

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS ERECHIM
CURSO DE FILOSOFIA**

ARNOLD ISSAÇA GLOOR

**ONTOLOGIA MATEMÁTICA:
DE ZFC AO ESTRUTURALISMO DE BENACERRAF**

ERECHIM

2026

ARNOLD ISSAÇA GLOOR

**ONTOLOGIA MATEMÁTICA:
DE ZFC AO ESTRUTURALISMO DE BENACERRAF**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de filosofia da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Thiago Soares Leite

ERECHIM

2026

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Gloor, Arnold Issaca

ONTOLOGIA MATEMÁTICA: DE ZFC AO ESTRUTURALISMO DE
BENACERRAF / Arnold Issaca Gloor. -- 2026.
50 f.

Orientador: Doutor em Filosofia Thiagoa Soares Leite

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de
Licenciatura em Filosofia, Erechim, RS, 2026.

1. Ontologia Matemática. I. Leite, Thiagoa Soares,
orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III.
Título.

ARNOLD ISSAÇA GLOOR

**ONTOLOGIA MATEMÁTICA:
DE ZFC AO ESTRUTURALISMO DE BENACERRAF**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de filosofia da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), como requisito para obtenção do título de Licenciado em Filosofia

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 17/06/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr. Thiago Soares Leite – UFFS
Orientador

Prof. Dr. Bruno Ramos Mendonça – UNICAMP
Avaliador

Prof. Dr. Fernando Danner – UFFS
Avaliador

Dedico este trabalho aos meus pais, que não pouparam esforços para que eu pudesse concluir meus estudos. E ao meu irmão, que é a pessoa mais importante, o amigo mais valioso e honesto que tenho. Obrigado família.

AGRADECIMENTOS

Não há nenhum trabalho feito sem Exu. Portanto, saúdo Exu, pois, se todo o trabalho que tive e fiz foi bem-sucedido, é porque ele deu seu aval. O agradecimento mais importante, ainda maior que a Exu, dirijo a Olorun, pai e mãe amantíssimos que me deram tudo de que preciso para evoluir e servir junto a todos os meus irmãos e irmãs. Sinto imensa gratidão, pois, hoje, quando olho para trás, vejo o quanto tudo ao longo do meu caminho foi necessário: a morte, a doença, a dor, o amor, a alegria e a compaixão.

Dito isso, é óbvio que também sou grato à minha família. A primeira pessoa que me vem à mente é meu avô Leonidas, de quem sempre me lembro com carinho, pois sempre me incentivou a ser estudioso e a refletir. Vô, saiba que, se eu não o tivesse conhecido, bastaria ouvir suas histórias; só elas já me fariam amá-lo assim como amo hoje e sempre amarei. Meu tio Anderson é alguém a quem também não posso deixar de agradecer. Tenho poucas lembranças dele, e todas felizes; um tio cuja presença sinto no meu quarto até hoje, em momentos de dificuldade ou de alegria. A segunda mulher mais importante da minha vida é Elisa Maria Ferreira Issaça, minha avó e mãe. Devo a você a graça de ter a mãe que tenho e a fé que me sustenta em todos os momentos. Sempre vou me surpreender ao lembrar das suas histórias de vida e ver o quão forte você foi e sempre será.

Mãe, conheço em parte os perrengues pelos quais você passou na vida, assim como conheço parte das suas angústias e momentos difíceis. E, pelo pouco que sei, eu a admiro e amo muito. Você e eu somos companheiros e amigos, e podemos contar um com o outro para sempre. Pai, falo para todos que foi você quem me fez ser filósofo. Você sempre dizia: “pense antes de fazer as coisas”. Você me criou forte, com ânimo de aprendiz e com amor pelo trabalho. Cresci ouvindo suas histórias e tendo você como um super-homem; inspirei-me nas suas qualidades e me corrijo para não cometer os seus erros.

Ronald, você é meu melhor amigo, meu companheiro de conversas. Não poderia ter um irmão mais legal, divertido e brincalhão. Lembro-me das nossas brigas por causa de videogame ou por coisas bobas e começo a rir sozinho. Que pena de quem não teve você como irmão! Eu te amo e sou muito grato por tudo. Pai Ulisses, meu vovô amado, se você pudesse sentir o quanto eu te amo e te quero bem... Como você mesmo me ensinou: “a matemática está nas mãos”, “a fé é a luz da vida”, entre tantas outras lições. Obrigado por tudo. Grande parte de quem sou foi moldada por você; espero um dia poder te superar e ser alguém tão amável e “gente boa” quanto você.

Jair, Gustavo, Maurílio, João e Pedrinho, meus amigos e irmãos que levo no coração: vocês são únicos. Teria sido suficiente se eu tivesse apenas um de vocês como amigo; já seria motivo de imensa alegria e gratidão. Obrigado, rapaziada, vocês são meus irmãos. Janay e Julio, acho que sem vocês eu não teria aproveitado e me divertido tanto no curso. Obrigado pelo apoio e por dividirem comigo esse momento tão especial que foi a graduação.

Lisandro e Débora, obrigado por serem as pessoas maravilhosas que são. Vocês não têm noção do quanto já me ajudaram e me salvaram. Carolina, meu amor, não sei como te agradecer por tudo. Como as palavras poderiam capturar a vastidão desse sentimento? Você é meu porto seguro, um lugar quente e aconchegante quando tudo parece desabar. Eu te amo, meu bem; gratidão por tudo.

Por fim, é muito importante agradecer a todos os meus professores e professoras. Sem vocês, eu não poderia estar onde estou hoje; sem vocês, meu mundo seria muito pobre e sem graça. Todos são importantes e, embora não tenha como citar todos os nomes, faço menção especial a alguns, como a professora Cássia, João Paulo, Bruno, Thiago e Joice.

Aos que não citei nominalmente, saibam que vocês não são menos importantes do que as pessoas de quem falei aqui. Pelo contrário, todos vocês são essenciais e sou imensamente grato a cada um.

Quando Ismália enlouqueceu,
Pôs-se na torre a sonhar...
Viu uma lua no céu,
Viu outra lua no mar.

No sonho em que se perdeu,
Banhrou-se toda em luar...
Queria subir ao céu,
Queria descer ao mar...

E, no desvario seu,
Na torre pôs-se a cantar...
Estava perto do céu,
Estava longe do mar...

E como um anjo pendeu
As asas para voar...
Queria a lua do céu,
Queria a lua do mar...

As asas que Deus lhe deu
Ruflaram de par em par...
Sua alma subiu ao céu,
Seu corpo desceu ao mar...
(Ismália, Alphonsus de Guimaraens)

RESUMO

Este trabalho investiga a ontologia dos objetos matemáticos, analisando a transição da fundamentação na Teoria de Conjuntos para a perspectiva estruturalista contemporânea. A primeira parte dedica-se à sistematização do sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (ZFC), demonstrando como sua estrutura é essencial para evitar paradoxos lógicos, como o de Russell, e para permitir a internalização dos números naturais como conjuntos por meio das construções de von Neumann e Zermelo. Posteriormente, a pesquisa analisa o desafio proposto por Paul Benacerraf, que utiliza a divergência técnica entre esses modelos para evidenciar a arbitrariedade na identificação de números com conjuntos específicos, o que dá origem aos chamados "teoremas espúrios". O estudo conclui, fundamentado na tese de Benacerraf, que os números não possuem uma "substância" ou constituição interna, devendo ser compreendidos não como objetos independentes, mas como posições relacionais em uma estrutura abstrata.

Palavras-chave: Ontologia Matemática; Teoria de Conjuntos (ZFC); Paul Benacerraf; Estruturalismo.

ABSTRACT

This work investigates the ontology of mathematical objects, analyzing the transition from the foundation in Set Theory to the contemporary structuralist perspective. The first part is dedicated to the systematization of the Zermelo-Fraenkel axiomatic system (ZFC), demonstrating how its structure is essential to avoid logical paradoxes, such as Russell's, and to allow the internalization of natural numbers as sets through the constructions of von Neumann and Zermelo. Subsequently, the research analyzes the challenge proposed by Paul Benacerraf, who uses the technical divergence between these models to expose the arbitrariness in identifying numbers with specific sets, which gives rise to the so-called "junk theorems". The study concludes, based on Benacerraf's thesis, that numbers do not possess a "substance" or internal constitution, and must be understood not as independent objects, but as relational positions within an abstract structure.

Keywords: Philosophy of Mathematics; Zermelo-Fraenkel System; Paul Benacerraf; Ontology.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ZFC	Teoria dos conjuntos Zermelo-Fraenkel.
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul
i.e	Isto é

LISTA DE SÍMBOLOS

$\neg$	Negação lógica
$\cap$	Intersecção
$\cup$	União
$\forall$	Quantificador universal
$\Leftrightarrow$	Símbolo de bi-implicação
x	Variável
$\in$	Pertinencia
$\exists$	Quantificador existencial
$\notin$	Negação da pertinencia
$\mathbb{N}$	Números naturais
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\langle A, B \rangle$	Par ordenado
$P(x)$	Conjunto das partes
$\subseteq$	Símbolo de inclusão
ω	Ômega
$ $	Símbolo separador, lido como "tal que"
$\{...\}$	Representar um conjunto através da descrição de seus elementos ou propriedade comum a todos eles
$=$	Símbolo de igualdade
$\setminus$	Símbolo de subtração (ou diferença)
2^n	Notação de potência
$ A $	Notação utilizada para indicar a cardinalidade (quantidade de elementos)
$\neq$	Símbolo de diferença
$\{\}$	Chaves utilizadas para representar a listagem de elementos de um conjunto ou a formação de pares não ordenados
$\rightarrow$	Símbolo de implicação lógica, utilizado para definir a relação de inclusão e o argumento por vacuidade
$\wedge$	Conectivo de conjunção, lido como "e"
$\vee$	Conectivo de disjunção, lido como "ou"

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	14
1 TEORIA DE CONJUNTOS.....	19
1.1 Uma breve noção da ZFC.....	19
1.2 Os Axiomas básicos de ZFC.....	23
1.3 A Questão dos números naturais e o infinito.....	29
1.3.1 Internalizando os números naturais na teoria de conjuntos.....	30
1.3.2 Conjuntos indutivos e o infinito real.....	31
1.3.3 O Axioma do infinito e a existência dos números naturais.....	31
1.3.4 O conjuntos dos números naturais.....	32
1.3.5 Conjuntos e números naturais ZFC.....	32
1.4 Distinção técnica fundamental entre as propostas de Ernst Zermelo e John von Neumann.....	33
2 ANÁLISE DO ARTIGO WHAT NUMBERS COULD NOT BE.....	36
2.1 Análise e reconstrução do artigo de Benacerraf.....	36
2.2 O dilema de Benacerraf: Conflito de referência e identidade.....	40
2.3 A Tese estruturalista: Os números com posições em uma Estrutura.....	41
2.4 O estruturalismo de Benacerraf e o de Shapiro.....	43
3 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46
REFERÊNCIAS.....	50

INTRODUÇÃO

Ao longo da história da filosofia, a matemática desempenhou papel central na formação do pensamento filosófico. Um símbolo dessa relação é a célebre inscrição atribuída à entrada da Academia de Platão: “Que ninguém ignorante de geometria entre aqui” (SHAPIRO, 2015, p. 19). Para Platão, o conhecimento matemático não era apenas uma ferramenta, mas um caminho privilegiado para o acesso ao mundo inteligível, a realidade última das ideias¹. Na tradição filosófica clássica, a matemática era frequentemente concebida como um caminho privilegiado para o acesso à realidade última das ideias. Na modernidade, entretanto, essa relação sofre uma transição fundamental: a matemática deixa de ser predominantemente um objeto de contemplação de formas ideais e eternas² para se converter no próprio paradigma do método racional e da formalização do pensamento³. Para pensadores como René Descartes e Gottfried Wilhelm Leibniz, a matemática forneceu as fundações inabaláveis necessárias para que a racionalidade pura pudesse ser estendida a todo o conhecimento humano, incluindo a ciência e a ética. Essa interseção, que também encontra eco na obra de Blaise Pascal, demonstra que a ligação entre filosofia e matemática não se restringe ao platonismo; ao contrário, esses filósofos evidenciaram que a formalização matemática constitui um instrumento essencial para a sistematização do raciocínio e para a compreensão da estrutura lógica do universo⁴.

Dentre os problemas fundamentais da tradição filosófica, destaca-se a questão dos universais⁵, que investiga o status ontológico de propriedades que parecem se repetir em diferentes entidades, como a “vermelhidão” ou o “número” (SHAPIRO, 2015). No debate clássico da metafísica, o realismo *ante rem*⁶ (ou platonismo) defende que os universais possuem existência própria e objetiva, sendo ontologicamente independentes das coisas

¹ Na filosofia platônica, o estudo da matemática é visto como o treinamento adequado para a compreensão do Universo como ele realmente é, por oposição às aparências. Cf. SHAPIRO, 2015, p. 81-100.

² De acordo com o realismo platônico, os objetos matemáticos são eternos, imutáveis e não estão sujeitos à criação ou destruição. Cf. SHAPIRO, 2015, p. 81-100.

³ O racionalismo moderno caracteriza-se pela tentativa de estender a metodologia matemática a todos os campos do saber. Na filosofia contemporânea, os sistemas dedutivos da lógica formal tornaram-se a “língua franca” das preocupações intelectuais. Cf. SHAPIRO, 2015, p. 21, 22.

⁴ O racionalismo do século XVII e XVIII, representado por Descartes e Leibniz, buscou fundamentar todo o conhecimento na racionalidade pura, inspirando-se nas fundações inabaláveis percebidas na matemática. Pensadores como Pascal, Descartes e Leibniz uniram a prática matemática à investigação filosófica, utilizando a lógica para a sistematização do raciocínio. A aplicação matemática é central para a compreensão científica do mundo físico, remetendo à metáfora de Galileu sobre o “livro da natureza” escrito em linguagem matemática. Cf. SHAPIRO, 2015, p. 20-24.

⁵ Para uma visão mais geral do que é o problema dos universais, cf. IMAGUIRE (2022).

⁶ Do latim, significa literalmente “antes da coisa”. Na metafísica, designa a posição segundo a qual universais ou estruturas possuem existência própria e objetiva, sendo ontologicamente anteriores e independentes dos particulares ou sistemas físicos que os instanciam. Cf. SHAPIRO, 2015, p. 369.

sensíveis que os exemplificam (HAMKINS, 2021; SHAPIRO, 2015). Na filosofia da matemática, essa visão sustenta que objetos como números existem de forma abstrata e independente da mente humana, da linguagem ou do mundo físico (HAMKINS, 2021; SHAPIRO, 2015).

Em contrapartida, o realismo *in re*⁷ entende que os universais dependem de suas particularizações, existindo apenas nelas (SHAPIRO, 2015). Já as correntes nominalistas e conceitualistas negam a existência independentemente dessas entidades; para os nominalistas, os universais não existem, portanto eles são entendidos como convenções linguísticas ou nomes, porém sem uma referência, enquanto os conceitualistas os veem como construções da mente humana (HAMKINS, 2021; SHAPIRO, 2015). No cenário contemporâneo, essa discussão se estende ao ficcionalismo, que trata objetos matemáticos como personagens de uma ficção (HAMKINS, 2021), e ao estruturalismo, que define a matemática como o estudo de estruturas e padrões em vez de objetos individuais (SHAPIRO, 2015).

O presente trabalho tem como objetivo geral investigar a existência ontológica dos universais no âmbito da filosofia da matemática. Como problema teórico mais amplo, busca-se compreender se os objetos matemáticos, como números, conjuntos e relações, possuem realidade metafísica independente ou se devem ser concebidos como criações conceituais úteis, porém destituídas de existência objetiva.

Essa investigação ganha relevância na medida em que envolve questões centrais para a epistemologia e a ontologia⁸: é possível conhecer objetos que não são sensíveis? O que confere verdade às proposições matemáticas? Os números existem ou são apenas ficções operacionais? Essas perguntas não apenas moldam a nossa compreensão da própria matemática, mas também influenciam diretamente as nossas concepções acerca da realidade, linguagem e ciência.

Dada a amplitude e a complexidade do tema, este trabalho inicia-se, no primeiro capítulo, com a apresentação da Teoria de Conjuntos, um dos alicerces fundamentais da

⁷ Do latim, significa literalmente “na coisa”. Refere-se à posição segundo a qual universais ou estruturas existem apenas nos próprios particulares que os instanciam, não possuindo existência independentemente deles. Cf. SHAPIRO, 2015, p.369

⁸ No contexto da filosofia da matemática, a ontologia refere-se à investigação metafísica sobre a natureza e o modo de existência de entidades como números e conjuntos. O debate contemporâneo divide-se entre o realismo ontológico (existência objetiva de objetos abstratos) e o nominalismo (negação de entidades não físicas). Atualmente, predomina a perspectiva estruturalista, que define a matemática como a “ciência das estruturas”, na qual os objetos não possuem essência independente, mas são caracterizados estritamente por suas posições e relações dentro de um sistema (SHAPIRO, 2015; apud RESNIK, 1997), superando dilemas de identidade sobre a redução dos números a conjuntos (BENACERRAF, 1965). Neste trabalho apresentamos e discutimos os dois tipos de realismo no contexto da filosofia da matemática, especialmente ao contrastar as perspectivas estruturalistas de Paul Benacerraf e Stewart Shapiro.

matemática moderna. Essa teoria oferece uma estrutura conceitual unificada para a definição e análise de objetos matemáticos. Seu desenvolvimento, especialmente a partir da formulação em termos dos axiomas de ZFC⁹, busca responder a duas questões basilares: “O que são conjuntos?” e “Quais conjuntos existem?”. Essa abordagem visa evitar contradições lógicas oriundas da concepção ingênua de conjuntos, como exemplificado pelo Paradoxo de Russell¹⁰.

Nesse contexto, a adoção de axiomas específicos estabelece critérios rigorosos para a existência e construção de conjuntos, incluindo o Axioma do Conjunto Vazio, o Axioma da Extensionalidade, o Axioma da Separação, o Axioma do Par, o Axioma da União e o Axioma das Partes. Entre esses fundamentos, destaca-se o Axioma do Infinito, que assegura a existência de conjuntos indutivos e permite a formalização dos números naturais conforme a definição de von Neumann. A partir dessa estrutura, a Teoria de Conjuntos possibilita a redução de toda a matemática a noções conjuntistas, permitindo que operações, propriedades numéricas e relações sejam interpretadas em um único arcabouço formal. Mais fundamentalmente, essa formalização possibilita uma redução ontológica de números a conjuntos. Ao seguir esse caminho, compreende-se que números *são* conjuntos. Essa unificação não apenas fortalece a consistência interna da disciplina, mas também oferece subsídios para investigações filosóficas e avanços matemáticos futuros.

O artigo "What Numbers Could Not Be", publicado originalmente em 1965 por Paul Benacerraf na *The Philosophical Review*, estabeleceu-se como um dos marcos fundamentais da filosofia da matemática contemporânea ao problematizar a tese de que números naturais poderiam ser identificados como objetos específicos. O autor desafia a visão tradicional de que os números são redutíveis a conjuntos, propondo, em contrapartida, uma fundamentação estruturalista. Para ilustrar tal argumento, Benacerraf propõe um experimento mental envolvendo duas personagens, Ernie e Johnny, que são instruídos na aritmética por meio da teoria dos conjuntos, porém a partir de modelos distintos: Ernie aprende os números naturais como ordinais de von Neumann, em que cada número é o conjunto de todos os seus predecessores, estabelecendo uma relação de pertinência cumulativa; Johnny é ensinado sob a construção de Zermelo, na qual cada número é apenas o conjunto unitário de seu predecessor imediato.

⁹ A teoria axiomática *standard* de conjuntos ganha o nome de ZFC como abreviação de Zermelo-Fraenkel mais o axioma da escolha.

¹⁰ O Paradoxo de Russell é apresentado no texto como a principal inconsistência lógica que motivou a transição da concepção ingênua de conjuntos para a abordagem axiomática ZFC. A discussão detalha como a contradição emerge ao se considerar um conjunto definido pela propriedade de não pertencer a si mesmo, o que resulta em um impasse onde o conjunto pertence a si mesmo se, e somente se, não pertencer. Para solucionar esse problema, o trabalho descreve o Esquema de Axiomas da Separação, que impõe restrições à formação de conjuntos e impede a existência de um "conjunto de todos os conjuntos", garantindo assim a consistência interna da teoria.

O conflito central dessa alegoria, frequentemente denominado “Dilema de Benacerraf”¹¹, manifesta-se no momento em que as personagens percebem que, embora concordem plenamente sobre a prática aritmética e suas operações, divergem irremediavelmente quanto às propriedades inerentes aos conjuntos que supostamente constituem os números. Benacerraf argumenta que, dada a existência de infinitas progressões setoriais capazes de representar a aritmética sem que haja um critério matemático para privilegiar uma em detrimento das outras, a identificação dos números com conjuntos específicos revela-se arbitrária. Em última análise, se o número 3 fosse ontologicamente um conjunto determinado, deveria haver uma justificativa teórica não arbitrária para tal identidade, o que a prática matemática não oferece nem exige para o seu funcionamento.

Dessa forma, a conclusão fundamental do artigo é que os números não devem ser compreendidos como objetos dotados de constituição interna, mas sim como posições em uma estrutura abstrata. Sob a ótica do estruturalismo matemático, a natureza dos números é puramente relacional, o que desloca o foco da ontologia do objeto individual para a ontologia da estrutura, definindo a matemática como a “ciência das estruturas” (RESNIK, 1997 apud SHAPIRO, 2015). Nessa perspectiva, rejeita-se a independência ontológica das entidades matemáticas, uma vez que estas não possuem propriedades intrínsecas além daquelas derivadas de sua posição e conexão dentro de um sistema. Como argumenta Benacerraf (1965), os números não realizam seu papel isoladamente, mas apenas enquanto componentes de um sistema que exibe uma progressão. Assim, o número é compreendido como um “cargo” ou posição funcional, análogo a uma peça de xadrez, cuja identidade é definida pelas regras do jogo, onde ser o número 3, por exemplo, resume-se a ocupar o lugar precedido pelo 2 e seguido pelo 4 dentro de uma rede de relações abstratas.

Consoante ao exposto, o presente trabalho encontra-se dividido em dois momentos constitutivos. O primeiro capítulo dedica-se à sistematização da Teoria de Conjuntos (ZFC), analisando como sua estrutura¹² axiomática é fundamental para evitar paradoxos lógicos,

¹¹ O dilema discutido (o de Ernie e Johnny) é o dilema central do artigo “What Numbers Could Not Be” (1965). É importante notar que Paul Benacerraf é célebre por dois dilemas distintos: 1. O Dilema da Identidade (foco deste trabalho), que trata da não-unicidade dos números e leva ao estruturalismo; 2. O Problema do Acesso (exposto em seu artigo de 1973, *Mathematical Truth*), que discute o conflito entre a semântica da verdade matemática e a possibilidade de conhecermos objetos abstratos sem contato causal. Esse último artigo não será aqui trabalhado pois não é o foco do trabalho.

¹² O conceito de estrutura assume dois matizes complementares ao longo do trabalho: no primeiro capítulo, ele é tratado de forma arquitetônica e axiomática no contexto da Teoria de Conjuntos (ZFC), funcionando como um arcabouço formal e unificado que tenta identificar a “substância” dos números por meio de construções e hierarquias complexas. No segundo capítulo, ao introduzir o estruturalismo de Benacerraf e Shapiro, o termo adquire sua definição técnica e ontológica central, passando a designar a forma abstrata de um sistema. A estrutura deixa de ser mera ferramenta de construção para se tornar a essência da matemática, em que os objetos

como o de Russell, e permitindo a formalização dos números naturais como conjuntos através das construções de von Neumann e Zermelo.

O segundo capítulo realiza uma análise profunda do artigo "What Numbers Could Not Be", de Paul Benacerraf, explorando a desconstrução da ideia de que números são objetos isolados e apresentando o estruturalismo matemático como resposta ao dilema da arbitrariedade na redução de números a conjuntos.

O estudo conclui que os números não possuem uma "substância" ou constituição interna própria, uma vez que a existência de múltiplas reduções a conjuntos funcionalmente equivalentes gera os chamados "teoremas espúrios" (junk theorems) — propriedades que, embora verdadeiras em um modelo específico de conjuntos, são estranhas e irrelevantes para a aritmética real. Dessa forma, fundamentado na tese de Benacerraf, o trabalho sustenta que os números não são objetos independentes ou conjuntos específicos, mas devem ser compreendidos como posições relacionais ou "lugares-como-cargos" dentro de uma estrutura abstrata, onde a identidade de cada número é definida estritamente pelo seu papel funcional e sua conexão com os demais elementos de uma progressão.

(como os números) não possuem natureza intrínseca, sendo definidos estritamente por suas posições relacionais e papéis funcionais dentro de um padrão abstrato dotado, inclusive, de primazia ontológica (ante rem).

1 TEORIA DE CONJUNTOS

Este primeiro capítulo estabelece as bases lógicas e ontológicas do trabalho por meio do estudo da Teoria de Conjuntos (ZFC). A discussão inicia-se na seção 1.1 com a transição da concepção ingênua de conjuntos para a abordagem axiomática, necessária para fundamentar a matemática e solucionar inconsistências lógicas como o Paradoxo de Russell.

Na seção 1.2, apresentam-se detalhadamente os axiomas fundamentais de ZFC, explorando as regras de existência e construção de conjuntos, como os axiomas do Vazio, do Par, da União e das Partes, que garantem a estabilidade e a consistência do sistema formal.

A seção 1.3 dedica-se à internalização dos números naturais, demonstrando como a construção de von Neumann e o Axioma do Infinito permitem a formalização da sequência numérica e do infinito real dentro do arcabouço conjuntista.

Por fim, a seção 1.4 analisa a distinção técnica entre as propostas de Ernst Zermelo e John von Neumann, ressaltando como a arbitrariedade na escolha das regras de sucessão gera propriedades conflitantes conhecidas como "teoremas espúrios", o que reforça a tese de que os números devem ser compreendidos como posições relacionais.

1.1 Uma breve noção da ZFC

Para podermos entrar no tema central deste trabalho, precisamos antes entender um pouco sobre teoria de conjuntos. Tendo em vista que o texto que discutiremos mais a frente tem como foco uma tematização filosófica da Teoria de Conjuntos Zermelo-Fraenkel com Axioma da Escolha (ZFC), darei uma breve noção e introdução dela.

Em ZFC temos uma abordagem axiomática da teoria de conjuntos. Em um contexto matemático tal como é o caso da teoria de conjuntos, um axioma é uma sentença ou afirmação assumida como verdadeira e cuja aceitabilidade não depende de prova. Os axiomas servem de base para o desenvolvimento da teoria e a busca por teoremas. Os axiomas da teoria de conjuntos têm o propósito fundamental de responder às perguntas essenciais dessa teoria. Essas perguntas são as seguintes: 1) “O que são conjuntos?” e 2) “Quais conjuntos existem?”.

MORTARI (2016, p. 65-68), em seu bem conhecido manual de introdução à lógica, apresenta as formas pelas quais conjuntos podem ser definidos ou descritos. A ideia fundamental apresentada é que conjuntos são coleções de objetos. Entretanto, o autor ressalta que é bastante difícil fornecer uma definição precisa do que é um conjunto. Nesse sentido, ele

aponta que termos alternativos como "classe", "agregado" e "totalidade", podem ser utilizados em substituição à palavra "conjunto". A noção intuitiva de coleção, em geral, sugere que os elementos estão fisicamente próximos ou compartilham alguma característica em comum, mas esse não é um requisito necessário, sobretudo quando se consideram conjuntos infinitos.

De acordo com o autor, existem duas principais formas de caracterizar um conjunto: pela enumeração de seus elementos (i.e., pela sua *extensão*) e pela descrição do que esses elementos têm em comum (i.e., pela sua *intensão*). Na definição extensional, os elementos são explicitamente listados entre chaves e separados por vírgulas, ou representados em diagramas de Venn associados a pontos. Por exemplo, o conjunto formado pelos indivíduos Pedro, Paulo e Alex pode ser escrito como:

$$\{ \text{Pedro, Paulo, Alex} \}$$

ou ainda, em um exemplo genérico,

$$A = \{ a, b, c \}$$

Esse método mostra-se eficaz para conjuntos pequenos, conhecidos e finitos. Já a definição por descrição ou *intensão*, também chamada de "definição por compreensão" ou "lei de geração" (MORTARI, 2016, p. 66), consiste em especificar uma propriedade comum a todos os elementos do conjunto¹³. Assim, em vez de listar cada elemento, descreve-se a característica que os identifica. Por exemplo, o conjunto de todos os estudantes de Filosofia da Universidade Federal Fronteira Sul pode ser representado por:

$$\{ x \mid x \text{ é um estudante de Filosofia da UFFS} \}$$

De forma semelhante, o conjunto dos números pares pode ser expresso extensionalmente como:

$$\{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}$$

ou ainda, intensionalmente:

$$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par} \}$$

Um outro exemplo possível é o conjunto dos professores de Matemática, que pode ser escrito como:

$$P = \{ x \mid x \text{ é um professor de Matemática} \}$$

Além disso, o autor salienta que a relação de pertinência entre elementos e conjuntos pode ser expressa simbolicamente. A notação $s \in F$ indica que o elemento s pertence ao

¹³ Vale ressaltar que aqui não buscaremos explicar o que é uma propriedade e quais propriedades existem. Esse é um tema filosófico dos mais importantes mas que foge ao escopo deste trabalho.

conjunto F , ao passo que $s \notin F$ significa que s não pertence a esse conjunto. Dessa forma, se exemplificarmos, considerando F como o conjunto de filósofos e Sócrates como a variável s , a proposição "Sócrates é um filósofo" pode ser verificada pela análise de sua pertinência ao conjunto dos filósofos.

Agora temos uma ideia geral de como podemos conceber conjuntos. Essa ideia geral pode ser tornada formalmente precisa em termos axiomáticos. Podemos capturar o elemento extensional dos conjuntos através do *axioma da extensionalidade*. Além disso, podemos também capturar o elemento intencional em termos do *axioma de compreensão ingênuo*.

O *axioma da extensionalidade* define o critério de igualdade entre conjuntos: dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem exatamente os mesmos elementos. A ordem dos elementos e a repetição interna não influenciam essa igualdade, o que significa que conjuntos são objetos de natureza extensional (FAJARDO, 2024, p. 71). Formalmente, podemos expressar o axioma da seguinte maneira:

$$\forall A \forall B [A = B \Leftrightarrow (\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B))]$$

O *axioma da compreensão ingênuo*, por sua vez, leva a problemas importantes. Esse axioma não é formalmente aceito na Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC). Ele consiste antes em uma formulação inicial de caráter intuitivo sobre a formação de conjuntos que se revelou problemática e levou ao desenvolvimento de uma abordagem axiomática mais rigorosa. De acordo com essa concepção ingênua, admitia-se que, dada qualquer propriedade $P(x)$, existiria um conjunto C cujos elementos seriam precisamente todos aqueles que satisfazem tal propriedade. Em outras palavras, a qualquer característica que pudesse ser descrita, deveria corresponder um conjunto. Essa formulação apresentava grande apelo intuitivo, uma vez que é comum na prática matemática descrever conjuntos, inclusive infinitos, por meio de propriedades, como o conjunto dos números pares ou o conjunto dos números primos. Assim, parecia razoável supor que, para cada propriedade, deveria existir um conjunto associado.

Contudo, essa concepção mostrou-se inconsistente em virtude de paradoxos lógicos¹⁴, sendo o mais célebre deles o *Paradoxo de Russell* (FAJARDO, 2025, p. 36-39). Esse paradoxo surge ao se considerar a propriedade " $x \notin x$ ", isto é, " x não pertence a si mesmo". Se aceitarmos a hipótese de que toda propriedade define um conjunto, deve existir um conjunto $R = \{ x \mid x \notin x \}$.

¹⁴ Para mais detalhes, cf. SUPPES, 2012, p. 5-8

A questão fundamental então se coloca: $R \in R$? Se assumirmos que $R \in R$, isso significa que R goza da propriedade que o define, isto é, $R \notin R$, o que constitui uma contradição. Se, por outro lado, admitirmos que $R \notin R$, então R não satisfaz a propriedade que o define e, portanto, deveria pertencer a si mesmo, ou seja, $R \in R$, o que novamente leva a uma contradição. Assim, chega-se à conclusão paradoxal de que $R \in R$ se, e somente se, $R \notin R$.

Esse resultado demonstrou que a hipótese de que qualquer propriedade define um conjunto não é viável, pois conduz a inconsistências lógicas insuperáveis. Como consequência, tornou-se necessário reformular os fundamentos da teoria dos conjuntos. A solução encontrada pela matemática clássica moderna foi a adoção da Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC). Esse sistema estabelece uma base ontológica composta exclusivamente por conjuntos, de modo que toda entidade matemática é construída via relação de pertinência, sem o recurso a objetos primitivos (*urelements*¹⁵). Tal rigor axiomático neutraliza paradoxos derivados da concepção ingênua e garante a consistência interna necessária para a definição de conjunto.

Em suma, uma abordagem axiomática em teoria de conjuntos é assim necessária pois apenas assim podemos evitar bem-conhecidos paradoxos. Em particular, é preciso criar instrumentos para evitar o paradoxo de Russell. Como vimos, esse paradoxo surgiu ao definirmos conjuntos de maneira muito liberal. Essa liberalidade está formulada no axioma de separação ingênuo que especifiquei acima. Informalmente, esse axioma nos diz que para qualquer propriedade há um conjunto. Felizmente, esse problema pode ser solucionado com a imposição de restrições e mecanismos de controle na associação de conjuntos a propriedades.

Isso apresenta razões para a elaboração de uma abordagem axiomática à teoria de conjuntos tal como a que estou apresentando aqui. A solução do paradoxo de Russell codificada na Teoria de Conjuntos ZFC consiste em impor restrições e mecanismos de controle ao uso de propriedades para definir conjuntos, substituindo a liberdade irrestrita de geração de conjuntos por um sistema de axiomas que garante a existência apenas de conjuntos cuja definição seja compatível com tais regras, evitando assim o problema identificado por Russell e outros paradoxos semelhantes. A partir disso, vejamos agora os axiomas que definem a teoria de conjunto ZFC.

¹⁵ Os *urelements*, frequentemente identificados nas fontes pelo termo "indivíduos", referem-se a objetos que não são conjuntos (ou classes), mas que podem ser membros de um conjunto. Na hierarquia de tipos de Russell, por exemplo, os indivíduos constituem o "tipo 0", servindo como a ontologia base ou o equipamento fundamental do mundo sobre o qual estruturas e classes de níveis superiores são construídas, Cf. SHAPIRO, 2015, p. 170

1.2 Os Axiomas básicos de ZFC

Inicia-se a exposição dos axiomas fundamentais do sistema de Zermelo-Fraenkel com o **Axioma do Vazio**, classificado como um **axioma de existência**. Diferentemente dos axiomas de construção, como os do par, da união ou das partes, este postulado é ontologicamente primário, pois garante a existência de um primeiro conjunto sem depender de objetos previamente estabelecidos.

Há três tipos de axiomas no sistema de Zermelo-Frankel. Os axiomas de existência (Vazio e Infinitude) distinguem-se por definirem, cada um, um único conjunto específico, ao passo que os de construção permitem a geração de novos conjuntos a partir de outros já existentes. Já axiomas da extensão e da regularidade podem ser chamados de estruturais. Essa classificação é meramente didática para entendermos o papel de cada axioma (FAJARDO, 2025, p. 71.).

Sua formulação lógica, $\exists x \forall y (y \in x)$, estabelece a base para a construção de toda a teoria e da própria aritmética a partir do "nada" ($\emptyset$). Embora o axioma garanta a existência, a **unicidade** do conjunto sem elementos é uma consequência do Axioma da Extensão, o que permite a introdução da constante $\emptyset$ para representá-lo formalmente. A unicidade é provada demonstrando que, se existissem dois conjuntos vazios distintos, o Axioma da Extensão seria violado, uma vez que ambos possuem exatamente os mesmos elementos (nenhum) (FAJARDO, 2025, p. 73). É relevante notar que, no rigor do sistema ZFC, o Axioma do Vazio pode ser considerado redundante se for assumida a existência de ao menos um conjunto qualquer através do Esquema de Axiomas da Separação, embora sua manutenção seja justificada por fins didáticos e históricos. A partir deste conjunto inaugural e do uso subsequente de axiomas de construção, torna-se possível derivar uma infinidade de conjuntos distintos, fornecendo o arcabouço necessário para a definição formal dos números naturais¹⁶.

A formulação original do Axioma do Conjunto Vazio estabelece a existência de um conjunto destituído de elementos. Simbolicamente, pode ser expresso como:

$$\exists A (\forall X (X \notin A))$$

Embora o uso do artigo indefinido possa sugerir a existência de múltiplos conjuntos com tal propriedade, o **Axioma da Extensão** soluciona a questão ao determinar que os conjuntos são caracterizados exclusivamente por seus elementos; consequentemente, qualquer

¹⁶ FAJARDO, 2025, p. 76. No contexto da fundamentação da aritmética, Fajardo observa que, embora os primeiros axiomas permitam provar a existência de uma infinidade de conjuntos finitos (como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$), a prova da existência de conjuntos infinitos e a definição completa de números naturais exigem o Axioma da Infinitude. Nesse trabalho não vamos usar esse último axioma citado pois não haverá necessidade dele para a temática e problema abordado.

conjunto sem elementos é identificado como o próprio vazio¹⁷. A partir dessa base primordial, torna-se possível a geração de uma infinidade de novos conjuntos, cujos métodos de construção são regidos por axiomas subsequentes.

O **Axioma do Par** exemplifica esse mecanismo ao postular que, para quaisquer dois conjuntos A e B , existe um conjunto $C=\{A,B\}$ contendo precisamente esses dois elementos. Tal postulado desempenha um papel arquitetônico na teoria, permitindo a formação de **conjuntos unitários** (nos casos em que $A=B$), representados por $\{A\}$ ¹⁸. Além disso, o axioma fundamenta a definição formal de **pares ordenados**, comumente expressos pela estrutura $\langle A,B \rangle = \{\{A\}, \{A,B\}\}$. Essa noção é basilar para a representação de relações e funções, compreendidas como conjuntos específicos de pares ordenados em que a ordem dos componentes é determinante para a preservação de propriedades lógicas, como a antissimetria. No sistema ZFC, não há distinção absoluta entre "elemento" e "conjunto", sendo ambos tratados sob a mesma ontologia. Assim, pares ordenados e suas decorrências (funções e relações) são, em última análise, conjuntos de conjuntos (FAJARDO, 2025 p.75).

O **Axioma do Par** estabelece que, para quaisquer dois conjuntos A e B , existe um terceiro conjunto $C=\{A,B\}$ cujos elementos são estritamente os dois conjuntos iniciais. Formalmente, expressa-se como:

$$\forall A \forall B \exists C \forall X (X \in C \Leftrightarrow X=A \vee X=B)$$

Como observado anteriormente, este postulado é essencial para a construção de estruturas complexas, como os pares ordenados e os conjuntos unitários (quando $A=B$), mantendo a premissa de que, no sistema ZFC, todos os objetos tratados são conjuntos.

Sequencialmente, introduz-se o **Axioma da União**, pertencente ao grupo dos axiomas de construção. Este postulado determina que, para todo conjunto A , existe um conjunto B (denotado por $\cup A$) cujos elementos são precisamente os elementos dos elementos de A ¹⁹. Na prática, este axioma permite "desempacotar" coleções de conjuntos, possibilitando a união de múltiplos conjuntos simultaneamente. Note-se que a união binária convencional ($M \cup N$) constitui um caso particular, derivado da aplicação sucessiva do Axioma do Par para formar $\{M,N\}$ e, posteriormente, do Axioma da União para extrair seus elementos. Com esse axioma, nós podemos gerar a “soma” de conjuntos. Ele pode ser formulado nos seguintes termos:

¹⁷FAJARDO, 2025, p. 73. A unicidade do conjunto vazio é formalizada como o primeiro teorema do sistema ZFC, demonstrando que a existência de dois conjuntos vazios distintos violaria o princípio da extensionalidade.

¹⁸ Idem, p. 74. O autor observa que, por meio do axioma da extensão, $\{x,y\}$ e $\{y,x\}$ constituem o mesmo conjunto, e a notação $\{x\}$ é utilizada como simplificação para o par $\{x,x\}$.

¹⁹ Idem, p. 76. O Axioma da União é fundamental para construir conjuntos hereditariamente finitos, onde os elementos, e os elementos dos elementos, permanecem dentro da ontologia de conjuntos da teoria.

Axioma da união: Para todo conjunto A , existe um conjunto B cujos elementos são precisamente os elementos dos elementos de A . Em linguagem formal:

$$\forall A \exists B \forall X (X \in B \Leftrightarrow \exists Y (X \in Y \text{ e } Y \in A))$$

Este conjunto B é usualmente denotado por $\cup A$.

Exemplo: Seja $A = \{\{2,3\}, \{3,4\}\}$. Os elementos de A são $\{2,3\}$ e $\{3,4\}$. Os elementos de $\{2,3\}$ são 2 e 3, e os de $\{3,4\}$ são 3 e 4. Assim, a união de A é o conjunto $\{2,3,4\}$.

A noção de união ensinada no ensino médio, como em $M \cup N$, é um caso particular do Axioma da União. Em termos formais, a união de M e N seria obtida formando-se primeiro o conjunto $\{M,N\}$ (pelo Axioma do Par) e, em seguida, aplicando o Axioma da União.

Uma vantagem significativa desse axioma é que ele permite a união não apenas de dois conjuntos, mas também de coleções infinitas, aspecto essencial para lidar com construções matemáticas mais complexas.

Nesse momento, poderíamos nos perguntar se, dado que introduzimos axiomáticamente a existência de conjuntos união, também precisamos introduzir explicitamente através de um axioma a existência de conjuntos intersecção. Isso não será necessário, pois a existência da intersecção de dois conjuntos é uma consequência do axioma de separação (ou compreensão) não-ingênuo.

O **Esquema de Axiomas da Separação** (ou Compreensão)²⁰. Diferentemente dos axiomas de existência categórica, como o do Vazio, a Separação é um axioma existencial condicional: ela permite a criação de um novo conjunto B a partir de um conjunto A já existente, selecionando apenas os elementos que satisfaçam uma propriedade $P(x)$ definida. A restrição a um conjunto pré-existente é a solução proposta por Zermelo para evitar inconsistências como o **Paradoxo de Russell**, que invalidou a versão ingênua da teoria dos conjuntos de Frege. Assim, a intersecção de uma família de conjuntos x é definida através da separação de elementos de um dos membros de x que pertençam simultaneamente a todos os outros, exigindo-se, para evitar a geração de um "conjunto de todos os conjuntos", que a família x não seja vazia²¹.

²⁰ FAJARDO, 2025, p. 81. A intersecção de uma família não vazia x é provada como um teorema em ZFC, utilizando o esquema de axiomas da separação para garantir a existência do conjunto $\cap x$.

²¹ Idem, p. 80. O autor demonstra que a exigência de um conjunto "universo" prévio y para a aplicação da propriedade P impede a formação do conjunto de todos os conjuntos, resolvendo a contradição demonstrada no Paradoxo de Russell.

A designação "Separação", também referida como axioma da especificação ou da compreensão, fundamenta-se na função precípua deste postulado: segregar elementos de um conjunto preexistente A que satisfaçam uma propriedade $P(x)$, constituindo, assim, um novo conjunto B . O autor explica que esta é uma versão corrigida do axioma da compreensão de Frege, limitada a um conjunto previamente existente. Diferentemente da teoria ingênua de conjuntos, a formulação de Zermelo restringe a aplicação de propriedades a um conjunto já estabelecido, estratégia essencial para elidir contradições lógicas, notadamente o **Paradoxo de Russell**²². No sistema ZFC, tal paradoxo é revisitado como um teorema que demonstra a inexistência de um "conjunto de todos os conjuntos", uma vez que a existência de tal objeto permitiria a construção de conjuntos inconsistentes²³.

Para ilustrar a mecânica do postulado, considere-se a propriedade de identidade ($x=x$). Ao ser aplicada a um conjunto A , o conjunto resultante B será identicamente A . Inversamente, a utilização de uma propriedade contraditória, como $x \neq x$, resulta necessariamente no conjunto vazio ($\emptyset$), o que evidencia, do ponto de vista estritamente lógico, a redundância do Axioma do Vazio perante o **Esquema de Axiomas da Separação**. Fajardo (2025, p.81) demonstra que o Axioma do Vazio é dispensável, pois sua existência pode ser provada através da Separação a partir de qualquer conjunto preexistente e da propriedade de não-identidade. Formalmente, o esquema é enunciado como:

$$\forall y \exists z \forall x ((x \in z) \leftrightarrow ((x \in y) \wedge P))$$

Onde cada fórmula P determina uma instância distinta do axioma. Por tratar-se de um "esquema", o sistema não possui um único axioma de separação, mas sim uma família infinita de proposições, uma para cada propriedade P formulável (FAJARDO, 2025, p.81). Esta estrutura é vital para a fundamentação da aritmética, pois permite definir rigorosamente a **interseção** de famílias de conjuntos e a existência de subconjuntos, garantindo a estabilidade do sistema formal²⁴.

O **Esquema de Axiomas da Separação** (ou Especificação) caracteriza-se por não constituir uma proposição única, mas uma coleção infinita de axiomas, em que cada fórmula P determina uma nova instância funcional. Diferentemente de axiomas existenciais categóricos, este postulado opera sob a condição da existência prévia de um conjunto, impossibilitando a criação de objetos *ex nihilo*. Um aspecto técnico crucial, conforme

²²FAJARDO, 2025, p. 80. O Paradoxo de Russell (Teorema 3.10) demonstra que a suposição de um "conjunto de todos os conjuntos" leva a uma contradição lógica intransponível.

²³FAJARDO, 2025, p. 80. A restrição imposta pela Separação impede a formação do conjunto de todos os conjuntos, protegendo o sistema ZFC de inconsistências internas.

²⁴FAJARDO, 2025, p. 81. A interseção de uma família não vazia de conjuntos é definida formalmente utilizando este esquema, o que é fundamental para a construção de estruturas aritméticas e algébricas.

salientado por Fajardo, é a restrição da variável correspondente ao novo conjunto: esta não deve ocorrer de forma livre na propriedade utilizada, o que previne definições circulares e garante a consistência lógica do sistema. O autor destaca que a restrição de que a variável do novo conjunto não ocorra livre na fórmula serve para evitar inconsistências no sistema ZFC (FAJARDO, 2025, p.78).

A existência do conjunto resultante é assegurada pelo postulado, enquanto sua **unicidade** é uma derivação direta do Axioma da Extensão. A unicidade é provada pelo Axioma da Extensão, demonstrando que o conjunto definido pela separação é o único que satisfaz exatamente a propriedade estipulada (FAJARDO, 2025, p. 81). Tal esquema permite a definição formal de operações binárias essenciais, tais como a **interseção** ($A \cap B = \{x \in A | x \in B\}$) e a **subtração** ou diferença ($A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$). Adicionalmente, a aplicação de uma propriedade contraditória sobre um conjunto preexistente, como a não-identidade ($x \neq x$), resulta no conjunto vazio, o que demonstra a superfluidade lógica do Axioma do Vazio perante o esquema da separação²⁵.

Complementarmente aos mecanismos de seleção, o **Axioma das Partes** (ou da Potência) permite a expansão do universo conjuntista ao garantir a existência de um conjunto $P(A)$ composto por todos os subconjuntos de A . Formalmente, o axioma estabelece que $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$. Este postulado é classificado como um **axioma de construção**, sendo fundamental para a geração de novos conjuntos a partir de outros e para a estruturação de hierarquias matemáticas mais complexas. É imperativo, nesta etapa, não confundir a relação de pertinência ($\in$) com a de inclusão ($\subseteq$), uma distinção que o Axioma das Partes torna particularmente evidente ao tratar subconjuntos como elementos de uma nova estrutura.

Diferentemente da união de uma família de conjuntos, a interseção ($\cap$) exige a restrição de que a família não seja vazia para evitar a derivação do "conjunto de todos os conjuntos", o que levaria ao Paradoxo de Russell. O Axioma das Partes traz novamente à tona a necessidade de não confundir os símbolos de pertinência e inclusão, uma vez que os elementos de $P(A)$ são, por definição, subconjuntos de A (FAJARDO, 2025, p.78, 82).

A compreensão plena do Axioma das Partes pressupõe a definição rigorosa da relação de inclusão: um conjunto x é subconjunto de y (denotado por $x \subseteq y$) se, e somente se, todo elemento de x também for elemento de y . A partir dessa definição, fundamentam-se dois teoremas essenciais: a vacuidade da inclusão do conjunto vazio, que estabelece que $\emptyset \subseteq x$ para

²⁵ Demonstra-se que o Axioma do Vazio é mantido no sistema por motivos históricos e didáticos, embora sua existência possa ser provada por meio da separação utilizando o teorema lógico $\exists y (y = y)$ (FAJARDO, 2025 p. 81).

qualquer conjunto x , e a reflexividade da inclusão, indicando que todo conjunto está contido em si mesmo²⁶.

Sob a perspectiva do sistema de Zermelo-Fraenkel, o Axioma das Partes integra o grupo dos axiomas de construção. Sua função primordial é garantir que, para qualquer conjunto x , exista um conjunto y cujos elementos são precisamente todos os subconjuntos de x . Formalmente, o axioma é expresso pela sentença:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Dessa construção deriva-se o conjunto das partes, denotado por $P(x)$. No que tange à fundamentação da aritmética, este axioma, em conjunto com os axiomas do par e da união, permite a expansão da complexidade estrutural do universo conjuntista. Embora seja possível provar a existência de conjuntos distintos para cada número natural n por meio de argumentos metalinguísticos, a cardinalidade de $P(A)$ demonstra um crescimento exponencial, seguindo o padrão $|P(A)| = 2^n$. Fajardo (2025, p.76) esclarece que, embora se possa provar a existência de n conjuntos diferentes para cada número natural, a prova de que existem infinitos conjuntos de uma só vez exige axiomas adicionais, como o da infinidade. É imperativo ressaltar que, no paradigma de Zermelo-Fraenkel (ZFC), "tudo é conjunto". Portanto, a distinção entre "elemento" e "conjunto", frequente no ensino básico, é meramente didática e não possui caráter absoluto na teoria formal, uma vez que elementos de um conjunto são, eles próprios, conjuntos. Fajardo (2025, p.75) ressalta que o uso de símbolos de pertinência ($\in$) e inclusão ($\subseteq$) entre os mesmos objetos é perfeitamente válido no sistema ZFC, corrigindo o equívoco comum de que a pertinência ocorre apenas entre "elemento e conjunto".

Exemplos de Construção:

Se $A = \emptyset$, então $P(A) = \{\emptyset\}$. O conjunto resultante possui um elemento, correspondendo a $2^0 = 1$.

Se $A = \{1\}$, tem-se $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$, resultando em dois elementos ($2^1 = 2$). Note-se que o símbolo "1" aqui representa uma estrutura conjuntista previamente definida no sistema.

Para $A = \{1, 2\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, totalizando quatro elementos ($2^2 = 4$).

²⁶ O teorema $\forall x (x \subseteq x)$ é demonstrado pelo chamado argumento por vacuidade. Na lógica proposicional, a implicação $A \rightarrow B$ é verdadeira se o antecedente A for falso; como o conjunto vazio não possui elementos, a condição para a inclusão é satisfeita automaticamente (FAJARDO, 2025, p. 74).

A relevância do Axioma das Partes reside em fornecer a base para a edificação de estruturas matemáticas superiores, sendo um pilar central no projeto de redução de noções abstratas à linguagem da teoria dos conjuntos.

Em suma, a análise dos **axiomas de construção**, com especial ênfase no **Axioma das Partes**, evidencia a eficácia do sistema de **Zermelo-Fraenkel** em prover uma base rigorosa para a matemática contemporânea. A articulação desses princípios permite a edificação de estruturas de complexidade crescente a partir da vacuidade inicial, demonstrando que a teoria dos conjuntos não apenas organiza objetos matemáticos, mas os define em sua essência ontológica, sob a premissa fundamental de que **"tudo é conjunto"**. Portanto, a formalização discutida reitera a importância de se compreender tais axiomas como pilares indispensáveis para a redução de noções abstratas e para a plena fundamentação da aritmética dentro do paradigma conjuntista.

1.3 A Questão dos números naturais e o infinito

Desde cedo, somos apresentados à sequência dos números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, ... No entanto, questões aparentemente simples como "O que é um número natural?" revelam-se conceitualmente complexas. Em primeiro lugar, é fundamental distinguir o número em si de sua representação simbólica. Por exemplo, o número 2 é diferente da sua representação simbólica "2" (em algarismos arábicos) bem como de sua representação "II" (em numerais romanos). Valendo-nos de uma terminologia consagrada por Frege em seus escritos sobre filosofia da linguagem, podemos dizer que o número é a referência de diferentes nomes. O numeral "2" *se refere* ao número 2. Essa observação, contudo, nos deixa carente de uma resposta à questão sobre o que é o número em si²⁷.

²⁷ Hamkins, J. D. (2021). *Lectures on the Philosophy of Mathematics*. MIT Press. p.20

1.3.1 Internalizando os números naturais na teoria de conjuntos

A abordagem adotada é a de construir os números naturais dentro da Teoria de Conjuntos, em contraste com a axiomatização de Peano²⁸, que se fundamenta nas noções primitivas de zero, sucessor e indução.

Na construção de *Von Neumann*, o número 0 é definido como o conjunto vazio ($\emptyset$). Cada número natural subsequente é o conjunto formado por todos os números naturais anteriores. Assim:

$$1 = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Essa formulação apresenta vantagens técnicas, embora produza propriedades contraintuitivas, como:

$$1 \in 2 \text{ e } 1 \subseteq 2$$

Significando que o conjunto que representa 1 é elemento e também subconjunto do conjunto que representa 2.

A noção de *sucessor* é formalizada como: dado um conjunto a , seu sucessor é:

$$S(a) = a \cup \{a\}$$

Tal operação resulta sempre em um conjunto válido devido aos axiomas do Par e da União. Por exemplo:

$$S(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = 1$$

$$S(1) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$$

$$S(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3$$

Observa-se, assim, que cada número natural n é representado por um conjunto com n elementos.

²⁸ A fundamentação da estrutura dos números naturais, sob a ótica estruturalista, encontra seu alicerce na formalização axiomática que define as relações intrínsecas do sistema. A aritmética de Peano consiste em um sistema axiomático que caracteriza a estrutura dos números naturais a partir de três componentes essenciais: um objeto inicial único (o zero), a relação de sucessão (cada número possui um sucessor único) e o princípio da indução matemática. Essa aritmética funciona como uma definição implícita que descreve o padrão comum a qualquer progressão infinita, tratando os números não como objetos isolados, mas como posições dentro de uma estrutura abstrata (SHAPIRO, 2015, p. 364-405). Para uma definição mais detalhada e sistemática, cf. Suppes (2012, p. 121-126).

1.3.2 Conjuntos indutivos e o infinito real

A formalização da sequência infinita dos naturais é dada pela noção de *conjunto indutivo*. Um conjunto I é dito indutivo quando:

1. Contém o conjunto vazio;
2. É fechado para a operação de sucessor.

Se existe um conjunto indutivo, ele deve conter 0 e, por fim, conter também 1, 2, 3 e todos os demais números naturais. Dessa forma, um conjunto indutivo representa um infinito real, e não apenas potencial²⁹.

1.3.3 O Axioma do infinito e a existência dos números naturais

A existência de um conjunto indutivo é objeto de discussão filosófica. No entanto, para fins de fundamentação matemática, adota-se o **Axioma do Infinito**, que postula a existência de pelo menos um conjunto indutivo. Este axioma é um dos poucos axiomas de existência não condicionais, junto ao Axioma do Vazio, já que a maioria dos outros axiomas (como os da Separação ou da União) exige conjuntos previamente existentes para gerar novos.

Ao admitir o Axioma do Infinito, torna-se possível construir uma infinidade de conjuntos infinitos. Com esse axioma, define-se com precisão o que é um número natural: trata-se de um conjunto que pertence a todo conjunto indutivo. Essa formulação resolve a questão conceitual inicial sobre a natureza dos números naturais.

²⁹ De acordo com Shapiro (2015), a distinção entre o infinito atual (ou real) e o infinito potencial é central para entender como as posições filosóficas moldam a prática matemática. O infinito atual concebe as coleções matemáticas como totalidades completas e estáticas, uma visão sustentada por Kurt Gödel, que defendia que classes e conceitos existem como objetos reais independentes de nossas construções (SHAPIRO, 2015, p. 28, 29). Em contrapartida, o infinito potencial entende o infinito como um processo em constante crescimento e nunca finalizado; esta era a perspectiva de Henri Poincaré, que rejeitava o infinito atual e as definições impredicativas por considerar que os objetos matemáticos não possuem existência independente da atividade do matemático (SHAPIRO, 2015, p. 28). Essa disputa evidencia o conflito entre o realismo ontológico e o construtivismo.

1.3.4 O conjuntos dos números naturais

Resta, então, a indagação se existe um conjunto que contenha exatamente todos os números naturais. A resposta é afirmativa: tal conjunto é denominado *Ômega* (ω) ou $\mathbb{N}$. Sua existência é demonstrada combinando o Axioma do Infinito, que garante a existência de ao menos um conjunto indutivo A , com o Axioma da Separação, que permite extrair de A o subconjunto ω , composto apenas pelos elementos que pertencem a todos os conjuntos indutivos.

Essa caracterização assegura que ω é a coleção completa dos números naturais, respondendo de forma definitiva às questões "Quais números naturais existem?" e "Existe a coleção de todos os números naturais?".

1.3.5 Conjuntos e números naturais ZFC

O presente capítulo teve como objetivo responder a duas questões fundamentais: "O que são conjuntos?" e "Quais conjuntos existem?". Para tanto, adotou-se a perspectiva da *Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha* (ZFC).

Inicialmente, apresentou-se a fundamentação teórica e as motivações para a adoção de uma abordagem axiomática, ressaltando que as perguntas sobre a natureza e a existência dos conjuntos devem ser respondidas a partir de *axiomas*, entendidos como proposições aceitas como verdadeiras. Tal abordagem é imprescindível para evitar paradoxos, como o *Paradoxo de Russell*, que demonstra a inconsistência decorrente da concepção ingênua de que qualquer propriedade pode definir um conjunto. Ao estabelecer restrições ao uso de propriedades para a definição de conjuntos, a abordagem axiomática contorna contradições lógicas.

Na teoria ZFC, todos os objetos matemáticos são tratados como conjuntos, o que permite unificar conceitos como números, funções e relações sob a mesma estrutura teórica. Essa concepção viabiliza a *internalização da matemática*, ou seja, a redução de noções complexas a conceitos conjuntistas, transferindo as indagações sobre a natureza e existência de entidades matemáticas para o campo dos conjuntos.

Foram apresentados e discutidos os principais axiomas que fundamentam a teoria de conjuntos. O Axioma do Conjunto Vazio assegura a existência de um conjunto destituído de elementos, servindo como ponto de partida para diversas construções. O Axioma da Extensionalidade define a igualdade entre conjuntos pela perfeita coincidência de seus

elementos, independentemente da ordem ou repetição. Já o Axioma da Separação viabiliza a formação de subconjuntos a partir de propriedades previamente determinadas, garantindo uma seleção controlada de elementos. O Axioma do Par permite a criação de conjuntos compostos por um ou dois elementos, enquanto o Axioma da União possibilita reunir, em um único conjunto, todos os elementos pertencentes aos elementos de outro conjunto. O Axioma das Partes, por sua vez, garante a existência do conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto dado, ampliando significativamente o escopo das construções possíveis. Por fim, o Axioma do Infinito postula a existência de conjuntos indutivos, assegurando a presença de conjuntos infinitos reais na teoria, o que permite a formalização rigorosa dos números naturais e de estruturas matemáticas de maior complexidade.

Com base nesses axiomas, foi desenvolvida a construção formal dos números naturais dentro da própria teoria de conjuntos, substituindo a abordagem puramente intuitiva pela definição rigorosa de *Von Neumann*, na qual cada número natural é identificado com o conjunto de todos os naturais anteriores. Assim:

$$0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$$

De forma recursiva, cada sucessor é formado pela união do número anterior com seu conjunto unitário:

$$S(n) = n \cup \{n\}$$

Essa construção permite definir formalmente o conjunto de todos os números naturais (denotado por ω ou $\mathbb{N}$) como a interseção de todos os conjuntos indutivos, cuja existência é assegurada pelo Axioma do Infinito em conjunto com o Axioma da Separação.

Conclui-se, portanto, que a teoria de conjuntos, por meio de sua estrutura axiomática, fornece uma base rigorosa e consistente para compreender a natureza dos conjuntos e dos números naturais. A internalização destes últimos como conjuntos oferece respostas precisas às questões "O que é um número natural?" e "Quais números naturais existem?", permitindo a formalização de operações e propriedades numéricas no contexto conjuntista.

1.4 Distinção técnica fundamental entre as propostas de Ernst Zermelo e John von Neumann

A distinção técnica fundamental entre as propostas de Ernst Zermelo e John von Neumann reside na regra de construção do sucessor de um número, a qual determina quais elementos compõem cada conjunto numérico. Na construção de Zermelo, o sistema baseia-se

na aplicação sucessiva da operação de conjunto unitário (*singleton*). Nesse modelo, define-se o zero como o conjunto vazio ($\emptyset$), enquanto o sucessor de qualquer número x é definido estritamente como o conjunto que contém apenas x , isto é, $\{x\}$. Estruturalmente, isso resulta em uma cadeia de conjuntos na qual o número 1 é representado por $\{\emptyset\}$, o número 2 por $\{\{\emptyset\}\}$, e assim sucessivamente. Uma propriedade notável desse sistema é que cada número, com exceção do zero, possui exatamente um elemento, e que a relação de pertinência ($\in$) ocorre apenas entre um número e o seu sucessor imediato.³⁰

Em contrapartida, John von Neumann propôs uma construção recursiva que se tornou o padrão na teoria dos conjuntos contemporânea (BENACERRAF, 1965, p.47, 54). Nessa abordagem, cada número é definido como o conjunto de todos os números que o antecedem (BENACERRAF, 1965, p.55, 69). Embora o zero também seja identificado com o conjunto vazio ($\emptyset$), a regra do sucessor é dada pela união de n com o seu próprio unitário, isto é, $n \cup \{n\}$. Como consequência, o número 1 é $\{\emptyset\}$, o número 2 é $\{0, 1\}$ ou, de forma explícita, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, e o número 3 é $\{0, 1, 2\}$. Diferentemente do modelo de Zermelo, no sistema de von Neumann o número n contém exatamente n elementos, e a relação de ordem "menor que" torna-se ontologicamente idêntica à relação de pertinência conjuntista (BENACERRAF, 1965, p.55; SHAPIRO, 2015, p.11).

Essa divergência técnica dá origem ao que Benacerraf (1965) denomina "teoremas espúrios" ou "teoremas inúteis" (*junk theorems*). Tais teoremas correspondem a propriedades que são formalmente verdadeiras dentro de uma determinada interpretação conjuntista, mas que não possuem significado ou validade no âmbito da aritmética ordinária. Por exemplo, na estrutura de von Neumann, a afirmação " $3 \in 17$ " é verdadeira, uma vez que 3 é menor que 17; já no sistema de Zermelo, essa mesma afirmação é falsa, pois o conjunto que representa o número 17 contém exclusivamente o número 16 como seu único elemento.

A existência dessas propriedades conflitantes constitui o núcleo do argumento de Benacerraf. Como ambos os sistemas satisfazem integralmente os axiomas de Peano e sustentam toda a estrutura da aritmética, mas divergem profundamente quanto à natureza interna dos números enquanto conjuntos, conclui-se que os números não podem ser

³⁰ Esta distinção técnica entre as reduções ontológicas da aritmética à teoria dos conjuntos é detalhada por Shapiro (2015), que contrasta a proposta de Ernst Zermelo — na qual o sucessor de um número é seu singleton ($s(n)=\{n\}$) — com o modelo de John von Neumann, onde cada número é definido como o conjunto de todos os seus predecessores ($n=\{0,1,\dots,n-1\}$). Paul Benacerraf (1965) utiliza essas construções divergentes (referidas em seu ensaio como os sistemas de "Ernie" e "Johnny") para demonstrar que, embora ambos os modelos satisfazem os Axiomas de Peano e permitam a derivação de toda a aritmética, eles resultam em propriedades conjuntos-teóricas conflitantes e não-aritméticas, como o número de elementos de cada conjunto ou as relações de pertinência entre eles. Essa análise fundamenta a tese estruturalista de que os números naturais não são objetos isolados com constituição interna própria, mas sim posições em uma estrutura progressiva abstrata.

identificados com objetos conjuntistas específicos. Para o autor, os números não são objetos dotados de propriedades intrínsecas, mas entidades definidas unicamente por sua posição em uma estrutura progressiva³¹.

Em suma, esse primeiro capítulo consolida a Teoria de Conjuntos (ZFC) como um arcabouço rigoroso capaz de evitar paradoxos lógicos e fundamentar a existência dos números naturais dentro de um sistema axiomático consistente. Demonstrou-se que a internalização dos números como conjuntos, seja pela construção de von Neumann ou de Zermelo, permite a plena execução da prática aritmética, mas carrega consigo propriedades puramente conjuntistas conhecidas como "teoremas espúrios". Esta base técnica é indispensável para o desenvolvimento do próximo capítulo, pois é precisamente na arbitrariedade da escolha entre esses modelos e na irrelevância dessas propriedades extras que se fundamenta o desafio proposto por Paul Benacerraf à redução ontológica dos números a objetos isolados.

Dessa forma, a análise técnica aqui concluída servirá de alicerce para a investigação filosófica do capítulo 2, onde exploraremos a parábola de Ernie e Johnny e o consequente dilema da identidade e referência. Ao compreendermos como as divergências estruturais entre as propostas de Zermelo e von Neumann invalidam a busca por uma "substância" numérica interna, estaremos preparados para discutir a transição para a perspectiva estruturalista. Assim, os conceitos de conjuntos e axiomas aqui trabalhados deixam de ser meras ferramentas de construção para se tornarem o objeto de uma análise que redefine a matemática como a ciência das estruturas, na qual os números são compreendidos apenas por suas posições relacionais

³¹ A relação entre a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC) e a teoria de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG) não é de isomorfismo direto, mas de uma extensão conservadora. Isso implica que a NBG, embora mais robusta por introduzir o conceito de classes próprias — permitindo tratar coleções como a "classe de todos os conjuntos" (V) sem incorrer no paradoxo de Russell —, não gera novos teoremas sobre conjuntos que não sejam já demonstráveis em ZFC. Diferente da ZFC, a NBG é finitamente axiomatizável. Esta estrutura, fundamentada pelo Axioma da Regularidade, garante que o universo seja bem-fundado, eliminando conjuntos circulares ($A \in A$). Sobre a equivalência dessas interpretações e a formalização do universo V , cf. Shapiro (2015) e Suppes (2012).

2 ANÁLISE DO ARTIGO *WHAT NUMBERS COULD NOT BE*

O segundo capítulo dedica-se à análise profunda do artigo "What Numbers Could Not Be", de Paul Benacerraf, investigando a desconstrução da ideia de que números são objetos isolados. A discussão inicia-se com a parábola de Ernie e Johnny, utilizada pelo autor para expor a indeterminação ontológica que surge quando a aritmética é reduzida a diferentes modelos da teoria dos conjuntos.

Na seção 2.2, examina-se o dilema de Benacerraf, que foca no conflito de referência e identidade entre as construções de Zermelo e von Neumann, demonstrando como essa divergência gera "teoremas espúrios" e invalida a busca por uma natureza intrínseca dos números.

Em 2.3, apresenta-se a tese estruturalista como solução a esse impasse, estabelecendo um contraste entre o estruturalismo eliminativo de Benacerraf e o estruturalismo *ante rem* de Stewart Shapiro.

Na etapa final, seção 2.4, explora-se a distinção entre os números vistos como "lugares-como-cargos" ou "lugares-como-objetos", definindo o estatuto ontológico das estruturas no debate contemporâneo.

2.1 Análise e reconstrução do artigo de Benacerraf

Na primeira parte do artigo *What Numbers Could Not Be*, Benacerraf (1965) utiliza uma parábola pedagógica para investigar a ontologia dos números e a complexa relação entre a aritmética e a teoria dos conjuntos. O autor concentra sua análise nas nove páginas iniciais da obra, nas quais introduz os personagens Ernie e Johnny. Filhos de logicistas militantes³², ambos foram educados de maneira heterodoxa: em vez de aprenderem a contar pelo método tradicional, iniciaram seus estudos diretamente na teoria dos conjuntos. Para eles, a aritmética

³² No contexto da obra de Benacerraf (1965), o "logicista militante" personifica o programa filosófico que visa reduzir a aritmética à lógica ou à teoria dos conjuntos. Essa perspectiva fundamenta-se em quatro pilares principais: a) Isomorfismo entre ordem pedagógica e epistemológica, defendendo que o ensino da matemática deve refletir a sua fundamentação lógica; b) Reduccionismo, em que números não são vistos como objetos primitivos, mas como nomenclaturas para estruturas de conjuntos pré-existentes; c) Definição eliminativa, conforme os moldes de Frege e Russell, onde o conceito de número é exaurido por termos lógicos (como classes de equinumerosidade); e d) Derivabilidade, tratando os axiomas de Peano como teoremas passíveis de demonstração dentro da teoria dos conjuntos. O autor utiliza essa caracterização para introduzir o dilema central de seu artigo: a multiplicidade de reduções possíveis (como as de Zermelo e von Neumann) que invalida a tese de que números possam ser identificados como conjuntos específicos. Para mais detalhes sobre o programa logicista em filosofia da matemática, cf. SHAPIRO, 2015, p. 157-201.

não se apresenta como um campo autônomo, mas como uma simples atribuição de novos nomes a conjuntos que já lhes eram familiares.

A utilização da história de Ernie e Johnny por Paul Benacerraf funciona como um poderoso dispositivo retórico para expor a indeterminação ontológica que permeia a redução da aritmética à teoria dos conjuntos. Ao confrontar as construções de Zermelo e von Neumann, o autor evidencia que elas divergem em propriedades estruturais externas ao domínio aritmético, como a relação de pertencimento entre numerais. Esse conflito dá origem aos chamados “teoremas inúteis” (*junk theorems*), demonstrando que sentenças como $3 \in 17$ são meros subprodutos da interpretação adotada, desprovidas de um fato matemático ou metafísico que privilegie uma definição sobre a outra. Essa arbitrariedade serve como base para a fundamentação do estruturalismo matemático: se não há critérios objetivos para identificar os números com conjuntos específicos, a busca por sua natureza intrínseca revela-se um equívoco filosófico.

Ao detalhar a construção do sistema numérico de Ernie, Benacerraf demonstra como a aritmética pode ser integralmente absorvida pela teoria dos conjuntos. Ernie aprende a existência de um conjunto infinito N , cujos elementos são ordenados por uma relação de boa ordem R . Nesse sistema, o número “0” é identificado como o primeiro elemento (a_0) de N sob essa relação. A partir dessa base, Ernie é capaz de demonstrar os axiomas de Peano como teoremas derivados, e não como postulados fundamentais. Do mesmo modo, as operações de adição, multiplicação e exponenciação não precisam ser introduzidas por definições recursivas, sendo explicitadas por meio de operações conjuntistas previamente disponíveis.

A análise de Benacerraf estende-se à natureza da contagem, a qual se divide em dois processos distintos. O primeiro, denominado contagem intransitiva (ou “contar sem referência a uma classe” por exemplo; “um, dois, três...”), refere-se ao ato de recitar corretamente a sequência numérica, entendida como uma progressão verbal ordenada. O segundo, a contagem transitiva (ou “contar uma classe” por exemplo; “há três maçãs”), consiste no uso prático dos números para determinar a cardinalidade de um conjunto. Para que esse procedimento seja possível, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto considerado e um subconjunto dos números naturais.

Um ponto técnico fundamental dessa discussão é a exigência de que a relação de ordem R seja, no mínimo, recursiva (BENACERRAF, 1965, p. 362)³³. Benacerraf critica a

³³ Paul Benacerraf defende uma visão estruturalista onde a natureza dos números reside em suas relações dentro de um sistema, e não em propriedades intrínsecas de objetos isolados. Ao exigir a recursividade de R , ele impõe uma restrição epistemológica: para que uma estrutura funcione como sistema numérico, ela deve permitir a

posição de W. V. Quine (1960, p. 262-263)³⁴, segundo a qual qualquer progressão infinita poderia servir de base para os números. O autor argumenta que, caso a relação de ordem não fosse recursiva, seria impossível determinar, em um número finito de passos, qual de dois números é o maior. Sem essa capacidade computacional, tal progressão se tornaria inútil tanto para a contagem prática quanto para a aplicação da matemática na vida humana.

O dilema central da obra emerge quando a narrativa converge para o conflito entre Ernie e Johnny. Embora ambos dominem sistemas que satisfazem plenamente as condições da aritmética, eles divergem quanto à natureza dos conjuntos que constituem os números. Enquanto Ernie adota os ordinais de von Neumann, nos quais o número 3, por exemplo, contém o número 2 como elemento ($2 \in 3$), Johnny segue os ordinais de Zermelo, segundo os quais cada número possui apenas o seu predecessor imediato como elemento, o que implica que $1 \notin 3$.

O argumento central de Benacerraf é que, se os números fossem objetos (conjuntos), sua identificação não poderia ser aleatória. No entanto, o autor demonstra que diferentes sistemas (como os de Ernie e Johnny) funcionam igualmente bem, tornando qualquer escolha arbitrária: "Pois, se o número 3 é de fato algum conjunto particular b , não pode ser que duas explicações corretas do significado de "3" — e, portanto, também de sua referência — atribuam dois conjuntos diferentes a 3." (BENACERRAF, 1965, p. 56, tradução nossa)³⁵.

O autor utiliza as progressões de Ernie (von Neumann) e Johnny (Zermelo) para mostrar que, como os conjuntos resultantes são distintos, eles não podem ambos ser o "número 3", ferindo o princípio da identidade: "[...] Suas respectivas progressões eram (i) $[\emptyset, [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]], [\emptyset, [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]]]]$ para Ernie e (ii) $[\emptyset, [[\emptyset]], [[[\emptyset]]], . . .]$ para Johnny. (BENACERRAF, 1965, p. 55, tradução nossa)³⁶. A consequência lógica dessa divergência é expressa da seguinte forma: "[...] Se, para algum conjunto b , $3 = b$, então não pode ser

distinção de magnitude em passos finitos, garantindo a aplicabilidade da matemática na "contagem transitiva" e na organização da experiência humana. BENACERRAF, op. cit., p. 362.

³⁴ Willard Van Orman Quine, em seu holismo e naturalismo, sustenta que a ontologia matemática é justificada por sua indispensabilidade para a ciência empírica. Para Quine, como a matemática é uma ferramenta na "teia de crenças" para descrever o mundo físico, qualquer progressão infinita que cumpra esse papel funcional é aceitável, o que Benacerraf interpreta como uma negligência em relação às condições computacionais necessárias para a identificação efetiva dos números (QUINE, 1960 apud BENACERRAF, 1965, p. 51-52).

³⁵ **Original em inglês:** "For if the number 3 is in fact some particular set b , it cannot be that two correct accounts of the meaning of '3' — and therefore also of its reference — assign two different sets to 3." (BENACERRAF, 1965, p. 56).

³⁶ **Original em inglês:** "[...] their respective progressions were (i) $[\emptyset, [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]], [\emptyset, [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]]]]$ for Ernie and (ii) $[\emptyset, [[\emptyset]], [[[\emptyset]]], . . .]$ for Johnny." (BENACERRAF, 1965, p. 55).

verdade que, para algum conjunto c diferente de b , $3 = c$." (BENACERRAF, 1965, p. 56, tradução nossa)³⁷.

Além disso, Benacerraf aponta que a redução de números a conjuntos gera disputas sobre propriedades que são puramente da teoria dos conjuntos e irrelevantes para a aritmética, o que ele chama de *junk theorems* ("teoremas inúteis"), evidenciando que os números não são esses conjuntos: "Comparando anotações, eles logo perceberam que algo estava errado, pois imediatamente surgiu uma disputa sobre se 3 pertencia ou não a 17. Ernie disse que sim; Johnny disse que não" (BENACERRAF, 1965, p. 54, tradução nossa)³⁸

A tese de Benacerraf define que um número não é a sua "substância" (ser este ou aquele conjunto), mas sim o papel que ele ocupa dentro de uma estrutura ou sistema de relações, "O que é importante não é a individualidade de cada elemento, mas a estrutura que eles conjuntamente exibem" (BENACERRAF, 1965, p. 69, tradução nossa)³⁹.

Ele complementa essa visão afirmando que objetos não desempenham o papel de números isoladamente, mas sim o sistema como um todo. Portanto, os números não poderiam ser objetos: "'Objetos' não desempenham o papel dos números individualmente; o sistema inteiro desempenha o papel, ou nada o faz. Portanto, argumento [...] que os números não poderiam ser objetos de modo algum" (BENACERRAF, 1965, p. 69, tradução nossa)⁴⁰

Nesse sentido, a essência do número 3 é definida estritamente pela sua posição na progressão, "Ser o número 3 não é nem mais nem menos do que ser precedido por 2, 1 e possivelmente 0, e ser seguido por 4, 5, e assim por diante." (BENACERRAF, 1965, p. 70, tradução nossa)⁴¹.

Ao final, Benacerraf critica a visão de que os números "são" conjuntos, defendendo que a aritmética trata de estruturas abstratas, e não de objetos reais ou conjuntos específicos: "Eles pensam que os números são realmente conjuntos de conjuntos, enquanto, se a verdade

³⁷ **Original em inglês:** "[...] for some set b , $3=b$ then it cannot be true that for some set c , different from b , $3=c$ " (BENACERRAF, 1965, p. 56).

³⁸ **Original em inglês:** "Comparing notes, they soon became aware that something was wrong, for a dispute immediately ensued about whether or not 3 belonged to 17. Ernie said that it did, Johnny that it did not." (BENACERRAF, 1965, p. 54).

³⁹ **Original em inglês:** "[...] what is important is not the individuality of each element but the structure which they jointly exhibit." (BENACERRAF, 1965, p. 69).

⁴⁰ **Original em inglês:** "'Objects' do not do the job of numbers singly; the whole system performs the job or nothing does. I therefore argue [...] that numbers could not be objects at all." (BENACERRAF, 1965, p. 69).

⁴¹ **Original em inglês:** "To be the number 3 is no more and no less than to be preceded by 2, 1, and possibly 0, and to be followed by 4, 5, and so forth." (BENACERRAF, 1965, p. 70).

for dita, não existem tais coisas como números; o que não quer dizer que não haja pelo menos dois números primos entre 15 e 20." (BENACERRAF, 1965, p. 73, tradução nossa).⁴²

Em suma, a história de Ernie e Johnny mostra que a tentativa de transformar números em conjuntos acaba por revelar uma verdade surpreendente: os números não possuem uma "substância" própria. Se diferentes sistemas conseguem explicar a aritmética perfeitamente, mas discordam sobre o que o número 3 "é" (quais elementos ele contém), então a escolha de qualquer um deles é puramente arbitrária. Esse conflito prova que perguntas como " $3 \in 17$ " são ruídos irrelevantes para a matemática real, surgindo apenas como efeitos colaterais de uma tradução forçada. Portanto, esta parte conclui que os números não devem ser vistos como objetos isolados ou conjuntos específicos, mas sim como posições dentro de uma estrutura. Ser o número 3 não é ser este ou aquele conjunto, mas sim ocupar o lugar exato que vem depois do 2 e antes do 4.

2.2 O dilema de Benacerraf: Conflito de referência e identidade

A segunda parte do artigo, intitulada *O Dilema*, inicia-se por volta da página 54 do texto original e explora as consequências filosóficas do encontro entre Ernie e Johnny. Embora ambos concordem integralmente quanto às verdades aritméticas, o conflito emerge quando passam a discutir as propriedades dos números à luz da teoria dos conjuntos. Enquanto Ernie, apoiado na construção de von Neumann, afirma que $3 \in 17$, uma vez que um número contém todos os seus predecessores, Johnny nega essa relação, pois, na estrutura de Zermelo, o número 17 contém exclusivamente o número 16. Essa divergência estende-se também à cardinalidade interna dos numerais: para Ernie, o número n possui exatamente n elementos; para Johnny, todo número, com exceção do zero, é um conjunto unitário, possuindo apenas um elemento.

Essas divergências tornam patente o fenômeno dos chamados "teoremas espúrio" (*junk theorems*). Segundo Benacerraf, trata-se de fatos que são demonstráveis dentro de uma interpretação específica da teoria dos conjuntos, mas que permanecem estranhos e irrelevantes para a aritmética propriamente dita. Questionar quais seriam os elementos que compõem o número 7 pode constituir uma investigação legítima no âmbito da teoria dos conjuntos, mas

⁴² **Original em inglês:** "They think that numbers are really sets of sets while, if the truth be known, there are no such things as numbers; which is not to say that there are not at least two prime numbers between 15 and 20." (BENACERRAF, 1965, p. 73).

carece de sentido para o matemático que opera os números exclusivamente em suas funções aritméticas. *O autor sustenta que tais propriedades são características acidentais da interpretação conjuntista adotada, e não atributos intrínsecos aos números enquanto tais.*

O cerne do dilema reside, assim, na quebra da identidade. Uma vez que tanto o sistema de Ernie quanto o de Johnny satisfazem as condições necessárias e suficientes para representar os números, ambos consistem em progressões recursivas que obedecem aos axiomas de Peano, não havendo qualquer critério matemático que justifique a escolha de um conjunto específico como a representação “verdadeira” do número 3. Diante da existência de infinitas interpretações possíveis, todas funcionalmente equivalentes, a identificação do número com um conjunto particular revela-se arbitrária.

Nesse contexto, Benacerraf questiona a validade de identidades trans-categoriais, tais como “3 = Júlio César” ou “3 = {{{∅}}}”. O autor argumenta que esse tipo de afirmação é semanticamente destituído de sentido, uma vez que a identidade exige condições claras de individuação no interior de uma mesma categoria ontológica. Do mesmo modo que não se pode individuar um objeto físico exclusivamente por propriedades aritméticas, tampouco se pode definir um número com base em propriedades conjuntistas que não pertencem ao domínio da aritmética.

Essa análise prepara o terreno para a conclusão estruturalista do artigo. Segundo Benacerraf, o que define a matemática não são os objetos individuais considerados isoladamente, mas a estrutura que eles exibem em conjunto. Nessa perspectiva, os números não devem ser compreendidos como objetos dotados de propriedades intrínsecas, pois nada possuem além das relações que mantêm com os demais elementos do sistema. Assim, “ser o número 3” significa apenas ocupar a posição de sucessor de 2 e predecessor de 4 em uma progressão abstrata.

2.3 A Tese estruturalista: Os números com posições em uma Estrutura

Na seção final de *What Numbers Could Not Be*, Paul Benacerraf ultrapassa a crítica às construções conjuntistas para formular sua tese central, segundo a qual os números não podem ser compreendidos como objetos independentes. Esse argumento fundamenta-se, primeiramente, em uma crítica contundente às identidades trans-categoriais. Ao retomar o

chamado “Problema de Júlio César”, formulado por Frege⁴³, que questionava se definições lógicas seriam capazes de distinguir o conquistador romano de um número, Benacerraf sustenta que indagações acerca da identidade do número 3 com um conjunto específico são, em última instância, semanticamente destituídas de sentido. Para o autor, a noção de identidade só é operável no interior de categorias que fornecem condições claras de individuação: enquanto os números podem ser distinguidos por propriedades aritméticas, não podem sê-lo por atributos próprios de conjuntos, como a posse de membros, nem por propriedades de objetos físicos, como massa ou extensão, uma vez que tais características são estranhas à categoria numérica.

A partir dessa constatação, Benacerraf estabelece uma distinção decisiva entre explicação e descoberta (BENACERRAF, 1965, p. 68)⁴⁴. Embora autores como W. V. Quine defendam que a redução dos números a conjuntos constitua uma estratégia eficaz para mostrar como objetos já admitidos podem desempenhar o “trabalho” da aritmética (QUINE, 1960, p. 262)⁴⁵, Benacerraf argumenta que tal redução possui apenas um valor instrumental. O fato de que qualquer progressão recursiva satisfaz plenamente os axiomas de Peano demonstra que nenhuma delas detém o privilégio ontológico de ser a sequência numérica. Se a identificação de um número com um conjunto específico fosse uma descoberta acerca de sua natureza real, deveria haver uma razão lógica que justificasse essa escolha; na ausência de tal razão, a identificação revela-se meramente técnica e contingente.

Esse cenário conduz ao que a filosofia contemporânea denomina estruturalismo matemático. Para Benacerraf, o objeto próprio da aritmética não são entidades isoladas, mas sistemas de relações. Sob essa perspectiva, os números não possuem propriedades além daquelas que decorrem de sua posição relativa dentro de uma estrutura. Ser o número 3, portanto, consiste unicamente em ocupar a posição de sucessor de 2 e predecessor de 4 em uma progressão abstrata. Qualquer entidade capaz de desempenhar esse papel satisfaz as exigências da aritmética, mas o numeral em si não designa um objeto, e sim um lugar em uma

⁴³ Essa questão do problema de Júlio César aparece em obra do Frege chamada Os fundamentos da aritmética em 1884. A obra original em alemão intitula-se *Die Grundlagen der Arithmetik*.

⁴⁴ A distinção proposta por Benacerraf refuta a ideia de que a matemática se ocupe de objetos com propriedades intrínsecas. Para o estruturalismo, os números não são entidades isoladas, mas posições em uma estrutura abstrata; logo, qualquer sistema que exiba o padrão de uma progressão aritmética é funcionalmente adequado, o que esvazia a pretensão de “descobrir” qual conjunto seria “o” número real. BENACERRAF, op. cit., p. 66.

⁴⁵ Na perspectiva do holismo e do naturalismo de Quine, a ontologia matemática é validada pela sua utilidade no “navio” da ciência empírica. Quine argumenta que a “explicação” (redução) é bem-sucedida se objetos cujas naturezas são menos questionáveis (como conjuntos) conseguem realizar o papel funcional dos números, ignorando, portanto, o “caráter interno” ou o status ontológico absoluto dessas entidades. QUINE, op. cit., p. 262.

estrutura. Desse modo, a aritmética passa a ser compreendida como a ciência que descreve a forma estrutural comum a todas as progressões possíveis.

Por fim, Benacerraf sugere que a sequência numérica opera de modo análogo a um padrão de medida, como uma régua. No ato de contar, não se estabelece uma correlação entre objetos físicos e entidades abstratas extralinguísticas, mas entre objetos e segmentos de uma notação recursiva. Expressões distintas, como “dois” e “2”, não funcionam como nomes de um mesmo objeto abstrato, mas como símbolos que desempenham a mesma função estrutural. Ao concluir a parábola de Ernie e Johnny, o autor afirma, de modo provocativo, que “não existem tais coisas como números”, entendidos como objetos independentes. Embora a formação matemática de seus personagens tenha sido tecnicamente correta, eles foram filosoficamente induzidos ao erro de supor que os números *são* conjuntos, quando, na realidade, a solidez das verdades aritméticas repousa na integridade da estrutura, e não na substância dos elementos que a compõem.

2.4 O estruturalismo de Benacerraf e o de Shapiro

O estruturalismo na filosofia da matemática define a disciplina como a ciência das estruturas, deslocando o foco da natureza intrínseca de objetos isolados para a análise de padrões e sistemas de relações. Aqui, vamos destacar as perspectivas de Paul Benacerraf e Stewart Shapiro. Embora ambos compartilhem a premissa de que a matemática trata de estruturas, divergem fundamentalmente quanto ao estatuto ontológico dos objetos matemáticos, estabelecendo um debate central entre o eliminativismo e o realismo estrutural.

A contribuição de Paul Benacerraf é frequentemente classificada como um estruturalismo eliminativo ou não-ontológico. Seu argumento seminal fundamenta-se na observação de que a aritmética pode ser reduzida à teoria dos conjuntos de múltiplas formas, porém conflitantes entre si. Benacerraf ilustra que o número 3, por exemplo, pode ser identificado como o conjunto $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ na progressão de Zermelo, ou como $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ na construção de von Neumann.

Na ausência de um critério matemático que determine a primazia de uma definição sobre a outra, Benacerraf conclui que os números não podem ser identificados como conjuntos e, por extensão, não possuem natureza de objetos independentes. Para o autor, qualquer sistema que sustente uma relação de sucessão e satisfaça o Princípio de Indução Matemática é funcionalmente equivalente aos números naturais. O que define a aritmética, portanto, não são os itens individuais que ocupam as posições, mas as propriedades

relacionais do sistema como um todo. Nesse sentido, os números perdem sua existência isolada para tornarem-se apenas "lugares" em uma estrutura.

Em contrapartida, Stewart Shapiro propõe o estruturalismo *ante rem*, uma vertente de realismo ontológico. Shapiro utiliza a analogia de organizações sociais ou jogos para elucidar sua tese: as posições em uma estrutura matemática assemelham-se a cargos ou funções (como "tesoureiro" ou "presidente") que possuem existência lógica e formal independentemente dos indivíduos que os ocupam em um dado momento (SHAPIRO, 2015, p. 368, 370-372).

Enquanto Benacerraf reduz o número a um papel funcional desempenhado em diversos sistemas, Shapiro argumenta que a estrutura existe por direito próprio, precedendo qualquer exemplificação concreta. Para Shapiro, o número 2 é um objeto legítimo, definido como a "segunda posição" na estrutura abstrata dos números naturais. O autor rejeita a tese de que a multiplicidade de reduções elimine a objetividade dos números; para ele, questionar se o número 2 é "realmente" o conjunto de Zermelo ou de von Neumann é um equívoco categorial, pois as identidades entre objetos de estruturas distintas não carecem de uma resposta definitiva.

A divergência entre as teses de Paul Benacerraf e Stewart Shapiro não é meramente terminológica, mas reflete divisões profundas sobre a fundamentação da matemática. Essa distinção pode ser sintetizada em quatro eixos fundamentais. Benacerraf sustenta uma postura anti-realista, argumentando que a validade e a verdade da aritmética não dependem da existência de uma ontologia de objetos matemáticos particulares. Em oposição, Shapiro adota o realismo estrutural, afirmando que as estruturas matemáticas e as posições que as compõem possuem uma existência objetiva e independente da mente humana ou de exemplificações físicas⁴⁶.

Para Benacerraf, o fato de um número poder ser reduzido a diferentes conjuntos sem um critério de escolha único (indeterminação) constitui uma prova de que os números não são objetos. Shapiro, contudo, resolve esse impasse através do vínculo estrutural: ele defende que os objetos matemáticos estão "presos" às suas estruturas de origem. Assim, questões sobre a identidade de um número em relação a conjuntos de diferentes sistemas são consideradas

⁴⁶ Esta posição, especificamente denominada estruturalismo *ante rem*, sustenta que as estruturas matemáticas possuem uma primazia ontológica, existindo de forma abstrata e eterna antes mesmo de qualquer sistema físico ou mental as exemplificar. Para Shapiro, a matemática é a "ciência das estruturas", e seus objetos (como os números) são definidos puramente por suas posições e relações dentro de um padrão, não possuindo uma composição interna ou natureza intrínseca fora desse contexto. Ao adotar a perspectiva de que "posições-são-objetos", o autor utiliza a analogia de organizações sociais para explicar que os números funcionam como "cargos" (como o de vice-presidente), que têm existência lógica e formal garantida pela estrutura organizacional, independentemente dos "funcionários" (sejam eles conjuntos de Zermelo, de von Neumann ou objetos físicos) que venham a preenchê-los (SHAPIRO, 2015, p. 368, 370-378).

triviais ou desprovidas de sentido metafísico.

A distinção reside na classificação entre o estruturalismo *in re* e o *ante rem*. No modelo eliminativo de Benacerraf (*in re*), a estrutura é entendida como uma generalização ou um esquema aplicável a sistemas existentes ou possíveis. Já no modelo de Shapiro (*ante rem*), a estrutura possui primazia ontológica, existindo como uma forma abstrata eterna que precede qualquer sistema que venha a instanciá-la.

No plano da linguagem, Shapiro argumenta que o discurso matemático reflete a realidade das estruturas ao tratar números como nomes próprios (posições-como-objetos). Benacerraf, por outro lado, propõe uma interpretação funcionalista, onde os termos numéricos funcionam como generalizações sobre papéis ocupados em um sistema (posições-como-cargos), sem referência a entidades singulares⁴⁷.

Em suma, as duas visões representam os polos da discussão estruturalista contemporânea. Enquanto Benacerraf utiliza a estrutura como ferramenta para eliminar a necessidade de objetos matemáticos autônomos, Shapiro a utiliza como o fundamento necessário para estabelecer a existência desses mesmos objetos como posições perenes em padrões abstratos.

⁴⁷ Esta distinção entre as perspectivas linguísticas é fundamental para diferenciar o estruturalismo *ante rem* de Shapiro das versões eliminativas ou *in re*, frequentemente associadas a Benacerraf. Shapiro (2015, p. 376) defende que, na matemática pura, adotamos a orientação posições-são-objetos, tratando termos numéricos como nomes próprios (termos singulares) que denotam lugares específicos em uma estrutura abstrata, conferindo-lhes o estatuto de objetos *bona fide*.

Por outro lado, a visão de Benacerraf é interpretada como um estruturalismo eliminativo, no qual não se admite a existência de objetos matemáticos independentes; nela, a aritmética é vista como a "elaboração das propriedades de todos os sistemas do tipo de ordem dos números". Nessa perspectiva, os números são tratados sob a ótica de posições-são-cargos, funcionando como generalizações sobre papéis que podem ser ocupados por diferentes conjuntos em sistemas variados, o que permite ao matemático falar de "números" sem se comprometer com uma ontologia de entidades singulares. Assim, enquanto para Shapiro a gramática matemática revela a realidade objetiva das posições estruturais, para Benacerraf ela é um recurso para descrever padrões comuns a múltiplos sistemas possíveis (SHAPIRO, 2015, p. 376-380).

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estas considerações finais sintetizam os principais pontos discutidos ao longo deste trabalho, que investigou a ontologia dos objetos matemáticos partindo da fundamentação da Teoria de Conjuntos (ZFC) até alcançar a perspectiva estruturalista proposta por Paul Benacerraf. O percurso iniciou-se com a análise da formalização axiomática necessária para evitar paradoxos lógicos e culminou na compreensão dos números não como objetos isolados, mas como posições em uma estrutura.

No primeiro subcapítulo do primeiro capítulo, estabeleceu-se a necessidade de uma abordagem axiomática para a teoria de conjuntos, definindo-os inicialmente de forma intuitiva como coleções de objetos. Foi demonstrado que conjuntos podem ser caracterizados tanto por sua extensão (listagem de elementos) quanto por sua intenção (propriedade comum), mas que a falta de rigor nessa definição pode levar a sérios problemas teóricos. O ponto central daquela seção foi a discussão sobre o Axioma da Compreensão Ingênuo, que permitia que qualquer propriedade definisse um conjunto. Através da apresentação do Paradoxo de Russell, ficou evidenciado que essa liberdade irrestrita gera contradições lógicas insuportáveis, como o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos, que pertence a si mesmo se, e somente se, não pertencer.

Dessa forma, concluiu-se que a formalização através do sistema ZFC é essencial para garantir a consistência interna da matemática. A solução proposta por Zermelo e Fraenkel consiste em impor restrições e mecanismos de controle na associação de propriedades a conjuntos, substituindo a intuição por um sistema de axiomas que define rigorosamente quais conjuntos podem existir.

Na seção seguinte, foram detalhados os pilares do sistema ZFC, começando pelos axiomas de existência, como o Axioma do Conjunto Vazio, que fornece a base ontológica primária para a construção de toda a teoria a partir do "nada". O Axioma da Extensionalidade complementa essa base ao determinar que a identidade de um conjunto é definida exclusivamente por seus elementos, garantindo a unicidade do vazio.

Os axiomas de construção, como os do Par, da União e das Partes, foram explicados como ferramentas que permitem gerar novos conjuntos a partir de existentes. Destacou-se o papel do Esquema de Axiomas da Separação, que resolve o Paradoxo de Russell ao exigir que a seleção de elementos por uma propriedade ocorra apenas dentro de um conjunto já estabelecido, impedindo a formação de totalidades inconsistentes.

Ao final, enfatizou-se que, no paradigma ZFC, "tudo é conjunto", eliminando a necessidade de objetos primitivos ou urelements. Essa unificação permite que toda a complexidade matemática, incluindo funções e relações, seja interpretada dentro de um único arcabouço formal, onde a distinção entre "elemento" e "conjunto" é meramente didática.

A discussão sobre os números naturais iniciou-se com a distinção fundamental entre o número em si e sua representação simbólica (numerais), utilizando a terminologia de Frege sobre sentido e referência. A estratégia adotada foi a internalização dos números na teoria de conjuntos, utilizando a construção de von Neumann, onde o zero é o conjunto vazio e cada sucessor é o conjunto de todos os seus antecessores.

Para formalizar a sequência infinita dos naturais, introduziu-se o conceito de conjunto indutivo, que contém o vazio e é fechado para a operação de sucessor. A existência de tais conjuntos é garantida pelo Axioma do Infinito, que permite à matemática tratar o infinito como uma realidade atual e completa, e não apenas como um processo potencial de crescimento.

A seção concluiu com a definição do conjunto Ômega (ω) ou $\mathbb{N}$, que é a coleção de todos os números naturais obtida pela interseção de todos os conjuntos indutivos. Essa construção prova que a teoria de conjuntos oferece uma resposta rigorosa à natureza dos números, permitindo que propriedades numéricas sejam derivadas diretamente de relações de pertinência e inclusão.

Na distinção técnica fundamental entre Zermelo e von Neumann, esta subseção analisou as diferenças entre as propostas de Ernst Zermelo e John von Neumann para a construção dos naturais. Enquanto Zermelo define o sucessor como o unitário do número anterior ($s(n) = \{n\}$), gerando conjuntos com apenas um elemento, von Neumann utiliza a união cumulativa ($s(n) = n \cup \{n\}$), onde cada número n possui exatamente n elementos.

Foi demonstrado que ambas as construções satisfazem os Axiomas de Peano e sustentam perfeitamente a prática aritmética, mas divergem em propriedades puramente conjuntistas. Essas divergências dão origem aos "teoremas espúrios" (*junk theorems*), como a questão de se o número 3 pertence ao número 17, uma afirmação que é verdadeira para von Neumann, mas falsa para Zermelo.

A conclusão desta análise técnica é que a identificação dos números com conjuntos específicos é arbitrária, pois não há critério matemático para preferir um sistema sobre o outro. Isso sustenta a tese de que os números não possuem propriedades intrínsecas além daquelas derivadas de sua posição em uma estrutura progressiva.

A análise do artigo de Paul Benacerraf começou com a parábola de Ernie e Johnny, que aprenderam aritmética através de modelos de conjuntos diferentes. O conflito surge quando eles percebem que, embora concordem sobre somas e multiplicações, divergem irremediavelmente sobre a "constituição interna" dos números, como se "3 pertence a 17".

O Dilema de Benacerraf reside no fato de que, se o número 3 fosse de fato um objeto (um conjunto específico), deveria haver uma explicação única e não arbitrária para sua identidade. Como infinitas progressões podem realizar o trabalho da aritmética igualmente bem, a redução de números a objetos específicos revela-se um equívoco filosófico que fere o princípio da identidade.

Benacerraf argumenta que as propriedades conflitantes são subprodutos da interpretação adotada e irrelevantes para a matemática real. O numeral não designa um objeto com "substância", mas sim um lugar funcional em um sistema, comparável a uma peça de xadrez ou a um cargo, cuja identidade depende estritamente de suas relações com os outros elementos.

Na seção seguinte, explorou-se a crítica de Benacerraf às identidades trans-categoriais, como a tentativa de dizer que "3 = Júlio César" ou que "3 = {{{∅}}}". O autor sustenta que tais afirmações são semanticamente destituídas de sentido, pois a identidade só funciona dentro de categorias que fornecem condições claras de individuação.

A distinção entre explicação e descoberta foi fundamental: reduzir números a conjuntos é uma ferramenta instrumental útil (explicação), mas não significa que descobrimos a "natureza real" dos números como sendo conjuntos. A aritmética é, portanto, redefinida como a ciência que descreve a forma estrutural comum a todas as progressões possíveis, e não o estudo de entidades isoladas.

A tese culmina na afirmação provocativa de que "não existem tais coisas como números" entendidos como objetos independentes. Para Benacerraf, a solidez das verdades matemáticas não repousa na substância dos elementos, mas na integridade da estrutura; o número 3 é simplesmente o que vem após o 2 e antes do 4 em qualquer sistema que exiba o padrão correto.

A seção final comparou o estruturalismo eliminativo de Benacerraf com o estruturalismo *ante rem* de Stewart Shapiro. Enquanto Benacerraf utiliza a estrutura para eliminar a necessidade de objetos matemáticos autônomos (visão *in re*), Shapiro defende que as estruturas possuem existência objetiva e precedem qualquer exemplificação concreta.

Para Shapiro, o número 2 é um objeto real definido como a "segunda posição" na estrutura abstrata, tratando as posições como lugares-como-objetos. Já para Benacerraf, os

números são lugares-como-cargos, termos que funcionam como generalizações sobre papéis ocupados em diferentes sistemas, sem referência a entidades singulares perenes.

Apesar das divergências ontológicas, ambas as visões concordam que o foco da matemática deve estar nos padrões e relações. O trabalho encerra demonstrando que o debate contemporâneo sobre a existência dos números foi profundamente transformado pelo dilema de Benacerraf, consolidando o estruturalismo como uma resposta poderosa aos problemas de identidade e referência na filosofia da matemática.

REFERÊNCIAS

- BENACERRAF, P. What numbers could not be? *The Philosophical Review*, [s. l.], v. 74, n. 1, 1965, p. 47-73.
- FAJARDO, R. A. d. S. *A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2025.
- GUIMARAENS, A. de. *Obra completa*. Rio de Janeiro: J. Aguilar, 1960. (Biblioteca luso-brasileira. Série brasileira, 20). Introdução de Eduardo Portella. Notas biográficas de João Alphonsus.
- HAMKINS, J. D. *Lectures on the Philosophy of Mathematics*. Cambridge, MA: MIT Press, 2021.
- IMAGUIRE, G. What is the problem of universals about? *Philosophica: International Journal for the History of Philosophy*, Lisboa, v. 30, n. 59, 2022, p. 113-131. Disponível em: [[philosophica_2022_0999_9_13_5.pdf](#)]. Acesso em: 8 Maio. 2025.
- MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Unesp, 2016.
- SHAPIRO, S. *Filosofia da matemática*. Lisboa: Edições 70, 2015.
- SUPPES, P. *Axiomatic set theory*. Mineola, NY: Courier Corporation, 2012.