UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CHAPECÓ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUCIANE NEUHAUS DURGANTE

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM INTERATIVO NO ESTUDO DE PROGRESSÕES E FUNÇÕES

CHAPECÓ-SC

2025

LUCIANE NEUHAUS DURGANTE

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM INTERATIVO NO ESTUDO DE PROGRESSÕES E FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração: Matemática na Educação Básica, sob a orientação do Prof. Dr. Vitor José Petry.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

CHAPECÓ-SC

2025

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Durgante, Luciane Neuhaus
REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM INTERATIVO NO ESTUDO DE PROGRESSÕES E FUNÇÕES / Luciane Neuhaus Durgante. -- 2025.
136 f.

Orientador: DOUTOR Vitor José Petry

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó,SC, 2025.

1. Representações semióticas; Progressões aritméticas e geométricas; Funções afins e exponenciais; Objetos virtuais de aprendizagem; Resolução de problemas.. I. Petry, Vitor José, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LUCIANE NEUHAUS DURGANTE

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM INTERATIVO NO ESTUDO DE PROGRESSÕES E FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração: Matemática na Educação Básica, sob a orientação do Prof. Dr. Vitor José Petry.

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 05/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
VITOR JOSE PETRY
Data: 16/12/2025 13:58:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS
Orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
CELIANE COSTA MACHADO
Data: 10/12/2025 11:51:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof[a]. Dr[a]. Celiane Costa Machado – FURG
Avaliadora externa

gov.br Documento assinado digitalmente
ROSANE ROSSATO BINOTTO
Data: 10/12/2025 18:33:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof[a]. Dr[a]. Rosane Rossato Binotto – UFFS
Avaliadora

Aos meus filhos, Johann e Eloah, que são o reflexo mais puro dos sonhos que cultivo!

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pela saúde, proteção e força que me sustentaram ao longo da realização do mestrado. Sou grata pelas bênçãos recebidas em cada etapa desse percurso, que possibilitaram não apenas enfrentar os desafios, mas também alcançar a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao meu esposo Everson e meus filhos Johann e Eloah, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo incentivo e pelo amor incondicional.

À minha mãe Leila, que sempre esteve ao meu lado, compartilhando cada sonho, me incentivando e apoiando.

Ao meu pai Osmar, às minhas irmãs e demais familiares, que mesmo à distância me acompanharam nesta jornada, sempre torcendo por mim e oferecendo apoio constante.

Aos meus colegas de trabalho e amigos por todo apoio e incentivo nessa jornada.

Aos colegas de curso, que foram fundamentais nesta caminhada, compartilhando conhecimentos e proporcionando momentos inesquecíveis. Em especial, agradeço aos parceiros de viagem Samuel e Juciele. À Juciele, pela amizade, pelos encontros de estudo e pelo constante incentivo. À colega Dainara, pela amizade e pelas oportunidades de aprendizado conjunto. À colega Regina, pela amizade e viagem que compartilhamos. Ao colega Lucas, pelos conhecimentos compartilhados, pela amizade e pelo apoio ao longo desta jornada.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Vitor José Petry, pela disponibilidade em acompanhar esta pesquisa, pelo constante incentivo, conselhos e ensinamentos que contribuíram de forma significativa para o meu desenvolvimento como pesquisadora.

Ao corpo docente do PROFMAT, expresso minha eterna gratidão pelos ensinamentos e pela dedicação, que fizeram a diferença em minha formação acadêmica e pessoal.

Aos estudantes da turma 101 do Curso Técnico em Informática, do ano de 2024, agradeço pela dedicação, pelas contribuições e por darem vida a esta pesquisa.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) – Câmpus Chapecó, agradeço pelo compromisso em promover melhorias no ensino de Matemática na Educação Básica, por meio da implementação do PROFMAT.

Alunos, professores e tecnologia interagindo com o mesmo objetivo geram um movimento revolucionário de descobertas e aprendizados (KENSKI, 2012).

RESUMO

Esta pesquisa, de abordagem qualitativa e conduzida na modalidade de pesquisa-ação, teve como objetivo analisar como os estudantes transitaram entre diferentes registros de representação semiótica e de que forma a resolução de problemas e o uso de objetos virtuais de aprendizagem (OVA) podem favorecer esse processo, potencializando a aprendizagem de progressões e funções. A proposta foi desenvolvida ao longo de vinte aulas organizadas em oficinas investigativas, com uma turma do 1º ano do Ensino Médio Técnico em Informática de uma escola pública de tempo integral, localizada no município de Concórdia – SC, envolvendo onze estudantes. Os dados foram produzidos por meio da plataforma GeoGebra Tarefa, registros escritos, imagens e diário de bordo, e analisados com base na técnica de análise de conteúdo. As práticas pedagógicas mediadas por tecnologias digitais (TD), aliadas à resolução de problemas contextualizados, mostraram-se promissoras na construção do conhecimento, conforme os princípios da teoria dos registros de representação semiótica (TRRS). Essa abordagem mobilizou diferentes sistemas de significação, requerendo dos estudantes e do docente, não apenas conversões técnicas, mas também compreensão sobre o funcionamento de cada registro. Os OVA, construídos no software GeoGebra, contribuíram para a identificação de padrões e comportamentos, permitindo aos estudantes manipular parâmetros como razão, termo inicial e número de elementos da progressão aritmética (PA) e da progressão geométrica (PG), assim como estudar relações com as funções afins e exponenciais, de forma rápida, prática e dinâmica. Essa interação favoreceu a observação direta dos efeitos nas representações algébricas e em gráficos, a distinção entre modelos discretos e contínuos, a interpretação de gráficos de funções afins e exponenciais, e a aplicação de fórmulas como a da soma infinita, associando-a aos conceitos de convergência e divergência. Os problemas propostos aprofundaram essa compreensão ao inserir os conteúdos em situações reais e desafiadoras, requerendo dos estudantes interpretação, argumentação e tomada de decisões. A integração entre OVA e resolução de problemas favoreceu a construção de significados, o domínio dos signos matemáticos e o desenvolvimento de uma postura investigativa e reflexiva. A maioria dos estudantes conseguiu realizar a conversão entre pelo menos dois registros distintos, dentre o algébrico, gráfico, geométrico, numérico e escrito, evidenciando compreensão dos conceitos abordados, indicando que os objetivos da pesquisa foram alcançados.

Palavras-chave: Representações semióticas; Progressões aritméticas e geométricas; Funções afins e exponenciais; Objetos virtuais de aprendizagem; Resolução de problemas.

ABSTRACT

This qualitative research, conducted through an action-research approach, aimed to analyze how students transitioned between different registers of semiotic representation and how problem solving and the use of virtual learning objects (OVA) can support this process, enhancing the learning of progressions and functions. The proposal was developed over twenty classes organized into investigative workshops, with a group of eleven students from the 1st year of the Technical High School in Informatics at a full-time public school located in the municipality of Concórdia – SC. Data were produced through the GeoGebra Task platform, written records, images, and a logbook, and analyzed using content analysis techniques. Pedagogical practices mediated by digital technologies (TD), combined with contextualized problem solving, proved promising for knowledge construction, in line with the principles of the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS). This approach mobilized different systems of meaning, requiring from both students and the teacher not only technical conversions but also understanding of the functioning of each register. The OVA, built with GeoGebra software, contributed to the identification of patterns and behaviors, allowing students to manipulate parameters such as ratio, initial term, and number of elements of arithmetic progression (PA) and geometric progression (PG), as well as to study relationships with linear and exponential functions in a fast, practical, and dynamic way. This interaction favored direct observation of effects in algebraic and graphical representations, distinction between discrete and continuous models, interpretation of linear and exponential function graphs, and the application of formulas such as the infinite sum, associating it with the concepts of convergence and divergence. The proposed problems deepened this understanding by embedding the content in real and challenging situations, requiring interpretation, argumentation, and decision-making from the students. The integration between OVA and problem solving fostered the construction of meanings, mastery of mathematical signs, and the development of an investigative and reflective attitude. Most students were able to perform conversions between at least two distinct registers, algebraic, graphical, geometric, numerical, and written, indicating understanding of the concepts addressed and indicating that the research objectives were achieved.

Keywords: Semiotic representations; Arithmetic and geometric progressions; Affine and exponential functions; Virtual learning objects; Problem solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática ainda carrega marcas de práticas tradicionais, centradas na reprodução de procedimentos e na memorização de fórmulas, o que frequentemente provoca distanciamento entre os estudantes e os conteúdos curriculares. Assim, torna-se necessário construir abordagens pedagógicas que promovam a autonomia intelectual, a atitude investigativa e a contextualização do conhecimento matemático.

As progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG), bem como suas relações com funções afins e exponenciais, representam um desafio para muitos estudantes, especialmente no que diz respeito à compreensão das relações, dos aspectos conceituais e abstratos. A dificuldade em visualizar padrões, identificar regularidades e generalizar comportamentos revela lacunas importantes no processo de aprendizagem, evidenciando a necessidade de propostas pedagógicas que ampliem a visualização, estimulem a investigação e favoreçam a construção ativa do conhecimento. Nesse sentido, o problema que orientou essa pesquisa foi: Será possível contribuir para a superação das dificuldades de aprendizagem dos estudantes, por meio de objetos virtuais de aprendizagem (OVA) e da resolução de problemas, na compreensão das relações entre a Progressão Aritmética (PA) e a função afim, bem como entre a Progressão Geométrica (PG) e a função exponencial, especialmente no que diz respeito à visualização de padrões e às diferentes formas de representação?

Para Duval (2018, p.8-9), “a primeira exigência cognitiva para compreender matemática é poder utilizar ao menos duas representações de um mesmo objeto sem confundir o objeto com os conteúdos respectivos das duas representações”. Por consequência, o objetivo desta pesquisa foi analisar como os estudantes transitaram entre diferentes registros de representação semiótica e de que forma a resolução de problemas e o uso de objetos virtuais de aprendizagem (OVA) podem favorecer esse processo, potencializando a aprendizagem de progressões e funções.

Uma sequência didática contendo problemas e OVA foi elaborada no GeoGebra Tarefa e pensada de modo a viabilizar a investigação, visto que, além de gravar automaticamente as resoluções e conversões dos estudantes, facilitam a observação e a exploração de parâmetros, como quantidade de termos, razão da sequência e primeiro termo, de forma rápida e dinâmica. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública de tempo integral da cidade de Concórdia – SC, com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio do Curso Técnico em Informática. Contou com a participação de onze estudantes ao longo de vinte aulas, organizadas em formato de oficinas investigativas, em que foram convidados a explorar problemas, manipular ferramentas digitais, formular hipóteses, justificar soluções e refletir sobre conceitos fundamentais, ampliando seu repertório de registros e estratégias de resolução.

A principal ferramenta de produção e coleta de dados desse processo foi composta pelos relatórios digitais gerados automaticamente pela plataforma do software GeoGebra. Além deles, também, foram utilizados registros complementares, como o diário de bordo, imagens de interações com o software e alguns materiais físicos produzidos pelos estudantes. A partir dos objetivos da pesquisa e da leitura atenta dos dados, foram definidas duas categorias: 1) Contribuições dos OVA para reconhecimento e transição entre diferentes representações semióticas pelos estudantes; 2) Contribuições dos problemas para reconhecimento e transição entre diferentes representações semióticas pelos estudantes.

Com esse material foi possível realizar uma análise aprofundada e sensível da prática e do processo de aprendizagem dos estudantes, respeitando suas trajetórias individuais e valorizando suas formas de pensar, argumentar e representar matematicamente. Isto está em consonância com os pressupostos de Fiorentini e Lorenzato (2012), que defendem uma prática docente reflexiva, intencional e comprometida com a formação de sujeitos críticos, atuantes e criativos. Para os autores, "o professor que investiga sua própria prática transforma-se em sujeito da pesquisa e da formação" (p. 15). Nesse contexto, a análise de conteúdo proposta por Bardin (2011) também se mostra relevante, pois oferece um conjunto de técnicas sistemáticas e objetivas para interpretar os dados produzidos, permitindo a construção de sentidos a partir das manifestações dos participantes.

No decorrer das oficinas foram exploradas diversas atividades que favoreceram a compreensão do comportamento de sequências, como nos casos de corrida de táxi, investimentos financeiros, decaimento radioativo, crescimento populacional, caracterização de sequências convergentes e divergentes, interpretação do limite da soma de uma PG com razão entre zero e um, entre outros, permitindo aos estudantes visualizar e aplicar conceitos matemáticos em situações contextuais. Os estudantes também tiveram a oportunidade de construir seus próprios OVA, descrevendo o processo de construção para desenvolver a compreensão dos signos matemáticos envolvidos, como variáveis, coeficientes, razões, expressões algébricas e gráficos.

O marco teórico que orienta a pesquisa está apresentado no Capítulo 2 e abrange, além de Fiorentini e Lorenzato (2012) e Duval (1995, 2009, 2018), os estudos de Onuchic e Allevatto (2011) e Polya (1995) sobre resolução de problemas, bem como autores que discutem o papel das Tecnologias Digitais (TD) na Educação Matemática, como Kenski (2012), Borba e Penteado (2012) e Borba, Silva e Gadanidis (2020). Também são mobilizadas as contribuições da Educação Matemática, a partir de D'Ambrosio (2012), Fainguelernt e Nunes (2012), Colombo (2008) e Moretti (2024), por exemplo, que sustentam a importância de práticas educativas que dialoguem com os saberes dos estudantes e promovam experiências significativas.

Além dos referenciais teóricos que sustentam esta pesquisa, nesse capítulo também apresenta-se a revisão bibliográfica, com estudos precedentes sobre os temas da pesquisa, com o objetivo de identificar estudos acadêmicos que abordam, de forma semelhante, a articulação entre conteúdos matemáticos, TD e registros de representações semióticas. A busca concentrou-se em artigos, dissertações e trabalhos apresentados em eventos da área, priorizando produções que envolvem o uso do GeoGebra, OVA, resolução de problemas e conversão entre registros.

No Capítulo 3, são descritos os procedimentos metodológicos adotados, com foco na abordagem qualitativa e investigativa. Apresenta-se o perfil da turma participante, a estrutura dos encontros e os instrumentos utilizados para a produção, coleta e análise dos dados, como registros escritos, produções digitais e interações via GeoGebra Tarefa. Esse capítulo é essencial para contextualizar as escolhas metodológicas e garantir a compreensão do percurso realizado na pesquisa.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados e a análise dos dados obtidos ao longo da pesquisa, com destaque para a contribuição dos OVA e dos problemas matemáticos propostos. Inicialmente, são analisados os cinco OVA elaborados no GeoGebra, explorando como seus elementos favoreceram a visualização, a manipulação de parâmetros e a conversão entre registros de representação semiótica. Em seguida, são analisados dez problemas matemáticos propostos aos estudantes durante as oficinas, organizados por tarefas temáticas, os quais estes foram desafiados a investigar, interpretar, generalizar e justificar suas estratégias de resolução. Cada problema foi analisado individualmente, destacando os aspectos conceituais, as interações digitais, as argumentações construídas pelos estudantes e as contribuições para o desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes.

Por fim, são apresentadas as considerações finais da pesquisa, construídas com base na análise das atividades desenvolvidas, dos registros dos estudantes e dos fundamentos teóricos mobilizados ao longo do estudo. São destacadas as principais contribuições dos OVA e da resolução de problemas para reconhecimento e transição entre diferentes representações semióticas pelos estudantes, refletindo sobre aprendizagens construídas, limitações da pesquisa e possibilidades de continuidade em futuras investigações.

Para melhor organização e aprofundamento da análise, os materiais produzidos durante a pesquisa, questões exploradas em cada OVA, problemas centrais propostos, assim como as habilidades e competências mobilizadas conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), encontram-se disponibilizados nos Apêndices. Esses elementos complementares permitem ao leitor visualizar com clareza os recursos utilizados e compreender o contexto em que as atividades foram aplicadas, favorecendo a replicação e o entendimento da proposta pedagógica apresentada. Estes elementos também compõem o produto educacional gerado a partir desta pesquisa, o qual foi disponibilizado em formato digital por meio da plataforma GeoGebra. O acesso pode ser realizado pelo link: https://www.geogebra.org/m/twsah8kf, onde estão organizadas as atividades interativas que compõem a proposta, permitindo que professores e pesquisadores explorem os recursos de forma prática e contextualizada.

2 MARCO TEÓRICO

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica que sustenta a pesquisa, com foco na teoria dos registros de representação semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval. Essa teoria foi utilizada como base para compreender os processos cognitivos desenvolvidos nas oficinas, especialmente no que se refere à conversão, transição e coordenação entre diferentes registros de representação.

Além disso, neste capítulo também realiza-se uma análise acerca do papel das TD no contexto educacional, com ênfase no uso do software GeoGebra e dos OVA. Esses recursos digitais têm potencial para favorecer a transposição entre registros semióticos, ampliando a visualização de conceitos abstratos e promovendo a autonomia dos estudantes em atividades de resolução de problemas.

Por consequência, a metodologia de resolução de problemas foi abordada como uma estratégia para o ensino da Matemática, destacando sua relevância na construção do raciocínio lógico, da criatividade e da autonomia intelectual dos estudantes. A resolução de problemas foi articulada à TRRS, evidenciando os desafios da conversão entre diferentes formas de representação e o papel das TD, como o GeoGebra e os OVA, na superação desses obstáculos.

Por fim, no capítulo incorpora-se uma seção dedicada à revisão bibliográfica de trabalhos acadêmicos que tratam dos principais temas da pesquisa: representações semióticas, tecnologias digitais aplicadas ao ensino da Matemática, uso de OVA e estratégias de resolução de problemas. Essa revisão tem como objetivo mapear contribuições relevantes na área, identificar lacunas e estabelecer diálogos com estudos que fundamentam e inspiram a proposta pedagógica desenvolvida neste trabalho.

2.1 A TEORIA DO REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Existem várias maneiras de interpretar e resolver uma situação-problema. Muitas vezes, é necessário usar diferentes formas de representação, como expressões, sequências, tabelas e gráficos. Esses formatos adaptam-se às necessidades e contextos, tornando os conceitos matemáticos mais acessíveis e aplicáveis. Essas maneiras de apresentar informações são chamadas de representações semióticas.

A TRRS é definida por Duval (2018, p.2) como "[…] um instrumento que foi elaborado para analisar a maneira de pensar e de trabalhar a matemática quaisquer que sejam os conceitos e domínios (geometria, álgebra, análise...) tratados". Esse autor afirma ainda, que diferentes formas de representação de um conteúdo são denominadas formas de representações semióticas, seja ele matemático ou não.

Duval (2009) explica que é importante distinguir os objetos matemáticos, como números, funções e retas, de suas representações, como símbolos, gráficos ou figuras, uma vez que um mesmo objeto pode ser apresentado de formas distintas. Além disso, ele menciona que para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto em si mesma não é possível, é necessário dispor de representações semióticas heterogêneas deste objeto e coordená-las.

Ao analisar os obstáculos recorrentes na aprendizagem da Matemática, Duval (1995) propõe uma importante distinção entre dois aspectos do funcionamento cognitivo: a *noésis* (compreensão) e a *semiósis* (representação). Inicialmente, parece intuitivo admitir que a *noésis* dirige ou independe da *semiósis*, como se a compreensão antecedesse ou controlasse os modos de representação. Contudo, o autor contrapõe essa ideia ao afirmar que "não há *noésis* sem *semiósis*, quer dizer, não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito" (Duval, 1995, p. 16). A *semiósis*, portanto, não é mera consequência da compreensão, mas sim uma condição para que ela ocorra.

Nesse contexto, compreender um objeto matemático não depende apenas da apreensão conceitual isolada (*noésis*), mas exige um processo ativo de construção de significados por meio da representação (*semiósis*). Essa atividade implica mobilizar múltiplos sistemas semióticos, como linguagem verbal, símbolos algébricos, gráficos e tabelas, e coordená-los cognitivamente para que se estabeleçam conexões entre registros distintos. Assim, a *semiósis* não apenas acompanha a *noésis*, como a sustenta e a torna possível (Duval, 1995). Com isso, torna-se evidente que o pensamento matemático só se desenvolve de forma significativa quando o sujeito é capaz de articular diferentes representações para construir compreensão e resolver problemas.

Porém, para Duval (2018) o maior obstáculo da TRRS está na conversão, visto que não há um conteúdo comum entre os registros diferentes, ou seja, as representações possuem estruturas e formatos próprios que não se conectam diretamente. Desta forma, a compreensão necessita do reconhecimento de um mesmo objeto em diferentes registros e a capacidade de transitar entre eles de forma espontânea, um processo fundamental que antecede qualquer resolução de problemas:

> A primeira exigência cognitiva para compreender matemática é poder utilizar ao menos duas representações de um mesmo objeto sem confundir o objeto com os conteúdos respectivos das duas representações. Isso significa dizer que é necessário poder reconhecer o mesmo objeto nas duas representações: se apenas uma das duas representações é dada, é preciso poder pensar, espontaneamente, a substituição na outra representação por essa que é dada. Este simples gesto intelectual precede a toda resolução de problemas, uma vez que para começar a procurar a solução é preciso de imediato converter as representações iniciais dos dados do problema apresentados em um registro, em representações de um outro registro e, com isso, poder trabalhar e avançar à solução do problema (Duval, 2018, p.8-9).

Para superar esse obstáculo e reconhecer que duas representações diferentes se referem ao mesmo objeto matemático, é essencial estabelecer uma correspondência precisa entre os elementos dos registros. Fazer uma correspondência termo a termo permite identificar como cada unidade de significado em um registro está vinculada aos componentes de outro, garantindo que ambos retratem o mesmo objeto de maneiras distintas.

Em vista disso, ao estudar PA e PG, é possível representá-las de diversas maneiras para compreender melhor seus padrões. Por exemplo, uma PA é definida pelo termo $a_n = a_1 + (n-1).r$, mas pode ser representada como uma lista de números como (2, 5, 8, 11, ...), que pode ser representado algebricamente pelo termo geral $a_n = 3n - 1$. Também pode ser apresentada graficamente, exibindo o crescimento linear de uma função afim delimitada por um domínio discreto e pela conversão desses saberes em linguagem escrita, necessária para compreensão conceitual. Assim como, uma PG que é descrita pelo termo $a_n = a_1.q^{n-1}$, pode ser apresentada como uma sequência numérica como (2, 4, 8, 16,...), pelo termo geral $a_n = 2^n$ dessa sequência, por um gráfico ou expressão exponencial em domínio discreto e convertidas em linguagem escrita, evidenciando a flexibilidade cognitiva.

Essa transição entre diferentes sistemas de representação ou o uso simultâneo de múltiplos sistemas ao longo de um mesmo processo, embora sejam fenômenos comuns na disciplina de Matemática, não são evidentes nem automáticos para a maioria dos estudantes, isso porque persistem na ideia de "separação" dos tipos de representações. "Essa separação, à qual se presta geralmente pouca atenção, resulta do fenômeno de não-congruência entre as representações de um mesmo objeto que enfatizam sistemas semióticos diferentes" (Duval, 2009, p.18).

Esse autor também afirma que a passagem entre os registros requer três condições essenciais para que sejam congruentes: 1) correspondência semântica entre os significantes das representações (por exemplo, na conversão de uma equação algébrica para um gráfico cartesiano, cada símbolo ou termo da equação (como x, y, ou coeficientes) deve corresponder diretamente a um elemento no gráfico, como um ponto, uma linha ou uma curva); 2) ordem de apreensão compatível entre os componentes das duas formas (por exemplo, em uma lista numérica, os valores são apreendidos de forma sequencial, enquanto em um gráfico cartesiano os valores podem ser entendidos visualmente em relação ao eixo x e ao eixo y); 3) conversão direta dos elementos de uma representação para elementos equivalentes na outra (por exemplo, na conversão de uma fórmula algébrica para sua representação gráfica). Duval (2009, p.18-19) conclui que "quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma à outra não tem mais nada de imediato".

Essa falta de congruência, ou congruência semântica, é uma barreira comum no aprendizado e na resolução de problemas, especialmente quando sistemas semióticos distintos são utilizados, de forma que o estudante não consegue perceber que está lidando com o mesmo objeto matemático, apenas apresentado de formas diferentes. Além disso, Moretti (2024, p.14) em seus estudos sobre a TRRS alerta:

> Duas representações podem ser congruentes, mas podem não possuir a mesma referência, ou seja, o objeto a que elas se referem não são os mesmos. É bom destacar também que duas representações podem ser congruentes quando da passagem em um sentido e não serem congruentes no sentido inverso.

Ao chamar atenção para esse aspecto, o autor explica que mesmo que duas representações compartilhem uma estrutura semelhante, como uma equação e um gráfico, por exemplo, elas podem estar se referindo a objetos ou situações distintas. Por exemplo, a função afim $f(x) = 2x - 5$ pode representar, ao mesmo tempo, uma PA em domínio discreto, ou pode modelar o crescimento financeiro de uma empresa. Embora a representação gráfica seja a mesma, o objeto de referência é distinto, ou seja, as representações são congruentes em forma, mas não compartilham a mesma referência.

Já a congruência diz respeito à compatibilidade estrutural entre registros semióticos. Por exemplo, um estudante pode a partir de uma função afim como $g(x) = 5 - 2x$, traçar corretamente o gráfico correspondente. No entanto, ao receber apenas o gráfico, sem informações adicionais, pode enfrentar dificuldades para identificar com precisão a equação que o gerou. Isso mostra que a passagem do registro algébrico para o gráfico pode ser clara e direta, enquanto o caminho inverso pode não preservar totalmente a congruência ou gerar ambiguidades.

Colombo (2008, p.213) destaca "a importância de considerar nos currículos de matemática, tarefas escolares que suscitem representações semióticas diversas dos objetos em estudo”. Incorporar esse tipo de tarefa no currículo de Matemática não só enriquece o aprendizado dos estudantes, mas também os prepara para enfrentar desafios complexos no futuro de forma mais eficaz.

A ausência de um trabalho educacional específico focado em explorar as diferentes possibilidades dos sistemas semióticos, suas correspondências e suas “separações”, contribui para a manutenção das dificuldades na aprendizagem. Muitas vezes, o ensino prioriza exclusivamente o conteúdo, sem abordar de forma explícita o processo de transição entre registros, limitando o desenvolvimento das competências dos estudantes. Nesse sentido:

> [...] considerar além das definições e conceitos, as representações semióticas dos objetos matemáticos como instrumento de mediação, ou seja, como forma de comunicação, de acesso, de organização e de tratamento dos conhecimentos. Trata-se então de considerar o aluno como sujeito consciente do conhecimento, que interage com o saber matemático, historicamente elaborado, a partir de suas atividades escolares e práticas, nas quais utiliza as representações semióticas para acessar, apreender e elaborar o conhecimento (Colombo, 2008, p.24-25).

Além disso, Duval (1995, p. 17) afirma que “na matemática, as representações são relativas a sistemas específicos de signos e podem ser convertidas para outros sistemas semióticos, assumindo significados distintos conforme o sujeito que as utiliza”. Nesse sentido, compreender um conteúdo matemático não se limita à memorização de uma única forma de representação, mas exige que o estudante consiga transitar entre diferentes registros, desenvolvendo flexibilidade cognitiva para reconhecer, interpretar e converter essas representações de forma significativa.

Nesse cenário, é essencial compreender que cada representação semiótica é constituída por signos, elementos materiais que pertencem a um sistema específico de significação e que tornam perceptíveis os objetos matemáticos, por natureza abstratos. Os signos, nesse contexto, representam a materialização das representações, ou seja, são os meios pelos quais os conceitos se tornam acessíveis à percepção, à comunicação e à manipulação. Segundo Moretti (2024, p. 13), “as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significação e de funcionamento”. Esses signos, portanto, não são neutros, apresentam desafios cognitivos que variam conforme o sistema semiótico adotado. Por isso, a mobilização de diferentes registros exige do estudante não apenas a capacidade de converter entre signos distintos, mas também a habilidade de reconhecer o funcionamento de cada sistema de significação, compreendendo como cada um contribui para a construção de sentido.

Essa mobilização ativa distintos processos cognitivos, favorecendo a construção de significados e a flexibilidade mental. Colombo (2008, p.93) afirma que "finalmente, temos o interpretante, que consiste no signo criado na mente do intérprete (o sujeito) pela mediação da relação triádica. Em outras palavras, é a imagem mental ou o conceito criado quando da mediação signo-objeto." Essa construção de imagem mental, que o autor denomina interpretante, é fundamental para estabelecer as relações entre os registros e signos. Por exemplo, ao observar o gráfico de uma função exponencial, o estudante pode criar uma imagem mental do comportamento crescente da curva, relacionando-a à estrutura da expressão algébrica. Essa articulação entre signos visuais e simbólicos permite que o estudante estabeleça relações conceituais, caracterizando o processo de *semiose* como uma ação cognitiva que integra percepção, representação e compreensão.

Desta forma, a TRRS se apresenta como um referencial teórico importante para compreender os processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Duval (2018, p. 26) destaca que a teoria "abre novos campos de pesquisa sobre a visualização em geometria, sua articulação entre língua e visualização; sobre a maneira de introduzir a álgebra e sobre uma abordagem na resolução de problemas".

A articulação entre os registros mobiliza diferentes sistemas de significação, e exige dos estudantes e do docente, não apenas conversões técnicas, mas também compreensão sobre o funcionamento de cada registro. A superação de obstáculos como a não-congruência semântica entre registros evidencia a necessidade de uma abordagem didática que promova a coordenação entre múltiplas representações. Esse movimento contribui para o desenvolvimento de capacidades cognitivas associadas à flexibilidade, à abstração e ao raciocínio simbólico, elementos centrais para a formação dos estudantes ao longo da Educação Básica.

2.2 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É importante reconhecer que não há um único caminho correto para resolver um problema, pois os caminhos adotados para chegar aos resultados variam individualmente. Conforme Branca (1997, p.10), "A resolução de problemas tem facetas demais para que possamos considerá-las sempre a partir no mesmo ângulo". Essa multiplicidade de abordagens reforça a riqueza da resolução de problemas como prática pedagógica, capaz de promover diferentes formas de pensar e aprender.

As autoras Onuchic e Allevatto (2011) destacam que, a partir da publicação dos Standards 2000 pelo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), houve uma mudança significativa na forma como o ensino da Matemática passou a ser estudado. Essa proposta impulsionou a valorização da resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem, promovendo uma ruptura com as práticas tradicionais. Para elas, foi nesse contexto que o problema passou a ser visto como "ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo" (Onuchic; Allevatto, 2011, p.79-80).

Uma das estratégias didáticas citadas por Duval (2018) para lidar com os obstáculos da conversão de representações semióticas é justamente a utilização de problemas. Ele afirma que "a utilização de um conhecimento matemático em problemas da realidade consiste em partir de situações reais ou concretas nas quais a utilização da propriedade ou do procedimento matemático, que se quer ensinar, mostra-se indispensável para resolver o problema" (Duval, 2018, p.11). Desta forma, uma maneira eficaz de superar os obstáculos relacionados à conversão entre diferentes representações semióticas é trabalhar com os estudantes situações-problema que estão diretamente ligadas à realidade ou a um contexto concreto.

Outros autores também destacam a resolução de problemas nesse mesmo âmbito, reconhecendo-a como uma metodologia fundamental para superar os desafios inerentes à aprendizagem da Matemática. Burak e Aragão (2012, p. 97) apontam que, por meio da resolução de problemas, os conteúdos matemáticos ganham importância e significado quando:

> 1) Os problemas são elaborados a partir dos dados coletados em campo; 2) prioriza a ação do estudante na elaboração; 3) parte sempre de uma situação contextualizada; 4) favorece a criatividade; 5) confere maior significado ao conteúdo matemático usado na resolução; 6) favorece a tomada de decisão.

Para que essa abordagem se concretize, é necessário que o professor assuma um papel diferenciado. A mediação docente exige sensibilidade, planejamento e capacidade de antecipar as ações dos estudantes, criando um ambiente propício à investigação e à construção coletiva do conhecimento. A postura tradicional centrada na transmissão de conteúdos precisa ser substituída por uma atuação mais reflexiva e dialógica, como destacam Onuchic e Allevato (2011, p. 82):

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir.

Burak e Aragão (2012, p.5-6) desaprovam o uso excessivo de memória, a repetição mecânica de algoritmos, o uso de problemas descontextualizados e mera aplicação de fórmulas no ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, destacam que:

> É preciso ter clareza de que o tipo de aprendizagem que se torna imprescindível para o aluno compreender efetivamente a Matemática é de natureza tal que, se no contexto escolar de ensino e de aprendizagem não se partir do conhecimento já adquirido e do interesse do próprio estudante, se não se levar em conta sua história e o que ele já sabe, o conhecimento que se quer ser aprendido não se estabelece em termos usualmente dissociados. Isto quer dizer que a aprendizagem que possibilita tornar o estudante cidadão implica a possibilidade de este vir a atribuir sentidos e significados ao que se aprende, em função da sua experiência de mundo.

Essa perspectiva reforça a ideia de que o ensino da Matemática, por meio da resolução de problemas, deve estar vinculado à experiência concreta dos estudantes, permitindo que eles atribuam sentido ao conteúdo trabalhado. Ao perceberem que a Matemática está relacionada à sua realidade e que aprender envolve responsabilidade e empenho, os estudantes passam a se envolver de forma mais ativa no processo de aprendizagem.

Desta forma, o professor deve escolher com cuidado um problema para que os estudantes possam compreendê-lo e que também desperte seu interesse. Se o problema for demasiado complexo ou mal explicado, pode resultar em frustração e perda de interesse. Por outro lado, um problema envolvente e relevante pode motivar os estudantes a buscar a solução de forma mais ativa e engajada. Nesse sentido:

> O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante (Polya, 1995, p.4).

Um problema bem escolhido não apenas facilita a compreensão, mas também estimula a curiosidade e o pensamento crítico, essenciais para uma aprendizagem eficaz. Para Burak e Aragão (2012, p.79), “o grande desafio que assumimos é de identificar, discutir e realizar estudos de problemas que constituam e tenham como o objetivo o ensino e a aprendizagem de Matemática de tal forma que suscite nos estudantes a construção ou o desenvolvimento de suas capacidades”. Embora, de fato seja um desafio, Onuchic e Allevato (2011, p.82) elencam boas razões para fazer esse esforço:

> • Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.

> • Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> • Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
> • Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Além disso, as autoras propõem um roteiro didático estruturado para o trabalho com resolução de problemas, visando à construção de novos conceitos, princípios ou procedimentos matemáticos. Em resumo, o processo inicia-se com a seleção de um problema gerador, cujo conteúdo ainda não foi formalmente abordado em sala de aula. Os estudantes realizam uma leitura individual do enunciado, seguida por uma leitura em grupo, momento em que dificuldades de compreensão podem ser superadas com apoio mútuo ou com a mediação do professor.

Na sequência, a resolução ocorre de forma colaborativa, com os estudantes atuando como co-construtores do conhecimento. Durante essa etapa, o professor observa, incentiva e intervém quando necessário, estimulando o uso de conhecimentos prévios e diferentes estratégias operatórias. Em seguida, os grupos registram suas resoluções na lousa, promovendo uma plenária para discussão coletiva, defesa de ideias e esclarecimento de dúvidas. Após a busca por consenso, o professor realiza a formalização dos conceitos construídos, utilizando linguagem matemática estruturada e destacando os procedimentos desenvolvidos. Esses procedimentos, para Onuchic e Allevato (2011, p.83), buscam “atender à demanda de prover os alunos de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia”.

Outra estrutura, amplamente reconhecida no campo da metodologia de resolução de problemas foi proposta por Polya (1995), que sistematizou o processo em quatro fases interdependentes. Essa organização não se limita à obtenção de respostas corretas, mas visa conduzir o estudante ao domínio do processo de pensar matematicamente. Para o autor, o percurso de resolução é tão relevante quanto o resultado final, pois é nele que o estudante exercita o raciocínio, a criatividade e a autonomia intelectual. As quatro fases propostas por Polya

(1995) são: (I) compreender o problema; (II) estabelecer um plano; (III) executar o plano; e (IV) retrospectar:

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 1995, p. 3-4).

Ao apresentar essas quatro fases, Polya (1995) ressalta que cada uma possui papel fundamental na construção do pensamento matemático e na autonomia dos estudantes diante de situações-problema. Embora seja possível que, ocasionalmente, uma solução surja por meio de uma ideia brilhante e espontânea, ele alerta que ignorar qualquer etapa pode comprometer tanto a precisão da resposta quanto o processo de aprendizagem. Avançar diretamente para cálculos sem compreender adequadamente o problema pode resultar em equívocos ou na perda de conexões essenciais. Da mesma forma, deixar de revisar e discutir a solução limita a oportunidade de reflexão e de aprimoramento. Entretanto:

> Para o trabalho com a tarefa de resolução de problemas, não basta guardar algumas aulas no final de cada capítulo como forma de aplicar os conceitos ou incluir experiências de forma isolada. Ao contrário, para adquirir eficiência, o ensino pautado na resolução de problemas leva tempo, ou seja, deverá se constituir em uma experiência regular e ser parte integrante do currículo (Colombo, 2008, p.141).

Quando a resolução de problemas é tratada como um método de ensino, ela se desvincula da dependência de problemas específicos, métodos fixos ou conteúdos determinados. Branca (1997, p. 5) discute considerações relevantes nesse contexto e afirma que “aprender a resolver problemas é a razão principal para estudar matemática”. Essa perspectiva influencia diretamente a organização do currículo e gera implicações significativas para a prática pedagógica em sala de aula.

Porém, aprender a resolver problemas não é algo que ocorre de forma instantânea, Polya (1995, p.3) afirma que “O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar”. Essa abordagem destaca que o desenvolvimento dessa habilidade requer tempo, prática e intencionalidade pedagógica, cabendo ao professor promover ambientes de aprendizagem que favoreçam esse processo.

Nesse sentido, o currículo, conforme destaca Colombo (2008, p. 69), é “uma proposta que pode ser interpretada pelos professores de diferentes maneiras e, a partir disso, aplicada a contextos diferentes, sendo, portanto, uma prática constantemente em deliberação e negociação, inacabada por natureza". Essa abertura interpretativa abre possibilidades e exige do professor uma postura ativa e intencional, capaz de mediar os processos de ensino e aprendizagem com sensibilidade às necessidades dos estudantes, favorecendo experiências significativas e o desenvolvimento da autonomia.

Diante da responsabilidade docente de criar ambientes de aprendizagem intencionais, é preciso considerar o equilíbrio no suporte oferecido ao estudante. A intervenção pedagógica deve ser dosada com cuidado, de modo a não deixar o estudante desamparado nem realizar por ele o que cabe à sua autonomia. Como ressalta Polya (1995, p. 17), "o professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho". Essa medida é fundamental para garantir que o estudante possa experimentar, testar estratégias e construir conhecimento de maneira significativa.

Essa ideia de equilíbrio entre apoio e autonomia está diretamente relacionada aos desafios enfrentados pelos estudantes na conversão de representações semióticas. Esse processo é considerado por Duval (2018) um dos maiores e mais significativos obstáculos a serem superados para promover a compreensão e o aprendizado em Matemática. Tal dificuldade afeta tanto as reações deles quanto a qualidade de suas produções, especialmente em tarefas de resolução de problemas. Esses desafios se manifestam, por exemplo, na dificuldade de reconhecer o mesmo objeto matemático em uma representação específica, seja ela um enunciado, uma equação, uma figura ou um gráfico. Segundo Duval (2018, p.10), essa incapacidade "leva a um bloqueio e a um abandono rápido das atividades de busca para resolver um problema ou a erros que apontam confusões ininterpretáveis".

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere que os estudantes devem ser preparados para atuar de forma ativa, crítica, criativa e responsável diante das exigências de um mundo do trabalho cada vez mais complexo e imprevisível. Para isso, traz a capacidade de "relacionar teoria e prática ou conhecimento teórico e resolução de problemas da realidade social, cultural ou natural" (Brasil, 2018, p. 39), como uma das principais estratégias para desenvolver as competências necessárias ao mercado de trabalho.

> O desenvolvimento se faz no enfrentamento de problemas complexos e diversificados. Isso não significa que exercícios do tipo: calcule, resolva, etc., devam ser eliminados, pois cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma eles são suficientes para preparar o aluno competente para o que nossa sociedade espera dele (Fainguelernt; Nunes, 2012, p. 26).

Entretanto, não se pode pensar que a escola deva servir apenas para o objetivo de preparar pessoas para exercer funções sociais ligadas à empregabilidade. A escola deve, sobretudo, “pautar-se pela intensificação das oportunidades de aprendizagem e autonomia dos estudantes em relação à busca de conhecimentos, da definição, de seus caminhos, da liberdade para que possam criar oportunidades e serem os sujeitos da própria existência” (Kenski, 2012, p.66).

Portanto, integrar a resolução de problemas ao currículo representa uma abordagem didática que estimula o raciocínio lógico e fortalece a autonomia intelectual dos estudantes. Ao serem envolvidos em situações concretas e desafiadoras, os estudantes desenvolvem competências essenciais, enquanto o professor amplia o alcance formativo de sua prática pedagógica.

> As experiências, em pesquisas com alunos e atividades de formação de professores em que esta forma de trabalho tem sido utilizada, têm favorecido significativos avanços na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e no aprimoramento da prática docente pelo professor (Onuchic; Allevato, 2011, p.95).

Nesse contexto, a sala de aula transforma-se em um espaço de construção ativa do conhecimento, no qual a criatividade, a argumentação e o pensamento crítico são continuamente estimulados. Quando inserida de forma contextualizada e articulada ao cotidiano dos estudantes, a resolução de problemas favorece o desenvolvimento de competências cognitivas e sociais, contribuindo para uma educação crítica e reflexiva, capaz de atribuir sentidos e significados ao que se aprende.

2.3 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O SOFTWARE MATEMÁTICO GEOGEBRA

As TD têm desempenhado um papel cada vez mais relevante na educação, dialogando diretamente com a realidade dos estudantes e com as demandas da sociedade atual. Elas não se limitam a substituir recursos tradicionais, mas transformam profundamente as formas de ensinar, aprender e interagir com o conhecimento.

Kenski (2012, p.46) evidencia algumas mudanças positivas das TD para a educação. “Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, softwares diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino-aprendizagem, onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor”. A autora alerta para a importância do uso pedagógico da tecnologia, destacando que sua escolha e aplicação devem estar alinhadas aos objetivos educacionais e às necessidades formativas dos estudantes.

As TD, de acordo com a BNCC, "são alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações" (Brasil, 2018, p.528). Ainda, na parte de habilidades e competências específicas do componente curricular Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, a BNCC propõe o uso das TD como ferramentas investigativas, experimentais e analíticas, promovendo a identificação de padrões, o aprimoramento de estratégias e a ampliação da compreensão dos conteúdos matemáticos.

Em complemento a essa perspectiva, Lopes (2013, p.3) afirma que "[...] quando a informática faz parte do ambiente escolar, num processo dinâmico de interação entre estudantes, professores e TD, ela passa a despertar no professor a sensibilidade para as diferentes possibilidades de representação da Matemática". Esse despertar contribui para a construção de práticas pedagógicas que valorizam a diversidade de representações e promovem maior compreensão dos conceitos.

Por consequência, a incorporação das TD ao processo de ensino pode favorecer a articulação da TRRS e da resolução de problemas, fortalecendo práticas investigativas e analíticas, promovendo um aprendizado mais efetivo, visualmente enriquecido e contextualizado, que estimula o pensamento crítico e a construção de estratégias eficazes para lidar com situações reais. Borba e Penteado (2012) destacam o uso de calculadoras gráficas e softwares nas aulas de Matemática:

> Calculadoras gráficas e softwares que possibilitam o traçado de gráficos de funções têm sido utilizados de forma acentuada ao longo dos anos. Praticamente todos os tópicos são iniciados a partir de atividades com a calculadora. As atividades, além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física (Borba; Penteado, 2012, p.37).

Entre os diversos recursos digitais disponíveis para o ensino da Matemática, o GeoGebra ocupa um lugar de destaque por sua versatilidade e praticidade. Ele é um software livre e de fácil acesso, que oferece ao professor diversos recursos que favorecem a exploração de conceitos matemáticos de forma interativa, ampliando o potencial investigativo das aulas, permitindo que os estudantes visualizem, manipulem e testem diferentes representações em tempo real. Borba, Silva e Gadanidis (2020, p.67) destacam que esse software "mantém possível o estudo de conteúdos de forma mais próxima ao que era feito com lápis e papel, transforma também as possibilidades de experimentação, de visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo que aprende”. Nascimento (2012, p.4), afirma que:

.

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Os OVA elaborados para as oficinas desta pesquisa exemplificam recursos digitais que permitem ajustar dinamicamente parâmetros durante a manipulação, como a quantidade de termos, o primeiro termo da sequência e a razão. Com isso, os estudantes exploram de forma interativa as propriedades do objeto, percebendo como as alterações influenciam na construção. Nesse processo, a visualização desempenha papel essencial, pois “ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática” (Borba, Silva e Gadanidis, 2020, p. 67). Os OVA, portanto, proporcionam a visualização dos padrões e a visualização atua como ponte entre diferentes registros de representação, ampliando a compreensão dos conceitos. De acordo com Lopes (2013, p.5),

> [...] o que difere numa atividade com o recurso do software é a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, o aluno investigar o que acontece com a sua construção, levantando hipóteses como: a construção permanece com as mesmas características? Um simples movimento muda todas as características originais? Entre várias hipóteses que são possíveis levantar diante das próprias tomadas de decisão, percebendo assim as suas regularidades.

Cabe ao docente, entretanto, planejar atividades que deem sentido ao uso da ferramenta, de modo que ela não se restrinja a um recurso técnico, mas se torne um apoio efetivo na mediação entre teoria e prática, promovendo aprendizagens mais consistentes e relevantes. Por consequência, a prática docente deixa de se restringir a abordagens tradicionais e passa a incorporar múltiplas formas de pensar, resolver e representar uma situação problema, impulsionando o elo entre teoria e prática. Como afirma D’Ambrosio (2012, p. 74), “a escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. [...] O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã.” Além disso, ele ressalta que “nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não há teoria e prática desvinculadas", apontando para uma dinâmica em que teoria e prática se entrelaçam e se modificam mutuamente, criando caminhos para novas investigações e práticas pedagógicas mais significativas. Além disso, Fiorentini e Lorenzato (2012, p.76) afirmam que "a teoria não é um ponto de partida, mas um instrumento de interpretação e reconstrução da prática".

A educação brasileira atravessa cenários diversos, que exigem dos docentes uma postura sensível, flexível e consciente dos múltiplos desafios que permeiam o cotidiano escolar. Nas salas de aula, ainda é comum a presença simultânea de estudantes que dominam recursos tecnológicos junto a outros que vivenciam limitações severas de acesso à informação e às ferramentas digitais. As condições físicas das instituições também possuem variações, Silva (2025, p.23) afirma que "desafios como, falta de recursos tecnológicos atualizados, ausência de espaços como laboratórios de informática, internet com velocidade limitada, falta de tempo, entre outros, são frequentes principalmente em escolas públicas", muitas vezes com espaços marcados pela precariedade e pela escassez de recursos, que se prolongam ano após ano.

> Um dos grandes desafios que os professores brasileiros enfrentam está na necessidade de saber lidar pedagogicamente com alunos e situações extremas: dos alunos que já possuem conhecimentos avançados e acesso pleno às últimas inovações tecnológicas aos que se encontram em plena exclusão tecnológica; das instituições de ensino equipadas com as mais modernas tecnologias digitais aos espaços educacionais precários e com recursos mínimos para o exercício da função docente. O desafio maior, no entanto, ainda se encontra na própria formação profissional para enfrentar esses e tantos outros problemas (Kenski, 2012, p.103).

Embora o discurso sobre a inserção das TD na educação tenha avançado nos últimos anos, os desafios práticos persistem e continuam a exigir ações concretas, especialmente em relação a investimentos, políticas públicas e programas de formação docente que considerem as múltiplas realidades escolares. Borba e Penteado (2012) destacam que inserir TD em suas aulas é um caminho árduo para o professor, especialmente porque que muitos ainda encaram essas inovações como uma zona de risco, porém, destacam o potencial que essa zona de risco tem de provocar mudanças.

> Parece-nos que, ao caminhar em direção à zona de risco, o professor pode usufruir o potencial que a tecnologia informática tem a oferecer para aperfeiçoar sua prática profissional. Aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem (Borba; Penteado, 2012, p. 66).

A incorporação de novas tecnologias no contexto educacional exige dos professores uma postura reflexiva e aberta à transformação de suas práticas. Em vez de simplesmente adaptar os recursos digitais às metodologias tradicionais, é necessário explorar as potencialidades específicas de cada tecnologia, reconhecendo que nem todo problema didático se mantém eficaz ao ser transposto para uma nova mídia. Autores como Borba, Silva e Gadanidis (2020) alertam para o risco da domesticação das tecnologias, que ocorre quando elas são utilizadas apenas para reproduzir práticas antigas como, "por exemplo, usar ambientes de aprendizagem para enviar um PDF é o que chamamos de domesticação" (p.26). Nesse sentido, o desafio de inserir TD não se limita a um momento histórico específico, mas sim, se renova constantemente, pois a cada ano surgem novos avanços tecnológicos que exigem dos professores novas adaptações, novas reflexões e novas formas de explorar o potencial pedagógico das TD. Assim, a tarefa de integrar tecnologias à educação é permanente e dinâmica, marcada pela necessidade de inovação contínua e pela busca de práticas que favoreçam a produção de conhecimento em coletivos mediados por essas ferramentas.

D´Ambrosio (2012, p.73) destaca a importância do professor no processo educativo, que tanto educação à distância quanto outras utilizações de tecnologia nunca substituirá o professor, são apenas meios auxiliares para ele. Porém, se este for incapaz de fazer uso desses meios, não terá espaço na educação. "O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos estudantes, pela escola e pela sociedade em geral". Por consequência, "a formação continuada docente voltada para o uso de ferramentas digitais como recurso pedagógico, passa a ser essencial diante da realidade atual, principalmente para os professores de matemática" (Silva, 2025, p.18).

Nesse cenário de transformações educacionais, em que as TD se consolidam como mediadoras entre teoria, prática e contexto sociocultural, emerge a necessidade de uma atuação docente cada vez mais consciente, crítica e criativa. O papel do professor transcende o domínio técnico dos recursos e passa a envolver decisões pedagógicas que potencializem aprendizagens, respeitem as singularidades dos estudantes e valorizem a investigação como caminho para o desenvolvimento de novas formas de conhecer. Assim, o uso dos recursos digitais, não apenas ampliam o repertório didático, mas propiciam experiências que entrelaçam conceitos, linguagens e representações, sustentando práticas mais dialógicas e conectadas às realidades.

2.4 ALGUNS ESTUDOS PRECEDENTES SOBRE O TEMA DA PESQUISA

Nesta seção, apresentam-se estudos e reflexões sobre o processo de aprendizagem mediado por TD, com destaque para o software GeoGebra e sua contribuição na construção de OVA. A análise é pautada na resolução de problemas matemáticos, a partir da utilização de diferentes registros de representações semióticas, conforme proposto por Raymond Duval. São abordados trabalhos que investigam o uso das TD na compreensão de conteúdos como progressões e funções, evidenciando o potencial pedagógico de tais recursos para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Ao realizar um levantamento no repositório eduCAPES, foram identificados 71 trabalhos acadêmicos que abordam direta ou indiretamente a utilização do GeoGebra em práticas pedagógicas. Essas produções incluem dissertações, teses, objetos educacionais e materiais didáticos voltados para o Ensino Fundamental, Médio e Superior, abordando diferentes conceitos dentro do componente curricular de Matemática destes respectivos níveis de ensino.

Dentre esses trabalhos consultados, foi selecionada, por uma maior similaridade com essa pesquisa, a dissertação de Nascimento (2023), intitulada *Sala de aula invertida e o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática para explorar função afim no Ensino Médio Integrado*, desenvolvida no Instituto Federal Baiano. O trabalho articula o uso do GeoGebra com a metodologia da sala de aula invertida, fundamentando-se na TRRS, e o autor explica que essa articulação foi utilizada para ensinar função afim.

> Tomamos como exemplo o objeto do conhecimento Função Afim, que é foco de análise em nossa pesquisa. Se o professor apresenta apenas o registro algébrico, o aluno pode compreender que a Função Afim se resume exclusivamente àquela representação, mas, se por outro lado, ele permite que o aluno tenha acesso aos registros gráficos, tabulares ou em língua natural, esse repertório é nitidamente ampliado (Nascimento, 2023, p. 59).

Esse trabalho contribui com a pesquisa ao destacar a eficácia da TRRS, evidenciando que a diversificação de registros (gráfico, algébrico, simbólico, entre outros) favorece a compreensão dos conceitos matemáticos. Destaca ainda, que os estudantes mostraram avanços significativos em abstração, resolução de problemas e análise crítica, além de maior autonomia e criatividade.

Ao realizar uma pesquisa no acervo acadêmico do repositório institucional Lume, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), foram identificados 102 trabalhos acadêmicos que abordam o uso do software GeoGebra e 48 que abordam a TRRS em diferentes contextos educacionais. Dentre essas produções, foi selecionada a dissertação de Marchetto (2017), intitulada *O uso do software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais*, desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática da UFRGS. Este trabalho foi selecionado por apresentar uma abordagem diretamente relacionada a temas da presente pesquisa, ao explorar o uso do GeoGebra como ferramenta didática na compreensão de conteúdos vinculados às relações entre progressões e funções.

Após a investigação quanto à utilização de o software permitir aos estudantes estabelecer conexões significativas entre esses conceitos por meio da visualização simultânea de gráficos, tabelas e expressões algébricas, Marchetto (2017, 78) conclui que “Além de tornar as aulas mais dinâmicas, a utilização do software instigou reflexões nos estudantes, que os levaram à compreensão das relações entre progressões aritméticas e funções afins, e entre progressões geométricas e funções exponenciais”. Os resultados da proposta também indicaram avanços no aprimoramento da prática docente.

Ao realizar uma busca com o termo “Software GeoGebra” no repositório institucional da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), foram identificados 292 trabalhos acadêmicos relacionados ao uso do software GeoGebra, sendo 196 trabalhos de conclusão de curso, 69 dissertações e 27 artigos científicos. Já a busca com os termos “Teoria das Representações Semióticas”, “Duval” e “Ensino de Matemática”, retornou uma lista de trabalhos vinculados a diferentes áreas, entre elas “Ensino e aprendizagem”, com 352 documentos. Dentre essas produções, foram selecionadas duas dissertações, pela similaridade com o tema dessa pesquisa, que são de Valmorbida (2018) e Koraleski (2024), as quais são apresentadas na sequência.

A dissertação de Valmorbida (2018) intitulada *Uma proposta de atividades para o estudo de progressões geométricas utilizando fractais e o software GeoGebra*, foi desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no campus Chapecó. A autora propõe uma sequência didática que articula a construção de fractais clássicos com o estudo de PG, explorando conceitos como PG finita e infinita, crescente e decrescente, e razão da progressão.

Valmorbida (2018, p. 79) afirma que “recursos tecnológicos usados como ferramenta didática oferecem aos estudantes facilidades no aprendizado do conteúdo”, evidenciando a importância de integrar tecnologias no ensino, especialmente o software GeoGebra. Após a análise desse trabalho, conclui-se que o GeoGebra contribui para a compreensão de conceitos abstratos e potencializa as formas de representação semiótica, promovendo um aprendizado mais significativo e acessível.

Já a dissertação de Koraleski (2024), intitulada *O estudo da função quadrática com o GeoGebra à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), propõe uma abordagem didática para o ensino da função quadrática fundamentada na TRRS.

Apesar de abordar uma função que não foi explorada nesta pesquisa, o estudo apresenta reflexões que contribuem diretamente, especialmente quanto às potencialidades do uso do GeoGebra e das representações semióticas nas práticas em sala de aula. A autora desenvolveu um produto educacional interativo, no formato de "livro digital" no GeoGebra, contendo atividades que exploram os registros gráfico, algébrico e em linguagem natural, favorecendo a conversão entre representações. Koraleski conclui que esse caderno de atividades "oportuniza que os estudantes visualizem os conceitos matemáticos, utilizando o GeoGebra e relacionando com as questões que envolvem a exploração interativa, de modo que ocorra a aprendizagem a partir da descoberta por eles mesmos" (Koraleski, 2024, p. 134).

Por meio de uma consulta online, identificou-se um livro eletrônico de Moretti (2024), disponível em formato digital pela Editora do GPEEM/PPGECT/UFSC, intitulado *Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval*. A obra apresenta uma abordagem aprofundada sobre os fundamentos da TRRS, discutindo conceitos como formação, tratamento e conversão de registros, bem como as funções discursivas da linguagem natural e as operações semiocognitivas envolvidas na aprendizagem da geometria. Moretti propõe análises de atividades didáticas reais, articulando teoria e prática por meio de situações que evidenciam os desafios e potencialidades da representação semiótica no ensino da Matemática.

Moretti (2024, p.11) exemplifica com retas de equações $y = ax + b$, identificando-as como pertencentes a dois registros distintos: o algébrico e o gráfico. O autor explora como esses registros operam por meio das ações de formação, tratamento e conversão, e destaca a translação vertical como uma operação central de articulação entre eles. Ao discutir o deslocamento da reta no plano cartesiano conforme o valor de b, evidencia como essa transformação permite interpretar propriedades visuais ligadas aos coeficientes algébricos, especialmente o coeficiente angular a, que representa a taxa de variação da reta.

O livro contribui significativamente para a compreensão dos mecanismos cognitivos envolvidos na aprendizagem e reforça a importância de propostas pedagógicas que considerem a diversidade de registros e a mediação docente como elementos centrais no processo de ensino e aprendizagem.

A partir de novas buscas online, foram localizados dois trabalhos que apresentam estreita relação com a presente pesquisa. Esses estudos contribuem com diferentes perspectivas sobre o uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Matemática. Um deles é o artigo intitulado *O uso do GeoGebra para a interpretação geométrica de funções aplicadas ao estudo das progressões aritméticas e geométricas*, de Ferreira, Alves e Santos (2021), os autores propõem uma situação didática voltada à visualização simultânea dos gráficos PA e PG com o uso do GeoGebra. Os autores destacam que o uso de ferramentas digitais como o GeoGebra favorece a compreensão geométrica das progressões e amplia as possibilidades de exploração conceitual em sala de aula.

Outro é o trabalho intitulado *Registros de representação semiótica e tecnologias digitais na aprendizagem de função exponencial*, de Mendonça e Pires (2016), relata uma intervenção com estudantes do Ensino Médio utilizando o GeoGebra para explorar propriedades da função exponencial. A pesquisa, vinculada a uma dissertação de mestrado, adota a TRRS como base teórica e afirma que:

> Percebemos com a aplicação desse teste piloto que as TD podem de fato auxiliar os estudantes na associação entre os registros algébrico e gráfico e que a mobilização e coordenação de diferentes representações do mesmo objeto matemático pode contribuir para que os estudantes façam conjecturas, observem regularidades e descubram propriedades (Mendonça; Pires, 2016, p. 12).

Essa perspectiva reforça o papel das TD como impulsionadoras de uma aprendizagem mais investigativa, em que o estudante se torna protagonista na construção do conhecimento. Ao integrar diferentes formas de representação, essas ferramentas não apenas ampliam o acesso aos conceitos matemáticos, mas também despertam novas maneiras de pensar e interagir com os significados envolvidos.

Embora os trabalhos consultados na revisão bibliográfica evidenciem o potencial pedagógico do GeoGebra e da TRRS na aprendizagem de funções e progressões, esta pesquisa se distingue por integrar, de forma articulada, a resolução de problemas, o uso de OVA interativos e a mediação via GeoGebra Tarefa. As atividades foram desenvolvidas em oficinas investigativas que favorecem a transição entre registros semióticos em múltiplas tarefas, relacionando PA com função afim e PG com função exponencial, por meio da manipulação de OVA e da resolução de problemas contextualizados.

3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta o caminho metodológico trilhado ao longo da pesquisa, detalhando a abordagem adotada, os instrumentos de produção e coleta e análise dos dados, bem como o contexto de realização das atividades.

A pesquisa foi conduzida por meio de uma abordagem qualitativa, na forma de pesquisa-ação, onde a pesquisadora atuou diretamente no ambiente educacional com o objetivo de transformar práticas pedagógicas e promover maior liberdade de ação e aprendizagem. Essa modalidade de investigação está fundamentada nos pressupostos de Fiorentini e Lorenzato (2012), que defendem a pesquisa como processo dinâmico de reflexão sobre a prática, envolvendo os sujeitos na construção coletiva do saber. Fiorentini e Lorenzato (2012, p.17) afirmam que "a investigação em Educação Matemática deve estar comprometida com a transformação da prática educativa, com a valorização dos saberes docentes e com a construção coletiva do conhecimento". Nesse sentido, o ensino não é visto como uma simples transmissão de conteúdo, mas como um espaço de criação e investigação, onde os estudantes têm voz ativa na construção de significados.

O trabalho foi desenvolvido com uma turma do 1º ano do Ensino Médio – Curso Técnico em Informática, em uma escola pública de tempo integral situada na cidade de Concórdia – SC, envolvendo 11 estudantes. A pesquisadora, atuando como docente na disciplina de Matemática, estabeleceu uma relação pedagógica próxima e colaborativa com os estudantes, o que favoreceu um ambiente propício à experimentação e ao desenvolvimento das oficinas.

As atividades foram aplicadas ao longo de 20 encontros distribuídos entre os turnos matutino e vespertino, todas de 45 minutos, totalizando 15 horas de aula. A abordagem metodológica envolveu oficinas em formato de workshop, estruturadas com o auxílio do software GeoGebra, explorando os OVA para promover a manipulação de diferentes representações. Ao todo, os estudantes resolveram 15 situações-problema, articulando conceitos de PA, PG, funções afins e exponenciais, promovendo reflexões sobre regularidade, juros, generalizações dos padrões, crescimento e decaimento em diferentes contextos. Esse arranjo possibilitou o acompanhamento contínuo da evolução dos estudantes, oferecendo subsídios para a análise do percurso investigativo e das estratégias mobilizadas no decorrer da oficina.

As atividades foram realizadas por meio da plataforma GeoGebra Tarefa, que se mostrou uma aliada essencial nos processos de ensino, aprendizagem e pesquisa. Para participar das tarefas, cada estudante criou seu próprio perfil na plataforma *geogebra.org*, possibilitando o acesso personalizado aos OVA elaborados pela professora-pesquisadora. Ao entrar nas salas virtuais criadas para cada atividade, os estudantes interagiram com os OVA manipulando controles deslizantes, testando parâmetros, observando gráficos dinâmicos e respondendo diretamente às questões formuladas.

A plataforma ofereceu *feedback* automático para cada tentativa, permitindo que os estudantes verificassem instantaneamente se suas respostas estavam de acordo com o espectro esperado. Isso incentivou a autonomia, a autorregulação e o desenvolvimento do raciocínio investigativo. Todas as respostas e cálculos ficaram salvos digitalmente no perfil da pesquisadora no GeoGebra, de modo estruturado e acessível, o que facilitou a posterior análise dos dados.

Esse recurso não apenas preservou o histórico completo das produções dos estudantes, como também permitiu identificar padrões, avanços, dúvidas recorrentes e elementos de argumentação e representação. A centralização dos dados em ambiente digital promoveu maior precisão na análise, contribuindo para uma leitura mais contextualizada e eficiente do percurso investigativo dos estudantes. Nessa perspectiva, temos uma análise reflexiva onde a pesquisadora "não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica" (Fiorentini; Lorenzato, 2012, p. 69).

Desta forma, a principal ferramenta de produção e coleta de dados foi composta pelos relatórios digitais gerados automaticamente pela plataforma. Além deles, também foram utilizados registros complementares, como o diário de bordo, imagens de interações com o software e alguns materiais físicos produzidos pelos estudantes. O diário de bordo, redigido continuamente pela pesquisadora durante os encontros, foi essencial para documentar comportamentos observados em sala de aula, interações entre os estudantes, estratégias de resolução adotadas e reflexões espontâneas ao longo das atividades. Nesse instrumento, foram anotados também os tempos aproximados para realização das tarefas, bem como os comentários e perguntas que emergiam durante os processos de resolução. Esse recurso permitiu acompanhar o desenvolvimento da turma em tempo real, com um olhar sensível à postura dos estudantes e aos indícios de compreensão ou dúvida frente aos conteúdos propostos. Para preservar a identidade dos participantes, os estudantes foram identificados com a letra "E" seguida de um número, atribuído aleatoriamente entre 1 e 11, correspondendo à quantidade de estudantes envolvidos nas oficinas.

As imagens capturadas de interações com o software e dos manuscritos produzidos, enriqueceram o acervo documental. Essa variedade de registros refletiu não apenas o caminho de resolução seguido pelos estudantes, mas também suas dúvidas intermediárias, erros construtivos e reformulações realizadas ao longo das etapas investigativas. A combinação desses diferentes instrumentos proporcionou uma leitura mais ampla e contextualizada da experiência dos estudantes, contribuindo para uma análise pedagógica mais precisa e significativa.

Essa riqueza de dados está alinhada aos princípios da metodologia qualitativa, que valoriza os processos formativos em sua integralidade. Para Fiorentini e Lorenzato (2012, p.42) "A pesquisa qualitativa em educação matemática busca compreender os significados das ações dos sujeitos em seus contextos". Nesse enfoque, reconhece-se que aprender Matemática vai muito além de acertar ou errar uma resposta: trata-se de pensar, expressar, testar, reformular, dialogar e construir sentido. Ao combinar registros escritos, digitais, discursivos e observacionais, foi possível compor uma narrativa analítica que respeita o percurso singular de cada estudante, observando seus avanços, dificuldades, reinterpretações e estratégias mobilizadas em contextos reais de aprendizagem.

Para apresentar a análise dos dados de uma pesquisa qualitativa, Bardin (2011) propõe a técnica de Análise de Conteúdo. Essa abordagem permite uma interpretação sistemática e objetiva das mensagens, visando a compreensão dos significados implícitos nos discursos dos participantes, conforme explica a autora:

> A análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção dessas mensagens (Bardin, 2011, p. 48).

A aplicação dessa metodologia possibilita a categorização dos dados e a construção de sentidos a partir das falas, documentos ou registros analisados, contribuindo para uma leitura aprofundada dos fenômenos investigados.

Por conta disso, a análise dos dados seguiu os pressupostos da análise de conteúdo, conforme Bardin (2011), permitindo a identificação de núcleos de sentido e categorias emergentes. Essa técnica favoreceu a organização sistemática das informações, respeitando a subjetividade dos participantes, mas oferecendo rigor interpretativo. A partir dos objetivos da pesquisa e da leitura atenta dos dados, foram definidas duas categorias: 1) Contribuições dos OVA para reconhecimento e transição entre diferentes representações semióticas pelos estudantes; 2) Contribuições dos problemas para reconhecimento e transição entre diferentes representações semióticas pelos estudantes.

A aplicação das fórmulas do termo geral das progressões (PA e PG), a modelagem de funções afins e exponenciais, bem como o cálculo e análise de somas finitas e infinitas, revelam apropriação de conteúdos tipicamente abstratos, geralmente associados a níveis avançados de escolarização. Os estudantes foram capazes de comparar diferentes tipos de progressão, interpretar propriedades como regularidade multiplicativa e convergência, distinguir os efeitos da razão sobre os gráficos e compreender o impacto das variações nos comportamentos funcionais.

Além disso, a postura investigativa, a proposição de estratégias próprias, a reformulação de hipóteses e a capacidade de justificar resultados com coerência apontam para o desenvolvimento da argumentação, da abstração e da autonomia intelectual dos estudantes. Tais aspectos evidenciam não apenas o domínio conceitual, mas também o amadurecimento cognitivo e a intencionalidade na resolução de problemas, conforme discutem Polya (1995), Fainguelernt e Nunes (2012) e Moretti (2024), ao ressaltar o papel de práticas pedagógicas reflexivas e contextualizadas no fortalecimento da aprendizagem.

A fundamentação teórica que orientou a proposta pedagógica se apoia em autores que discutem a resolução de problemas e o raciocínio matemático, como Onuchic e Allevato (2011), Polya (1995) e Burak e Aragão (2012). A perspectiva da conversão entre registros semióticos é embasada nos estudos de Duval (1995, 2009, 2018), enquanto o uso de tecnologias no ensino de matemática é fundamentado com Borba, Silva e Gadanidis (2020) e Kenski (2012). A abordagem reflexiva e o estímulo à autonomia dos estudantes dialogam com os trabalhos de Fainguelernt e Nunes (2012), Colombo (2008) e Moretti (2024). Por fim, a valorização dos saberes dos estudantes e da diversidade de expressões matemáticas está em consonância com os princípios propostos por D’Ambrosio (2012).

Dessa forma, a metodologia adotada nesta pesquisa possibilita uma análise aprofundada e sensível do processo de aprendizagem dos estudantes, respeitando suas trajetórias individuais e valorizando suas formas de pensar, argumentar e representar matematicamente. Ao promover a articulação entre registros semióticos, o uso de TD e a resolução de problemas contextualizados, ampliaram-se os espaços de reflexão, expressão e criação no ensino de Matemática, fortalecendo a construção de aprendizagens.

4 CONTEXTUALIZAÇÃO DAS TAREFAS E ANÁLISES DOS RESULTADOS

A pesquisa foi realizada com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de um Curso Técnico de Informática, por meio de oficinas em formato de workshop que envolveram quinze situações-problema focadas na análise das relações entre PA e funções afins e entre PG e funções exponenciais. Como a turma é de período integral, algumas oficinas ocorreram no período matutino e outras no período vespertino, ao longo de quatro semanas, em vinte aulas de Matemática, todas de 45min, totalizando quinze horas.

As tarefas aplicadas com a turma, que foram detalhadas na próxima seção, compõem um conjunto de atividades planejadas para promover a exploração das representações semióticas e da resolução de problemas. Essas tarefas foram estruturadas de forma progressiva, conforme mostra o Quadro 1, visando à familiarização dos estudantes com o software GeoGebra e os OVA produzidos.

Quadro 1 - Resumo e organização das tarefas

NÚMERO DA TAREFA	NOME DA TAREFA	RESUMO DO QUE FOI ESTUDADO
TAREFA 1	OVA 1: Analisando o comportamento de uma PA.	Foram elaboradas oito questões-problema, com o intuito de explorar e manipular os parâmetros do OVA. Os estudantes construíram sequências numéricas, classificaram os padrões como crescentes, decrescentes ou constantes, identificaram o tipo de função envolvida e realizaram construções no GeoGebra.
TAREFA 2	PROBLEMA 1: Corrida de táxi.	O problema central proposto foi desdobrado em seis questões-problema. Os estudantes construíram a sequência numérica, identificaram seus parâmetros, modelaram a situação com função afim, representaram graficamente no GeoGebra e aplicaram restrições ao domínio.
TAREFA 3	PROBLEMA 2: Sequência dos números pentagonais.	O problema central proposto foi desdobrado em cinco questões problemas. Os estudantes construíram a sequência numérica do padrão dado, identificaram seus parâmetros, modelaram a situação com função afim, calcularam o centésimo termo e representaram graficamente no GeoGebra.
TAREFA 4	PROBLEMA 3: Análise dos termos equidistantes de uma PA.	O problema central proposto foi desdobrado em seis questões-problema. Os estudantes construíram sequências numéricas, identificaram pares equidistantes, analisaram padrões, calcularam somas e elaboraram expressões algébricas.
TAREFA 5	OVA 2: Sequência de retângulos em PA.	Foram elaboradas seis questões-problema, para potencializar a exploração do OVA 2. Os estudantes manipularam os parâmetros da PA do OVA, analisaram geometricamente os efeitos das variações nos termos, construíram representações gráficas e realiza-

		ram a construção no GeoGebra.
TAREFA 6	PROBLEMA 4: Análise da trajetória dos ônibus X e Y	O problema central proposto foi desdobrado em sete questões-problema. Os estudantes construíram sequências numéricas, modelaram o movimento dos ônibus com funções afins, calcularam distâncias e horários de encontro, e representaram graficamente no GeoGebra com restrições de domínio.
TAREFA 7	PROBLEMA 5: Análise do volume dos reservatórios A e B.	O problema central proposto foi desdobrado em oito questões-problema. Os estudantes construíram sequências numéricas, determinaram funções afins, identificaram o ponto de interseção entre os volumes dos reservatórios e representaram graficamente a situação no GeoGebra.
TAREFA 8	PROBLEMA 6: Juros simples.	O problema central proposto foi desdobrado em cinco questões-problema. Os estudantes construíram a sequência dos valores mensais, determinaram o termo geral da PA, modelaram a situação com função afim, representaram graficamente no GeoGebra e calcularam o tempo necessário para dobrar o valor investido.
TAREFA 9	OVA 3: Observando o comportamento de uma PG.	Foram elaboradas nove questões-problema para potencializar o estudo do OVA. Os estudantes manipularam os parâmetros da PG em ambiente digital, observaram o comportamento da sequência para diferentes valores de razão e termo inicial, classificaram os tipos de crescimento e oscilação, e construíram definições conceituais com base nas variações analisadas.
TAREFA 10	PROBLEMA 7: O Desafio do Tabuleiro de Xadrez: A Lenda dos Grãos de Arroz	O problema central proposto foi desdobrado em dez questões-problema. Os estudantes construíram a sequência de grãos de arroz nas casas do tabuleiro, identificaram a PG envolvida, determinaram o termo geral e a função exponencial, representaram graficamente a situação e analisaram o crescimento em diferentes registros, incluindo o uso do GeoGebra.
TAREFA 11	PROBLEMA 8: Taxa de Decaimento Radioativo do Rádio-226.	O problema central proposto foi desdobrado em seis questões-problema. Os estudantes analisaram o gráfico de decaimento, identificaram a PG envolvida, determinaram a função exponencial, calcularam a massa em diferentes períodos e representaram graficamente a curva no GeoGebra, explorando o conceito de meia-vida.
TAREFA 12	PROBLEMA 9: Comparação de Investimentos.	O problema central proposto foi desdobrado em cinco questões-problema. Os estudantes construíram as sequências de rendimento de dois investimentos, determinaram o termo geral de cada uma, modelaram a situação com funções exponenciais, representaram graficamente no GeoGebra e analisaram as vantagens comparativas ao longo do tempo.
TAREFA 13	OVA 4: Sequência de retângulos em PG.	Foram elaboradas 21 questões-problema para potencializar o estudo do OVA. Os estudantes manipularam parâmetros da PG em ambiente digital, calcularam termos e somas, construíram tabelas e gráficos, exploraram o comportamento da sequência em dife-

		rentes contextos, identificaram o limite da soma infinita e relacionaram os dados com áreas de figuras geométricas. Também realizaram construções no plano cartesiano e no GeoGebra, desenvolvendo expressões algébricas e funções associadas.
TAREFA 14	OVA 5: Espiral formada pela união de infinitos semicírculos.	Foram elaboradas 14 questões-problema para potencializar o estudo do OVA. Os estudantes identificaram fórmulas de comprimento de circunferência e semicircunferência, construíram sequências com base nos comprimentos, calcularam somas parciais e infinitas, analisaram o comportamento da espiral com diferentes razões e justificaram a convergência da soma. Também realizaram construções geométricas e representações gráficas no GeoGebra.
TAREFA 15	PROBLEMA 10: Análise do padrão da sequência de construção de quadrados.	O problema central proposto foi desdobrado em 14 questões-problema. Os estudantes analisaram a sequência geométrica, identificaram padrões de redução de área, construíram a sequência de áreas restantes, determinaram o termo geral da PG, calcularam somas parciais e infinitas, e representaram graficamente a função associada. Também exploraram o conceito de convergência por meio da soma dos infinitos termos da sequência e compararam diferentes tipos de redução para interpretar o comportamento da área ao longo das etapas.

Fonte: Os autores (2025).

Para a realização da primeira tarefa os estudantes levaram três aulas, visto que estavam se familiarizando com o software e com o OVA em questão, aprendendo a alterar os parâmetros do a_1 (primeiro termo), r (razão da PA), q (razão da PG) e n termos da sequência, usando os controles deslizantes destes e observando o comportamento da sequência.

Na última aula da primeira semana e na primeira aula da segunda semana das oficinas, eles desenvolveram a segunda tarefa. Como os estudantes nunca haviam criado um OVA antes, todos necessitaram de auxílio, seja da professora ou dos colegas que, ao concluírem suas tarefas, passaram a ajudar os demais. A colaboração entre pares emergiu espontaneamente, evidenciando um ambiente de aprendizagem cooperativo e reflexivo (Fiorentini; Lorenzato, 2012). Além disso, segundo Moretti (2011), a aprendizagem é fortalecida em contextos onde há interação e construção coletiva de significados.

Após a conclusão da segunda tarefa, iniciaram-se as tarefas três e quatro, que juntas demandaram duas aulas. A quarta tarefa envolveu uma análise algébrica mais criteriosa que as anteriores, o que gerou algumas dificuldades e insegurança entre os estudantes que sentiram a necessidade de validação do processo antes de prosseguir. Esse comportamento revela que, embora a proposta valorizasse a autonomia investigativa, ainda persistia a dependência, destacando a importância da mediação docente para assegurar a validade das construções algébricas.

Já na quinta tarefa, os estudantes começaram a mostrar maior confiança no manuseio do software e no conhecimento adquirido. Alguns passaram a se desafiar sozinhos, sem precisar de aprovação ao longo do processo. Conseguiram analisar o OVA 2 disponibilizado e elaborar o OVA solicitado em uma única aula, sem grandes dificuldades e com muito entusiasmo. Assim, encerrou-se a segunda semana das oficinas.

Na terceira semana, as duas primeiras aulas foram bastante produtivas. Os estudantes concluíram as tarefas seis, sete e oito. Alguns estudantes que foram finalizando suas tarefas passaram a auxiliar os colegas que estavam mais atrasados, contudo, orientados a não fazerem as tarefas pelos colegas, e sim auxiliá-los. Com isso, os estudantes avançaram juntos para a próxima tarefa, dando início às explorações sobre PG.

Nas próximas duas aulas, os estudantes conseguiram concluir as tarefas nove e dez. A tarefa nove envolveu a análise do OVA 3, permitindo a observação de como a mudança de parâmetros impactam na sequência e no gráfico resultante, com o objetivo de reconhecer os conceitos fundamentais da PG. Como a maioria dos estudantes estava apresentando familiaridade com os objetos virtuais, foi possível analisar esse OVA e responder às questões em menos de uma aula, utilizando o tempo restante para a realização da tarefa dez, que continha um número reduzido de exercícios. A maior dificuldade apresentada nessa etapa foi a transcrição das interpretações por meio da representação escrita.

Na quarta semana, teve início a tarefa onze, que levou duas aulas para sua realização. Os estudantes foram solicitados a representar graficamente o conceito de meia-vida, tanto em forma de sequência quanto de função algébrica. Em seguida, deveriam explicar qual das representações tornava mais clara a ideia de a massa ser reduzida pela metade a cada 1.620 anos.

O principal objetivo da tarefa doze foi analisar sequências, funções e gráficos para justificar como cada uma dessas representações semióticas contribui para a compreensão do problema sob diferentes perspectivas. Como os estudantes já haviam trabalhado com um conceito semelhante na atividade anterior, conseguiram desenvolver a tarefa em uma única aula.

Na tarefa treze, os estudantes analisaram o OVA 4 e responderam a vinte e uma questões, com o objetivo de examinar a relação entre a sequência de termos da PG, as somas dos termos e as áreas dos retângulos. A conclusão da tarefa ocorreu ao longo de pouco mais de duas aulas.

Nessa mesma semana foi possível concluir as tarefas, pois foram organizadas cinco aulas consecutivas, cedidas por outros professores para a oficina. Nesse período, os estudantes finalizaram a tarefa treze, além da tarefa quatorze, que envolveu a análise do OVA 5 sobre a espiral formada pela união de infinitos semicírculos, e da tarefa quinze, que abordou a sequência de quadrados retirados em cada etapa.

As seções deste capítulo apresentam os principais resultados obtidos a partir das respostas dos estudantes aos problemas propostos, da interação com os OVA e da interpretação dos conceitos relacionados a funções e progressões. Além disso, com base nos dados coletados, são descritos o percurso e a interação dos estudantes com diferentes formas de representação: geométrica, algébrica e escrita. Dessa forma, buscou-se analisar de que maneira os OVA e os problemas contribuíram para a construção do conhecimento dos estudantes ao longo das oficinas, evidenciando o impacto de cada abordagem na compreensão dos conceitos trabalhados. Essa análise foi aprofundada nas subseções seguintes, contemplando as categorias emergentes e os indicadores de aprendizagem observados, sob a luz da TRRS.

4.1 CONTRIBUIÇÕES DOS OVA PARA RECONHECIMENTO E TRANSIÇÃO ENTRE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PELOS ESTUDANTES

Para analisar as contribuições dos OVA no processo de aprendizagem, em especial, na elaboração e no trânsito entre diferentes formas de representações semióticas foram examinadas as respostas dos estudantes aos problemas propostos, bem como sua interação com os respectivos objetos. A intencionalidade foi compreender as representações apresentadas e a transição entre diferentes registros de representação. Como já mencionado, os estudantes foram identificados com a letra “E” seguida de um número, atribuído aleatoriamente entre 1 e 11.

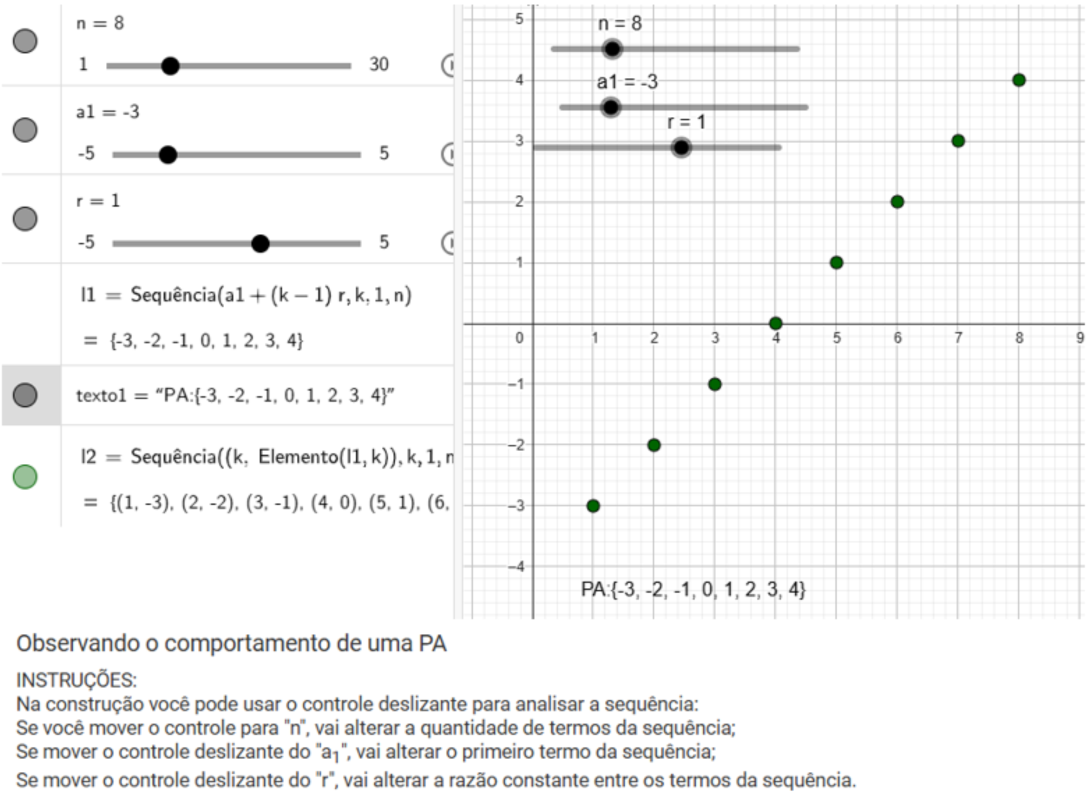
A análise foi realizada a partir de um recorte do corpus da pesquisa, analisando interações que favoreceram de forma mais significativa para reconhecimento e mobilização de múltiplos registros, conforme proposto pela TRRS. Cada OVA analisado foi apresentado como uma subcategoria específica, permitindo uma organização mais clara dos dados, para evidenciar os avanços conceituais e argumentativos dos estudantes ao longo das atividades.

4.1.1 **OVA 1: Analisando o comportamento de uma PA**

O primeiro contato dos estudantes com o OVA ocorreu durante a realização da tarefa inicial da pesquisa. Cada participante criou seu perfil no GeoGebra Tarefa e, por meio do código disponibilizado, acessou a sala virtual para responder às questões-problema elaboradas, cujas respostas eram registradas automaticamente pelo sistema. Essa etapa inicial teve como objetivo familiarizar os estudantes com o ambiente digital e com a dinâmica de interação proposta.

Nessa primeira tarefa, os estudantes foram orientados a explorar o OVA 1, ilustrado na Figura 1, ajustando parâmetros como o número de termos, o primeiro termo da sequência e a razão. A manipulação desses elementos permitiu que cada estudante observasse, em tempo real, como pequenas alterações modificavam a construção, favorecendo a compreensão das relações entre a função afim e a PA. Para consolidar esse processo, foram propostas oito questões-problema, apresentadas no Apêndice A, que exigiam não apenas a resolução algébrica, mas também a interpretação gráfica e tabular, incentivando o trânsito entre diferentes registros de representação semiótica.

Figura 1 – Print do OVA 1: Analisando o comportamento de uma PA



Fonte: Os autores (2025).

Inicialmente, ao fixar um valor para o primeiro termo a_1 e uma razão $r > 0$, para a PA, todos os estudantes identificaram corretamente que a sequência resultante era crescente. O estudante E01 descreveu que "*Fica uma sequência crescente, cujos valores possuem uma diferença constante (r)*", e os estudantes E07 e E11 confirmaram a mesma percepção, reforçando o entendimento do padrão aritmético. E06 acrescentou que *"A sequência formada terá seus termos aumentando continuamente, criando uma sequência crescente"*.

Quando a razão foi alterada para $r < 0$, todos reconheceram que a sequência dos termos da PA tornava-se decrescente. As respostas dos estudantes foram homogêneas, mencionando que o comportamento da sequência era diretamente influenciado pelo sinal da razão. Ao fixar $r = 0$, eles identificaram que todos os termos da PA mantinham o mesmo valor inicial a_1, levando a uma sequência constante. O termo "sequência constante" foi utilizado por todos. Os resultados sugerem que houve compreensão na representação geométrica disponível no OVA para a representação em forma de sequência numérica e sua relação com os parâmetros escolhidos. Ao manipularem o OVA, os participantes conseguiram também transitar para a linguagem natural, ao associarem as representações geométrica e numérica (para diferentes valores de r) com a respectiva classificação da sequência em crescente, decrescente ou constante. Esse tipo de interpretação indica uma adequada apreensão dos registros das representações observadas, conforme discutido por Duval (1995), ao destacar que a conversão entre diferentes formas de representação é essencial para a compreensão dos conceitos estudados.

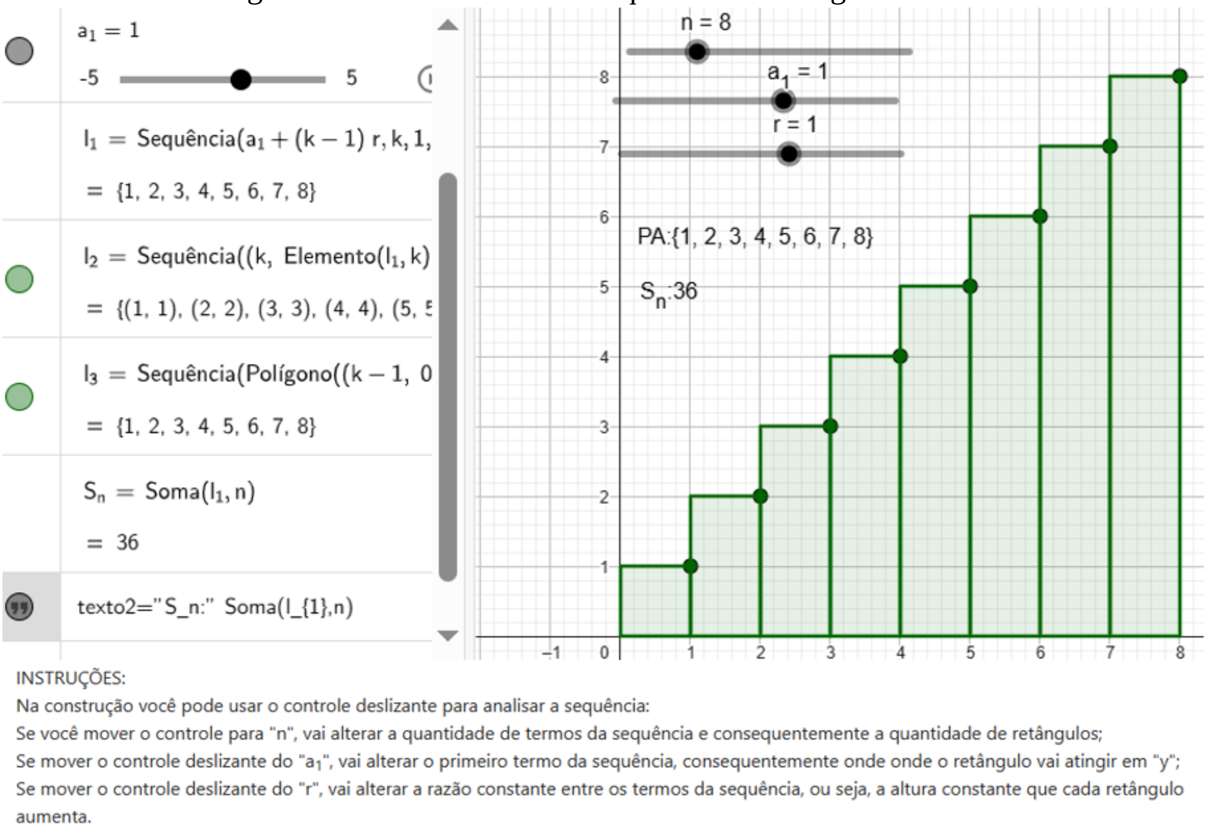
Na questão seguinte, os estudantes exploraram a representação geométrica dos termos de uma PA associando-os com o conceito de funções. Ao ligar os pontos das sequências no gráfico o estudante E03 afirmou: *"Função* [polinomial] *de primeiro grau crescente - reta crescente"*, enquanto E10 reforçou: *"Uma função* [polinomial] *de primeiro grau crescente"*. Da mesma forma, ao observar a sequência decrescente, o estudante E01 destacou: *"Função afim decrescente - reta decrescente"*. A leitura dos gráficos evidenciou a passagem de um registro sequencial para um registro gráfico, indicando coordenação semiótica entre representações (Duval, 1995). Neste sentido, observou-se também a capacidade de identificar diferentes objetos do conhecimento (PA e função afim) em uma mesma representação geométrica. Nessa atividade foi possível trabalhar com os estudantes as relações entre estes dois objetos do conhecimento, ressaltando que mesmo que a função seja considerada em um domínio discreto, a PA e função afim são objetos distintos, com naturezas e estruturas próprias. Essa compreensão está alinhada à perspectiva teórica de Duval (1995) e Moretti (2024) a qual a aprendizagem matemática exige não apenas a conversão entre registros, mas também a habilidade de reconhecer o funcionamento dos signos em cada sistema semiótico, assim como trabalhar o uso de diferentes representações sem perder de vista o objeto de estudo.

Com o aprofundamento dos conceitos, os estudantes passaram a definir a PA usando representação escrita. O estudante E02 descreveu: *"Sequência onde temos um valor fixo que é somado constantemente"*, já E08 apresentou uma explicação detalhada sobre os critérios para a progressão ser crescente, decrescente ou constante, relacionando diretamente o comportamento dos termos ao valor da razão. Assim, foi possível observar que a exploração dos controles deslizantes do OVA 1, contribuiu para que os estudantes começassem a construir significados mais consistentes sobre o conceito de PA, transitando entre as representações em linguagem natural, numérica, algébrica e gráfica. Essa transição entre registros favorece não apenas o entendimento dos conceitos envolvidos, mas também a construção de significados matemáticos contextualizados como defendem Borba e Penteado (2012) e Onuchic e Allevato (2011).

4.1.2 OVA 2: Sequência de retângulos em PA

No OVA 2 ilustrado na Figura 2, os estudantes foram orientados a utilizar os controles deslizantes para explorar o comportamento das sequências, da altura dos retângulos e a relação da soma dos termos com a área dos retângulos respondendo às seis questões-problema propostas na tarefa e apresentadas no Apêndice E.

Figura 2 – Print do OVA 2: Sequência de retângulos em PA



Fonte: Os autores (2025).

A maioria dos estudantes percebeu que ao aumentar ou diminuir a_1, todos os termos da PA se ajustavam. O estudante E01 explicou que "*todos os valores indicados vão subir ou descer de maneira igual*", enquanto E04 reforçou que "*quando a_1 aumenta, todos os termos aumentam; quando a_1 diminui, todos diminuem".* Essa observação indica uma clara compreensão da uniformidade na variação dos termos da PA. Outros estudantes mostraram compreensão parcial, como E03, que mencionou apenas que *"o gráfico fica positivo ou negativo",* sem detalhar o comportamento dos termos da sequência.

Na análise da representação geométrica, alguns estudantes reconheceram a relação entre a altura dos retângulos e a área total. E11, por exemplo, respondeu que "*a área de cada retângulo é calculada por $A = b.h$, onde a base é fixa (de uma unidade no eixo horizontal) e a altura é definida pelos valores da PA".* Eles também destacaram que aumentar ou diminuir a_1 ajusta a altura de todos os retângulos e, consequentemente, a área total.

E11 acrescentou que *"para valores negativos de a_1, os retângulos ficam abaixo do eixo x, e a soma das áreas deve ser considerada em módulo, para evitar valores negativos para as áreas".* Embora não esteja explícito nos apontamentos feitos, do ponto de vista da soma dos termos de uma PA, deve-se levar em consideração a ideia da área orientada, de forma que se parte dos retângulos estiverem "acima" do eixo OX e outra parte estiver "abaixo" do eixo OX, a soma será dada pela diferença dos valores absolutos destas áreas, prevalecendo o sinal daquela com parcela que tiver o valor absoluto maior e então aplicado o módulo. E02 e E08 mencionaram corretamente que ajustar a_1 altera a altura dos retângulos, mas não exploraram diretamente o impacto na área total.

Quanto à influência da razão r na sequência, E01, E06 e E11 explicaram que um valor positivo de r faz a PA crescer, enquanto um valor negativo resulta em uma PA decrescente. Essa compreensão foi essencial para a interpretação algébrica da sequência. Alguns estudantes, como E05 e E08, relacionaram a variação de r com o comportamento gráfico da reta, mas sem aprofundar a relação direta com os termos consecutivos da sequência. E01 mostrou compreensão de que a soma S_n aumenta conforme mais termos são adicionados à PA, ele escreveu que "*conforme n aumenta, S_n também aumenta porque mais termos estão sendo somados, ou seja, mais retângulos e mais áreas são incluídas*", considerando o caso de uma PA com termos positivos.

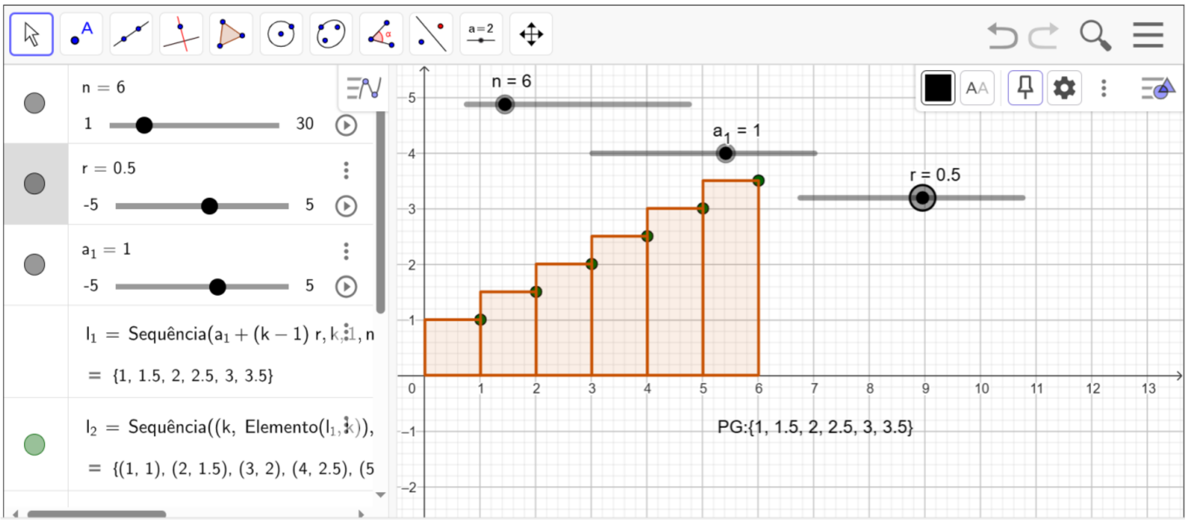
Na última questão dessa tarefa solicitou-se aos estudantes a construção de um OVA utilizando o GeoGebra. Não foi exigido que os valores atribuídos aos controles deslizantes fossem iguais, desde que representassem uma PA. Após a construção, os participantes deveriam registrar os passos utilizados no processo, descrevendo as etapas seguidas para a elaboração da atividade.

Alguns descreveram detalhadamente o processo, listando os passos para a criação dos controles deslizantes e definição da sequência. E02 explicou cada etapa, desde a configuração dos parâmetros até a construção dos retângulos e soma dos termos: *"1) Adicionei um controle deslizante nomeado "n" para mudar a quantidade de termos; 2) Depois adicionei o controle deslizante a_1 para mudar o termo inicial da PA; 3) Após isso adicionei o controle deslizante r para mudar a razão da PA; 4) Para determinar o padrão da PA eu digitei na entrada: $l\_1 = Sequência(a\_1 + (k-1)\, r, k, 1, n)$; 5) Para aparecer a sequência formada, digitei na entrada: $texto1 = Texto(\text{"}PA\text{:"}\ l\_1)$; 6) Para formar os pontos da sequência, digitei na entrada: $l\_2 = Sequência((k, Elemento(l\_1, k)), k, 1, n))$; 7) Para criar a sequência de retângulos:$l\_3 = Sequência\ (Polígono\ ((k-1{,}0), (k, 0), (k, Elemento(l\_1, k)), (k-1, Elemento\ (l\_1, k))), k, 1, n))$; 8) Para determinar a soma dos termos da sequência: $S\_n = Soma(l\_1, n)$; 9) Para aparecer a soma, digitei na entrada: $texto2\text{: "}S\_n\text{:"}Soma(l\_1, n)$."*

A proposta dessa questão exigia não apenas a configuração correta dos parâmetros algébricos (termo inicial, razão e número de termos), mas também a transposição desses elementos para uma linguagem algorítmica e, posteriormente, para uma representação geométrica digital. A descrição detalhada apresentada por E02 evidencia flexibilização do uso de representações e também de signos (Moretti, 2024), visto que, ao listar cada comando utilizado, o estudante apresentou domínio sobre os conceitos envolvidos e sobre os diferentes registros de representação mobilizados, como o algébrico, computacional, geométrico e escrito. Essa transição entre registros, conforme discutido por Duval (1995), pressupõe não apenas a conversão entre signos distintos, mas também a compreensão do funcionamento de cada sistema de significação. Nesse contexto, a clareza com que os procedimentos foram explicados em linguagem natural indica que os estudantes não apenas executaram comandos, mas compreenderam os significados matemáticos a cada etapa da construção, confirmando que a elaboração do algoritmo só foi possível porque o estudante compreendeu a estrutura da PA.

Outros estudantes, como E05, forneceram descrições mais resumidas, o que não significa dizer que eles não tenham se apropriado dos domínios conceituais. Já o estudante E04 apresentou uma explicação imprecisa, sem detalhar o funcionamento correto dos comandos. E07 mencionou que ajustou os gráficos dos parâmetros, mas sem especificar os passos utilizados. A análise dos registros de figuras geradas pelos estudantes no GeoGebra revela diferentes estratégias adotadas. Na Figura 3, ilustra-se um OVA elaborado pelo E04, em que reproduziu um OVA idêntico ao modelo apresentado na tarefa, permitindo ajustes para valores positivos e negativos de a_1 e r.

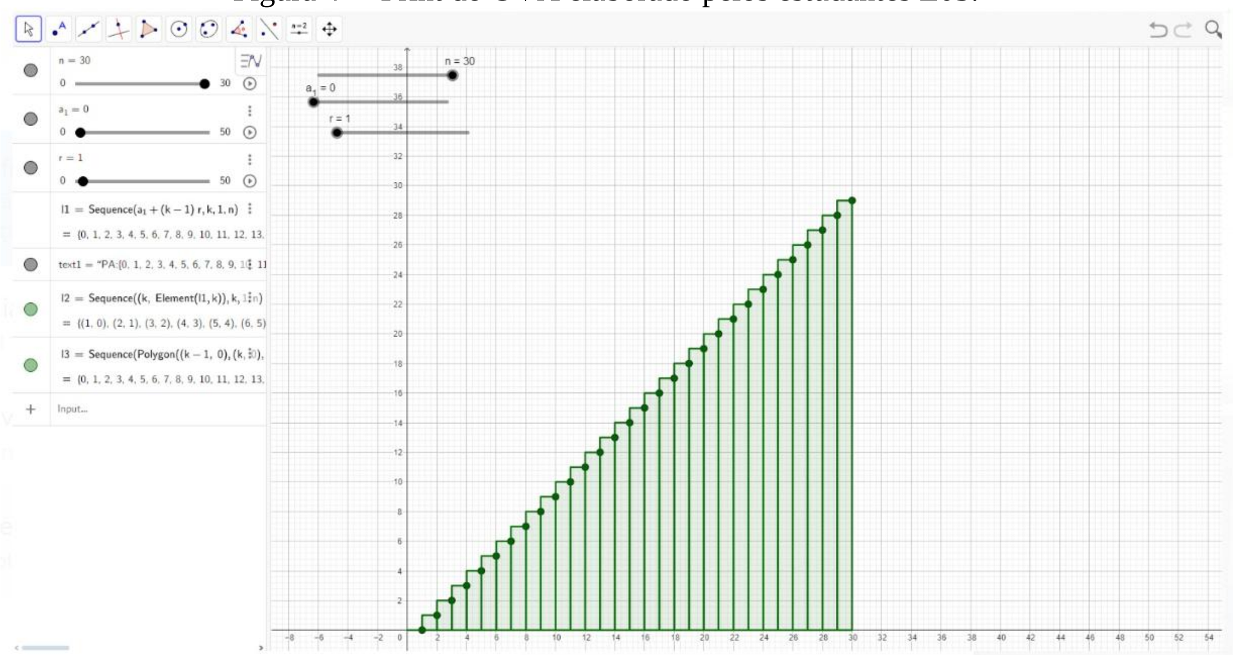
Figura 3 − Print do OVA elaborado pelo estudante E04



Fonte: Os autores (2025).

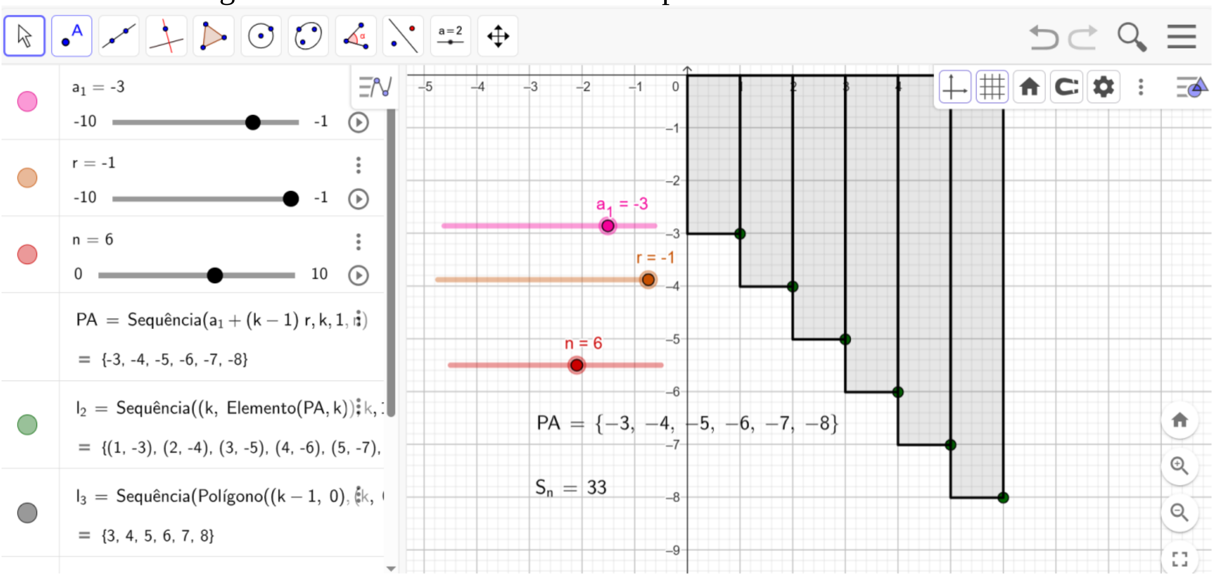
O estudante E05 optou por considerar apenas valores positivos, como apresenta a Figura 4, enquanto E01 e E03 utilizaram exclusivamente valores negativos para a_1 e r como mostra a Figura 5. Neste caso, porém, os estudantes calcularam a soma das áreas dos retângulos, não mencionando que a soma dos termos da PA seria negativa.

Figura 4 − Print do OVA elaborado pelos estudantes E05.



Fonte: Os autores (2025).

Figura 5 – Print do OVA elaborado pelos estudantes E01 e E03.



Fonte: Os autores (2025).

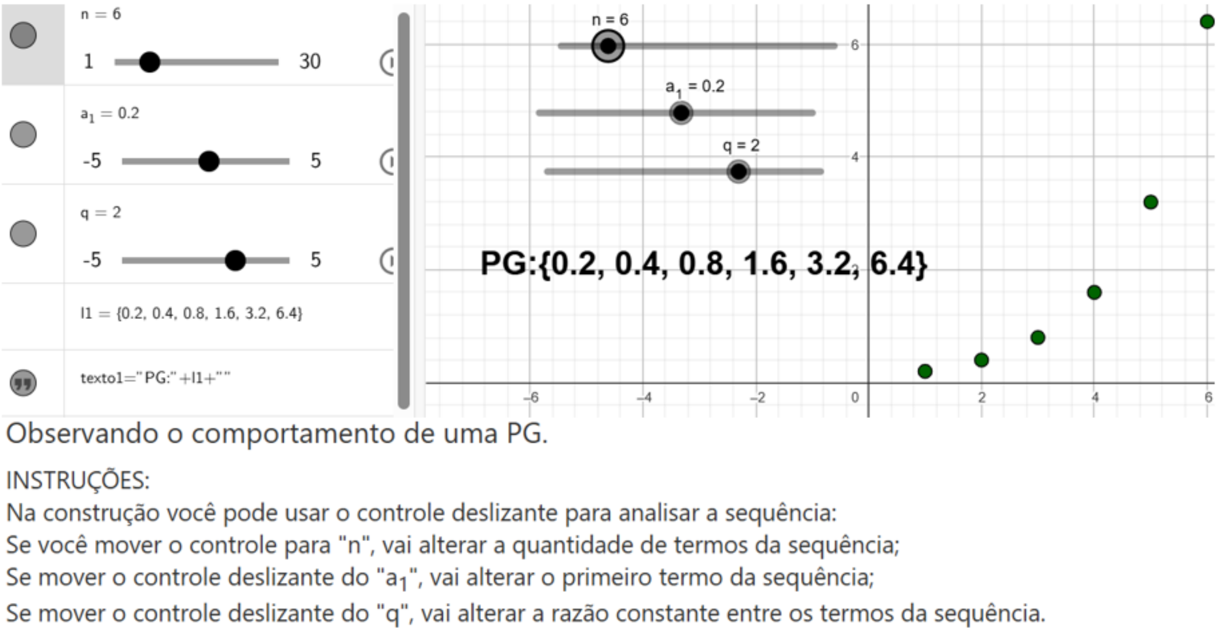
Com o avanço das atividades, os estudantes mostraram maior autonomia na interpretação das diferentes representações semióticas e na utilização dos controles deslizantes do GeoGebra. Inicialmente, o apoio externo na forma de mediação e orientação da professora foi mais necessário, mas, à medida que os estudantes exploravam os conceitos por meio de OVA elaborados no GeoGebra, passaram a identificar padrões da PA com mais independência. Esse processo reforça a importância das TRRS de Raymond Duval, que enfatizam a necessidade de coordenar diferentes formas de representação para a construção conceitual.

Além disso, a possibilidade de manipulação direta dos parâmetros favoreceu o desenvolvimento da visualização dinâmica, elemento destacado por Nascimento (2012) como fundamental para a apropriação de conhecimentos mediados por TD. Por meio dos OVA, os estudantes conseguiram relacionar propriedades da PA com as variações gráficas e geométricas observadas, consolidando a compreensão dos vínculos entre os registros numérico, algébrico, gráfico, geométrico e em linguagem natural (textual).

4.1.3 OVA 3: Observando o comportamento de uma PG

O terceiro objeto virtual analisado, o OVA3 ilustrado na Figura 6, possibilitou a exploração do comportamento de PG por meio de controles deslizantes, que permitiam a modificação de parâmetros como a quantidade de termos n, o primeiro termo a_1 e a razão q. A proposta buscou estabelecer conexões entre aspectos numéricos e geométricos da PG e as funções exponenciais, incentivando a transição entre diferentes registros de representação semiótica. A análise das respostas dos estudantes às nove questões da tarefa 9 (Apêndice I) permitiu avaliar as interpretações construídas e a forma como transitaram entre essas distintas representações.

Figura 6 – Print do OVA 3: Observando o comportamento de uma PG



Fonte: Os autores (2025).

Os resultados indicam que a maioria dos estudantes compreendeu corretamente o crescimento exponencial da PG ao explorar o aumento $q > 1$, considerando $a_1 > 0$. Estudantes como E01, E04, E05, E06 e E08 explicaram detalhadamente o efeito da razão sobre o gráfico, relacionando esse comportamento à evolução numérica dos termos da sequência. . Outros estudantes, como E02, E03, E07 e E09, apresentaram respostas mais sucintas, indicando apenas que a sequência se tornava crescente, sem aprofundar a análise visual ou algébrica.

Ao explorar a condição $q = 0$, todos os estudantes identificaram que, com exceção do primeiro termo, os demais valores seriam iguais a zero. O estudante E05 elaborou uma explicação mais detalhada, observando que *"o primeiro termo continua em seu ponto, e os demais formam uma reta horizontal no eixo x".* Esse tipo de interpretação confirma uma boa compreensão sobre o efeito da razão na sequência, utilizando para tal, a representação gráfica e numérica. Essa coordenação entre registros, como destaca Colombo (2008), permite aos estudantes observar aspectos distintos e complementares da estrutura conceitual, favorecendo a construção de significados.

Quando a razão assumiu valores $0 < q < 1$, os estudantes reconheceram que a sequência se tornava decrescente, diminuindo exponencialmente. E01, E04, E05, E06 e E08 detalharam essa relação, incluindo o intervalo da imagem (0,2] como referência. Percebe-se que os estudantes foram capazes de atribuir significados aos signos envolvidos, como a razão da sequência, o comportamento da curva e o intervalo da imagem. Em contrapartida, E03 interpretou erroneamente o comportamento, afirmando que a sequência se tornava crescente, evidenciando uma dificuldade em assimilar esse conceito, o que reforça a necessidade de promover situações que favoreçam a conversão entre registros, permitindo que o signo da razão seja compreendido em sua totalidade semiótica e funcional.

O impacto de valores negativos de q também foi observado. A maioria identificou corretamente a alternância dos termos entre positivos e negativos, como mostrado por E04, E05, E06, E07 e E08. Algumas respostas foram mais superficiais, como as de E02, E03 e E09, que mencionaram apenas que a sequência *"fica oscilante"*, sem discutir a natureza alternada ou o padrão gráfico associado. E01 exemplificou corretamente com a sequência $(2, -4, 8, -16, \dots)$, mas sua explicação sobre os valores alternados poderia ter sido mais precisa e técnica. Na variação simultânea de $a_1 < 0$ e $q < 0$, todos os que responderam corretamente à questão anterior indicaram compreensão da continuidade do padrão oscilante, já que o parâmetro $q < 0$ é o responsável por essa oscilação.

Os estudantes transitaram constantemente entre as representações numéricas, gráficas e geométricas. Esse processo reflete a importância das representações heterogêneas destacadas por Duval (2009), uma vez que cada forma de representação evidencia aspectos distintos da mesma situação-problema. Ao fazer conexões entre essas diferentes representações, os estudantes construíram uma visão mais completa do conceito.

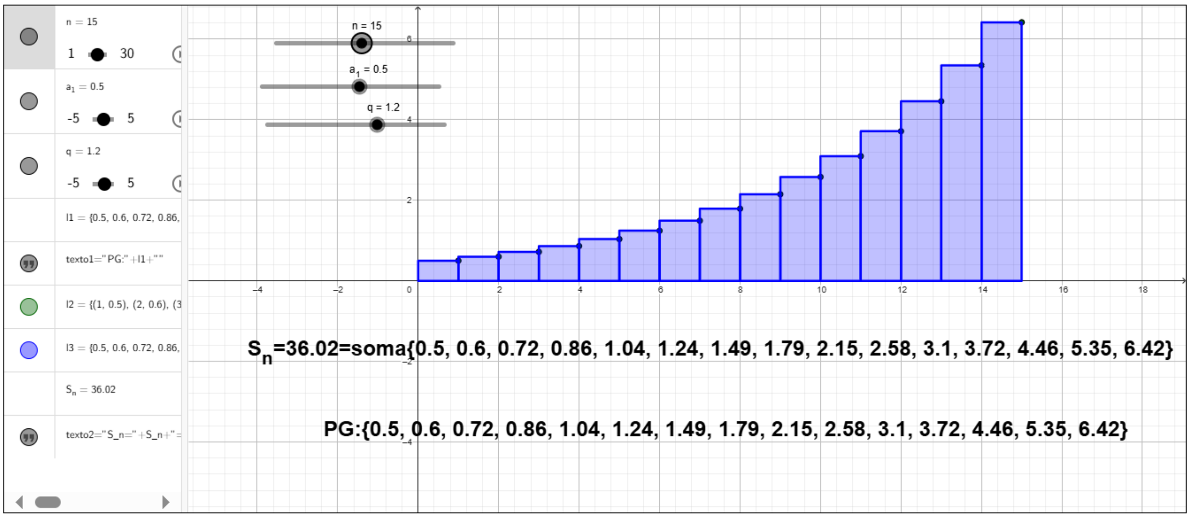
Com o auxílio do OVA 3, observou-se que os estudantes conseguiram associar propriedades das PG com o comportamento gráfico das funções exponenciais, estabelecendo pontes cognitivas entre crescimento, decaimento e os signos para representação (Duval, 1995). Essa percepção reforça a relevância da visualização dinâmica proposta por Nascimento (2012), que defende os OVA como ferramentas potentes na mediação pedagógica. Devido a essa abordagem diversificada, os estudantes não encontraram dificuldades ao elaborar uma definição para PG. Utilizando a representação escrita, em que a maioria descreveu corretamente a PG, destacando a multiplicação constante dos termos por q e evidenciando compreensão dos padrões da sequência.

Para finalizar a tarefa, os estudantes foram solicitados a fixar o controle deslizante para $a_1 = 2$ e alterar o controle deslizante da razão q para interpretar o comportamento da PG. E04, E05, E06, E08 e E09 indicaram corretamente que a PG fica crescente para $q > 1$, decrescente para $0 < q < 1$, constante para $q = 1$ e oscilante para $q < 0$. Entretanto, alguns estudantes, como E07, forneceram explicações vagas, sem explicitar a relação entre o valor da razão e a forma da sequência, evidenciando a necessidade de reforçar a conversão dos saberes algébricos em linguagem escrita, como parte da transposição didática necessária à apreensão conceitual (Duval, 1995).

4.1.4 OVA 4: Sequência de retângulos em PG

O quarto objeto virtual analisado, ilustrado na Figura 7, possibilitou aos estudantes avançar progressivamente na compreensão das PG por meio da manipulação dinâmica de parâmetros, da observação empírica e da formalização algébrica. A atividade envolveu a interpretação de 21 questões (Apêndice M), conduzindo os estudantes da exploração inicial à construção formal dos conceitos, ao mesmo tempo em que favoreceu a transição entre diferentes registros de representação: numérico, gráfico, algébrico, geométrico e escrito.

Figura 7 – Print do OVA 4: Sequência de retângulos em PG.



Fonte: Os autores (2025).

A primeira questão teve como ponto de partida a observação empírica, em que, por meio dos controles deslizantes do OVA 4, os estudantes exploraram como a soma dos termos se altera à medida que aumenta o número de elementos da PG, considerando $a_1 = 1$ e $q = 2$. O foco esteve na análise numérica e geométrica do crescimento exponencial da sequência, preparando-os para, nas duas questões seguintes, generalizar esse comportamento por meio da fórmula do termo geral da sequência e da expressão da soma dos seus termos, o que promove a transição entre três registros de representação semiótica: numérico, geométrico e algébrico.

A maioria dos estudantes conseguiu articular esses diferentes registros de representação considerando os parâmetros $a_1 = 1$ e $q = 2$. O estudante E02, por exemplo, registrou corretamente os valores das somas parciais *"$S_5 = 31$, $S_{10} = 1023$ e $S_{20} = 1.048.575$"*, na questão um. Na questão dois, ele indicou o termo geral da sequência como *"$a_n = 2^n - 1$"*, mas não apresentou os passos da generalização como feito pelo E05, por exemplo:

"Substitui o $a_1 = 1$ e $q = 2$ no termo geral da PG:

$$a_n = 1.2^{n-1}$$

$$a_n = 2^{n-1}$$

Para encontrar o vigésimo termo é só substituir $n = 20$:

$$a_{20} = 2^{20-1}$$

$$a_{20} = 2^{19}$$

$$a_{20} = 524.288\text{''}.$$

Os estudantes E02 e E05 mostraram habilidade em transitar da observação dos controles deslizantes para o registro algébrico, utilizando corretamente as expressões e evidenciando uma apropriação funcional da fórmula.

Na questão três, solicitou-se aos estudantes a expressão geral da soma dos termos da PG com os controles deslizantes fixos para $a_1 = 1$ $q = 2$ e, por meio da expressão, determinassem a soma dos 20 primeiros termos da PG. Dois estudantes deixaram a resposta em branco, enquanto os demais apresentaram o resultado corretamente, embora sem detalhar os passos utilizados na generalização e na resolução da soma dos 20 primeiros termos da sequência. Já os estudantes E05, E08 e E09, por exemplo, descreveram minuciosamente o processo, evidenciando fluidez ao transitar entre os registros numérico e algébrico. Suas respostas seguiram a estrutura:

Termo geral da soma:

$$S_n = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = 2^n - 1$$

$$S_{20} = 2^{20} - 1$$

$$S_{20} = 1.048.575.$$

A não explicitação de etapas por alguns estudantes sugere a necessidade de reforço na explicitação algorítmica. Já as três questões seguintes tinham como objetivo levar os estudantes a perceberem a relação entre a PG e a função exponencial. Na questão quatro, estudantes como E04 mostraram compreensão sobre o comportamento da PG ao registrarem os valores das somas para diferentes razões, como $q = 2, q = 3$ e $q = 4$, e concluírem que "*quando q aumenta, a soma também aumenta*".

Na sequência, os estudantes foram orientados a organizar os termos da PG como pares ordenados, o que facilitou a transição para o registro gráfico. A maioria preencheu corretamente os pontos na forma $(x, y) = (n, a_n)$, evidenciando as potências de dois, como exemplificado na resposta do estudante E03:

$$x = 1 \;\; y = 1 \;\; (1,1)$$
$$x = 2 \;\; y = 2 \;\; (2,2)$$
$$x = 3 \;\; y = 4 \;\; (3,4)$$
$$x = 4 \;\; y = 8 \;\; (4,8)$$
$$x = 5 \;\; y = 16 \;\; (5,16)$$
$$x = 6 \;\; y = 32 \;\; (6,32)$$
$$x = 7 \;\; y = 64 \;\; (7,64)$$
$$x = 8 \;\; y = 128 \;\; (8,128).$$

Apenas cinco estudantes responderam completamente à questão seis, que propôs a identificação da expressão por meio dos pares ordenados da questão anterior e apresentassem seu domínio e imagem. Entre eles, E08 que analisou os pontos da questão anterior e propôs a expressão $f(x) = 2^{x-1}$. Também apresentou com clareza o domínio $\{x \in \mathbb{R} |\; x \geq 1\}$ e a imagem $\{y \in \mathbb{R} |\; y \geq 1\}$, indicando compreensão de diferentes representações para uma mesma situação-problema. Além disso, foi discutido que a PG é uma sequência discreta, definida apenas para valores naturais de n, enquanto a função exponencial é contínua, permitindo representação gráfica sem interrupções, isto é, para todos os valores reais.

De modo geral, observou-se que a maioria dos estudantes conseguiu reconhecer a relação entre PG e função exponencial, articulando com propriedade os registros numérico, geométrico, gráfico e algébrico ao longo das atividades. No entanto, a análise das respostas da questão seis evidenciou que embora os estudantes tenham identificado corretamente o tipo de função com base nos gráficos construídos, apenas parte deles conseguiu formalizar adequadamente a lei de formação, o domínio e a imagem da função exponencial, o que indica a necessidade de maior ênfase no desenvolvimento da linguagem formal. Observa-se que a conversão da PG para pares ordenados possibilitou avanço para representação gráfica. Porém, ficou evidente que, apesar de identificar corretamente o tipo de função, parte dos estudantes ainda carece de precisão formal na escrita.

As próximas duas questões buscaram aprofundar a compreensão dos estudantes sobre a representação geométrica da PG, associando seus termos às alturas dos retângulos e à área total como representação da soma. Na questão sete, a maioria dos estudantes reconheceu corretamente que as alturas dos retângulos seguem a sequência da PG $a_n = 2^{n-1}$, como apontado por E02 e E06, que destacaram que *"cada altura é o dobro da anterior e que isso se deve à razão $q = 2$."* Esse reconhecimento indica um bom vínculo entre os registros geométrico (altura dos retângulos) e numérico (valores dos termos da sequência). Já os demais estudantes listaram a sequência *"1, 2, 4, 8, 16"* afirmaram que *"a razão vai ser sempre 2",* o que revela a consolidação da ideia de regularidade multiplicativa visualizada nos retângulos quando os parâmetros são $a_1 = 1$ e $q = 2$.

Já na questão oito, os estudantes foram levados a relacionar a área de cada retângulo com o valor do termo da PG. As respostas de E02, E06 e E09, por exemplo, apresentam uma justificativa coerente: *"a área de cada retângulo é dada pela altura (termo da PG) multiplicada pela base (1 unidade)",* sendo assim igual ao próprio termo a_n. Esses estudantes também explicitaram que *"a soma [dos termos] da PG equivale à soma das áreas dos retângulos",* estabelecendo com clareza a conexão entre o registro algébrico (soma dos termos) e o geométrico (área total das figuras). Com isso, observou-se que houve conversão entre os registros geométrico e algébrico, uma vez que os estudantes conseguiram estabelecer relações entre a forma visual (área dos retângulos) e a expressão matemática da soma da PG. Essa transposição entre registros distintos é fundamental para a apreensão conceitual, conforme apontado por Duval (2009), pois permite ao estudante compreender diferentes facetas de um mesmo objeto matemático.

As questões de nove a quinze, da tarefa 13, tiveram como foco a exploração de uma PG decrescente usando os parâmetros $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, com o objetivo de favorecer a compreensão dos conceitos de convergência, função exponencial decrescente e também a representação geométrica por áreas.

Na questão nove, a maioria dos estudantes identificou corretamente que, com os parâmetros $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, os termos *"vão ficando cada vez menores"*, reconhecendo a característica decrescente da sequência, como apontado por E02 e E06. Essa questão também solicitava o cálculo da soma dos cinco, dez e vinte primeiros termos da PG, e todos os estudantes responderam corretamente que *"$S_5 \approx 1{,}94$, $S_{10} = 2$ e $S_{20} = 2$".* Aqui observou-se uma "coincidência de valores" pelo fato de o OVA estar com arredondamento para duas casas decimais.

Avançando para o registro algébrico, a próxima questão solicitou o termo geral da PG com $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. A maioria chegou à expressão $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, enquanto outros indicaram a forma equivalente $a_n = 2^{-n+1}$. Além disso, todos conseguiram calcular corretamente o décimo termo a_{10} utilizando o termo geral encontrado.

A questão onze introduziu a fórmula da soma finita da PG, e os estudantes a aplicaram corretamente. O estudante E01, por exemplo, chegou ao resultado *"*$S_{20} = 1{,}999998092651367$*"*, enquanto os demais obtiveram valores semelhantes, variando apenas na quantidade de casas decimais utilizadas. Já E04 concluiu que *"com a fórmula da função infinita e finita cheguei ao mesmo resultado que deu 2",* em que apesar do equívoco em considerar o termo função, ele evidenciou compreensão no conceito de convergência, o que foi retomado e aprofundado na questão doze. Nessa etapa, praticamente todos os estudantes, com exceção de E07 (que deixou em branco), mostraram compreensão do conceito de limite e explicaram, com suas próprias palavras, que *"o valor da soma se aproxima de 2 porque "cada termo é a metade do anterior", o que "faz com que cada termo novo contribua cada vez menos",* como descreveram E04 e E06.

Na questão 13, a aplicação da fórmula da soma infinita foi bem executada por vários estudantes. Assim como E06, muitos mostraram segurança ao descrever os passos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = 2.$$

Concluindo, portanto, que a soma dos infinitos termos dessa sequência vale 2. Já na questão quatorze, a maioria conseguiu representar adequadamente a PG por meio da expressão da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, com domínio $x \geq 1$ e imagem $y \leq 1$, sem a necessidade da tabela, indicada se fosse necessário, estabelecendo uma correspondência clara entre a expressão algébrica e a representação gráfica da sequência, além de reforçar a distinção entre a função exponencial em domínio contínuo e a natureza discreta da PG.

Na questão quinze, os estudantes consolidaram a ideia da representação geométrica da soma. A maioria compreendeu que cada termo da PG representa a altura de um retângulo de base unitária, e que a área total dos retângulos equivale à soma dos termos, no caso de uma PG formada por termos positivos, como exemplificado por E02, E05 e E09.

Esse processo evidencia que, até o momento, os estudantes mostraram domínio na conversão de diferentes registros de representação semiótica. Primeiramente, transitaram do registro numérico para o geométrico, ao compreenderem que os valores da PG correspondem às alturas das figuras. Em seguida, realizaram a conversão do geométrico para o algébrico, relacionando a área total à expressão da soma da PG. Na sequência, utilizaram expressões que evidenciaram a conversão do registro algébrico para o gráfico. Por fim, ao justificarem em linguagem natural o comportamento de convergência das somas, transitaram do gráfico para o registro escrito, utilizando argumentações consistentes.

Essas transições confirmam a coordenação entre registros mencionada por Duval (1995), essencial para a construção conceitual em matemática. Além disso, evidenciam que os objetos virtuais favoreceram não apenas a visualização das estruturas, como também a interpretação e argumentação dos estudantes ao descreverem o comportamento das PG em diferentes contextos.

As questões de dezesseis a vinte tiveram como objetivo explorar uma PG oscilante, utilizando $a_1 = 1$ e $q = -2$, visando à compreensão dos efeitos da razão negativa sobre os termos da sequência, suas somas e sua representação gráfica. Na questão 16, a maioria dos estudantes identificou corretamente que os sinais dos termos alternam, caracterizando uma PG oscilante. E06, por exemplo, afirmou: *"A sequência alterna os sinais dos termos, ou seja, é uma PG com sinais alternados (oscilante)"*, enquanto E03 sintetizou bem a ideia ao dizer apenas: *"fica uma sequência oscilante"*, ambas coerentes com a PG analisada.

Avançando para a representação algébrica, a questão dezessete solicitava que os estudantes determinassem o termo geral da PG com $a_1 = 1$ e $q = -2$ e, com base nele, calculassem o décimo termo da sequência. A maioria avançou com facilidade, identificando corretamente a expressão $a_n = (-2)^{n-1}$ e aplicando-a na resolução. O estudante E01, por exemplo, detalhou os passos da seguinte forma:

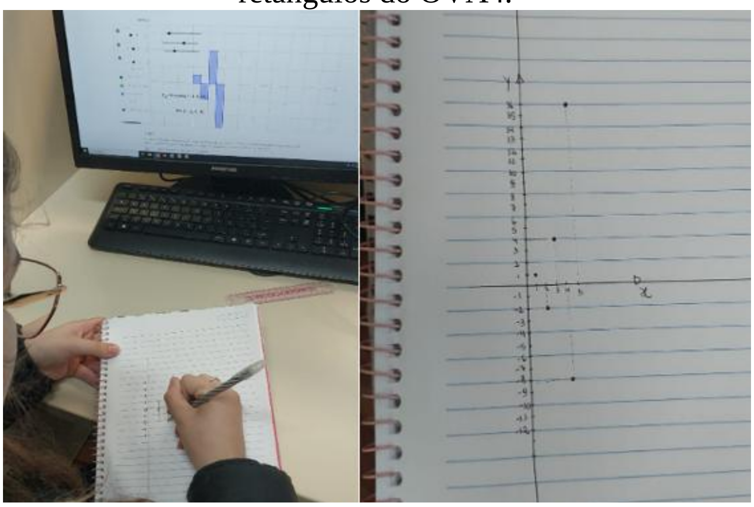
$$\mathrm{a_n} = 1.(-2)^{\mathrm{n}-1}$$
$$\mathrm{a_n} = (-2)^{\mathrm{n}-1}$$
$$\mathrm{a_{10}} = (-2)^{10-1}$$
$$\mathrm{a_{10}} = (-2)^{9}$$
$$\mathrm{a_{10}} = -512$$

Outros estudantes, como E04, não apresentaram o desenvolvimento completo, apenas afirmaram que *"de acordo como as outras, como foi pego a fórmula, fiz a mesma coisa que* *ficou* $a_{10} = -512$", indicando compreensão do procedimento, ainda que com menor explicação dos registros algébricos.

A questão dezoito levou os estudantes à análise da soma parcial dos termos. Muitos calcularam corretamente, por meio dos controles deslizantes, a soma dos nove, dez e onze primeiros termos. E08, por exemplo, afirmou "$S_9 = 171$; $S_{10} = -341$ e $S_{11} = 683$". Além disso, diversos estudantes perceberam que a quantidade de termos influencia o sinal da soma, como apontaram E02 e E05 ao explicarem que "*quando a quantidade de termos é ímpar, a soma é positiva; quando é par, a soma é negativa*". Essa observação revela a percepção dos estudantes sobre padrões oscilatórios em PG com razão negativa, reforçando a relação entre o comportamento algébrico da sequência e sua interpretação numérica.

A questão dezenove solicitava que os estudantes representassem, em um plano cartesiano, as coordenadas (n, a_n) formadas pela sequência da PG com $a_1 = 1$ e $q = -2$. De modo geral, todos compreenderam que uma função exponencial com base negativa não é definida para todos os números reais, pois resulta em uma função oscilante e descontínua. O estudante E06, por exemplo, analisou graficamente a sequência como mostra a Figura 8 e concluiu que: "*Usar uma base negativa em funções exponenciais dá bagunça, porque elas oscilam e não ficam contínuas. Por isso, deve usar base positiva*". Apesar da informalidade, essa afirmação evidencia uma leitura crítica da representação gráfica e reflete compreensão da limitação conceitual de funções exponenciais com base negativa, indicando a conversão do registro gráfico para a linguagem natural.

Figura 8 – Registro fotográfico do estudante E06 interpretando graficamente a sequência de retângulos do OVA4.



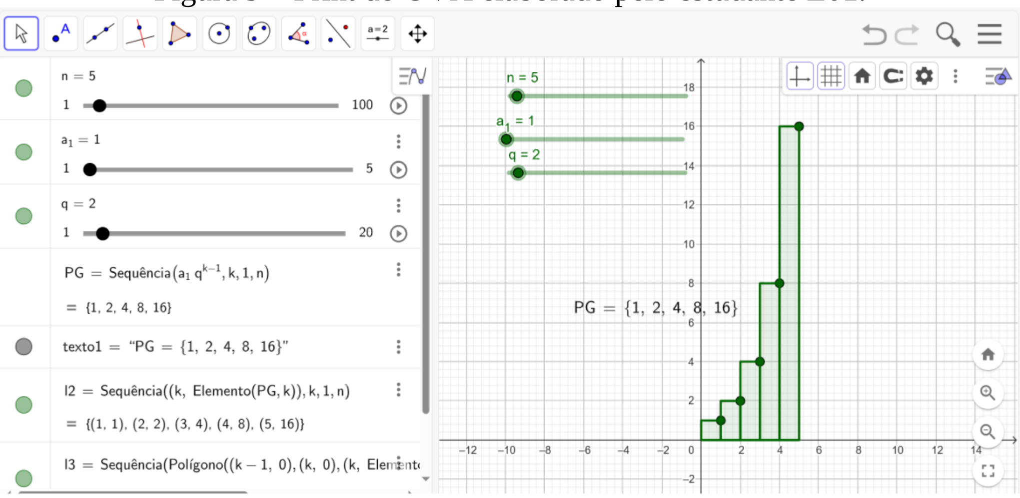
Fonte: Os autores (2025).

Por fim, na questão vinte, a maioria dos estudantes compreendeu que cada termo da PG representa a altura de um retângulo de base unitária, e que, devido à oscilação dos sinais, as áreas devem ser consideradas em valor absoluto do valor numérico do termo da sequência e que a soma dos termos da sequência se dá pela soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo OX e a subtração das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo OX. A resposta de E01, por exemplo, mostra maturidade ao afirmar que *"a soma das áreas dos retângulos alterna sinais conforme os termos oscilam; para visualizar a soma [das áreas], devemos considerar essas alternâncias e aplicar o módulo para os termos negativos".* Os resultados confirmam que o estudante conseguiu fazer a articulação entre os registros geométrico, algébrico, escrito e numérico.

A última questão dessa tarefa envolveu uma síntese e aplicação dos conhecimentos construídos ao longo das atividades anteriores, solicitando aos estudantes que elaborassem uma construção semelhante à apresentada no enunciado, mas com a escolha dos parâmetros que evitassem oscilações. De forma geral, as respostas mostram que a maioria compreendeu que a oscilação está associada a razões negativas, e que, ao manter a razão positiva ou igual a um, a PG resultante permanece crescente, decrescente ou constante. Estudantes como E01, E05 e E08 descreveram com clareza a criação dos controles deslizantes (para n, a_1 e q) e a sequência de comandos utilizados para visualizar a PG e representar graficamente as áreas dos retângulos.

E01, por exemplo, relatou: *"primeiro criei 3 deslizamentos; 1 com nome de n que é o número de termos com um mínimo de 1 e máximo de 100 com incremento 1; 1 com nome de q que é a razão com mínimo de 1 e máximo de 20 com 1 de incremento; 1 com nome a_1 que é o primeiro termo com mínimo de 1 máximo de 5 e com 1 incremento; após isso eu copiei as sequências do exemplo da tarefa 2 e textos e botei para rodar".* A Figura 9 apresenta a construção realizada por esse estudante.

Figura 9 –Print do OVA elaborado pelo estudante E01.

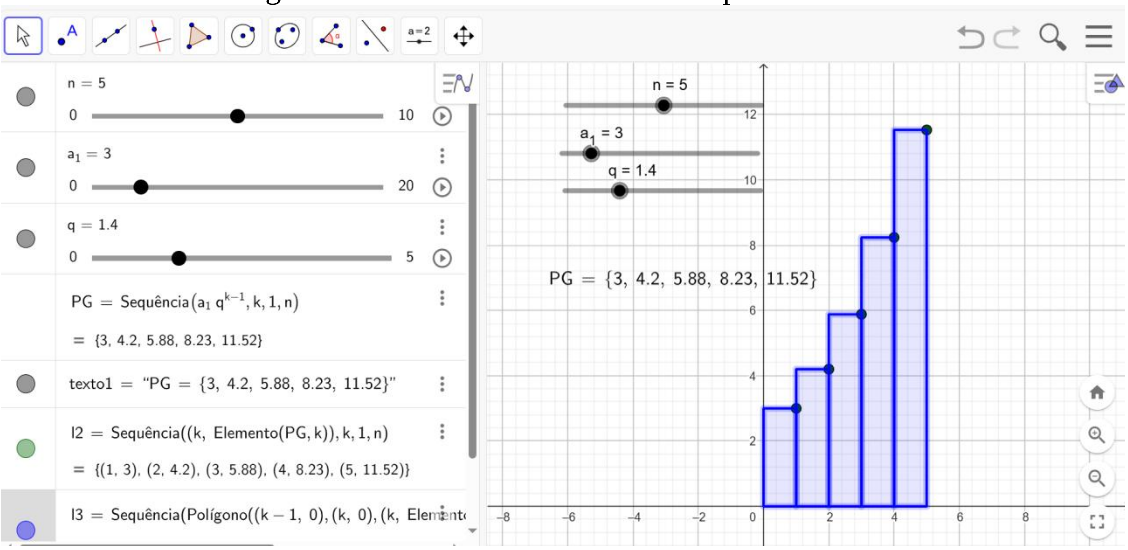


Fonte: Os autores (2025).

A construção do OVA por E01 evidencia um percurso de aprendizagem que articula diferentes registros de representação. Ao configurar os controles deslizantes e estruturar a sequência, o estudante apresentou não apenas domínio técnico, mas também compreensão dos signos envolvidos em cada sistema semiótico mobilizado. A transposição dos parâmetros algébricos para comandos computacionais e, posteriormente, para representações gráficas e linguagem natural, revela uma habilidade de reconhecer o funcionamento de cada linguagem e de converter significados entre elas. Essa mobilidade entre registros, conforme discutido por Duval (1995), pressupõe que o estudante compreenda os elementos constitutivos de cada representação como signos matemáticos que assumem sentidos distintos conforme o contexto de uso.

O estudante E08 escreveu da seguinte forma: *"Adicionei um controle deslizante, e o denominei de n, e limitei com min=0, max=10, inc=1; Adicionei mais um controle deslizante, e o denominei de a_1, e o limitei com min=0, max=20, inc=1; Adicionei mais um controle deslizante, e o denominei de q, e o limitei com min=0, max=5; Após isso, digitei na entrada: l1=Sequence(a_{1} q^(k-1),k,1,n), para adicionar o texto da sequência na tela, alterei o nome l1 para PG e arrastei a escrita para a tela; Para adicionar os pontos da sequência, digitei: l2=Sequence((k,Element(PG,k)),k,1,n); Para adicionar os retângulos digitei: l3=Sequence(Polygon((k-1,0),(k,0),(k,Element(PG,k)),(k-1,Element(PG,k))),k,1,n)"*. A Figura 10 apresenta o print da construção desse estudante:

Figura 10 – Print do OVA elaborado pelo estudante E08.



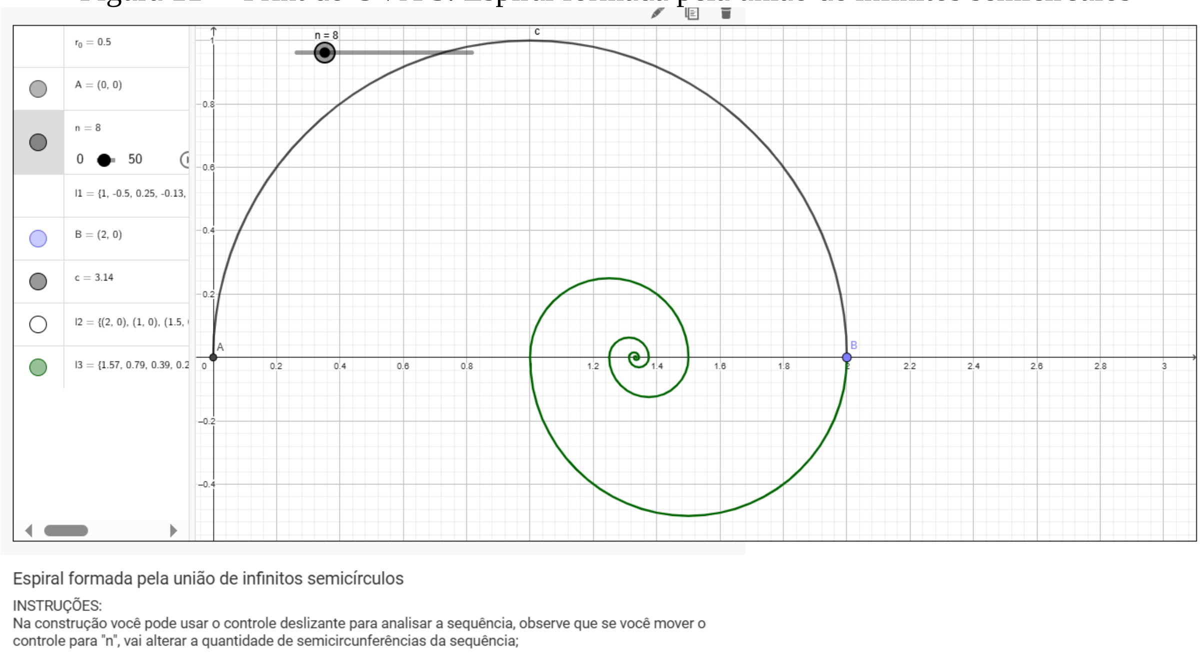
Fonte: Os autores (2025).

Os resultados dessa tarefa confirmam que, embora ainda enfrentassem desafios na compreensão da relação entre variáveis e suas implicações numéricas, algébricas, escritas e geométricas, os estudantes estavam desenvolvendo habilidades importantes na transição entre diferentes registros de representação. De acordo com Raymond Duval, o principal desafio na aprendizagem está justamente em realizar essa transição de maneira fluida e compreensiva. A inserção de atividades que reforcem essas conexões e promovam uma abordagem integrada com o uso do GeoGebra, como destaca Nascimento (2012), pode consolidar a aprendizagem, garantindo que os estudantes interpretem e formalizem de forma mais eficaz.

4.1.5 OVA 5: Espiral formada pela união de infinitos semicírculos

O quinto objeto virtual analisado e ilustrado na Figura 11, aborda a construção de uma espiral formada por semicircunferências de raio decrescente, manipuladas dinamicamente por meio de um controle deslizante. A sequência gerada tem como base uma PG decrescente e convergente, proporcionando aos estudantes uma aproximação visual e simbólica dos conceitos de soma infinita, limite e convergência. A atividade incluiu 14 questões-problema, conforme apresentado no Apêndice N.

Figura 11 − Print do OVA 5: Espiral formada pela união de infinitos semicírculos



Fonte: Os autores (2025).

Nas duas primeiras questões, todos os estudantes identificaram corretamente a fórmula do comprimento da circunferência $C = 2\pi r$ e da semicircunferência $C = \pi r$, com exceção do estudante E09, que confundiu o comprimento da semicircunferência com a fórmula da área, respondendo: $C = \pi r^2$.

A partir da questão três, os estudantes mostraram capacidade de extrair os quatro primeiros termos da sequência, representando-os simbolicamente e reconhecendo o padrão da razão $q = \frac{1}{2}$. Com destaque às respostas dos estudantes E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07 e E08, que organizaram corretamente a sequência $\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right)$.

As respostas apontam uma conversão eficaz entre os registros gráfico (espiral), algébrico (expressões) e numérico (valores reais), corroborando a importância da mobilização dos registros semióticos na construção do conhecimento. Para Raymond Duval, a compreensão genuína de um conceito matemático só é possível quando se realizam conversões entre registros distintos, como evidenciado nesta atividade. Todos os estudantes também reconheceram a sequência como uma PG, o que reforça sua compreensão do padrão da sequência envolvida.

Nas questões de seis a oito, os estudantes calcularam somas de termos da PG, utilizando tanto aproximações numéricas quanto expressões algébricas da fórmula de soma de PG finita. Esses resultados indicam entendimento da ideia de soma parcial e antecipação intuitiva do comportamento da soma total, à medida que os termos diminuem. A visualização dinâmica, mediada por TD como o GeoGebra, conforme Kenski (2012), transforma a experiência de aprendizagem ao favorecer a experimentação e o raciocínio abstrato. Essa percepção é sustentada por Nascimento (2012), que destaca o papel dos OVA na construção de imagens mentais e na transição para o pensamento formal.

A sequência de questões entre a nove e a doze aprofundou a compreensão da convergência da PG. Muitos estudantes aplicaram corretamente o critério de convergência para PG com razão $0 < q < 1$, expressando a fórmula da soma infinita, com destaque para os estudantes E01, E03, E04 e E08, que desenvolveram os seguintes passos:

$$S\infty = \frac{a1}{1-q} = \frac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

As respostas indicam apropriação de conceitos fundamentais da soma dos termos de uma sequência convergente. De acordo com Colombo (2008), esse tipo de construção intelectual requer que o estudante articule representações simbólicas com inferências lógicas, processo que foi claramente vivenciado na resolução dessas questões. Tal domínio também está alinhado com a quarta fase da resolução de problemas proposto por Polya (1995), envolvendo a verificação da solução e sua generalização.

Na questão treze, os estudantes justificaram que a espiral possui soma finita, mesmo formada por infinitos elementos, por tratar-se de uma sequência convergente com termos tendendo a zero, indicando assimilação do conceito de limite como valor de aproximação. A mobilização de registros múltiplos, conforme Duval (2003), e a experimentação visual viabilizada por tecnologias digitais (Borba; Penteado, 2012) foram essenciais para a apropriação conceitual observada. Trata-se de uma conquista cognitiva significativa no contexto do Ensino Médio, especialmente para conteúdos abstratos como séries infinitas.

Na questão quatorze, os estudantes se depararam com uma nova razão, $q = \frac{3}{2}$, que os levou a observar um comportamento bem diferente da sequência: os termos aumentavam rapidamente, revelando uma PG divergente, já que seus valores tendem ao infinito. Ficou evidente que, quando a razão é $q > 1$, não há como obter uma soma infinita. A visualização no GeoGebra reforçou essa percepção, tornando claro que os elementos não se aproximam de um valor fixo, ao contrário, crescem sem controle. Essa quebra de expectativa instigou reflexões importantes e ajudou os estudantes a reconfigurarem os conceitos previamente construídos. Como indicam Burak e Aragão (2012), situações didáticas que confrontam modelos conceituais anteriores são essenciais para promover reflexão crítica e reconfiguração de significados. A representação gráfica da espiral divergente funcionou como organizador semiótico (Duval, 2009), revelando visualmente o comportamento dos termos. Além disso, a formulação de hipóteses e a generalização dos resultados evidenciam uma abordagem investigativa que favorece a autonomia dos estudantes, em sintonia com os estágios propostos por Polya (1995).

Em síntese, a tarefa do OVA 5 permitiu articular visualização, simbolização e generalização dos conceitos de PG, soma infinita e limite. A construção interativa no GeoGebra facilitou a transição entre registros semióticos e facilitou a relação entre teoria e prática (D´Ambrosio, 2012). Segundo Branca (1997), propostas investigativas que combinam manipulação, observação e dedução promovem o envolvimento ativo dos estudantes e contribuem para o avanço cognitivo. A análise das respostas revela apropriação significativa dos conteúdos trabalhados, com indícios de superação de obstáculos cognitivos e construção de conhecimentos.

4.2 CONTRIBUIÇÃO DOS PROBLEMAS PARA RECONHECIMENTO E TRANSIÇÃO ENTRE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PELOS ESTUDANTES

As contribuições dos problemas propostos nesta pesquisa foram verificadas por meio da análise das respostas dos estudantes, da escrita e da construção de OVA na tentativa de compreender como os estudantes transitaram entre os registros de representação, identificando impactos desse trânsito na construção do conhecimento.

A análise dos problemas propostos foi realizada a partir de um recorte do corpus da pesquisa, priorizando aqueles que se mostraram mais significativos para o reconhecimento e a transição entre diferentes registros de representação semiótica. Algumas respostas dos estudantes foram exploradas de forma mais aprofundada, evidenciando os processos de construção do conhecimento e mobilização de registros, outras foram relatadas de maneira mais sucinta, com foco nos aspectos recorrentes observados. Cada problema analisado contém uma subcategoria específica, o que permitiu uma organização mais clara e estruturada dos dados da pesquisa.

4.2.1 **Problema 1: Corrida de táxi**

A proposta do problema ilustrado na Figura 12 envolveu a análise de seis questões, permitindo aos estudantes explorarem os conceitos de PA e função afim por meio de múltiplos registros de representação (Apêndice B). A análise das respostas revela o desenvolvimento de competências relacionadas à interpretação, ao raciocínio algébrico e à visualização e análise gráfica.

Figura 12 – Print do Problema 1: Problema “corrida de táxi

Em uma certa cidade, uma corrida de táxi custa R$ 5,00 a bandeirada, mais R$ 2,00 por quilômetro rodado.

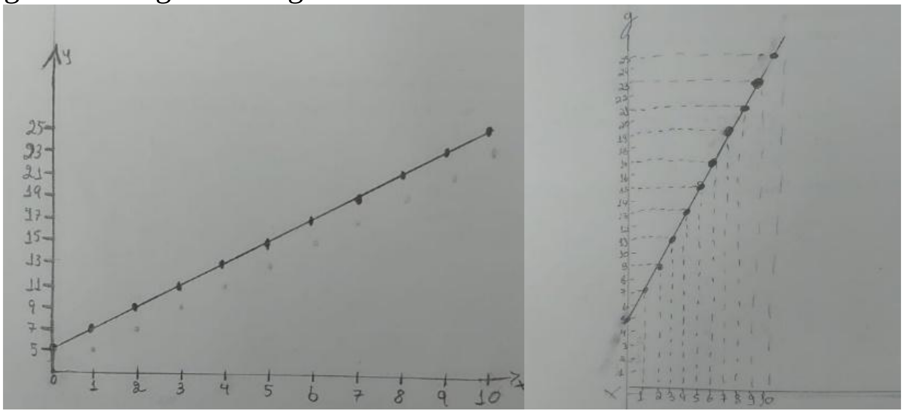
Fonte: Os autores (2025).

A sequência dos valores a serem cobrados nos primeiros 10 quilômetros solicitada na primeira questão foi corretamente construída pela maioria dos estudantes, evidenciando que houve compreensão do problema. Os estudantes reconheceram a estrutura da PA de razão 2 e termo inicial 7: (7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25), indicando que entenderam que a corrida de táxi começa com R$ 7,00 (R$ 5,00 da bandeirada + R$ 2,00 do primeiro quilômetro) e aumenta em R$ 2,00 por quilômetro adicional. Esse desempenho revela uma leitura eficaz da proposta e a mobilização de conhecimentos prévios, com a construção de uma solução coerente, conforme sugerido por Polya (1995). Além disso, esse tipo de atividade, ao partir de uma situação contextualizada, está alinhado ao roteiro didático proposto por Onuchic e Allevato (2011), que defendem o problema como ponto de partida para a construção de novos conceitos.

Nas questões dois e quatro, os estudantes transitaram entre os registros tabulares e algébricos, destacando a função afim $f(x) = 5 + 2x$ como modelo da situação, o que exemplifica os pressupostos de Raymond Duval sobre a importância das conversões entre registros semióticos.

As produções dos gráficos na questão três, apresentados na Figura 13, evidenciam que a maioria dos estudantes compreendeu com clareza a relação entre as variáveis e a linearidade da função afim. Apesar de alguns equívocos cometidos, as respostas revelam que os estudantes foram capazes de representar corretamente a estrutura da reta e interpretar seu comportamento, reafirmando a articulação entre os registros algébricos e gráficos.

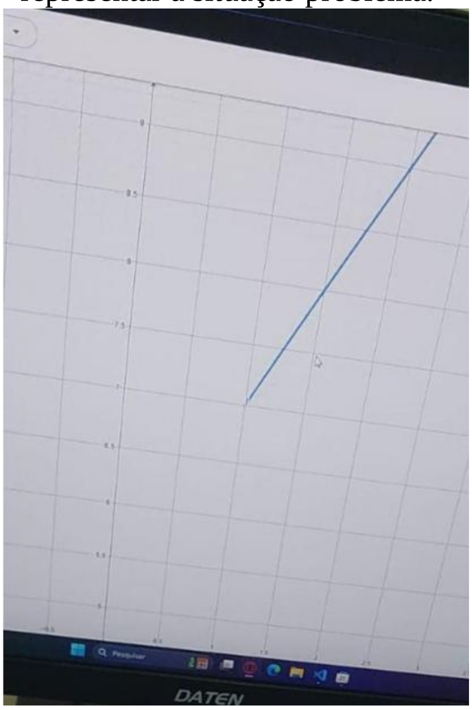
Figura 13- Registro fotográfico do no caderno dos estudantes E04 e E06.



Fonte: Os autores (2025).

As respostas da questão cinco indicam apropriação do conceito de domínio da função e da necessidade de restringi-lo na representação funcional, de acordo com as condições estabelecidas no problema. Estudantes como E05 afirmaram com propriedade*: "Sim, é necessário utilizar a restrição* $x \geq 1$, *pois não existe quantidade de quilômetros negativa, então devemos restringir o gráfico".* Já E02 e E09 indicaram corretamente que a restrição deve ser $x \geq 0$, uma vez que a corrida pode começar do ponto zero, considerando o início possível no local da chamada pelo aplicativo. Por outro lado, E04 e E06 mencionaram a necessidade de iniciar a sequência na coordenada (1,7), conforme registrado na Figura 14, evidenciando a leitura do ponto inicial proposto na questão.

Figura 14 – Registro fotográfico do gráfico elaborado no GeoGebra do estudante E04 para representar a situação problema.



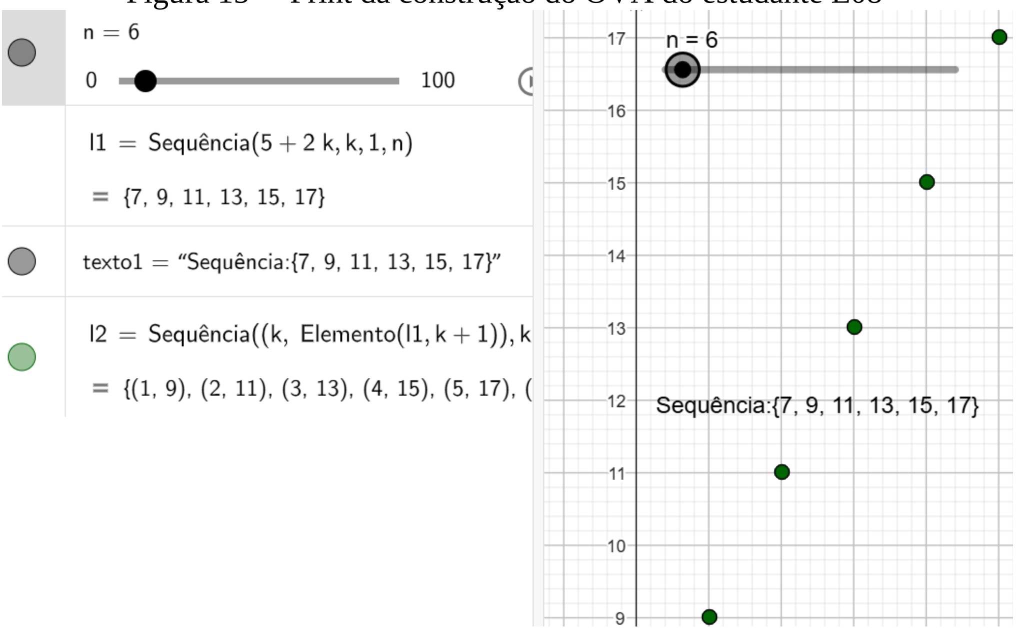
Fonte: Os autores (2025).

A construção descrita na questão seis revela o domínio técnico do GeoGebra para a criação de OVA. A utilização de controles deslizantes permitiu que os estudantes visualizassem o comportamento da função à medida que o parâmetro n se alterava, promovendo uma experiência interativa que estimulou o raciocínio matemático.

O estudante E02 detalhou corretamente os passos de sua construção: "*Primeiro, criei um controle deslizante e nomeei ele "n", após isso coloquei um intervalo mínimo de 0 e um intervalo máximo de 10, depois digitei na entrada "Sequência" e selecionei a opção "Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)". Em seguida, informei as situações: expressão: 5+2k, variável: k, valor inicial: 1, valor final: n). Para a sequência aparecer, digitei na entrada: Texto("Sequência:", +l1). Por fim, digitei na entrada: l2=Sequência((k, Elemento(l1, k+1)), k, 1, n) para que os pontos aparecessem".*

Já os estudantes E04, E06, E08, E11 descreveram passos semelhantes: "*Passo 1) Selecionar o controle deslizante e modificar o nome para "n"; Passo 2) Colocar no intervalo mínimo o 1 e no máximo um número natural qualquer (100 por exemplo); Passo 3) Digitar na entrada "Sequência" e selecionar a opção "Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)"; Passo 4) Informar as situações: expressão: 5+2k, variável: k, valor inicial: 1, valor final: n). Passo 5) Se deseja que essa sequência apareça, digite na entrada: Texto("Sequência:", +l1); Passo 6) Para criar a sequência de pontos da sequência, digite na entrada: l2= Sequência((k,Elemento(l1,k+1)),k,1,n)".* Veja na Figura 15 o resultado de uma construção do estudante E08.

Figura 15 – Print da construção do OVA do estudante E08



Fonte: Os autores (2025).

Para que os estudantes descrevessem os passos da construção, ou seja, realizassem o registro computacional interativo, foi necessário que efetuassem diversas conversões entre registros de representação, conforme proposto por Raymond Duval. Um exemplo evidente foi a conversão da expressão algébrica $5 + 2k$ para um comando funcional dentro do GeoGebra, ou seja, o registro digital, usando a lógica de um algoritmo.

Na sequência, realizaram a conversão do registro numérico para o registro gráfico, ao criar uma lista de valores que se transformou em representações visuais de coordenadas no plano, permitindo a concretização da sequência do problema por meio de pontos visíveis no espaço cartesiano. Em seguida, ocorreu a conversão do registro textual para o simbólico, ao utilizar o comando “Texto” que promove a apresentação visual do raciocínio por meio da junção entre linguagem natural e elementos matemáticos representados no software. Essas etapas mostraram que os estudantes não apenas dominaram o ambiente computacional, mas também foram capazes de articular diferentes formas de representação para construir significado, conforme a TRRS.

A tarefa também evidenciou a presença das etapas de resolução de problemas conforme discutidas por Polya (1995). Ao realizarem a construção no GeoGebra, os estudantes passaram por momentos distintos que refletem o método proposto pelo autor: (1) compreensão do problema, ao interpretarem o enunciado e identificarem a estrutura da função afim; (2) elaboração de um plano, ao decidir quais comandos utilizar e em que ordem; (3) execução do plano, com a aplicação dos comandos e utilização dos controles deslizantes; e (4) verificação, ao observar os resultados gráficos e ajustar os parâmetros conforme necessário.

O software GeoGebra desempenhou um papel decisivo ao favorecer tanto a interpretação gráfica quanto a expressão algébrica, como aponta Nascimento (2012). Essa ferramenta permitiu aos estudantes realizarem conversões entre diferentes registros de representação, transitando com fluidez entre o gráfico da função, seus coeficientes e a fórmula algébrica. Tal articulação foi essencial para a modelagem da situação-problema, promovendo momentos de experimentação e análise reflexiva. Além disso, o uso do GeoGebra facilitou a concretização das etapas de resolução de problemas propostas por Polya (1995).

4.2.2 **Problema 2: Sequência dos números pentagonais**

A proposta do problema 2, ilustrado na Figura 16, envolveu a análise de cinco questões (Apêndice C), que permitiram aos estudantes explorarem os conceitos de PA e função afim por meio de múltiplos registros de representação.

Figura 16 – Print do Problema 2: Sequência dos números pentagonais

(Banco de questões OBMEP) A sequência dos números pentagonais está ilustrada na figura abaixo:

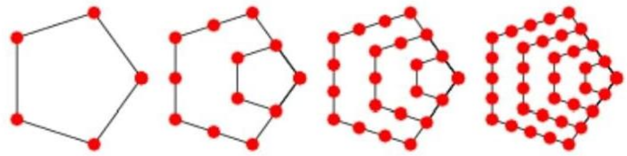


Figura: http://mathworld.wolfram.com/PentagonalNumber.html

Fazendo apenas a contagem de pontos em cada borda externa (perímetro) em cada pentágono chegaremos a:

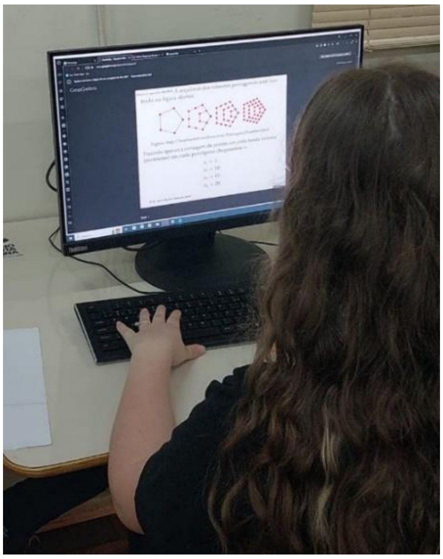
$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 10$$
$$a_3 = 15$$
$$a_4 = 20.$$

http://matematica.obmep.org.br/

Fonte: OBMEP (2016).

A primeira questão solicitou que continuassem a sequência até o décimo termo, que foi corretamente construída pela maioria dos estudantes, evidenciando que houve compreensão do problema. Os estudantes identificaram a estrutura da PA com razão cinco e termo inicial cinco: *"(5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50)"*. Esse desempenho revela uma leitura eficaz da proposta e a mobilização de conhecimentos prévios, com a construção de uma solução coerente, conforme propõe Polya (1995) ao destacar que a compreensão do enunciado é o primeiro passo na resolução de problemas. A Figura 17 apresenta a estudante E06 usando o computador para analisar e registrar os resultados do problema.

Figura 17 – Registro fotográfico da estudante E06 analisando a situação problema da tarefa 3.

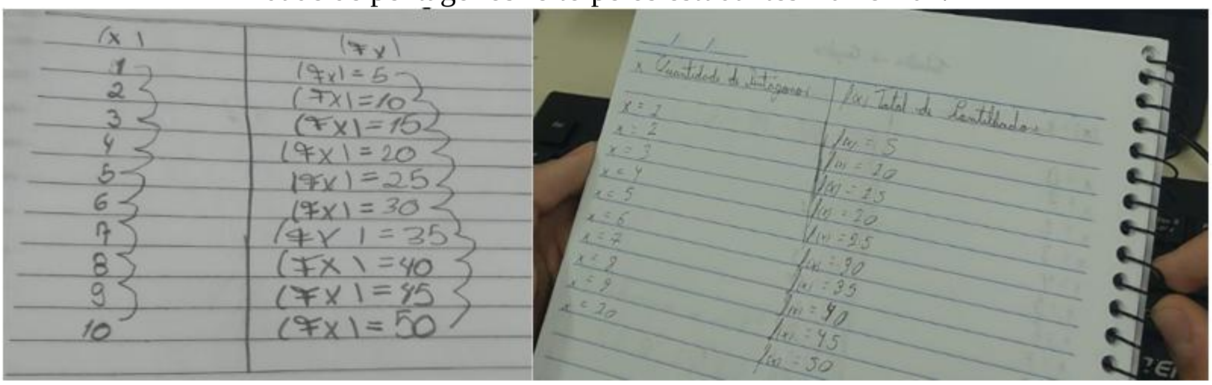


Fonte: Os autores (2025).

Na questão dois, os estudantes identificaram corretamente a razão e o primeiro termo da sequência, reconhecendo que se trata de uma PA. A maioria respondeu "$r = 5, a_1 = 5$", consolidando a leitura algébrica do padrão e apontando o tipo de sequência envolvido. Esse resultado apresenta consistência na análise da estrutura sequencial, e reforça a importância da leitura crítica e da estruturação lógica do problema, como destacado por Branca (1997) e Colombo (2008).

Na questão três, os estudantes transitaram entre os registros tabulares, gráficos e algébricos, conforme propõe Duval (1995). A partir da construção da tabela (Figura 18) com coordenadas que relacionavam a quantidade de pentágonos ao número total de pontilhados, eles identificaram a lei de formação da função afim $f(x) = 5x$, reconhecendo que se trata de uma função linear.

Figura 18 −Registro fotográfico da tabela usando $f(x) =$ Total de pontilhados e $x =$ quantidade de pentágonos feito pelos estudantes E01 e E02.



Fonte: Os autores (2025).

Na questão quatro, os estudantes foram desafiados a determinar o centésimo termo da sequência. Ao analisarem o problema, perceberam que tanto a expressão da função afim quanto a fórmula do termo geral da PA poderiam ser utilizadas de forma equivalente para esse cálculo. Essa equivalência se manteve válida mesmo com o domínio discreto da PA, pois a relação estabelecida por $f(x) = 5x$ define uma correspondência direta entre os números naturais (valores de x que representam a posição do termo) e os elementos da sequência numérica (quantidade de pontilhados), o que possibilita a aplicação de ambos os modelos sem perda de significado. Respostas como as de E03, E04 e E06 destacaram essa equivalência com propriedade:

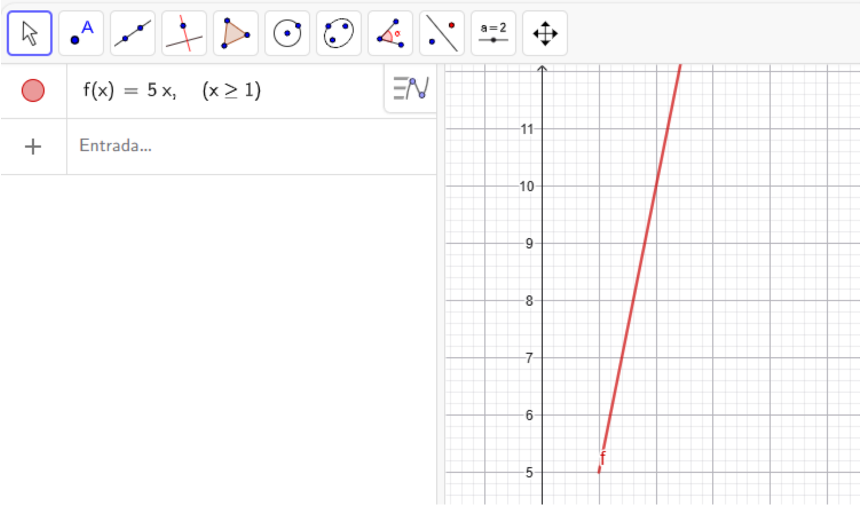
$$\begin{aligned} a_{100} &= 5 + (n - 1).5 \\ a_{100} &= 5 + (100 - 1).5 \\ a_{100} &= 5 + 99.5 \\ a_{100} &= 500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x \\ f(100) &= 5.100 \\ f(100) &= 500 \end{aligned}$$

Os estudantes E04 e E06 ainda concluíram: *"Ambas representam corretamente a solução encontrada"*. Essa resposta do estudante, assim como a resolução apresentada evidencia uma compreensão ampliada dos signos matemáticos, conforme discutido por Duval (1995). Ao reconhecerem que ambas as representações conduzem ao mesmo resultado, os estudantes mostraram habilidade em transitar entre registros semióticos distintos, atribuindo significado aos símbolos utilizados e compreendendo suas equivalências. Autores como Borba e Penteado (2012) e Nascimento (2012) reforçam que essa articulação entre raciocínio simbólico, estrutural e contextual fortalece a construção de significados e amplia a autonomia intelectual dos estudantes. E a capacidade de reconhecer diferentes caminhos válidos para a resolução também dialoga com os pressupostos de Polya (1995), que defende o uso de estratégias diversas como mecanismo de aprofundamento do pensamento matemático.

Na questão cinco, os estudantes utilizaram o GeoGebra para representar a função $f(x) = 5x$, aplicando restrições ao domínio. A maioria compreendeu que a função não está definida para valores de $x < 1$, no contexto da situação problema. Estudantes como E02, E04, E06 e E09 escreveram: *"A função não está definida para valores menores que $f(1) = 5$, sendo assim digitei na entrada $f(x) = 5x, x \geq 1$"* (Figura 19). Essa ação indica apropriação dos significados envolvidos na função e uso adequado dos parâmetros no software, articulando teoria e prática (D´Ambrosio, 2012).

Figura 19 – Print do esboço da função feito pelo estudante E09 no GeoGebra



Fonte: Os autores (2025).

Alguns estudantes necessitaram auxílio da professora por apresentarem dificuldades na interpretação da atividade proposta e como colocar a restrição do domínio no GeoGebra. Esse momento evidencia a importância da mediação docente na condução das etapas de resolução, conforme destacam Onuchic e Allevato (2011), ao defenderem que o professor deve observar, incentivar e intervir quando necessário, promovendo a construção coletiva do conhecimento. A construção no GeoGebra também revela domínio técnico para a criação do OVA e evidencia diversas conversões entre registros de representação. Nesse caso, os estudantes converteram a expressão algébrica $f(x) = 5x$ para um comando funcional no GeoGebra (registro computacional), elaboraram a tabela de valores (registro numérico), representaram graficamente os pontos (registro gráfico) e utilizaram o recurso "Texto" (registro simbólico), mostrando capacidade de transitar entre diferentes representações.

A tarefa ainda evidencia a realização das etapas da resolução de problemas, segundo Polya (1995). Os estudantes mostraram:

Compreensão do problema, ao identificar o padrão numérico;

Elaboração de um plano, ao construir a função $f(x)$ e decidir como representá-la;

Execução do plano, com o uso da tabela, gráfico e GeoGebra;

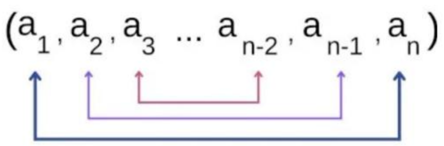
Verificação, ao analisar os resultados obtidos e aplicar restrições que se ajustam à realidade proposta.

O GeoGebra, mais uma vez, exerceu papel fundamental ao ampliar as possibilidades de visualização, manipulação e análise, fortalecendo a aprendizagem e a autonomia intelectual dos estudantes (Nascimento, 2012; Kenski, 2012).

4.2.3 **Problema 3: Análise dos termos equidistantes de uma PA**

A proposta da tarefa 4 envolveu o estudo de termos equidistantes em uma sequência apresentada na forma (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), representada visualmente com setas conectando pares simétricos (Figura 20). A análise das seis questões (Apêndice D) permitiu aos estudantes explorarem padrões numéricos, observarem regularidades nas somas dos pares equidistantes e proporem generalizações algébricas a partir de estratégias de decomposição e reconhecimento de estrutura sequencial.

Figura 20 – Imagem utilizada para explorar o problema 8



Fonte: Os autores (2025).

Na primeira questão todos os estudantes identificaram corretamente os dez primeiros números inteiros positivos e seus respectivos pares equidistantes, como E05: *“(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10); 1 e 10; 2 e 9; 3 e 8; 4 e 7; 5 e 6”.*

Na questão dois, oito estudantes reconheceram o padrão constante de soma igual a onze entre os pares equidistantes. Esse padrão identificado indica que os estudantes estão não apenas operando com números (representação numérica), mas também reconhecendo regularidades que transcendem o aspecto numérico, entrando no campo da estrutura e da simbolização algébrica.

Na questão três, ao repetir o processo com os quinze primeiros números inteiros ímpares, os estudantes ampliaram o padrão identificado, observando que a soma dos termos equidistantes era sempre trinta, resultado de uma PA com razão $r = 2$ e termo inicial $a_1 = 1$. A maioria articulou cálculos corretos, ainda que alguns tenham apenas indicado o resultado final. Esse reconhecimento do padrão numérico reforça os pressupostos de Polya (1995) e as ideias de Nascimento (2012) sobre a importância de explorar diferentes estruturas de sequência.

Na questão quatro, os estudantes aplicaram estratégias variadas para somar os elementos de ambas as sequências. E07, por exemplo, detalhou *“11 x 5 = 55 e 7 x 30 + 15 = 225”.* Embora a maior parte tenha chegado aos resultados corretos, alguns cometeram erros pontuais nos cálculos. Ainda assim, o uso de estratégias pessoais e a organização dos dados mostram que a etapa de execução do plano foi realizada conforme o método proposto por Polya (1995).

As questões cinco e seis colocaram os estudantes frente ao desafio de elaborar expressões algébricas generalizadas para o cálculo das somas. Observou-se que alguns estudantes não realizaram totalmente a transição para a forma puramente algébrica, talvez por não ter a compreensão da necessidade de realizar essa generalização. E02, por exemplo, generalizou parte do problema da primeira sequência: *“Comecei visualizando que a soma dos termos sempre é igual a 11, então fiz a expressão S_{10}= 5. (a_1 + a_{10}) e percebi que a_1 + a_{10} é igual a 11 sendo assim S_{10}= 5 x 11 ficando S_{10}= 55”.* Apenas os estudantes E04 e E06 realizaram a interpretação e generalização de forma completa e organizada, realizando as somas dos termos equidistantes e chegando na fórmula:

a1 + a10 = 11
a2 + a9 = 11
a3 + a8 = 11
a4 + a7 = 11
a5 + a6 = 11

S10 = 5 x (a1 + a10)
Sn= n/2 (a1+an)

Na segunda sequência, apenas os estudantes E01 e E02, concluíram totalmente os passos dessa questão, os demais não generalizaram corretamente ou generalizaram somente uma parte do problema. E02 criou uma expressão detalhada: C*omecei visualizando que a soma dos termos é sempre 30 e sobrou o termo 15, então fiz a expressão:*

$$S_{15} = 7.(a_1 + a_{15}) + 15$$
$$S_{15} = 7.(30) + \frac{30}{2}$$
$$S_{15} = \frac{7.2.30 + 30}{2}$$
$$S_{15} = \frac{30(14+1)}{2}$$
$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}).15}{2}$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

O estudante explica que "*sobrou o termo 15"* para o valor numérico do a_8 na intenção de explicar sua generalização. Esses resultados indicam a transição do registro numérico sequencial para o registro algébrico e linguagem natural.

O uso recorrente das estratégias de identificação, decomposição e análise evidencia que os estudantes vivenciaram as etapas da resolução de problemas: compreender, planejar, executar e verificar, em consonância com Polya (1995), ao mesmo tempo em que precisaram mobilizar diferentes registros de representação da TRRS de Duval.

4.2.4 **Problema 4: Análise da trajetória dos ônibus X e Y**

Na tarefa seis propôs-se aos estudantes a resolução de uma questão contextualizada, adaptada de prova de vestibular da UFRGS: "O ônibus X parte da cidade A com velocidade constante de 80 Km/h, à zero hora de certo dia. Às 2 horas da madrugada, o ônibus Y parte da mesma cidade, na direção e sentido do ônibus X, com velocidade constante de 100 km/h". A partir dessa situação, foram elaboradas sete questões-problema (Apêndice F).

Na primeira questão os estudantes foram convidados a construir as sequências relacionadas ao deslocamento dos ônibus X e Y nas dez primeiras horas, reconhecendo que ambos são representados por uma PA com razão $r = 80$ para o ônibus X e $r = 100$ para o ônibus Y. A maioria dos estudantes fez o registro numérico da sequência corretamente, identificando os padrões de crescimento associados a PA.

Todos os estudantes conseguiram fazer a conversão para o registro gráfico da questão dois, ao realizar o esboço gráfico no caderno, observaram que ambas as sequências resultavam em retas com crescimento linear. Na questão três, apenas cinco estudantes conseguiram fazer a conversão para o registro algébrico, identificando corretamente a expressão das funções ao responder *"Ônibus X: $f(x) = 80x$ e Ônibus Y: $g(x) = 100(x-2), x \geq 2$".* Além disso, destacaram corretamente o domínio do ônibus Y, porém não consideraram que o domínio do ônibus X também poderia ser ajustado para $x > 0$, refletindo o momento em que cada veículo completa sua primeira hora de percurso. Conforme aponta Duval (2009), essa conversão exige não apenas o domínio dos símbolos, mas a compreensão da estrutura que eles expressam, neste caso, o comportamento das funções ao longo do tempo.

Os estudantes E06 e E11, por exemplo, não ajustaram o atraso de duas horas no início da viagem do ônibus Y, evidenciando dificuldade na conversão. Além disso, E03 utilizou $f(x)$ para representar ambas as funções, o que pode gerar confusão na diferenciação entre os deslocamentos dos ônibus.

O uso equivocado de notações, como a duplicação de $f(x)$ para representar ambas as funções, ou a não consideração dos domínios ajustados, como o atraso do ônibus Y, revelam lacunas na conversão entre registros e comprometem a articulação lógica da resolução. Essa falha impede o estudante de progredir pelas fases da resolução de problemas (Polya, 1995), transformando o processo em um conjunto desconexo de procedimentos sem vínculo com o contexto. Esses conceitos foram retomados, reforçando a importância da mediação docente, como destacam Onuchic e Allevato (2011), que defendem o papel do professor como observador e incentivador, intervindo quando necessário para favorecer a construção coletiva do conhecimento.

A questão quatro envolveu a aplicação direta das funções para calcular as distâncias percorridas até determinado horário. Os resultados evidenciaram que, mesmo após equívocos na questão anterior, alguns estudantes foram capazes reconhecer e corrigir suas interpretações. Esse tipo de retomada mostra que a aprendizagem está ocorrendo de forma reflexiva e construtiva. Como destaca Polya (1995), o processo de verificação dos resultados, é crucial, pois permite ao estudante confirmar a validade do modelo aplicado ou ajustar procedimentos para alcançar coerência com a situação-problema. A resposta de E06, por exemplo, mostra essa maturidade ao refazer corretamente as funções e aplicar os valores: *“Ônibus X: f(4) = 80.4 = 320 km e Ônibus Y: g(4) = 100.(4-2)= 200 km”.*

Na questão cinco, a maioria dos estudantes aplicou corretamente a estratégia de igualar as funções para encontrar o momento do encontro. Foi o caso do E08 que realizou o seguinte processo:

$$80x = 100(x - 2)$$
$$80x - 100x = -200)$$
$$-20x = -200$$
$$x = \frac{-200}{-20}$$
$$x = 10$$

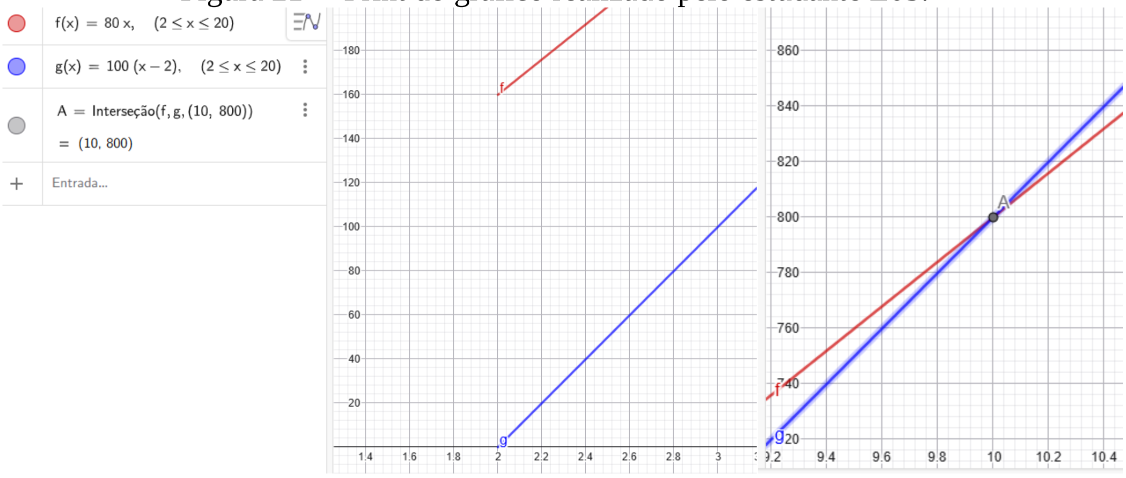
Depois concluiu que *“Isso indica que os ônibus se cruzam na 10ª hora após a partida do ônibus X, ou seja, às 10h da manhã”.* Ao fazer essa conclusão, o estudante atingiu todas as etapas propostas por Polya (1995) e na questão sete foi possível verificar esse resultado no gráfico (Figura 21), trazendo sentido ao problema dado.

A questão seis propôs uma reformulação da função do ônibus X, para iniciar a contagem a partir do segundo horário, assim como o ônibus Y. A maioria reconheceu corretamente que a nova sequência ficaria (160,240, 320, 400, 480, ...), garantindo a continuidade da razão, e que a função ajustada poderia ser definida com domínio $x \geq 2$ para representar essa nova fase do percurso. Ou seja, compreenderam que é possível manter a estrutura da função original, revelando capacidade de raciocínio e facilidade na interpretação do registro numérico, algébrico e gráfico. Segundo Raymond Duval, essa mobilização de registros é essencial para a construção de significados duradouros na Matemática.

Alguns estudantes fizeram a interpretação equivocada do problema, E03 por exemplo, propôs a função $f(x) = 160x$, o que altera incorretamente a relação original da função do ônibus X. Essa resposta pode indicar que o estudante não mobilizou adequadamente os interpretantes mentais, conforme discute Colombo (2008), dificultando a articulação entre os elementos da expressão algébrica e os dados do enunciado.

Na questão sete, estudantes como E02, E04, E05, E06, E08 e E11 mostraram compreensão ao seguir os procedimentos corretos do GeoGebra, descrevendo o uso da opção *“FUNÇÃO(FUNÇÃO, VALOR DE X INICIAL, VALOR DE X FINAL)”* para definir o intervalo [2,20].Além disso, destacaram que para restringir apenas o valor inicial no gráfico, poderia ser usado $x \geq 2$ na entrada do software, ao lado da função, conforme Figura 21.

Figura 21 – Print do gráfico realizado pelo estudante E05.



Fonte: Os autores (2025).

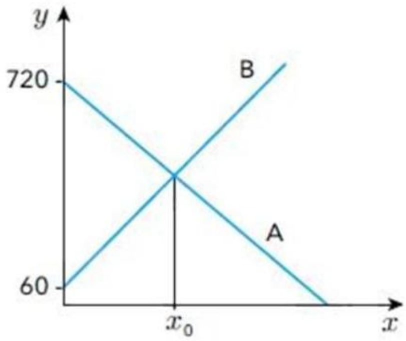
Os resultados evidenciam avanços na conversão entre os registros numérico, gráfico, algébrico e computacional, especialmente na articulação entre PA e função afim. Esse trânsito entre diferentes formas de representação revela que os estudantes conseguiram mobilizar múltiplos sistemas semióticos para compreender o problema, o que está em consonância com os pressupostos da TRRS. Além disso, a tarefa exemplifica o potencial da resolução de problemas como metodologia de ensino, conforme defendem Onuchic e Allevato (2011), ao promover a construção de significados por meio da experimentação, da análise reflexiva e da formalização dos conceitos matemáticos.

4.2.5 **Problema 5: Análise do volume dos reservatórios A e B**

A tarefa sete ilustrada na Figura 22 propôs aos estudantes a resolução de oito questões (Apêndice G) relacionadas ao escoamento e preenchimento de dois reservatórios, A e B, adaptadas do Banco de Questões da OBMEP. O reservatório A inicia com setecentos e vinte litros e perde água a uma taxa constante de dez litros por hora, enquanto o reservatório B parte de sessenta litros, recebendo água a uma taxa de doze litros por hora. A proposta envolveu a construção de sequências numéricas, expressões algébricas, funções afins e interpretações gráficas, criando um contexto propício para explorar a mobilização e conversão entre diferentes registros semióticos conforme a TRRS de Duval.

Figura 22 – Print do Problema 5: Análise do volume dos reservatórios A e B

Banco de questões OBMEP). O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.



http://matematica.obmep.org.br/

Fonte: OBMEP (2020).

Nas questões iniciais, a maioria identificou corretamente o padrão de PA dos dois reservatórios. Reconheceram que o reservatório A é uma PA decrescente com razão $r = -10$, e o reservatório B é uma PA crescente com razão $r = 12$. Essa percepção evidencia o domínio do registro numérico.

Na questão dois, os estudantes realizaram a conversão para o registro algébrico, elaborando os termos gerais das progressões, com destaque para E02, E04, E06, E08 e E11, que utilizaram corretamente as expressões:

“Reservatório A (PA decrescente, razão ($r = -10$)*:*

$a_n = 720 - (n - 1) \cdot 10$

Reservatório B (PA crescente, razão ($r = 12$)*:*

$b_n = 60 + (n - 1).12$*”.*

Algumas inconsistências, como a ausência de sinal de igualdade (caso de E01), uso de sinal incorreto (E05) e omissão de parênteses (E07), revelam fragilidades na estruturação simbólica, ressaltando os obstáculos descritos por Duval (1995).

Na questão três, os estudantes relacionaram a PA com a função afim, onde por meio da expressão algébrica obtiveram a função que relaciona a variação contínua dos volumes. Os estudantes E02, E04, E05, E06, E08 e E11 expressaram corretamente: *“Reservatório A (fun-*

ção decrescente): $f(x) = 720 - 10x$*; Reservatório B (função crescente):* $g(x) = 60 + 12x$*".*

Algumas inconsistências foram observadas como, por exemplo, o estudante E01 que escreveu a expressão: *"*$f(x) = 720 + 10x$*"*, utilizando soma quando deveria ser subtração e E03 que usou *"*$f(x)$*"* para ambas as funções.

Na questão quatro, ao calcular a interseção entre as retas, a maioria dos estudantes seguiu corretamente a abordagem algébrica ao igualar as expressões funcionais, mostrando domínio da estrutura das funções do primeiro grau e compreensão da situação-problema. O estudante E07, por exemplo, realizou a seguinte resolução:

$$720 - 10\text{x} = 60 + 12\text{x}$$

$$-10\text{x} - 12\text{x} = 60 - 720$$

$$-22\text{x} = -660$$

$$\text{x} = \frac{-660}{-22}$$

$$\text{x} = 30$$

Além disso, alguns verificaram a solução substituindo esse valor na expressão do reservatório A e na do reservatório B. O estudante E04, por exemplo, organizou sua resposta da seguinte forma: *"Reservatório A:* $f(30) = 720 - 10.30 = 420$*; Reservatório B:* $g(30) = 60 + 12.30 = 420$*".* Concluiu, então, que *"(30, 420) é a coordenada da interseção entre as retas dos reservatórios".* Esse tipo de abordagem evidencia que os estudantes mobilizaram adequadamente os registros algébrico e gráfico, coordenando-os para interpretar o significado contextual da solução, conforme propõe a TRRS. Além disso, essa resolução está em sintonia com as etapas da metodologia de resolução de problemas descrita por Polya (1995), na qual os estudantes compreenderam o enunciado, estabeleceram um plano por meio da equação, executaram os cálculos e verificaram o resultado, consolidando uma aprendizagem significativa.

As questões cinco, seis, sete e oito foram elaboradas com o propósito de conduzir os estudantes à percepção gradual dos modelos matemáticos discreto e contínuo por meio da contextualização do escoamento e do preenchimento dos reservatórios A e B. Na questão cinco, a maioria dos estudantes compreendeu corretamente que, após trinta horas, os volumes de água dos reservatórios A e B se igualam, identificando o instante em que ambos contêm a mesma quantidade de água. Já a questão seis retomou os termos gerais das progressões para alcançar o mesmo resultado de interseção. Os estudantes igualaram os termos gerais, como E05, por exemplo, que desenvolveu da seguinte forma:

$$720 - (n - 1).10 = 60 + (n - 1).12$$
$$720 - 10n + 10 = 60 + 12n - 12$$
$$-10n - 12n = 48 - 730$$
$$-22n = -682$$
$$n = \frac{-682}{-22}$$
$$n = 31$$

Na sequência, concluiu que *"o resultado indica que na 31ª hora os volumes dos reservatórios se tornam iguais"*. Esse resultado, embora numericamente diferente do obtido na questão anterior ($x = 30$), refere-se ao mesmo instante de tempo, e a diferença se deve à forma como os modelos foram construídos. Na função afim, o tempo é contado a partir de $x = 0$, enquanto na PA o primeiro termo é a_1, correspondente a $f(0)$. Portanto, o valor $n = 31$ representa o 31º termo da PA, que ocorre na 30ª hora, evidenciando uma translação temporal entre os dois registros. Essa distinção reforça a importância da conversão entre registros semióticos e da compreensão da estrutura de cada modelo, conforme propõe Duval (1995).

Quanto à questão sete, os estudantes utilizaram os termos gerais obtidos para calcular o volume de água na 31ª hora, chegando corretamente ao resultado de 420 litros em ambos os reservatórios. E01, E04, E05, E06 e E08 apresentaram domínio da estrutura do termo geral da PA, utilizando corretamente as fórmulas:

Reservatório A:

$a_n = 720 - (n - 1)\cdot 10$

$a_{31} = 720 - (31 - 1)\cdot 10$

$a_{31} = 720 - 30\cdot 10$

$a_{31} = 720 - 300$

$a_{31} = 420$

Reservatório B:

$b_n = 60 + (n - 1).12$

$b_{31} = 60 + (31 - 1).12$

$b_{31} = 60 + 30.12$

$b_{31} = 60 + 360$

$b_{31} = 420$

A questão oito gerou bastante questionamento dos estudantes. Para muitos, apenas o modelo discreto era considerado válido, exigindo auxílio docente para ampliar a compreensão sobre os diferentes domínios das variáveis. Analisando as respostas, pode-se perceber que, no geral, os estudantes compreenderam a diferença entre um modelo contínuo e um discreto.

Os estudantes E02, E03, E04 e E06 apresentaram explicações completas e bem elaboradas. E04, por exemplo, respondeu: *"A função afim trata x como contínuo (de 0 a 30 horas), enquanto a PA trata n como discreto/inteiro (1º,2º,3º,...,31º). Ao resolver pelo método contínuo, foi obtido um valor intermediário (a partir de zero horas), enquanto pelo método discreto, encontrou o próximo termo inteiro onde a interseção ocorre, já que a sequência começa em $n = 1$".* Já E05 e E08 responderam: *"Porque na função o x é continuo já a PA trata n como inteiro (1°, 2°, 3°, 4°...)".* Apesar de ser uma resposta mais sucinta, os estudantes apresentaram a mesma linha de raciocínio.

Ao longo da resolução das questões, observou-se que os estudantes construíram gradativamente os conceitos de modelo contínuo e discreto, explorando diferentes estratégias de resolução e registros de representação. Inicialmente, resolveram por meio da função afim (modelo contínuo, se considerarmos o domínio em um intervalo real), em seguida aplicaram o termo geral da PA (modelo discreto), e desencadear na comparação crítica entre os dois modelos.

Conforme aponta Duval (1995, 2009, 2018), esse tipo de construção conceitual demanda uma coordenação entre diferentes registros de representação semiótica, como o algébrico, gráfico, verbal e numérico, promovendo o surgimento do pensamento relacional e favorecendo uma compreensão mais concreta das relações entre funções afins e PA.

Além disso, essa abordagem contextualizada dialoga diretamente com os pressupostos teóricos de D'Ambrosio (2012), ao valorizar saberes diversos, promover a articulação entre teoria e prática, e fomentar a autonomia intelectual dos estudantes. A proposta da tarefa, ao integrar resolução de problemas e TD, exemplifica o potencial da metodologia defendida por Onuchic e Allevato (2011), ao promover uma aprendizagem colaborativa e centrada na construção ativa do conhecimento.

4.2.6 **Problema 6: Juros simples**

Nesta tarefa, foi apresentada uma situação envolvendo juros simples, PA e função afim, a partir da qual os estudantes deveriam analisar cinco situações-problema (Apêndice H). O enunciado diz o seguinte: "Maria investiu R$ 1000,00 em uma conta que rende juros simples de 5% ao mês".

A primeira questão solicitou que determinassem a sequência de quanto ela terá em sua conta nos primeiros seis meses. Todos os estudantes conseguiram identificar corretamente a sequência: *"(1000, 1050, 1100, 1150, 1200, 1250)"*. Isso indica que reconheceram que o rendimento mensal se dá por um acréscimo fixo de R$50,00, ou seja, 5% sobre o capital de R$1000,00, configurando uma PA.

Na questão dois, os estudantes E01, E04, E05, E06 e E08 realizaram corretamente a conversão do registro numérico para o registro algébrico ao escreverem corretamente o termo geral da PA *"*$a_n = 1000 + (n - 1).50$*"*. Completando ainda que *"se trata de uma PA de razão* $r = 50$ *e primeiro termo* a_1 *=1000"*.

O objetivo esperado com a questão três foi de que os estudantes representassem o termo geral da PA no GeoGebra e observassem o comportamento da sequência em sua forma gráfica. Essa atividade promove a transição entre os registros algébrico e gráfico, conforme a TRRS. Além disso, ressalta-se o papel das TD como ferramentas que potencializam o raciocínio matemático, conforme argumenta Nascimento (2012). Os estudantes E01, E04, E05, E06 e E09 identificaram corretamente que a representação gráfica resultante era uma reta crescente, associando esse comportamento à estrutura de uma função afim. Essa associação direta evidencia que houve conversão da representação algébrica para a representação gráfica.

Na questão quatro, propôs-se que os estudantes determinassem a função afim que descreve o valor do investimento em função do tempo (em meses), com base na estrutura da PA previamente encontrada, fazendo assim, a conversão do registro algébrico (expressão da PA), para o registro algébrico (expressão da função afim) e, ao mesmo tempo, correlacionando-as. Os estudantes E01, E02, E04, E05, E06, E07 e E08 expressaram corretamente a função como*:* *"*$f(x) = 1000 + 50x$*"*. Essa formulação representa o comportamento do investimento mensal, onde 1000 é o valor inicial aplicado e 50 é o incremento mensal. A variável x corresponde ao número de meses, enquanto $f(x)$ representa o valor total acumulado ao longo do tempo.

A questão cinco foi elaborada como o propósito de aprofundar a compreensão dos estudantes sobre a relação entre modelos discretos e contínuos na evolução do saldo de um investimento, ao solicitar que utilizassem tanto o termo geral da PA quanto a lei de formação da função afim para determinar o tempo exato em que o valor de Maria for R$ 2000,00. Os estudantes E01, E04 e E06 fizeram corretamente os cálculos para ambas as formas de representação (PA ou função afim):

1) Pelo termo geral da PA:

$$2000 = 1000 + 50(n - 1)$$

$$2000 = 1000 + 50n - 50$$
$$2000 - 950 = 50n$$
$$n = \frac{1050}{50}$$
$$n = 21$$

Depois concluíram que *"$n = 21$ representa que o 21º termo da PA será 2000"*. Como o primeiro termo da PA é $a_1 = 1000$, ele corresponde ao valor inicial, que ocorre no instante $x = 0$. Assim, o 21º termo da PA representa o valor acumulado após vinte meses completos.

2) Pela função afim:

$$f(x) = 1000 + 50x$$
$$2000 = 1000 + 50x$$
$$2000 - 1000 = 50x$$
$$1000 = 50x$$
$$x = \frac{1000}{50}$$
$$x = 20$$

Eles explicaram que *"Maria terá exatamente R$ 2000,00 após 20 meses completos.* Nessa questão, foi necessária mediação para que compreendessem que a sequência se inicia com um valor que ainda não representa um mês de rendimento, ou seja, o valor inicial já está presente no instante zero. Essa diferença decorre de uma translação no tempo entre os modelos, reforçando a importância de compreender como cada estrutura representa o tempo e os valores associados.

De modo geral, as respostas evidenciam um bom domínio das noções de juros, PA e função afim, com capacidade de formalizar padrões numéricos em equações. Ainda assim, foram identificados diferentes níveis de compreensão, principalmente na transição entre os modelos discretos e contínuos, e na justificativa completa dos procedimentos algébricos (Duval 1995).

A tarefa exigiu dos estudantes não apenas a resolução técnica, mas também a tomada de decisões e a justificativa dos procedimentos, evidenciando uma mudança de postura que, segundo Onuchic e Allevato (2011), é essencial para que os alunos assumam responsabilidade pela própria aprendizagem.

4.2.7 **Problema 7: A lenda dos grãos de arroz**

A tarefa 10 ilustrada na Figura 23 trata da lenda do jogo de xadrez e envolve a construção de uma sequência geométrica a partir do número de grãos de arroz em cada casa do tabuleiro, dobrando a quantidade a cada nova posição e, a partir disso, foi proposto a análise de dez questões (Apêndice J).

Figura 23 – Print do Problema 7: O Desafio do Tabuleiro de Xadrez: A Lenda dos Grãos de Arroz

Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma côrte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

`http://matematica.obmep.org.br/`

Fonte: Portal da OBMEP.

A questão um necessitava a interpretação para fazer o registro numérico da sequência dos grãos de arroz nas dez primeiras casas do tabuleiro. Todos os estudantes, exceto E11, apresentaram corretamente a sequência: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512). Isso evidencia que compreenderam o padrão e mobilizaram o registro numérico com êxito, conectando com as ideias de Raymond Durval. Para explorar melhor a sequência, a questão dois solicitava a identificação do tipo de sequência, primeiro termo e razão. A maioria dos estudantes respondeu corretamente, indicando: *"Progressão Geométrica,* $a_1 = 1$ *e* $q = 2$*"*.

Na questão três, os estudantes realizaram a conversão do registro numérico para o registro algébrico, determinando o termo geral da PG. Todos conseguiriam realizar a conversão, encontrando a expressão: $a_n = 2^{n-1}$. Já na questão quatro, foi explorada a imagem mental, ou seja, o conceito criado da mediação signo-objeto destacada por Colombo (2008). Isso porque a partir da representação algébrica da sequência, os estudantes deveriam indicar o tipo de curva esperada, ou seja, a representação gráfica da sequência. Todos indicaram corretamente o crescimento exponencial, evidenciando que conseguiram fazer a conversão entre esses registros como destaca Raymond Duval.

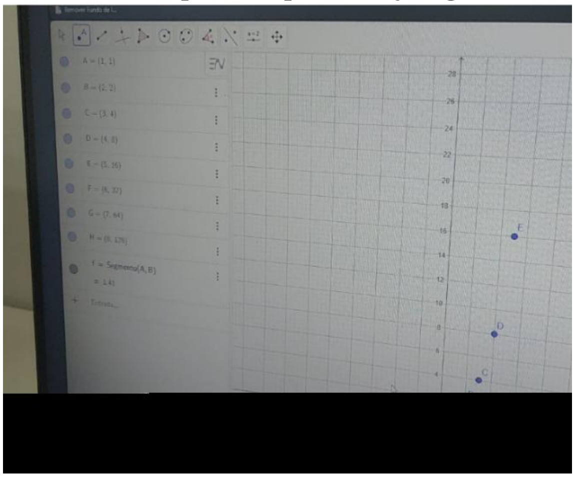
Na questão cinco, solicitou-se a representação algébrica da função exponencial que representa a quantidade de grãos na casa n. A maioria dos estudantes conseguiu fazer corretamente conversão da representação algébrica da PG para a representação algébrica da função exponencial: $f(n) = 1.2^{n-1}$. Os estudantes E02 e E07 não conseguiram realizar a conversão, sendo importante ressaltar, como aponta Raymond Duval, que nem todos os estudantes conseguem transitar com fluidez entre os registros. Diante disso, foi proposta a construção de uma tabela com os primeiros valores da sequência, incentivando os estudantes a observar o padrão de crescimento e, a partir dessa análise, generalizar a expressão algébrica. Essa intervenção destacada por Polya (1995) revela a importância da mediação docente no processo de construção do conhecimento e na promoção da conversão entre registros, papel fundamental para que os estudantes atribuam significado aos signos matemáticos mobilizados.

Solicitou-se, na questão seis, o cálculo da quantidade de grãos na 20ª casa do tabuleiro. A maioria aplicou corretamente a forma algébrica, como E10 por exemplo, que utilizou as duas expressões e respondeu da seguinte forma:

$$a_{20} = 2^{20-1} \qquad f(20) = 1.2^{20-1}$$
$$a_{20} = 2^{19} \qquad f(20) = 2^{19}$$
$$a_{20} = 524.288 \qquad f(20) = 524.288$$

Abordou-se a conversão do registro algébrico para o registro gráfico na questão 7, fazendo o esboço e analisando o gráfico das dez primeiras casas (Figura 24) A maioria conseguiu fazer a conversão, E02, por exemplo, descreveu: "*O gráfico mostra um aumento leve nas primeiras casas, mas depois o crescimento vai se tornando bem mais acentuado, ilustrando o crescimento exponencial*". Isso revela a percepção visual do comportamento da PG.

Figura 24 – Registro fotográfico do estudante E08 colocando as coordenadas no GeoGebra para identificar o tipo de representação gráfica.



Fonte: Os autores (2025).

Na questão oito, os estudantes precisaram encontrar o valor da última casa do tabuleiro (64ª). Todos indicaram corretamente $a_{64} = 2^{63}$. Essa mobilização adequada do registro algébrico indica avanço na construção dos interpretantes mentais, conforme discute Colombo (2008), mostrando que os estudantes foram capazes de estabelecer sentido entre o contexto e a representação simbólica.

Com a próxima questão, buscou-se que os estudantes realizassem a criação de uma representação dinâmica no GeoGebra. Os estudantes E01, E02, E04, E05 e E06 seguiram corretamente os passos para criar o controle deslizante e a sequência. E01, por exemplo, organizou da seguinte forma:

1º passo) Criar o controle deslizante, assumindo nome "n"; mín "1"; máx "64"; incremento "1" (números inteiros).
2º passo) Selecionar sequência: (Expressão, Variável, ...) l1=Sequência(2^(n-1),n,1,64)
3º passo) Selecionar nova sequência: l2=Sequência((k,Elemento(l1,k)),k,1,n).

E07 e E08 fizeram respostas vagas, sem comandos precisos, e dois estudantes não responderam. Essa atividade valoriza a articulação entre representação gráfica e visual, proporcionando uma abordagem tecnológica ao conteúdo.

Na última questão, buscou-se que os estudantes interpretassem os diferentes tipos de registros de representação semiótica. A maioria dos estudantes indicou corretamente que o gráfico evidencia o crescimento, enquanto a sequência numérica facilita perceber a relação entre as casas do tabuleiro. Essa capacidade de refletir sobre os diferentes registros revela uma postura reflexiva e analítica, mostrando amadurecimento no uso de múltiplas representações, conforme proposto por Raymond Duval.

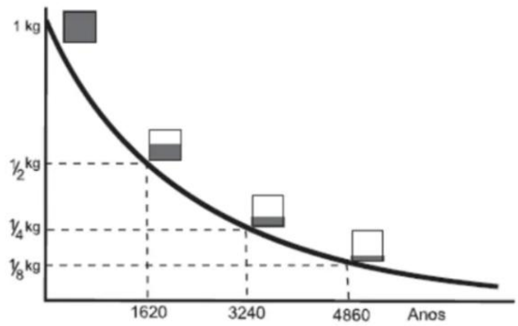
A atividade com o GeoGebra exigiu maior compreensão do crescimento exponencial, da representação numérica, algébrica e gráfica do problema, promovendo uma abordagem dinâmica e interativa, alinhada às reflexões de Kenski (2012) sobre o papel das TD na educação. Segundo a autora, essas ferramentas não apenas transformam o modo de ensinar, mas também ampliam as possibilidades de aprender, ao integrar imagem e movimento à construção do conhecimento. Onuchic e Allevato (2011) também destacam o uso das TD na resolução de problemas, pautado na investigação, na autonomia e na formalização dos conceitos a partir da experiência vivida pelos estudantes.

4.2.8 **Problema 8: Taxa de Decaimento Radioativo do Rádio-226**

Este problema ilustrado na Figura 25 explora o fenômeno do decaimento radioativo, com base no gráfico do radônio-226 e na descrição sobre resíduos nucleares. A partir dessas informações, foram elaboradas seis situações-problema (Apêndice K), que abordam os conceitos de meia-vida, PG e função exponencial decrescente.

Figura 25 – Print do Problema 8: Taxa de Decaimento Radioativo do Rádio-226

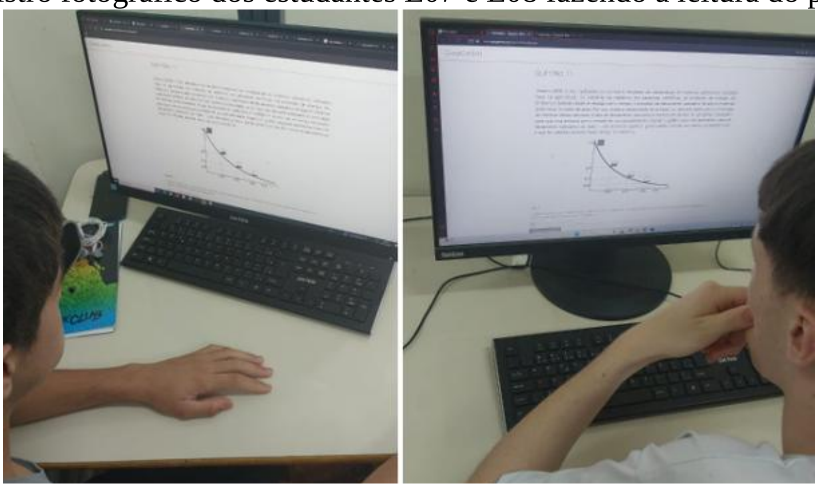
(Enem–2009) O lixo radioativo ou nuclear é resultado da manipulação de materiais radioativos, utilizados hoje na agricultura, na indústria, na medicina, em pesquisas científicas, na produção de energia, etc. Embora a radioatividade se reduza com o tempo, o processo de decaimento radioativo de alguns materiais pode levar milhões de anos. Por isso, existe a necessidade de se fazer um descarte adequado e controlado de resíduos dessa natureza. A taxa de decaimento radioativo é medida em termos de um tempo necessário para que uma amostra perca metade de sua radioatividade original. O gráfico seguinte representa a taxa de decaimento radioativo do rádio – 226, elemento químico pertencente à família dos metais alcalinoterrosos e que foi utilizado durante muito tempo na medicina.



Fonte: ENEM (2009).

A primeira questão foi elaborada com o objetivo de levar os estudantes a identificarem, com base na análise do gráfico, a massa inicial e os valores correspondentes após 1620 e 3240 anos. As respostas evidenciaram a compreensão do problema, já que todos reconheceram corretamente que a massa inicial é de $1\ kg$, reduzindo-se para $0,5\ kg$ e, posteriormente, $0,25\ kg$. Além disso, identificaram a sequência como uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$, evidenciando entendimento consistente sobre o conceito de meia-vida e da sequência em questão. A Figura 26 mostra os estudantes usando o computador para interpretar o problema.

Figura 26 –Registro fotográfico dos estudantes E07 e E08 fazendo a leitura do problema



Fonte: Os autores (2025).

Na questão dois, os estudantes realizaram a conversão da representação numérica para a forma algébrica ao expressarem a fórmula geral da PG. Todos conseguiram encontrar a equação correta de $m = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ compreendendo que n representa o número de períodos de 1620 anos. Esse desempenho indica que houve compreensão do problema e que o conteúdo da questão foi adequadamente assimilado.

Na questão três, os estudantes aplicaram corretamente a fórmula para calcular a massa do rádio-226 após 4860 e 6480 anos. Os resultados foram unânimes: todos reconheceram que 4860 anos correspondem a três períodos de decaimento e 6480 anos a quatro períodos. Com isso, obtiveram as massas de $0{,}125\ kg$ e $0{,}0625\ kg$, respectivamente. Mesmo com variações na forma de escrita, os estudantes mostraram habilidade em aplicar a fórmula de maneira prática e assertiva, evidenciando domínio sobre esse aspecto do conteúdo.

A proposta da questão quatro teve o intuito de que os estudantes reescrevessem a fórmula da PG considerando diretamente o tempo em anos, em vez dos períodos de decaimento. A maioria dos estudantes (E01, E04, E06, E07 e E08) conseguiu estruturar corretamente a função exponencial esperada, do tipo $M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}$, marcando uma transição importante entre a representação algébrica de uma sequência discreta e a representação algébrica da função exponencial, neste caso, em domínio contínuo. Alguns estudantes (E05 e E09) deixaram respostas incompletas ou em branco, o que pode indicar que essa generalização algébrica ainda exige maior maturação conceitual.

Na sequência, buscou-se com a questão cinco que os estudantes utilizassem o GeoGebra para desenhar o gráfico do decaimento. Todos afirmaram corretamente que *"a curva é decrescente e a massa nunca chega a zero"*. Essa leitura visual é essencial para desenvolver habilidades de interpretação e para conectar os conteúdos algébricos com fenômenos naturais, como o decaimento radioativo.

Por fim, na questão seis, os estudantes explicaram o conceito de meia-vida ao comparar três representações: *"a numérica (sequência em PG), a algébrica (expressão da PG e função exponencial) e a gráfica"*. A maioria argumentou que a sequência em PG evidencia com mais clareza a redução da massa pela metade a cada 1620 anos, justificando essa escolha pela transparência dos termos e pela relação direta entre os valores apresentados. As respostas evidenciaram a capacidade de argumentação e de articulação entre diferentes registros de representação, em consonância com a TRRS, proposta por Raymond Duval.

Os resultados obtidos ao longo das seis questões mostraram não apenas a compreensão conceitual dos estudantes sobre o decaimento radioativo e o conceito de meia-vida, mas também a valorização da diversidade de representações e da contextualização dos conteúdos. Essa abordagem está alinhada à proposta de uma educação crítica e inclusiva, como defendem D'Ambrosio (2012) e Colombo (2008), ao reconhecer os saberes dos estudantes e promover o diálogo entre ciência e sociedade. A profundidade das análises realizadas pelos estudantes ao longo das questões reforça que a resolução de problemas, como apontam Onuchic e Allevato (2011), deve ser uma prática regular e estruturante do currículo, e não uma atividade pontual ou complementar.

A utilização de recursos digitais, como o GeoGebra, fortalece a perspectiva de uma educação mediada por tecnologias, conforme discutido por Kenski (2012) e por Borba e Penteado (2012), ampliando as possibilidades de visualização e experimentação. A construção de estratégias para a resolução de problemas remete diretamente aos estudos de Polya (1995), evidenciando a capacidade argumentativa dos estudantes e sua autonomia para formular soluções fundamentadas. Essa atuação dos estudantes reforça a importância de práticas pedagógicas reflexivas e significativas, como apontam Fainguelernt e Nunes (2012) e Moretti (2024), que valorizam a intencionalidade no ensino, a contextualização dos saberes e o desenvolvimento de aprendizagens duradouras.

4.2.9 **Problema 9: Comparação de Investimentos**

A tarefa doze ilustrada na Figura 27 desafiou os estudantes a analisarem uma situação financeira envolvendo duas opções de investimento, poupança e CDB, com base em seus respectivos rendimentos, considerando também o impacto tributário sobre o ganho no segundo caso. Para viabilizar uma análise concreta e contextualizada, foram elaboradas cinco questões (Apêndice L).

Figura 27 – Print Problema 9: Comparação de Investimentos.

(Enem/2011) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Fonte: ENEM (2011).

A primeira questão foi elaborada com o objetivo de levar os estudantes a representarem o saldo acumulado em cada aplicação, ao longo de cinco meses, por meio de sequências numéricas. Todos os estudantes organizaram adequadamente os valores, aplicando os juros mensais de forma progressiva. E08, por exemplo, respondeu: *"POUPANÇA (502,8; 505,62; 508,45; 511,29; 514,16); CDB (504,2; 508,44; 512,72; 517,03; 521,38)".* Observa-se compreensão da estrutura sequencial, evidenciando a capacidade de visualizar o crescimento mensal, mesmo considerando o imposto aplicado ao CDB.

Na segunda questão, os estudantes foram convidados a determinar o termo geral das sequências, utilizando P como valor inicial e n como o número de meses. A maior parte dos estudantes apresentou fórmulas coerentes com a modelagem esperada, expressando corretamente a taxa efetiva da poupança e do CDB. O exemplo de E03 ilustra bem essa compreensão: *"POUPANÇA: $M = P.(1{,}0056)^n$; CDB: $M = P.(1 + 0{,}00876.0{,}96)^n$".* Houve variações na notação, porém o domínio da estrutura de PG se manteve, indicando sucesso na conversão do registro numérico para o algébrico.

Na terceira questão, os estudantes aplicaram as fórmulas encontradas a um valor fixo de investimento de R$500,00. A maioria mostrou segurança na transposição do termo geral algébrico para uma função exponencial contextualizada, como por exemplo E05: *"POUPANÇA: $M = 500.(1{,}0056)^n$; CDB: $M = 500.(1 + 00876.0{,}96)^n$".*

A quarta questão exigiu a conversão das expressões algébricas em representações gráficas, utilizando o software GeoGebra. A partir da visualização das curvas, os estudantes analisaram se a vantagem do CDB sobre a poupança diminuiria com o passar do tempo. As respostas revelaram uma leitura crítica: a maioria concluiu que, apesar do imposto, a taxa mais elevada do CDB assegura uma vantagem crescente em relação à poupança. E01 por exemplo, explicou: *"Quanto mais o tempo passa, maior é a vantagem do CBD em relação à poupança, mesmo considerando o imposto".* As justificativas evidenciam a capacidade de interpretar o comportamento das funções e suas tendências de crescimento exponencial, mostrando sucesso na conversão do registro algébrico para o gráfico e em linguagem textual.

Na quinta e última questão, os estudantes foram convidados a refletir sobre como cada representação (numérica, algébrica e gráfica) contribui para a compreensão da situação. Predominou o entendimento de que a sequência facilita a visualização do crescimento mês a mês, a expressão algébrica oferece rapidez no cálculo em qualquer período, e o gráfico proporciona uma leitura clara do comportamento das funções. Como pode ser visto com a resposta do E09: *"A progressão permite visualizar o crescimento mês a mês; A fórmula permite calcular o saldo para qualquer período de forma rápida; O gráfico ilustra visualmente o crescimento* *exponencial ao longo do tempo".* Essa síntese revela uma capacidade madura de articular registros de representação e compreensão dos signos, conforme discutido por Duval (1995, 2009, 2018).

De modo geral, o problema mobilizou múltiplas formas de representação para interpretar uma situação real de investimentos financeiros. As competências desenvolvidas alinham-se à TRRS de Raymond Duval ao promover conversões significativas entre registros. Ao permitir que os estudantes transitem entre registros numéricos, algébricos e gráficos, a tarefa favoreceu a construção de significados matemáticos a partir da experiência concreta, conforme defendem Onuchic e Allevato (2011), que destacam o problema como ponto de partida para a aprendizagem.

As estratégias adotadas pelos estudantes alinham-se com as propostas de Polya (1995), evidenciando domínio na leitura da situação, elaboração de planos de ação e verificação dos resultados. Os argumentos apresentados revelam coerência e capacidade de aplicar conceitos matemáticos na tomada de decisões.

4.2.10 **Problema 10: Análise do padrão da sequência de construção de quadrados**

A tarefa quinze ilustrada na Figura 28 desafiou os estudantes a identificarem uma regularidade nas subdivisões de quadrados, que passam por remoções específicas em cada etapa. Para isso, foram elaboradas oito situações-problema (Apêndice O), com o objetivo de promover o aperfeiçoamento dos argumentos ao longo das atividades.

Figura 28 – Print Problema 10: Análise do padrão da sequência de construção de quadrados

BANCO DE QUESTÕES OBMEP

Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, qual a área restante na etapa 5?

http://matematica.obmep.org.br/

Fonte: Portal da OBMEP.

Os estudantes apresentaram compreensão da estrutura inicial do problema. A maioria identificou corretamente que a área total do quadrado na Etapa 1 equivale a 1 (ou 100%). Já na Etapa 2, são removidos $\frac{4}{9}$ da área, restando $\frac{5}{9}$. Essa leitura revela domínio na análise da i-magem e na interpretação da transformação geométrica proposta.

Na segunda questão, todos os estudantes reconheceram a regularidade e construíram a sequência $\left(1, \frac{5}{9}, \frac{25}{81}\right)$, caracterizando-a como uma PG de razão $q = \frac{5}{9}$. Essa identificação mostra que foram capazes de perceber e generalizar o padrão de redução da área ao longo das etapas.

Na terceira questão, os estudantes foram desafiados a converter a representação numérica em representação algébrica, determinando o termo geral da PG. Todos apresentaram corretamente a fórmula $a_n = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$. A resposta indica domínio da estrutura algébrica e capacidade de transição entre registros de representação, conforme propõe Duval (1995).

Na quarta questão, os estudantes calcularam corretamente a área da Etapa 5, aplicando a fórmula da PG. O estudante E11, por exemplo, entregou um raciocínio completo e preciso:

$$a_5 = \left(\frac{5}{9}\right)^{(5-1)} a_5 = \left(\frac{5}{9}\right)^{(4)} a_5 = \left(\frac{625}{6561}\right)$$

Na questão seguinte, os estudantes foram convidados a representar graficamente a função exponencial, e todos reconheceram que o gráfico apresenta uma curva decrescente, indicando que a área restante tende a zero com o aumento do número de etapas. O estudante E01 respondeu que *"é uma curva exponencial decrescente, indicando que a área vai diminuir bem rápido a cada etapa, tendendo a zero"*, embora não tenha feito a modelagem algébrica. Os demais estudantes representaram corretamente a função $f(x) = \left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}$, mostrando que compreenderam a transição da representação algébrica do termo geral da PG para a representação gráfica, utilizando a imagem mental e relacionando com o comportamento função exponencial no contexto.

Na sexta questão, o desafio era calcular a soma infinita da PG para estimar a área total (da soma das figuras de cada etapa) que restará após infinitas etapas. Embora apenas alguns estudantes tenham concluído essa tarefa, os que o fizeram aplicaram corretamente a fórmula da soma infinita, chegando ao resultado, como por exemplo, o estudante E08 que entregou o seguinte desenvolvimento:

$$S\infty = \frac{1}{1 - \frac{5}{9}}, S\infty = \frac{1}{\frac{4}{9}}, S\infty = \frac{9}{4}$$

A comparação entre PG e PA proposta na sétima questão foi bem compreendida pelos estudantes. Todos indicaram corretamente que, se a área fosse reduzida de forma constante, o comportamento da sequência mudaria para uma PA, gerando uma função do primeiro grau e um gráfico com reta decrescente. Essa análise evidencia que conseguiram distinguir o tipo de relação envolvida no problema e os impactos dessa mudança na representação gráfica e algébrica.

Por fim, na oitava questão, os estudantes mostraram capacidade reflexiva ao analisar as diferentes representações. E03, por exemplo, sugeriu que *"a lei de formação é a melhor ferramenta para calcular rapidamente qualquer termo da sequência, que o gráfico é mais eficaz para visualizar o declínio exponencial da área e que a sequência numérica permite observar a razão constante entre os termos"*. Essa resposta revela domínio dos registros de representação e aponta que os estudantes conseguem transitar entre eles de forma crítica e estratégica, em consonância com a TRRS de Raymond Duval.

A análise do padrão de construção dos quadrados permitiu aos estudantes desenvolverem estratégias de resolução que envolveram observação, generalização, modelagem algébrica e interpretação gráfica. Ao longo das etapas, os estudantes mobilizaram diferentes registros de representação, construíram argumentos e justificaram suas escolhas, evidenciando um percurso investigativo que vai além da simples aplicação de fórmulas (Onuchic; Allevato, 2011). Ao serem desafiados a pensar, comparar modelos, prever comportamentos e formalizar conceitos, os estudantes assumiram um papel ativo na construção do conhecimento, assim, a tarefa consolidou a compreensão dos conteúdos específicos e ampliou a flexibilidade entre diferentes registros de representações semióticas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A trajetória investigativa desenvolvida ao longo desta pesquisa permitiu compreender, o impacto do uso intencional das TD, em especial o GeoGebra, na promoção de aprendizagens que relacionam a teoria e a prática. Ao serem inseridos em propostas pedagógicas investigativas e contextualizadas, os OVA e os problemas revelaram-se recursos que favorecem a ampliação da capacidade dos estudantes de reconhecer e transitar entre diferentes representações semióticas.

Os dados produzidos e coletados por meio do GeoGebra Tarefa e do diário de bordo facilitaram o processo de análise das interações dos estudantes com os OVA e dos passos por eles trilhados durante a resoluções dos problemas. Durante as oficinas, já era possível observar que os OVA facilitavam a exploração e consequentemente a conversão articulada entre os registros numérico, algébrico, gráfico, geométrico e escrito, evidenciando a compreensão dos conceitos explorados. Ao analisar os dados produzidos, observou-se que todos os estudantes conseguiram realizar a conversão entre pelo menos dois registros de representação na maioria das atividades propostas, fato que, de acordo com Raymond Duval, é um indicativo de que houve apropriação dos significados e conceitos explorados.

A análise de conteúdo proposta por Bardin (2011) mostrou-se útil na organização e interpretação dos dados, permitindo identificar padrões, avanços conceituais e dificuldades recorrentes. Essa abordagem possibilitou uma leitura crítica das manifestações dos participantes, revelando não apenas os resultados obtidos, mas também os caminhos percorridos na construção do conhecimento.

A metodologia adotada, fundamentada na pesquisa-ação, proporcionou um ambiente de aprendizagem colaborativo, no qual os saberes dos estudantes foram valorizados e integrados ao processo investigativo. A escuta ativa e a abertura para a experimentação proporcionaram condições favoráveis para que os estudantes se posicionassem como protagonistas, construindo significados a partir de suas próprias experiências e interações com os recursos digitais.

Embora os objetivos da pesquisa tenham sido alcançados, é importante reconhecer que o processo investigativo também revelou limitações. Nem todos os estudantes apresentaram o mesmo nível de engajamento, e alguns aspectos poderiam ter sido mais explorados. No entanto, essas observações não comprometem os resultados obtidos, ao contrário, apontam para novas possibilidades de investigação, aprimoramento dessa e de outras práticas pedagógicas.

A experiência de elaborar e adaptar os OVA representou, para a pesquisadora, um processo formativo significativo. A necessidade de selecionar problemas pertinentes, alinhar objetivos pedagógicos e dominar ferramentas digitais até então pouco exploradas em sua prática docente exigiu flexibilidade, curiosidade e disposição para aprender. Essa vivência reafirma o papel do professor como sujeito ativo na construção de propostas inovadoras e como agente de transformação no contexto educacional.

Destaca-se, portanto, a relevância da formação contínua do docente como elemento central para o fortalecimento de práticas pedagógicas reflexivas, intencionais e comprometidas com a aprendizagem. A busca por estratégias didáticas que incorporem as TD ao contexto dos estudantes, relacionando teoria e prática, é uma das exigências da BNCC e promove um ensino mais integrado, investigativo e aplicável. Um exemplo disso é a manipulação de parâmetros nos OVA para interpretar os problemas propostos, visto que a formulação de hipóteses e a justificativa das soluções construídas pelos estudantes durante as oficinas apontam para um desenvolvimento expressivo das competências previstas pela BNCC, especialmente no que se refere à argumentação, à resolução de problemas e à contextualização.

Os estudantes também tiveram a oportunidade de construir seus próprios OVA, requerendo o domínio de diferentes registros de representação semiótica e a compreensão dos signos matemáticos envolvidos, como variáveis, coeficientes, razões, expressões algébricas e gráficos. Ao planejar e estruturar suas produções, os estudantes precisaram articular conceitos, testar hipóteses e representar relações de forma coerente e visual. Esse processo não apenas ampliou a compreensão dos conteúdos abordados, como também favoreceu o desenvolvimento da autonomia, da criatividade e da argumentação.

A principal contribuição dos OVA para o reconhecimento e a transição entre os registros de representação semiótica foi a possibilidade de visualizar os padrões e comportamentos de forma rápida, dinâmica e objetiva. Ao manipular parâmetros como razão, termo inicial e número de elementos, os estudantes puderam observar diretamente os efeitos dessas variações nas sequências e seus respectivos gráficos, distinguir modelos discretos e contínuos. Contribuiu também para interpretarem gráficos de funções afins e exponenciais, aplicar fórmulas de somas infinitas de progressões geométricas, aliadas aos conceitos de convergência e divergência, facilitando a compreensão dos signos envolvidos em cada sistema. Já os problemas propostos contribuíram para aprofundar essa compreensão ao inserir os conceitos em contextos reais e desafiadores. As tarefas requereram dos estudantes não apenas cálculos, mas também interpretação, argumentação e tomada de decisões, promovendo o uso consciente dos registros de representação. Ao resolver situações como corrida de táxi, investimentos, decaimento radioativo e crescimento populacional, os estudantes foram levados a comparar modelos, justificar escolhas e construir definições, evidenciando que a resolução de problemas, aliada ao uso dos OVA, potencializou a aprendizagem e a conversão entre os registros de representações semióticas.

Esses resultados reforçam a importância de se repensar o ensino da Matemática a partir de abordagens que valorizem a investigação, a experimentação e o diálogo entre diferentes formas de representação. Ao integrar TD com intencionalidade pedagógica, é possível não apenas tornar os conteúdos mais acessíveis, mas também promover uma cultura de aprendizagem mais ativa, crítica e criativa. A pesquisa realizada não se encerra em seus resultados, mas se projeta como ponto de partida para novas práticas, estudos e reflexões que contribuam para a construção de um ensino matemático mais conectado com as necessidades dos estudantes e com os desafios contemporâneos da educação.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

BRANCA, N. **A resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica.** In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução de H. H. Domingues e O. Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4-12.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio.** Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa.** Curitiba: CRV, 2012.

COLOMBO, J. A. A. **Representações semióticas no ensino: contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática.** 2. ed. São Paulo: Autêntica, 2012.

DUVAL, R. **Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática?** [trad. Méricles Thadeu Moretti]. Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat. vol 13, n. 2. p. 1-27. Santa Catarina: Florianópolis, 2018.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis et Penseé Humaine: Registres Sémiotiques et Apprendtissages Intellectueis). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. Disponível em < https://lfeditorial.com.br/wp-content/uploads/2023/07/9788578610357_reduced.pdf>.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Matemática: práticas pedagógicas para o ensino médio.** Porto Alegre: Penso, 2012.

FERREIRA, J.; ALVES, D.; SANTOS, M. **O uso do GeoGebra para a interpretação geométrica de funções aplicadas ao estudo das progressões aritméticas e geométricas.** Revista do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (REMPM), v. 4, n. 1, p. 1–15,

2021. Disponível em: <https://repositorio.ufrgs.br/handle/10183/228961>. Acesso em: 10 fev. 2025.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação.** 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

KORALESKI, L. G. **O estudo da função quadrática com o GeoGebra à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2024. 147 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) — Universidade Federal da Fronteira Sul, Campus Erechim, Erechim, RS, 2024. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/8245. Acesso em: 8 fev. 2025.

LOPES, M. M. **Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra.** Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 46, p. 1371–1390, ago. 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/7jbBvcDtcR7tG7qGYwXzMQM. Acesso em: 2 fev. 2025.

MARCHETTO, C. **O uso do software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais.** 2017. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/174261>. Acesso em: 5 fev. 2025.

MENDONÇA, R. A.; PIRES, M. de L. **Registros de representação semiótica e tecnologias digitais na aprendizagem de função exponencial.** Revista do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (REMPM), v. 1, n. 1, p. 1–15, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrgs.br/handle/10183/228960>. Acesso em: 5 fev. 2025.

MORETTI, M. T. **Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.** Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/260031>. Acesso em: 2 fev. 2025.

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola.** In: ENCUENTRO URUGUAYO DE GEOGEBRA, 2., 2012, Montevidéu. Anais [...]. Montevidéu: GeoGebra Institute of Uruguay, 2012. Disponível em: <http://geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1443685856/67.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2025.

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Sala de aula invertida e o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática para explorar função afim no Ensino Médio Integrado.** 2023. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica) — Instituto Federal Baiano, Salvador, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ifbaiano.edu.br/jspui/handle/ifbaiano/707>. Acesso em: 2 fev. 2025.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, v. 25, n. 41, p. 73–98, dez. 2011. Disponível em:

<https://www.furb.br/web/upl/arquivos/201907021704050.Problemas.pdf>. Acesso em: 16 agos. 2025.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução de H. L. Araújo. 2. reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SILVA, A. C. da S. e. **Formação de professores de matemática:** desafios e necessidades na integração de tecnologias digitais no ensino de matemática nas escolas públicas. 2025. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2025. Disponível em: <https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/6574>. Acesso em: 08 dez. 2025.

VALMORBIDA, J. M. **Uma proposta de atividades para o estudo de progressões geométricas utilizando fractais e o software GeoGebra.** 2018. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) — Universidade Federal da Fronteira Sul, Campus Chapecó, Chapecó, SC, 2018. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/2179>. Acesso em: 2 fev. 2025.

APÊNDICE A – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO OVA 1

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Fixe um valor para a_1 e use uma razão $r > 0$. O que acontece?	Desenvolver a capacidade de identificar padrões na sequência, compreender as mudanças no comportamento dos termos subsequentes e descrever as implicações de uma razão positiva na evolução da PA.
2 - Fixe um valor para a_1 e use uma razão $r < 0$, o que acontece?	Aperfeiçoar a habilidade de identificar padrões na sequência, compreender as mudanças no comportamento dos termos subsequentes e descrever as implicações de uma razão negativa na evolução da PA.
3 - Fixe a razão $r = 0$ e deslize os valores de a_1, o que acontece?	Aprimorar a capacidade de identificar padrões na sequência, compreender as características de uma PA com razão zero, reconhecendo-a como uma sequência constante.
4 - Observe o que você respondeu na questão “1” (se necessário, manipule a sequência com outros valores), se você ligar os pontos dessa sequência, que tipo de função e gráfico ela vai formar?	Ampliar a capacidade de descrever o tipo de função (afim) e analisar o crescimento e o formato do gráfico (reta crescente) gerado ao conectar os pontos da sequência, observando as diferenças e transições entre os domínios discreto e contínuo.
5 - Observe o que você respondeu na questão “2” (se necessário, manipule a sequência com outros valores), se você ligar os pontos dessa sequência, que tipo de função e gráfico ela vai formar?	Desenvolver a capacidade de descrever o tipo de função (afim), o decrescimento e o formato do gráfico (reta) que surge ao conectar os pontos da sequência, distinguindo um domínio discreto de um domínio contínuo.
6 - Observe o que você respondeu na questão “3” (se necessário, manipule a sequência com outros valores), se você ligar os pontos dessa sequência, que tipo de função e gráfico ela vai formar?	Aprimorar a habilidade de descrever o tipo de função (constante) e o formato do gráfico (reta) que surge ao conectar os pontos da sequência.

7 - Crie uma definição para a PA.	Compreender e observar a diferença constante entre os termos.
8 - Crie uma definição (o que deve acontecer) para que essa progressão seja crescente, decrescente ou constante.	Expandir a habilidade do estudante em definir claramente os critérios necessários para cada tipo de progressão, utilizando a razão (r) como principal parâmetro.

APÊNDICE B – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 1

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Represente a sequência do valor a ser cobrado nos primeiros 10 quilômetros.	Desenvolver a habilidade de representar a sequência dos valores a serem cobrados nos primeiros 10 quilômetros, considerando a bandeirada inicial e o custo por quilômetro rodado.
2 - Represente em uma tabela a quantidade de quilômetros rodados com seus respectivos valores de corrida. Dica: Use $f(x) =$ valor total da corrida e $x =$ quantidade de quilômetros rodados. Inicie com $x = 0$.	Aperfeiçoar a capacidade de construir e interpretar tabelas, assim como identificar a relação linear entre as variáveis envolvidas.
3 - Usando a tabela da questão 2, faça o esboço do gráfico em seu caderno. Que gráfico é esse? Que função é essa?	Aprimorar as habilidades de: - Esboçar corretamente o gráfico a partir dos dados da tabela; - Reconhecer que o gráfico obtido é uma reta. - Identificar que a função correspondente é uma função do primeiro grau.
4 - Escreva algebricamente a função que representa o gráfico que você esboçou na questão 3.	Expandir a compreensão em: - Traduzir representações gráficas para expressões algébricas. - Identificar que a função pode ser escrita algebricamente como pela fórmula $f(x) = 5 + 2x$, onde $f(x)$ é o valor total da corrida e x é a quantidade de quilômetros rodados.
5 - Agora esboce no GeoGebra a função que você encontrou. É necessário definir alguma restrição no domínio da função para representar o problema em questão? Qual?	Melhorar a habilidade de determinar a restrição no domínio da função para que ela represente adequadamente a situação de uma corrida de táxi, considerando que o número de quilômetros rodados não pode ser negativo, ou seja, os estudantes devem perceber que para restringir o domínio dessa função, deve-se digitar na entrada $5 + 2x$,

	$x \geq 0$.
6 - Faça a construção no GeoGebra usando o controle deslizante para "n". Escreva aqui os passos que você precisou fazer.	Fortalecer a capacidade de criar e manipular controles deslizantes, observar as mudanças na sequência e documentar o processo de construção.

APÊNDICE C – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 2

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Continue a sequência até o termo a_{10}.	Desenvolver a capacidade em aplicar o padrão observado nos primeiros termos da sequência para calcular os termos subsequentes.
2 - Determine a razão "r" e o primeiro termo "a_1" dessa sequência. É que tipo de sequência?	Aperfeiçoar a habilidade de identificar a razão e o primeiro termo de uma sequência, bem como classificar o tipo de sequência apresentada.
3 - Faça uma tabela usando $f(x) =$ Total de pontilhados e $x =$ quantidade de pentágonos, depois no seu caderno faça o esboço dessa sequência. Qual é a expressão algébrica que representa esse problema? Que função é essa?	Aprimorar a capacidade em criar tabelas e esboçar gráficos a partir de dados tabulados, além de identificar a expressão algébrica que representa a sequência dos números pentagonais, identificando o tipo de função envolvida.
4 - Determine o a_{100} usando o termo geral de uma PA e depois usando a função que você criou na questão anterior, o que você consegue observar?	Facilitar a compreensão ao utilizar diferentes métodos para calcular termos específicos de uma sequência, nesse caso, o termo geral da sequência e a lei de formação da função, comparando os resultados obtidos.
5 - Represente a função no GeoGebra e escreva aqui os passos que utilizou para realizar esse esboço.	Desenvolver a habilidade em esboçar a função no software, descrever os passos e definir a restrição no domínio desta função.

APÊNDICE D – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 3

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Observe a imagem acima, ela representa os termos equidistantes (mesma distância) de uma sequência. Monte a sequência dos 10 primeiros números inteiros positivos e depois monte uma tabela com os pares de termos equidistantes dessa sequência.	Desenvolver a habilidade dos estudantes em identificar e construir sequências numéricas, bem como reconhecer e organizar pares de termos equidistantes. Esta questão visa promover a compreensão das propriedades das sequências e das relações simétricas entre seus termos.
2 - Observe esses números equidistantes da questão anterior, consegue observar algum padrão? Qual?	Desenvolver a habilidade dos estudantes em identificar padrões e simetrias em sequências numéricas, promovendo a análise crítica e a compreensão das relações entre os termos.
3 - Repita o processo acima com os 15 primeiros números inteiros ímpares. A ideia permanece a mesma quanto a soma equidistante?	Desenvolver a capacidade dos estudantes de identificar e analisar padrões em sequências numéricas, reconhecendo que os termos equidistantes somam sempre o mesmo valor, independente se for uma quantidade ímpar ou par de termos.
4 - Determine a soma das duas sequências (questão 1) e (questão 3).	Identificar e analisar padrões em termos equidistantes. Comparar e interpretar resultados de diferentes sequências, aplicando conceitos matemáticos de forma crítica e contextualizada.
5 - Manipule a sequência da questão 1, de modo que encontre uma expressão algébrica (fórmula) para a soma dos termos, usando as ideias que já conhece sobre sequências. (ESCREVA AQUI TUDO O QUE VOCÊ INTERPRETOU).	Desenvolver a capacidade dos estudantes em manipular sequências numéricas e aplicar conhecimentos prévios para encontrar uma expressão algébrica (fórmula) para a soma dos termos. Promover a análise e a compreensão das propriedades das sequências e a conexão

	entre conceitos matemáticos.
6) Repita o processo com a sequência na questão 3.	Desenvolver a capacidade dos estudantes em manipular sequências numéricas e aplicar conhecimentos prévios para encontrar uma expressão algébrica (fórmula) para a soma dos termos, percebendo que a expressão da soma dos termos de uma PA permanece a mesma, independente se for uma quantidade par ou ímpar de termos.

APÊNDICE E – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO OVA 2

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Observando a sequência “l_1”, ajuste o controle deslizante a_1 para diferentes valores. O que acontece com os termos da PA quando você aumenta ou diminui a_1?	Desenvolver a capacidade dos estudantes em manipular sequências numéricas utilizando ferramentas digitais e compreender o efeito das alterações nos parâmetros da sequência. Identificar que um aumento ou decréscimo no valor de a_1 resulta em um acréscimo ou decréscimo correspondente em todos os termos da PA.
2 - Agora vamos analisar geometricamente: Ajuste o controle deslizante a_1 para diferentes valores, observando os retângulos formados pela sequência de termos no gráfico. Como o ajuste do a_1 altera a área total dos retângulos?	Desenvolver a capacidade dos estudantes em analisar geometricamente as alterações nos parâmetros de sequências numéricas e compreender o impacto dessas mudanças na área total representada no gráfico. Calcular a área total dos retângulos formados pela sequência de termos e aplicar o módulo da soma quando a sequência ou parte da sequência apresentar valores negativos. Interpretar e explicar o impacto das mudanças nos parâmetros da sequência na área total dos retângulos, desenvolvendo uma compreensão mais profunda das relações matemáticas envolvidas.
3 - Observando a sequência “l_1” mude o controle deslizante r para diferentes valores positivos e negativos. Como isso afeta a diferença entre os termos consecutivos da PA?	Interpretar e explicar a relação entre a razão r e o comportamento da sequência. Compreender que um r positivo resulta em uma sequência crescente, enquanto um r negativo resulta em uma sequência decrescente.
4 - Agora vamos analisar geometricamente: Ajuste o controle deslizante r para diferentes valores, observando os retângulos formados pela sequência de ter-	Interpretar e explicar o impacto das mudanças na razão r na área total dos retângulos, incluindo a consideração do módulo para valores negativos, desenvolvendo uma compreensão mais profunda das relações geométricas envolvidas.

mos no gráfico. Como o ajuste do r altera a área total dos retângulos?	
5 - Ajuste o controle deslizante n para variar a quantidade de termos na PA. Como a soma S_n muda com o aumento de n?	Desenvolver a capacidade dos estudantes em manipular sequências numéricas variando a quantidade de termos e compreender como isso afeta a soma total S_n da PA. Interpretar e explicar o impacto das mudanças na quantidade de termos n na soma total S_n. Entender que, mesmo para $r < 0$, a soma S_n pode aumentar ou diminuir dependendo dos valores absolutos dos parâmetros e do número de termos.
6) Agora é sua vez, faça essa construção no GeoGebra, não é necessário que sejam os mesmos valores nos controles deslizantes, mas é necessário que seja uma PA. Escreva os passos que você utilizou para fazer essa construção.	Aplicar conhecimentos sobre PA para configurar e manipular sequências numéricas no GeoGebra. Criar controles deslizantes no GeoGebra para manipular parâmetros de uma PA. Configurar e definir uma sequência de termos utilizando fórmulas apropriadas. Visualizar a sequência e suas representações gráficas no GeoGebra.

APÊNDICE F – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 4

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Escreva a sequência do trajeto realizado pelos ônibus X e Y nas 10 primeiras horas. Que sequências são essas? Por quê?	Aplicar conhecimentos sobre PA para analisar sequências de trajetos com base em dados de velocidade e tempo. Utilizar a razão entre os termos para identificar e confirmar a natureza aritmética das sequências.
2 - Faça o esboço dessa sequência em seu caderno, depois escreva o que você observou.	Plotar gráficos de sequências numéricas, como PA, utilizando coordenadas no plano cartesiano. Identificar e interpretar a interseção de duas retas no gráfico, compreendendo o significado dos pontos de interseção em um contexto prático.
3 - Escreva algebricamente a função que representa a velocidade em km/h do ônibus X e do ônibus Y.	Utilizar representações algébricas para descrever movimentos constantes e interpretar os resultados no contexto. Desenvolver habilidades em criar e analisar funções algébricas para entender a relação entre tempo e distância em situações práticas.
4 - Calcule, usando a linguagem de funções, a distância percorrida pelos ônibus às 4 horas da manhã.	Desenvolver a habilidade de substituir valores nas funções algébricas para calcular a distância percorrida por objetos em movimento constante. Interpretar os resultados dos cálculos no contexto do problema, desenvolvendo uma compreensão mais profunda das relações entre tempo, velocidade e distância.
5 - Usando a linguagem de funções, determine o horário que o ônibus Y vai cruzar com o ônibus X.	Desenvolver a percepção que as funções lineares podem ser igualadas nesse caso. Resolver equações para encontrar pontos de interseção. Realizar passos matemáticos de forma lógica e ordenada para encontrar soluções precisas.
6 - Como podemos ajustar a função $f_x(x)$ de modo que, assim como a função $f_y(x)$ ela	Ajustar sequências numéricas acumulando trajetórias em função de mudanças nas condições iniciais. Restringir o domínio de funções algébricas para refletir

também inicie em $t = 2$?	novos pontos de partida no tempo.
7 - Faça no software GeoGebra o esboço do gráfico das duas funções, restringindo o domínio de ambas as funções para [2,20]. Escreva aqui, os passos que você utilizou para fazer essa construção. Como podemos restringir no GeoGebra apenas o valor inicial?	Escrever funções algébricas no GeoGebra utilizando a opção FUNÇÃO (FUNÇÃO, VALOR DE X INICIAL, VALOR DE X FINAL). Configurar funções com domínios restritos para representar trajetos com condições iniciais específicas. Interpretar e explicar as funções ajustadas e restritas no contexto do problema.

APÊNDICE G – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 5

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Escreva a sequência das 10 primeiras horas dos reservatórios A e B.	Identificar e escrever sequências numéricas baseadas em padrões constantes de aumento ou diminuição. Calcular a razão entre os termos consecutivos de uma sequência para determinar se ela é uma PA.
2 - Escreva o termo geral das PA que representam os volumes de água em cada reservatório.	Escrever o termo geral de uma PA utilizando a fórmula adequada. Identificar os parâmetros a_1 e r em uma sequência numérica e aplicá-los corretamente na fórmula do termo geral.
3 - Escreva a lei de formação das funções que representam o volume de água dos reservatórios A e B.	Escrever funções algébricas que representam volumes em função do tempo, utilizando a fórmula do termo geral de PA. Identificar e manipular funções para descrever situações reais envolvendo volumes e tempo.
4 - Usando as funções que você encontrou na questão 1, determine a interseção entre as retas.	Igualar funções afins e resolver equações para encontrar pontos de interseção. Substituir valores nas funções para determinar a coordenada exata do ponto de interseção.
5 - Você encontrou na questão anterior a interseção entre as retas, explique o que essa coordenada representa para situação problema.	Interpretar o significado das coordenadas do ponto de interseção no contexto de um problema prático. Relacionar as funções matemáticas às situações reais representadas por elas.
6 - Usando o termo geral da PA, encontre a interseção dos volumes dos reservatórios A e B.	Utilizar os termos gerais de PA para encontrar pontos de interseção entre duas sequências. Reorganizar e simplificar termos gerais de PA para resolver equações de interseção.
7 - Determine o trigésimo primeiro termo de ambas as PA.	Utilizar o termo geral de uma PA para calcular termos específicos da sequência. Substituir valores na fórmula do termo geral e realizar

	cálculos matemáticos precisos para determinar resultados exatos.
8 - Explique o porquê da interseção das funções ser $x = 30$ e das PA ser $n = 31$.	Diferenciar entre contextos contínuos e discretos na formulação e interpretação de funções e sequências. Aplicar métodos matemáticos apropriados para resolver problemas em contextos contínuos e discretos.

APÊNDICE H – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 6

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Determine a sequência de quanto ela terá em sua conta nos primeiros 6 meses.	Determinar a sequência de valores de um investimento ao longo do tempo com base em uma taxa de juros fixa. Analisar e interpretar sequências de valores financeiros ao longo do tempo, compreendendo a relação entre o principal, a taxa de juros e o tempo.
2 - Escreva o termo geral dessa sequência. Que sequência é essa?	Identificar os parâmetros de uma PA a partir de uma sequência numérica. Escrever o termo geral de uma PA utilizando a fórmula apropriada. Simplificar expressões matemáticas para encontrar formas alternativas de um termo geral.
3 - Coloque esse termo geral no GeoGebra, o que você consegue observar?	Utilizar o GeoGebra, para representar graficamente a situação problema. Analisar e interpretar gráficos de funções lineares e suas características.
4 - Determine a função afim que descreve o valor do investimento em função do tempo (em meses).	Escrever funções afins que representam valores de investimento em função do tempo. Utilizar o conceito de juros simples e da representação linear do crescimento do investimento ao longo do tempo para determinar a função que representa o problema dado.
5 - Encontre o tempo exato em que o valor será de $R\$ \ 2.000{,}00$. Para calcular, use as duas fórmulas que você encontrou: o termo geral da PA e a lei de formação da função do primeiro grau. Interprete suas respostas e justifique corretamente.	Utilizar o termo geral de uma PA e a função afim para resolver problemas financeiros. Calcular o tempo necessário para atingir um valor específico de investimento.

APÊNDICE I – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO OVA 3

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Fixe o valor $a_1 = 2$ e deslize a razão usando $q > 1$. O que acontece?	Identificar e ajustar os parâmetros de uma PG. Analisar a sequência e seus termos específicos com diferentes razões.
2 - Fixe o valor $a_1 = 2$ e do $q = 0$. O que acontece? E se deslizar os valores de a_1 o que acontece?	Compreender o impacto dos parâmetros a_1 e q em uma PG. Identificar o comportamento de uma PG quando a razão é zero.
3 - Fixe o valor $a_1 = 2$ e deslize a razão usando $0 < q < 1$.	Observar que a sequência diminui exponencialmente, formando uma sequência decrescente. Analisar o comportamento das PG quando a razão está entre 0 e 1.
4 - Fixe o valor $a_1 = 2$ e use q < 0, o que acontece com a sequência?	Observar que a sequência se torna oscilante, com valores negativos e positivos alternados. Descrever de forma clara o comportamento das PG quando a razão é negativa.
5 - Deslize valores para $a_1 < 0$ e valores de q < 0, o que acontece?	Reconhecer que a sequência continua sendo oscilante, com valores alternando entre positivos e negativos. Compreender o comportamento das PG com termos iniciais negativos e razões negativas.
6 - Deslize valores para $a_1 < 0$ e $q > 1$, o que acontece?	Analisar e interpretar o comportamento das sequências geométricas ao ajustar os parâmetros. Reconhecer que quanto maior o valor da razão e menor for o valor de a_1, maior a distância entre os termos, resultando em um decrescimento rápido e exponencial.
7 - O que ocorre se fixar somente a_1 = 0?	Entender como o termo inicial zero afeta uma PG, resultando em uma sequência constante de zeros, independentemente da razão q.
8 - Como você definiria a PG?	Definir uma PG como uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante chamada razão q.

	Compreender os conceitos básicos de PG.
9 - Use relações para definir o comportamento de uma PG, ou seja, para explicar por exemplo quando a sequência é crescente, decrescente, constante ou oscilante.	Compreender que uma PG é crescente quando a razão $q > 1$ e os termos aumentam exponencialmente. Perceber que uma PG é decrescente quando $0 < q < 1$. e os termos diminuem exponencialmente. Reconhecer que uma PG é constante quando a razão $q = 1$ e os termos são iguais ao primeiro termo. Identificar que uma PG é oscilante quando a razão $q < 0$. e os termos alternam entre valores positivos e negativos.

APÊNDICE J – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 7

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Determine a sequência da quantidade de grãos de arroz nas primeiras 10 casas do tabuleiro.	Melhorar a habilidade dos estudantes em resolver problemas ao analisar o crescimento exponencial da quantidade de grãos. Analisar e interpretar o comportamento de sequências geométricas, identificando padrões de crescimento exponencial.
2 - Que tipo de sequência é essa? Qual é o primeiro termo? Qual é a razão?	Identificar uma PG e seus elementos principais, como o primeiro termo e a razão.
3 - Determine o termo geral dessa progressão.	Deduzir a fórmula do termo geral de uma PG ao identificar o padrão na sequência e aplicar os conceitos teóricos aprendidos.
4 - Se você representasse a quantidade de grãos de arroz em cada casa do tabuleiro em um gráfico, que tipo de curva você esperaria ver? Por quê?	Compreender o tipo de curva resultante da representação gráfica de uma PG.
5 - Represente a quantidade de grãos na casa n usando função exponencial.	Representar a quantidade de grãos de arroz em cada casa do tabuleiro utilizando uma função exponencial, refletindo o crescimento exponencial da sequência.
6 - Utilize as fórmulas que você encontrou na questão 3 e na questão 4 para determinar a quantidade de grãos de arroz da 20ª casa do tabuleiro.	Aplicar as fórmulas deduzidas anteriormente (termo geral da PG e função exponencial) para calcular a quantidade de grãos de arroz em uma posição específica do tabuleiro.
7 - Faça em seu caderno o esboço do gráfico para as primeiras 10 casas. Faça uma análise desse crescimento.	Prever e compreender o tipo de curva resultante da representação gráfica de uma PG.
8 - Determine a quantidade de	Utilizar a fórmula do termo geral da PG para calcular a

arroz da última casa. (Pode deixar em forma de potência).	quantidade de grãos de arroz em uma posição específica do tabuleiro.
9 - Usando o GeoGebra, use o controle deslizante para representar o crescimento dos grãos de arroz e escreva aqui os passos que você usou para criar a sequência.	Utilizar o software GeoGebra para criar uma representação gráfica da sequência de grãos de arroz. Aprimorar a habilidade de empregar a linguagem computacional.
10 - Em qual representação fica mais claro observar o crescimento exponencial? E qual representação facilita perceber a relação entre as casas?	Compreender e visualizar o crescimento exponencial utilizando diferentes representações. Mostrar competência em analisar e interpretar tanto gráficos quanto sequências numéricas.

APÊNDICE K – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 8

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Observe o gráfico e identifique qual é a massa inicial do rádio-226? Qual é a massa após 1620 anos? E após 3240 anos? O que você observa sobre a relação entre a massa em cada período? É algum tipo de sequência?	Identificar que o decaimento da massa ao longo do tempo segue uma PG com razão $\frac{1}{2}$. Desenvolver a habilidade de identificar padrões matemáticos em dados sequenciais.
2 - Escreva a fórmula geral da PG para calcular a massa do material após n períodos de 1620 anos.	Desenvolver a capacidade de escrever a fórmula geral de uma PG. Aplicar conhecimentos teóricos sobre PG para modelar e resolver problemas relacionados ao decaimento radioativo.
3 - Determine usando a fórmula que você encontrou, qual será a massa do rádio-226 após 4860 anos? E após 6480 anos?	Calcular o decaimento radioativo de uma substância utilizando PG.
4 - Podemos representar o decaimento do rádio-226 como uma função exponencial no tempo (anos)? Qual seria a função se considerarmos o tempo em anos, e não em períodos de 1620 anos?	Desenvolver a capacidade de aplicar funções exponenciais para calcular a massa restante de um material radioativo ao longo de diferentes períodos. Representar o decaimento exponencial do material radioativo, considerando o tempo em anos e a razão da PG $\frac{1}{2}$. Aprimorar o raciocínio algébrico ao trabalhar com funções exponenciais e identificar a relação entre tempo e decaimento.
5 - Desenhe o gráfico usando o software GeoGebra. Qual é o formato da curva? A massa chegará a zero?	Identificar que a função exponencial que representa o decaimento radioativo é uma curva decrescente que se aproxima do eixo horizontal, mas nunca atinge zero. Interpretar e descrever o comportamento de uma função exponencial decrescente.

6 - Explique o conceito de meia vida usando a sequência (PG), a função exponencial e o gráfico. Em qual delas fica mais claro de que a massa é reduzida pela metade em intervalos de 1620 anos?	Explicar como cada representação (sequência, função exponencial e gráfico) representa o conceito de meia-vida. Desenvolver a habilidade de interpretar sequências numéricas (PG) para identificar padrões de decaimento. Aprimorar a habilidade em formular e interpretar funções exponenciais. Aprimorar a habilidade em interpretar gráficos exponenciais.

APÊNDICE L – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS PROBLEMA 9

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Sabendo que o rendimento da poupança é de 0,560% ao mês e que o CDB rende 0,876% ao mês (com um imposto de 4% sobre o ganho), represente os dois investimentos em forma de sequência, do primeiro mês de juro até o quinto mês de juros.	Calcular a sequência de rendimentos para os dois tipos de investimento, considerando o rendimento mensal e o imposto sobre o CDB. Desenvolver a capacidade de aplicar conhecimentos teóricos de matemática financeira para resolver problemas práticos.
2 - Observe a razão que você usou para encontrar os termos da questão anterior, que sequências são essas? Represente o termo geral de ambas, use P para o valor inicial do investimento e n o número de meses.	Identificar que as sequências são PG e representar o termo geral de ambas utilizando as razões apropriadas. Aplicar a fórmula geral de uma PG para modelar os investimentos financeiros.
3 - Agora, fixando o valor de R$ 500,00, represente o saldo de cada investimento ao longo dos meses usando função exponencial.	Utilizar as fórmulas apropriadas para representar o saldo dos investimentos ao longo dos meses usando funções exponenciais, onde cada fórmula deverá levar em consideração o valor inicial de R$ 500,00 e os rendimentos mensais.
4 - Plote no GeoGebra as funções que você encontrou, observando os gráficos, a vantagem inicial do CBD sobre a poupança diminui com o tempo?	Observar adequadamente os gráficos das funções plotadas no GeoGebra e concluir que a vantagem inicial do CDB sobre a poupança aumenta com o tempo.
5 - Observe a sequência que você criou na questão 1, as funções que você determinou na questão 3 e os gráficos que você plotou na questão 4. Como cada	Explicar como cada representação ajuda a entender o problema de maneiras diferentes. Reconhecer que a sequência numérica permite visualizar o crescimento dos investimentos mês a mês, proporcionando uma visão detalhada e passo a passo do ren-

uma dessas representações ajuda a entender o problema de maneiras diferentes?	dimento ao longo do tempo. Compreender que a expressão exponencial permite calcular o saldo dos investimentos para qualquer período de forma rápida e eficiente. Interpretar que o gráfico ilustra visualmente o crescimento exponencial dos investimentos ao longo do tempo, facilitando a compreensão do comportamento de ambas.

APÊNDICE M – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO OVA 4

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Utilize o controle deslizante para alterar o valor de n (número de termos da PG). Observe como a soma dos termos muda conforme você aumenta ou diminui n. Qual é a soma dos primeiros 5, 10 e 20 termos da PG com termo inicial $a_1 = 1$ e razão $q = 2$?	Observar que, ao aumentar o número de termos n da PG, a soma dos termos também aumenta. Desenvolver a habilidade em calcular somas parciais de uma PG, observando o OVA 4.
2 - Determine a expressão geral da PG da questão 1. Use o termo geral que você encontrou para determinar o vigésimo termo.	Desenvolver a habilidade em formular expressões que descrevem os termos de uma sequência em PG. Aplicar os termos específicos para determinar o vigésimo termo.
3 - Ainda usando a questão 1, determine a expressão geral da SOMA dos termos da PG e, por meio desta, determine a soma dos 20 primeiros termos da PG.	Aprimorar habilidades em calcular somas parciais de uma PG utilizando a fórmula apropriada. Desenvolver o raciocínio algébrico necessário para aplicar a expressão geral da soma dos termos de uma PG.
4 - Utilize o controle deslizante para alterar a razão q e observe como isso afeta a soma dos primeiros 10 termos da PG com termo inicial $a_1 = 2$. Compare os resultados para $q = 2, q = 3$ e $q = 4$.	Analisar e explicar como a variação da razão q afeta a soma dos termos de uma PG. Observar que, ao aumentar a razão q da PG, a soma dos termos também aumenta.
5 - Complete a tabela abaixo com a sequência dos 8 primeiros termos da PG da questão 1. Observe que foi utilizada para $x =$ (posição n do termo) e $y =$ (va-	Completar a tabela com os 8 primeiros termos da PG, formando as coordenadas. Desenvolver a capacidade de representar e visualizar os termos de uma PG utilizando uma tabela e coordenadas. Aprimorou as habilidades em interpretar e calcular ter-

lor do termo). Na sequência forme as coordenadas (x, y). Conforme exemplo: $x = 1$ $y = 1$ $(1,1)$ $x = 2$ $y = 2$ $(2,2)$ $x = 3$ $y = 4$ $(3,4)$ ...	mos de uma PG.
6 - Em seu caderno, coloque as coordenadas que você encontrou na questão 5 em um plano cartesiano. Ao ligar essas coordenadas, que gráfico e/ou função está sendo representada? Encontre a expressão dessa função. Determine também o domínio e a imagem da função.	Identificar que o gráfico resultante ao ligar os pontos no plano cartesiano representa uma função exponencial. Encontrar a expressão da função, determinando corretamente o domínio e a imagem da função. Desenvolver habilidades em formular expressões matemáticas que descrevem o comportamento de funções exponenciais. Aprimorar a interpretação de gráficos.
7 - Desenhe os primeiros 5 retângulos no plano cartesiano utilizando as alturas obtidas a partir da sequência da questão 1. Qual é a relação entre as alturas dos retângulos e os termos da PG?	Observar que as alturas dos retângulos correspondem aos primeiros cinco termos PG da questão 1, onde cada altura é o dobro da anterior. Desenvolver a capacidade de representar e visualizar os termos de uma PG utilizando gráficos de retângulos. Compreender a relação entre as alturas dos retângulos e os termos da PG.
8 - Qual é a relação dos termos e da soma da PG com a área dos retângulos?	Observar que a área de cada retângulo corresponde ao valor do termo a_n da PG e, ao somar as áreas dos retângulos, estamos somando os termos da PG, confirmando que a soma das áreas dos retângulos é igual à soma dos termos da PG.
9 - Utilize o controle deslizante para alterar o valor de n. Observe como a soma dos termos muda conforme você aumenta ou diminui n. Qual é a soma dos primeiros 5, 10 e 20 termos da	Desenvolver a capacidade de calcular a soma dos termos de uma PG decrescente e identificar o comportamento da soma conforme n aumenta. Interpretar os resultados e compreender como a soma dos termos muda conforme n aumenta.

PG com termo inicial $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$.	
10 - Determine o termo geral da PG da questão 9, com $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Use o termo geral que você encontrou para determinar o décimo termo.	Desenvolver a capacidade de identificar e calcular o termo geral de PG. Aprimorar o raciocínio algébrico ao aplicar a fórmula do termo geral para encontrar termos específicos.
11 - Ainda usando a questão 9, determine a expressão geral da SOMA dos termos da PG e, por meio do termo geral, determine a soma dos 20 primeiros termos da PG.	Desenvolver a capacidade de calcular a soma dos termos de uma PG utilizando a fórmula geral. Aprimorar o raciocínio algébrico ao aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PG.
12 - À medida que adicionamos mais e mais termos na PG, a soma total se aproxima cada vez mais de 2. Em outras palavras, a soma dos infinitos termos dessa PG converge para 2. Explique com suas palavras porquê isso acontece.	Entender e explicar o conceito de soma infinita em PG. Desenvolver habilidades em raciocínio matemático ao explicar o comportamento das somas infinitas em PG.
13 - Use a fórmula da soma de uma PG infinita: $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ para determinar a soma dos infinitos termos da PG da questão 9.	Aprimorar as habilidades em calcular somas infinitas de uma PG utilizando a fórmula dada.
14 - Encontre a expressão da função que representa a PG da questão 9 (monte uma tabela com as coordenadas se necessário). Determine também o domínio e a imagem da função.	Determinar a expressão da função que representa a PG. Identificar o domínio e a imagem da função. Elaborar uma tabela com as coordenadas confirma a relação entre os termos da PG e a função exponencial.
15 - Qual é a relação entre os	Observar que cada termo da PG é representado pela

termos da PG da questão 9, a soma dos termos e a área dos retângulos?	altura de um retângulo e que a soma das áreas dos retângulos é igual à soma dos termos da PG. Aprimorar habilidades em interpretar gráficos e compreender a relação entre as alturas dos retângulos e os termos da PG.
16 - Utilize o controle deslizante para alterar o valor de n, fixando a PG com termo inicial $a_1 = 1$ e razão $q = -2$. Observe e escreva aqui o que acontece com a sequência.	Identificar e explicar o comportamento de uma PG com razão negativa. Desenvolver o raciocínio matemático necessário para identificar padrões e relações em sequências oscilantes.
17 - Determine o termo geral da PG da questão 16 e use o termo geral que você encontrou para determinar o décimo termo.	Desenvolver habilidades em formular expressões matemáticas que descrevem os termos de uma PG. Aprimorar o raciocínio algébrico ao aplicar a fórmula do termo geral para encontrar termos específicos.
18 - Utilize o controle deslizante para alterar o valor de n. Observe como a soma dos termos muda conforme você aumenta ou diminui n. Qual é a soma dos primeiros 9,10 e 11 termos da PG com termo inicial $a_1 = 1$ e razão $q = -2$?	Identificar e explicar o comportamento da soma dos termos de uma PG com razão negativa. Calcular e interpretar as somas dos termos da PG para diferentes valores de n. Aprimorar as habilidades em interpretar e calcular somas parciais de uma PG oscilante.
19 - Em seu caderno, faça um plano cartesiano e marque os pontos correspondes às coordenadas obtidas pela sequência da PG da questão 16. (Se necessário crie a tabela como na questão 5). Ao ligar esses pontos, será uma função? Explique.	Identificar e explicar o comportamento de uma função exponencial com base negativa. Aprimorar as habilidades em interpretar gráficos de funções exponenciais com base negativa. Desenvolver o raciocínio matemático necessário para identificar padrões e relações em funções com comportamento oscilante.
20 - Qual é a relação entre os termos da PG da questão 16, a	Aprimorar as habilidades em interpretar gráficos e compreender a relação entre as alturas dos retângulos e os

soma dos termos e a área dos retângulos?	termos da PG, levando em consideração a oscilação dos sinais.
21 - Agora é sua vez, elabore uma construção como no enunciado no software GeoGebra, mas que não admita termos oscilantes, apenas crescentes, decrescentes e constante. Escreva os passos da sua construção aqui.	Identificar e aplicar as fórmulas gerais para construir PG crescentes, decrescentes ou constantes. Explorar e formular diferentes tipos de PG, compreendendo o impacto da razão e do termo inicial no comportamento da sequência.

APÊNDICE N – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO OVA 5

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 – A fórmula do comprimento de uma circunferência é: Assinale a sua resposta aqui A ☐ $c=2\pi r$ B ☐ $c=\pi^2 r$ C ☐ $c=r^2\pi$ D ☐ $c=2\pi r^2$ E ☐ $c=\pi r$	Identificar corretamente a fórmula para o comprimento de uma circunferência.
2 - Qual é a fórmula do comprimento de uma semicircunferência? Assinale a sua resposta aqui A ☐ $c=\frac{r.\pi}{2}$ B ☐ $c=\frac{r^2\pi}{2}$ C ☐ $c=\pi r$ D ☐ $c=\pi r^2$ E ☐ $c=\pi^2 r$	Analisar e interpretar fórmulas geométricas, aplicando conceitos teóricos para resolver problemas práticos.
3 - Observe no GeoGebra a construção e determine o comprimento das 4 (quatro) primeiras semicircunferências.	Aprimorar as habilidades em interpretar medidas geométricas e calcular comprimentos de semicircunferências.
4 - Monte a sequência (C_1, C_2, C_3, C_4). Observe se existe algum padrão entre os termos da questão anterior.	Desenvolver o raciocínio matemático necessário para compreender e explicar o comportamento de sequências numéricas.
5 - Que tipo de sequência numérica podemos chamar? Assinale a sua resposta aqui A ☐ Progressão Aritmética B ☐ Progressão Geométrica C ☐ Sequência de Fibonacci D ☐ Não é uma sequência	Identificar diferentes tipos de sequências numéricas e reconhecer uma PG.
6 - Determine a soma dos quatro primeiros termos dessa sequência.	Analisar e interpretar a soma dos termos de uma PG, aplicando conceitos teóricos para re-

	solver problemas práticos.
7 - Determine a soma dos 10 (dez) primeiros termos dessa sequência.	Aprimorar as habilidades em calcular somas de PG e interpretar os resultados.
8 - Determine a soma dos 20 (vinte) primeiros termos.	Aprimorar as habilidades em calcular somas de PG e interpretar os resultados.
9 - Podemos determinar a soma infinita desses termos? Que propriedade da PG garante isso?	Desenvolver o raciocínio necessário para compreender as condições sob as quais a soma infinita é válida. Entender a fórmula da soma infinita de PG.
10 - Uma sequência é chamada de **convergente** quando seus termos se aproximam de um número real específico, que é seu limite. Isso ocorre quando a razão entre os termos está $0 < \|q\| < 1$, garantindo que a sequência não diverge para infinito. Já a sequência **divergente** é aquela cujos termos não se aproximam de um valor específico, podendo crescer indefinidamente para infinito positivo ou negativo, ou variar sem padrão de convergência. Com base nisso, podemos afirmar que essa PG é uma sequência convergente ou divergente?	Desenvolver o raciocínio necessário para compreender o comportamento de sequências convergentes e divergentes Aprimorar as habilidades em interpretar sequências numéricas e identificar padrões de convergência.
11 - Determine a soma dos infinitos termos dessa PG.	Analisar e interpretar a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, aplicando conceitos teóricos para resolver problemas práticos.
12 - Determine o limite da soma dessa PG.	Desenvolver a capacidade de calcular o limite da soma dos infinitos termos de uma PG utilizando a fórmula geral.
13 - Justifique com base nas questões anteriores porquê a espiral possui uma soma finita mesmo sendo formada por infinitos semicírculos.	Identificar que a sequência é convergente, com seus termos tendendo a zero.

14 - E se a razão fosse $q = \frac{3}{2}$ o que mudaria no comportamento dessa espiral? Faça o desenho dessa espiral até o quinto termo para observar seu comportamento. É possível determinar a soma dos infinitos termos dessa sequência?	Compreender o comportamento de sequências numéricas com razões maiores que 1. Analisar e interpretar o comportamento de sequências divergentes, aplicando conceitos teóricos para resolver problemas práticos.

APÊNDICE O – QUADRO COM QUESTÕES EXPLORADAS NO PROBLEMA 10

QUESTÕES	HABILIDADE/COMPETÊNCIA
1 - Qual é a área total do quadrado na Etapa 1? E quantos quadrados são removidos na Etapa 2?	Interpretar corretamente a subdivisão de um quadrado em partes menores e determinar a fração das partes removidas e restantes.
2 - Observe a sequência das etapas, quantos quadrados permanecem em cada etapa após a remoção? Monte a sequência dos 3 primeiros termos e observe se existe algum padrão.	Desenvolver a habilidade de identificar termos e padrões em sequências geométricas.
3 - Determine o termo geral da PG.	Aprimorar o raciocínio algébrico necessário para aplicar a fórmula do termo geral em PG.
4 - Calcule a área restante da Etapa 5.	Analisar e interpretar a fórmula do termo geral para calcular a área restante em uma sequência de etapas.
5 - Se representarmos graficamente a área restante $f(x)$ em função do número x de etapas, qual tipo de curva observaríamos? Determine a lei de formação dessa função e plote no GeoGebra. O que o gráfico nos diz sobre o comportamento da área?	Desenvolver a habilidade de interpretar e descrever funções exponenciais, entendendo seu comportamento a longo prazo. Aprimorar o raciocínio matemático necessário para formular a lei de formação de uma função exponencial e representá-la graficamente.
6 - Determine a soma das áreas restantes da sequência.	Desenvolver habilidades em calcular somas infinitas de PG utilizando a fórmula apropriada.
7 - Se, em vez de reduzir multiplicadamente, uma área fosse reduzida de forma constante (ou seja, retirando uma área fixa a cada etapa), como seria o comportamento da área restante?	Aprimorar a habilidade de analisar e interpretar o comportamento de sequências aritméticas e suas representações gráficas.

(Utilize diferentes representações para interpretação, como sequência, expressão da função e gráfico).	
8 - Explique qual tipo de representação (sequência numérica, lei de formação, gráfico) possibilita o cálculo rápido do 10º termo da sequência. Qual representação facilita a visualização do o declínio exponencial, mostrando que a área está tendendo a zero? Qual representação facilita a visualização da diferença padrão entre os termos?	Compreender e identificar qual representação é mais adequada para diferentes tipos de análises e cálculos. Aperfeiçoar a interpretação de gráficos e sequências numéricas, entendendo seu comportamento e padrão.