



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL**  
**CAMPUS CHAPECÓ - UFFS**  
**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**  
**PROFMAT**

**REGINA NEGRINI**

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA PELO**  
**GEOGEBRA: ARTICULAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA**

**CHAPECÓ – SC**

**2026**

**REGINA NEGRINI**

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA PELO  
GEOGEBRA: ARTICULAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

**CHAPECÓ – SC**

**2026**

### **Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS**

Negrini, Regina

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA PELO  
GEOGEBRA: ARTICULAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA /  
Regina Negrini. -- 2026.

154 f.:il.

Orientador: Professor Doutor Vitor José Petry

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da  
Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional  
em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2026.

1. Dissertação; Título de Mestre; Uso do GeoGebra  
como recurso pedagógico para Aprendizagem Significativa  
em Álgebra e Geometria.. I. Petry, Vitor José, orient.  
II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.


**REGINA NEGRINI**

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA PELO  
GEOGEBRA: ARTICULAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.


Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 12/03/2026.

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
 **VITOR JOSE PETRY**  
Data: 27/03/2026 15:44:48-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

**Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS**  
Orientador

Documento assinado digitalmente  
 **PEDRO AUGUSTO PEREIRA BORGES**  
Data: 28/03/2026 15:36:16-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS**  
Avaliador

Documento assinado digitalmente  
 **TARCISIO KUMMER**  
Data: 27/03/2026 17:01:05-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof. Dr. Tarcísio Kummer**  
Avaliador

Dedico este trabalho ao meu marido, **Anderson**, pelo amor, companheirismo e apoio incondicional ao longo desta jornada, e aos meus filhos, **Renan Mateus** e **Ana Luisa**, que são minha maior inspiração e a razão de cada esforço. Que esta conquista também lhes sirva de exemplo sobre a importância da perseverança, do estudo e dos sonhos.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela vida e pela oportunidade de realizar este trabalho, concedendo-me discernimento, força e perseverança ao longo desta trajetória acadêmica.

Ao meu marido, Anderson Negrini, pelo amor, pela parceria constante e pelo incentivo em todos os momentos. Sua compreensão e apoio foram essenciais para que eu pudesse enfrentar os desafios desta caminhada com segurança e tranquilidade.

Aos meus filhos, Renan Mateus Negrini e Ana Luisa Negrini, fonte permanente de inspiração e sentido para minhas conquistas. Que este percurso também lhes ensine sobre a importância da dedicação, do conhecimento e da persistência na realização dos próprios sonhos.

À minha família, amigos e colegas, pelo apoio, pela escuta e pelas palavras de encorajamento, que tanto contribuíram para que esta jornada se tornasse mais leve e significativa.

Aos professores do PROFMAT da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) – Campus Chapecó, pela sólida formação proporcionada, pelo compromisso com a educação pública e pela qualidade dos ensinamentos que marcaram profundamente minha trajetória profissional.

De modo especial, ao meu orientador, Professor Dr. Vitor José Petry, pela orientação segura e criteriosa, pela disponibilidade, pelas valiosas contribuições e pela confiança depositada em meu trabalho. Sua condução foi fundamental para o desenvolvimento e a concretização desta pesquisa.

## RESUMO

Nesta dissertação buscou-se analisar contribuições do uso do software GeoGebra para favorecer a aprendizagem significativa na construção do conhecimento geométrico e algébrico por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa foca na interação entre Geometria e Álgebra, na perspectiva de que a articulação entre diferentes representações matemáticas, potencializada por tecnologias digitais, possa favorecer a atribuição de significados aos conceitos estudados, à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), proposta por Ausubel. O estudo envolve revisão bibliográfica, elaboração e aplicação de atividades didáticas usando o software de geometria dinâmica GeoGebra, além da análise das produções e estratégias utilizadas pelos estudantes durante a resolução das tarefas. Busca-se identificar como os conhecimentos prévios são mobilizados e como ocorre a assimilação, a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa de novos conceitos geométricos e algébricos abordados. Os resultados apontam que o uso sistematizado do GeoGebra contribui para a visualização, a exploração dinâmica e a compreensão conceitual, além de impactar positivamente no desempenho e na motivação dos estudantes. Sugere-se que o GeoGebra constitui um recurso pedagógico potencialmente significativo, capaz de qualificar as práticas de ensino de Matemática e promover uma aprendizagem mais integrada e contextualizada.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Significativa; Geometria; Álgebra; Tecnologias Digitais; GeoGebra.

## ABSTRACT

This dissertation sought to analyze the contributions of using the GeoGebra software to foster meaningful learning in the construction of geometric and algebraic knowledge by 9th-grade students in middle school. The research focuses on the interaction between Geometry and Algebra, based on the perspective that the articulation between different mathematical representations, enhanced by digital technologies, may promote the attribution of meaning to the concepts studied, in light of the Theory of Meaningful Learning (TML) proposed by Ausubel. The study involves a literature review, the design and implementation of didactic activities using the dynamic geometry software GeoGebra, as well as the analysis of students' productions and strategies employed during task solving. The research seeks to identify how prior knowledge is mobilized and how the processes of assimilation, progressive differentiation, and integrative reconciliation of new geometric and algebraic concepts occur. The results indicate that the systematic use of GeoGebra contributes to visualization, dynamic exploration, and conceptual understanding, while also positively impacting students' performance and motivation. It is suggested that GeoGebra constitutes a pedagogical resource with significant potential, capable of enhancing Mathematics teaching practices and promoting more integrated and contextualized learning.

**Keywords:** Meaningful Learning; Geometry; Algebra; Digital Technologies; GeoGebra.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01: O Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo (TPACK).....	27
Figura 02 – OVA para a AS no 9º Ano: Otimização de Área.....	31
Figura 03 – Introdução à razão; Atividade construída por E01.....	42
Figura 04 – Razão na malha (Declive); Atividade construída por E06.....	46
Figura 05 – Comparação da inclinação do telhado; Atividade construída por E05....	48
Figura 06 – Construção digital do segmento AB com controles deslizantes de m e n; Atividade construída por E11.....	51
Figura 07 – Representação dos registros as medidas coletadas na atividade de campo; Atividade construída por E09.....	52
Figura 08 – Polígono inicial para exploração de área e perímetro; Atividade construída por E04.....	53
Figura 08 – Polígono inicial para exploração de área e perímetro; Atividade construída por E04.....	55
Figura 10 – Comparação de Polígonos sob Homotetia: Relação entre Medidas Lineares (k) e Medidas de Área ( $k^2$ ); Atividade construída por E11.....	56
Figura 11 – Efeito do fator de escala k na área e no perímetro; Atividade construída por E08.....	57
Figura 12 – Fator escala (k) na área de polígonos.....	58
Figura 13 – Relação proporcional entre segmentos em triângulo; Atividade construída por E02.....	61
Figura 14 – Representação dinâmica da proporcionalidade em triângulos; Atividade construída pela autora.....	63
Figura 15 – Proporcionalidade em triângulo com feixe de paralelas; Atividade construída por E07 .....	66
Figura 16 – Proporcionalidade entre segmentos em triângulo com ângulos congruentes; Atividade construída por E08.....	68
Figura 17 – Construção manual dos segmentos correspondentes em um feixe de paralelas .....	69
Figura 18 – Aplicação da proporcionalidade em transversais paralelas.....	70
Figura 19 – Proporcionalidade entre segmentos em transversais paralelas; Atividade	

construída pela autora .....	71
Figura 20 – Exploração Dinâmica do Teorema de Tales; Atividade construída por E10.....	73
Figura 21 – Demonstração do Teorema de Tales em Ambiente Dinâmico: Invariância das Razões $AB/BC$ e $A'B'/B'C'$ ; Atividade construída por E05 .....	75
Figura 22 – Teorema de Tales: relação entre razões proporcionais e pontos médios em transversais paralelas, com manutenção da razão $Ru = Rv$ independentemente da inclinação; Atividade construída por E07.....	80
Figura 23 – Teorema da Base Média como Caso Especial de Tales; Atividade construída por E03.....	81
Figura 24 – Semelhança de Triângulos via Tales; Atividade construída por E01 .....	82
Figura 25 – Semelhança de Triângulos na Medição da Altura da Árvore; Atividade construída por E09 .....	84
Figura 26 - Ativação de subsunçores: correlação visual e numérica entre segmentos correspondentes dos triângulos $\Delta OAB$ e $\Delta OCD$ ; Atividade construída por E10 .....	87
Figura 27 – Comprovação da razão de semelhança (k) entre triângulos semelhantes por meio da invariância das razões entre lados correspondentes ( $OC/OA$ , $OD/OB$ e $CD/AB$ ), evidenciando a constância da razão de semelhança; Atividade construída pela autora .....	88
Figura 28 – Consolidação da Razão de Semelhança ( $k = 0,5$ ) e do Teorema de Tales no GeoGebra; Atividade construída por E02 .....	89
Figura 29 – Demonstração do ângulo reto pela soma de ângulos complementares em um triângulo; Atividade construída por E12.....	91
Figura 30 – Construção do Ângulo Reto pelo Método dos Círculos (Tripla Pitagórica 3–4–5); Atividade construída por E05 .....	92
Figura 31 – O Triângulo de Esquadro no GeoGebra; Atividade construída por E02 e E03 .....	95
Figura 32 – Triângulo retângulo com catetos b e c e hipotenusa a: representação geométrica do Teorema de Pitágoras; Atividade construída por E06 e E07 .....	96
Figura 33 – Triângulo Retângulo com Quadrados nos Lados: Visualização de $AB^2 + AC^2 = BC^2$ e a Soma das Áreas dos Catetos; Atividade construída por E05 e E10 .....	97

Figura 34 – Aplicação do Teorema na Diagonal do Retângulo; Atividade construída por E04 e E06 .....	98
Figura 35 – Verificação da não validade do Teorema de Pitágoras em triângulos não retângulos; Atividade construída por E03 .....	99
Figura 36 – Visualização dinâmica da relação pitagórica por composição de áreas; Atividade construída por E07 .....	102
Figura 37 – Teste Numérico da Desigualdade Pitagórica: Identificação do Tipo de Triângulo; atividade construída por E02 e E08 .....	104
Figura 38 – Verificação da Tripla Pitagórica (8, 15, 17): Confirmação do Triângulo Retângulo; Atividade construída por E04 e E09 .....	105
Figura 39 – Representação da construção do triângulo retângulo 3–4–5, empregada como procedimento prático de verificação da perpendicularidade; Atividade construída por E01, E03 e E09 .....	107
Figura 40 – Triângulo Retângulo Isósceles ( $45^{\circ}$ – $45^{\circ}$ – $90^{\circ}$ ): Aplicação da Lei de Pitágoras; Atividade construída por E07 e E11 .....	109
Figura 41 – Triângulo Retângulo Invertido (ou com o ângulo reto no topo), onde o vértice A contém o ângulo de $90^{\circ}$ ; Atividade construída pro E09 e E12 .....	112
Figura 42 – Representação do Triângulo Retângulo com a hipotenusa na base e sua decomposição em altura e projeções ortogonais; Atividade construída pro E09 e E12 .....	113
Figura 43 – Reconciliação Integrativa da Hipotenusa: A Identidade $a = m + n$ ; Atividade construída por E09 e E12 .....	115
Figura 44 – Semelhança dos Três Triângulos Retângulos e Dedução das Relações Métricas; Atividade construída por E01, E07 e E08 .....	116
Figura 45 – Semelhança dos Três Triângulos Retângulos e Formalização das Relações Métricas; Atividade construída por E01, E07 e E08 .....	118
Figura 46 – Triângulo retângulo com altura relativa à hipotenusa, evidenciando a semelhança entre os triângulos $\triangle BHA$ , $\triangle BAC$ e $\triangle AHC$ ; Atividade construída por E04, E09 e E11 .....	119
Figura 47 - Configuração clássica do triângulo retângulo com a altura relativa à hipotenusa, usada para deduzir as relações métricas no triângulo retângulo; Atividade construída por E06 .....	121
Figura 48 - Simulação Dinâmica: Verificação da Semelhança $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ via	

Seletor de Escala ( $k$ ), Atividade construída por E02, E03 e E11 .....	123
Figura 49 – Dedução das Relações Métricas e do Teorema de Pitágoras, Atividade construída por E01, E09 e E12 .....	123
Figura 50 – Representação dinâmica da ampliação de um triângulo retângulo e suas relações de proporcionalidade; Atividade construída por E04.....	126
Figura 51: Validação das relações $b^2 = a.n$ , $c^2 = a.m$ e $h^2 = m.n$ por meio da geometria dinâmica; Atividade construída por E09 .....	127
Figura 52: Validação aritmética do Teorema de Pitágoras utilizando o terno pitagórico (5, 12, 13); Atividade construída por E09 .....	128
Figura 53 – Construção no GeoGebra das relações métricas no triângulo retângulo e semelhança por fator de escala $k$ ; Atividade construída por E07 .....	129
Figura 54 – Síntese Integrativa demonstrando a conexão entre a semelhança de triângulos $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ e a validade do Teorema de Pitágoras em ambas as figuras; Atividade construída por E05, E08 e E11 .....	132
Figura 55 – Medidas de triângulos em tabletas cuneiformes: A cadeia dedutiva da Geometria. ....	133
Figura 56 – Síntese geométrica da semelhança entre os triângulos retângulos $\Delta ABC$ e $\Delta DEF$ : representação da relação de escala entre maquete e modelo real; Atividade construída por E03 .....	134

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2.1 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E FERRAMENTAS DIGITAIS: A TEORIA DE AUSUBEL NO ENSINO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA COM GEOGEBRA	20
2.2 DESAFIOS ESPECÍFICOS NO ENSINO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA NO 9º ANO	22
2.3 A MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO: ESSENCIAL PARA A FORMAÇÃO INTEGRAL DO ESTUDANTE	25
2.4 O ENSINO DE MATEMÁTICA: DA MEMORIZAÇÃO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E SOCIAL	27
2.5 O PAPEL DO PROFESSOR NA MEDIAÇÃO TECNOLÓGICA E PEDAGÓGICA	29
2.6 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA	32
2.6.1 Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA), GeoGebra e a Aprendizagem Significativa no Ensino de Geometria e Álgebra no 9º Ano em Escola do Campo	33
3 DELINEAMENTO METODOLÓGICO	37
4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO GEOGEBRA	42
5 RESULTADOS E ANÁLISE	46
ATIVIDADE 1: Introdução à Razão	47
ATIVIDADE 2: Razão na Malha	49
ATIVIDADE 3: Razão de Divisão de Segmento e Ponto Médio	54
ATIVIDADE 4: Proporção e Fator de Escala	58
ATIVIDADE 5: Proporcionalidade em Triângulos	63
ATIVIDADE 6: Teorema de Tales em Triângulos (Feixe de Paralelas)	69
ATIVIDADE 7: Construção do Feixe de Paralelas	75
ATIVIDADE 8: Medição e Verificação do Teorema de Tales	78
ATIVIDADE 9: Tales e o Ponto Médio	82
ATIVIDADE 10: Semelhança de Triângulos (via Tales)	86
ATIVIDADE 11: Razão de Semelhança de Lados (k): Da Prova Geométrica à Escala	91
ATIVIDADE 12: Construção e Nomenclatura do Triângulo Retângulo	95
ATIVIDADE 13: Teorema de Pitágoras Visual I (Construção de Áreas)	99
ATIVIDADE 14: Pitágoras Visual II: Verificação e Classificação de Triângulos	105
ATIVIDADE 15: Dinâmica de Pitágoras: Invariância e Prova Prática	111
ATIVIDADE 16: Alturas e Projeções: Introdução das Relações Métricas	116
ATIVIDADE 17: Semelhança na Altura: Correspondência Angular	121
ATIVIDADE 18: Relação Métrica do Cateto	125
ATIVIDADE 19: Triângulo Pitagórico (3, 4, 5) e Aplicações	130
ATIVIDADE 20: Reconciliação Integrativa Final: Síntese Geométrica	133
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	143



## 1 INTRODUÇÃO

No cenário atual da Educação Matemática, a integração de diferentes áreas do conhecimento configura-se como um elemento essencial para a promoção de uma aprendizagem mais profunda, contextualizada e significativa. A intersecção entre geometria e álgebra é particularmente rica, oferecendo inúmeras oportunidades para explorar conceitos de maneira visual e algébrica simultaneamente. Essa integração favorece a construção de significados matemáticos mais consistentes, contribuindo para a superação de abordagens fragmentadas ainda presentes no ensino da Matemática. Nesse cenário, o uso de tecnologias digitais (TD) desponta como um recurso pedagógico relevante, especialmente no que se refere à ampliação das possibilidades de visualização, experimentação e investigação matemática.

A Geometria constitui uma das áreas centrais da Matemática, voltada ao estudo das propriedades e relações entre pontos, linhas, ângulos, superfícies e sólidos (Eves, 2004). Contudo, diversas pesquisas apontam que o ensino tradicional dessa área tem sido marcado pela ênfase excessiva na aplicação mecânica de fórmulas e teoremas, em detrimento de processos investigativos, exploratórios e visuais, indispensáveis ao desenvolvimento do raciocínio geométrico (Lorenzato, 2017; Pavanello, 1993). Tal abordagem limita a compreensão conceitual dos estudantes e dificulta o estabelecimento de conexões entre diferentes conteúdos matemáticos.

Paralelamente, observa-se que a incorporação das TD ao ensino tem se intensificado, acompanhando as transformações sociais, culturais e educacionais da contemporaneidade. No âmbito da Educação Matemática, essas tecnologias ampliam as possibilidades didáticas ao permitir a criação de ambientes interativos e dinâmicos de aprendizagem (Borba; Penteado, 2019). Nesse contexto, o GeoGebra destaca-se como um software de matemática dinâmica que integra, em um mesmo ambiente, recursos de Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, favorecendo a construção de representações múltiplas e a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos (Hohenwarter; Jones, 2007; Arzarello et al., 2012).

Historicamente, Geometria e Álgebra desenvolveram-se como campos distintos da Matemática, porém, ao longo do tempo, passaram a estabelecer relações cada vez mais estreitas. A Geometria Analítica, sistematizada a partir das contribuições de René Descartes, constitui um marco nesse processo de integração,

ao possibilitar a representação algébrica de objetos geométricos. No campo da Educação Matemática, autores como D'Ambrosio (1999) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) ressaltam a importância de abordagens integradas, que valorizem a resolução de problemas, a modelagem e a articulação entre diferentes representações, como estratégias para promover uma aprendizagem matemática mais significativa e contextualizada.

Nesse sentido, a teoria da aprendizagem significativa (TAS), proposta por Ausubel (1968), oferece um referencial teórico consistente para compreender como a integração entre Geometria, Álgebra e TD pode contribuir para o ensino de Matemática. Segundo essa teoria, a aprendizagem ocorre de forma efetiva quando novos conhecimentos se relacionam, de maneira não arbitrária e substantiva, com os conhecimentos prévios dos estudantes. Assim, a valorização das experiências e saberes já construídos pelos alunos constitui um elemento central para a assimilação de novos conceitos. Complementarmente, Moreira (2011) destaca que recursos didáticos potencialmente significativos, como softwares de matemática dinâmica, podem atuar como mediadores desse processo, favorecendo a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa dos conceitos.

A escolha desse enfoque justifica-se pela necessidade de compreender como a aprendizagem matemática pode tornar-se mais significativa quando os conteúdos são apresentados de forma articulada e contextualizada, especialmente no âmbito da Educação Básica. Tal perspectiva assume particular relevância em escolas do campo, nas quais os saberes cotidianos dos estudantes constituem um ponto de partida fundamental para a construção do conhecimento escolar (Caldart, 2012). A integração de recursos tecnológicos, como o GeoGebra, nesse contexto, amplia as possibilidades de visualização, experimentação e diálogo entre diferentes representações matemáticas, favorecendo práticas pedagógicas mais próximas da realidade dos educandos.

Diante do exposto, o problema que motiva esta investigação reside na persistência de um ensino de Geometria predominantemente tradicional, focado na memorização de fórmulas e na execução de procedimentos mecânicos. Essa abordagem fragmentada desarticula a relação intrínseca entre Álgebra e Geometria, resultando em uma aprendizagem superficial que ignora os conhecimentos prévios dos estudantes e limita o desenvolvimento do raciocínio investigativo, especialmente em contextos que demandam uma educação mais contextualizada, como as escolas

do campo. Concomitantemente, o uso do software GeoGebra se apresenta como facilitador para favorecer a aprendizagem significativa na construção do conhecimento geométrico e algébrico por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Assim, a investigação fundamenta-se nos pressupostos da TAS, compreendendo o GeoGebra como um recurso mediador que possibilita a articulação entre diferentes representações matemáticas, especialmente aquelas de natureza geométrica e algébrica. Busca-se examinar de que forma a utilização sistematizada do software pode contribuir para a superação de práticas pedagógicas fragmentadas e predominantemente procedimentais, ainda recorrentes no ensino de Matemática.

Adicionalmente, a pesquisa propõe-se a analisar as contribuições do GeoGebra para o desenvolvimento de processos cognitivos relacionados à compreensão de conceitos matemáticos, à visualização, à generalização e à resolução de problemas, considerados essenciais para a aprendizagem ao longo da Educação Básica. Ao possibilitar a exploração dinâmica de conceitos e a construção de significados por meio da interação entre representações visuais e simbólicas, espera-se que o uso do software possa favorecer a reconciliação integrativa e a diferenciação progressiva, princípios centrais da TAS.

Almeja-se que os resultados deste estudo ofereçam subsídios teóricos e metodológicos para qualificar as práticas pedagógicas no Ensino Fundamental, contribuindo para um ensino de Matemática mais articulado, significativo e coerente com as demandas formativas do Ensino Médio e com o contexto educacional contemporâneo. A dissertação foi organizada de modo a assegurar coerência entre fundamentos teóricos, procedimentos metodológicos e análises desenvolvidas. Inicialmente, discutem-se contribuições relacionadas ao uso de tecnologias digitais na Educação Matemática, com destaque para os objetos virtuais de aprendizagem (OPEN VIRTUAL APPLIANCE - OVA) e o software GeoGebra, compreendidos como recursos capazes de potencializar práticas investigativas e favorecer a construção de significados. À luz da TAS, entende-se que a incorporação de recursos digitais deve partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, permitindo que novos conceitos sejam integrados de forma substantiva. Essa perspectiva mostrou-se relevante no contexto da pesquisa, realizada com estudantes do 9º ano em uma escola do campo, onde o GeoGebra possibilitou exploração dinâmica de conceitos geométricos, favorecendo visualização, experimentação e articulação entre diferentes representações matemáticas.

Na sequência, apresenta-se o delineamento metodológico, caracterizado por abordagem qualitativa e de caráter propositivo, voltada não apenas à compreensão de um fenômeno educacional, mas também ao planejamento, implementação e análise de uma intervenção pedagógica. A investigação ocorreu em uma escola pública do interior do Rio Grande do Sul, com infraestrutura adequada para o uso do GeoGebra. Participaram 12 estudantes do 9º ano, entre 14 e 15 anos, compondo uma turma heterogênea em relação aos conhecimentos matemáticos e experiências com tecnologias digitais. Essa diversidade foi considerada elemento constitutivo da análise, permitindo observar diferentes formas de apropriação dos conceitos. Para aprofundar a investigação, selecionaram-se intencionalmente estudantes com distintos perfis de desempenho, garantindo maior abrangência na análise das produções e interações. O anonimato foi preservado por meio de códigos alfanuméricos.

A intervenção pedagógica foi estruturada em uma sequência didática voltada ao desenvolvimento cognitivo e à consolidação de conceitos geométricos e algébricos. Fundamentada nos princípios da TAS, especialmente nos processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, a proposta valorizou a participação ativa dos estudantes na exploração de situações matemáticas, na elaboração de conjecturas e na construção de relações entre diferentes representações. Além disso, buscou alinhar-se às competências previstas nos documentos curriculares nacionais, priorizando o uso crítico das tecnologias digitais.

A análise dos dados fundamentou-se nas produções escritas dos estudantes, nos registros digitais elaborados no GeoGebra e nas observações sistematizadas pela professora-pesquisadora ao longo da aplicação da sequência didática. O tratamento dos dados foi conduzido com base nos procedimentos da análise de conteúdo, conforme sistematizado por Bardin (2016), especialmente no que se refere à organização do corpus, à leitura analítica e à interpretação inferencial dos registros.

A observação do desenvolvimento das atividades evidenciou distintos níveis de compreensão das noções de razão e proporcionalidade. Parte dos estudantes conseguiu articular representações geométricas e algébricas de forma consistente, reconhecendo correspondências e relações invariantes; outros apresentaram dificuldades na coordenação entre esses registros, revelando compreensões ainda parciais. Tais evidências permitiram examinar como os conhecimentos prévios foram

mobilizados e como se estruturou, progressivamente, a integração conceitual ao longo da intervenção.

Os resultados evidenciam o potencial pedagógico da sequência didática para o ensino de conceitos estruturantes da Geometria Plana — razão, proporcionalidade, semelhança de triângulos, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras — compreendidos como sistema conceitual articulado. Conclui-se que o uso intencional e fundamentado das tecnologias digitais contribui para aprendizagens mais significativas e inclusivas, favorecendo a articulação entre diferentes representações e a construção conceitual dos estudantes. O estudo reforça, assim, a importância de práticas pedagógicas que integrem recursos digitais, fundamentos teóricos consistentes e contextos educacionais específicos, especialmente em escolas do campo, onde a inovação assume papel central na qualificação do ensino de Matemática e na preparação para os desafios do Ensino Médio.

## **2 MARCO TEÓRICO**

Neste capítulo discutem-se contribuições teóricas e práticas relacionadas ao uso das tecnologias digitais (TD) na Educação Matemática, com ênfase nos objetos virtuais de aprendizagem (OVA) e no software GeoGebra. À luz da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1968), compreende-se que a incorporação de recursos digitais deve partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, permitindo que novos conceitos sejam integrados de forma não arbitrária e substantiva. Essa perspectiva mostrou-se especialmente relevante em um trabalho desenvolvido com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola do campo, no qual o uso do GeoGebra como OVA, possibilitou a exploração de conceitos geométricos de maneira dinâmica e interativa. A atividade favoreceu a visualização, a experimentação e o estabelecimento de conexões entre representações algébricas e geométricas, aspectos fundamentais para a aprendizagem significativa. Além disso, retomam-se neste capítulo os documentos norteadores da Educação Básica que destacam o papel das TD na formação integral do estudante, bem como a abordagem da Investigação Matemática Crítica proposta por Skovsmose (2001), que oferece subsídios para uma prática pedagógica reflexiva e contextualizada. Por fim, apresentam-se experiências que evidenciam o potencial do GeoGebra como mediador do processo de ensino-aprendizagem, especialmente em contextos escolares que demandam estratégias inovadoras e inclusivas.

### **2.1 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E FERRAMENTAS DIGITAIS: A TEORIA DE AUSUBEL NO ENSINO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA COM GEOGEBRA**

A Matemática ocupa um papel central no currículo escolar, mas frequentemente apresenta desafios significativos para os estudantes, especialmente na compreensão de conceitos abstratos presentes na geometria e na álgebra. A integração dessas áreas por meio de ferramentas digitais oferece novas oportunidades de ensino e aprendizagem, favorecendo representações múltiplas, dinâmicas e interativas dos conteúdos. Entre essas ferramentas, o GeoGebra destaca-se como um recurso poderoso para a visualização e exploração de conceitos matemáticos, permitindo que

os estudantes construam e manipulem modelos geométricos e algébricos em tempo real.

No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece a Matemática como uma das áreas do conhecimento a ser desenvolvida ao longo de toda a educação básica (Brasil, 2017). A disciplina, além de suas aplicações práticas no cotidiano, desempenha um papel fundamental na formação de habilidades cognitivas transferíveis para outras áreas do conhecimento e para a vida em sociedade. No âmbito do ensino fundamental, a Matemática demanda tanto a apropriação de conceitos abstratos quanto sua aplicação em contextos concretos. Conforme ressalta D'Ambrosio (2006, p. 30-31):

Para um aprendiz com vistas numa tarefa, um enfoque imediatista é essencial. Mas obviamente a educação matemática não se esgota aí. É quando se apela para o histórico, cultural, que provavelmente não interessará ao aprendiz com objetivos mais imediatos. Assim como a matemática utilitária não interessará ao aprendiz com um desafio intelectual. Está claro que é fundamental um equilíbrio entre esses dois aspectos. Esse equilíbrio não significa metade de um e metade do outro para todos os alunos. Será, sim, a resposta ao tipo de aluno – o indivíduo com quem estamos lidando. É possível individualizar a instrução e essa é uma das melhores estratégias para recuperar a importância e o interesse na educação matemática. (D'Ambrosio, 2006, p. 30-31).

D'Ambrosio enfatiza que a matemática deve ser contextualizada, de modo que o conhecimento histórico e cultural sirva como base para o entendimento dos problemas atuais, mas sem repetir linearmente métodos do passado:

Um bom exercício para o docente é preparar uma justificativa para cada um dos tópicos do programa – mas não vale dar justificativas internalistas, isto é, do tipo 'progressões são importantes para entender logaritmos'. Pede-se justificativas contextualizadas no mundo de hoje e do futuro (D'Ambrosio, 2006, p. 32).

Essa perspectiva ganha especial importância no 9º ano, momento de transição para o Ensino Médio em que as exigências cognitivas e a complexidade dos conteúdos se elevam significativamente.

Partindo das ideias de Ausubel, Novak e Hanesian (1978), a aprendizagem significativa depende da capacidade de o estudante relacionar o novo conhecimento ao que já sabe, estabelecendo vínculos cognitivos estáveis. Essa perspectiva reforça a necessidade de múltiplas formas de representação, sempre ancoradas no princípio da conexão entre conhecimentos prévios e novos conteúdos. Ausubel (1968) sustenta que o fator mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o estudante

já sabe, e cabe ao professor identificar esse conhecimento prévio e planejar estratégias que permitam a ancoragem dos novos conteúdos. Diferente da aprendizagem mecânica, que se limita à memorização, a aprendizagem significativa se caracteriza pela integração entre novos conceitos e estruturas cognitivas já existentes. Nesse processo, organizadores prévios — como exemplos introdutórios, analogias, recursos visuais e softwares — são fundamentais para orientar o aluno e facilitar a compreensão de conceitos abstratos.

A integração entre conteúdos matemáticos, como geometria e álgebra, requer estratégias capazes de superar a fragmentação tradicional do ensino e promover conexões conceituais significativas. A teoria de David Ausubel fundamenta para essa abordagem, ao afirmar que a aprendizagem significativa ocorre quando o novo conhecimento se ancora em conceitos preexistentes na estrutura cognitiva do estudante. O próprio autor sintetiza essa ideia ao afirmar que "o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigüe isso e ensine-o de acordo" (Ausubel, 1980, p. vi). O processo de aprendizagem significativa é estruturado hierarquicamente, de modo que conceitos específicos se vinculam a ideias mais amplas, denominadas subsunçores, abstrações construídas a partir da experiência do indivíduo (Ausubel, 2003).

Nesse contexto, a integração entre geometria e álgebra se apresenta como estratégia promissora para superar dificuldades de aprendizagem. O uso de recursos tecnológicos, em especial o GeoGebra, potencializa essa integração ao oferecer uma abordagem interativa e contextualizada. Papert (2010, p. 87) reforça essa perspectiva, destacando que "as tecnologias digitais têm o poder de transformar a experiência de aprendizagem, tornando conceitos abstratos mais acessíveis e significativos". O GeoGebra exemplifica esse potencial ao permitir que os estudantes explorem, de forma dinâmica e visual, representações algébricas e geométricas simultaneamente, favorecendo a construção de uma compreensão integrada e concreta dos conceitos matemáticos.

Nesta conjuntura, as TD, especialmente o *software* GeoGebra, atuam como organizadores prévios. Ao oferecer representações dinâmicas e interativas, o GeoGebra aproxima conceitos abstratos do universo cognitivo e cultural dos estudantes. A ferramenta articula o simbólico (álgebra) e o visual (geometria), superando a dicotomia comum no ensino.

Por exemplo, o GeoGebra permite ao estudante explorar a validade do Teorema de Pitágoras e suas Relações Métricas em tempo real. Ao construir um triângulo retângulo e manipular seus catetos, o estudante pode visualizar as áreas dos quadrados sobre seus lados, observando dinamicamente a invariância da relação  $a^2 = b^2 + c^2$ . Mais ainda, ao traçar a altura relativa à hipotenusa, ele pode medir a altura ( $h$ ) e as projeções ( $m$  e  $n$ ), integrando a representação geométrica (os segmentos) e a representação algébrica (a relação  $h^2 = m.n$  ou  $c^2 = a.m$ ). Essa capacidade de explorar a interconexão entre representações é fundamental para a reconciliação integrativa do conhecimento.

Na escola do campo, a prática educativa deve partir da realidade sociocultural dos sujeitos, valorizando seus saberes, história e modos de vida. Como afirma Molina:

Assim, o ponto de partida da prática pedagógica é sempre o mundo humano em sua complexidade histórico-cultural, com suas contradições, ambiguidades e possibilidades. Essa aprendizagem tem sido fundamental para a concepção de escola do campo. (2006, p. 74)

A partir dessa ancoragem nos saberes locais, o GeoGebra pode ser mobilizado como uma ponte entre o conhecimento escolar formal e as práticas cotidianas do campo. Ao permitir a construção de modelos dinâmicos (por exemplo, representações de áreas de plantio, escalonamento de parcelas ou gráficos de produção), o software favorece que conceitos de geometria e álgebra sejam trabalhados a partir de problemas concretos da comunidade rural, fortalecendo a aprendizagem significativa e a relação entre teoria e prática. De acordo com Bispo e Ovigli (2019), o GeoGebra permite que os estudantes visualizem e manipulem conceitos matemáticos de forma dinâmica, facilitando a compreensão de conteúdos abstratos e promovendo uma aprendizagem mais significativa. Esse uso da tecnologia, aliado à valorização dos saberes locais e à contextualização dos conteúdos, pode contribuir para uma educação que respeite e incorpore a realidade dos estudantes do campo. Além disso, o uso de ambientes de geometria dinâmica favorece a exploração e a investigação, características essenciais para a aprendizagem significativa. Ponte, Brocardo e Oliveira (2010) reforçam essa perspectiva:

A utilização de ambientes de geometria dinâmica oferece ao aluno a possibilidade de explorar, de forma mais efetiva, o campo das conjecturas e da investigação. A partir de uma figura que construíram, eles podem modificar elementos e observar as mudanças em outras partes da figura, formulando e testando hipóteses sobre as propriedades geométricas. (Ponte; Brocardo;

Oliveira, 2010, p. 55).

Essa abordagem contextualizada, alinhada à etnomatemática de D'Ambrósio (2006), contribui para superar a visão de que a matemática é apenas um conjunto de abstrações descoladas da realidade. Ao propor, por exemplo, a construção de gráficos que representem a produção agrícola da comunidade, o professor articula álgebra e geometria a situações concretas, fortalecendo o domínio conceitual e a valorização da cultura local.

O papel mediador do professor é indispensável nesse processo. Kenski (2012) destaca que:

O domínio das novas tecnologias educativas pelos professores pode lhes garantir a segurança, para com conhecimento de causa, sobreporem-se às imposições de programas e projetos tecnológicos que não tenham a necessária qualidade educativa. Criticamente, os professores vão poder aceitá-las ou rejeitá-las em suas práticas docentes, tirando o melhor proveito dessas ferramentas para auxiliar o ensino no momento adequado (Kenski, 2012, p. 50).

No contexto da escola do campo, isso significa planejar atividades que unam o conhecimento científico escolar às práticas cotidianas, garantindo que a matemática seja compreendida como um instrumento de interpretação e transformação da realidade.

Portanto, as tecnologias digitais, em especial o GeoGebra, configuram-se como mediadoras potentes na integração de conteúdos matemáticos. Quando articuladas à teoria de Ausubel e às especificidades da educação do campo, elas favorecem não apenas a aprendizagem significativa, mas também uma prática pedagógica que valoriza o território, os saberes locais e o protagonismo dos estudantes.

## **2.2 DESAFIOS ESPECÍFICOS NO ENSINO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA NO 9º ANO**

No contexto do 9º ano do Ensino Fundamental, a Geometria e a Álgebra assumem um papel central na consolidação de conhecimentos matemáticos essenciais à formação dos estudantes. A Geometria, por sua vez, contribui para o desenvolvimento da visualização espacial, da compreensão das propriedades das figuras e da capacidade de analisar formas no plano e no espaço. Já a Álgebra, ao

introduzir a linguagem simbólica, estimula o raciocínio abstrato e o pensamento generalizador, promovendo o domínio de expressões algébricas, equações e funções. Contudo, apesar de sua relevância, a aprendizagem desses dois campos do saber matemático ainda enfrenta importantes desafios, tanto do ponto de vista pedagógico quanto metodológico.

Diversos estudos apontam que os estudantes frequentemente apresentam dificuldades na compreensão dos conceitos geométricos e algébricos, o que compromete a aplicação prática desses conteúdos. Essas dificuldades não se restringem à natureza dos conteúdos em si, mas estão também relacionadas à forma como são apresentados em sala de aula. Em muitos casos, Geometria e Álgebra são tratadas de maneira compartimentada, sem que se estabeleça um diálogo entre as áreas, o que dificulta o desenvolvimento de uma visão integrada da matemática. Como destaca Lorenzato (1995, p. 3):

O ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desvairador; alunos, professores, autores de livros didáticos, educador e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. (Lorenzato 1995, p. 3)

Esse modelo contribui para a formação de lacunas conceituais que afetam negativamente o desempenho dos estudantes. Para superar esse cenário, é essencial promover a integração entre os conteúdos, de modo a favorecer a construção de significados mais amplos e inter-relacionados. A Álgebra pode, por exemplo, ser utilizada para resolver problemas geométricos, como o cálculo de áreas e perímetros, enquanto a Geometria contribui para a compreensão gráfica de funções e equações.

O ensino de Matemática, especialmente nos campos da geometria e da álgebra, enfrenta desafios específicos no 9º ano, etapa em que a transição do pensamento concreto para o abstrato se intensifica e exige dos estudantes novas formas de raciocínio. Segundo Lorenzato (2006), a matemática é frequentemente percebida como uma disciplina difícil, o que pode desencadear ansiedade e aversão nos estudantes. Essa visão negativa é muitas vezes mantida por métodos tradicionais que priorizam a memorização de procedimentos em detrimento da compreensão conceitual. Um dos obstáculos para o ensino da matemática é, ainda, a falta de recursos. Conforme aponta Lorenzato (2006):

Um dos obstáculos que se opõem ao ensino de matemática com a utilização de tecnologias digitais está no fato de que muitas das escolas públicas ainda não possuem laboratório com computadores, laboratório de ensino de matemática, softwares ou material semelhante de modo que o professor possa aplicar metodologias de ensino compatíveis com esse tipo de material. Lorenzato (2006, p. 45)

Ainda que a falta de infraestrutura seja um desafio, o aprofundamento nos conteúdos específicos de geometria e álgebra também apresenta dificuldades intrínsecas. Na geometria, a dificuldade mais recorrente está ligada à visualização e manipulação de formas no espaço, competências que não se desenvolvem de maneira uniforme em todos os estudantes. Lorenzato (2006) enfatiza que a abstração geométrica constitui um dos maiores obstáculos para a aprendizagem significativa dessa área. Já a álgebra exige a mobilização de raciocínios generalizadores e a manipulação simbólica, aspectos que frequentemente se tornam barreiras para estudantes que ainda estão consolidando noções básicas de aritmética (Nacarato; Custódio, 2018).

No contexto da escola do campo, esses desafios se intensificam, pois as condições materiais, a disponibilidade de recursos tecnológicos e a valorização dos saberes locais precisam ser consideradas. Conforme destaca Antonio:

Compreende-se que um projeto de educação do campo – pela sua relação indissociável com o trabalho – assume uma dimensão educativa da formação humana e traz em si as mediações fundamentais com a vida social no campo” (Antonio, 2013, p. 29).

Nesse sentido, o ensino de Matemática deve ser articulado não apenas às diretrizes curriculares, mas também às práticas cotidianas do campo, como o uso de medidas de comprimento, proporções, organização de espaços e leitura de dados da produção agrícola.

A adoção de recursos tecnológicos educativos, em especial o GeoGebra, emerge como uma ferramenta poderosa para a construção de uma aprendizagem significativa, pois possibilita ao estudante construir representações interativas que articulam o simbólico e o virtual. Diferentemente de abordagens passivas, o GeoGebra possibilita uma abordagem mais interativa e contextualizada, funcionando como um verdadeiro organizador prévio na perspectiva de Ausubel.

Seu caráter dinâmico e visual permite que os estudantes explorem conceitos abstratos de forma concreta e manipulável. A ferramenta articula o simbólico (álgebra) e o visual (geometria), superando a dicotomia comum no ensino. Por exemplo, eles podem construir um feixe de retas paralelas cortando duas transversais e visualizar em tempo real a aplicabilidade do Teorema de Tales ou a criação de triângulos semelhantes. Ao manipular os elementos da construção, o estudante observa dinamicamente a invariância das razões e proporções, integrando a representação geométrica (a manipulação da figura) e a representação algébrica. Essa integração é concretizada pela relação numérica entre os segmentos correspondentes nas transversais, como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  representam as medidas dos segmentos determinados pelas retas paralelas. Essa capacidade de explorar simultaneamente e em tempo real representações algébricas e geométricas é crucial para que o novo conhecimento se ancore de forma estável na estrutura cognitiva do estudante, favorecendo a reconciliação integrativa.

No entanto, o potencial do GeoGebra depende do papel mediador do professor, que precisa planejar intencionalmente atividades que incentivem a investigação e a descoberta. Conforme Borba e Villareal (2005) apontam, o uso de ferramentas digitais contribui para que os estudantes construam novos processos cognitivos, mas isso exige que educadores estejam abertos a inovações e comprometidos com o desenvolvimento humano.

### **2.3 A MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO: ESSENCIAL PARA A FORMAÇÃO INTEGRAL DO ESTUDANTE**

A Matemática desempenha papel central na Educação Básica, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo, social e crítico do estudante. Além de operar com números e operações, ela se constitui como instrumento para a formação integral do aluno, pois: “promove raciocínio lógico, resolução de problemas, argumentação, interpretação e pensamento abstrato” (Moreira, 2015, p. 27).

Conforme a BNCC (Brasil, 2018), o ensino de Matemática deve possibilitar a compreensão de conceitos, procedimentos e representações em diferentes contextos,

preparando o estudante para interpretar informações e tomar decisões conscientes. A abordagem tradicional, baseada na memorização e repetição de fórmulas, limita a aprendizagem, enquanto práticas fundamentadas na teoria da aprendizagem significativa promovem a assimilação duradoura de conteúdos (Moreira, 2011, p. 42).

Segundo Moreira (2015, p. 88), “a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno consegue relacionar novos conhecimentos a conceitos já existentes em sua estrutura cognitiva, favorecendo a retenção e a aplicação do conteúdo em situações variadas”. Nesse sentido, integrar conteúdos como Geometria e Álgebra permite que o estudante compreenda relações entre conceitos, aplicando a Álgebra em problemas geométricos e utilizando a Geometria para visualizar funções e proporções de maneira concreta.

O GeoGebra emerge como recurso pedagógico estratégico, oferecendo representações múltiplas e dinâmicas que permitem manipulação, experimentação e visualização simultânea de conceitos geométricos e algébricos. Moreira (2015, p. 92) destaca que “o uso de ferramentas digitais possibilita que o aluno explore ativamente os conteúdos, promovendo investigação, reflexão e construção do conhecimento a partir de suas experiências prévias”.

No contexto da escola do campo, essas estratégias ganham relevância adicional. A educação rural deve valorizar os saberes locais e considerar as condições de vida e trabalho das populações, integrando o currículo às práticas cotidianas, como cálculo de áreas de plantio e organização espacial de propriedades. O GeoGebra, ao conectar conceitos formais a experiências concretas, fortalece a aprendizagem significativa e contextualizada (Moreira, 2011, p. 45).

A formação docente é essencial para que essas metodologias se efetivem. Professores precisam atuar como mediadores, planejando atividades que conectem conhecimento prévio e novas informações, promovendo a integração conceitual e a experimentação prática (Moreira, 2015, p. 101). Além disso, o uso de tecnologias digitais permite atender a diferentes estilos de aprendizagem, potencializando a compreensão e a retenção dos conceitos.

Portanto, a Matemática no Ensino Básico, quando trabalhada de forma contextualizada, integrada e mediada por tecnologias, contribui para a formação de sujeitos críticos, autônomos e capazes de aplicar o conhecimento matemático em situações da vida real, fortalecendo habilidades cognitivas, sociais e cidadãs (Moreira, 2011; 2015).

## **2.4 O ENSINO DE MATEMÁTICA: DA MEMORIZAÇÃO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E SOCIAL**

A Matemática é um componente curricular fundamental, pois constitui um instrumento decisivo para o desenvolvimento do pensamento lógico, crítico e abstrato. No entanto, práticas pedagógicas tradicionais baseadas na memorização de fórmulas e na repetição mecânica de exercícios muitas vezes deixam de promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Esse tipo de abordagem restringe a construção significativa do conhecimento e pode resultar em rejeição, ansiedade e desmotivação em relação à disciplina (Moreira, 2015).

Em contraponto, a aprendizagem significativa, fundamentada na teoria de Ausubel (2003), apresenta-se como um pilar para um ensino transformador. Nesse processo, o novo conhecimento é relacionado de maneira substantiva aos conceitos previamente assimilados pelo estudante, permitindo a construção de conexões consistentes entre conteúdos antigos e novos. Moreira (2011, p. 23) define aprendizagem significativa como “o processo pelo qual o novo conhecimento se relaciona de maneira substantiva e não-arbitrária com a estrutura de conhecimento do aprendiz”. Em oposição, a aprendizagem mecânica ocorre quando o conhecimento é incorporado de forma arbitrária, sem vinculação com conceitos ou proposições preexistentes (Moreira, 2015, p. 58).

A essas bases cognitivistas soma-se a abordagem sociocultural de Vygotsky (1998, p. 87), que concebe o aprendizado como um processo social, mediado pela interação, pela linguagem e pelo contexto cultural. O conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) evidencia que o estudante aprende de forma mais eficaz quando orientado por professores ou colegas mais experientes, alcançando competências ainda não totalmente internalizadas. Nessa perspectiva, o professor deixa de ser mero transmissor de conteúdos e atua como mediador e articulador de experiências, papel essencial para que o ensino ultrapasse a técnica e cumpra sua função social (Moreira, 2006, p. 11; Vygotsky, 1998, p. 87).

A convergência entre as abordagens cognitiva e sociocultural é reforçada pela BNCC (Brasil, 2017), que destaca a função social da Matemática, orientando o ensino para a formação de cidadãos críticos e participativos. D’Ambrosio (2009, p. 56) e

Skovsmose (2001, p. 45) defendem que a aprendizagem deve valorizar a dimensão cultural da Matemática, aproximando o conteúdo da realidade dos estudantes e promovendo competências para o exercício da cidadania.

Nesse contexto, a integração de conceitos matemáticos, como Álgebra e Geometria, com atividades práticas, experimentais e contextualizadas, mostra-se crucial para a aprendizagem significativa. Por exemplo, ao trabalhar equações algébricas associadas a cálculos geométricos de áreas e volumes, os estudantes constroem relações claras entre diferentes representações matemáticas. Ferramentas digitais, como o GeoGebra, potencializam esse processo ao permitir que os estudantes manipulem figuras geométricas e explorem variáveis algébricas em tempo real. Moreira (2011, p. 56) observa que “a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula facilita a ancoragem de novos conceitos em conhecimentos prévios, tornando o aprendizado mais concreto e contextualizado”.

Atividades investigativas, em que os estudantes são convidados a explorar propriedades de figuras, conjecturar relações e validar hipóteses, exemplificam como a aprendizagem significativa pode ser operacionalizada. Conforme Ponte et al. (2013, p. 67), experiências práticas e contextualizadas estimulam a curiosidade, a experimentação e a autonomia, favorecendo a retenção e a transferência do conhecimento. Piaget (1971, p. 112) complementa essa perspectiva ao ressaltar a importância da interação com o ambiente físico e social para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

A articulação entre aprendizagem significativa e abordagem sociocultural evidencia que o professor desempenha múltiplas funções: planeja atividades, propõe problemas contextualizados, promove a interação social e media o uso de recursos tecnológicos. Moreira (2006, p. 11) destaca que o docente deve “atuar como mediador, buscando pontes entre o conhecimento formal e a realidade do aluno, para que a aprendizagem seja de fato significativa”. Vygotsky (1998, p. 87) reforça que a interação social e a linguagem são instrumentos indispensáveis para que o estudante internalize conceitos e desenvolva habilidades cognitivas mais complexas.

A aprendizagem significativa e social possibilita que os estudantes compreendam conceitos matemáticos de forma profunda, relacionando-os a situações reais, como cálculo de medidas em construções, análise de dados em contextos ambientais ou resolução de problemas cotidianos. Essa abordagem favorece o desenvolvimento de competências críticas, argumentativas e colaborativas,

aproximando o ensino da Matemática das demandas sociais e culturais contemporâneas.

## **2.5 O PAPEL DO PROFESSOR NA MEDIAÇÃO TECNOLÓGICA E PEDAGÓGICA**

A presença das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) no ensino de Matemática, especialmente por meio de ambientes interativos como o GeoGebra, não reduz a centralidade do professor no processo educativo. Ao contrário, amplia sua responsabilidade e exige um reposicionamento que o coloca como mediador pedagógico e tecnológico, responsável por planejar, orientar e avaliar práticas que utilizem criticamente os recursos digitais em favor da aprendizagem significativa. Nesse contexto, o docente deixa de ser um simples transmissor de conteúdos e assume a função de organizador de experiências, facilitador do diálogo matemático e avaliador reflexivo de sua própria prática.

Esse papel só se concretiza quando o uso das ferramentas digitais está associado a um planejamento didático intencional, fundamentado nos objetivos curriculares e nas necessidades reais dos estudantes. Mais do que dominar tecnicamente a ferramenta, o professor precisa compreender quando, como e por que utilizá-la, garantindo que sua aplicação efetivamente contribua para o desenvolvimento de competências matemáticas. Almeida e Valente (2011, p. 21) ressaltam que “a formação docente para o uso das tecnologias deve articular os conhecimentos pedagógicos, tecnológicos e específicos da disciplina, de modo a favorecer práticas integradas e críticas”.

Essa interação entre tecnologia, pedagogia e conteúdo faz emergir novas formas de conhecimento que, segundo Koehler e Mishra (2008), são essenciais para o ensino eficaz mediado pela tecnologia. Entre elas destacam-se o conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK - Pedagogical Content Knowledge), relacionado às pedagogias voltadas ao ensino de conteúdos específicos; o conhecimento tecnológico de conteúdo (TCK - Technological Content Knowledge), que envolve a compreensão do impacto das tecnologias nas práticas das disciplinas; e o conhecimento tecnológico pedagógico (TPK - Technological Pedagogical Knowledge), que diz respeito à forma como as práticas de ensino e aprendizagem são transformadas pelo uso de tecnologias. A integração desses saberes resulta no conhecimento tecnológico,

pedagógico e de conteúdo (TPACK - Technological Pedagogical Content Knowledge), que permite ao professor desenvolver uma “flexibilidade criativa” na ressignificação das tecnologias existentes para fins pedagógicos. Conforme destacam os autores, o TPACK constitui a base de um ensino significativo e eficaz, pois requer a compreensão da representação de conceitos mediada pela tecnologia, o domínio de técnicas pedagógicas construtivistas que utilizam ferramentas digitais, o entendimento das dificuldades de aprendizagem e de como as tecnologias podem superá-las, bem como o conhecimento do saber prévio dos estudantes e das teorias epistemológicas que sustentam o processo de ensino-aprendizagem (Koehler; Mishra, 2008). A interação entre esses diferentes tipos de conhecimento, ilustrada na Figura 01 a seguir, revela como o entrelaçamento entre tecnologia, pedagogia e conteúdo potencializa o uso significativo das tecnologias na educação.

Figura 01: O Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo (TPACK).

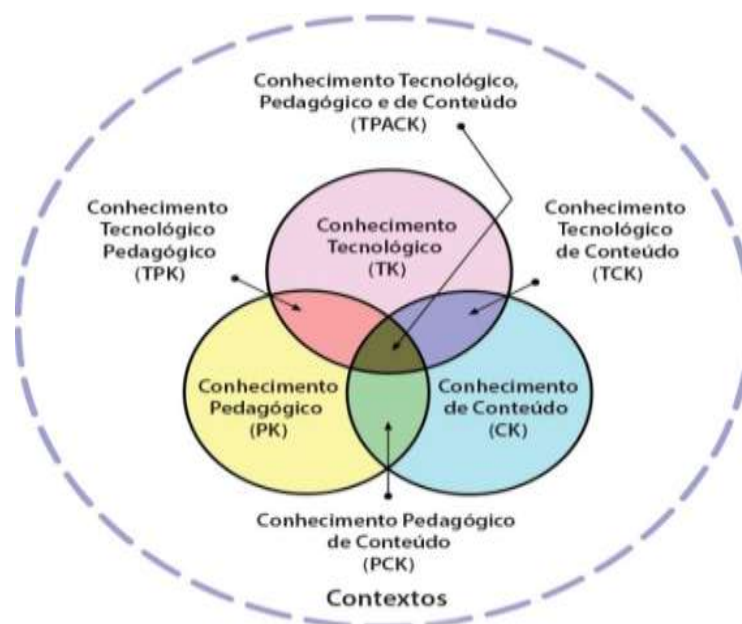


Imagem adaptada de <http://www.tpack.org/>

No caso específico do GeoGebra, suas potencialidades são amplas: o software permite explorar múltiplas representações matemáticas, manipular dinamicamente objetos e construir conjecturas em tempo real. No entanto, esses recursos só produzem efeitos significativos quando mediados pelo professor, que deve estimular o raciocínio crítico, promover o debate entre os estudantes e propor situações-problema desafiadoras. Ponte et al. (2013, p. 56) enfatizam que o papel do professor envolve não apenas o domínio dos instrumentos, mas a capacidade de promover

interações significativas que favoreçam a aprendizagem e a autonomia dos estudantes.

Nesse processo, a avaliação formativa ocupa lugar central, pois possibilita ao professor acompanhar as estratégias utilizadas pelos estudantes, identificar dificuldades conceituais e oferecer feedback imediato. Essa concepção rompe com a visão da avaliação apenas como aferição de resultados e a coloca como parte constitutiva do processo de aprendizagem. Para Perrenoud (2000, p. 77), avaliar é ajudar o aluno a aprender, e não apenas verificar o que ele aprendeu, o que reforça o papel do professor como mediador atento, reflexivo e comprometido com a aprendizagem de todos.

Cabe destacar ainda que a mediação docente diante das tecnologias requer uma postura crítica e ética. A simples inserção de recursos digitais em sala de aula não garante inovação ou qualidade pedagógica. É necessário que o professor se coloque como pesquisador de sua própria prática, disposto a experimentar, replanejar e dialogar com seus pares. Kenski (2007) lembra que a formação docente deve ser contínua e reflexiva, superando o enfoque instrumental, enquanto Valente (2011) argumenta que o uso das TD precisa estar ancorado em propostas pedagógicas que promovam colaboração e aprendizagem significativa.

Em síntese, o papel do professor na mediação tecnológica e pedagógica é multifacetado e essencial. Mais do que dominar ferramentas, é preciso compreendê-las em sua dimensão formativa, articulando conteúdo, pedagogia e tecnologia. Trata-se de planejar, orientar, avaliar e refletir continuamente, assumindo uma postura investigativa e comprometida com a aprendizagem dos estudantes. Somente nessa perspectiva, ferramentas como o GeoGebra podem se transformar em experiências verdadeiramente educativas, capazes de romper com a lógica transmissiva e promover o desenvolvimento pleno das competências matemáticas na educação básica.

## **2.6 O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA**

O GeoGebra, criado por Markus Hohenwarter em 2001, consolidou-se como um software livre de matemática dinâmica que integra álgebra, geometria, estatística e cálculo em um mesmo ambiente (Hohenwarter; Fuchs, 2004). Seu caráter interativo

e a possibilidade de múltiplas representações tornam-no uma ferramenta pedagógica relevante para favorecer aprendizagens significativas, especialmente no ensino de Matemática básica e média.

Diversos estudos têm evidenciado seu potencial didático. Segundo Silveira (2018), o uso do GeoGebra em atividades de geometria contribui para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, promovendo a exploração, a conjectura e a validação de ideias matemáticas. De forma semelhante, Oliveira e Santos (2023) apontam que o software estimula o raciocínio lógico e investigativo, além de apoiar práticas pedagógicas inovadoras que integram tecnologias digitais ao currículo escolar.

Assim, mais do que um recurso técnico, o GeoGebra constitui-se como um mediador pedagógico capaz de enriquecer o trabalho docente, permitindo que o professor organize experiências investigativas e promova um ensino de Matemática mais visual, interativo e significativo.

### **2.6.1 Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA), GeoGebra e a Aprendizagem Significativa no Ensino de Geometria e Álgebra no 9º Ano em Escola do Campo**

O uso de objetos virtuais de aprendizagem (OVA) no ensino de Matemática tem se consolidado como uma estratégia pedagógica que potencializa a aprendizagem significativa, sobretudo quando articulado a softwares de matemática dinâmica, como o GeoGebra. Os OVA podem ser definidos como recursos digitais interativos e reutilizáveis, elaborados com objetivos instrucionais específicos (Wiley, 2002; Audino; Nascimento, 2010). A sua utilização encontra respaldo na teoria de Ausubel (2003), segundo a qual a aprendizagem torna-se significativa quando novos conteúdos se relacionam de maneira substantiva aos conhecimentos prévios dos estudantes.

No contexto da escola do campo, essa abordagem apresenta relevância particular, uma vez que integra a realidade sociocultural dos estudantes às práticas pedagógicas, respeitando seus saberes e condições locais. O GeoGebra, ao possibilitar múltiplas representações — algébricas, geométricas e gráficas — favorece a compreensão de conceitos abstratos de álgebra e geometria presentes no currículo do 9º ano do Ensino Fundamental (Hohenwarter; Fuchs, 2004).

Pesquisas na área de Educação Matemática têm demonstrado que a utilização de OVA desenvolvidos no GeoGebra potencializa a investigação, a autonomia intelectual e a construção ativa do conhecimento pelos estudantes. Diversos autores apontam que ambientes digitais dinâmicos transformam a natureza da atividade matemática, permitindo que o aluno explore ideias, formule hipóteses, valide conjecturas e visualize propriedades que, no ensino tradicional, permanecem excessivamente abstratas.

Nesse sentido, os estudos de Gutiérrez Araujo e Pazuch (2018) evidenciam que a manipulação direta de objetos geométricos digitais favorece a experimentação e o processo de conjectura, ampliando a compreensão estrutural de conceitos matemáticos. Os autores destacam que, ao movimentar pontos, segmentos e figuras, os estudantes constroem significados ao observar invariantes e regularidades emergentes, o que fortalece o pensamento geométrico investigativo.

De forma complementar, Silveira (2018) corrobora que o GeoGebra contribui para uma aprendizagem mais significativa, na medida em que reduz a abstração e aproxima os estudantes de representações mais compreensíveis e manipuláveis. Ao explorar transformações geométricas e relações métricas, o estudante passa a compreender propriedades matemáticas não apenas como resultados formais, mas como regularidades observáveis na dinâmica das construções.

Gravina (2010; 2014) argumenta que ambientes de geometria dinâmica — entre eles o GeoGebra — ampliam possibilidades de investigação e favorecem a formulação de significados matemáticos por meio de exploração intuitiva. Já Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) apontam que TD transforma a forma de aprender matemática, promovendo novas mediações cognitivas e formas de interação entre estudantes, professores e objetos matemáticos.

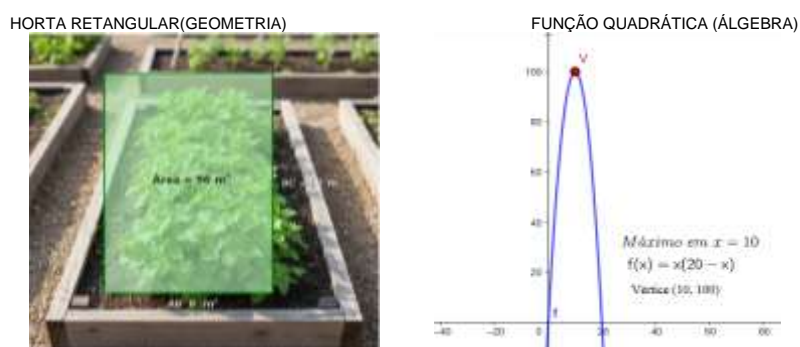
Além disso, pesquisas de Nobre e Ponte (2008; 2010) mostram que, em ambientes digitais, estudantes tendem a realizar ciclos de experimentação e validação que fortalecem o raciocínio lógico e o desenvolvimento da autonomia intelectual. De maneira convergente, Almeida e Valente (2011) destacam que os OVA criados de forma pedagógica e intencional — como aqueles elaborados no GeoGebra — ampliam as possibilidades de investigação e apoiam processos cognitivos essenciais à construção ativa do conhecimento. Mais recentemente, Oliveira, Rezende e Borba (2020) reforçam que o GeoGebra integra múltiplas representações e articula

visualização, experimentação e argumentação, características fundamentais para promover aprendizagens mais profundas.

O uso de OVA mediados pelo GeoGebra mostra-se especialmente relevante em diferentes contextos educativos, incluindo escolas do campo, onde frequentemente há limitações tecnológicas e menor acesso a recursos didáticos diversificados. Nessas realidades, ferramentas digitais como o GeoGebra assumem função central ao promover práticas colaborativas, ampliar o engajamento dos estudantes e democratizar o acesso a experiências matemáticas baseadas na investigação e na experimentação. Ao permitir que o estudante manipule, teste, observe e reconstrua conceitos em um ambiente visualmente acessível, o GeoGebra fortalece processos cognitivos compatíveis com a aprendizagem significativa, favorecendo uma compreensão mais profunda, ativa e funcional dos conteúdos matemáticos.

A Figura 02 ilustra esse potencial pedagógico, apresentando um exemplo concreto de representação matemática construída no GeoGebra que evidencia a interconexão dinâmica entre Geometria e Álgebra. No OVA exibido, ao arrastar a variável  $x$  (representada como a largura do retângulo na Janela de Visualização), o estudante observa simultaneamente a transformação geométrica do campo (Geometria) e a variação correspondente no valor da área (Álgebra). Essa relação é registrada graficamente na parábola associada, destacando o ponto de máximo da função — o vértice — que indica a configuração geométrica de maior eficiência (o quadrado). Esse processo permite ao estudante visualizar, interpretar e validar a correspondência entre propriedades geométricas e comportamentos algébricos, promovendo um movimento claro de reconciliação integradora, conforme postulam Ausubel e Moreira, em que novos significados são ancorados em estruturas cognitivas já existentes.

Figura 02 – OVA para a AS no 9º Ano: Otimização de Área.



Fonte: Autora

Ao mesmo tempo, a interação com o OVA sustenta o princípio da diferenciação progressiva, pois o estudante passa de uma compreensão empírica da variação da forma para uma compreensão abstrata da função de segundo grau e de sua otimização. Assim, a representação digital reforça a articulação entre conceitos, favorece a percepção de regularidades e contribui para superar a fragmentação entre álgebra e geometria, frequentemente observada no ensino tradicional.

Como ressaltam Almeida e Valente (2011), a integração efetiva das tecnologias digitais exige do professor a articulação entre conhecimentos pedagógicos, tecnológicos e de conteúdo, de modo a garantir intencionalidade e coerência didática.

Em síntese, os OVA construídos no GeoGebra, quando aplicados ao ensino de álgebra e geometria, representam uma alternativa metodológica potente para o fortalecimento da aprendizagem significativa. Essa abordagem é capaz de articular inovação tecnológica, mediação docente e valorização da realidade e da vivência concreta dos estudantes. Ao promover a reconciliação integrativa e a diferenciação progressiva por meio da manipulação digital, o GeoGebra contribui para superar a fragmentação disciplinar e tornar o conhecimento matemático mais coerente e menos arbitrário.

### 3 DELINEAMENTO METODOLÓGICO

O presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa de natureza qualitativa e propositiva, uma vez que se propõe não apenas a descrever um fenômeno educacional, mas também a construir, implementar e analisar uma intervenção pedagógica específica no contexto do ensino de Matemática (Fiorentini & Lorenzato, 2012; Borba, 2004). Tal abordagem mostra-se adequada aos objetivos da investigação, pois privilegia a compreensão dos significados atribuídos pelos sujeitos envolvidos ao processo de aprendizagem, reconhecendo que o conhecimento, no campo da Educação Matemática, é permeado por valores, intencionalidades e pela trajetória formativa do pesquisador (Bicudo, 2004).

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública do campo, localizada no interior de um município gaúcho, pertencente à rede estadual de ensino. A escola atende estudantes oriundos majoritariamente de famílias vinculadas à agricultura familiar, cujas práticas socioculturais e produtivas constituem elementos significativos do cotidiano escolar. A infraestrutura da instituição contempla salas de aula, laboratório de informática com acesso à internet e equipamentos básicos que possibilitaram a utilização do software GeoGebra durante as atividades pedagógicas.

Os participantes da pesquisa foram estudantes da turma do 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 12 alunos, com faixa etária entre 14 e 15 anos. A turma apresenta um perfil heterogêneo no que se refere aos conhecimentos matemáticos, ao ritmo de aprendizagem e às experiências prévias com tecnologias digitais. Tal heterogeneidade foi considerada elemento constitutivo do processo investigativo, uma vez que possibilitou analisar diferentes formas de apropriação dos conceitos geométricos e algébricos trabalhados ao longo da intervenção pedagógica.

Adotou-se, como estratégia metodológica para o aprofundamento da análise qualitativa, a seleção intencional de estudantes, procedimento característico de pesquisas de natureza interpretativa. Tal escolha possibilitou a realização de uma análise pormenorizada das produções discentes e das interações estabelecidas no desenvolvimento de atividades pedagógicas mediadas por OVA no contexto da sala de aula, favorecendo a compreensão dos processos de construção do conhecimento e dos indícios de aprendizagem significativa. Nas atividades iniciais, para cada objeto de estudo, foram selecionados três estudantes: um que apresentou maior facilidade

na realização das atividades propostas, um que demonstrou dificuldades conceituais e procedimentais e um com desempenho intermediário. Essa escolha fundamenta-se na abordagem qualitativa de pesquisa, que privilegia a profundidade analítica em detrimento da representatividade estatística, permitindo compreender diferentes modos de construção do conhecimento matemático (Bicudo, 2004; Bardin, 2016). Para garantir o anonimato dos participantes, os estudantes foram identificados por códigos alfanuméricos (E1, E2, E3, ...E12).

A investigação fundamenta-se nos pressupostos da TAS, proposta por David Ausubel, segundo a qual a aprendizagem ocorre de forma efetiva quando novos conhecimentos se relacionam de maneira não arbitrária e substantiva com os conhecimentos prévios dos estudantes, denominados subsunçores. Conforme Ausubel (2003, p. 41), “a aprendizagem significativa pressupõe que ideias expressas simbolicamente sejam relacionadas de maneira não arbitrária e substantiva àquilo que o aprendiz já sabe”. Dessa forma, o papel do professor consiste em organizar situações didáticas que favoreçam tais ancoragens cognitivas, especialmente por meio de recursos que possibilitem a visualização, a experimentação e a articulação entre diferentes representações matemáticas.

A intervenção pedagógica foi estruturada a partir da elaboração e aplicação de atividades desenvolvidas no GeoGebra, organizadas em uma sequência didática composta por 20 planos de aula. Os conteúdos abordados contemplaram temas da Geometria e da Álgebra, organizados segundo um grau crescente de complexidade conceitual, a saber: Introdução à Razão; Razão na Malha Cartesiana; Razão na Divisão de Segmentos; Proporção e Fator de Escala; Proporcionalidade em Triângulos; Teorema de Tales (feixe de paralelas e suas aplicações); Semelhança de Triângulos; Triângulo Retângulo (construção e nomenclatura); Teorema de Pitágoras (visualizações, invariância e demonstração exploratória); Relações Métricas; e Reconciliação Integrativa Final. Essa organização buscou favorecer a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa dos conceitos, conforme preconizado por Ausubel (2003).

O GeoGebra foi selecionado como recurso pedagógico por sua capacidade de integrar, em um único ambiente, diferentes registros de representação matemática, permitindo a articulação entre os registros geométrico e algébrico. Nas atividades desenvolvidas, a manipulação dinâmica de elementos geométricos possibilitou aos estudantes observar, de forma simultânea, as variações nas expressões algébricas e

nas relações proporcionais correspondentes, atuando como um organizador prévio e facilitador da aprendizagem significativa (Ausubel, 2003; Moreira, 2012).

Os dados da pesquisa foram produzidos e coletados a partir das produções escritas dos estudantes, dos registros gráficos e algébricos construídos no GeoGebra, das observações sistemáticas realizadas pela professora-pesquisadora durante a aplicação das atividades e de registros em diário de campo. Esse conjunto de materiais constituiu o corpus da análise, selecionado com base nos critérios de pertinência, homogeneidade e exaustividade, conforme orientações de Bardin (2016).

Para a análise dos dados, adotou-se a Análise de Conteúdo, na perspectiva proposta por Bardin (2016), entendida como “um conjunto de técnicas de análise das comunicações” que visa obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos, indicadores que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção e recepção das mensagens (Bardin, 2016, p. 37). A análise desenvolveu-se em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

Na fase de pré-análise, procedeu-se a organização do material, a definição do corpus e a realização da leitura flutuante dos registros, entendida como o primeiro contato com os documentos a serem analisados, no qual o pesquisador “se deixa invadir por impressões e orientações” (Bardin, 2016, p. 126). A etapa de exploração do material consistiu na codificação e categorização dos dados, a partir de unidades de registro definidas como trechos das produções dos estudantes, falas e ações observadas durante a interação com os OVA, considerando como unidade de contexto cada atividade da sequência didática. Essa fase corresponde ao momento de análise propriamente dita, caracterizada por operações sistemáticas de codificação, decomposição e enumeração do material, realizadas com base em regras previamente definidas (Bardin, 2016, p. 131). Por fim, na fase de tratamento dos resultados, os dados foram tratados de modo a se tornarem significativos e válidos, possibilitando inferências e interpretações à luz do referencial teórico adotado. Conforme Bardin (2016, p. 132), essa etapa permite que os resultados obtidos sirvam de base para interpretações mais amplas e para a articulação com novas dimensões teóricas. Nesse estudo, buscou-se identificar indícios de aprendizagem significativa, tais como a mobilização de conhecimentos prévios, a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa entre conceitos geométricos e algébricos.

A análise dos dados foi conduzida a partir de uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, fundamentada na observação sistemática das atividades desenvolvidas em sala de aula ao longo da sequência didática. O acompanhamento do processo de ensino e aprendizagem considerou as ações dos estudantes durante a resolução das tarefas, as interações discursivas estabelecidas nas discussões coletivas e os registros produzidos no GeoGebra, tomando esses elementos como evidências do percurso formativo construído.

O foco da análise recaiu sobre os movimentos conceituais manifestados decorrerão longo da aplicação das atividades, buscando compreender de que modo os estudantes mobilizaram conhecimentos prévios, estabeleceram relações entre diferentes representações — especialmente geométricas e algébricas — e atribuíram novos significados aos conceitos trabalhados. A interpretação dos dados fundamentou-se na TAS, conforme formulada por Ausubel (2003) e aprofundada por Novak (2010), segundo a qual a aprendizagem ocorre quando novas informações se integram de modo não arbitrário e substantivo às estruturas cognitivas já existentes. À luz desse referencial, buscaram-se, nas produções e interações dos estudantes, indícios de mobilização de conhecimentos prévios e de reorganização progressiva dos significados matemáticos.

O tratamento do material empírico foi realizado com base nos procedimentos da análise de conteúdo, de acordo com Bardin (2016), contemplando a organização do corpus, a leitura analítica dos registros e a interpretação inferencial dos dados. Tal encaminhamento assegurou rigor metodológico à análise, articulando consistência teórica e sistematicidade na interpretação das evidências produzidas em sala de aula.

As orientações da BNCC (Brasil, 2018) também subsidiaram a análise, especialmente no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio geométrico, da argumentação matemática e da articulação entre diferentes registros de representação previstos para o 9º ano.

Considerando o contexto da escola do campo, reconheceu-se que os saberes prévios dos estudantes — constituídos em suas vivências socioculturais — desempenham papel estruturante na atribuição de significados aos conceitos matemáticos. Assim, a análise buscou compreender como tais experiências dialogam com as atividades propostas, influenciando as estratégias adotadas, os modos de interpretação e os níveis de compreensão alcançados.

Dessa maneira, a investigação privilegiou a compreensão do processo de construção de significados no contexto real da sala de aula, enfatizando o caráter formativo e processual da aprendizagem, em consonância com a natureza aplicada da pesquisa no âmbito do PROFMAT.

## 4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO GEOGEBRA

A sequência didática desenvolvida no ambiente GeoGebra foi elaborada com o propósito de fomentar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e consolidar a aprendizagem de conceitos geométricos e algébricos no 9º ano. A estruturação das atividades fundamentou-se nos princípios da TAS de Ausubel (2003), utilizando os processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa para guiar uma construção de significados lógica e consistente. A abordagem pedagógica incorpora, ainda, as diretrizes das metodologias construtivistas e investigativas discutidas por Fonseca (2014) e adota a perspectiva da pesquisa qualitativa em educação de Lüdke e André (2018) para compreender o processo de ensino-aprendizagem. Ademais, a proposta alinha-se às competências da BNCC (Brasil, 2018), priorizando o uso crítico de tecnologias digitais e a exploração de múltiplas representações matemáticas.

Nesse sentido, a atividade 1 inaugura o percurso formativo ativando o subsunçor da divisão, amplamente familiar aos estudantes, por meio de situações contextualizadas do cotidiano rural, como a partilha de sementes ou a divisão de cercas. Essa contextualização atribui significado prático aos números trabalhados e favorece a transição da operação aritmética para a compreensão conceitual da razão. O uso do GeoGebra como ambiente de exploração dinâmica possibilita a construção e a manipulação de segmentos de reta, cujos comprimentos podem variar em tempo real, ao mesmo tempo em que o próprio software apresenta o valor da razão entre esses segmentos. Essa visualização favorece a compreensão tanto de razões inteiras quanto decimais, permitindo que os estudantes atribuam sentido a valores não inteiros, como 1,5, entendido como “um inteiro e meio”, em um claro movimento de diferenciação progressiva, conforme descrito por Ausubel (2003). Ao observar a relação entre os segmentos, os estudantes passam a compreender a razão como uma forma de comparação entre grandezas, e não apenas como um cálculo algorítmico.

Na atividade 2, o conceito de razão é aprofundado no contexto da malha cartesiana, ampliando seu significado para o de taxa de variação. A construção de retas no plano e o traçado dos chamados “triângulos de inclinação” tornam visíveis as variações vertical e horizontal associadas a cada reta. Com o auxílio do GeoGebra, a razão entre essas variações é calculada automaticamente, deslocando o foco da atividade para a noção de invariância. Ao mover pontos ao longo de uma mesma reta,

os estudantes observam que o coeficiente angular permanece constante, independentemente da posição escolhida, o que reforça a ideia de que a inclinação é uma propriedade intrínseca da reta. A comparação entre retas paralelas permite uma reconciliação integrativa, na qual os estudantes concluem que retas com o mesmo coeficiente angular são geometricamente paralelas, articulando álgebra e geometria de forma significativa (Boyer, 1996).

A atividade 3 retoma o conceito de razão sob a perspectiva da divisão de segmentos, partindo de uma situação concreta, como o posicionamento de um poste ao longo de uma cerca. A razão entre as partes do segmento é introduzida de forma intuitiva e, por meio de controles deslizantes no GeoGebra, os estudantes acompanham, em tempo real, o deslocamento do ponto de divisão conforme os valores numéricos são alterados. A visualização da soma das partes da razão como denominador da fração que localiza o ponto favorece a compreensão da posição de um ponto como uma fração do todo. Essa articulação entre representação algébrica e geométrica consolida a aprendizagem e permite reconhecer o ponto médio como um caso particular dessa divisão, fortalecendo a estrutura cognitiva do conceito.

Na atividade 4, o estudo da proporção e do fator de escala é desenvolvido por meio da construção de polígonos e da aplicação da homotetia, controlada por um seletor que define o valor do fator de escala. O caráter investigativo da atividade é reforçado pelo cálculo automático do perímetro e da área das figuras original e transformada. Ao comparar os valores obtidos, os estudantes identificam empiricamente que o perímetro varia de forma linear em relação ao fator de escala, enquanto a área varia quadraticamente. Esse processo contribui para a superação de concepções equivocadas recorrentes, como a ideia de que dobrar os lados implica dobrar a área, e culmina em uma reconciliação integrativa ao aplicar esses conhecimentos na leitura de mapas e plantas baixas, em consonância com estudos sobre visualização e tecnologia na Educação Matemática (Borba; Penteado, 2010).

A atividade 5 introduz a proporcionalidade em triângulos por meio da exploração experimental do Teorema de Tales. Utilizando a geometria dinâmica, os estudantes constroem um triângulo, inserem uma reta transversal paralela a um de seus lados e observam os segmentos formados. Na atividade são medidos esses segmentos e calculadas as razões correspondentes, permitindo verificar que, mesmo com a movimentação dos vértices, as razões permanecem constantes. Essa abordagem investigativa possibilita os estudantes validar empiricamente o teorema

antes de sua formalização algébrica, compreendendo que a proporcionalidade decorre do paralelismo e da preservação dos ângulos, estabelecendo conexões diretas com o conceito de semelhança de triângulos (Euclides, 2009).

Dando continuidade à progressão conceitual, as atividades 6 a 9 aprofundam o Teorema de Tales, deslocando gradativamente o foco do resultado para suas hipóteses de validade e algumas consequências. Na atividade 6, o feixe de paralelas em triângulos é explorado como organizador prévio, evidenciando que o paralelismo determina a semelhança e, conseqüentemente, a proporcionalidade. A congruência angular observada nas construções dinâmicas sustenta a semelhança pelo critério Ângulo-Ângulo, enquanto a medição dos segmentos permite verificar a invariância das razões.

Na atividade 7, o estudo do paralelismo é desenvolvido com ênfase em sua fundamentação conceitual, evidenciando que pequenas falhas nessa condição comprometem a confiabilidade das proporções, reforçando a importância do rigor geométrico em aplicações como a agrimensura e a construção civil. Já a atividade 8 consolida a verificação experimental do Teorema de Tales por meio da medição sistemática dos segmentos, culminando na formulação do teorema com base na observação empírica. A atividade 9, por sua vez, apresenta o Teorema da Base Média como um caso particular de Tales, quando a razão é igual a 1, promovendo uma síntese conceitual que evidencia a coerência interna da geometria.

Nas atividades 10 e 11, a semelhança de triângulos é formalizada e aplicada à medição indireta de alturas. A prova geométrica pelo critério Ângulo-Ângulo é contextualizada por situações reais, como a projeção de sombras, utilizando a luz solar como organizador prévio expositivo. A razão de semelhança passa a ser compreendida como uma constante numérica que quantifica a ampliação ou redução das figuras, sendo aplicada em problemas de escala e, posteriormente, na resolução do problema clássico da medição indireta de alturas, consolidando a articulação entre teoria e prática.

A partir da atividade 12, ocorre a introdução ao estudo do triângulo retângulo, tendo a perpendicularidade como subsunçor central. A nomenclatura formal dos lados e a observação de suas propriedades preparam o terreno conceitual para o Teorema de Pitágoras, que é introduzido na atividade 13 por meio de uma argumentação geométrica visual baseada na comparação de áreas. A igualdade entre a soma das áreas dos quadrados dos catetos e a área do quadrado da hipotenusa é visualizada

dinamicamente e, posteriormente, formalizada algebricamente. A atividade 14 amplia essa compreensão ao utilizar a relação pitagórica como critério de classificação de triângulos, reforçando sua validade geral.

Por fim, as atividades 15 a 20 aprofundam e integram todas essas ideias, explorando as relações métricas no triângulo retângulo, a semelhança entre os triângulos formados ao dividir o triângulo original pela altura relativa à hipotenusa e a dedução do Teorema de Pitágoras como síntese dessas relações. A culminância da sequência ocorre na atividade 20, quando Tales, semelhança e Pitágoras são articulados em uma única construção geométrica, evidenciando a interdependência desses conceitos. Ao término do percurso, almeja-se que o estudante não apenas domina procedimentos e fórmulas, mas compreenda a geometria como um sistema coerente de ideias interligadas, no qual cada novo conceito se ancora nos anteriores, caracterizando uma aprendizagem significativa, conforme os princípios estabelecidos por Ausubel.

## 5 RESULTADOS E ANÁLISE

Este capítulo analisa os dados produzidos a partir da intervenção pedagógica mediada pelo software GeoGebra, desenvolvida com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola do campo. A análise fundamenta-se na Análise de Conteúdo (Bardin, 2016), tendo como corpus as produções escritas dos estudantes, os registros digitais e as observações do professor-pesquisador. Os dados foram organizados em categorias analíticas, previamente definidas e emergentes, e interpretados à luz da TAS, com vistas à identificação de evidências de mobilização de conhecimentos prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa entre conceitos geométricos e algébricos.

As produções iniciais evidenciaram diferentes níveis de mobilização de conhecimentos relacionados aos conceitos de razão e proporcionalidade. Os registros elaborados no GeoGebra indicaram que parte dos estudantes conseguiu estabelecer relações entre situações matemáticas propostas e suas representações geométricas e algébricas, enquanto outros apresentaram dificuldades na transposição entre esses diferentes registros, manifestadas por compreensões parciais ou procedimentos pouco articulados conceitualmente.

A sistematização dos dados permitiu inferir que as atividades realizadas no GeoGebra favoreceram a explicitação dos conhecimentos prévios e o estabelecimento de relações iniciais entre situações contextualizadas e suas representações matemáticas. A visualização dinâmica proporcionada pelo software configurou-se como um elemento mediador do processo de aprendizagem, evidenciando distintas formas de apropriação conceitual entre estudantes com diferentes níveis de desempenho. À luz da TAS, tais indícios sugerem que as atividades desenvolvidas no GeoGebra desempenharam a função de organizadores prévios, ao criarem condições favoráveis para a ancoragem de novos conhecimentos em conceitos já existentes (Ausubel, 2003). Esse movimento inicial contribuiu para a ocorrência de processos de diferenciação progressiva e estabeleceu bases para a reconciliação integrativa entre Geometria e Álgebra ao longo da sequência didática, conforme aprofundado nas análises subsequentes.

Nesse contexto, os procedimentos práticos foram materializados em um conjunto de atividades investigativas, aplicadas em laboratório de informática, que

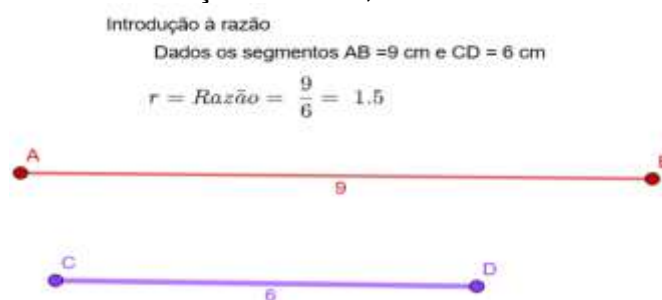
serviram como o principal cenário de interação entre os sujeitos, o software e o objeto de conhecimento.

### ATIVIDADE 1: Introdução à Razão

Esta atividade foi elaborada para observar, como os estudantes constroem o conceito de razão enquanto relação entre grandezas, explorando simultaneamente registros algébricos, geométricos e numéricos no ambiente dinâmico do GeoGebra. A proposta, fundamentada nos pressupostos da TAS de Ausubel (1968), foi planejada para promover a ancoragem de novos conhecimentos em subsunçores já presentes na estrutura cognitiva dos estudantes, especialmente aqueles relacionados às noções de divisão, proporcionalidade e comparação entre medidas. Para isso, o início da atividade envolveu uma problematização que funcionou como organizador prévio (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980), na qual os estudantes foram convidados a refletir sobre o significado da operação de dividir comprimentos, respondendo às perguntas orientadoras, como por exemplo: “Quando fazemos a razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ , qual operação matemática estamos executando? O que significa, na prática, dividir um comprimento pelo outro?”. Essa etapa preliminar teve como finalidade ativar conhecimentos prévios e torná-los explícitos, proporcionando um ponto de partida conceitual para a aprendizagem subsequente.

Após a etapa inicial de problematização conceitual, a atividade avançou para a exploração prática no software GeoGebra, onde os estudantes construíram dois segmentos,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , para nas sequências, medir seus comprimentos e calcular a razão entre eles, observando dinamicamente como alterações geométricas produziam modificações numéricas na razão, inicialmente com valores inteiros. A atividade desenvolvida pelo estudante E01 nesta atividade é apresentado na Figura 03.

Figura 03 – Introdução à razão; Atividade construída por E01



Fonte: Arquivos da pesquisa

Essa simultaneidade de representações foi essencial para estabelecer conexões entre os domínios geométrico e algébrico, criando condições para a reconciliação integrativa (Ausubel, 1968).

Ao observar que a razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$  se modificava à medida que um dos segmentos era ampliado ou reduzido, os estudantes passaram a compreender que essa operação não se restringia à mera realização de uma divisão aritmética, mas expressava uma relação multiplicativa entre grandezas, o que se evidencia, por exemplo, na manifestação de E01, que afirmou: *“dividir  $\overline{AB}$  por  $\overline{CD}$  é ver quantas vezes um está dentro do outro”*.

A atividade prosseguiu com a introdução de razões não inteiras, buscando promover a diferenciação progressiva (Moreira, 2011), conduzindo os estudantes da manipulação de valores inteiros para a compreensão de razões decimais como fatores multiplicativos, ampliando assim, a compreensão da razão como operador que expressa ampliação ou redução entre grandezas. A instigação iniciou com a pergunta *“Se a razão for 1,5, como você descreveria a relação entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ ?  $\overline{AB}$  é 1,5 vezes o quê?”* Neste ponto os estudantes precisaram reinterpretar seus subsunçores sobre divisão, multiplicação e proporcionalidade à luz de um novo contexto. As respostas dos estudantes revelaram distintas formas de ancoragem conceitual: enquanto E01 afirmou que *“ $\overline{AB}$  é 1,5 vezes  $\overline{CD}$ ; é como aumentar  $\overline{CD}$  uma vez inteira mais a metade dele”*, demonstrando clara compreensão da dimensão multiplicativa, E03 apresentou uma interpretação imprecisa ao afirmar que *“ $\overline{AB}$  é 0,5 maior que  $\overline{CD}$ ”*, revelando dificuldade em abandonar uma leitura aditiva. Já E08, ao declarar que *“1,5 é a diferença entre eles, acho que é porque mediu errado”*, evidenciou que a razão não havia sido integrada de forma significativa à sua estrutura cognitiva, permanecendo restritas a percepções isoladas.

Observou-se que o uso do GeoGebra funcionou como mediador para oportunizar essa ressignificação conceitual. Para alguns estudantes, como E01, o ambiente digital permitiu um engajamento investigativo, materializado em ações como testar diferentes comprimentos, observar padrões e verbalizar hipóteses. Esse estudante frequentemente articulava representações, afirmando, por exemplo: *“Quando eu mexo no ponto e o número muda, estou vendo a multiplicação acontecendo”*. Esse tipo de fala indica não apenas uma relação coordenada entre representações algébrica e geométrica, mas também a presença ativa de

subsunçores adequados, como proporcionalidade, divisão como operador multiplicativo e noção de escala, possibilitando o estabelecimento de relações não arbitrárias e substantivas, conforme descreve Ausubel (1968). Assim, a aprendizagem significativa emergiu quando o estudante conseguiu reorganizar e ampliar seus esquemas cognitivos à medida que interagiu com o software.

Em contraste, E03 demonstrou uma apropriação parcial dos conceitos envolvidos. Embora tenha conseguido manipular o GeoGebra de forma correta e produzir construções tecnicamente adequadas, sua fala indicou uma compreensão fragmentada. Em determinado momento, ao observar uma razão igual a 2, comentou: “ $\overline{AB}$  está dois maior que  $\overline{CD}$ ”, revelando a permanência de um modelo mental centrado em diferenças absolutas, e não em fatores multiplicativos. Ausubel explicaria esse fenômeno como uma integração insuficiente entre os novos conteúdos e os subsunçores disponíveis, o que ocasiona uma aprendizagem apenas mecânica ou pouco estável. A dificuldade de E03 em estabelecer conexões entre número e figura reforça essa leitura, uma vez que a manipulação algébrica não se traduzia automaticamente em compreensão geométrica.

Quanto a E08, sua participação ilustra um caso típico de não ancoragem significativa, em que o estudante executa procedimentos sem compreender seu propósito ou suas implicações. A fala “*Eu só medi e coloquei pra dividir, não sei o que isso mostra*” sintetiza a ausência de coordenação entre registros e a inexistência de conhecimentos prévios suficientemente diferenciados para sustentar a atribuição de sentido ao conceito de razão no contexto da atividade. Para esse estudante, nesta atividade, o GeoGebra funcionou apenas como instrumento operacional, e não como ambiente para investigação. A dependência de instruções passo a passo, aliada à dificuldade de elaborar explicações próprias, revela que a aprendizagem se manteve no nível da mera repetição, como caracterizado por Ausubel (1968).

Do ponto de vista motivacional e engajamento, as interações também evidenciam diferenças significativas entre os três estudantes citados. Enquanto E01 mostrou entusiasmo e autonomia, explorando por conta própria variações nos segmentos e estabelecendo relações entre o que via e o que calculava, E03 e E08 apresentaram engajamento moderado, sendo mobilizados apenas diante de questionamentos diretos. Tais posturas impactam diretamente a predisposição para aprender, elemento que Ausubel considera fundamental para a ocorrência da aprendizagem significativa.

## ATIVIDADE 2: Razão na Malha

A atividade “Razão na Malha” foi elaborada com o objetivo de compreender como os estudantes constroem o conceito de declividade de uma reta a partir da interpretação da razão entre variações no plano cartesiano, articulando simultaneamente registros algébricos, geométricos e numéricos no ambiente dinâmico do GeoGebra Clássico. Novamente, o planejamento da atividade fundamentou-se nos princípios da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1968), buscando promover a ancoragem dos novos conceitos (como as variações, razão entre  $\Delta y$  e  $\Delta x$  e inclinação) a organizadores prévios já presentes, especialmente aqueles relacionados à comparação entre grandezas, proporcionalidade e interpretação de medidas.

A atividade teve início com um organizador prévio, formulado para explicitar os subsunçores dos estudantes e preparar cognitivamente o terreno para a aprendizagem subsequente. Foram propostas questões problematizadoras como: *“Ao dizer que uma estrada sobe 3 metros a cada 6 metros percorridos, o que estamos comparando: a variação da altura ou a distância percorrida?”* *“Quando afirmamos que algo é ‘duas vezes maior’, que tipo de relação estamos estabelecendo?”*

Essas perguntas provocaram os estudantes a mobilizarem expressões cotidianas como *“duas vezes”, “metade” ou “para cada”,* criando condições para que a noção de razão como relação entre duas variações emergisse de forma espontânea. As manifestações iniciais revelaram níveis distintos de ancoragem conceitual. O estudante E06, por exemplo, afirmou que: *“A cada 6 metros na horizontal, sobe 3 na vertical. É uma razão de 3 para 6, tipo metade.”* Por sua vez, E07 apresentou uma compreensão mais comparativa, porém ainda pouco articulada: *“É uma comparação, porque quando uma aumenta, a outra aumenta junto.”* Já o estudante E02 apresentou um nível de raciocínio aditivo evidenciando a ausência de coordenação entre as medidas e o conceito de razão ao fazer o comentário: *“Acho que uma é maior que a outra, mas não entendo bem o que é três para seis.”* Tais diferenças constituíram o ponto de partida necessário para a construção significativa.

Essas respostas evidenciam que E06 mobiliza um subsunçor de proporcionalidade bem diferenciado; E07 apresenta compreensão comparativa, ainda pouco articulada; e E02 demonstra ausência de coordenação entre medidas e razão, situando-se em um nível de raciocínio aditivo. Assim como observado na Atividade 1,

essas diferenças constituem o ponto de partida para a construção significativa.

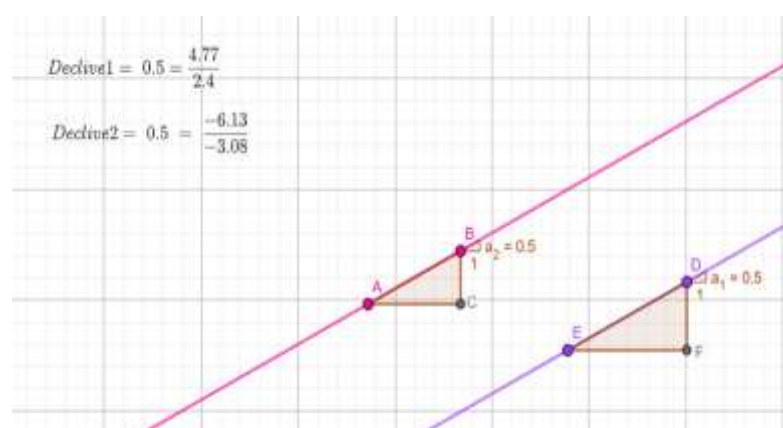
A etapa seguinte consistiu na construção de dois pontos no GeoGebra,  $A = (0,0)$  e  $B = (4,2)$ , visando a observação das variações  $\Delta x = 4$  e  $\Delta y = 2$ . Os estudantes foram orientados a:

1. traçar o segmento  $\overline{AB}$ ;
2. Traçar retas paralelas aos eixos passando por  $A$  e  $B$  e encontrar seu ponto de interseção, para registrar as variações na horizontal e na vertical;
3. calcular a razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ;
4. manipular o ponto  $B$  sobre a reta que passa por  $A$  e  $B$  para observar como a inclinação não se altera em relação ao ponto  $A$ , que permanece fixo durante toda a atividade, servindo como referência para calcular  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e a inclinação.

Novamente, o ambiente dinâmico permitiu aos estudantes visualizarem simultaneamente números, formas e deslocamentos, promovendo a “construção ativa de significados” (Moreira, 2011). Perguntas orientadoras ampliaram a investigação: “Se dobrarmos  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , a razão muda?” “O que acontece se as variações aumentarem na mesma proporção?”

A Atividade desenvolvida pelo estudante E06 nesta atividade é apresentado na Figura 04, que ilustra o segmento  $\overline{AB}$  no plano cartesiano com o registro das variações vertical  $\Delta y$  e horizontal  $\Delta x$  e o cálculo da razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ .

Figura 04 – Razão na malha (Declive); Atividade construída por E06



Autor: Arquivo da pesquisa

As respostas evidenciaram diferentes graus de generalização, repetindo de modo coerente o padrão cognitivo observado na etapa inicial. O estudante E06 manteve a compreensão relacional, demonstrando captar a invariância da razão: “Mesmo dobrando, a razão fica  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ . Não muda, porque crescem igual.”. E07

apresentou uma intuição *proporcional* "Acho que fica igual, porque aumentou tudo do mesmo jeito.", mas sem a formalização consciente. Em contraste, E02 persistiu em uma leitura aritmética literal, não captando a invariância da razão "Vai mudar, porque os números ficaram maiores."

A exploração, marcada pela manipulação do ponto B, permitiu ao estudante observar a permanência da inclinação mesmo diante de alterações nas coordenadas absolutas. Esse resultado só foi possível porque o ponto B foi deslocado ao longo de uma reta fixa, assegurando que todos os seus posicionamentos mantivessem a mesma razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

A simultaneidade de representações — numérica, algébrica e geométrica — mostrou-se essencial para estabelecer conexões entre os domínios da Geometria e da Álgebra, criando condições cognitivas favoráveis à reconciliação integrativa (Ausubel, 1968). O uso do GeoGebra, enquanto recurso didático, possibilita que professores e estudantes articulem dinamicamente esses registros, superando a visão fragmentada dos conteúdos. Dessa forma, a compreensão do declive deixa de ser percebida apenas como um número isolado e passa a ser entendida como uma relação invariável entre grandezas, reforçando a integração conceitual entre diferentes representações matemáticas.

A análise das respostas subsequentes ratificou a coerência e a estabilidade dos subsunçores observados desde a fase inicial da Atividade 1, um fator importante para o planejamento da progressão didática. O estudante E06 demonstrou consistentemente uma compreensão relacional do conceito, evidenciando uma ancoragem significativa que lhe permite reconhecer e aplicar a invariância da razão em diferentes contextos. Em contraste, o estudante E07 apresentou uma intuição proporcional que, embora sinalize uma evolução em seu subsunçor, carece da formalização conceitual necessária para o reconhecimento plenamente consciente da relação multiplicativa. Por fim, E02 persistiu em uma leitura aritmética literal do problema, confirmando a dificuldade em captar a invariância da razão e ressaltando a predominância do raciocínio aditivo. Essa repetição coesa de padrões cognitivos em atividades distintas sublinha a necessidade de estratégias pedagógicas diferenciadas para consolidar a aprendizagem significativa em todos os níveis de desenvolvimento conceitual.

Em continuidade ao processo de diferenciação progressiva, retomou-se a

análise do declive por meio da comparação entre retas de mesma razão. Os estudantes construíram:

- $r_1$ , passando por A(0,0) e B(4,2);
- $r_2$ , passando por C(0,1) e D(4,3).

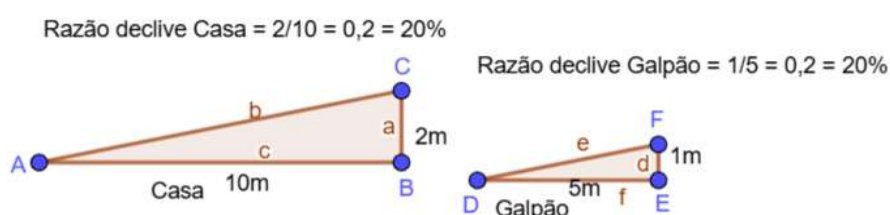
Ambas apresentavam razão igual a  $\frac{1}{2}$ . A visualização das duas retas motivou questões como: “As razões  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{(3-1)}{(4-0)}$  são equivalentes?” “Por que retas com a mesma razão mantêm a mesma inclinação?”

Essa análise conjunta permitiu que os estudantes estabelecessem conexões conceituais entre números, formas e direções, em consonância com os mecanismos descritos por Ausubel (1968) para a diferenciação progressiva. Nesse estágio, começaram a reconhecer que razões equivalentes representam proporcionalidade e que retas com o mesmo declive são paralelas, articulando conceitos de Álgebra e Geometria de forma integrada.

Ao final das explorações, a professora promoveu uma síntese integradora, articulando os novos significados aos conhecimentos prévios. As perguntas orientadoras foram: “O que significa, graficamente, um declive positivo ou negativo?” “Por que retas com o mesmo declive nunca se cruzam?” “O que representa, geometricamente, o valor numérico da razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ?” Estas questões favoreceram a reorganização dos conhecimentos prévios, permitindo que os conceitos de razão, proporção, declive e paralelismo fossem estruturados em uma rede cognitiva mais estável e coerente. Essa etapa exemplifica o processo de reconciliação integrativa, central na teoria de Ausubel (2003), em que diferentes conceitos passam a ser compreendidos como parte de uma mesma estrutura conceitual.

Em seguida, representaram as situações no GeoGebra e calcularam o declive real, comparando-o ao modelo matemático. A Figura 05 apresenta um dos registros produzidos pelos estudantes durante essa etapa, evidenciando a coleta das medidas reais no espaço físico e sua posterior modelagem no ambiente digital.

Figura 05 – Comparação da inclinação do telhado; Atividade construída por E05



Autor: Arquivo da pesquisa

Com o intuito de promover a transferência significativa do conhecimento (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980), os estudantes realizaram uma atividade de campo, escolhendo rampas ou caminhos da escola para medir distâncias e alturas aproximadas.

Essa etapa reforçou a compreensão do declive como razão entre variações e como elemento presente em fenômenos reais, integrando teoria e prática de forma semelhante ao que já havia sido estruturado na Atividade 01.

A avaliação formativa valorizou a participação nas discussões, as construções realizadas no GeoGebra, os registros individuais e a capacidade de interpretar o declive em situações reais. Mais do que aferir resultados, buscou-se compreender o nível de significado atribuído ao novo conhecimento, verificando indícios de aprendizagem significativa. Nesse contexto, o GeoGebra funcionou como mediador cognitivo e representacional, fortalecendo o vínculo entre diferentes registros matemáticos, conforme defendem Moreno e Alves (2020) ao destacar o papel da geometria dinâmica na construção de significados.

A atividade “Razão na Malha” mostrou-se eficaz para promover a aprendizagem significativa do conceito de declive, pois articulou a exploração visual, o cálculo da razão entre variações e a interpretação geométrica da inclinação. Em coerência com os pressupostos da TAS, os estudantes reorganizaram suas ideias-âncora sobre proporcionalidade e comparação entre grandezas, compreendendo o declive não como um número isolado, mas como uma relação invariável entre deslocamentos.

Assim, a integração entre diferentes registros e o uso do GeoGebra contribuiu para uma aprendizagem relacional, permitindo que o conceito emergisse de forma profunda, contextualizada e coerente com o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

### **ATIVIDADE 3: Razão de Divisão de Segmento e Ponto Médio**

A atividade proposta na Atividade 3 foi elaborada para investigar como os estudantes constroem e atribuem significado ao conceito de razão de divisão de um segmento na proporção  $m:n$ , tendo o GeoGebra como mediador do processo de aprendizagem. O ambiente digital foi utilizado de maneira planejada, permitindo aos

estudantes visualizar, manipular e analisar dinamicamente a relação entre as grandezas envolvidas, compreendendo como a variação dos parâmetros  $m$  e  $n$  determina a posição do ponto  $P$  no segmento  $\overline{AB}$ . Nesse processo, diferentes registros (algébricos, geométricos e numéricos) foram articulados de forma integrada, em consonância com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1968). A proposta enfatizou a razão  $m:n$  como operador que define a localização de  $P$ , destacando que dividir um segmento em partes proporcionais não se resume a uma operação numérica, mas envolve a compreensão de relações entre grandezas e a coordenação de múltiplas representações matemáticas. Essa integração foi potencializada pela natureza dinâmica do GeoGebra, que, conforme argumenta Penteado (2011), promove visualização, experimentação e construção ativa dos conceitos matemáticos, ampliando a compreensão conceitual por meio da interação com objetos digitais manipuláveis.

A fundamentação teórica da atividade ancora-se na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1968), segundo a qual o aprendizado é mais efetivo quando o novo conteúdo se relaciona, de forma substantiva e não arbitrária, a conhecimentos prévios relevantes da estrutura cognitiva do estudante. Para que isso ocorra, é indispensável a existência de subsunçores, isto é, conceitos anteriores capazes de servir como âncora para o novo saber (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980).

Nesse contexto, a atividade foi planejada com base em três dimensões ausubelianas articuladas: 1. Subsunçores, representados pelos conceitos prévios de proporção, fração e ponto médio, necessários para compreender a razão de divisão de um segmento; 2. Diferenciação progressiva, desenvolvida à medida que os estudantes ampliaram sua compreensão da razão  $m:n$ , deixando de vê-la apenas como uma comparação numérica para reconhecê-la como relação geométrica no segmento; e 3. Reconciliação integrativa, evidenciada na habilidade de estabelecer conexões entre as representações algébricas (*fração*) e geométricas (*posição espacial*), consolidando uma compreensão unificada e funcional da divisão proporcional.

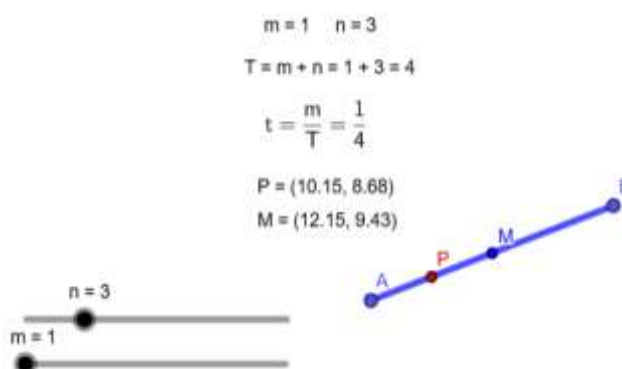
Nesse processo, o GeoGebra funcionou como mediador, auxiliando na reorganização cognitiva dos conceitos matemáticos e favorecendo uma aprendizagem não apenas procedimental, mas conceitual. Como discutem Moreira (2011) e Borba & Penteado (2015), ambientes digitais como o GeoGebra permitem que o estudante construa significados *em ação*, por meio de experimentação,

manipulação e observação de regularidades.

Os estudantes foram convidados a refletir sobre o significado da expressão “*dividir um segmento em  $m:n$* ”, respondendo a questões orientadoras que tinham a função de tornar explícitos os subsunçores necessários para a nova aprendizagem. Perguntas como “*O que significa dividir um segmento em partes proporcionais?*”, “*Quando dizemos que um ponto divide  $\overline{AB}$  na razão  $m:n$ , o que estamos comparando?*” e “*Como interpretar a fração  $\frac{m}{m+n}$  em relação ao comprimento total?*” ajudaram a ativar conhecimentos prévios relacionados às noções de fração, proporção, divisão e ponto médio. Essa etapa foi decisiva para orientar cognitivamente os estudantes, oferecendo uma base conceitual a partir da qual o novo conteúdo pudesse ser incorporado de modo substantivo.

Após essa preparação, a atividade avançou para o ambiente digital do GeoGebra, em que os estudantes construíram o segmento  $\overline{AB}$ , inseriram os parâmetros  $m$  e  $n$  e observaram dinamicamente o deslocamento do ponto P conforme os valores eram modificados. A simultaneidade entre representações algébrica (razão  $m:n$ ), numérica  $\frac{m}{m+n}$  e geométrica (localização de P no segmento) constituiu o elemento central para promover a reconciliação integrativa (Ausubel, 1968), permitindo aos estudantes perceberem que diferentes registros descrevem um mesmo conceito. A atividade desenvolvida pelo estudante E11 é apresentado na Figura 06, representando a construção digital com o segmento  $\overline{AB}$ , os controles deslizantes de  $m$  e  $n$  e o ponto P que se reposiciona conforme a razão é alterada. A imagem expressa visualmente a coordenação entre grandezas, ilustrando como a tecnologia apoia a investigação e a reorganização cognitiva, aspecto essencial para a aprendizagem significativa.

Figura 06 – Construção digital do segmento AB com controles deslizantes de  $m$  e  $n$ ; Atividade construída por E11



Autor: Arquivo da pesquisa

Durante a exploração, os estudantes observaram que aumentar o valor de  $m$  aproxima o ponto  $P$  de  $B$ , enquanto aumentar  $n$  desloca  $P$  em direção a  $A$ . Esse comportamento visível no ambiente gráfico favoreceu o entendimento de que a razão  $m:n$  opera como um comparador de grandezas, traduzindo relações multiplicativas. O diálogo com os estudantes evidenciou diferentes níveis de compreensão. Uma fala como a de E11 — “*entendi que  $P$  fica a  $m$  partes de  $B$  e  $n$  partes de  $A$ , então o total é  $m + n$* ” — indica uma clara articulação entre a ideia de parte-todo e o comportamento geométrico do ponto. Já manifestações como a de E05 — “*se  $m$  aumenta,  $P$  vai para o lado de  $B$ , mas não sei bem por quê*” — revelam uma compreensão em formação, ainda dependente da observação empírica. Em contrapartida, falas como a de E02 — “*eu só mexo até o ponto parar, mas não sei o que significa isso*” — evidenciam ausência de coordenação entre registros, caracterizando aprendizagem mecânica.

Na etapa seguinte, buscou-se aprofundar a diferenciação progressiva, introduzindo casos particulares como o ponto médio ( $m = n$ ) e situações em que  $m$  e  $n$  assumiam valores não inteiros. A análise das respostas mostrou como cada estudante reorganizou seu sistema de significados. E11 reconheceu que o caso  $m = n$  representa a fração  $1/2$  do segmento total, justificando por que o ponto  $P$  coincide com o ponto médio. E05 conseguiu identificar o ponto médio, mas sem relacionar diretamente à proporção 1:1. Já E02 não conseguiu estabelecer ligação entre o caso particular e a estrutura geral da razão, tratando cada situação como independente das demais.

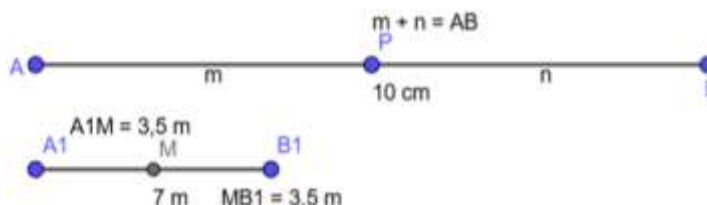
Com o intuito de promover a transferência significativa do conhecimento, os estudantes realizaram uma atividade de exploração geométrica, representando segmentos de reta e suas subdivisões. Em pequenos grupos, construíram situações em que pontos intermediários dividem o segmento  $\overline{AB}$  em partes proporcionais, registrando medidas como  $m$ ,  $n$  e o ponto médio  $M$ .

Após a construção, utilizaram o GeoGebra para representar digitalmente os segmentos e verificar relações fundamentais, como a soma  $m + n = \overline{AB}$  e a igualdade das partes no caso do ponto médio.

Essa etapa reforçou a compreensão da adição e da razão entre segmentos como formas de relacionar grandezas distintas, promovendo o entendimento do conceito não apenas em sua forma numérica, mas também em sua manifestação visual e espacial.

A Figura 07 ilustra os registros dessas medidas, destacando o momento de interação entre representação gráfica e conceito matemático, evidenciando o vínculo entre experiência concreta e construção conceitual.

Figura 07 – Representação dos registros as medidas coletadas na atividade de campo; Atividade construída por E09



Autor: Arquivos da pesquisa

A última etapa envolveu atividades de aplicação, nas quais os estudantes deveriam determinar a razão  $m:n$  a partir da posição conhecida do ponto, ou vice-versa. Esse momento foi fundamental para observar a capacidade de transferir conhecimento, elemento-chave da aprendizagem significativa. E11 mostrou autonomia e flexibilidade cognitiva, resolvendo situações novas e articulando justificativas. E05 apresentou raciocínio correto em casos simples, mas encontrou dificuldades em inverter a lógica do problema. E02 permaneceu dependente da reprodução de procedimentos, sem evidências de compreensão conceitual.

O conjunto das observações permitiu identificar três perfis distintos de aprendizagem:

- E11 — Aprendizagem significativa consolidada: estabeleceu conexões profundas, integrou registros, compreendeu a ideia de razão multiplicativa e transferiu o conhecimento para novas situações.

- E05 — Aprendizagem significativa parcial: apresentou avanços, mas dependentes de mediação e exemplos concretos, com dificuldades para generalizar e articular representações.

- E02 — Aprendizagem mecânica ou inicial: executou procedimentos, mas sem construir significados, revelando ausência de subsunçores consolidados.

De modo geral, a atividade corroborou o princípio ausbeliano de que *“o fator mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o estudante já sabe”*. A observação dos desempenhos individuais permitiu à professora identificar os níveis de organização cognitiva presentes na turma e adequar intervenções pedagógicas específicas para cada perfil. A inserção do GeoGebra como ambiente mediador favoreceu o desenvolvimento de significados, especialmente ao possibilitar a

interação simultânea entre diferentes representações, contribuindo para uma compreensão mais profunda da razão de divisão de segmentos e para a aproximação entre Álgebra e Geometria em um sistema integrado de conhecimento.

#### **ATIVIDADE 4: Proporção e Fator de Escala**

A Atividade 4 teve como finalidade analisar como os estudantes constroem e organizam o conceito de fator de escala  $k$  enquanto razão multiplicativa que define a proporção na ampliação ou redução de figuras, preservando sua semelhança, explorando de modo articulado os registros geométrico, numérico e algébrico no ambiente dinâmico do GeoGebra. A atividade foi estruturada com base nos princípios da TAS de Ausubel (1968), cujo fundamento central estabelece que novos conhecimentos só podem ser adquiridos de maneira substantiva quando encontram ancoragem em subsunçores relevantes já presentes na estrutura cognitiva do aluno. No desenvolvimento desta atividade, os conhecimentos prévios acionados pelos estudantes envolveram noções já consolidadas de multiplicação, proporcionalidade, área e perímetro, articuladas às experiências concretas que possuem com representações espaciais. Essas vivências incluem a leitura de plantas baixas, mapas e desenhos de ambientes familiares, como a escola e a horta comunitária, que funcionaram como ponto de partida para a construção de novos significados. A mobilização desses elementos permitiu que os estudantes estabelecessem relações não arbitrárias entre os conceitos matemáticos e situações reais, favorecendo a ancoragem dos conteúdos em subsunçores relevantes e a emergência de aprendizagens significativas, conforme defendido por Ausubel (1968).

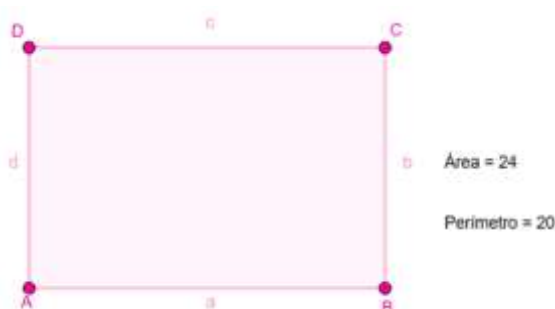
A atividade teve início com a construção de um polígono retangular (P1) no ambiente dinâmico do GeoGebra, no qual as medidas de área e perímetro foram calculadas e atualizadas em tempo real conforme a manipulação dos vértices.

Do ponto de vista didático-pedagógico, essa etapa foi concebida com o objetivo de mobilizar e diagnosticar conhecimentos prévios dos estudantes, especialmente no que se refere à distinção entre grandezas lineares e quadráticas. Observa-se, com frequência, que os estudantes recorrem a procedimentos operatórios semelhantes para o cálculo de área e perímetro, revelando uma compreensão ainda incipiente acerca das especificidades conceituais de cada grandeza. Nesse sentido, a proposta

buscou promover a problematização dessas ideias intuitivas, favorecendo a construção de significados mais consistentes por meio da visualização dinâmica e da experimentação.

Além disso, o uso do GeoGebra potencializou a percepção das relações entre as variações das dimensões do retângulo e seus efeitos diferenciados sobre o perímetro e a área, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento matemático investigativo. Tal abordagem está alinhada a uma perspectiva construtivista da aprendizagem, na qual o estudante assume um papel ativo na produção do conhecimento, mediado por ferramentas tecnológicas que ampliam as possibilidades de exploração e compreensão dos conceitos envolvidos. A Figura 08 ilustra o polígono inicial elaborado pelos estudantes, evidenciando o uso de recursos tecnológicos como suporte à exploração matemática.

Figura 08 – Polígono inicial para exploração de área e perímetro; Atividade construída por E04



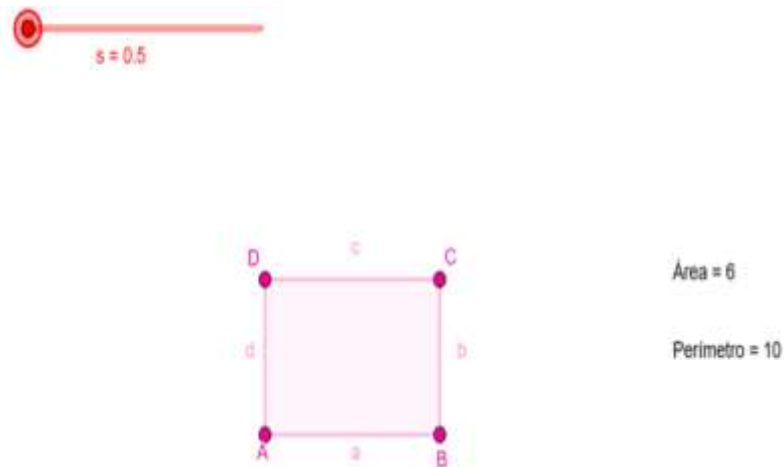
Autor: Arquivos da pesquisa

Essa etapa inicial cumpre o papel de organizador prévio (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980), pois fornece as bases conceituais necessárias para compreender posteriormente o efeito multiplicativo do fator de escala

Em seguida, introduziu-se o controle deslizante correspondente ao fator de escala ( $s$ ), permitindo que os estudantes variassem continuamente entre reduções ( $s < 1$ ) e ampliações ( $s > 1$ ). O ponto  $O = (0,0)$  foi definido como centro da homotetia.

A Figura 09 apresenta o cenário inicial formado pelo polígono  $P1$ , o centro de homotetia e o seletor dinâmico de escala. Esse recurso visou promover não apenas a compreensão operacional da homotetia, mas também a explicitação do papel da multiplicação como operador geométrico, o subsunçor fundamental para compreender que o fator de escala é, essencialmente, uma razão multiplicativa aplicada simultaneamente a todas as dimensões da figura.

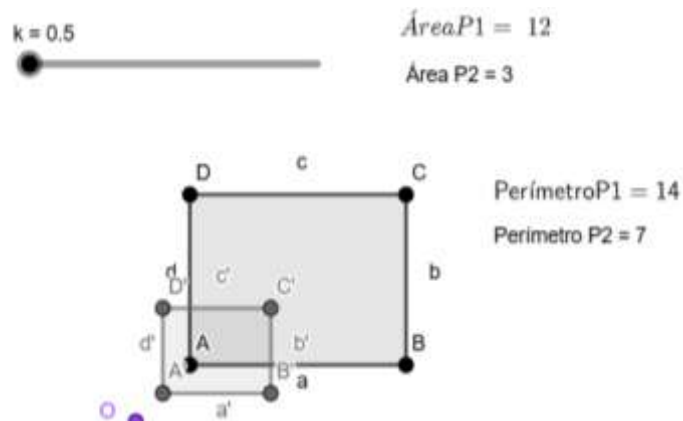
Figura 09 – Cenário Inicial da Exploração da Homotetia: Polígono Original, Medidas e Seletor de Escala  $s$ ; Atividade construída por E07



Autor: Arquivos da pesquisa

Com a aplicação da homotetia, o polígono  $P2$  emergiu como imagem de  $P1$  sob o fator  $s$ . Os estudantes então calcularam dinamicamente a área e o perímetro de  $P2$ , observando como esses valores variavam à medida que o seletor era manipulado. A Figura 10 ilustra o par de polígonos  $P1$  e  $P2$  em diferentes valores de  $k$ . Esta etapa configurou claramente um processo de diferenciação progressiva (Moreira, 2011), pois a exploração simultânea de perímetro e área permitiu que os estudantes percebessem que as grandezas lineares variam proporcionalmente a (*Razão  $P = k$* ), ao passo que as grandezas bidimensionais variam proporcionalmente a (*Razão  $A = k^2$* ). A mobilização desses elementos permitiu que os estudantes estabelecessem relações não arbitrárias entre os conceitos matemáticos e situações reais, favorecendo a ancoragem dos conteúdos em subsunçores relevantes e a emergência de aprendizagens significativas, conforme defendido por Ausubel (1968).

Figura 10 – Comparação de Polígonos sob Homotetia: Relação entre Medidas Lineares ( $k$ ) e Medidas de Área ( $k^2$ ); Atividade construída por E11



Autor: Arquivos da pesquisa

A exploração dessas razões, que constituiu o cerne da diferenciação progressiva, foi instigada pela comparação do efeito de  $k$  sobre o perímetro e a área. As respostas dos estudantes novamente revelaram distintos níveis de assimilação conceitual. E12 demonstrou uma compreensão completa da dimensão do conhecimento, ao distinguir que o perímetro é uma medida linear (proporcional a  $k$ ) e a área, quadrática (proporcional a  $k^2$ ). Em contraste, E03 mostrou uma apropriação apenas parcial, utilizando a regra correta  $k^2$ , mas com dificuldade em integrar a base conceitual da dimensão do espaço, o que sugere uma integração insuficiente dos subsunçores disponíveis. Já E08 apresentou ausência de ancoragem significativa ao confundir a lógica linear com a quadrática, indicando a inexistência de subsunçores adequados sobre o conceito de escala e área.

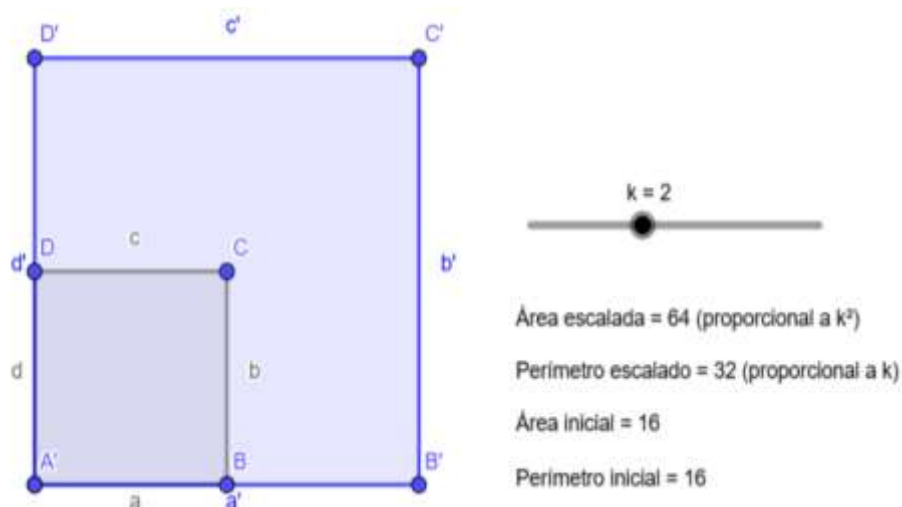
E12, ao manipular o controle deslizante, verbalizou com clareza relações como *“quando o  $k$  dobra, a Razão  $P$  dobra junto, porque o perímetro é uma linha; mas a Razão  $A$  quadruplica, porque a área é ele vezes ele mesmo ( $k^2$ )”*. Se a área vai para 4, o  $k$  é 2. Esse tipo de fala evidencia que a aprendizagem significativa estava ocorrendo, pois o estudante interpreta subsunçores prévios à luz de novas relações, integrando-as de forma não arbitrária, indicando que havia percebido empiricamente o papel da dimensão geométrica (1D para perímetro, 2D para área). Já E03, inicialmente interpretou o aumento da área como *“crescimento exagerado”* ou *“rápido demais”*, indicando que ainda não possuía subsunçores suficientemente diferenciados para compreender a proporcionalidade quadrática, ou que não conseguiu acessar adequadamente esses subsunçores naquele momento. *“Se o  $k$  é 2, o perímetro é 2, e a área tem que ser 4, eu vejo os números, mas não sei explicar por que a área não segue o  $k$  direto.”* Embora manipulasse e utilizasse a regra correta ( $k^2$ ), o estudante apresentou integração insuficiente da base conceitual (dimensão do espaço), o que Ausubel classificaria como aprendizagem potencialmente mecânica, pois a regra não estava ligada a um significado geométrico profundo.

A etapa de reconciliação integrativa ocorreu quando os estudantes foram instigados a relacionar os resultados obtidos a situações reais, como a leitura de plantas, mapas, croquis de terrenos ou representações da horta escolar. Nessa etapa, eles responderam questões como: *“Se um mapa é reduzido com  $k = 0,01$ , por que a área não sofre a mesma redução linear, mas sim  $k^2$ ?”* Essas discussões aprofundaram a compreensão do conceito, pois os estudantes passaram a perceber que o fator de escala não é apenas um número, mas um operador estrutural que transforma figuras

preservando sua forma, porém alterando suas grandezas em diferentes ordens dimensionais. Ao questionar a razão de redução de área em um mapa com escala 1:500, serviu como um teste de transferência de conhecimento e diferenciação progressiva, exigindo que o estudante mobilizasse a relação  $\frac{1}{k^2}$  e não  $\frac{1}{k}$ . As posturas dos estudantes impactaram diretamente o aprendizado: o engajamento investigativo e a autonomia de E12 contrastaram com o engajamento moderado e a dependência de E03 e E08, respectivamente, reforçando que a predisposição para aprender é fundamental para o sucesso da diferenciação e da assimilação conceitual. O GeoGebra, neste contexto, atuou como mediador que facilitou a articulação dinâmica dos registros e a construção de um conhecimento estruturalmente coerente.

A Figura 11 mostra a manipulação e discussão guiada, após os estudantes reorganizaram suas concepções, especialmente quando compararam numericamente os valores obtidos no GeoGebra com o cálculo explícito de  $(k^2)$ .

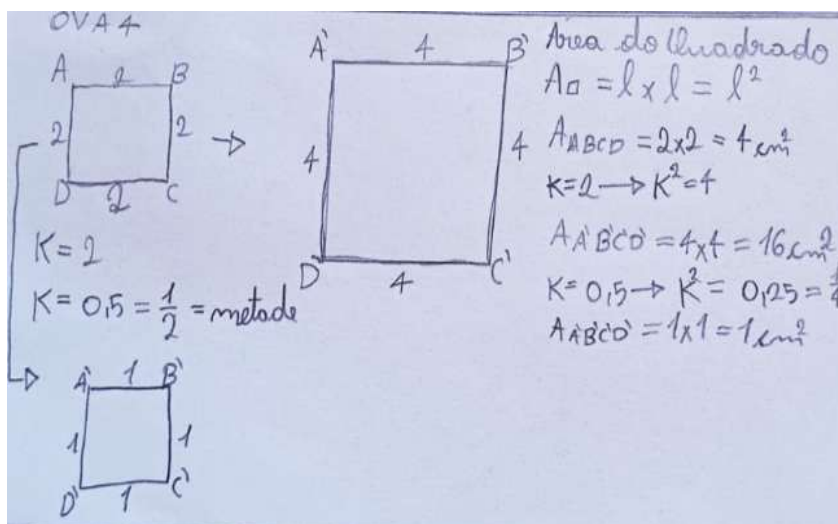
Figura 11 – Efeito do fator de escala  $k$  na área e no perímetro; Atividade construída por E08



Autor: Arquivos da pesquisa

Ao final, a avaliação prática consistiu em criar um novo polígono ( $P_{ABCD}$ ) e determinar qual fator ( $k$ ) seria necessário para produzir ( $P_{A'B'C'D'}$ ) com área quatro vezes maior. Os estudantes que reconheceram imediatamente que  $(k = 2)$  mostraram domínio conceitual, pois haviam internalizado a relação  $k^2 = \frac{\text{Área de } P_{A'B'C'D'}}{\text{Área de } P_{ABCD}}$ . Essa tarefa pode ser vista na Figura 12 que sintetizou os objetivos ausubelianos da aula, pois articulou subsunçores prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

Figura 12 – Fator escala (k) na área de polígonos



Autor: Arquivos da pesquisa

### ATIVIDADE 5: Proporcionalidade em Triângulos

O projeto pedagógico delineado na atividade 5 teve como finalidade conduzir estudantes do 9.º ano a uma compreensão rigorosa e conceitualmente integrada da proporcionalidade em triângulos, tomando como fundamentos a TAS, de Ausubel (1968; 2003), e as abordagens investigativas no ensino de Matemática discutidas por Fiorentini e Lorenzato (2007). A premissa estruturante consistiu no entendimento de que a aprendizagem de relações proporcionais, sobretudo quando mediada por configurações triangulares e segmentos paralelos, requer a ativação de subsunçores previamente formados na estrutura cognitiva dos estudantes, particularmente, os conceitos de paralelismo, correspondência angular e propriedades de feixes de retas paralelas cortadas por transversais.

De acordo com Ausubel (1968; 2003) e as interpretações contemporâneas sistematizadas por Moreira (2017), o desenho das tarefas buscou promover dois movimentos essenciais: a diferenciação progressiva, mediante a qual noções já familiares ao estudante são refinadas e ampliadas; e a reconciliação integradora, responsável por articular conceitos antes percebidos de modo fragmentado, elevando-os a um patamar mais abstrato e relacional. Assim, cada atividade foi concebida para estabelecer conexões explícitas entre o conhecimento prévio e novas representações, oferecendo condições para que os estudantes formassem generalizações sobre proporcionalidade em figuras semelhantes.

O alinhamento com documentos orientadores do currículo, como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN, 1998) e a BNCC (2018), orientou a incorporação de situações contextualizadas e a diversidade de registros de representação, compreendendo que a competência matemática, no Ensino Fundamental, envolve mobilizar propriedades geométricas para interpretar e resolver problemas do cotidiano. A abordagem sugerida por esses documentos reforça que a compreensão profunda de relações proporcionais deve articular visualização geométrica, argumentação lógica e validação empírica, elementos que se mostraram centrais no desenvolvimento desta atividade.

O uso de softwares de geometria dinâmica, conforme discutido por Laborde (2005) e Hohenwarter (2008), potencializou a exploração de configurações triangulares por meio de manipulações que preservam o paralelismo e permitem observar invariantes estruturais, como a razão entre segmentos homólogos. A interação dinâmica não substituiu o raciocínio matemático; antes, funcionou como um ambiente que favorece o ensaio, a formulação de hipóteses e a verificação de regularidades, aspectos amplamente consonantes com perspectivas investigativas no ensino.

Ao longo da implementação, os estudantes foram instigados a formular explicações sobre as relações identificadas, justificando-as à luz de propriedades geométricas. Em diversos momentos, comentários espontâneos revelaram a apropriação gradual das ideias-chave. Durante a exploração inicial, o estudante E05 observou: *“Quando o ponto se move, esses dois ângulos continuam iguais; por isso o triângulo fica sempre ‘do mesmo tipo’.*” Em outra etapa, enquanto analisavam razões entre segmentos, o estudante E02 comentou: *“Mesmo quando mudo o tamanho do triângulo maior, a divisão dos pedacinhos fica na mesma proporção.”* Tais falas evidenciaram que os estudantes passaram a reconhecer a proporcionalidade não apenas como um cálculo numérico, mas como uma relação que se mantém invariável sob diversas transformações.

Dessa forma, a Atividade 5 foi estruturada para integrar teoria, prática e tecnologia em uma perspectiva coerente com os princípios da AS e com as demandas atuais do ensino de Matemática. A articulação entre fundamentação teórica sólida, recursos digitais e atividades investigativas contribuiu para a construção de um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes puderam observar, conjecturar,

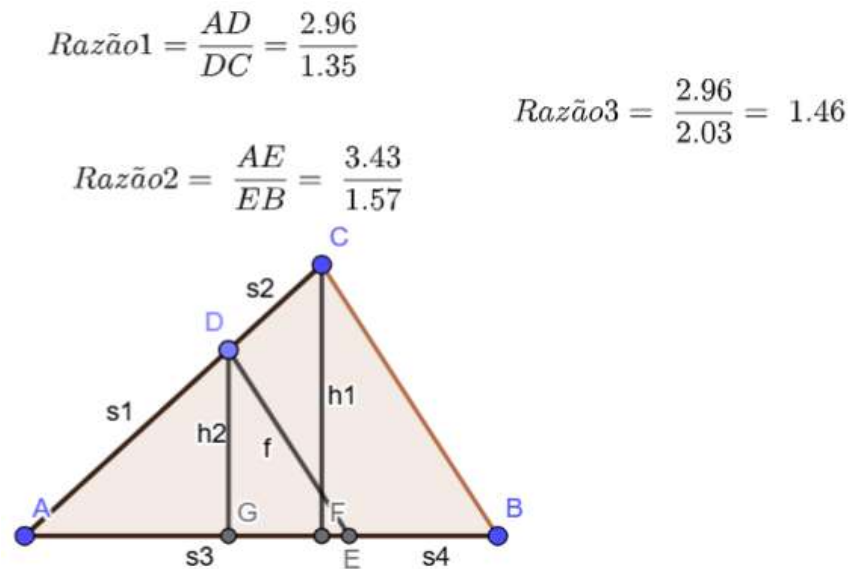


semelhança e proporcionalidade, indicando que o estudante já ativou subsunçores relativos à preservação de forma sob transformações proporcionais. E09, em tom mais hesitante, afirmou: *“Eu vejo que as razões permanecem iguais o tempo todo, mas não sei exatamente por que isso ocorre. Dá até a impressão de ser uma espécie de ‘truque’, até compreender como os ângulos e o paralelismo influenciam nisso.”* Tal enunciado sinaliza a presença de observação empírica acompanhada de lacuna explicativa, padrão que requer mediação para deslocar a compreensão do nível empírico para o conceitual. E08, cuja participação foi inicialmente mais procedimental, declarou: *“Eu só segui os passos no GeoGebra; só quando a professora pediu pra pensar é que comecei a ligar o que vejo com o que sei.”* Este fragmento revela a transição de um agir técnico para um esforço interpretativo, condição que a mediação docente visa favorecer.

A mediação proposta foi estruturada de modo a promover diferenciação progressiva: foram sistematicamente solicitadas comparações, conjecturas e generalizações. Por exemplo, instigou-se os estudantes a formular hipóteses sobre a razão entre segmentos quando a reta paralela se desloca mais próxima de A ou mais próxima de C; a discussão coletiva e a representação algébrica no GeoGebra serviram para que as hipóteses fossem testadas e, quando necessário, elaboradas. O papel do professor, apoiado por Moreira (2017) e por práticas investigativas sugeridas por Fiorentini & Lorenzato (2007), foi levantar questões que orientassem a passagem da observação para a justificativa teórica, como por exemplo, *“Que ângulos permanecem iguais quando traçamos paralelas?”*; *“Como a semelhança dos triângulos explica a igualdade das razões?”* e sintetizar as evidências em enunciados gerais. Nesse sentido, o GeoGebra atuou como recurso que permite a confluência de representações (geométrica, algébrica e numérica), criando o ambiente propício para a reconciliação integradora defendida por Ausubel.

A sequência didática culminou naturalmente na etapa de sistematização formal, momento em que os estudantes foram conduzidos a enunciar o Teorema de Tales e analisar sua aplicação em situações concretas, como a medição indireta da altura de uma árvore no pátio da escola. A Figura 14 ilustra essa etapa ao mostrar graficamente a construção geométrica que evidencia a proporcionalidade entre os triângulos formados pelas sombras. A representação destaca, visualmente, a relação entre paralelismo, invariância angular e conservação das razões métricas. Esse recurso funcionou como suporte conceitual, permitindo que os estudantes reconhecessem a

validade do teorema para além da manipulação algébrica, estabelecendo uma articulação entre a abstração geométrica e a situação observada no ambiente escolar. Figura 14 – Representação dinâmica da proporcionalidade em triângulos; Atividade construída pela autora



Fonte: Arquivos da pesquisa

Nesse processo, emergiram falas que revelaram diferentes níveis de compreensão do conceito. E01, ao relacionar o comportamento das razões com a semelhança dos triângulos, afirmou: *“Agora faz sentido: os ângulos iguais fazem os lados ficarem proporcionais, por isso a razão não muda.”* E09, após intervenção docente que retomou a congruência de ângulos correspondentes, produziu uma explicação parcial: *“Acho que é por causa dos ângulos iguais, eles forçam os lados a crescer na mesma proporção.”* E08, finalmente encaminhado por exemplos concretos e pela repetição guiada, articulou uma resposta em desenvolvimento: *“Se as retas são paralelas, os triângulos ficam parecidos; então a gente pode usar aquela conta das razões para medir sem subir na árvore.”* Tais enunciados ilustram a transição da observação para a explicação e, em termos ausubelianos, a emergência de reconciliação integradora quando o novo conteúdo reorganiza os subsunçores pré-existentes.

Sob a perspectiva das observações realizadas durante a atividade, percebeu-se que a capacidade dos estudantes de generalizar e aplicar a propriedade proporcional esteve estreitamente vinculada à maturidade cognitiva dos subsunçores previamente acionados e à qualidade da mediação docente. Aqueles que já apresentavam um entendimento mais consolidado sobre paralelismo e invariância

angular formularam explicações conceituais com maior rapidez e profundidade, enquanto outros demandaram intervenções que tornassem explícita a relação entre congruência de ângulos e semelhança de triângulos. Tais evidências se articulam às orientações pedagógicas apresentadas nos PCN (1998) e na BNCC (2018), que enfatizam a integração entre procedimentos, compreensão conceitual e contextualização como eixo estruturante do ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

A literatura que investiga o uso de ambientes de geometria dinâmica corrobora as observações desta intervenção: Laborde (2005) e Hohenwarter (2008) destacam que a construção e a manipulação de configurações dinâmicas permitem a emergência de conjecturas e a verificação sistemática de propriedades, ampliando o campo de ações investigativas dos estudantes. Moreira (2017) reforça que é por meio de atividades que exigem diferenciação progressiva e reconciliação integradora que aprendizagens duradouras e transferíveis se consolidam. Além disso, Fiorentini & Lorenzato (2007) ressaltam que práticas investigativas que articulam representação, argumentação e contextualização produzem maior engajamento e compreensão funcional, especialmente quando conectadas a problemas do universo do estudante, como se procedeu nesta sequência didática.

Em síntese, o desenvolvimento da atividade 5 com os estudantes sugere que, quando apoiado por uma mediação docente orientada e por recursos que promovem a visualização e a experimentação, o ensino do Teorema de Tales pode conduzir a processos efetivos de aprendizagem significativa: a ativação de subsunçores, a diferenciação progressiva por meio de investigação dinâmica e a reconciliação integradora que permite transferir o conhecimento a situações práticas. As falas dos estudantes, acima reproduzidas, ilustram trajetórias típicas de apropriação conceitual, da observação empírica à justificativa teórica, e reforçam a necessidade de continuidade didática para consolidar plenamente os novos esquemas cognitivos.

### **ATIVIDADE 6: Teorema de Tales em Triângulos (Feixe de Paralelas)**

A Atividade 6 teve como finalidade consolidar o percurso de AS iniciado nas atividades anteriores, conduzindo os estudantes à compreensão e à aplicação do Teorema de Tales em triângulos e em feixes de paralelas, sob a perspectiva da

proporcionalidade entre segmentos correspondentes. Essa atividade configurou-se como um momento decisivo do ciclo investigativo, pois demandou que os estudantes integrassem as noções de razão, proporção e semelhança, construídas de maneira gradual ao longo das atividades precedentes. Nesse sentido, a proposta buscou favorecer a compreensão da proporcionalidade entre segmentos determinados por feixes de paralelas, explorando, de forma progressiva e investigativa, as condições que fundamentam o teorema.

Essa construção conceitual foi planejada à luz da TAS (Ausubel, 1968; 2003), das atualizações interpretativas propostas por Moreira (2017) e das orientações curriculares presentes nos PCN (1998) e na BNCC (2018), que enfatizam a necessidade de articular exploração visual, argumentação e formalização gradual dos conceitos matemáticos.

A sequência iniciou-se com a retomada de ideias prévias relacionadas ao paralelismo, à congruência angular e à invariância das razões em triângulos semelhantes, elementos entendidos como subsunçores essenciais para a construção do conceito de proporcionalidade em feixes de paralelas. Conforme destaca Ausubel (2003), a AS depende da existência de estruturas cognitivas estáveis, capazes de receber e organizar novos significados. Assim, antes de avançar para a dedução do Teorema de Tales, foi fundamental assegurar que os estudantes reconhecessem relações angulares invariantes produzidas por transversais que interceptam paralelas.

Durante a exploração no GeoGebra, os estudantes manipularam configurações geométricas envolvendo um ponto móvel sobre uma transversal em um feixe de paralelas. Na construção inicial, criaram duas transversais em um conjunto de retas paralelas, o que resultou na formação de dois triângulos sobrepostos. Ao moverem os pontos da figura, observaram que tanto os ângulos correspondentes quanto as razões entre segmentos associados permaneciam constantes, o que lhes permitiu visualizar diretamente a noção de invariância, conceito fundamental para compreender proporcionalidade e semelhança.

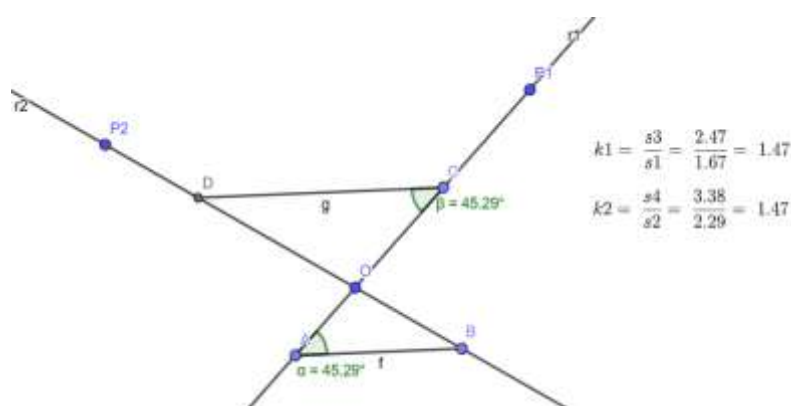
A mediação da professora foi essencial nesse processo, pois ela direcionou a atenção dos estudantes para o fato de que, independentemente do arrasto aplicado no GeoGebra, certos ângulos permanecem invariantes, convidando-os a explicar por que a preservação angular ocorre em configurações que envolvem paralelismo. Essa orientação favoreceu a articulação entre a observação empírica e a explicação conceitual, permitindo que os estudantes avançassem de uma percepção meramente

vivencial para uma compreensão relacional do problema matemático. Destaca-se assim que as interações tecnológicas não substituem o papel do professor. Conforme argumentam Rabardel e Bourmaud (2003), o software opera como mediador instrumental, ampliando possibilidades de ação e percepção; porém, a articulação conceitual depende fundamentalmente da intencionalidade docente. Assim, as invariâncias percebidas pelos estudantes foram continuamente problematizadas pela professora, que os instigou a formular hipóteses, justificar relações e explicitar as condições que sustentam a constância das razões e dos ângulos observados.

Em uma das discussões coletivas, após manipular o ponto móvel sobre a transversal, E02 verbalizou: *“Percebi que a divisão não muda, mesmo quando mexo bastante no ponto. Antes parecia coincidência, mas agora vejo que as linhas paralelas meio que ‘obrigam’ os triângulos a terem o mesmo formato”*. Essa fala, embora espontânea, evidencia um movimento relevante de generalização conceitual e aproxima-se do que Moreira (2017) descreve como emergência de significados substantivos, isto é, significados que se consolidam não apenas na execução da ação, mas na compreensão das relações internas que estruturam o conceito matemático em estudo.

A etapa seguinte consistiu na análise comparativa de duas configurações distintas, ambas formadas por transversais que interceptavam um mesmo feixe de retas paralelas. A professora orientou o grupo a identificar elementos comuns entre os pares de triângulos gerados nessas construções e a relacionar tais observações às propriedades de proporcionalidade que emergem do paralelismo. A Figura 15 apresenta a construção realizada pelo estudante E07, utilizada como referência para a discussão coletiva.

Figura 15 – Proporcionalidade em triângulo com feixe de paralelas; Atividade construída por E07



Autor: Arquivos da pesquisa

Durante o diálogo, o estudante E07 observou: “*Acho que eles são parecidos porque os ângulos permanecem iguais, não importa o tamanho. Se os ângulos são iguais, os lados têm que seguir a mesma proporção.*” Essa formulação evidencia um avanço conceitual importante, pois indica que os estudantes já mobilizam, de maneira autônoma, a articulação entre invariância angular e semelhança de triângulos, reconhecendo que a preservação dos ângulos implica a manutenção de relações proporcionais entre os lados.

Tal dinâmica encontra respaldo na literatura da Geometria Dinâmica. Laborde (2005) destaca que softwares como o GeoGebra permitem ao aluno acessar propriedades matemáticas por meio da percepção de regularidades produzidas pelo arrasto controlado, aproximando experimentação e argumentação. Hohenwarter (2008) reforça que esses ambientes oferecem condições propícias para a formulação de conjecturas sustentadas pela observação de invariâncias, fortalecendo um raciocínio investigativo e promovendo uma compreensão mais profunda das relações geométricas.

Do ponto de vista teórico, tal movimento expressa um processo de diferenciação progressiva (Ausubel, 1968), no qual os novos significados ampliam e especificam conceitos previamente existentes. A noção de “*triângulos parecidos*”, por exemplo, transformou-se, ao longo da discussão, em uma compreensão mais formalizada de semelhança e proporcionalidade. Essa evolução conceitual também converge com as recomendações dos PCN (1998) e da BNCC (2018), que defendem que a resolução de problemas envolvendo paralelismo e proporcionalidade deve ser orientada pela análise, pela justificativa e pela visualização, e não apenas pela aplicação mecânica de fórmulas.

Dando continuidade, a professora promoveu uma síntese integradora, conduzindo os estudantes a organizar as observações empíricas em uma formulação matemática generalizada. Em vez de apresentar diretamente o Teorema de Tales, ela orientou os grupos a enunciar, com suas próprias palavras, a relação observada entre os segmentos. Após debate, chegou-se a uma proposição consensual, posteriormente formalizada matematicamente.

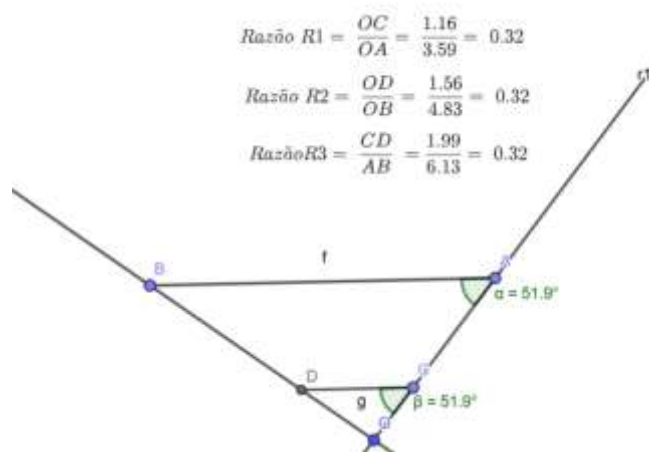
Na segunda fase, a aula evoluiu para a diferenciação progressiva, quando o foco cognitivo se deslocou da forma geométrica (semelhança) para as relações quantitativas (proporção).

Através dos comandos do GeoGebra, os estudantes calcularam as distâncias

entre os pontos das transversais e das paralelas, obtendo os comprimentos dos segmentos  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  e  $\overline{OD}$ . A seguir, foram orientados a calcular as razões correspondentes  $k_{r1} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$  e  $k_{r2} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$ , exibindo-as em tempo real na tela.

A Figura 16 apresenta a construção realizada pelo estudante E08 e evidencia o momento em que ocorreu a descoberta central da atividade. Ao movimentarem o ponto C, os estudantes perceberam que, embora os comprimentos dos segmentos variassem, os valores das razões entre lados correspondentes permaneciam invariantes. Essa percepção configurou uma experiência de desequilíbrio cognitivo produtivo, uma vez que confrontou a expectativa inicial, a suposição de que a alteração das medidas necessariamente modificaria as razões, e levou os estudantes a revisar suas hipóteses à luz da observação empírica. Esse processo de superação da intuição inicial, sustentado pela manipulação dinâmica da figura, favoreceu a construção de um entendimento mais estável e conceitualmente fundamentado sobre a proporcionalidade em feixes paralelos.

Figura 16 – Proporcionalidade entre segmentos em triângulo com ângulos congruentes; Atividade construída por E08



Autor: Arquivos da pesquisa

A mediação docente, nesse ponto, foi essencial para orientar a transição da observação empírica à elaboração conceitual. A professora instigou a turma ao questionar: “Se os ângulos dos triângulos são congruentes, o que podemos afirmar sobre a razão entre seus lados correspondentes?” A partir desse convite à reflexão, emergiu uma resposta coletiva que sintetizou o entendimento construído: “Então... se os ângulos não mudam, quer dizer que os triângulos são parecidos, né? Aí os lados têm que manter a mesma proporção, mesmo que aumentem ou diminuam.”

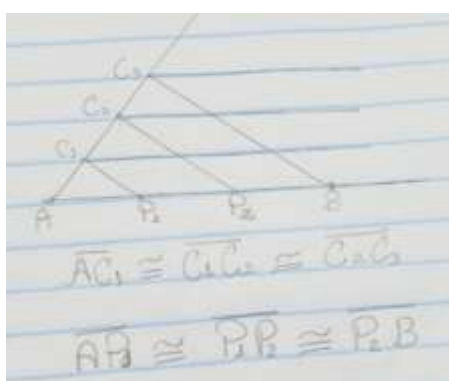
Essa verbalização, articulada diretamente à invariância observada durante as manipulações no GeoGebra, evidenciou a integração entre percepção visual e raciocínio matemático, consolidando a compreensão de que a proporcionalidade decorre da semelhança triangular e não apenas de relações numéricas isoladas.

Do ponto de vista ausubeliano, essa fase representou a expansão hierárquica do subsunçor, caracterizando uma aprendizagem que reorganiza e amplia estruturas cognitivas anteriores, promovendo o que Ausubel define como diferenciação progressiva, isto é, a incorporação de conceitos subordinados sob o domínio de um conceito mais geral (neste caso, a proporcionalidade como lei derivada do paralelismo e da semelhança).

A etapa final foi dedicada à reconciliação integrativa, momento em que os conceitos trabalhados ao longo da sequência foram articulados e aplicados em uma situação de caráter mais amplo. Para isso, a professora orientou os estudantes a realizarem uma representação geométrica manual, solicitando que desenhassem três retas paralelas interceptadas por duas transversais e identificassem os segmentos correspondentes formados por essas interseções.

A Figura 17 ilustra um dos registros produzidos pelos estudantes durante essa etapa, evidenciando a representação manual das paralelas, das transversais e dos pares de segmentos que fundamentam a relação proporcional investigada.

Figura 17 – Construção manual dos segmentos correspondentes em um feixe de paralelas



Autor: Arquivos da pesquisa

Nesse exercício de sistematização, os estudantes transcreveram a relação formal

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}},$$

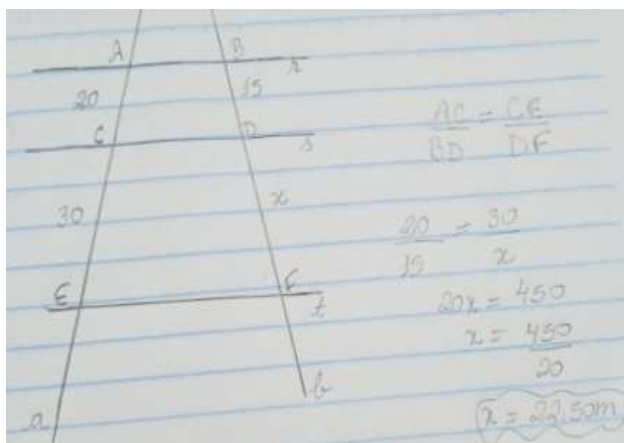
reconhecendo o Teorema de Tales como uma generalização dos resultados empíricos construídos nas etapas prévias, especialmente durante as manipulações dinâmicas

no GeoGebra. Tal formalização não surgiu como um enunciado externo imposto, mas como síntese natural das invariâncias anteriormente observadas, configurando exatamente o que Ausubel (1968; 2003) descreve como reorganização substantiva da estrutura cognitiva.

Em seguida, apresentou-se uma situação contextualizada envolvendo a divisão proporcional de lotes rurais, na qual os estudantes deveriam aplicar o teorema para calcular a frente de um terreno. A resolução coletiva da proporção  $\frac{20}{15} = \frac{30}{y}$  e o cálculo  $y = 22,5\text{m}$  ilustraram a transferência funcional do conceito matemático para um problema real, confirmando que o aprendizado ultrapassara o nível mecânico.

Durante a tarefa final, a divisão manual de um segmento em partes iguais, os estudantes mostraram autonomia na aplicação do Teorema de Tales como ferramenta construtiva, utilizando régua e esquadro para dividir graficamente um segmento em quatro partes iguais. A Figura 18 mostra a construção realizada pelo E02. O sucesso coletivo na verificação da igualdade das medidas confirmou que a compreensão do teorema havia se consolidado em um nível operacional e significativo.

Figura 18 – Aplicação da proporcionalidade em transversais paralelas



Autor: Arquivos da pesquisa

A análise final do desempenho sugere que os estudantes atingiram o nível de reconciliação integrativa, ao reconhecerem que a proporcionalidade geométrica observada dinamicamente é a expressão formal do Teorema de Tales, e que sua validade se estende a diferentes contextos, tanto matemáticos quanto práticos.

Essa atividade, portanto, não apenas consolidou os conhecimentos desenvolvidos nas etapas anteriores, mas representou a culminância da aprendizagem significativa, em que o estudante demonstra domínio conceitual, autonomia e capacidade de aplicar o saber matemático em situações reais, objetivo

maior do processo formativo sustentado por Ausubel.

### **ATIVIDADE 7: Construção do Feixe de Paralelas**

A proposição da Atividade 7 teve como foco a construção rigorosa de um feixe de paralelas no GeoGebra, tomado como elemento estruturante para a compreensão da proporcionalidade subjacente ao Teorema de Tales. A atividade foi delineada a partir dos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968; 2003), na releitura de Moreira (2017), contemplando processos de ativação de subsunçores, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Além disso, ancorou-se nas orientações dos PCN (1998) e da BNCC (2018), que enfatizam a articulação entre procedimentos, conceitos e argumentação no ensino de Matemática, bem como nas contribuições de Laborde (2005) e Hohenwarter (2008), que destacam os ambientes de geometria dinâmica como contextos propícios à investigação e à construção de significados matemáticos.

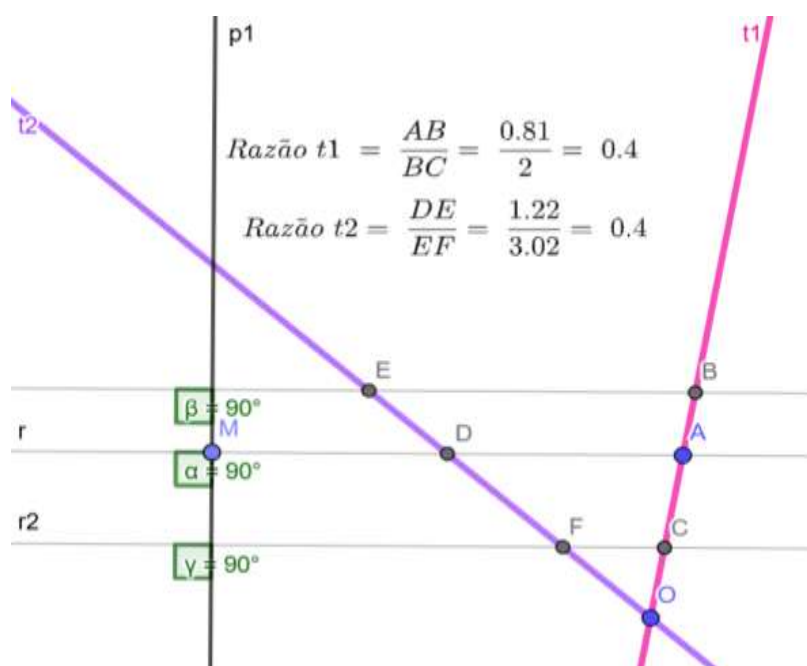
A professora iniciou a atividade convidando os estudantes a refletirem sobre a noção de paralelismo, perguntando: *“O que garante, geometricamente, que duas retas são paralelas? Como podemos ter certeza, e não apenas confiar na aparência?”* A discussão inicial revelou concepções intuitivas. Alguns estudantes afirmaram: *“Paralelas são linhas que nunca se encontram”*; outros disseram: *“É só olhar que dá pra ver.”* Essas falas evidenciaram a presença de subsunçores cotidianos ainda insuficientes para sustentar a compreensão das relações proporcionais dependentes do rigor geométrico. Atendendo às indicações de Ausubel sobre a necessidade de organizar significados prévios, a professora introduziu o primeiro passo: a construção de um feixe de paralelas por meio de uma reta base e de múltiplas perpendiculares, possibilitando que o paralelismo fosse garantido por definição, e não por aparência.

Durante a construção no GeoGebra, o chamado *teste de colisão*, deslocar a reta base para verificar se haveria interseção, serviu como organizador prévio expositivo, permitindo aos estudantes perceberem a estabilidade estrutural do paralelismo. O estudante E 03 comentou: *“Quando eu mexo na reta, elas continuam sem encostar. Agora entendi que é porque todas formam 90° com a mesma linha.”* O E07 complementou: *“Se uma delas não tiver esse 90°, já não é paralela de verdade.”* Tais falas, ainda que espontâneas, mostram o início da diferenciação progressiva,

quando os estudantes começam a distinguir a aparência do paralelismo de sua fundamentação geométrica.

A etapa seguinte aprofundou a exploração da equidistância entre as paralelas e o comportamento das transversais. A professora questionou: “Se estas retas são paralelas por definição, o que acontece com a distância entre elas? E se inserirmos uma transversal, que propriedades vocês observam nos ângulos e nos segmentos?” Nesse momento, os estudantes avançaram para a construção representada na Figura 19, que ilustra o feixe de paralelas rigorosamente estabelecido no GeoGebra, acompanhado das transversais  $t_1$  e  $t_2$  e dos pontos de interseção que formam os segmentos analisados. A figura evidencia a organização geométrica necessária para observar a estabilidade das razões e a dependência dessa estabilidade em relação ao paralelismo.

Figura 19 – Proporcionalidade entre segmentos em transversais paralelas; Atividade construída pela autora



Fonte: Arquivos da pesquisa

Os estudantes criaram as transversais  $t_1$  e  $t_2$ , marcaram os pontos A, B, C, D, E e F e passaram a investigar o comportamento dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$  e  $\overline{EF}$ . Ao manipular a inclinação das transversais, observaram que as razões  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  e  $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$  permaneciam constantes, mesmo quando variava a inclinação das transversais. As falas mostraram crescente maturidade conceitual: o estudante E01 observou: “Eu deixei a transversal bem inclinada, mas a divisão continua igual. É como se o paralelismo segurasse tudo no lugar.” O estudante E12 acrescentou: “Os ângulos

*também não mudam. Acho que é isso que faz os triângulos ficarem sempre com o mesmo formato.*” As observações se alinham ao que Laborde (2005) descreve como consciência da invariância produzida pelo arraste, fator central para a construção de conjecturas nos ambientes de geometria dinâmica.

Para aprofundar a compreensão, a professora inseriu intencionalmente uma “quase-paralela”, provocando a ruptura do rigor geométrico. As razões, antes estáveis, passaram a divergir. Surgiu então um debate significativo. O estudante E09 comentou: *“Agora mudou. Não tem mais a mesma proporção. Então não é só mexer na figura: tem que ser paralela certinha.”* O estudante E06 completou: *“Aqui dá pra ver que, se não tiver o 90° igual, a conta já não funciona.”* Esses momentos caracterizam o que Moreira (2017) chama de conflito produtivo, uma perturbação cognitiva que exige reorganização do pensamento e favorece a emergência de novos significados substantivos.

Seguindo o que orientam PCN e BNCC sobre a articulação entre experimentação e conceitualização, a professora conduziu o grupo para uma formalização progressiva. Questionou: *“Se os ângulos entre os triângulos permanecem congruentes, o que isso implica sobre os lados correspondentes?”* Após breve discussão, o estudante E05 sintetizou: *“Se os ângulos são iguais, os lados têm que ter a mesma proporção. Senão não seria o mesmo tipo de triângulo.”* O estudante E10 acrescentou: *“Acho que é por isso que Tales funciona: porque o paralelismo garante que os triângulos sejam parecidos.”* Essa fala aproxima-se diretamente das concepções clássicas de semelhança, reafirmando que a proporcionalidade não é ponto de partida, mas consequência estrutural.

A etapa final dedicou-se à reconciliação integrativa. Os estudantes realizaram construções manuais com régua e esquadro, reforçando que a validade da proporcionalidade não depende do ambiente digital, mas da estrutura geométrica que sustenta o conceito. Ao transcreverem a relação

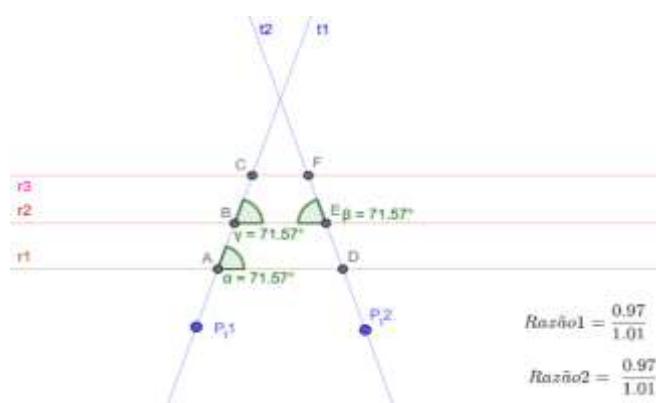
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}},$$

os estudantes reconheceram que a regularidade observada empiricamente poderia ser formalizada como um caso particular do Teorema de Tales. Esse movimento evidencia a passagem de uma percepção experimental para uma compreensão mais sistematizada do conceito matemático.

Nesse contexto, destaca-se a síntese elaborada pelo estudante E10 ao final da atividade: “Agora entendi que Tales não começa pela conta, começa pelo paralelismo. A proporção é só a consequência.” Tal afirmação revela uma compreensão conceitual mais aprofundada, ao identificar o paralelismo como condição fundamental para a validade das relações proporcionais.

A Figura 20 ilustra a construção desenvolvida pelo estudante E10, evidenciando o percurso de aprendizagem e a consolidação do conceito abordado.

Figura 20 – Exploração Dinâmica do Teorema de Tales; Atividade construída por E10



Autor: Arquivos da pesquisa

Essa compreensão sintetiza o princípio de Ausubel: novos conhecimentos são significativamente aprendidos quando se ancoram em subsunçores claros e organizados, e quando as relações internas entre conceitos tornam-se explícitas para o aprendiz. A Atividade 7, ao integrar manipulação dinâmica, discussão conceitual e formalização progressiva, favoreceu exatamente esse tipo de aprendizagem.

### ATIVIDADE 8: Medição e Verificação do Teorema de Tales

A etapa referente à Atividade 8 – Medição e Verificação do Teorema de Tales foi desenvolvida como continuidade direta do trabalho conceitual da Atividade 7, no qual os estudantes haviam consolidado o entendimento do paralelismo como condição estrutural para a confiabilidade geométrica. Nesta nova etapa, o objetivo pedagógico consistiu em promover a verificação experimental e numérica da proporcionalidade característica do Teorema de Tales, articulando-a aos subsunçores previamente construídos e mobilizando a TAS (Ausubel, 2003; Moreira, 2011) como eixo analítico.

O planejamento da Atividade 8 foi elaborado segundo uma lógica de progressão alinhada à TAS, partindo da premissa de que a aprendizagem da

proporcionalidade somente adquire significado se estiver ancorada em uma compreensão consolidada do paralelismo, construída na atividade anterior. Ausubel afirma que “se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos” (Ausubel, 1968, p. vi). Com base nesse princípio, todo o desenho didático da Atividade 8 partiu explicitamente da ativação desse conhecimento prévio.

Assim, a aula teve início com a reconstrução rigorosa, no GeoGebra, de um feixe de três paralelas cortadas por duas transversais, um procedimento que favoreceu a reativação dos subsunçores e proporcionou aos estudantes a oportunidade de não apenas revisitar a técnica de construção, mas também revisitar o significado conceitual da invariância geométrica.

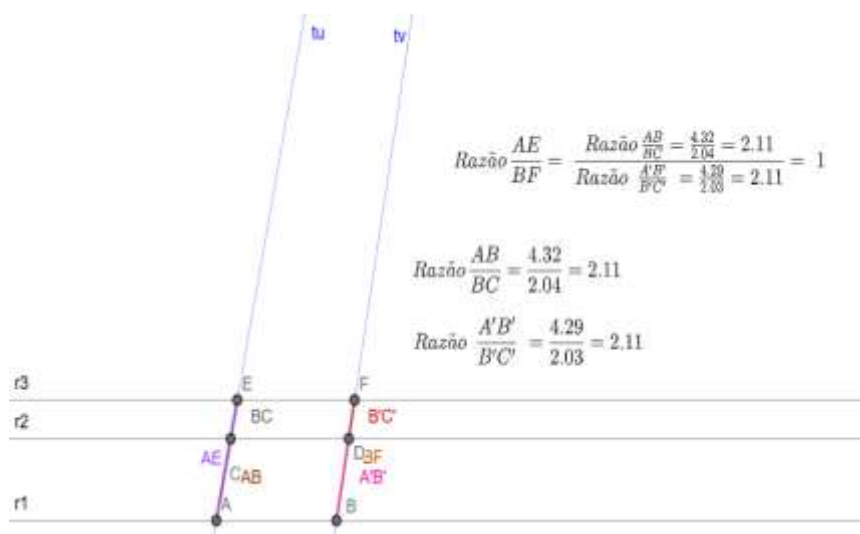
Durante a reconstrução do feixe, surgiram falas que evidenciam a consciência da necessidade de precisão e do papel estruturante do paralelismo. O estudante E04 comentou: *“Se a gente errar um pouquinho a inclinação, a proporção não funciona mais direito. Tem que ser paralelo mesmo, não só parecido”*. O estudante E03 acrescentou: *“Na atividade passada, quando a gente fez perpendicular à paralela, ficou perfeito. É isso que dá confiança, não é o olho, é a construção certa”*. Observações como essas mostram que os subsunçores estavam disponíveis cognitivamente, o que permitiu avançar para a fase exploratória. Ainda no ambiente digital, os estudantes nomearam os pontos A, B, C, D, E e F nas intersecções com as transversais  $t_1$  e  $t_2$ , compondo o cenário geométrico sobre o qual seria investigada a invariância das razões.

A fase seguinte consistiu na exploração ativa da proporcionalidade entre pares de segmentos homólogos. Os estudantes mediram os segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{DF}$  e passaram a comparar as razões obtidas, manipulando livremente as transversais. Esse momento revelou, como prevê Moreira (2011), a diferenciação progressiva, pois o novo conteúdo foi sendo refinado e percebido em sua estrutura. O estudante E08 observou: *“Eu arrastei a transversal para longe e os números mudaram tudo, mas a razão continua igual. Isso não é coincidência”*. Em outra interação, o estudante E08 ainda afirmou: *“Quando eu mexo em um ponto, aumenta de um lado e diminui do outro, mas a divisão continua igual. Acho que é isso que o Tales queria dizer”*. Tais falas sinalizam não apenas percepção empírica, mas elaboração conceitual, indicando que a proporcionalidade estava sendo interpretada como propriedade invariável do

sistema e não como mero resultado numérico.

A Figura 21 sintetiza visualmente essa etapa exploratória. Nela, os estudantes construíram duas transversais ( $t_1$  e  $t_2$ ) que interceptam um feixe de paralelas rigorosamente construído. Os pontos A, B e C pertencem à transversal  $t_1$ ; D, E e F pertencem à transversal  $t_2$ . Durante a manipulação, os alunos observavam que, mesmo modificando drasticamente a inclinação das transversais, as razões entre os segmentos permaneciam constantes. A centralidade da figura era frequentemente mencionada pelos próprios estudantes, que a tratavam como “*prova visual*” da invariância. E05 disse: “*Na figura dá para ver que é tudo parecido. Quando mexo, ela muda de tamanho, mas nunca muda de forma*”. Essa percepção está diretamente alinhada ao que Laborde (2005) descreve como consciência da invariância gerada pelo arraste, componente fundamental da conjectura e da construção do significado em ambientes de geometria dinâmica.

Figura 21 – Demonstração do Teorema de Tales em Ambiente Dinâmico: Invariância das Razões  $AB/BC$  e  $A'B'/B'C'$ ; Atividade construída por E05



Autor: Arquivos da pesquisa

A etapa final consistiu na formalização matemática da igualdade entre as razões homólogas e na resolução do “Problema da Cerca”, no qual era necessário aplicar o Teorema de Tales para estimar uma medida inacessível. Foi nesse momento que emergiram indicadores nítidos de reconciliação integrativa, no sentido ausubeliano: o conceito de proporcionalidade foi reorganizado dentro de uma estrutura cognitiva mais ampla, conectando paralelismo, triângulos semelhantes e medição indireta. As falas dos estudantes evidenciaram essa reorganização. E09 afirmou: “*Agora entendi por que funciona: não é fórmula, é porque as linhas são*”

*paralelas. A fórmula só aparece por causa disso*". E011 ainda acrescentou: *"No campo, a gente não precisa medir o x. A gente usa Tales porque sabe que o feixe é paralelo. Se não fosse, não serviria"*.

Tais reflexões revelam a compreensão de que a proporcionalidade não é um resultado acidental da figura, mas uma consequência estrutural do paralelismo, mostrando a internalização conceitual conforme descrita por Moreira (2011), quando afirma que a aprendizagem significativa ocorre ao integrar logicamente e psicologicamente novos conteúdos à estrutura cognitiva do aprendiz.

Do ponto de vista metodológico, a intervenção mostrou que o uso do GeoGebra favoreceu a articulação entre intuição, visualização e formalização matemática. A possibilidade de manipular o arranjo geométrico permitiu que os estudantes verificassem experimentalmente a invariância das razões, elemento essencial para a construção da certeza matemática. A visualização dinâmica, associada à discussão guiada pela professora, promoveu um ambiente em que a conjectura emergia espontaneamente do comportamento da figura, conforme descrito por Laborde (2005), reforçando o caráter investigativo da atividade.

Na análise dos dados, observou-se um padrão consistente: a maioria dos estudantes passou da percepção empírica da invariância para uma formulação conceitual ancorada no paralelismo, indicador robusto de aprendizagem significativa. Esse avanço foi reforçado por falas como: *"A proporção é o que não muda nunca, é a parte mais confiável da figura"*, ou ainda: *"Se  $\frac{AC}{CE}$  é igual a  $\frac{BD}{DF}$ , é porque o paralelismo segura tudo igual, não porque as medidas combinam"*. Assim, percebeu-se que a Atividade 8 cumpriu seu papel de consolidar, ampliar e integrar o conhecimento iniciado na atividade 7, estabelecendo condições para que o Teorema de Tales fosse compreendido em sua lógica interna e em sua aplicabilidade prática.

Conclui-se que a abordagem adotada, baseada na TAS e mediada por tecnologias de geometria dinâmica, potencializou a construção de significados matemáticos e favoreceu a migração do nível procedimental para o nível estrutural de compreensão. Os estudantes não apenas aprenderam a aplicar o Teorema de Tales, mas compreenderam *por que* ele funciona e *como* se relaciona ao paralelismo, alcançando um patamar conceitual compatível com os princípios ausubelianos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

### ATIVIDADE 9: Tales e o Ponto Médio

O desenvolvimento da Atividade 9 foi concebido como a etapa de fechamento da sequência voltada à compreensão da proporcionalidade em feixes de paralelas. O propósito central consistiu em evidenciar que o Teorema da Base Média do Triângulo não se configura como um conteúdo autônomo, mas resulta diretamente do Teorema de Tales quando a razão entre os segmentos homólogos assume o valor 1:1.

Formalmente, o Teorema da Base Média estabelece que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e possui medida igual à metade deste. Em um triângulo ABC, sendo D e E os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, o segmento DE é paralelo a BC ( $DE // BC$ ) e sua magnitude é expressa pela relação  $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$  (Adaptado de Dolce; Pompeo, 2013; Lima et al., 2006). Essa propriedade pode ser compreendida como um caso particular do Teorema de Tales, uma vez que decorre diretamente das relações de proporcionalidade determinadas por retas paralelas, configurando-se como resultado lógico da organização dedutiva da geometria euclidiana (Barbosa, 2012). Conforme assinala Eves (2004), a coerência interna desse sistema reside justamente na possibilidade de derivar novos resultados a partir de proposições anteriormente estabelecidas, conferindo consistência epistemológica às propriedades geométricas.

Conceitualmente, essa propriedade é compreendida como um caso particular do Teorema de Tales, uma vez que decorre da proporcionalidade entre segmentos determinados por retas paralelas: quando os segmentos homólogos estão na razão 1:1, o paralelismo resulta na relação métrica que expressa a metade do comprimento do lado correspondente.

A aula teve início com a retomada de elementos essenciais abordados nas atividades anteriores, em especial a construção do feixe de paralelas e a compreensão de que toda investigação proporcional está intrinsecamente condicionada à precisão geométrica dessa estrutura. Esse momento de retomada revelou-se fundamental para a ativação do subsunçor que sustentaria a nova aprendizagem, em consonância com Ausubel (2003), segundo o qual o conhecimento prévio atua como condição estruturante para a incorporação de novos significados.

Na sequência, os estudantes foram convidados a reconstruir o feixe de três paralelas cortadas por duas transversais, retomando a formalização anteriormente

apresentada e ilustrada na Figura 18, que explicita a organização espacial dos segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{DF}$ , bem como as relações proporcionais estabelecidas entre eles. Durante essa retomada, emergiram manifestações que evidenciam a consolidação conceitual, como a observação do E09: *“Se na Atividade 7 a gente não podia confiar no olho e tinha que fazer tudo bem perpendicular, aqui é igual. O Tales só funciona se a gente garantir que é paralelo mesmo.”*

Essa fala ratifica a internalização do rigor geométrico como premissa para a validade dos teoremas de proporcionalidade, permitindo que a base média fosse assimilada não como uma regra isolada, mas como uma consequência lógica do sistema geométrico previamente explorado.

Com o feixe reconstruído, a aula avançou para o núcleo investigativo. A professora lançou a questão que orientaria toda a exploração: *“Se um ponto B divide o segmento  $\overline{AC}$  em duas partes iguais, o que se espera que aconteça com o ponto correspondente B' sobre a segunda transversal?”* Os estudantes reagiram inicialmente com hipóteses intuitivas, baseadas em suas experiências da Atividade 8. O estudante E10 comentou: *“Se a razão sempre se repete, então deve repetir o um também.”* Essa antecipação sinaliza a passagem do nível empírico para um nível mais abstrato de compreensão, no qual a lei proporcional passa a ser percebida como estrutura e não como resultado acidental. Essa etapa contemplou a Figura 19, que registrava a manipulação das transversais, a marcação dos pontos e o comportamento das razões  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  e  $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ . Durante o arraste da figura no GeoGebra, os estudantes observaram que, por mais que deformassem o desenho, o ponto B' permanecia exatamente na metade do segmento correspondente. O estudante E01 verbalizou sua surpresa afirmando: *“Mexi tudo, deixei a transversal tortíssima, mas o B' não sai do meio. Parece colado ali.”* E06 acrescentou: *“Agora eu entendi por que isso acontece. É porque o paralelismo segura a proporção. Se aqui fica 1:1, lá também tem que ficar, não tem jeito.”*

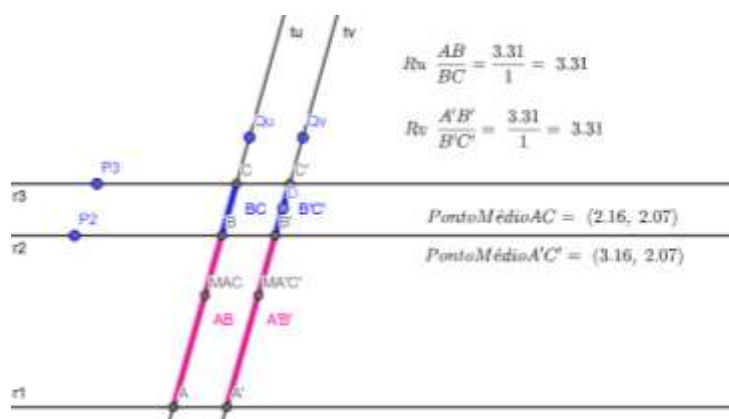
Essas observações confirmam o papel do arraste como recurso epistêmico, discutido por Laborde (2005), ao promover a tomada de consciência da invariância. A manipulação contínua permitiu que os estudantes percebessem o caráter estrutural da razão 1:1, não como uma imposição externa, mas como consequência lógica da geometria das paralelas. Essa construção progressiva do significado se alinha ao que Moreira (2011) denomina diferenciação progressiva, na qual o conceito geral (a

igualdade das razões em feixes paralelos) vai sendo desdobrado em casos específicos, cada vez mais refinados. A razão 1:1, antes percebida como um dado numérico, passou a ser compreendida como caso particular de uma regularidade mais ampla.

A formalização foi realizada de forma coletiva. A professora perguntou: “Se Tales garante que a razão entre os segmentos nas transversais é sempre igual, o que acontece quando essa razão é exatamente 1?” A resposta foi imediata: “Vira ponto médio!”, disseram vários estudantes simultaneamente. E02 continuou: “Então o Teorema da Base Média é só o Tales quando a razão é 1. Não precisa decorar nada. É só usar a lógica da figura.” Essa fala sintetiza o processo de reconciliação integrativa, conforme proposto por Ausubel (2003), no qual diferentes ideias antes tratadas de forma isolada passam a compor um sistema conceitual articulado. A compreensão deixa de se apoiar em memorização mecânica e passa a emergir do relacionamento orgânico entre conceitos.

A Figura 22 sintetiza uma das construções mais significativas produzidas pelos estudantes durante a investigação, evidenciando a relação de proporcionalidade entre segmentos determinados por transversais distintas que interceptam o mesmo feixe de paralelas. Nela, observam-se as transversais  $tu$  e  $tv$  incidindo sobre as retas paralelas  $r1$ ,  $r2$  e  $r3$ , formando os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$ . Os estudantes, ao manipular livremente os pontos móveis, constataram que as razões  $Ru = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  e  $Rv = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$  permaneceram invariáveis, mesmo quando alteravam a inclinação das transversais ou deslocavam os pontos  $Qu$  e  $Qv$ .

Figura 22 – Teorema de Tales: relação entre razões proporcionais e pontos médios em transversais paralelas, com manutenção da razão  $Ru = Rv$  independentemente da inclinação; Atividade construída por E07



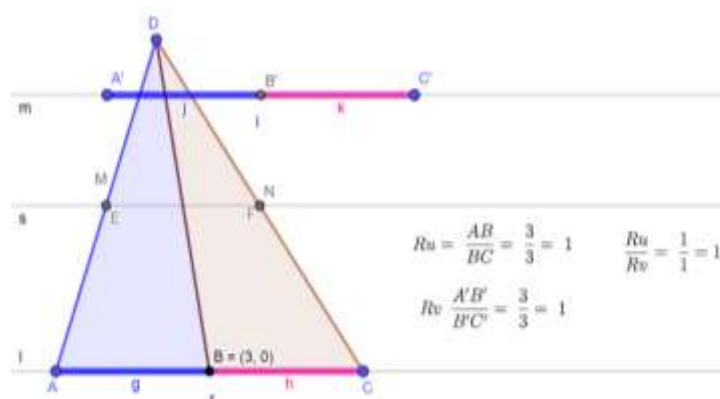
Autor: Arquivos da pesquisa

Em uma das falas registradas, o estudante E05 observou: “Mesmo quando puxamos a transversal para os lados, a divisão continua sempre a mesma. É como se as paralelas obrigassem os pedaços a seguirem a mesma regra.” E04 acrescentou: “Os triângulos mudam de tamanho, mas não de formato. Acho que é por isso que as contas ficam iguais.” A visualização simultânea dessa invariância, articulada ao movimento de arraste, reforçou aquilo que Laborde (2005) descreve como consciência das propriedades que permanecem estáveis sob transformação, elemento crucial para a formulação de conjecturas em ambientes de geometria dinâmica.

Desse modo, a Figura 22 não apenas ilustra o procedimento técnico, mas materializa a passagem dos estudantes da mera observação empírica à compreensão conceitual das razões proporcionais como consequência direta da semelhança entre os pares de triângulos formados.

A etapa final consistiu na aplicação prática por meio do chamado “Problema da Cerca”, no qual os estudantes eram desafiados a dividir um trecho de terreno em duas partes equivalentes utilizando apenas relações proporcionais estabelecidas no feixe de paralelas. A Figura 23 ilustra essa situação, representando a construção em que o ponto médio na transversal superior determina, por proporcionalidade, o ponto médio correspondente na transversal inferior, independentemente da inclinação ou da variação das distâncias absolutas.

Figura 23 – Teorema da Base Média como Caso Especial de Tales; Atividade construída por E03



Autor: Arquivo da pesquisa

Durante a discussão, os estudantes mostraram compreender que a solução não dependia de medir diretamente o comprimento da cerca, mas de reconhecer que a razão 1:1, quando estabelecida em uma das transversais, se propagava necessariamente para a outra devido ao paralelismo. Uma das estudantes sintetizou

o raciocínio afirmando: *“No campo a gente não consegue medir a altura do morrinho direto, então usa a transversal e a proporção. Se a gente fizer o ponto médio aqui na primeira linha, o outro aparece automaticamente na segunda porque o feixe é paralelo. É por isso que funciona.”* Essa justificativa mostra que o conhecimento havia se tornado funcional, no sentido proposto por Moreira (2011), uma vez que o procedimento deixará de ser um conjunto de passos isolados para se converter em ferramenta conceitual capaz de explicar e prever fenômenos geométricos.

O conjunto da atividade indica que a Atividade 9 consolidou um ciclo de aprendizagem sustentado pelos princípios da TAS. Os estudantes não apenas identificaram a proporcionalidade como propriedade geométrica, mas conseguiram articulá-la com o caso particular do ponto médio, justificando relações, prevendo resultados e aplicando a estrutura conceitual de Tales em situações variadas. A integração entre experimentação dinâmica, observação recorrente das invariâncias e formalização coletiva constituiu um ambiente propício para que o Teorema da Base Média fosse compreendido como derivação lógica da lei geral de Tales, evitando abordagens fragmentadas ou exclusivamente procedimentais. Assim, o capítulo evidencia que o uso de recursos digitais, quando associado a práticas investigativas e a uma mediação teoricamente fundamentada, contribui de forma decisiva para a construção de significados robustos e duradouros em geometria.

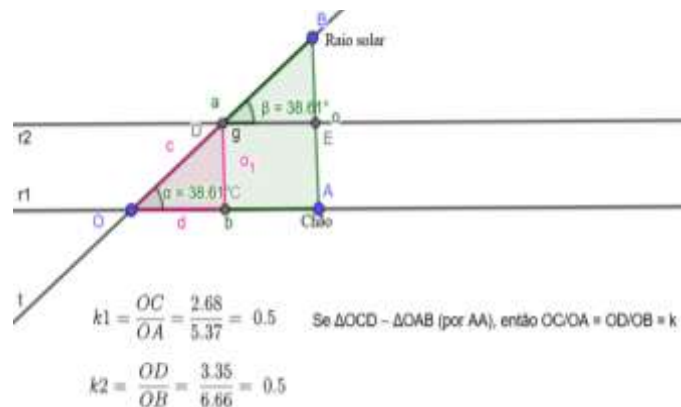
### **ATIVIDADE 10: Semelhança de Triângulos (via Tales)**

A atividade 10 configurou-se como uma sequência investigativa voltada à compreensão da semelhança de triângulos a partir da condição Ângulo-Ângulo (AA) e de sua articulação direta com a proporcionalidade expressa pelo Teorema de Tales. Toda a construção conceitual, metodológica e analítica foi fundamentada nos princípios da TAS de Ausubel (2003), que destaca a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa como eixos estruturadores do percurso cognitivo dos estudantes. O plano de aula foi cuidadosamente organizado para preservar a continuidade interna entre a ativação de conhecimentos prévios, a exploração dinâmica no GeoGebra e a formalização interpretativa, garantindo que cada etapa se conectasse de forma lógica e significativa. Como organizador prévio, foi apresentada a ideia de que *“a forma é definida pelos ângulos; o tamanho, pelos lados”*, chave

conceitual que permitiu distinguir o que permanece e o que varia na manipulação das figuras. A contextualização inicial partiu de situações típicas da realidade rural dos estudantes, como a medição indireta da altura de silos, árvores ou telhados, evidenciando que a geometria não se restringe ao ambiente escolar, mas estrutura práticas cotidianas. Essa aproximação com o contexto, como defende Freire (1996) e Moreira (2011), favorece a emergência de significados funcionais, pois ativa estruturas cognitivas prévias que podem receber e diferenciar novos conhecimentos. O estudante E08 sintetizou essa percepção ao afirmar: “*Lá na roça a gente não fica medindo tudo com fita. A gente olha a sombra, olha o alinhamento, vê se está tudo no mesmo sentido. A gente faz isso sem pensar que é matemática.*” E07 acrescentou: “*É como se fosse um costume nosso, a gente já sabe que dá certo, mas nunca tinha parado para pensar que isso é geometria.*”

A construção inicial no GeoGebra favoreceu a visualização das relações de paralelismo, criando o feixe de paralelas formado pelo raio solar e pela sombra projetada no solo. A Figura 24 apresenta a construção elaborada pelos estudantes no ambiente do GeoGebra, composta por dois triângulos distintos: um de maior dimensão, delimitado entre o ponto de base do objeto e a extremidade de sua sombra, e outro de menor escala, definido pela altura de um estudante.

Figura 24 – Semelhança de Triângulos via Tales; Atividade construída por E01



Autor: Arquivos da pesquisa

Essa representação inicial não apenas materializou a situação contextualizada, mas também favoreceu a emergência de raciocínios geométricos fundamentais. Logo nos primeiros instantes da aula, ao procederem à medição dos ângulos correspondentes, os estudantes reconstruíram o subsunçor central da atividade, reconhecendo que o paralelismo assegura a congruência angular. Esse movimento, caracterizado pela observação empírica e pela manipulação dinâmica da figura,

exemplifica o que Laborde (2005) descreve como o papel da visualização interativa na revelação de invariâncias, e confirma a perspectiva de Ausubel (2003) de que a aprendizagem significativa se consolida quando novos conceitos se ancoram em estruturas cognitivas prévias. Vários afirmaram espontaneamente que os ângulos eram iguais porque as linhas eram paralelas, mas o estudante E12 destacou: *“Se os raios do sol são paralelos, então os ângulos da ponta da sombra vão ser iguais nos dois triângulos. Isso é o que faz a forma continuar a mesma, só muda o tamanho.”* E10 completou: *“É como se fosse uma fotografia: você pode ampliar ou reduzir, mas a imagem continua igual.”* Essas observações revelam que a distinção entre forma e escala já emergia cognitivamente antes mesmo da formalização da condição AA, confirmando o papel da visualização dinâmica como mecanismo revelador de invariâncias, conforme Laborde (2005).

A prova da semelhança desenvolveu-se em etapas articuladas, cuidadosamente estruturadas para favorecer a construção progressiva do raciocínio geométrico. Em um primeiro momento, analisou-se o ângulo comum no vértice, cuja invariância se mantém independentemente da movimentação dos pontos da construção. Na sequência, os estudantes verificaram os ângulos correspondentes, compreendendo que o paralelismo assegura necessariamente a congruência angular. Esse processo gradual, sustentado pela manipulação dinâmica no GeoGebra, exemplifica o que Ausubel (2003) denomina diferenciação progressiva, na medida em que os alunos passam a distinguir com clareza os elementos invariantes da figura em contraste com aqueles que se modificam. Além disso, confirma o papel da visualização interativa destacado por Laborde (2005), segundo o qual o arraste de pontos em ambientes digitais permite revelar invariâncias estruturais e consolidar a compreensão conceitual. Por fim, a manipulação livre do ponto C ao longo do solo permitiu observar que as medidas angulares permaneciam invariantes enquanto os comprimentos variavam. Essa experiência empírica de invariância formal consolidou a diferenciação progressiva, como mostram falas dos estudantes E04 e E11: *“Quando eu puxo para trás, o triângulo fica enorme, mas os ângulos continuam do mesmo jeito. A única coisa que muda é o tamanho, não é a forma.”* E08 reforçou: *“É como se fosse a mesma figura, só que esticada ou encolhida.”* E07 acrescentou: *“Isso mostra que a forma não depende do tamanho, depende dos ângulos. Se os ângulos não mudam, a figura continua sendo a mesma.”*

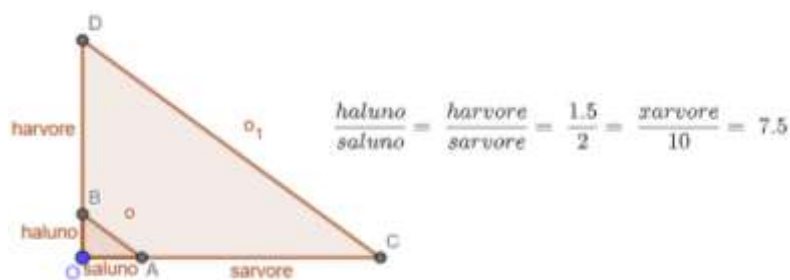
A partir da prova qualitativa por AA, a aula avançou para a articulação

quantitativa entre semelhança e proporcionalidade, estabelecendo a ponte entre leis angulares e métricas. Foram calculadas as razões entre os lados correspondentes, e os estudantes constataram que tais razões permaneceram praticamente constantes mesmo quando o ponto C se deslocava. A professora formalizou: *“Se os triângulos têm a mesma forma pelos ângulos, então suas medidas estão na mesma proporção.”* Essa conexão exemplifica a reconciliação integrativa descrita por Ausubel (2003), na medida em que dois conceitos aprendidos em momentos distintos passam a se relacionar em um sistema conceitual mais amplo. Diante da formalização da professora, os estudantes reagiram com comentários que evidenciam a apropriação progressiva do conceito. E02 afirmou: *“Quando a gente mexe no ponto, os lados aumentam ou diminuem, mas a conta continua igual. É como se a proporção fosse uma regra que não muda.”* E09 acrescentou: *“Se os ângulos seguram a forma, então os lados têm que seguir a mesma relação. Não tem como ser diferente.”* E07 sintetizou: *“A gente não está só fazendo cálculo, está entendendo que a forma manda na proporção. Se o triângulo pequeno tem uma razão, o grande vai repetir essa razão.”*

Essas falas revelam que os estudantes passaram a compreender a proporcionalidade não como coincidência numérica, mas como consequência lógica da semelhança de triângulos. A percepção de que a invariância angular garante a constância das razões entre os lados corresponde ao que Ausubel (2003) denomina reconciliação integrativa, momento em que conceitos previamente aprendidos, neste caso, a condição AA e a lei de Tales, se articulam em um sistema conceitual mais amplo e coerente.

A atividade prática abordou um problema de medição indireta no mundo real, utilizando a semelhança de triângulos para calcular a altura de uma árvore. Os detalhes dessa aplicação realizada pelos estudantes podem ser observados na Figura 25

Figura 25 – Semelhança de Triângulos na Medição da Altura da Árvore; Atividade construída por E09



Autor: Arquivos da pesquisa

O cenário envolveu um estudante de 1,50 m de altura que projetava uma sombra de 2 m, enquanto a árvore projetava uma sombra de 10 m. A relação estabelecida foi  $\frac{\text{haluno}}{\text{saluno}} = \frac{\text{hávore}}{\text{sárvore}} \Rightarrow \frac{1,5}{2} = \frac{x}{10}$ . A solução, obtida por meio do cálculo  $x_{\text{árvore}} = \frac{1,5 \cdot 10}{2}$ , indicou que a árvore possuía 7,5m de altura. A interpretação do resultado evidenciou que os estudantes compreenderam a proporcionalidade não como mera aplicação de uma fórmula, mas como consequência lógica da semelhança de triângulos. O estudante E05 sintetizou: *“A gente não está chutando a altura da árvore, a gente está usando a forma dos triângulos. Se o triângulo pequeno tem 1,5 pra 2, o grande vai ter a mesma relação.”* O estudante E10 complementou: *“É como se a matemática estivesse escondida na sombra. A gente só precisa descobrir a proporção e ela aparece sozinha.”*

Esse exercício mostrou a transferência do conceito explorado no ambiente digital para uma situação concreta do cotidiano rural, consolidando a aprendizagem significativa. O Teorema de Tales deixou de ser percebido como um procedimento isolado e passou a ser compreendido como princípio estrutural, capaz de explicar e resolver problemas práticos. A apropriação conceitual, sustentada pela manipulação dinâmica no GeoGebra e pela mediação docente, revelou-se duradoura e funcional, confirmando que a articulação entre contexto, visualização e formalização favorece a construção de significados estáveis e aplicáveis em diferentes situações.

Os resultados coletados ao longo da atividade mostram que os estudantes passaram a compreender a proporcionalidade não como simples cálculo, mas como consequência lógica da semelhança de triângulos produzida pelas paralelas. A observação da invariância angular durante o arraste foi decisiva para consolidar a noção de forma como elemento invariante. Expressões como *“é a forma que manda”*, *“os ângulos seguram tudo”* e *“se os ângulos são iguais, a razão tem que ser igual”* revelam que a articulação conceitual ocorreu de maneira profunda e significativa. A aplicação prática reforçou essa compreensão, ao propor que os estudantes transferissem o conhecimento do ambiente digital para uma situação rural concreta, típica de seu cotidiano. Essa transferência bem-sucedida manifesta a AS em sua forma mais elaborada, quando o sujeito é capaz de usar um princípio estrutural em situações novas, modificadas ou parcialmente desconhecidas.

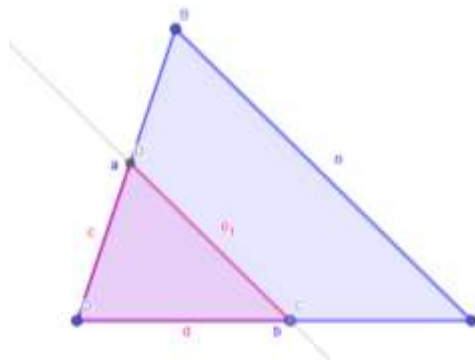
Assim, a Atividade 10 consolidou a semelhança como eixo articulador das propriedades geométricas estudadas nas atividades anteriores, oferecendo aos

estudantes uma compreensão unificada da relação entre paralelismo, congruência angular e proporcionalidade. O estudo evidencia que o uso do GeoGebra, associado à mediação intencional e fundamentado em uma perspectiva cognitivista, pode favorecer a construção de significados duradouros, coerentes e aplicáveis em diferentes contextos, promovendo o desenvolvimento do pensamento geométrico e a apropriação conceitual profunda dos princípios que regem a proporcionalidade em feixes de paralelas.

### **ATIVIDADE 11: Razão de Semelhança de Lados (k): Da Prova Geométrica à Escala**

A implementação da Atividade 11 configurou-se como um desdobramento estratégico no processo de consolidação cognitiva dos estudantes. Enquanto a Atividade 9 concentrou-se no estudo do caso particular da razão de semelhança igual a 1, associado à construção do ponto médio, e a Atividade 10 aprofundou a compreensão da semelhança de triângulos pelo critério AA, a Atividade 11 promoveu a ampliação conceitual para o caso geral, no qual a razão de semelhança assume valores distintos de 1. Essa transição do específico para o geral representa, sob a perspectiva da TAS de Ausubel (2003), um claro processo de diferenciação progressiva, no qual novos conceitos são incorporados à estrutura cognitiva dos estudantes a partir de subsunçores já existentes e estabilizados. Na Figura 26, observa-se a construção inicial dos triângulos semelhantes  $\triangle OAB$  e  $\triangle OCD$ , com a base  $\overline{CD}$  paralela à base  $\overline{AB}$ .

Figura 26 - Ativação de subsunçores: correlação visual e numérica entre segmentos correspondentes dos triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OCD$ ; Atividade construída por E10



Autor: Arquivos da pesquisa

Esta etapa priorizou a quantificação da semelhança, buscando transformar a

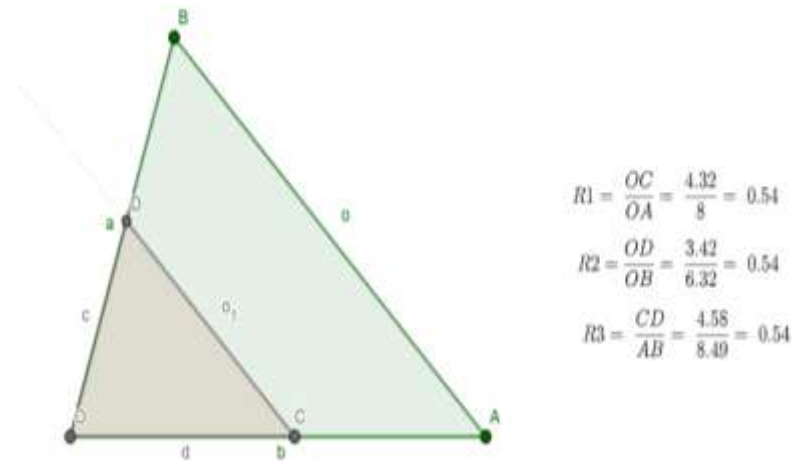
percepção visual em rigor matemático por meio de uma abordagem que fomentou a recuperação ativa dos conhecimentos estabelecidos nas atividades anteriores. Ao serem questionados sobre a correspondência de lados, os estudantes demonstraram segurança ao relacionar os segmentos homólogos, antecipando que a invariância numérica observada na aula do ponto médio deveria se manifestar de forma análoga nesta nova configuração, ainda que sob uma razão  $k \neq 1$ .

As falas registradas durante o processo de ativação desses subsunçores indicam que as ideias-âncora relacionadas à constância da razão já se encontravam consolidadas na estrutura cognitiva dos estudantes. Tal evidência pode ser observada nas manifestações dos estudantes E01, E07, E04 e E12, respectivamente: *“Esse lado aqui desempenha o mesmo papel que o outro, apenas em menor escala”*; *“Não é qualquer lado; deve ser aquele que corresponde ao mesmo vértice”*; *“É o par de lados que deve ser comparado”*; e *“Acho que vai dar outro valor para  $k$ , mas precisa permanecer igual em todos os lados”*. Essa prontidão em identificar que *“embora o valor de  $k$  fosse diferente de 1, ele deveria ser constante”* mostra que a base conceitual sobre a invariância da razão não era mais vista como um evento isolado, mas como uma lei geral da proporcionalidade geométrica.

Durante a fase de exploração no GeoGebra, os alunos foram instruídos a calcular as três razões correspondentes aos lados dos triângulos ( $R_1, R_2, R_3$ ). O momento de maior significância cognitiva ocorreu durante a manipulação dinâmica do ponto C. Ao mover o vértice e observar que os comprimentos dos lados se alteravam em tempo real, enquanto os resultados das divisões permaneciam rigorosamente idênticos, os estudantes vivenciaram o que a teoria define como aprendizagem substantiva. Um dos relatos mais significativos capturados foi a percepção de que *“o triângulo muda de tamanho, mas não muda de forma”*, associando o valor de  $k$  diretamente à preservação das propriedades geométricas. A Figura 27 sintetiza um dos momentos mais significativos da atividade: a exibição simultânea das três razões ( $R_1, R_2$  e  $R_3$ ), arredondadas para duas casas decimais. Ao comparar os valores, os estudantes reagiram com surpresa inicial, seguida de explicações cada vez mais elaboradas.

Entre as falas recorrentes, destacam-se: *“Mudou tudo, menos o resultado da conta”*; *“O triângulo cresce, mas cresce tudo junto”*; *“É como se fosse o mesmo desenho em outro tamanho”*.

Figura 27 – Comprovação da razão de semelhança ( $k$ ) entre triângulos semelhantes por meio da invariância das razões entre lados correspondentes ( $OC/OA$ ,  $OD/OB$  e  $CD/AB$ ), evidenciando a constância da razão de semelhança; Atividade construída pela autora



Fonte: Arquivos da pesquisa

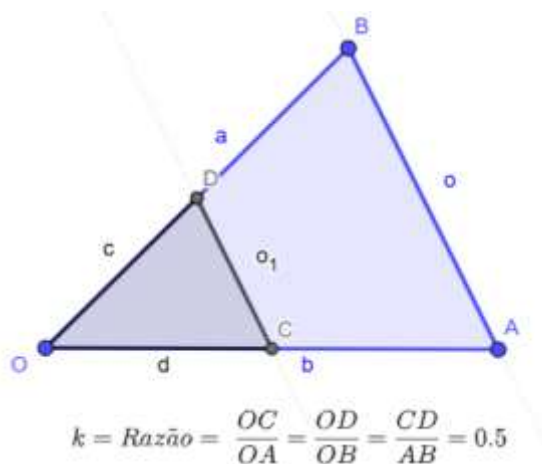
A consolidação da internalização do conceito evidenciou-se de forma particularmente expressiva no momento denominado “Desafio de Inversão”, etapa em que os estudantes foram instigados a assumir uma postura investigativa mais autônoma. Ao serem desafiados a posicionar o ponto C de modo que a razão de semelhança fosse exatamente  $k = 0,5$ , sem recorrer a instrumentos de medição direta do GeoGebra, os alunos precisaram abandonar a lógica habitual de verificação posterior e adotar um raciocínio inverso: partir de um valor numérico previamente estabelecido para determinar, intencionalmente, a configuração geométrica adequada. Esse movimento cognitivo revelou uma mudança qualitativa no modo como o conceito passou a ser compreendido, pois a razão deixou de ser apenas um resultado a ser calculado e passou a funcionar como um parâmetro que governa toda a construção.

Durante essa etapa, observou-se que alguns estudantes passaram a antecipar mentalmente os efeitos da razão de semelhança sobre os comprimentos dos segmentos, ajustando progressivamente a posição do ponto C até que a relação entre os lados correspondentes se estabilizasse em torno do valor desejado. As discussões em grupo indicaram que muitos já articulavam verbalmente ideias como “*metade do lado maior*” ou “*tudo precisa ficar proporcional*”, mostrando que o conceito de proporcionalidade havia sido incorporado ao seu vocabulário matemático. A afirmação de um dos grupos de que “*a razão  $k$  manda na construção*” sintetiza com clareza esse

avanço conceitual, ao reconhecer a razão de semelhança como o princípio organizador da figura, e não como um dado acessório.

Nesse momento da atividade, o Teorema de Tales deixou de ser percebido como uma regra isolada ou meramente algébrica e passou a ser compreendido como a expressão geral da proporcionalidade que rege todos os segmentos interceptados por retas paralelas. A Figura 28, manipulada pelo E02, mostra a integração entre a semelhança de triângulos e o Teorema de Tales ocorreu de forma natural, ancorada na experiência visual e manipulativa proporcionada pelo GeoGebra. Os estudantes reconheceram que a igualdade das razões  $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = k$  não dependia de medições pontuais, mas da estrutura geométrica construída, reforçando a ideia de invariância da razão de semelhança.

Figura 28 – Consolidação da Razão de Semelhança ( $k = 0,5$ ) e do Teorema de Tales no GeoGebra; Atividade construída por E02



Fonte: Arquivos da pesquisa

Em termos cognitivos, esse percurso revelou que a aprendizagem não se deu de maneira mecânica ou arbitrária. Ao contrário, a passagem da prova geométrica baseada na semelhança (AA) para a interpretação numérica da escala ocorreu de forma progressiva e integrada. Os estudantes demonstraram ser capazes de manipular a geometria a partir de parâmetros numéricos predefinidos, antecipando resultados e validando hipóteses por meio da construção, o que indica que o novo conhecimento foi incorporado a um sistema mais amplo de ideias previamente existentes. Dessa forma, o desenvolvimento da Atividade 11 confirmou que os conceitos de razão de semelhança, escala e Teorema de Tales foram assimilados de maneira relacional, atendendo aos pressupostos de uma aprendizagem verdadeiramente significativa, conforme proposto por Ausubel.

## ATIVIDADE 12: Construção e Nomenclatura do Triângulo Retângulo

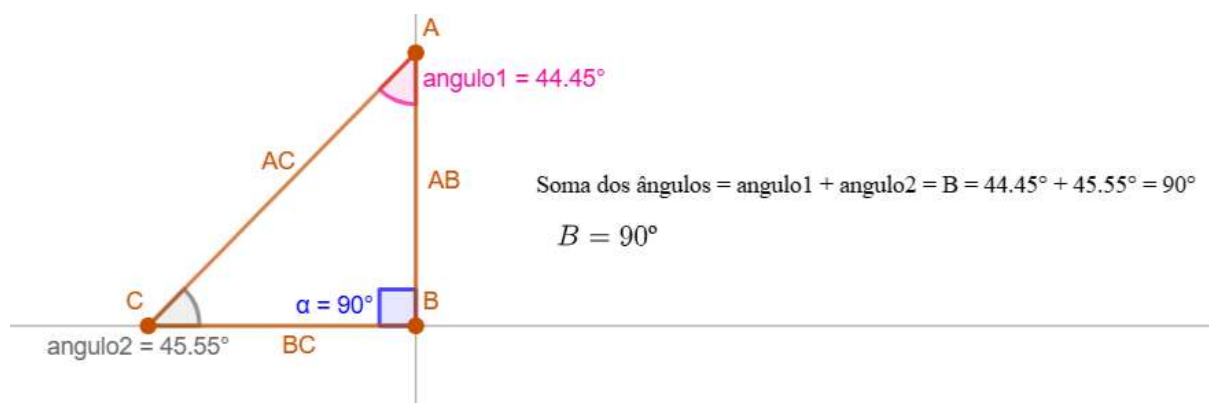
A aula correspondente à Atividade 12 – Construção e Nomenclatura do Triângulo Retângulo foi desenvolvida ao longo de dois encontros consecutivos e representou um ponto de inflexão no percurso didático, ao introduzir um regime de maior rigor conceitual na abordagem da Geometria. Esse momento da sequência dialoga diretamente com a TAS de David Ausubel, segundo a qual o fator isolado mais importante para o sucesso do ensino é aquilo que o aprendiz já conhece, pois é a partir desses conhecimentos prévios que novas ideias podem se ancorar de maneira não arbitrária e substantiva na estrutura cognitiva. Ao longo de todo o percurso pedagógico mediado pelo GeoGebra, observou-se que cada atividade atuou como um elo em uma hierarquia lógica de construção conceitual, preparando o terreno para níveis progressivamente mais elevados de compreensão. No estágio atual, centrado no triângulo retângulo e no rigor da perpendicularidade, tornou-se evidente a transição dos estudantes de um entendimento empírico para uma compreensão relacional, em que os conceitos deixaram de ser memorizados mecanicamente e passaram a funcionar como instrumentos de interpretação da realidade.

O início dessa etapa foi marcado pela ativação de ancoradouros práticos, utilizando o cotidiano rural como organizador prévio expositivo. A aula teve início com uma problematização sobre o uso do esquadro, do nível e do prumo em situações concretas de construção, como o alinhamento de cercas, a montagem de pilares e a fixação de vigas em galpões. Ao serem questionados sobre a função dessas ferramentas, os estudantes prontamente associaram sua utilização à garantia do ângulo reto, como se observa em falas como: *“A gente usa o esquadro para não deixar a cerca torta”* ou *“Lá em casa, meu pai confere com o nível antes de pregar a viga”*. Esse reconhecimento permitiu que o conceito de ângulo de  $90^\circ$  fosse internalizado não como uma convenção abstrata, mas como uma necessidade técnica concreta. Essa ponte cognitiva foi decisiva para a introdução formal do conceito de perpendicularidade, que passou a ser compreendido como a tradução geométrica do rigor já conhecido na prática.

Na sequência, os estudantes foram orientados a construir um ângulo reto no GeoGebra utilizando explicitamente a ferramenta *“Perpendicular”*. Esse momento, ilustrado na Figura 29, desenvolvida pelo E12, revelou-se fundamental para a

consolidação do subsunçor, pois evidenciou a invariância geométrica da perpendicularidade: independentemente da posição ou da escala da figura, o ângulo construído permanecia rigorosamente igual a  $90^\circ$ . Comentários como “*Se fizer no olho, sempre fica meio torto, mas com a ferramenta nunca erra*” e “*Mesmo mexendo o ponto, continua sendo 90 graus*” indicam que os estudantes compreenderam que a perpendicularidade é uma relação estrutural e não visual. A construção completa do triângulo retângulo no ambiente digital estabeleceu, assim, o objeto matemático central da aula, agora ancorado em um subsunçor sólido e funcional.

Figura 29 – Demonstração do ângulo reto pela soma de ângulos complementares em um triângulo; Atividade construída por E12



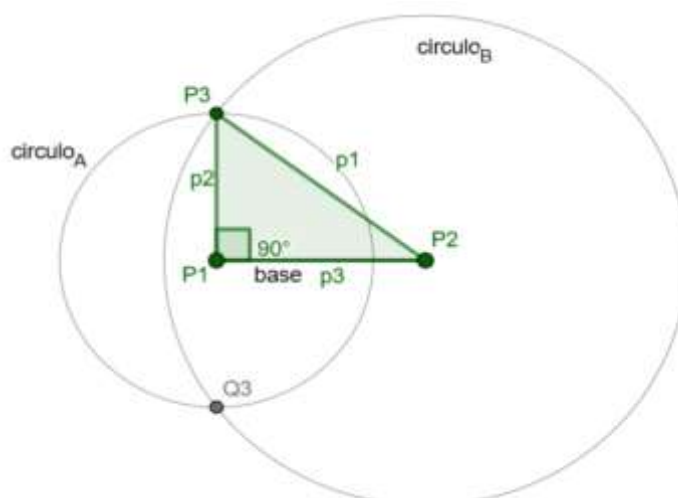
Autor: Arquivos da pesquisa

À medida que a atividade avançou, desenvolveu-se a fase de diferenciação progressiva, na qual a estrutura cognitiva dos estudantes foi sendo reorganizada para incorporar, de forma estável, a nomenclatura específica do triângulo retângulo.

Conforme postula Ausubel (2003), esse movimento ocorre quando novos conceitos passam a ancorar-se em subsunçores previamente existentes, adquirindo significado lógico e psicológico. Nesse sentido, os termos *cateto* e *hipotenusa* deixaram de ser tratados como rótulos meramente nominais e passaram a ser compreendidos a partir de suas funções geométricas. A exploração dinâmica no GeoGebra possibilitou que os estudantes observassem que os catetos são definidos exclusivamente por formarem o ângulo reto, enquanto a hipotenusa é identificada de modo invariável como o lado oposto a esse ângulo, independentemente da orientação ou do tamanho do triângulo na tela. Falas como “*Os catetos são sempre os lados do 90°, não importa o tamanho*” e “*A hipotenusa é a da frente do ângulo reto, por isso ela acaba sendo maior*” evidenciam que os estudantes passaram a mobilizar critérios estruturais, e não apenas perceptivos, para classificar os lados do triângulo, sinalizando avanço conceitual.

Essa compreensão foi aprofundada quando os estudantes perceberam que a nomenclatura permanecia invariável mesmo quando o triângulo era deformado dinamicamente, o que reforçou a ideia de que as propriedades geométricas não dependem da aparência da figura, mas das relações internas que a constituem. Tal percepção está alinhada ao que Moreira e Masini (2011) descrevem como seleção e diferenciação de objetos conceituais, processo no qual o estudante passa a reconhecer sentido interno em elementos que antes eram percebidos apenas como partes indistintas de uma configuração maior. Esse reconhecimento tornou-se particularmente evidente na construção que assegurou rigorosamente a perpendicularidade entre os segmentos por meio da interseção de circunferências, procedimento que garantiu a verificação do ângulo reto e explicitou a relação entre forma, medida e condição geométrica, conforme mostrar a Figura 30, desenvolvida pelo estudante E05.

Figura 30 – Construção do Ângulo Reto pelo Método dos Círculos (Tripla Pitagórica 3–4–5); Atividade construída por E05



Autor: Arquivos da pesquisa

O processo culminou na reconciliação integrativa, quando os estudantes articularam de maneira consciente a relação entre a magnitude dos ângulos e a magnitude dos lados opostos. Ao medir ângulos e comprimentos no GeoGebra, compreenderam que a hipotenusa é sempre o maior lado porque está associada ao maior ângulo do triângulo, o ângulo de  $90^\circ$ . Essa relação deixou de ser uma regra decorada e passou a ser explicada de forma causal, como se observa na afirmação do estudante E08: “O lado maior é o da frente do maior ângulo, e o maior ângulo é o de  $90^\circ$ ”. Esse tipo de explicação indica uma reorganização hierárquica do

conhecimento, característica da aprendizagem significativa descrita por Ausubel (2003), na qual conceitos passam a integrar uma rede lógica coerente.

O desempenho global dos estudantes ao longo da Atividade 12 indicou que a aprendizagem não se restringiu à memorização de propriedades isoladas, mas configurou-se como uma reorganização qualitativa do sistema conceitual pré-existente. A distinção clara entre um *“lado maior”* genérico e a hipotenusa enquanto conceito estrito, necessariamente condicionado à presença do ângulo de  $90^\circ$ , mostrou que a maioria dos estudantes passou a respeitar as condições estruturais da Geometria e a empregar os conceitos de maneira conceitualmente adequada. Tal avanço dialoga com Novak e Cañas (2010), ao indicarem que a aprendizagem conceitual se fortalece quando o estudante consegue estabelecer relações explícitas entre conceitos e justificá-las logicamente.

Observou-se, contudo, que alguns estudantes demandaram maior atenção pedagógica para superar dificuldades pontuais, especialmente na identificação correta do ângulo reto e na associação entre posição angular e nomenclatura dos lados. Essas dificuldades não se configuraram como erros meramente procedimentais, mas como indícios de subsunções ainda em processo de consolidação (Moreira; Masini, 2011). Intervenções mais próximas, com questionamentos orientadores e retomadas visuais no ambiente digital, mostraram-se decisivas para que esses estudantes reorganizassem seus esquemas conceituais. Falas como *“Agora entendi que não é o maior lado que manda, é o ângulo”* ou *“Sem o  $90^\circ$  não tem hipotenusa”* indicaram que, mesmo diante de obstáculos iniciais, a aprendizagem pôde ser progressivamente estabilizada.

Nesse percurso, o GeoGebra atuou como um laboratório cognitivo, no qual hipóteses puderam ser testadas, regularidades observadas e propriedades confirmadas empiricamente. Essa mediação tecnológica, conforme discutem Borba e Villarreal (2005), amplia as possibilidades de visualização e experimentação matemática, permitindo que o estudante antecipe compreensões antes mesmo da formalização algébrica ou textual. Ao favorecer a manipulação dinâmica das figuras e a verificação imediata das relações geométricas, o ambiente digital atendeu a diferentes ritmos de aprendizagem, potencializando tanto a autonomia quanto a mediação docente.

Dessa forma, o percurso didático atendeu ao princípio ausubeliano de promover uma aprendizagem significativa e duradoura, na qual o estudante deixa de

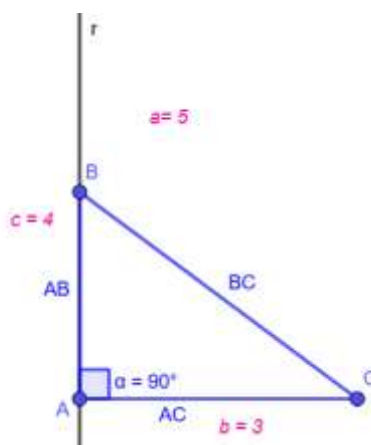
ser um receptor passivo de informações e passa a construir ativamente sua própria rede conceitual. Ainda que esse processo tenha ocorrido de maneira heterogênea, a articulação entre visualização dinâmica, fundamentação teórica e contexto rural mostrou-se propícia para assegurar a compreensão efetiva do papel do ângulo reto, da hipotenusa e dos catetos no sistema geométrico do triângulo retângulo.

### ATIVIDADE 13: Teorema de Pitágoras Visual I (Construção de Áreas)

Esta atividade materializa a transição do conceito de área para a relação métrica fundamental do triângulo retângulo. O objetivo é que os estudantes utilizem o subsunçor da área do quadrado para deduzir que a soma das áreas construídas sobre os catetos equivale à área construída sobre a hipotenusa. Ao focar na manipulação direta e na visualização geométrica, a atividade encerra a primeira fase da sequência didática, consolidando a percepção de que  $c^2 + b^2 = a^2$  não é apenas uma equação, mas uma equivalência de superfícies.

A aula teve início com a ativação do subsunçor área, utilizando o contexto rural como organizador prévio. Para mediar essa transição entre o cotidiano e a geometria formal, utilizou-se a Figura 31 (elaborada pelos estudantes E02 e E03). Nela, o triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e hipotenusa 5 não é apresentado apenas por suas medidas lineares, mas como a base para a discussão de superfícies. A partir dessa imagem, os estudantes foram instigados a visualizar os quadrados que poderiam ser construídos sobre cada lado, transformando medidas de comprimento em conceitos de área.

Figura 31 – O Triângulo de Esquadro no GeoGebra; Atividade construída por E02 e E03



Autores: Arquivos da pesquisa

A partir das provocações sobre o cotidiano rural — como a medição de cercados ou galpões — os estudantes acessaram conhecimentos já estabilizados em sua estrutura cognitiva. O surgimento espontâneo da fala do E01: *“a área é o lado ao quadrado”* evidenciou que o conceito de potenciação associado à superfície estava disponível para atuar como um ancoradouro. Essa estabilidade do conhecimento prévio foi o que permitiu ao grupo avançar na compreensão das propriedades métricas do triângulo sem resistências teóricas.

Entretanto, observou-se que alguns estudantes necessitaram de um apoio pedagógico mais direto para recordar as fórmulas de área, especialmente no que se refere à distinção entre área e perímetro ou à generalização do cálculo para diferentes figuras geométricas. Nessas situações, as intervenções pontuais, como a retomada da ideia de área enquanto “superfície ocupada”, a comparação entre contorno e interior das figuras e a construção coletiva de exemplos simples no quadro e no GeoGebra, mostraram-se fundamentais para a reorganização dos conhecimentos prévios.

Comentários como os dos estudantes E09 e E05, respectivamente *“ah, então área é o espaço de dentro, não a volta”* ou *“é por isso que fica elevado ao quadrado”* sinalizaram que o subsunçor, embora momentaneamente fragilizado, pôde ser reativado, ressignificado e fortalecido. Assim, a articulação entre as falas dos estudantes, a representação geométrica apresentada e as situações concretas do contexto rural criaram as condições cognitivas necessárias para a progressão conceitual que sustentaria, nas etapas seguintes da aula, a compreensão visual e algébrica do Teorema de Pitágoras.

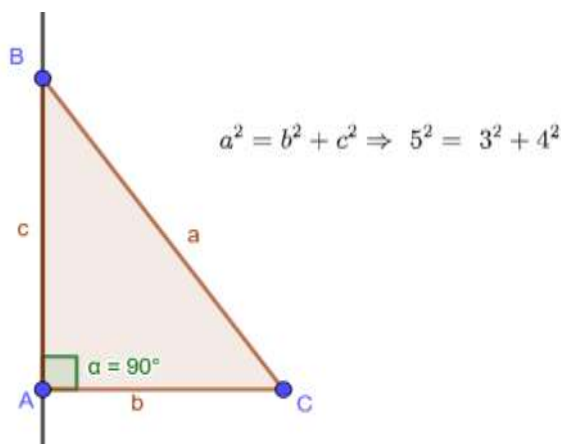
Essa retomada, ainda que marcada por diferentes níveis de autonomia entre os estudantes, mostrou-se decisiva para que, posteriormente, as medidas lineares dos lados do triângulo fossem relacionadas às áreas dos quadrados construídos sobre eles.

Ao término dessa etapa, a turma apresentava uma base conceitual suficientemente estável para avançar na investigação, estabelecendo as condições cognitivas necessárias para que a relação  $c^2 + b^2 = a^2$  fosse compreendida não como uma fórmula abstrata de memorização, mas como uma decorrência lógica da composição de áreas geométricas.

Dando continuidade à sequência, os estudantes foram orientados a construir, no *software* GeoGebra, um triângulo retângulo que preservasse suas características

estruturais, assegurando a ortogonalidade por meio da ferramenta de perpendicularidade. Esse cuidado metodológico foi fundamental para a consolidação do rigor geométrico, distanciando a prática de construções meramente intuitivas ou aproximadas. Durante esse processo, manifestações como a do E06 “*se não fizer o ângulo reto certinho, o resto não funciona*” evidenciaram que os estudantes reconheceram a condição estrutural indispensável à validade do teorema. A associação direta entre os segmentos geométricos e sua nomenclatura algébrica — catetos (b e c) e hipotenusa (a) — preparou o terreno para a fase de diferenciação progressiva. Essa etapa inicial de construção e identificação está ilustrada na Figura 32.

Figura 32 – Triângulo retângulo com catetos b e c e hipotenusa a: representação geométrica do Teorema de Pitágoras; Atividade construída por E06 e E07



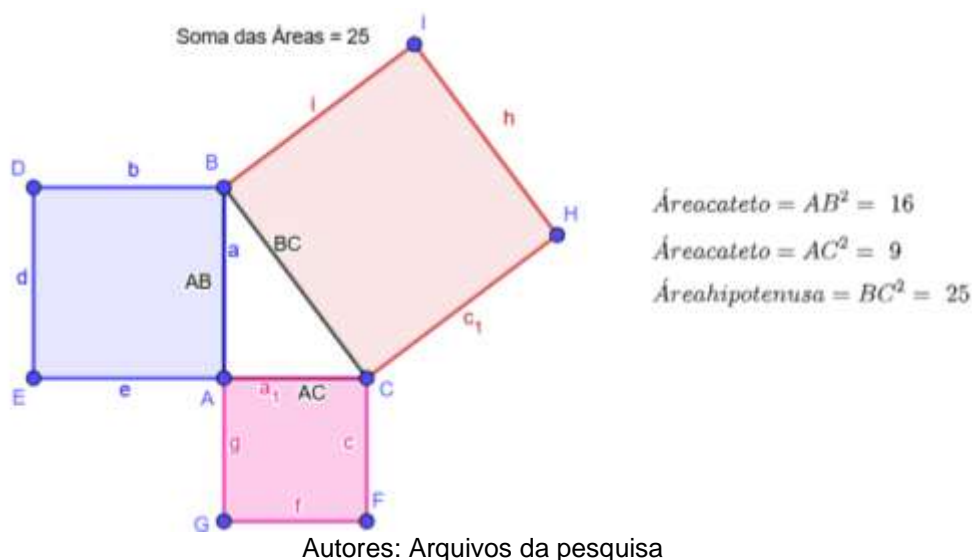
Autores: Arquivos da pesquisa

A fase de diferenciação progressiva revelou-se um dos momentos mais significativos da aula. A construção dos quadrados sobre cada um dos lados do triângulo possibilitou que os estudantes visualizassem concretamente os termos  $b^2$ ,  $c^2$  e  $a^2$  como áreas distintas. O uso de cores diferentes para cada quadrado contribuiu para a organização perceptiva e para a redução da carga cognitiva. Nesse contexto, o estudante E05 afirmou: “*agora eu vejo o  $b^2$  e o  $c^2$  como áreas de verdade, não só como letras*”, enquanto E01 acrescentou: “*o quadrado grande é a soma dos dois pequenos*”. Tais manifestações indicam que os termos algébricos passaram a ser compreendidos como representações simbólicas de superfícies geométricas, e não mais como expressões abstratas desconectadas de significado.

O caráter dinâmico do GeoGebra desempenhou papel decisivo na consolidação dessa compreensão. Ao movimentarem os vértices do triângulo e alterarem as medidas dos catetos, os estudantes observaram que, embora as áreas

individuais variassem, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos permanecia invariavelmente igual à área do quadrado da hipotenusa. Comentários como do E07 “os valores mudam, mas o resultado final é sempre o mesmo” e “não importa o tamanho, sempre fecha” evidenciaram a internalização da invariância da relação pitagórica. Essa demonstração visual e dinâmica, apresentada na Figura 33, elevou a observação empírica ao estatuto de regularidade estrutural, em consonância com a perspectiva ausubeliana de que a aprendizagem significativa promove uma reorganização qualitativa do sistema de ideias do aprendiz.

Figura 33 – Triângulo Retângulo com Quadrados nos Lados: Visualização de  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  e a Soma das Áreas dos Catetos; Atividade construída por E05 e E10

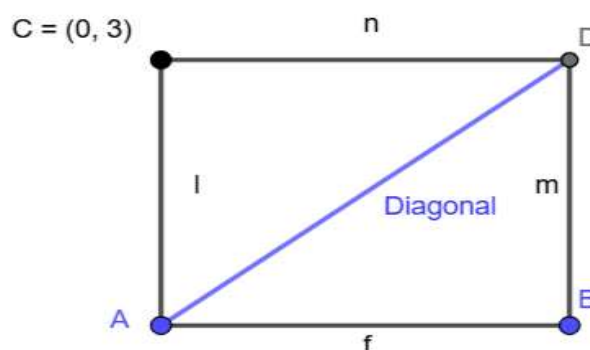


Na fase de reconciliação integrativa, a discussão coletiva permitiu que os estudantes formassem explicitamente a prova visual com a formalização algébrica do Teorema de Pitágoras. A expressão  $b^2 + c^2 = a^2$  passou a ser compreendida como a tradução simbólica de uma relação geométrica já observada, testada e validada visualmente. Afirmações como do E01 “a fórmula é só escrever o que a figura mostra” ou “a conta vem depois da ideia” demonstram que a abstração algébrica foi incorporada sem ruptura cognitiva, preservando o significado conceitual da relação.

A etapa de aplicação contextualizada reforçou de modo decisivo a ancoragem do conhecimento construído ao longo da Atividade 13. Ao enfrentarem o problema da determinação do comprimento da viga diagonal de um portão retangular de 3 metros por 4 metros, os estudantes reconheceram imediatamente a correspondência entre a situação concreta e a construção previamente realizada no GeoGebra, como se observa na Figura 34, elaborada pelos estudantes E04 e E06. A visualização do

triângulo retângulo associado ao portão permitiu que a relação geométrica deixasse o plano abstrato e se materializasse em um objeto do cotidiano rural.

Figura 34 – Aplicação do Teorema na Diagonal do Retângulo; Atividade construída por E04 e E06



$$a^2 = b^2 + c^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = \text{Diagonal}$$

Autores: Arquivos da pesquisa

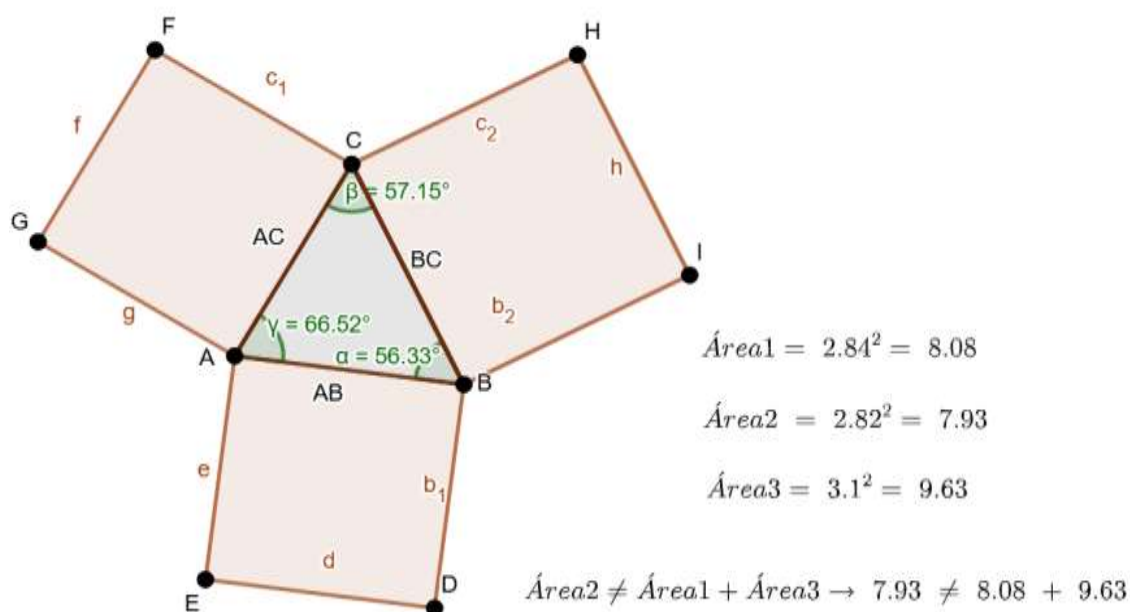
Nesse momento, as falas dos estudantes evidenciaram de forma clara a transferência significativa do conhecimento. Comentários como do estudante E08 “*é o mesmo triângulo que a gente fez no computador, só que agora virou um portão*”, “*a diagonal é a hipotenusa, então tem que dar cinco*” e “*por isso que no campo eles usam 3, 4 e 5 para conferir se está no esquadro*” indicam que o Teorema de Pitágoras passou a ser compreendido como uma ferramenta funcional, e não apenas como uma fórmula a ser aplicada mecanicamente. A tripla pitagórica 3-4-5 deixou, assim, de ser um exemplo clássico descontextualizado e passou a assumir o status de técnica prática de verificação de esquadro em situações reais de construção, como portões, galpões e estruturas de madeira.

A atividade da Figura 34 cumpriu papel importante nesse processo ao articular a prova visual construída no ambiente digital com o problema concreto, favorecendo a reconciliação integrativa entre geometria, álgebra e prática social. Ao perceberem que o cálculo  $3^2 + 4^2 = 25$  conduzia necessariamente a uma diagonal de 5 metros, os estudantes consolidaram a compreensão de que a validade do resultado não depende do contexto específico, mas da estrutura geométrica do triângulo retângulo. Esse reconhecimento evidencia uma aprendizagem significativa no sentido ausubeliano, marcada pela capacidade de transferir o conhecimento para novas situações, mantendo sua coerência conceitual e funcional.

O fechamento da aula desempenhou um papel fundamental na consolidação

conceitual através de um desafio prático. A Figura 35 ilustra esse momento, onde os estudantes exploraram a relação entre as áreas construídas sobre os lados de um triângulo que não possui um ângulo de  $90^\circ$ .

Figura 35 – Verificação da não validade do Teorema de Pitágoras em triângulos não retângulos; Atividade construída por E03



Fonte: Arquivos da pesquisa

A imagem apresenta um triângulo com ângulos internos de  $56.33^\circ$ ,  $66.52^\circ$  e  $57.15^\circ$ . Como nenhum desses ângulos é reto ( $90^\circ$ ), a relação fundamental do Teorema de Pitágoras é testada. Ao tentarem aplicar a fórmula tradicional, os estudantes observam a desigualdade matemática:

$$\text{Área 2} \neq \text{Área 1} + \text{Área 3} \rightarrow 7.93 \neq 8.08 + 9.63$$

Ao constatarem que, na ausência do ângulo reto, a soma das áreas dos quadrados de dois lados não coincide com a área do terceiro quadrado, os estudantes reforçaram a compreensão das condições de validade do teorema.

Comentários registrados como “*sem 90 graus não funciona*” ou “*a regra quebra quando o triângulo não é reto*” indicam que a restrição do Teorema de Pitágoras foi plenamente assimilada. Essa atividade prática foi essencial para evitar generalizações indevidas, garantindo que os alunos identifiquem a necessidade do ângulo de  $90^\circ$  para a aplicação da norma  $a^2 = b^2 + c^2$ .

De modo geral, a Atividade 13 promoveu uma AS substantiva, em consonância com os pressupostos ausubelianos. O conceito de área funcionou como subsunçor estável, permitindo que a prova geométrica do Teorema de Pitágoras fosse integrada

de maneira coerente à estrutura cognitiva dos estudantes. A transição do concreto ao abstrato ocorreu de forma gradual, mediada pela visualização dinâmica, pela precisão geométrica e pela investigação ativa. As evidências observadas, especialmente nos relatos dos alunos, demonstram que o teorema foi internalizado como um princípio lógico e visualmente justificável, capaz de orientar a resolução de problemas reais e consolidar a Geometria como ferramenta de compreensão e intervenção na realidade.

#### **ATIVIDADE 14: Pitágoras Visual II: Verificação e Classificação de Triângulos**

O desenvolvimento da Atividade 14 representou um avanço no percurso didático ao transitar da prova visual do Teorema de Pitágoras para sua verificação numérica sistemática. Esse aprofundamento buscou consolidar a relação métrica fundamental como um critério formal de classificação de triângulos, transcendendo a observação geométrica e concretizando o princípio da diferenciação progressiva proposto por Ausubel. Sob essa ótica, a compreensão matemática é fortalecida pela integração de novos significados a estruturas cognitivas já estabilizadas, em vez da simples memorização de fórmulas isoladas.

A aula iniciou-se com a ativação da base conceitual construída na etapa anterior, utilizando a equivalência de áreas como um organizador prévio expositivo. Essa estratégia preparou intencionalmente os estudantes para a transição do registro geométrico para o tratamento algébrico, funcionando como um recurso de mediação que facilitou a conexão não arbitrária entre a percepção das superfícies e a igualdade  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Ao utilizar o conhecimento ancorado como ponto de partida para investigações mais complexas, a atividade assegurou que a formalização simbólica ocorresse de maneira substantiva. Assim, a verificação da relação pitagórica passou a ser explorada pelos estudantes como uma ferramenta de diagnóstico da natureza do triângulo, o que elevou o nível de abstração do grupo em relação às propriedades métricas estudadas.

Durante a exploração no GeoGebra, os estudantes foram instigados a verbalizar o que observavam nas áreas construídas sobre os lados do triângulo. Manifestações como do E05 e do E11, respectivamente, “*os dois quadrados menores juntos formam o maior*” e “*isso só funciona quando tem ângulo reto*” confirmaram que

a conexão entre superfície e perpendicularidade estava consolidada. Essa explicitação indica que o grupo não apenas reconhecia o desenho, mas compreendia sua estrutura relacional — característica central da aprendizagem significativa (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980).

Essa capacidade de tradução verbal reflete as perspectivas de Novak (1998) e Gowin (1991), para quem aprender significativamente exige estabelecer relações conscientes entre conceitos dentro de uma rede cognitiva. Ao justificarem a validade do teorema mediante a condição de ortogonalidade, os estudantes demonstraram domínio das propriedades da lei geométrica, superando a aplicação meramente mecânica de fórmulas. Como destaca Novak (1998), quando o estudante consegue explicar as condições em que uma regra matemática se aplica, evidencia-se que o conhecimento foi integrado à sua estrutura mental de forma profunda e duradoura.

A manipulação das peças no ambiente virtual permitiu que os estudantes explorassem o princípio da conservação de áreas de forma dinâmica. Ao arrastarem os triângulos e reconfiguraram os espaços internos do quadrado maior, emergiram falas dos estudantes E01 e E12 como: *“o espaço que sobrou é o mesmo, só mudou de lugar”* e *“os dois quadradinhos juntos cabem certinho no lugar do grandão”*. Essas observações indicam que a aprendizagem deixou de ser apenas visual para se tornar funcional, onde o movimento das peças serviu para validar a igualdade  $a^2 = b^2 + c^2$ .

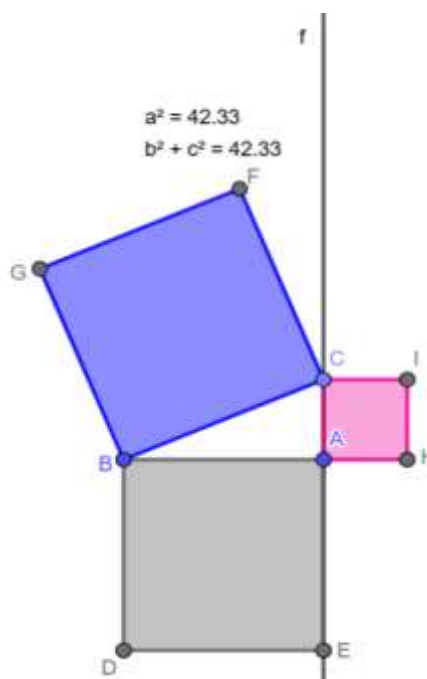
De acordo com a perspectiva de Novak (1998), essa capacidade de descrever o processo de transformação evidencia que o conhecimento foi integrado à estrutura cognitiva de forma substantiva. Os estudantes não estavam apenas movimentando objetos na tela, mas coordenando o conceito de área com a propriedade de ortogonalidade. Esse *“fazer”* e *“explicar”* caracterizam o fechamento do ciclo de aprendizagem da Atividade 14, transformando o rearranjo geométrico em uma prova lógica incontestável para o grupo. Assim, a formalização algébrica final surgiu como uma síntese natural de uma experiência prática, e não como uma imposição teórica.

Dessa forma, a ativação do subsunçor no início da aula cumpriu um papel central na organização do campo conceitual da Atividade 14, assegurando que a verificação numérica e a classificação de triângulos fossem compreendidas como desdobramentos lógicos de uma estrutura geométrica previamente internalizada, em consonância com os pressupostos da TAS.

A Figura 36 ilustra a etapa em que ocorre a transição da representação geométrica para a linguagem algébrica, mediada pelo uso do GeoGebra. Após a

construção do triângulo retângulo, foram desenhados automaticamente quadrados sobre cada um de seus lados, possibilitando a interpretação dos termos  $b^2$ ,  $c^2$  e  $a^2$  como áreas geométricas.

Figura 36 – Visualização dinâmica da relação pitagórica por composição de áreas; Atividade construída por E07



Fonte: Arquivos da pesquisa

A manipulação dinâmica da construção permitiu que os estudantes observassem que, embora as áreas individuais variassem com a alteração das medidas dos catetos, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos permanecia invariavelmente igual à área do quadrado da hipotenusa. Esse recurso favoreceu a compreensão da relação pitagórica como uma relação entre grandezas, e não como uma identidade algébrica descontextualizada, promovendo a aprendizagem significativa por meio da integração entre representações geométricas, numéricas e simbólicas.

Nesse momento, tornaram-se evidentes diferenças individuais no ritmo de aprendizagem. Alguns estudantes precisaram de maior apoio para retomar o significado das fórmulas de área e da potenciação, especialmente no que se refere à interpretação de “*eleva ao quadrado*” como multiplicação de uma medida por ela mesma. Essa situação confirma a afirmação de Ausubel de que, quando os subsunçores não estão suficientemente consolidados, a aprendizagem exige intervenções pedagógicas mais intencionais. Com o acompanhamento da professora e a exploração dinâmica das construções, esses estudantes conseguiram avançar,

como revelam comentários do tipo “*agora entendi que o quadrado é a área*” ou “*antes eu só fazia a conta, agora sei o que ela representa*”.

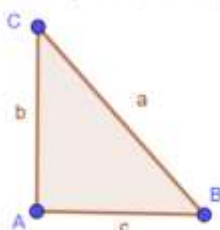
Com a manipulação dos pontos do triângulo, os estudantes passaram a observar a invariância da relação pitagórica. Mesmo alterando as medidas dos lados, a igualdade  $b^2 + c^2 = a^2$  permanecia válida, o que levou a falas como “*não importa o tamanho, sempre dá certo*” e “*é uma regra que não muda*”. Esse reconhecimento da invariância indica um nível mais profundo de compreensão conceitual, aproximando-se do que Skemp (2006) denomina compreensão relacional, na qual o estudante entende não apenas como aplicar a regra, mas por que ela funciona.

Na etapa seguinte, a Atividade 14 promoveu a reconciliação integradora, ampliando o significado do Teorema de Pitágoras ao transpô-lo de uma relação métrica específica para um critério formal de classificação de triângulos. Essa transição representou um deslocamento cognitivo relevante: o teorema deixou de ser compreendido apenas como uma igualdade restrita ao caso retângulo e passou a ser interpretado como uma fronteira estrutural entre diferentes configurações geométricas. Esse processo, conforme proposto por Ausubel (2003), permitiu que os conceitos previamente ancorados fossem reorganizados e relacionados de forma mais abrangente, conferindo maior inclusividade à estrutura cognitiva dos estudantes.

A Figura 37, elaborada pelos estudantes E02 e E08, evidencia que eles passaram a comparar de forma sistemática os valores de  $b^2 + c^2$  com  $a^2$ , explorando diversas configurações geométricas construídas no GeoGebra. Essa prática demonstra a transição do uso pontual da relação pitagórica para uma abordagem investigativa, na qual diferentes triângulos são analisados com base na igualdade ou desigualdade entre essas áreas.

Figura 37 – Teste Numérico da Desigualdade Pitagórica: Identificação do Tipo de Triângulo; atividade construída por E02 e E08

*TesteA = (AreaCateto1 + AreaCateto2 > AreaHipotenusa) // Acutângulo → 7.4 + 6.15 > 13.72 = false*  
*TesteB = (AreaCateto1 + AreaCateto2 < AreaHipotenusa // Obtusângulo → 7.4 + 6.15 < 13.72 = true*  
*TesteC = (AreaCateto1 + AreaCateto2 == AreaHipotenusa) // Retângulo → 7.4 + 6.15 = 13.72 = false*



A mediação docente orientou a exploração das três possibilidades fundamentais: quando  $b^2 + c^2 = a^2$ , o triângulo é retângulo; quando  $b^2 + c^2 > a^2$ , o triângulo é acutângulo; e quando  $b^2 + c^2 < a^2$ , o triângulo é obtusângulo.

Essa explicitação permitiu que os estudantes compreendessem a desigualdade pitagórica como um prolongamento lógico da igualdade já conhecida, e não como um novo conteúdo desconectado.

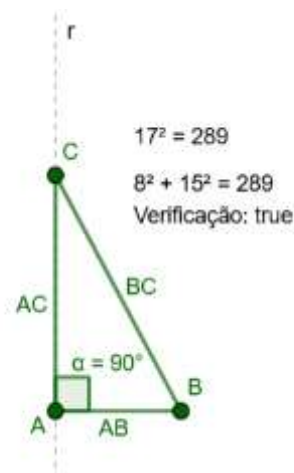
Durante essa investigação, surgiram comentários espontâneos que revelam a integração entre o tratamento algébrico e a interpretação geométrica. Expressões como *“quando passa do valor, o ângulo fica menor”* ou *“quando dá menos, o triângulo fica mais aberto”* indicam que os alunos começaram a relacionar desigualdades numéricas com a abertura dos ângulos, construindo uma leitura geométrica para resultados algébricos. Esse tipo de verbalização evidencia que os estudantes não estavam apenas aplicando critérios, mas atribuindo significado às relações matemáticas, aspecto central da aprendizagem significativa descrita por Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

A sequência didática contemplou uma exploração orientada das desigualdades pitagóricas, na qual a professora conduziu a análise comparativa entre as expressões  $b^2 + c^2$  e  $a^2$  como critérios formais para a classificação dos triângulos. Em um momento posterior, os próprios estudantes passaram a assumir papel mais ativo, construindo diferentes configurações triangulares no ambiente digital e testando as desigualdades a partir dos valores exibidos. Ao constatarem, por exemplo, que em determinadas situações a soma das áreas associadas aos “catetos” superava a área associada ao maior lado, identificaram o triângulo como acutângulo; quando essa soma se mostrava inferior, reconheceram-no como obtusângulo. Esse movimento investigativo foi decisivo para consolidar a compreensão do Teorema de Pitágoras como uma linha divisória conceitual entre distintas classes de triângulos, ultrapassando o entendimento restrito à igualdade característica do triângulo retângulo.

A exploração de triplas pitagóricas, como o conjunto 8-15-17, funcionou simultaneamente como reforço conceitual e exercício de generalização. Ao verificarem numericamente que  $8^2 + 15^2 = 17^2$ , os estudantes concluíram prontamente tratar-se de um triângulo retângulo, mostrando domínio do critério matemático independentemente da representação visual inicial. Essa capacidade de reconhecer a validade da relação em novos contextos confirma o que Moreira (2011) destaca ao interpretar Ausubel: *“a aprendizagem significativa se consolida quando o*

*aluno consegue aplicar o conhecimento em situações distintas, sem depender da forma original em que ele foi apresentado*”. Conforme se observa na Figura 38, construída pelos estudantes E04 e E09, esse processo de exploração digital evidenciou a comparação sistemática entre os valores de  $b^2 + c^2$  e  $a^2$ , permitindo a classificação dos triângulos em diferentes configurações.

Figura 38 – Verificação da Tripla Pitagórica (8, 15, 17): Confirmação do Triângulo Retângulo; Atividade construída por E04 e E09



Autores: Arquivos da pesquisa

Do ponto de vista pedagógico, o GeoGebra atuou como um ambiente de experimentação e investigação, no qual hipóteses puderam ser formuladas, testadas e validadas em tempo real. Ao permitir a manipulação direta das figuras e a observação imediata dos efeitos algébricos dessas mudanças, o software favoreceu uma postura ativa do estudante, alinhada às concepções construtivistas de aprendizagem defendidas por Novak (1998), nas quais o sujeito assume papel central na organização de sua própria rede conceitual. Assim, a etapa de classificação e generalização na atividade 14 não apenas ampliou o alcance do Teorema de Pitágoras, mas consolidou uma compreensão estrutural e duradoura da relação entre números, formas e propriedades geométricas.

O desempenho global observado ao longo da Atividade 14 indica que a aprendizagem ocorrida não foi mecânica, mas resultou em uma reorganização qualitativa das ideias pré-existentes. Embora alguns estudantes tenham exigido maior atenção para superar dificuldades iniciais, o acompanhamento pedagógico assegurou avanços significativos para todo o grupo. Em consonância com Ausubel (2003), Novak (1998), Skemp (2006) e Moreira (2011), o conhecimento construído mostrou-se estável, transferível e funcional, permitindo que o Teorema de Pitágoras fosse

compreendido não apenas como uma fórmula escolar, mas como um instrumento matemático para interpretar, classificar e resolver problemas geométricos em contextos reais, especialmente aqueles vinculados à realidade rural.

### **ATIVIDADE 15: Dinâmica de Pitágoras: Invariância e Prova Prática**

A aula correspondente à atividade 15 foi estruturada com a intencionalidade explícita de consolidar a compreensão do Teorema de Pitágoras como uma propriedade geométrica invariante, diretamente dependente da existência do ângulo reto, e não como uma simples relação algébrica a ser aplicada mecanicamente. Diferentemente dos módulos anteriores, em que a ênfase recaiu sobre a prova visual e a verificação numérica, este estágio privilegiou a articulação entre experiência prática, manipulação dinâmica e generalização conceitual, em consonância com os pressupostos da TAS de David Ausubel, especialmente no que se refere à ancoragem de novos significados em subsunçores já estabilizados.

O início da aula foi marcado pela ativação consciente do subsunçor construído nas atividades anteriores: a identidade pitagórica  $b^2 + c^2 = a^2$ , já compreendida numericamente e visualmente pelos estudantes. No entanto, essa retomada assumiu agora um caráter prático e concreto, funcionando como organizador prévio no sentido ausubeliano. A problematização inicial, *“Como um agricultor ou um carpinteiro garante que o canto de um galpão está realmente em 90 graus sem depender de instrumentos sofisticados?”* deslocou o foco da abstração matemática para uma necessidade técnica real. As respostas dos estudantes evidenciaram a mobilização imediata de conhecimentos prévios: *“meu pai mede três de um lado, quatro do outro e vê se fecha em cinco”* ou *“é assim que eles fazem para esquadrear cerca”*. Essas falas indicam que o teorema já se encontrava integrado à experiência cotidiana dos estudantes, condição essencial para a aprendizagem significativa, conforme destaca Ausubel ao afirmar que o fator mais importante da aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe.

A atividade prática de construção do triângulo 3-4-5 no solo contribuiu de forma decisiva para a consolidação desse processo de ancoragem conceitual. Ao demarcarem os catetos com medidas previamente estabelecidas e verificarem o comprimento da diagonal, os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar, de modo concreto, a relação pitagórica, articulando a experiência sensível à formalização

matemática. A Figura 39 ilustra a construção realizada pelos estudantes E01, E03 e E09, desenvolvida no pátio da escola. Posteriormente, a imagem foi ajustada com o apoio de recursos de inteligência artificial, com a finalidade de aprimorar a clareza visual e a proporcionalidade das medidas representadas.

Figura 39 – Representação da construção do triângulo retângulo 3–4–5, empregada como procedimento prático de verificação da perpendicularidade; Atividade construída por E01, E03 e E09



Atores: Arquivos da pesquisa

Comentários como *“se deu cinco certinho, então o canto tá reto”* ou *“não precisa medir o ângulo, a diagonal já prova”* revelam uma compreensão que ultrapassa a memorização da fórmula, aproximando-se de uma leitura estrutural da geometria.

Essa percepção está em consonância com a perspectiva de Novak (1998), que define a AS como a integração consciente e organizada de novos conceitos à estrutura cognitiva. Ao perceberem, por meio da investigação no GeoGebra, que a relação pitagórica se desfazia diante de qualquer alteração na ortogonalidade do triângulo, os estudantes transformaram uma propriedade geométrica em uma proposição lógica internalizada, consolidando o vínculo entre a forma e a norma algébrica.

Na sequência, a transição para o ambiente digital promoveu a diferenciação progressiva do conceito. A reconstrução da situação no GeoGebra, com a fixação do ângulo reto e a introdução de um controle deslizante para variar um dos ângulos adjacentes, permitiu aos estudantes observar como os comprimentos dos lados se alteram sem que a relação pitagórica seja violada. O uso do controle  $\beta$  transformou a aula em um espaço de investigação, no qual os estudantes deixaram de serem meros executores de comandos para assumir uma postura exploratória. Durante a manipulação, surgiram observações como *“o cateto cresce, a diagonal cresce junto”* ou *“muda tudo, menos a conta final”*. Essas falas evidenciam a percepção da invariância da relação, conceito central desta aula.

A etapa seguinte da atividade concentrou-se no aprofundamento da diferenciação progressiva por meio da manipulação sistemática das variáveis no ambiente dinâmico. Ao ajustar continuamente os valores associados aos lados do triângulo, mantendo fixo o ângulo reto, os estudantes passaram a observar que diferentes configurações geométricas conduziam sempre à mesma relação entre os quadrados dos lados. Esse processo favoreceu um refinamento conceitual importante, pois exigiu que a identidade pitagórica fosse compreendida não apenas como uma igualdade numérica pontual, mas como uma propriedade estrutural do triângulo retângulo. Tal movimento está em consonância com Ausubel, ao afirmar que a diferenciação progressiva ocorre quando ideias mais gerais e inclusivas passam a ser progressivamente especificadas e consolidadas na estrutura cognitiva do aprendiz.

Durante a atividade, falas como *“muda tudo, menos a conta”*, *“os números trocam, mas a regra continua”* ou ainda *“sempre fecha porque o ângulo é reto”* evidenciam que os estudantes passaram a reconhecer a regularidade da relação pitagórica para além de exemplos isolados. A identidade  $b^2 + c^2 = a^2$  deixou de ser percebida como uma fórmula a ser aplicada mecanicamente e passou a ser interpretada como consequência direta da condição geométrica de perpendicularidade entre os catetos. Esse entendimento reforça o que Novak (1998) destaca ao discutir a AS: a compreensão conceitual se manifesta quando o estudante é capaz de explicar por que uma relação se mantém verdadeira, e não apenas constatar que ela funciona.

A manipulação contínua do controle deslizante, conduzida inicialmente pela professora e posteriormente pelos próprios estudantes, contribuiu para a consolidação da ideia de invariância. Mesmo diante de variações rápidas nos valores numéricos dos lados, a igualdade entre  $b^2 + c^2$  e  $a^2$  permaneceu, o que levou alguns estudantes a verbalizar generalizações relevantes, como *“não é o tamanho que importa, é o ângulo”*, *“se não for reto, não dá certo”* ou *“o segredo está nos noventa graus”*. Essas falas indicam que os estudantes passaram a identificar as condições de validade do teorema, aspecto central para a construção de um conhecimento matemático conceitualmente estruturado.

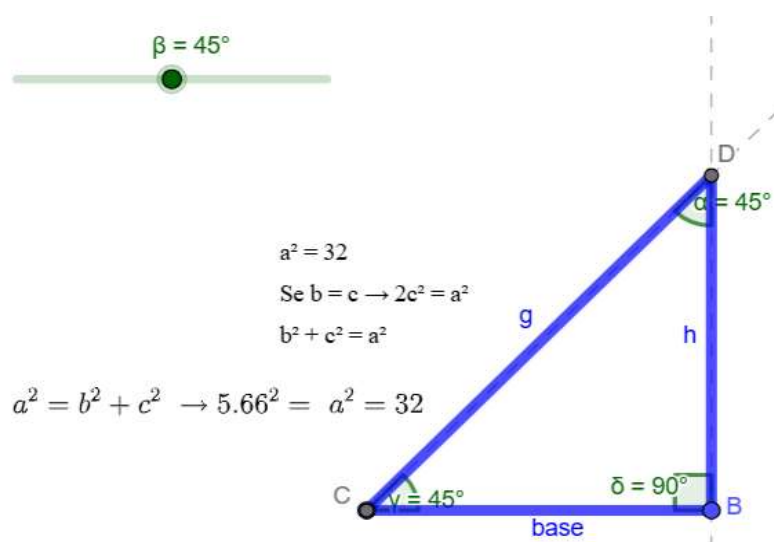
Do ponto de vista teórico, esse momento da aula pode ser compreendido como uma transição da simples verificação empírica para a internalização de um princípio matemático. Conforme argumenta Moreira (2015), ao interpretar a teoria ausubeliana, a aprendizagem significativa se consolida quando o estudante consegue reconhecer

os limites e as condições de aplicação de um conceito, integrando-o de forma estável à sua rede conceitual. Nesse sentido, a noção de invariância geométrica emergiu não como uma afirmação abstrata imposta pela professora, mas como uma conclusão construída a partir da experimentação, da observação de regularidades e da reflexão coletiva, fortalecendo o papel ativo do estudante no processo de aprendizagem.

Na fase final, a aula avançou para a reconciliação integrativa, buscando integrar a lei geral a casos particulares e a situações-limite. Ao explorarem o caso do triângulo retângulo isósceles, com ângulos de 45 graus, os estudantes observaram que os catetos assumem a mesma medida e que a equação se simplifica para  $2c^2 = a^2$ .

A Figura 40, desenvolvida pelos estudantes E07 e E11, ilustra a situação em que os catetos  $b$  e  $c$  possuem a mesma medida, evidenciando a simplificação da equação pitagórica para  $2c^2 = a^2$ . O diagrama mostra a relação entre os ângulos de  $45^\circ$  e a hipotenusa, reforçando a integração entre a representação geométrica e a expressão algébrica.

Figura 40 – Triângulo Retângulo Isósceles ( $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ): Aplicação da Lei de Pitágoras; Atividade construída por E07 e E11



Autores: Arquivos da pesquisa

Comentários como “*fica mais fácil de calcular*”, feito pelo estudante E06 ou “*é por isso que telhado de duas águas é simétrico*”, feito pelo estudante E01, mostram que os estudantes conseguiram articular a estrutura algébrica com interpretações geométricas e construtivas, reforçando a integração entre conceitos.

A exploração dos casos-limite, nos quais o ângulo  $\beta$  se aproxima de  $0^\circ$  ou de  $90^\circ$ , revelou avanços significativos na compreensão conceitual dos estudantes em relação ao Teorema de Pitágoras, atendendo ao objetivo da pesquisa de analisar

como a manipulação dinâmica favorece a aprendizagem significativa de relações geométricas invariantes. Ao interagirem com a construção no GeoGebra, os estudantes observaram que, à medida que um dos catetos diminui progressivamente, o triângulo retângulo tende a “*se achatar*”, fazendo com que a hipotenusa se aproxime do comprimento do cateto maior. Essa percepção foi acompanhada por falas dos estudantes E05, E10 e E08, respectivamente como “*quase vira uma linha*”, “*a diagonal praticamente vira o lado*” e “*parece que o triângulo desaparece*”, evidenciando a articulação entre o comportamento matemático da figura e seu significado físico-geométrico.

Essas manifestações foram categorizadas como indícios de compreensão relacional, na medida em que os estudantes demonstraram compreender a permanência da relação pitagórica apesar das transformações na configuração do triângulo. Tal evidência dialoga diretamente com a TAS de Ausubel (2003), ao indicar que os novos conhecimentos foram ancorados de forma substantiva à estrutura cognitiva prévia, superando a simples memorização da fórmula. Além disso, a identificação de invariantes estruturais, mesmo diante de variações perceptíveis, aproxima-se da perspectiva de Piaget (1975) sobre o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

No momento de fechamento reflexivo da aula, os estudantes foram convidados a explicar, com suas próprias palavras, por que a relação pitagórica se mantinha válida em todas as situações exploradas. Falas como “*mesmo mudando os lados, a conta continua igual*” e “*a fórmula não depende do tamanho, depende do ângulo reto*”, feitas por E01 e E07, indicam a apropriação da lei como um princípio estrutural da geometria. Essa produção discursiva foi analisada na categoria verbalização e explicitação de significados, revelando o papel da linguagem na consolidação conceitual, conforme apontado por Vygotsky (2007).

Ao compararem os diferentes casos analisados, os estudantes destacaram o papel central do ângulo reto e distinguiram claramente os elementos variáveis e invariantes do triângulo. Comentários realizados por E05 e E12: “*pode mudar tudo, menos os noventa graus*” e “*se o ângulo é reto, a conta sempre fecha*” reforçam a compreensão do Teorema de Pitágoras como uma necessidade estrutural da geometria euclidiana, e não como uma regra isolada. Essa compreensão está em consonância com Novak (2010), ao enfatizar que a aprendizagem significativa envolve a integração consciente de conceitos em uma rede hierárquica de significados.

Conforme destaca Moreira (2011), práticas pedagógicas que favorecem a reflexão, a comparação de situações e a verbalização dos raciocínios contribuem para a estabilização dos significados construídos. Nesse sentido, a análise dos dados indica que a exploração dinâmica dos casos-limite, associada à mediação docente, favoreceu a consolidação de uma aprendizagem conceitualmente significativa, atendendo aos objetivos da sequência didática e às categorias analíticas definidas para a pesquisa.

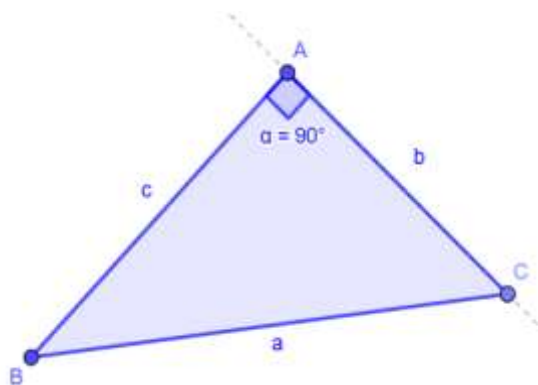
### **ATIVIDADE 16: Alturas e Projeções: Introdução das Relações Métricas**

A aula correspondente à Atividade 16 foi concebida como um segmento estruturante dentro da sequência didática dedicada às Relações Métricas no triângulo retângulo, tendo como objetivo central promover a compreensão conceitual da decomposição da hipotenusa em duas projeções:  $a = m + n$ . Essa proposta pedagógica foi fundamentada no pressuposto ausubeliano de que novos significados só se integram de forma estável quando encontram suporte em subsunçores adequadamente consolidados. Por essa razão, o planejamento enfatizou a continuidade epistemológica com as atividades anteriores, evitando que as novas relações emergissem como elementos isolados ou meramente formais. A relação métrica foi tratada como consequência natural da estrutura geométrica do triângulo retângulo, e não como uma identidade arbitrária a ser memorizada.

A etapa inicial da aula foi dedicada à ativação consciente do subsunçor angular e métrico, considerado etapa metodológica indispensável para sustentar a aprendizagem significativa. A inversão deliberada do triângulo, reposicionado com o ângulo de  $90^\circ$  no vértice superior, funcionou como um organizador prévio expositivo, no sentido atribuído por Ausubel (2003). Esse rearranjo visual produziu um estranhamento produtivo, evidenciado pelas falas: *“Fica diferente assim, mas o triângulo é o mesmo”* e *“A hipotenusa continua sendo a maior, só mudou de lugar”*. Tais declarações foram classificadas na categoria analítica de reconhecimento de invariantes geométricos, indicando que os estudantes conseguiram identificar propriedades estruturais que se mantêm independentemente da orientação da figura.

A Figura 41 construída pelos estudantes E09 e E12, ilustra essa inversão, destacando a preservação da hipotenusa na base e a nova disposição espacial do triângulo.

Figura 41 – Triângulo Retângulo Invertido (ou com o ângulo reto no topo), onde o vértice A contém o ângulo de  $90^\circ$ ; Atividade construída pro E09 e E12



Autores: Arquivos da pesquisa

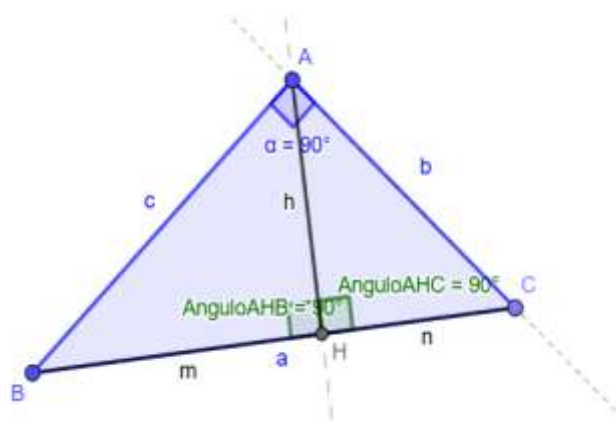
Na sequência, a exibição das medidas dos lados e a verificação da relação pitagórica  $b^2 + c^2 = a^2$  atuaram como mecanismo de *controle conceitual*, categoria analítica fundamentada na obra de Novak (1998). Comentários como “*Se não fechar o Pitágoras, tem algo errado*” sugeriram que o teorema já não era apenas uma fórmula aplicada em exercícios, mas um instrumento cognitivo internalizado, utilizado pelos estudantes para validar construções geométricas. Esse comportamento evidencia avanço da aprendizagem proposicional, em que os conceitos passam a manter relações explicativas entre si.

A introdução da altura relativa à hipotenusa ( $h$ ) marcou o início do processo de diferenciação progressiva estrutural, categoria analítica que descreve a ampliação da rede cognitiva pela incorporação de novos elementos a estruturas já estabelecidas. O traçado desse segmento no GeoGebra provocou interpretações imediatas nos discentes, evidenciando a percepção da nova configuração geométrica.

O estudante E05, ao observar a mudança na figura, exclamou: “*Agora virou dois triângulos*”, enquanto o estudante E09 complementou: “*Os dois também são retos*”, referindo-se à perpendicularidade da altura em relação à base. Essas verbalizações demonstram que a estrutura cognitiva dos alunos não apenas acolheu o novo elemento ( $h$ ), mas reorganizou instantaneamente o triângulo original em uma nova relação de partes, estabelecendo as condições necessárias para a exploração das relações métricas que seriam desenvolvidas a seguir.

Tais manifestações revelam que os estudantes identificaram espontaneamente o surgimento de dois novos triângulos retângulos  $\Delta AHB$  e  $\Delta AHC$ , antecipando a futura discussão sobre semelhança. A Figura 42, inserida nesse ponto, apresenta o triângulo original, a altura  $h$  e o ponto  $H$ , tornando visível a decomposição geométrica.

Figura 42 – Representação do Triângulo Retângulo com a hipotenusa na base e sua decomposição em altura e projeções ortogonais; Atividade construída pro E09 e E12



Autores: Arquivos da pesquisa

A nomeação das projeções  $m$  e  $n$  desempenhou papel fundamental no processo de atribuição de significado. À luz de Ausubel, tal compreensão evidencia uma aprendizagem que se ancora em estruturas cognitivas prévias, superando a simples memorização simbólica. atribuição de funções geométricas aos novos segmentos evidenciou que os estudantes estabeleceram relações substantivas com o conteúdo. Ao observar a decomposição da figura no GeoGebra, o estudante E05 afirmou: *“O triângulo se divide, mas o lado maior continua sendo o mesmo”*, demonstrando a compreensão da hipotenusa como a soma das projeções. Complementando essa percepção, o estudante E11 destacou: *“Cada pedaço da hipotenusa é a projeção do cateto correspondente”*, revelando um nível elevado de abstração ao nomear corretamente os elementos métricos e vinculá-los aos seus respectivos catetos.

Essas verbalizações indicam que os discentes não apenas memorizaram as nomenclaturas, mas integraram os novos conceitos ( $m$  e  $n$ ) à estrutura pré-existente do triângulo retângulo. Segundo a teoria de Ausubel (2003), essa ancoragem permite que os termos técnicos passem a ter significado real, transformando o que seria uma *“fórmula de projeção”* em uma relação espacial compreendida e articulada pelos próprios alunos.

Nesse movimento analítico, observa-se o fenômeno que Vygotsky (2001) descreve como a passagem do pensamento espontâneo para o pensamento científico. Segundo o autor, os conceitos espontâneos são aqueles construídos na experiência cotidiana, de forma assistemática e baseada na percepção imediata. Já os conceitos científicos são adquiridos por meio da instrução deliberada, caracterizando-se pela consciência e pela inserção em um sistema hierárquico de relações.

No contexto desta atividade, as falas dos estudantes sinalizam exatamente essa transição: o reconhecimento intuitivo da configuração geométrica (pensamento espontâneo) evolui para a formalização matemática (pensamento científico). Quando o estudante deixa de apenas "ver" dois triângulos e passa a identificar a "projeção de um cateto", ele está submetendo sua percepção visual a um sistema lógico-abstrato. Essa evolução demonstra que a mediação pedagógica, potencializada pelo uso do GeoGebra, permitiu que os estudantes organizassem seus conceitos cotidianos sob uma nova estrutura de generalização, conferindo rigor e aplicabilidade ao conhecimento matemático em construção.

O momento de análise da decomposição do triângulo foi particularmente significativo do ponto de vista cognitivo. Ao perceberem que tanto o triângulo original quanto os dois triângulos menores preservavam o ângulo reto, os estudantes E03 e E09, formularam generalizações como: "*É sempre um triângulo retângulo dentro de outro*" e "*O ângulo reto se espelha*". Essas formulações foram enquadradas na categoria de generalização estrutural, descrita por Moreira (2015) como evidência de reconciliação progressiva entre níveis distintos de generalidade conceitual. Esse é um momento-chave na aprendizagem significativa: quando o estudante passa a perceber relações internas que não foram explicitamente ensinadas, mas que emergem pela organização lógica do conhecimento.

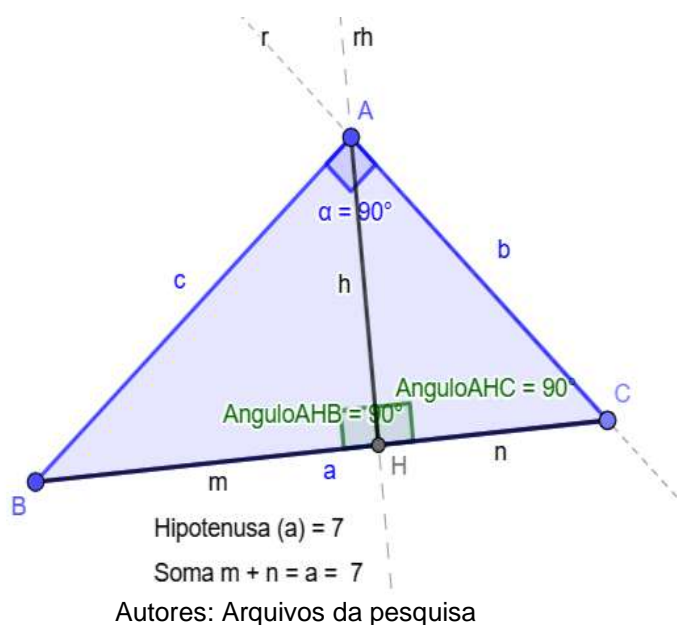
A fase de reconciliação integrativa foi aprofundada com a formalização da relação métrica  $a = m + n$ . Ao verificarem que a soma das projeções correspondia exatamente ao comprimento da hipotenusa, os estudantes reagiram de maneira natural, com enunciados como "*É óbvio depois que vê*" e "*A base inteira é feita das duas partes*".

A manipulação dinâmica da figura, realizada no GeoGebra, intensificou a percepção de invariância. Mesmo modificando os vértices do triângulo (alongando, inclinando ou reduzindo seus lados), os estudantes constataram que a relação métrica

permanecia válida. Comentários como “*Muda o tamanho, mas a conta continua valendo*” reforçaram a noção de invariância sob transformação, categoria analítica que expressa compreensão profunda das condições de validade de um teorema. A fala “*Se eu sei uma projeção e o total, posso calcular a outra sem medir*” foi categorizada como funcionalidade cognitiva, evidenciando a transição do domínio conceitual para o domínio operatório.

A Figura 43, inserida nessa etapa, destaca visualmente a relação entre o todo (a) e suas partes (m e n), reforçando a noção de que a identidade é estrutural e não arbitrária. Essa etapa evidencia que o novo conceito foi integrado à estrutura cognitiva de forma reconciliada, consolidando-se como significado matemático e não como informação isolada.

Figura 43 – Reconciliação Integrativa da Hipotenusa: A Identidade  $a = m + n$ ; Atividade construída por E09 e E12



Em síntese, a Atividade 16 configurou uma experiência didática consistente, articulando mediação digital, geometria dinâmica, análise discursiva e aplicação contextual. As categorias analíticas identificadas — reconhecimento de invariantes, controle conceitual, diferenciação progressiva estrutural, ancoragem substantiva, generalização estrutural, reconciliação integrativa, invariância sob transformação e funcionalidade cognitiva — permitem afirmar que a relação métrica  $a = m + n$  foi internalizada como significado e aplicada de modo autônomo. Esse conjunto de evidências mostra que o percurso metodológico adotado favoreceu a construção de

conhecimento matemático com profundidade conceitual, preparando o terreno cognitivo para o estudo das relações métricas subsequentes.

### **ATIVIDADE 17: Semelhança na Altura: Correspondência Angular**

A proposta didática do Atividade 17 – Semelhança na Altura: Correspondência Angular, foi organizada para aprofundar a compreensão estrutural da semelhança entre os três triângulos retângulos gerados pela altura relativa à hipotenusa, tomando como fundamento metodológico a TAS de Ausubel (2003), segundo a qual novos conceitos somente adquirem estabilidade cognitiva quando encontram uma rede de subsunçores previamente consolidados. Dessa forma, a unidade pedagógica buscou conduzir os estudantes à demonstração formal da semelhança pelo critério AA (Ângulo-Ângulo) e, em seguida, à dedução das relações métricas clássicas do triângulo retângulo, compreendidas como consequências lógicas dessa semelhança — uma abordagem coerente com a ênfase conceitual encontrada em Novak (1981) sobre reconciliação integradora e diferenciação progressiva no ensino de matemática.

A abertura da aula consistiu na ativação do subsunçor geométrico constituído nas atividades anteriores, quando os estudantes foram instruídos a reconstruírem no GeoGebra o triângulo  $\triangle ABC$ , retângulo em A, com a altura  $h = \overline{AH}$  traçada sobre a hipotenusa  $\overline{BC}$ , a qual foi decomposta nos segmentos  $m = \overline{BH}$  e  $n = \overline{HC}$ . Tal estratégia funcionou como organizador prévio expositivo, um dispositivo explicitamente defendido por Ausubel (2003) como condição para que o novo conteúdo se torne potencialmente significativo. A reconstrução gráfica exigiu que os estudantes revisitassem significados previamente internalizados — relação métrica, projeções e perpendicularidade — antes de ingressarem na nova esfera de formalização angular.

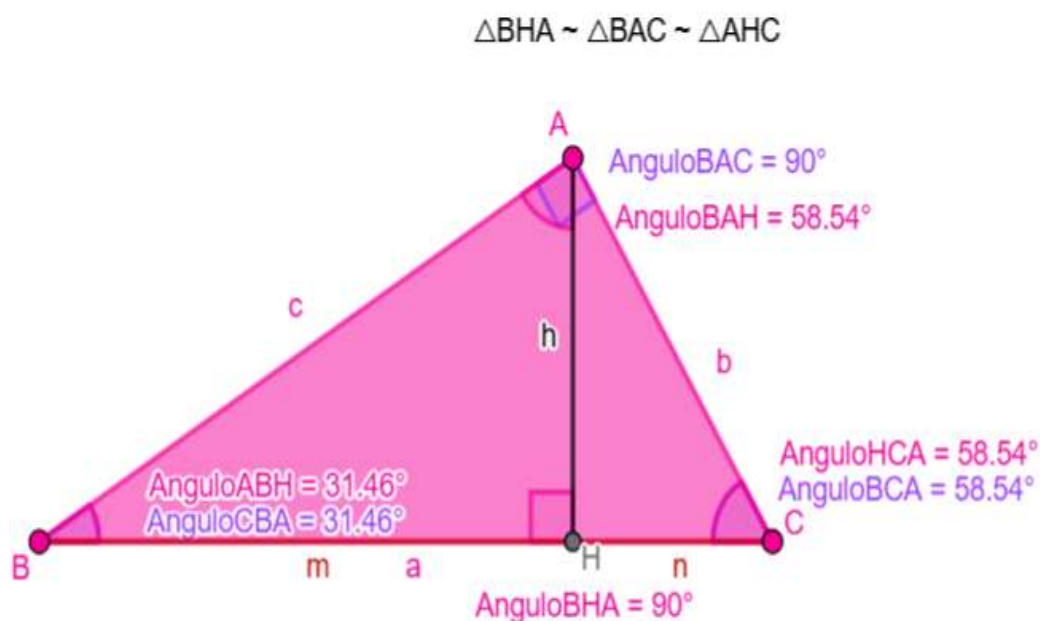
A etapa seguinte, ainda dentro da fase de ativação cognitiva, exigiu que os estudantes isolassem mentalmente e visualmente os três triângulos resultantes da decomposição: o triângulo  $\triangle BAC$ , o triângulo  $\triangle BHA$  e o triângulo  $\triangle AHC$ . Esse procedimento corresponde ao que Moreira e Masini (2011) denominam seleção e diferenciação de objetos conceituais, uma vez que obriga o estudante a reconhecer sentido interno em entidades que antes eram apenas partes de uma figura maior.

A partir desse ponto, inicia-se a fase de diferenciação progressiva, cujo foco é aplicar repetidamente o critério AA para demonstrar que os três triângulos são

semelhantes entre si. Essa escolha metodológica está de acordo com propostas curriculares brasileiras que situam a semelhança como condição para dedução de relações métricas (Brasil, 2024). Primeiro, provou-se a semelhança entre o triângulo  $\Delta CHA$  e o triângulo  $\Delta BAC$ , utilizando dois pares angulares congruentes: o ângulo reto comum  $\angle CHA = 90^\circ$  e  $\angle BAC = 90^\circ$  e o ângulo compartilhado em  $\hat{C}$ . Esse processo corresponde ao que Moreira (2015) descreve como vinculação relacional, em que o estudante identifica nexos lógicos entre entidades antes percebidas apenas pela forma.

A Figura 44, ilustra a reconstrução do triângulo e seus segmentos característicos, tornando visíveis as entidades geométricas que serviram de referência para todas as comparações posteriores.

Figura 44 – Semelhança dos Três Triângulos Retângulos e Dedução das Relações Métricas; Atividade construída por E01, E07 e E08

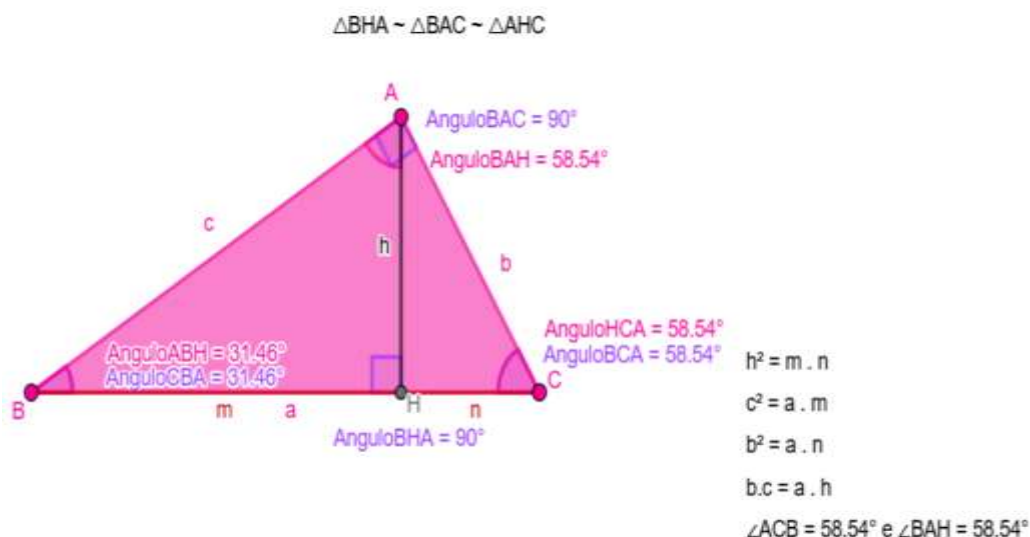


A segunda aplicação do critério AA envolveu a semelhança entre o triângulo  $\Delta AHB$  e o triângulo  $\Delta BAC$ , agora utilizando o ângulo compartilhado em  $\hat{B}$  e o ângulo reto.

Ao pedir que os estudantes medissem dinamicamente esses ângulos no GeoGebra, a professora explorou o que Borba e Villarreal (2005) chamam de pensamento matemático reorganizado pela tecnologia, pois a manipulação dos vértices mantém a congruência invariável, evidenciando um caráter estrutural e não

contingente da correspondência angular. A Figura 45, representa medições dinâmicas que permanecem constantes a despeito das variações geométricas.

Figura 45 – Semelhança dos Três Triângulos Retângulos e Formalização das Relações Métricas; Atividade construída por E01, E07 e E08

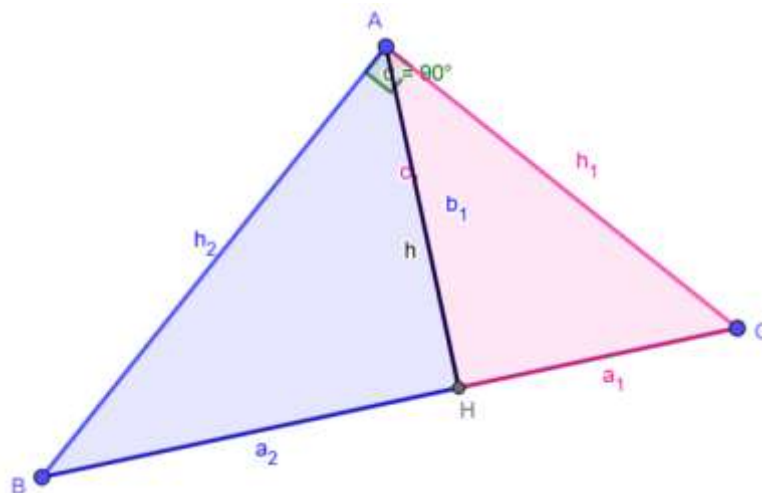


Autores: Arquivos da pesquisa

O momento metodologicamente relevante ocorreu quando os estudantes identificaram a correspondência entre  $\hat{C}$  do triângulo maior e  $\angle CAH$  do triângulo  $\triangle AHC$ , assim como entre o ângulo  $\hat{B}$  e o ângulo  $\angle BHA$ . O reconhecimento dessa equivalência, sustentado por manipulação geométrica dinâmica, constitui exemplo de reconciliação local (Novak & Cañas, 2010), pois produz uma conexão entre conceitos que não estava explicitada previamente, emergindo do raciocínio do próprio estudante.

A terceira etapa da aula concentrou-se na reconciliação integrativa, convertendo as semelhanças estabelecidas em proporcionalidades formais. As relações métricas clássicas surgiram então pela comparação sistemática de lados correspondentes: a semelhança entre  $\triangle BHA$  e  $\triangle AHC$  conduziu à dedução de  $h^2 = m \cdot n$ ; a semelhança entre  $\triangle BHA$  e  $\triangle BAC$  conduziu à dedução de  $c^2 = a \cdot m$ ; e a semelhança entre  $\triangle AHC$  e  $\triangle BAC$  produziu  $b^2 = a \cdot n$ . Esse movimento evidencia uma reorganização conceitual em que relações inicialmente percebidas de forma visual passam a ser compreendidas como consequências necessárias de propriedades estruturais, caracterizando um processo de transferência significativa de segunda ordem, conforme discutido por Moreira (2015). A Figura 46 apresenta o triângulo com as proporções destacadas, sintetizando a articulação entre visualização, argumentação geométrica e formalização algébrica.

Figura 46 – Triângulo retângulo com altura relativa à hipotenusa, evidenciando a semelhança entre os triângulos  $\triangle BHA$ ,  $\triangle BAC$  e  $\triangle AHC$ ; Atividade construída por E04, E09 e E11



Autores: Arquivos da pesquisa

Esse processo culminou numa atividade de aplicação contextualizada ao contexto rural, elemento coerente com diretrizes contemporâneas que integram matemática e práticas produtivas. Ao calcular a altura estrutural de uma viga utilizando a relação  $h^2 = m.n$ , por exemplo, com  $m = 4$  e  $n = 9$ , resultando em  $h = 6m$ , os estudantes vivenciaram aquilo que Ausubel (2003) denomina transferência funcional do significado, quando o conceito matemático passa a organizar ações em um ambiente prático.

Assim estruturada, a Atividade 17 configura-se como uma experiência formativa que articula, de modo integrado, visualização geométrica, argumentação lógica, generalização conceitual e formalização matemática, promovendo condições para que a aprendizagem ocorra de maneira progressiva e significativa. Sob a perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa, tal organização didática favorece a ancoragem de novos conhecimentos em estruturas cognitivas previamente constituídas, conforme proposto por Ausubel (2003), ao estimular a relação não arbitrária entre conceitos já estabilizados e novas ideias matemáticas. Paralelamente, a explicitação das correspondências entre elementos geométricos e das relações de proporcionalidade entre triângulos evidencia um movimento de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, em consonância com as contribuições de Novak (1999) e Cañas (2010), ao favorecer a construção de redes relacionais de significado. A mediação tecnológica, possibilitada pelo uso do GeoGebra, também assume papel central nesse processo, pois, conforme discutem Borba e Villarreal

(2005), a interação dinâmica com objetos matemáticos reorganiza o pensamento ao permitir a observação da invariância estrutural durante a manipulação geométrica. Além disso, a proposta encontra respaldo nas orientações curriculares brasileiras recentes, que destacam a dedução das relações métricas a partir da semelhança de triângulos como estratégia para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da argumentação matemática (Brasil, 2024). Nessa perspectiva, a atividade ultrapassa abordagens centradas na memorização mecânica de fórmulas e consolida a justificativa conceitual como fundamento do saber matemático escolar. Como síntese interpretativa, observa-se que a semelhança passa a assumir o papel de eixo estruturador de significado, articulando diferentes registros de representação e estabelecendo bases cognitivas consistentes para aprendizagens futuras, especialmente aquelas relacionadas à formalização das relações trigonométricas.

### **ATIVIDADE 18: Relação Métrica do Cateto**

A Atividade 18 foi concebida como uma situação de aprendizagem voltada à compreensão conceitual das relações métricas dos catetos,  $c^2 = a \cdot m$  e  $b^2 = a \cdot n$ , articulando exploração geométrica, argumentação dedutiva e formalização matemática. A sequência didática fundamenta-se na retomada da semelhança entre os triângulos  $\triangle BHA$  e  $\triangle BAC$ , mobilizada como subsunçor cognitivo, em consonância com a TAS de Ausubel (2003). Nesse contexto, a construção das relações métricas emerge como desdobramento lógico de conhecimentos previamente estabilizados, deslocando o foco do uso mecânico de fórmulas para a compreensão estrutural das relações geométricas envolvidas. A utilização do GeoGebra contribuiu para esse processo ao possibilitar a observação de invariantes durante a manipulação da figura, reforçando a articulação entre visualização e dedução, conforme discutem Borba e Villarreal (2005).

Do ponto de vista conceitual, essas expressões evidenciam que os quadrados dos catetos derivam da proporcionalidade entre lados correspondentes dos triângulos semelhantes. Assim, antes mesmo de introduzir o Teorema de Pitágoras, a geometria já estabelece relações algébricas estruturadas a partir da semelhança.

O aspecto central dessa configuração reside no fato de que a soma das duas relações métricas conduz naturalmente ao resultado pitagórico:

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n)$$

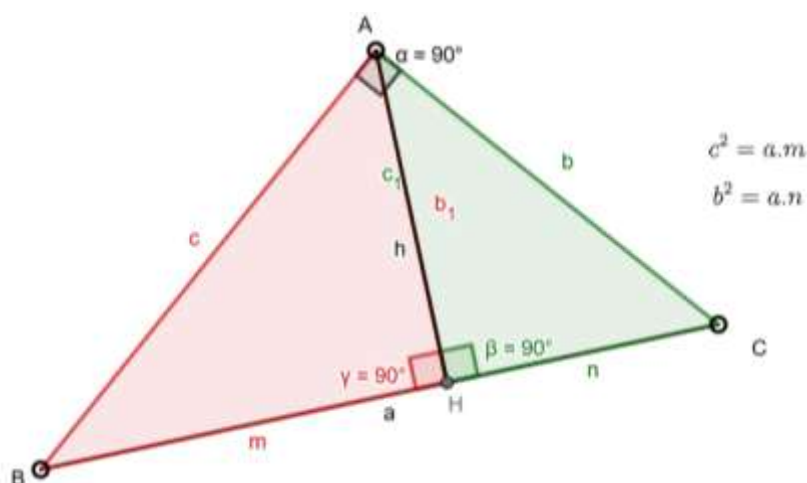
Como  $m + n = a$ , obtém-se diretamente:

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

Desse modo, o Teorema de Pitágoras emerge como culminância lógica de um processo dedutivo iniciado na semelhança de triângulos, e não como um princípio independente. Essa leitura geométrica reforça a compreensão estrutural do conteúdo, pois evidencia que a relação pitagórica é consequência das propriedades internas do próprio triângulo retângulo.

A etapa inicial da atividade promoveu a reativação de conhecimentos relacionados à decomposição do triângulo retângulo e à correspondência entre lados semelhantes, estabelecendo continuidade cognitiva com as tarefas anteriores. A projeção da figura favoreceu a identificação dos elementos estruturais necessários à dedução, funcionando como organizador prévio e preparando o avanço para a formalização algébrica. Na sequência, a exploração dinâmica possibilitou reconhecer que as proporcionalidades observadas decorrem da semelhança entre os triângulos, sustentando a transição da percepção visual para a argumentação dedutiva. Assim, as expressões  $c^2 = a \cdot m$  e  $b^2 = a \cdot n$ , passaram a ser compreendidas como consequências necessárias da configuração geométrica, e não como resultados apresentados de forma isolada. A Figura 47, construída por E06, ilustra esse momento da atividade, evidenciando a articulação entre visualização, investigação e formalização matemática.

Figura 47 - Configuração clássica do triângulo retângulo com a altura relativa à hipotenusa, usada para deduzir as relações métricas no triângulo retângulo; Atividade construída por E06



Fonte: Arquivos da pesquisa

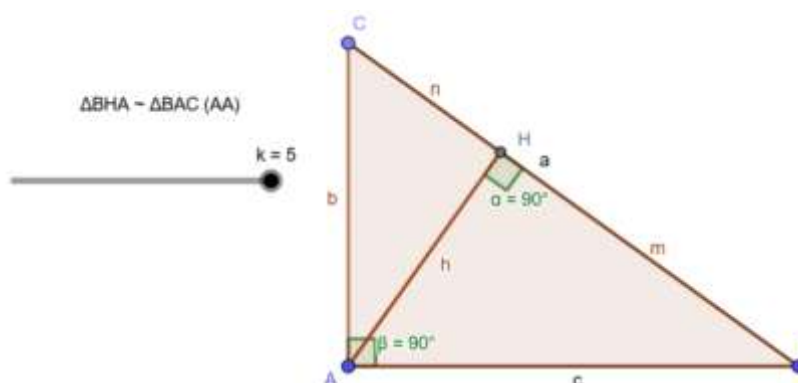
No momento inicial da atividade, a projeção da figura possibilitou a ativação de conhecimentos prévios, categoria analítica central da pesquisa, ao convidar os estudantes a retomarem a observação dos triângulos menor e maior. Por meio de questionamentos orientadores — *“Que ângulo eles compartilham? E qual deles é o ângulo de 90°?”* — a professora estimulou a explicitação dos critérios geométricos mobilizados pelos alunos. A resposta do estudante E05 — *“O ângulo de B é igual nos dois e o ângulo reto aparece em H no pequeno e em A no grande”* — evidencia a identificação de invariantes estruturais, particularmente a igualdade angular, configurando o reconhecimento do critério AA de semelhança. Essa verbalização espontânea foi assumida como âncora conceitual, favorecendo a estabilização do conceito no interior da estrutura cognitiva dos estudantes.

Na sequência, ao conduzir a construção da proporção entre lados correspondentes, a professora promoveu um ambiente de mediação pedagógica intencional, categoria associada à diferenciação progressiva dos conceitos geométricos. O processo foi desenvolvido de forma dialogada, com pausas para problematizações conceituais, permitindo que os estudantes explicitassem relações e justificativas. A fala do estudante E01: *“Se o triângulo pequeno está ‘dentro’ do grande, os lados não podem ficar bagunçados, têm que corresponder do mesmo jeito”*, revela a construção de relações conceituais, indicando a compreensão de que a semelhança implica a preservação das razões entre lados correspondentes. Esse movimento interpretativo está em consonância com Novak e Cañas (2010), ao evidenciar a formação de proposições conceituais significativas, nas quais conceitos e relações passam a integrar uma rede hierárquica de significados.

Conforme ilustrado na Figura 48, o seletor  $k$  foi empregado como parâmetro de escala na construção dinâmica, permitindo a variação das dimensões do triângulo sem alterar sua estrutura angular. Ao atuar como fator multiplicativo dos comprimentos, esse recurso tornou visível que a ampliação ou redução da figura modifica apenas o tamanho, preservando as proporções entre lados correspondentes e, conseqüentemente, a semelhança entre os triângulos  $\triangle BHA$  e  $\triangle BAC$ . Do ponto de vista analítico, a manipulação do parâmetro favoreceu a explicitação da invariância como elemento estrutural do conceito de semelhança, deslocando a atenção dos estudantes de aspectos perceptivos para propriedades matemáticas estáveis. Observou-se que, ao controlar o valor de  $k$ , os estudantes passaram a distinguir forma e escala como ideias conceitualmente distintas, compreendendo que a semelhança

depende da conservação das relações angulares e proporcionais, e não de medidas absolutas. Esse movimento evidencia um avanço cognitivo consistente com a aprendizagem significativa, na medida em que a exploração dinâmica possibilitou reinterpretar conhecimentos prévios sob uma nova organização conceitual, articulando visualização, linguagem matemática e argumentação dedutiva. Assim, o uso do seletor não se restringiu a um recurso técnico de manipulação, mas constituiu um instrumento epistemológico que favoreceu a construção de significados mais estáveis acerca da semelhança geométrica no ambiente do GeoGebra.

Figura 48 - Simulação Dinâmica: Verificação da Semelhança  $\Delta BHA \sim \Delta BAC$  via Seletor de Escala (k), Atividade construída por E02, E03 e E11



Autores: Arquivo da pesquisa

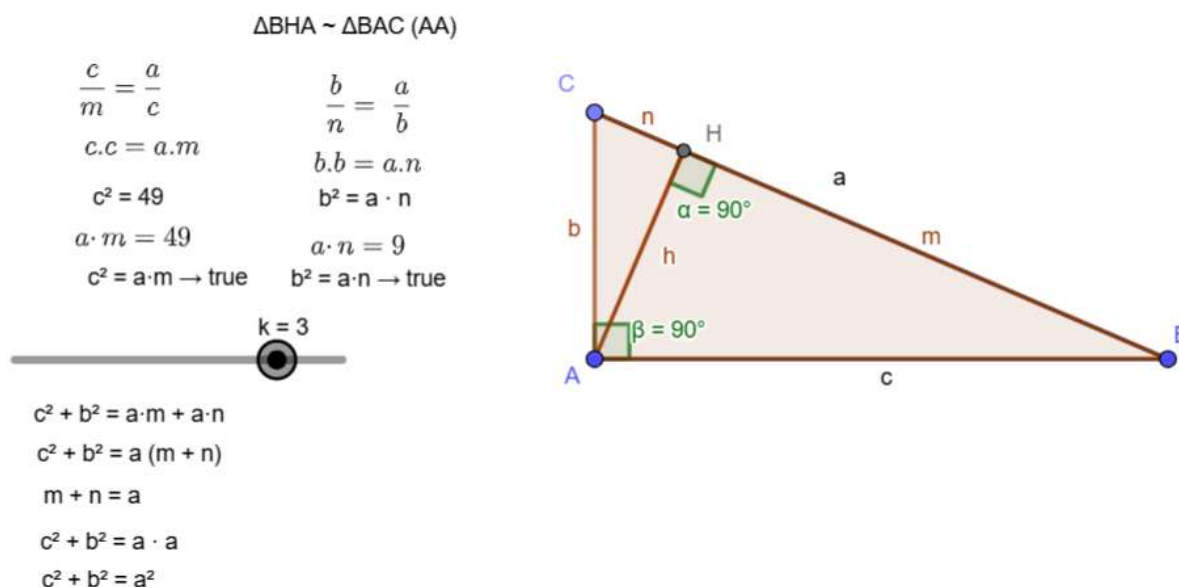
Após identificar os pares correspondentes, a turma monta a proporção  $\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$ .

Aqui fez-se necessário reforçar que essa relação não é arbitrária, mas decorre diretamente da estrutura de semelhança: “Se os triângulos são semelhantes, a razão de um lado do pequeno com o correspondente do grande precisa ser a mesma, sempre”. A fala desencadeia uma discussão entre os estudantes E05 e E12, em que um deles observa: “Então se eu só multiplicar em cruz eu já chego na lei?”. Ao realizar a operação, a turma, chegou ao produto  $c^2 = a \cdot m$ .

Na segunda parte da atividade, a ênfase passa da dedução algébrica para a verificação dinâmica. Neste momento foi pedido que os estudantes movimentassem os vértices  $B$  e  $C$  no GeoGebra, alterando a forma do triângulo, e que observassem a permanência da igualdade entre  $c^2$  e  $a \cdot m$ . O estudante E05, surpreso, afirma: “Mesmo mudando tudo, continua igual... é como se a fórmula não deixasse de funcionar!”. Essa percepção é essencial para o entendimento da invariância geométrica, aspecto frequentemente enfatizado nos estudos sobre visualização matemática em ambientes digitais. A Figura 49 demonstra a Reconciliação Integrativa, pois a partir da

semelhança dos triângulos (AA), deduzem-se as relações dos catetos  $b^2 = a \cdot n$  e  $c^2 = a \cdot m$  que, somadas, resultam na prova algébrica do Teorema de Pitágoras.

Figura 49 – Dedução das Relações Métricas e do Teorema de Pitágoras, Atividade construída por E01, E09 e E12



Autores: Arquivos da pesquisa

Como síntese de contribuição didática, a Atividade 18 evidencia uma organização pedagógica em que a construção do conhecimento geométrico ocorre por meio da articulação entre investigação, argumentação e formalização matemática. Ao tomar a semelhança de triângulos como eixo estruturador, a proposta possibilitou que os estudantes compreendessem as relações métricas e o Teorema de Pitágoras como resultados de um encadeamento lógico progressivamente construído, e não como fórmulas apresentadas de forma isolada. Esse percurso favoreceu a mobilização de conhecimentos prévios e a reorganização conceitual descrita na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2003), ao promover a integração entre ideias inicialmente fragmentadas e uma estrutura conceitual mais ampla e coerente.

Do ponto de vista didático, a atividade demonstra que a combinação entre exploração dinâmica no GeoGebra, mediação docente e problematização investigativa contribui para deslocar o foco do ensino da repetição de procedimentos para a compreensão das relações matemáticas subjacentes. A dedução das relações métricas, seguida da reconstrução do Teorema de Pitágoras, configurou-se como oportunidade para que os estudantes estabelecessem conexões entre representação geométrica, linguagem algébrica e argumentação dedutiva, fortalecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Assim, a principal contribuição desta atividade para o ensino de geometria reside na construção de um percurso em que a demonstração emerge do próprio processo investigativo, conferindo significado às expressões algébricas e favorecendo aprendizagens mais estáveis e transferíveis. Nesse contexto, a semelhança de triângulos assume papel central não apenas como conteúdo curricular, mas como princípio epistemológico capaz de sustentar futuras compreensões em geometria e trigonometria, reafirmando a matemática escolar como prática reflexiva, argumentativa e conceitualmente fundamentada.

### **ATIVIDADE 19: Triângulo Pitagórico (3, 4, 5) e Aplicações**

O desenvolvimento da Atividade 19 tem como eixo central a consolidação da compreensão do Teorema de Pitágoras e das relações métricas nos triângulos retângulos por meio da tripla inteira 3-4-5, mobilizando uma estratégia didática que articula visualização geométrica, cálculo numérico, argumentação e contextualização prática. Tomando como referência a TAS de Ausubel, a aula foi estruturada em três momentos complementares, organizador prévio, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, de modo que novos conceitos se ancorassem na estrutura cognitiva pré-existente dos estudantes a partir de um “subsunçor” claramente identificado: as relações métricas  $h^2 = m \cdot n$ ,  $b^2 = a \cdot m$ ,  $c^2 = a \cdot n$ ,  $b \cdot c = a \cdot h$  e o próprio Teorema de Pitágoras. Essa organização não visa apenas o domínio operacional das fórmulas, mas sobretudo a construção de significados conceituais, tal como defendem Novak e Cañas ao tratarem da formação de redes relacionais que permitem compreender e explicar (Novak & Cañas, 2010).

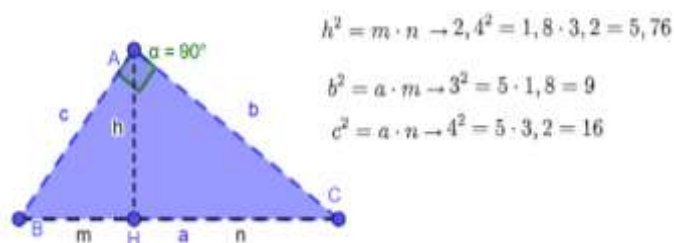
A aula iniciou-se com a utilização de um organizador prévio, com o objetivo de estabelecer um ponto de ancoragem cognitiva para o desenvolvimento dos conceitos abordados na sequência didática. A professora retomou a conhecida relação empírica 3-4-5, frequentemente empregada em situações práticas para a construção de ângulos retos, destacando que, nesse caso, os catetos medem 3 e 4 unidades, enquanto a hipotenusa possui medida igual a 5 unidades. A retomada desse conhecimento favoreceu a aproximação entre experiências cotidianas e o conteúdo matemático escolar, mobilizando significados previamente construídos pelos estudantes. Tal conexão pode ser observada na fala de um deles: “Meu pai usa isso

na cerca: três para cá, quatro para lá e pronto, já fica reto” (E12). Esse momento inicial contribuiu para estabelecer continuidade cognitiva entre o saber empírico e a formalização matemática, preparando o terreno para a problematização e a posterior dedução do Teorema de Pitágoras. Essa manifestação confirma a hipótese de Ausubel (2003) de que a aprendizagem se torna mais significativa quando o conteúdo escolar encontra equivalentes já estruturados na experiência concreta do aprendiz. A partir dessa ancoragem, construiu-se no GeoGebra o triângulo com vértices  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 0)$  e  $C = (0, 3)$ , permitindo verificar que a hipotenusa mede 5 unidades. Ao observar o valor exibido na tela, o estudante E04 reage: *“Então não é coincidência... sempre vai dar cinco?”*. A pergunta abre espaço para transitar do empírico ao racional, deslocando o foco para a justificativa matemática.

No segundo momento, promoveu-se a diferenciação progressiva — princípio segundo o qual novas informações foram progressivamente articuladas e especializadas (Ausubel, 2003). Com os valores fixados  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$ , a professora conduziu o cálculo das projeções  $m$  e  $n$  pela relação métrica do cateto. Ao resolver  $4^2 = 5 \cdot m$ , o estudante E07 comenta: *“Nunca pensei que dava número quebrado... eu achava que tudo ia fechar certinho porque são números inteiros”*. Esse comentário é relevante porque explicita um obstáculo epistemológico comum: a crença de que um triângulo retângulo de lados inteiros implica relações métricas também inteiras. A presença de  $m = 3,2$  e  $n = 1,8$  problematiza essa expectativa, conduzindo o grupo à compreensão do caráter proporcional das relações. Em seguida, calculou-se a altura pela relação  $h^2 = m \cdot n$ , resultando em  $h = 2,4$ . A expressão de surpresa verbalizada por E07: *“Então a altura não depende só dos catetos, depende das projeções também!”* evidencia a reorganização cognitiva proposta por Ausubel, pois o estudante reformula o modo como relaciona atributos do triângulo. A Figura 50 apresenta a representação dinâmica de um triângulo retângulo ampliado no ambiente GeoGebra, destacando a altura relativa à hipotenusa e as relações métricas decorrentes dessa construção. A divisão da hipotenusa em dois segmentos,  $m$  e  $n$ , permite estabelecer igualdades fundamentais:  $h^2 = m \cdot n$ ,  $b^2 = a \cdot m$  e  $c^2 = a \cdot n$ . Essas relações evidenciam como a decomposição do triângulo em figuras semelhantes conduz à compreensão do caráter proporcional das medidas envolvidas. No contexto da atividade, a visualização da figura favoreceu a problematização de concepções espontâneas dos estudantes, e possibilitou a

reorganização cognitiva ao revelar que a altura depende não apenas dos catetos, mas também das projeções sobre a hipotenusa.

Figura 50 – Representação dinâmica da ampliação de um triângulo retângulo e suas relações de proporcionalidade; Atividade construída por E04

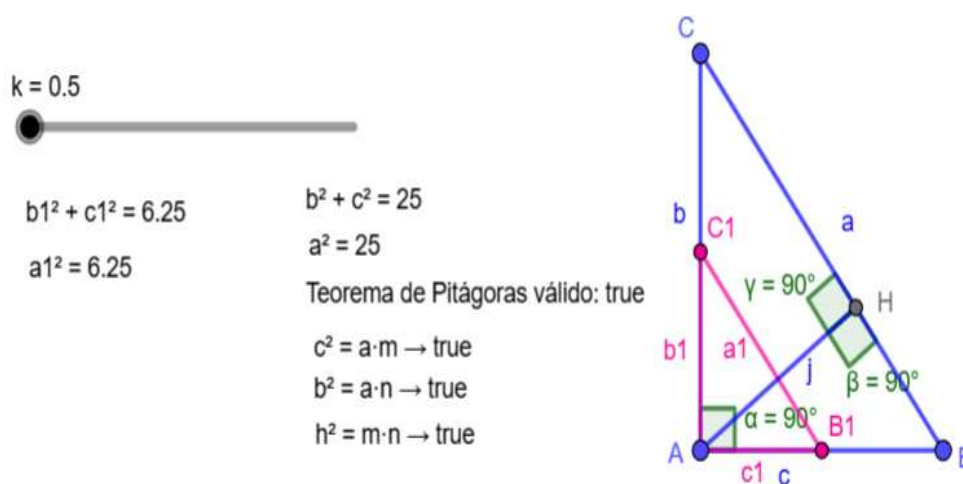


Autor: Arquivos da pesquisa

Em seguida, solicitou-se que os estudantes movimentassem os vértices para deformar o triângulo, abandonando a tripla inteira. A intenção é mostrar que as relações métricas permanecem válidas mesmo em contextos não inteiros. Essa dinâmica dialoga diretamente com Borba e Villarreal (2005), que defendem a mediação tecnológica como espaço de experimentação, teste e leitura gráfica capaz de reorganizar a forma como o sujeito aprende matemática. Ao manipular a construção, E03 afirma: “Agora mudou tudo, mas a conta continua funcionando... não é só decorar”. Trata-se de um avanço metacognitivo: o estudante reconheceu a estabilidade estrutural do teorema para além dos exemplos numéricos.

A Figura 51 representa o momento de reconciliação integrativa, introduziu o conceito de semelhança utilizado como chave para compreender as escalas das triplas pitagóricas. Ao ampliar o triângulo 3 – 4 – 5 para 6 – 8 – 10, os estudantes identificaram razão 2 entre catetos e hipotenusa.

Figura 51: Validação das relações  $b^2 = a \cdot n$ ,  $c^2 = a \cdot m$  e  $h^2 = m \cdot n$  por meio da geometria dinâmica; Atividade construída por E09

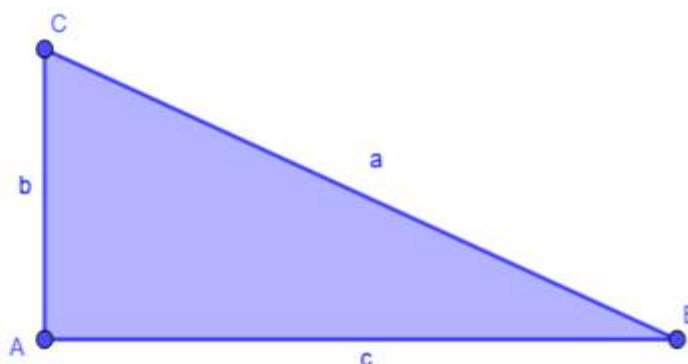


Autor: Arquivo da pesquisa

Em debate coletivo, a professora questionou: “Se ampliamos os lados, o que acontece com a altura e com as projeções?”. E09 responde: “Devem dobrar também... porque tudo está na mesma proporção”. A resposta mostra uma operação cognitiva de reconciliação entre relações métricas e semelhança, estabelecendo vínculos conceituais que evitam fragmentação, exatamente como sugere Ausubel (2003).

Por fim, solicitou-se a busca de outras triplas pitagóricas, como 5 – 12 – 13, fomentando a continuidade investigativa. Todo o percurso confirma os pressupostos de Novak e Cañas (2010) sobre a importância de construir redes conceituais interligadas, mostrando a função epistêmica da mediação tecnológica discutida por Borba e Villarreal (2005) e concretiza o princípio central de Ausubel (2003): aprender é atribuir significado. A Figura 52 apresenta a demonstração do Teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo de catetos 5 e 12. O cálculo confirma que a soma dos quadrados desses lados resulta em 169, correspondendo ao quadrado da hipotenusa, que mede 13.

Figura 52: Validação aritmética do Teorema de Pitágoras utilizando o terno pitagórico (5, 12, 13); Atividade construída por E09



$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

Fonte: Arquivo da pesquisa

### **ATIVIDADE 20: Reconciliação Integrativa Final: Síntese Geométrica**

A Atividade 20 constitui o fechamento conceitual de toda a sequência didática desenvolvida nas aulas anteriores, funcionando como um momento de síntese em que os estudantes articularam, de forma consciente e justificada, as relações entre o Teorema de Tales, os princípios de semelhança e o Teorema de Pitágoras. Essa etapa foi planejada à luz da TAS de Ausubel, que destaca a importância da

reconciliação integrativa como processo de reorganização conceitual capaz de produzir estruturas cognitivas mais amplas, coesas e estáveis. Assim, toda a aula foi concebida para que os estudantes percebessem, não apenas de modo operacional, mas estrutural, que Tales, Semelhança e Pitágoras não são teoremas isolados, mas partes de um mesmo sistema geométrico.

A atividade teve início com a construção, no GeoGebra, de um triângulo retângulo  $\triangle ABC$  e de um triângulo menor  $\triangle FDE$ , obtido pela introdução de uma reta paralela a um dos lados do triângulo maior. A construção foi organizada de modo que os triângulos compartilhassem a mesma estrutura angular, permitindo estabelecer a correspondência entre os lados homólogos  $AB \leftrightarrow DE$ ,  $AC \leftrightarrow DF$  e  $BC \leftrightarrow EF$ . O controle deslizante  $k$  foi utilizado como fator de escala, possibilitando ampliar ou reduzir o triângulo  $\triangle DEF$  sem alterar sua forma, tornando visível a preservação das relações geométricas fundamentais. A montagem desse cenário teve como função ativar o subsunçor central da unidade didática: a compreensão de que triângulos semelhantes preservam seus ângulos correspondentes e mantêm proporções constantes entre seus lados homólogos. Durante a exploração inicial, os estudantes observaram que o triângulo  $\triangle ABC$  mantinha a mesma forma do triângulo  $\triangle DEF$ , ainda que apresentasse dimensões menores. Essa percepção foi verbalizada de maneira espontânea ao identificarem que o triângulo menor era *“igual ao grande, apenas reduzido”*, evidenciando a compreensão intuitiva da semelhança. Tal reconhecimento desempenhou papel relevante na aprendizagem, pois indicou a ativação de conhecimentos prévios e a ancoragem dos novos conceitos em estruturas cognitivas já existentes, condição essencial para a AS (Ausubel, 2003).

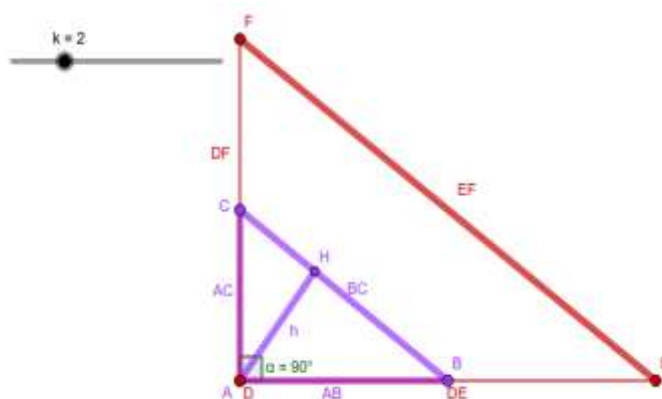
Essa percepção inicial desempenhou papel relevante no processo formativo, pois estabeleceu uma ponte entre a experiência visual e o conceito matemático abstrato. A reta paralela deixou de ser percebida apenas como um elemento gráfico e passou a representar uma condição geométrica que garante proporcionalidade entre segmentos e correspondência angular entre os triângulos. Sem essa ancoragem cognitiva, regras e fórmulas tenderiam a permanecer como procedimentos isolados; com ela, tornou-se possível compreender, explicar e transferir o conhecimento para novos contextos. Do ponto de vista didático, a verbalização dessas observações foi incentivada, favorecendo a integração conceitual e a retenção de longo prazo (Ausubel, 2003).

A introdução da reta paralela foi mediada com rigor geométrico, enfatizando-se a fundamentação teórica da construção. A docente destacou que, ao traçar por um ponto D do segmento  $\overline{AB}$  uma reta paralela ao lado  $\overline{BC}$ , estabelecia-se, de forma intrínseca, a configuração necessária para a aplicação do Teorema de Tales. Ao interagir com o software e observar a dinâmica da construção, o estudante E07 manifestou sua percepção intuitiva: “ao ‘puxar’ a paralela, os pedacinhos dos lados pareciam dividir do mesmo jeito”.

Na sequência, a professora destacou que a correspondência entre os segmentos  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$  e  $\overline{DE}, \overline{DF}, \overline{EF}$  não era apenas visual, mas resultado da preservação dos ângulos e da proporcionalidade entre os lados. A manipulação do parâmetro  $k$  permitiu observar que, embora as medidas absolutas variassem, as razões entre lados correspondentes permaneciam constantes, reforçando a distinção entre forma e tamanho. Esse processo favoreceu a compreensão da semelhança como propriedade estrutural da geometria, e não como mera aparência visual. Segundo Borba e Villarreal (2005), a exploração dinâmica em ambientes digitais favorece justamente a percepção de invariantes geométricas, contribuindo para a construção conceitual.

A Figura 53 representa essas relações métricas no triângulo retângulo e o conceito de semelhança de triângulos através da homotetia ( $k$ ).

Figura 53 – Construção no GeoGebra das relações métricas no triângulo retângulo e semelhança por fator de escala  $k$ ; Atividade construída por E07



Fonte: Arquivos da pesquisa

No segundo momento da atividade, correspondente à diferenciação progressiva, os estudantes formalizaram as relações proporcionais entre os lados dos triângulos, verificando que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

A confirmação dessas proporções permitiu compreender que a construção foi exibida na tela do GeoGebra, o que levou o estudante E05 a comentar que não se tratava de um simples “*ficou parecido*”, mas do fato de a construção “*obrigar a proporção*”, transformando a percepção inicial em justificativa dedutiva. Esse deslocamento de nível perceptivo para o nível conceitual corresponde ao movimento descrito por Novak e Cañas (2010) como a passagem do nível do “*ver*” para o nível do “*compreender*”, característica da consolidação de redes conceituais estáveis.

A verificação do Teorema de Pitágoras constituiu um momento central da atividade. Ao reconhecerem que ambos os triângulos preservavam o ângulo reto, os estudantes analisaram a validade da relação pitagórica nos dois casos, constatando que, se  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  no triângulo menor, então também  $DE^2 + DF^2 = EF^2$  no triângulo maior. Essa constatação evidenciou que o Teorema de Pitágoras não surge como regra isolada, mas como consequência da semelhança entre triângulos retângulos, reforçando a integração conceitual proposta na atividade.

No momento de reconciliação integrativa, a professora conduziu síntese do encadeamento lógico construído ao longo da aula, evidenciando que a preservação dos ângulos garante a semelhança, a qual implica proporcionalidade entre segmentos correspondentes e, conseqüentemente, a manutenção das relações métricas, incluindo o Teorema de Pitágoras. Nesse processo, os estudantes passaram a compreender os teoremas como elementos articulados de um sistema dedutivo único, indicando uma reorganização cognitiva hierárquica, conforme descrita por Ausubel (2003). A mediação tecnológica tornou essa relação mais visível e convincente, uma vez que, ao alterar dinamicamente a posição do ponto D, os estudantes observaram que a validade de Pitágoras se mantinha para todos os triângulos reduzidos ou ampliados, desde que construídos pela mesma razão. O estudante E06 sintetizou esse entendimento ao afirmar que, “*se o triângulo grande era retângulo, o menor também seria, porque copiava o ângulo — e, assim, Pitágoras valeria nos dois*”. Embora espontânea, a formulação foi geometricamente precisa.

A Figura 54 representa uma síntese conceitual do percurso didático desenvolvido, evidenciando a articulação entre proporcionalidade, semelhança de triângulos e relações métricas em uma mesma construção geométrica. O triângulo menor  $\triangle ADE$ , construído internamente ao triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , mantém a correspondência angular indicada pela igualdade dos ângulos  $\angle D$  e  $\angle B$ , o que confirma a semelhança entre as figuras pelo critério AA. Essa configuração permite visualizar

que a redução ou ampliação proporcional preserva não apenas a forma geométrica, mas também as relações métricas associadas aos triângulos.

Figura 54 – Síntese Integrativa demonstrando a conexão entre a semelhança de triângulos  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  e a validade do Teorema de Pitágoras em ambas as figuras; Atividade construída por E05, E08 e E11

“Prova de Tales : ” = 0.83 = 0.83

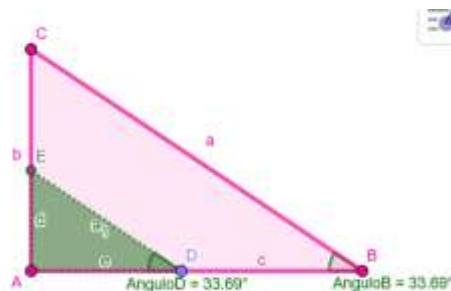
$$\begin{aligned} 1. \text{ Soma dos quadrados dos Catetos:} \\ &= AD^2 + AE^2 \\ &= [2.72]^2 + [1.82]^2 \\ &= [10.72] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Hipotenusa ao Quadrado:} \\ 3.27^2 &= DE^2 \\ [HIPO]^2 &= [10.72] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Prova da Semelhança (Ângulos):} \\ \angle Grande(B) &= [33.69^\circ] \\ \angle Pequeno(D) &= [33.69^\circ] \\ \text{Conclusão: } &\triangle ADE \sim \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Soma dos quadrados dos Catetos:} \\ &= AB^2 + AC^2 \\ &= [6]^2 + [4]^2 \\ &= [52] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Hipotenusa ao Quadrado:} \\ 7.21^2 &= BC^2 \\ [HIPO]^2 &= [52] \end{aligned}$$

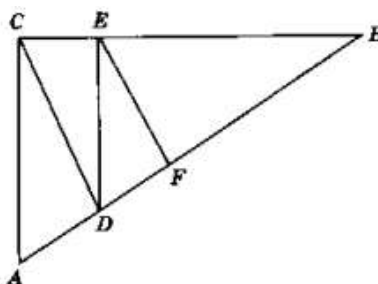


Fonte: Arquivos da pesquisa

Os cálculos apresentados na figura evidenciam que a soma dos quadrados dos catetos do triângulo menor corresponde ao quadrado de sua hipotenusa, confirmando a validade do Teorema de Pitágoras também na figura reduzida. A comparação simultânea entre os dois triângulos permitiu aos estudantes compreender que a relação pitagórica não depende das medidas absolutas, mas da estrutura geométrica preservada pela semelhança. Nesse contexto, a chamada “Prova de Tales” assume papel central como elo conceitual entre a proporcionalidade geométrica e a conservação das propriedades métricas, representando a transição da experiência empírica para a geometria demonstrativa. Conforme analisa Boyer (1996), o mérito de Tales não reside apenas na medição de distâncias, mas na introdução de um elemento abstrato: a percepção de que a validade de uma relação geométrica independe da escala dos objetos envolvidos. Sob essa ótica, o teorema demonstra que, ao interceptar um feixe de retas paralelas por transversais, as razões entre os segmentos correspondentes são preservadas, estabelecendo o que se conhece como invariância proporcional.

Esse princípio foi sistematizado por Euclides (2009), ao estabelecer que a semelhança entre figuras decorre da preservação das razões proporcionais e da correspondência angular. A Figura 55 demonstra a relação entre a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras, servindo como síntese visual da “Grande Prova” discutida anteriormente.

Figura 55 – Medidas de triângulos em tabletas cuneiformes: A cadeia dedutiva da Geometria.



Fonte: Boyer (1996, p. 28).

Do ponto de vista educacional, a proporcionalidade atua como conceito estruturador capaz de integrar diferentes ideias geométricas. À luz da TAS Ausubel (2003), pode ser compreendida como um subsunçor epistemológico que possibilita ancorar novos conhecimentos — como semelhança e relações métricas — em uma rede conceitual previamente construída. Nessa perspectiva, a “Prova de Tales” deixa de assumir caráter meramente procedimental e passa a funcionar como princípio organizador do raciocínio geométrico, favorecendo a compreensão da geometria como um sistema coerente de relações invariantes.

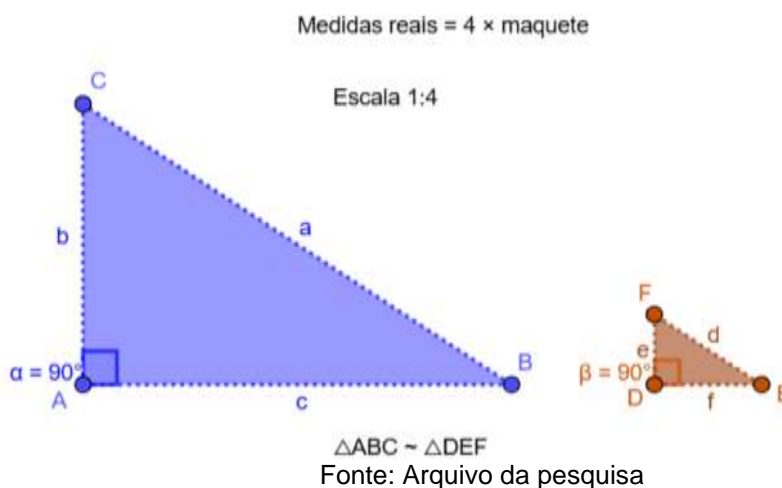
Do ponto de vista didático, a figura evidencia um avanço cognitivo relevante, caracterizado pela passagem da observação visual para a compreensão dedutiva das relações geométricas. A presença simultânea de representações algébricas, medidas numéricas e marcações angulares favorece a integração entre diferentes registros de representação, contribuindo para que os estudantes compreendam o Teorema de Pitágoras como consequência de um sistema geométrico articulado, e não como fórmula isolada. Esse movimento pode ser compreendido em consonância com o referencial adotado, na medida em que os novos significados são construídos a partir da articulação com conhecimentos previamente estabelecidos sobre proporcionalidade e semelhança, favorecendo a reorganização progressiva do entendimento geométrico.

No terceiro momento, a atividade avançou para a etapa de reconciliação integrativa, exigindo que os estudantes sintetizassem o encadeamento lógico entre os teoremas estudados. A Figura correspondente ilustra esse processo ao apresentar dois triângulos retângulos semelhantes,  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , construídos em escala 1:4. O triângulo maior representa a situação real, enquanto o menor corresponde à maquete, evidenciando a preservação da forma geométrica por meio da manutenção dos

ângulos retos  $\alpha = 90^\circ$  e  $\beta = 90^\circ$  e da proporcionalidade entre os lados correspondentes. A partir dessa configuração, a professora conduziu o grupo na construção de uma cadeia de dependência conceitual: a proporcionalidade entre segmentos, garantida pela semelhança, decorre da correspondência angular e sustenta a validade das relações métricas, incluindo o Teorema de Pitágoras. Assim, os estudantes passaram a compreender que os teoremas não aparecem de forma isolada, mas constituem um sistema interligado. A fala do estudante E10 — ao afirmar que *“Pitágoras não deveria aparecer isolado no fim do livro, mas após Tales e a semelhança”* — evidencia o processo de integração hierárquica descrito por Ausubel (2003), no qual conhecimentos previamente fragmentados são reorganizados em uma estrutura conceitual coerente.

A etapa final vinculou esse encadeamento lógico ao contexto rural. A professora apresentou um projeto de cerca modelado pelo triângulo retângulo maior, com catetos de 12 e 8 metros, enquanto o triângulo menor representava a maquete correspondente, com catetos de 3 e 2 metros. A Figura 56 explicita a relação de escala, indicando que as medidas reais correspondem a quatro vezes as medidas da maquete. Coube aos estudantes identificar essa razão e verificar que todas as medidas — inclusive a hipotenusa — deveriam ser multiplicadas por quatro para obter as dimensões reais. Ao analisar o modelo, o estudante E03 observou que um erro na maquete produziria um erro *“quatro vezes maior”* na construção final, demonstrando a compreensão prática da noção de semelhança e da importância da escala em situações reais.

Figura 56 – Síntese geométrica da semelhança entre os triângulos retângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ : representação da relação de escala entre maquete e modelo real; Atividade construída por E03



Como etapa de encerramento, solicitou-se que cada estudante apresentasse verbalmente sua explicação sobre a síntese dedutiva final, atividade concebida para avaliar a capacidade de reconstruir, de forma articulada, o encadeamento lógico entre o Teorema de Tales, a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras. Essa dinâmica possibilitou o registro das argumentações produzidas oralmente ao longo da discussão coletiva, favorecendo a análise da organização lógica e da compreensão conceitual expressa pelos estudantes. Essa produção escrita individual constituiu um instrumento privilegiado de análise qualitativa, pois permitiu identificar não apenas respostas corretas, mas sobretudo os modos de argumentação, as relações estabelecidas entre conceitos e o grau de integração conceitual alcançado por cada estudante.

A análise das produções dos estudantes revelou um conjunto diversificado de argumentos, que podem ser organizados em categorias analíticas complementares, evidenciando diferentes níveis e formas de elaboração conceitual.

Na primeira categoria, relacionada à compreensão da proporcionalidade induzida pelas paralelas, situam-se as falas de E01, E04 e E07. O estudante E01 destacou que *“a paralela não corta o triângulo de qualquer jeito, ela obriga os lados a crescerem na mesma razão”*, evidenciando a percepção do papel estrutural da reta paralela na configuração de Tales. E04 reforçou essa ideia ao afirmar que *“se a reta fosse torta, não dava certo, porque não manteria a proporção”*, indicando compreensão da condição geométrica necessária para a validade do teorema. Já E07 observou que *“os segmentos ficam diferentes, mas sempre divididos do mesmo jeito”*, antecipando a noção de razão constante entre partes correspondentes.

Uma segunda categoria refere-se à correspondência angular e à preservação da forma, aspecto central da semelhança. Nessa linha, E02 afirmou que *“os ângulos repetem, mesmo quando o triângulo muda de tamanho”*, enquanto E06 destacou que *“o ângulo reto aparece nos dois, por isso eles continuam sendo retângulos”*. E08 sintetizou essa percepção ao escrever que *“o triângulo menor é uma cópia proporcional do maior”*, revelando compreensão clara da ideia de homotetia. Essas falas indicam que os estudantes não se limitaram à observação visual, mas reconheceram os ângulos como elementos invariantes que sustentam a semelhança.

A terceira categoria envolve a articulação dedutiva entre os teoremas, evidenciando avanço do raciocínio descritivo para o explicativo. E05 destacou que *“não é só porque parece igual, é porque os ângulos iguais garantem a proporção”*,

enquanto E09 organizou explicitamente sua explicação em etapas: primeiro Tales, “*que cria as divisões proporcionais*”; depois a semelhança, “*porque os ângulos correspondem*”; e, por fim, o Teorema de Pitágoras, “*que continua valendo porque o triângulo ainda é retângulo*”. E10 reforçou essa visão sistêmica ao afirmar que “*Pitágoras depende de todo o caminho antes, não aparece sozinho*”, demonstrando compreensão hierárquica do conhecimento geométrico.

Uma quarta categoria diz respeito à compreensão da invariância das relações métricas, mesmo quando as medidas variam. E11 escreveu que “*os números mudam, mas a conta funciona do mesmo jeito*”, indicando percepção de que o Teorema de Pitágoras expressa uma relação estrutural, e não um conjunto fixo de valores. Essa ideia também aparece na fala de E06, que observou que “*a fórmula não muda porque a forma do triângulo não muda*”, conectando invariância formal e estrutura geométrica.

Por fim, destaca-se a categoria da transferência para contextos práticos, evidenciando a aplicação do raciocínio geométrico para além do ambiente escolar. E03 relacionou diretamente a atividade ao projeto da cerca, afirmando que “*se errar um pouco na maquete, o erro cresce muito na cerca de verdade*”. E12 complementou essa ideia ao escrever que “*a escala faz a gente entender por que medir certo no pequeno é tão importante no grande*”. Essas manifestações indicam que a semelhança foi compreendida como princípio operacional relevante em situações reais, e não apenas como conteúdo abstrato.

De modo geral, as produções dos estudantes revelam um movimento consistente de integração conceitual. As explicações apresentadas mobilizam proporcionalidade, invariância angular, relações métricas e dedução lógica de forma articulada, indicando que os estudantes ultrapassaram a simples memorização de procedimentos. A síntese dedutiva final permitiu, assim, identificar evidências de reorganização cognitiva, nas quais conceitos anteriormente tratados de forma fragmentada passaram a compor um sistema geométrico coerente. Esse resultado evidencia que a atividade contribuiu para consolidar a compreensão da geometria como um corpo dedutivo integrado, no qual cada teorema encontra sentido e validade no encadeamento lógico que o sustenta.

Dessa forma, a Atividade 20 consolidou a trajetória formativa ao evidenciar que a geometria se organiza como um sistema dedutivo integrado, no qual os resultados se sustentam mutuamente. A articulação entre visualização dinâmica, evidência lógica e contextualização prática favoreceu a construção de significados matemáticos mais

estáveis, preparando os estudantes para a transição das relações métricas para as relações trigonométricas e ampliando o alcance conceitual desenvolvido ao longo da unidade didática.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscou-se evidenciar as potencialidades e possibilidades pedagógicas de uma sequência didática composta por 20 Atividades, desenvolvidas no ambiente GeoGebra, voltados ao ensino de conceitos estruturantes da Geometria Plana no 9º ano do Ensino Fundamental. A proposta teve como eixo central o estudo da razão, da proporcionalidade, da semelhança de triângulos, do Teorema de Tales e do Teorema de Pitágoras, concebidos não como conteúdos isolados, mas como um sistema conceitual articulado. A investigação fundamentou-se na compreensão de que o uso intencional e teoricamente orientado das TD constitui um elemento indispensável para a promoção de uma aprendizagem significativa, investigativa, inclusiva e conceitualmente integrada, especialmente em um momento escolar marcado pela transição para o Ensino Médio.

A análise global das 20 Atividades evidencia que o material foi organizado segundo uma lógica progressiva e coerente, respeitando a construção gradual do conhecimento matemático. A sequência inicia-se com noções intuitivas e operatórias, como divisão, comparação e razão, avançando progressivamente para contextos geométricos mais complexos que envolvem proporcionalidade, paralelismo, semelhança e relações métricas no triângulo retângulo. Essa arquitetura didática permitiu que cada novo conceito fosse ancorado em conhecimentos previamente mobilizados, favorecendo processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, em consonância com os pressupostos da TAS de Ausubel (2003). Dessa forma, o estudante é conduzido a compreender os conceitos matemáticos de modo relacional, evitando a fragmentação e a memorização descontextualizada.

Do ponto de vista epistemológico e didático, a sequência didática pode ser compreendida como uma organização praxeológica do saber matemático, nos termos da Teoria Antropológica do Didático proposta por Chevallard (1999, *apud* Santos e Menezes, 2015), ao estruturar, em cada atividade, tipos de tarefas, técnicas de resolução, tecnologias explicativas e fundamentos teóricos que legitimam as práticas desenvolvidas. Essa configuração evidencia a articulação entre ação, justificação e formalização, permitindo compreender o ensino como um sistema organizado de práticas matemáticas com coerência epistemológica e intencionalidade didática.

As atividades propostas não se restringem à aplicação de procedimentos, mas

explicitam os fundamentos conceituais que os sustentam, favorecendo a compreensão do “porquê” matemático. Nesse contexto, o GeoGebra assume o papel de mediador, não apenas representando conceitos já prontos, mas transformando as condições de produção do conhecimento matemático escolar.

A incorporação das TD também dialoga com as contribuições de Artigue (2002), ao considerar os ambientes digitais como artefatos que reorganizam a atividade matemática e favorecem a criação de contextos investigativos no processo de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, a manipulação dinâmica das construções, a observação de invariantes e a validação empírica de conjecturas aproximam a prática escolar de uma lógica exploratória, na qual se articulam ciclos de ação, reflexão, formulação de hipóteses e validação. Tal dinâmica contribui para o envolvimento dos estudantes em práticas matemáticas mais ativas e reflexivas, superando uma postura passiva diante do conhecimento e favorecendo a construção de significados matemáticos em ambientes tecnologicamente mediados.

É relevante destacar que a intervenção pedagógica foi realizada em uma turma marcada pela heterogeneidade cognitiva, evidenciada por diferentes ritmos, estilos e níveis de aprendizagem, embora não houvesse registro de dificuldades severas ou de deficiências diagnosticadas. Nesse contexto, as atividades desenvolvidas com o software GeoGebra mostraram-se particularmente adequadas como estratégia pedagógica inclusiva, ao possibilitar diferentes formas de interação com os conceitos matemáticos.

A natureza dinâmica e interativa do ambiente permitiu que cada estudante controlasse o ritmo de exploração, repetisse procedimentos, manipulasse diretamente os objetos geométricos e observasse múltiplas representações de um mesmo conceito. Essa flexibilidade favoreceu avanços diferenciados, respeitando as necessidades individuais e contribuindo para a redução de barreiras à aprendizagem. Além disso, a visualização dinâmica atuou como elemento de equidade pedagógica, oferecendo suporte tanto aos estudantes que demandavam maior apoio intuitivo na construção do conhecimento quanto àqueles que avançavam mais rapidamente em processos de abstração, promovendo um ambiente de aprendizagem mais acessível e participativo.

Nesse cenário, é importante destacar o empenho das escolas do campo na busca pela democratização do acesso ao conhecimento e pela consolidação de uma educação de qualidade socialmente referenciada. Tais instituições, frequentemente

inseridas em contextos marcados por desafios estruturais e geográficos, têm desenvolvido esforços constantes para garantir práticas pedagógicas que valorizem a participação dos estudantes, a contextualização do conhecimento e o uso de recursos que ampliem as oportunidades de aprendizagem. A incorporação de metodologias investigativas e de tecnologias educacionais, nesse contexto, representa não apenas uma inovação didática, mas também uma estratégia de fortalecimento da equidade educacional, contribuindo para que os estudantes do meio rural tenham acesso a experiências formativas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia intelectual e da continuidade dos estudos em condições mais igualitárias.

No contexto brasileiro, estudos desenvolvidos por Valente e Almeida (2011), assim como por Borba e Penteado (2016), evidenciam que a incorporação das tecnologias digitais ao ensino não se restringe ao uso instrumental de ferramentas, mas implica uma reorganização das práticas pedagógicas e das formas de acesso ao conhecimento matemático. Esses autores ressaltam que os ambientes digitais ampliam os modos de interação com os objetos de estudo, oferecendo múltiplos percursos de exploração, representação e validação, o que favorece a construção de significados mais robustos e articulados.

Nesse sentido, a integração entre tecnologias digitais, flexibilidade curricular e intencionalidade pedagógica contribui para o desenvolvimento de aprendizagens que ultrapassam a mera assimilação de procedimentos. Ao possibilitar a experimentação, a simulação e a visualização dinâmica, tais ambientes favorecem a compreensão conceitual, ao mesmo tempo em que estimulam a autonomia intelectual, a criatividade e o engajamento crítico dos estudantes diante dos problemas matemáticos propostos. A aprendizagem passa a assumir um caráter mais investigativo, no qual o estudante é convidado a formular hipóteses, testar conjecturas e refletir sobre os resultados obtidos.

O papel do professor, nesse contexto, adquire centralidade como mediador ativo do processo educativo. Cabe-lhe planejar intervenções diferenciadas, ajustar o nível de complexidade das tarefas, acompanhar os ritmos individuais de aprendizagem e promover articulações entre os recursos digitais e os objetivos conceituais da aula. Além disso, o uso intencional das tecnologias possibilita sua integração a práticas de atendimento educacional especializado, ampliando as condições de participação e aprendizagem de todos os estudantes.

Desse modo, o uso pedagógico das tecnologias digitais fortalece o princípio da inclusão escolar, ao reduzir barreiras cognitivas e ampliar as oportunidades de aprendizagem. Ao oferecer diferentes formas de acesso aos conteúdos e respeitar a diversidade de percursos formativos, tais recursos contribuem para a construção de uma educação mais equitativa, crítica e alinhada às demandas contemporâneas da Educação Matemática.

No plano cognitivo, os resultados observados indicam que as atividades desenvolvidas com o auxílio do GeoGebra contribuíram de modo consistente para a compreensão aprofundada de conceitos matemáticos tradicionalmente apresentados de forma abstrata no ensino de Geometria. A possibilidade de manipulação dinâmica das construções permitiu aos estudantes identificar invariantes geométricas — como a constância das razões em feixes de paralelas e a preservação das relações métricas no triângulo retângulo — distinguindo propriedades estruturais dos elementos contingentes associados à posição ou ao tamanho das figuras. Esse processo evidencia uma aprendizagem baseada na ação e na experimentação, em consonância com a perspectiva construtivista de Piaget (1976), segundo a qual o conhecimento se constrói a partir da interação ativa do sujeito com os objetos de estudo.

Paralelamente, a utilização das TD como ferramentas de exploração matemática reforça a dimensão mediadora do processo de aprendizagem, aproximando-se da abordagem sociocultural de Vygotsky (1998). Nesse sentido, as atividades desenvolvidas no GeoGebra atuaram como instrumentos culturais que ampliaram as possibilidades de significação matemática, favorecendo a interação entre os estudantes, a verbalização dos raciocínios e a construção coletiva de argumentos ao longo do processo investigativo.

A visualização dinâmica e a possibilidade de testar conjecturas em tempo real contribuíram para a ampliação da zona de desenvolvimento proximal, permitindo que conceitos mais complexos fossem progressivamente apropriados com apoio da professora e dos pares.

A interpretação das produções orais e dos registros discursivos dos estudantes durante as atividades realizadas no GeoGebra foi conduzida segundo os princípios da análise de conteúdo sistematizados por Bardin (2011). Essa abordagem metodológica possibilitou organizar, classificar e interpretar as falas dos participantes não apenas em sua literalidade, mas como manifestações de processos cognitivos subjacentes à construção dos conceitos geométricos. A identificação de unidades de sentido

recorrentes — como referências à proporcionalidade, à preservação angular, à semelhança e à validade do Teorema de Pitágoras — permitiu agrupar as argumentações em categorias analíticas que evidenciaram níveis progressivos de compreensão e articulação conceitual.

Nesse processo, as falas deixaram de ser registros isolados e passaram a constituir dados qualitativos passíveis de inferência, conforme propõe Bardin (2011), ao destacar que a análise de conteúdo revela significados latentes presentes nas produções discursivas. Tal procedimento mostrou-se particularmente adequado para compreender como os estudantes reconstruíram, em linguagem própria, o encadeamento lógico entre o Teorema de Tales, a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras, além de indicar indícios de reorganização conceitual ao longo da sequência didática.

A categorização das falas evidenciou a transição de descrições predominantemente perceptivas, centradas em expressões como “*parece igual*” ou “*fica do mesmo jeito*”, para argumentações de caráter dedutivo, nas quais os estudantes justificaram a validade das relações geométricas com base na preservação de ângulos, na proporcionalidade entre segmentos e na invariância das relações métricas. Esse movimento discursivo revela um avanço qualitativo na apropriação dos conceitos, indicando que a compreensão ultrapassou o plano operacional e alcançou um nível explicativo mais elaborado.

O uso da análise de conteúdo, nos termos de Bardin (2011), conferiu rigor metodológico à interpretação dos dados, sustentando empiricamente as inferências sobre os processos de aprendizagem desencadeados pelas atividades no GeoGebra. A articulação entre registros verbais e categorias analíticas bem definidas evidenciou que as aprendizagens construídas transcenderam a memorização de procedimentos, configurando-se como compreensão relacional e estruturada dos conceitos geométricos. Do ponto de vista pedagógico, o GeoGebra deixou de ser mero recurso ilustrativo e assumiu papel de instrumento didático capaz de qualificar a prática docente e ampliar as possibilidades de aprendizagem em Geometria. A precisão das construções digitais, associada à manipulação controlada dos elementos, favoreceu a explicitação de propriedades, a formulação e validação de conjecturas e a revisão de concepções equivocadas recorrentes, como a interpretação linear da área ou a associação indevida entre forma e medida absoluta. Esse ambiente investigativo permitiu aos estudantes observar invariantes, testar hipóteses e estabelecer relações

entre diferentes representações matemáticas, fortalecendo o raciocínio geométrico e a compreensão conceitual.

Nesse contexto, o papel do professor assumiu caráter central, deslocando-se de uma postura transmissiva para uma mediação analítica e intencional. As intervenções docentes orientaram-se à problematização, ao estímulo da argumentação e à articulação entre experimentação e formalização matemática. Essa perspectiva dialoga com Artigue (2002), ao reconhecer que ambientes digitais reorganizam a atividade matemática e favorecem ciclos de ação, reflexão, formulação de hipóteses e validação.

No aspecto motivacional, a contextualização das atividades em situações próximas à realidade dos estudantes — como medições de terrenos, projetos de cercas e problemas vinculados ao contexto rural — atribuiu sentido social e funcional ao conhecimento matemático. Ao aproximar a Geometria escolar de práticas cotidianas, o GeoGebra favoreceu o engajamento discente, a valorização da Matemática como ferramenta de compreensão do mundo e o fortalecimento da autonomia intelectual. Esses resultados dialogam com Borba e Penteado (2016), ao evidenciar que o uso significativo das tecnologias digitais amplia as possibilidades de interação, experimentação e construção de significados no ensino de Matemática.

A culminância da sequência didática, ao integrar o Teorema de Tales, a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras em uma mesma construção geométrica, evidenciou processos de síntese conceitual. Os estudantes passaram a compreender a Geometria como um sistema articulado de ideias interdependentes, superando a visão fragmentada baseada na memorização de fórmulas isoladas. Essa reorganização conceitual favoreceu aprendizagens mais estáveis e transferíveis para novos contextos matemáticos.

Conclui-se, portanto, que as atividades desenvolvidas no GeoGebra apresentam viabilidade didática, consistência epistemológica e relevância pedagógica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental, especialmente em turmas heterogêneas e em consonância com princípios de educação inclusiva. A proposta favoreceu a construção ativa do conhecimento, o desenvolvimento do raciocínio geométrico e o protagonismo discente, indicando potencial para subsidiar práticas pedagógicas mais equitativas e fomentar novas investigações sobre o uso da geometria dinâmica e das tecnologias digitais na Educação Matemática.

## REFERENCIAIS

- ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de; VALENTE, José Armando. Integração de tecnologias na educação: o desafio da formação de professores. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 37, n. 1, p. 19–33, 2011.
- ALMEIDA, Maria José; LIMA, Márcia Cristina. *GeoGebra como recurso didático no ensino de Matemática: uma análise pedagógica*. São Paulo: Autêntica, 2020.
- AMADO, João; SANCHEZ, Ernesto; PINTO, Manuel. Ferramentas de geometria dinâmica e o ensino da Matemática: desenvolvimento da argumentação e da demonstração. *Educação Matemática*, São Paulo, v. 18, n. 35, p. 103–122, 2015.
- ANTONIO, Carlos Alberto. *Educação do Campo: um movimento popular de base política e pedagógica*. Cascavel: EDUNIOESTE, 2013.
- ARAÚJO, Carlos Roberto de. *O uso do GeoGebra no ensino da Matemática*. São Paulo: IME-USP, 2008.
- ARAÚJO, João Carlos de Melo. *O uso do GeoGebra no ensino de Matemática: uma experiência com professores da educação básica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.
- ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 52, n. 3, p. 215–241, 2003.
- ARTIGUE, Michèle. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002. DOI: 10.1023/A:1022103903080. Acesso em: 12 jan. 2026.
- AUSUBEL, David Paul. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano, 2003.
- AUSUBEL, David Paul. *Educational psychology: a cognitive view*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. *Psicologia educacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2004.
- BISPO, Luiz Henrique Ferreira; OVIGLI, Daniel Fernando Bovolenta. O ensino de funções de 1º grau com a utilização do GeoGebra na Educação Matemática do Campo. ResearchGate, 2020. Disponível em: <https://www.researchgate.net/>. Acesso em: 21 set. 2025.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; CONFREY, Jere. *A construção do conhecimento em um ambiente informatizado*. Campinas: Papirus, 1996.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Rodrigo da; GADANIDIS, George. *Tecnologias digitais e educação matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Marília Cecília. *Educação matemática e tecnologias: repensando o currículo*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica Estrella. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer, 2005.
- BOTANA, Francisco; KOVÁCS, Zoltán. Automatic deduction in dynamic geometry using the enveloping method. arXiv, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1605.09153>. Acesso em: 7 jul. 2025.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, 2013.
- BU, Lifang; HACIOMEROGLU, Gunhan; MUMBA, Frank. Exploring the use of dynamic mathematics software in mathematics education. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, v. 30, n. 1, p. 21–44, 2011.
- CAST. *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. Wakefield, MA: CAST, 2018.
- CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; BALDINI, Luciana T. S. *Formação de professores que ensinam Matemática: teoria e prática*. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática*. 5. ed. Campinas: Papirus, 1999.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- D'AMORE, Bruno. *Didática da matemática: reflexão e pesquisa*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da matemática*. São Paulo: Ática, 2005.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2017.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.
- GRAVINA, Maria Alice. *Ambientes de geometria dinâmica e aprendizagem significativa*. Porto Alegre: UFRGS, 2019.
- HOHENWARTER, Markus; FUCHS, Karl. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in GeoGebra. Salzburg: University of Salzburg, 2004.
- KENSKI, Vani Moreira. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus, 2007.
- KOEHLER, Matthew J.; MISHRA, Punya. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, v. 108, n. 6, p. 1017–1054, 2006.
- LABORDE, Colette. *Geometria dinâmica e aprendizagem*. Lisboa: Projeto ERGA, 2005.
- LORENZATO, Sérgio. *O laboratório de ensino de matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006.
- MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2012.
- MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de aprendizagem*. 2. ed. São Paulo: EPU, 2017.
- MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie A. F. S. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2011.
- MORAN, José Manuel. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*. São Paulo: Educ, 2015.

NOVAK, Joseph Donald; CAÑAS, Alberto J. A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 5, n. 1, p. 9–29, 2010. Disponível em: <https://revistas.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/1298/944>. Acesso em: 12 dez. 2025.

NOVAK, Joseph Donald; GOWIN, D. Bob. *Aprender a aprender*. Lisboa: Plátano, 1999.

PAPERT, Seymour. *Logo: computadores e educação*. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIAGET, Jean. *A epistemologia genética*. São Paulo: Abril Cultural, 1971.

PIAGET, Jean. *A equilíbrio das estruturas cognitivas*. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANTOS, Marcelo Câmara; MENEZES, Marcus Bessa. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8, n. 18, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1456>. Acesso em: 17 fev. 2026.

SERRES, Michel. *As origens da geometria*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1994.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 12, n. 2, p. 88–95, 2006. DOI: <https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088>. Acesso em: 12 jan. 2026.