existem dois chapéus rosas, e P1 os vê, seu próprio chapéu só pode ser marrom. Qualquer outra combinação (M, M; M, R; R, M) não daria a P1 certeza imediata, pois seu próprio chapéu poderia ser de qualquer cor sem violar as regras dos chapéus visíveis. Portanto, a situação que garante P1 acertar é a de ele ver dois chapéus rosas nos outros.
b) A negação de P1 significa que P1 não viu (R, R) nas cabeças de P2 e P3. P2 e P3 não estão ambos com chapéus rosas. P2 sabe disso. Se P2, ao ver P1 e P3, observa que ambos têm chapéus rosas (R em P1, R em P3), P2 pode concluir imediatamente que seu chapéu é Marrom (M). Isso não contradiz a negação de P1 (pois P1 não veria (R,R), veria (R,M) ou (M,R) dependendo de quem é quem). Portanto, as cores que P2 precisaria ver nos chapéus dos outros seriam **Rosa e Rosa (R, R)** . Nesse caso, a cor do chapéu de P2 seria **Marrom (M)** .
c) O raciocínio de P3 é uma metadedução. Ele não vê, mas sabe que P1 e P2, que podem ver, não conseguiram deduzir.

   P1 não falou $\Rightarrow$ P1 não viu (R,R).

   P2 não falou $\Rightarrow$ P2 não viu (R,R). (Isso elimina (R,M,R)). Após essas eliminações, as únicas configurações restantes onde P3 é Rosa é (M, M, R). Se P3 fosse Marrom, haveria múltiplas configurações possíveis (M,M,M; M,R,M; R,M,M; R,R,M), e ele não poderia ter certeza. O fato de P3 saber implica que ele está na situação única, ou seja, seu chapéu é Rosa.

Análise da resolução de acordo com o método: A segunda questão selecionada da OMOC pertence à área de Probabilidade e propõe uma situação combinatória com restrições específicas, envolvendo arranjos em cadeiras e condições de posicionamento de pares. Este tipo de problema requer do estudante não apenas o domínio de conceitos básicos de contagem e probabilidade, mas também a habilidade de interpretar condições adicionais que limitam o número de casos possíveis. A compreensão do problema exige atenção à forma como os elementos estão organizados e àquilo que deve ou não ocorrer — por exemplo, o fato de determinados pares não poderem estar lado a lado. O plano de resolução inclui a decomposição do problema em etapas menores, como determinar a quantidade de maneiras de organizar os grupos (com ou sem restrição), aplicar a ideia de grupos fixos e utilizar o princípio multiplicativo da contagem.

Na execução, o estudante realiza os cálculos combinatórios com base nas decisões tomadas, considerando simetrias, casos distintos e, se necessário, subtraindo os arranjos indesejados do total possível. A revisão da solução permite confirmar se todos os casos foram contemplados e se as restrições foram respeitadas em cada uma das etapas do raciocínio. A utilização do método de Polya nesta questão evidenciou sua capacidade de guiar o estudante por um caminho lógico e organizado, especialmente útil em problemas de probabilidade com múltiplas condições, contribuindo para o desenvolvimento da clareza na argumentação e da precisão nos cálculos — habilidades fortemente exigidas em olimpíadas de matemática.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho permitiu compreender de forma aprofundada como o método de Polya pode ser uma ferramenta poderosa na resolução de problemas matemáticos, tanto no contexto das olimpíadas quanto no ensino formal da matemática. A partir da análise das questões aplicadas e da revisão sistemática da literatura, observou-se que o método contribui significativamente para o desenvolvimento de competências como raciocínio lógico, pensamento crítico, autonomia e capacidade de argumentação dos estudantes.

De acordo com Polya (1995, p. 6), "resolver um problema significa encontrar um caminho para alcançar um objetivo que não é imediatamente alcançável". Essa definição reflete exatamente o que foi observado ao aplicar suas quatro etapas — compreensão, elaboração de um plano, execução e revisão — em problemas matemáticos de diferentes níveis. O método proporciona aos alunos uma sequência lógica que os ajuda não só a resolver o problema, mas também a refletir sobre o processo, identificando possíveis erros, alternativas e generalizações.

A análise realizada, embora centrada em problemas de olimpíadas, indica que o método de Polya possui potencial para ser explorado também no ensino regular, considerando sua estrutura didática e o favorecimento de habilidades como o raciocínio lógico, a autonomia e o pensamento crítico, mesmo que este aspecto não tenha sido diretamente investigado nesta pesquisa. Tal abordagem contribui não apenas para o desenvolvimento cognitivo, mas também para a formação de alunos mais autônomos, curiosos e preparados para lidar com desafios.

Um ponto relevante observado na revisão sistemática é que, embora alguns trabalhos, como os de Fernandes (2021) e Borges (2024), enfoquem diretamente na aplicação do método em contextos olímpicos, outros autores, como Silva et al. (2021) e Oliveira Junior et al. (2022), destacam o papel das olimpíadas na melhoria do ensino da matemática de forma mais ampla, ainda que sem aprofundar na utilização sistemática das etapas de Polya. Isso mostra que ainda há espaço para a expansão de pesquisas que integrem metodologias de resolução de problemas com práticas escolares cotidianas.

Como destaca Polya (2006, p. 16), "se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isso deve auxiliá-lo discretamente". Esta reflexão reforça a importância do papel do professor como mediador do conhecimento, não apenas como transmissor de conteúdo, mas como alguém que incentiva, provoca e conduz os alunos no processo de construção das soluções.

Diante disso, pode-se afirmar que o método de Polya não se limita a uma técnica de resolução, mas se configura como um método de ensino que estimula o protagonismo do aluno, desenvolve habilidades cognitivas superiores e promove uma aprendizagem mais significativa e prazerosa. Isso é particularmente relevante em um cenário educacional que busca formar sujeitos críticos, capazes de pensar, questionar e propor soluções criativas para problemas diversos, seja no contexto acadêmico, nas olimpíadas de matemática ou na vida cotidiana.

Por fim, este trabalho reforça que a prática da resolução de problemas, especialmente quando estruturada em métodos como o de Polya, pode ser cada vez mais incorporada ao cotidiano das salas de aula.

Isso não apenas melhora o desempenho em competições, como também transforma a maneira como os estudantes se relacionam com a matemática, tornando-a uma ferramenta de desenvolvimento intelectual, social e pessoal. Como trabalhos futuros, é possível aplicar e utilizar o método de Polya com os alunos que participam de olimpíadas de matemática, por meio de oficinas, projetos de iniciação científica ou grupos de estudos voltados à resolução de problemas. Essas intervenções permitirão investigar, na prática, os impactos do método sobre o desempenho, a autonomia e a motivação dos estudantes, além de possibilitar a adaptação das estratégias para diferentes perfis de aprendizagem e contextos escolares.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 10520**: informação e documentação: citações em documentos: apresentação. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.

FERNANDES, Alessandra dos Santos. *Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da metodologia de Polya*. 2021. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021.

BOTELHO, Luciana Lemos Ribeiro; CUNHA, Cynthia Cordeiro de Araújo; MACEDO, Marcelo de Oliveira. O método da revisão integrativa nos estudos organizacionais. *Gestão e Sociedade*, Belo Horizonte, v. 5, n. 11, p. 121–136, 2011. DOI: 10.21171/ges.v5i11.1220. Disponível em: https://ges.face.ufmg.br/index.php/gestaoesociedade/article/view/1220. Acesso em: 25 nov. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.

CARLOS, André Borges. *Resoluções de Problemas da Olimpíada Regional Mirim de Matemática utilizando o Método de Polya*. 2024. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Goiás, 2024.

FACHIN, Odília. *Fundamentos de metodologia*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

KILPATRICK, Jeremy. Um relato retrospectivo dos últimos 25 anos de resolução de problemas. In: SILVER, Edward A. (Org.). *O futuro da resolução de problemas*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1985. p. 1-12.

OLIVEIRA JÚNIOR, Manoel Porfírio de; PINHEIRO, Hélio Menezes; BARRETO, Washington Dias Lino. A case study on the application of problem solving techniques in Mathematics Olympiads to improve the teaching of the subject. *Research, Society and Development*, [S. l.], v. 11, n. 6, p. e53611629295, 2022. DOI: 10.33448/rsd-v11i6.29295. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/29295. Acesso em: 25 nov. 2024.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf. Acesso em: 14 nov. 2024.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Princeton: Princeton University Press, 1945.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Resolução de problemas: concepções e implicações para a sala de aula. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Org.). *Resolução de problemas: experiências e pesquisas na formação de professores que ensinam matemática*. São Paulo: Editora da Unesp, 2014. p. 7.

SANTOS, Lucas; SILVA, Mariana. A utilização do método de Polya em competições matemáticas no Brasil. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 32, n. 2, p. 45-58, 2019.

SCHOENFELD, Alan Henry. *Resolução de problemas matemáticos*. Orlando: Academic Press, 1985.

SCHNEIDER, Alexsandro. *Polya e a teoria da resolução de problemas aplicados à educação matemática nos ensinos fundamental e médio*. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2022.

SILVA, Vanúbya Batista da; MARTINS, Glêndara Aparecida de Sousa; TEIXEIRA, Paulo Cléber M.; SILVA, Warley Gramacho da. A importância das olimpíadas de matemática para o ensino médio no contexto da compreensão de conteúdos. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 31, n. 2, p. 45-58, 2021.

SILVER, Edward A. Fundamentos das teorias cognitivas de resolução de problemas. In: SILVER, Edward A. (Org.). *Teorias cognitivas de resolução de problemas matemáticos*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. p. 33-60.

ZHU, Xuhui; SIMON, Herbert Alexander. Aprendendo matemática a partir de exemplos e pela prática. *Cognition and Instruction*, v. 4, n. 3, p. 137-166, 1987.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *Prova da 1ª fase – nível II, 2019*. Questão 16.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *Prova da 1ª fase – nível II, 2019*. Questão 14.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *Prova da 1ª fase – nível II, 2024*. Questão 3.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *Prova da 1ª fase – nível II, 2014*. Questão 15.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *Prova da 1ª fase – nível II, 2014*. Questão 14.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE. *Caderno de Provas – IV OMOC – Segunda Fase – Nível II – 2022*. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/12gl8BJFh17lY6H3SBbbBZMottirLjjKu/view. Acesso em: 2 jul. 2025.